

GRAFLAR VE KROMATİK POLİNOMLAR

UTKUM ŞANLI



T. C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLAR VE KROMATİK POLİNOMLAR

Utkum ŞANLI

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2015

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Utkum ŞANLI tarafından hazırlanan ‘‘Graflar ve Kromatik Polinomlar’’ adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Üye: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Basri ÇELİK İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŐ İmza
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

11/08/2015

İmza

Utkum ŞANLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAFLAR VE KROMATİK POLİNOMLAR

Utkum ŞANLI

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu çalışmanın amacı çeşitli graf türlerini hatırlamak, grafların kromatik sayılarını ve kromatik polinomlarını hesaplamak, bu hesaplamaları yaparken kullanılacak kısa yollar elde etmektir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. Graf tanımı, tarihçesi, temel kavramlar, kullanım alanları, çeşitli graflar ve özellikleri verilmiştir. Bu bilgiler, bu tez boyunca kullanılacaktır. İkinci bölümde grafların renklendirilmesi ve bu renklendirme için kullanılacak hesaplamalar verilmiştir. Üçüncü bölümde önceki bölümde verilen graflarda renklendirme hesaplamaları için grafları küçültme yolları verilmiştir. Bu bölümde verilen tüm sonuçlar bu tez çalışmasında elde edilmiş orijinal sonuçlardır.

Anahtar Kelimeler: Graf, renklendirme, kromatik sayı, kromatik polinom
2015, ix + 66 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

GRAPHS AND CHROMATIC POLYNOMIALS

Utkum ŞANLI

Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL (Uludag University)

The main aim of this work is to recall several graph types, to calculate chromatic numbers and chromatic polynomials corresponding to these graphs, and to find some better and faster methods to calculate chromatic polynomials.

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, the fundamental definitions and results are recalled. Definition of graph and related notions, some brief history of graph theory, applications of graph theory, several graph types and their related properties are given. In the second chapter, colouring of graphs and some calculations used for this operation are given. In the third chapter, some new deletion results are given to help finding an easier method to calculate chromatic polynomial of a given graph. All the results obtained in this chapter are original results obtained in this thesis.

Key Words: Graph, graph colouring, chromatic number, chromatic polynomial

2015, ix + 66 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yaptığı mesleğin adını sonuna kadar doldurabilen, danışmanım olmasından öte, öğretenim olduğu için çok şanslı olduğumu bildiğim, eline kalemi alıp derslerde ve tezimde, ayrıca başım sıkıştığında ders dışında da yardımını hiç esirgemedi destek olan, “hedef” koyduran, benim için akademisyenliğin en güzel örneği, değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci Cangül’e,

Eğitim ve öğretim hayatım boyunca “emek” kelimesini bana öğreten, Atatürk ve vatan sevgimin mimarı, bu ve bundan önceki tüm çalışmalarımda bir şeye ihtiyacım olur diye hep yanımda bekleyen, benimle gurur duyması için daha çok çalıştığım, varlığı yeten, ilk öğretmenim ve ömür boyu yol arkadaşım anneme,

Sonsuz teşekkürlerimle...

Utkum ŞANLI

11/08/2015

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1. Giriş ve Temel Kavramlar	3
1.2. Graflarda Köşe ve Kenar Silme ve İki Köşeyi Büzme İşlemleri	10
2. GRAFLARIN RENKLENDİRİLMESİ	12
2.1. Kromatik Sayı	12
2.2. Dört Renk Problemi	17
2.3. Kromatik Polinomlar	18
3. GRAFLARIN KÜÇÜLTME YOLLAR	35
3.1. Giriş	35
3.2. Örnekler	56
3.3. Kromatik Polinomlar Arasında Geçiş	60
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	66

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
G	Graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$\deg(v)$	v köşesinin derecesi
Δ_G	G grafının maksimum derecesi
δ_G	G grafının minimum derecesi
\bar{G}	G grafının tümleyeni (complement)
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir grafi
P_n	n köşeli yol grafi
S_n	n köşeli yıldız graf
T_n	n köşeli ağaç graf
$K_{r,s}$	İki parçalı tam graf
$T_{r,s}$	Larva graf
$\chi(G)$	G grafının köşelerini boyamak için gerekli en az renk sayısı
$\mathcal{C}_G(k)$	G grafi için k tane renk kullanarak elde edilebilecek renklendirme sayısı
\amalg	Grafların ayrık birleşimi
$G-e$	Graftan kenar silme işlemi
G/e	Grafta kenar büzme işlemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Königsberg'in Yedi Köprüsü	1
Şekil 1.2. Königsberg Çizgesi	2
Şekil 1.3. 5 köşe ve 7 kenarlı bir graf örneği	3
Şekil 1.4. Çoklu graf	4
Şekil 1.5. Döngü içeren graf örneği	4
Şekil 1.6. G grafi ve tümleyeni	6
Şekil 1.7. E_4 boş grafi	6
Şekil 1.8. P_6 patika grafi	6
Şekil 1.9. K_5 tam grafi	7
Şekil 1.10. C_6 devir grafi	7
Şekil 1.11. $T_{3,3}$ larva grafi	8
Şekil 1.12. $K_{4,3}$ iki parçalı tam graf	8
Şekil 1.13. S_6 yıldız grafi	9
Şekil 1.14. $T_{3,2}$ ağaç grafi	9
Şekil 1.15. Köprü	10
Şekil 1.16. G-d grafi	10
Şekil 1.17. G-ed grafi	11
Şekil 1.18. G/ed grafi	11
Şekil 2.1. C_6 grafi	12
Şekil 2.2. Çeşitli graflar için renklendirmeler	13
Şekil 2.3. E_5 grafinin renklendirilmesi	14
Şekil 2.4. P_7 grafinin renklendirilmesi	14
Şekil 2.5. C_5 ve C_6 graflarının renklendirilmesi	14
Şekil 2.6. S_6 grafinin renklendirilmesi	15
Şekil 2.7. K_5 tam grafinin renklendirilmesi	15
Şekil 2.8. $K_{4,3}$ grafinin renklendirilmesi	16

Şekil 2.9. $T_{5,3}$ grafının renklendirilmesi	16
Şekil 2.10. Dört renk kullanılarak renklendirilmiş dünya haritası	18
Şekil 2.11. Aynı grafın iki farklı renklendirmesi	18
Şekil 2.12. P_n grafi	20
Şekil 2.13. P_n-e_1 grafi	20
Şekil 2.14. P_n/e_1 grafi	21
Şekil 2.15. $C_{P4}-e_1$ grafi	21
Şekil 2.16. C_{P4}/e_1 grafi	21
Şekil 2.17. $G_{11}-e_2$ ve G_{11}/e_2 grafları	22
Şekil 2.18. $G_{12}-e_2$ ve G_{12}/e_2 grafları	22
Şekil 2.19. (1.1) bağıntısında elde edilen şekiller	22
Şekil 2.20. Sırasıyla T_6 , T_6-e_1 , T_6/e_1 grafları	23
Şekil 2.21. Sırasıyla $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları	24
Şekil 2.22. Sırasıyla S_4 , S_4-e_1 (G_{11}), S_4/e_1 (G_{12}) grafları	25
Şekil 2.23. Sırasıyla $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları	25
Şekil 2.24. (1.1) bağıntısında elde edilen şekiller	26
Şekil 2.25. Döngü içeren G grafi	26
Şekil 2.26. $G-e$ ve G/e grafları	27
Şekil 2.27. $T_{4,3}$ graf	27
Şekil 2.28. Sırasıyla $T_{4,3}-e_1$ ve $T_{4,3}/e_1$	27
Şekil 2.29. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları	28
Şekil 2.30. $G_{24}-e_3$ ve G_{24}/e_3 grafları	28
Şekil 2.31. C_4 , C_4-e_1 , C_4/e_1 grafları	30
Şekil 2.32. C_3 , C_3-e_2 , C_3/e_2 grafları	31
Şekil 2.33. $G_{21}-e_3$ ve G_{21}/e_3 grafları	31
Şekil 2.34. G grafi	32
Şekil 2.35. $G-e_1$ ve G/e_1 grafları	33
Şekil 2.36. $K_{1,3}$, $K_{1,3}-e_1$, $K_{1,3}/e_1$ grafları	33
Şekil 2.37. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları	34
Şekil 3.1. G grafi	36
Şekil 3.2. $G-e_1$ ve G/e_1 grafları	36
Şekil 3.3. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları	37

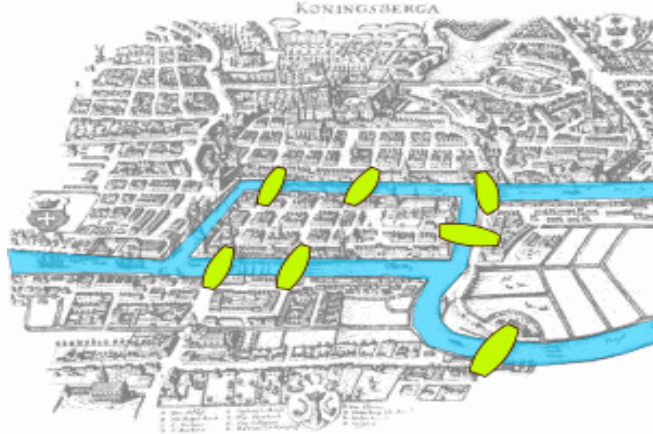
Şekil 3.4. G grafi	38
Şekil 3.5. $G-e_1$ ve G/e_1 grafları	38
Şekil 3.6. G grafi	39
Şekil 3.7. $G-e_1$ ve G/e_1 grafları	39
Şekil 3.8. P_4 grafi	40
Şekil 3.9. P_4-e_1 ve P_4/e_1 grafları	40
Şekil 3.10. P_4-e_2 ve P_4/e_2 grafları	41
Şekil 3.11. P_4-e_3 ve P_4/e_3 grafları	41
Şekil 3.12. $T_{3,2}$ grafi	42
Şekil 3.13. $T_{3,2}-e_1$ ve $T_{3,2}/e_1$ grafları	42
Şekil 3.14. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları	43
Şekil 3.15. $G_{11}-e_3$, G_{11}/e_3 , $G_{12}-e_3$, G_{12}/e_3 grafları	43
Şekil 3.16. $T_{3,1}$, $T_{3,1}-e_1$, $T_{3,1}/e_1$ grafları	44
Şekil 3.17. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_3$, G_{12}/e_3 grafları	45
Şekil 3.18. G grafi	46
Şekil 3.19. G^* grafi	46
Şekil 3.20. $T_{3,2}$ grafi	47
Şekil 3.21. G grafi	47
Şekil 3.22. G grafi	49
Şekil 3.23. $G-e_1$, G/e_1 grafları	49
Şekil 3.24. P_n grafinin e kenarından ayrılması	50
Şekil 3.25. G grafinin ayrılması	51
Şekil 3.26. G grafinin belirtilen köşeden ayrılması	52
Şekil 3.27. Bağlantısız S_m ve S_n grafları	52
Şekil 3.28. Bir kenarı boyunca ayrılan G grafi	53
Şekil 3.29. G grafi	54
Şekil 3.30. $G-e_2$ ve G/e_2 grafları	54
Şekil 3.31. $G_{12}-e_1$ ve G_{12}/e_1 grafları	55
Şekil 3.32. $G^* = C_3 \amalg C_4$ grafi	56
Şekil 3.33. G grafi	57
Şekil 3.34. G grafinin küçültülmesi	57
Şekil 3.35. G grafi	58

Şekil 3.36. G grafinın küçültülmesi	58
Şekil 3.37. G grafi	59
Şekil 3.38. G grafinın küçültülmesi	59

1. GİRİŞ

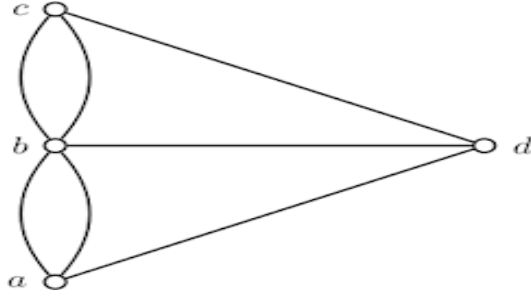
Graf teori (çizge kuramı) grafları inceleyen matematik dalıdır. Bir graf basitçe köşeler ve bu köşeleri birbirine bağlayan kenarlardan oluşan bir tür ağ yapısıdır.

Leonhard Euler tarafından 1736 yılında yazılan bir makale graf teorisinin kesin başlangıcı olarak kabul edilir. Bu makaledeki esas fikir “*Königsberg’in yedi köprüsü*” olarak bilinen problemdir. Problem, Königsberg adlı dört kara parçasından oluşan bir şehirde bu dört kara parçasını birbirine bağlayan yedi adet köprünün özel bir şekilde dolaşılıp dolaşılmayacağı hakkındadır.



Şekil 1.1. Königsberg’in Yedi Köprüsü

Problem tam olarak; herhangi bir noktadan başlayarak ve yedi köprüyü sadece birer kez kullanarak tam bir tur gerçekleştirilebilir mi şeklindedir. Bu problem bir çizelge ile temsil edilmek istenirse Şekil 1.2’deki çizelge oluşturulabilir.



Şekil 1.2. Königsberg Çizelgesi

Euler bu problemin çözümünün olmadığını göstermiştir. Şehirleri köşeler ve köprüleri de kenarlar olarak kabul edelim. Her bir köşeye bağlanan kenar sayısı o köşenin derecesi olarak tanımlansın. Bir köşe başlangıç veya bitiş köşesi değilse o köşeye gelindiğinde turun tamamlanabilmesi için o köşeden ayrılmak da gerekecektir. Dolayısıyla geçilen köşeler çift dereceli olmalıdır. Buna göre tek dereceli köşe sayısı ikiden (başlangıç ve bitiş) fazla ise bu tur tamamlanamayacaktır. Turun sonunda başlangıç noktasına dönülebilmesi içinse bütün köşeler çift dereceli olmalıdır. Yani bu problemin cevabı, bütün köprülerden bir ve yalnız bir kez geçmek koşulu ile tam bir tur yapılamayacağı şeklindedir.

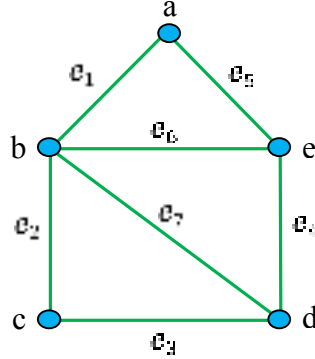
Grafların çok sayıda uygulama alanları vardır. Özellikle bazılarını sayacak olursak, graflar fizik, biyoloji, sosyal ve bilgi sistemlerindeki işleyişleri ve ilişkileri modellemek için kullanılabilir. Bilgisayar biliminde iletişim ağlarını, bilgi organizasyonunu, hesaplama akışını vb. temsil ederler. Devre çözümlemesinde devreyi oluşturan öğelerin aralarındaki bağlantıların matematiksel olarak ifade edilmelerini kolaylaştırırlar.

Graf teori ayrıca fizik ve kimyada molekülleri çalışmak için de kullanılır. Kimyasal graf teori, matematiksel kimya alanının kimyasal grafların çalışılmasıyla ilgilenen dalıdır. Kimyasal graflar, atomların grafın köşelerini ve kimyasal bağların grafın kenarlarını temsil ettiği molekül modelleridir. Bu modellerde her köşenin derecesi en çok 4 olabilmektedir. Kimyasal graf teorisinin temel fikri; moleküllerin fiziko-kimyasal özelliklerinin karşılık gelen kimyasal graflardaki şifrelenmiş bilgileri kullanarak çalışılabilmesine dayanır.

Bu bölümde çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılacak ve özellikler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için Harris, J.M. ve ark., *Combinatorics and Graph Theory*, Brown, J. ve ark. *New bounds for chromatic polynomials and chromatic roots* incelenebilir.

1.1 Giriş ve Temel Kavramlar

1.1 Tanım. V , elemanları *köşeler* olarak isimlendirilen boş olmayan sonlu bir küme ve E , V kümesinin ayrık köşelerinin sıralı olmayan ikililerinin bir kümesi olmak üzere $G=(V,E)$ sıralı ikilisine *graf* denilir. $a, b \in V$ olmak üzere her bir $\{a, b\} \in E$ elemanına *kenar* adı verilir ve bu kenar a ve b köşelerini *birleştirir* denir. Bir G grafının V köşe kümesi aynı zamanda $V(G)$ ile kenar kümesi ise $E(G)$ ile gösterilir. Köşelerin kümesi $V(G)=\{a, b, c, d, e\}$ gibi tek harflerle temsil edilirken, $E(G)=\{ab, bc, ae\}$ veya $E(G)=\{\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,e\}\}$ gibi herhangi iki köşenin simgeleri beraber kullanılarak temsil edilir. İlerleyen bölümlerde kenar adlandırmalarında e, e_1, e_2 gibi semboller de kullanılacaktır.

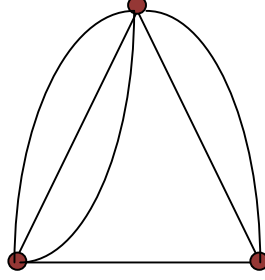


Şekil 1.3. 5 köşe ve 7 kenarlı bir graf örneği

Şekil 1.3'de verilen G grafının köşe kümesi $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ 'dir.

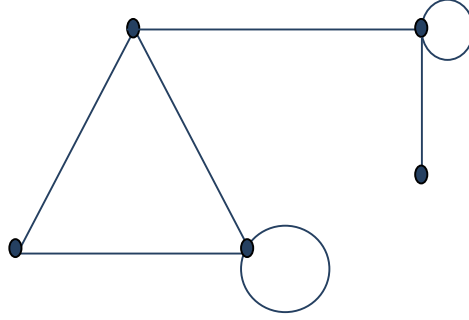
1.2 Tanım. Her bir kenarın bir yöne sahip olduğu graflara *yönlü graf* (directed graph ya da kısaca digraph) denir.

1.3 Tanım. İki köşeyi birbirine bağlayan birden fazla kenar varsa bu kenarlara çoklu kenar, çoklu kenarlar içeren graflara da *çoklu graf* (multigraph) adı verilir.



Şekil 1.4. Çoklu graf

1.4 Tanım. Bir köşeyi kendisine birleştiren bir kenara *döngü* (loop) denir.



Şekil 1.5. Döngü içeren graf örneği

Şekil 1.5'deki graf iki adet döngü içermektedir.

Köşelerin kümesinin $V(G)$, kenarların kümesinin $E(G)$ ile gösterildiğini hatırlayalım. Bundan sonraki bölümlerde, bir kenarı belirtmek için kullanılan $\{u,v\}$ gösterimi yerine kısaca uv ifadesi kullanılacaktır.

1.5 Tanım. u ve v köşeleri için $uv \in E(G)$ ise u ve v köşeleri *komşudur* denir. Bir e kenarının köşelerinden biri v ise v köşesi e kenarına *bitişiktir* denir.

1.6 Tanım. Tek parçadan oluşan bir grafa *bağlantılı graf*, birden çok parçadan oluşan grafa *bağlantısız graf* denilir.

1.7 Tanım. Bir grafta herhangi bir v köşesinin bitişik olduğu kenar sayısına v köşesinin *derecesi* denir ve $deg(v)$ ile gösterilir.

Örneğin Şekil 1.3’de $deg(e)=3$, $deg(b)=4$, $deg(a)=2$ ’dir.

1.8 Tanım. Bir G grafindaki derecelerin en büyük olanına G grafinın *maksimum derecesi* denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir:

$$\Delta(G) = \max\{deg(v) | v \in G\}$$

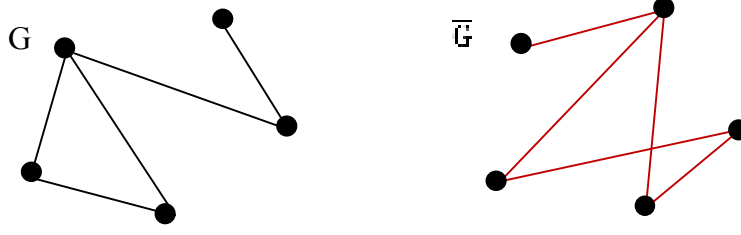
Benzer şekilde en küçük dereceye de *minimum derece* denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir:

$$\delta(G) = \min\{deg(v) | v \in G\}$$

Örneğin Şekil 1.3 ’deki G grafinda, $\Delta(G) = 4$ ve $\delta(G) = 2$ ’dir.

1.9 Tanım. Bir G grafinda tüm köşelerin dereceleri eşit ise G grafinın *düzenli graf* (regular graph) denir.

1.10 Tanım. Bir G grafiyle aynı köşe kümesine sahip ve G grafinda kenar oluşturmayan tüm köşelerin birleştirilmesiyle elde edilen kenar kümesine sahip olan grafa G grafinın *tümleyeni* (complement) denir ve bu yeni graf \bar{G} ile gösterilir.



Şekil 1.6. G grafi ve tümleyeni

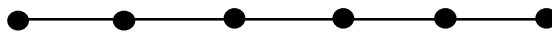
1.11 Tanım. Kenarı bulunmayan, sadece köşelerden oluşan graflara *boş* (null) *graf* adı verilir ve n köşeli bir boş graf E_n ile gösterilir.



Şekil 1.7. E_4 boş grafi

1.12 Tanım. Bir G grafında farklı olması gerekmeyen $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ köşe dizisi için $v_i v_{i+1} \in E(G)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k-1$) olacak şekilde kenarların oluşturduğu bir yapıya *yol* (walk) denir. Bir yoldaki köşelerin tümü birbirinden farklıysa bu yola *patika* (path) denir. Eğer bir yolun tüm kenarları farklı ise *iz* (trail) olarak tanımlanır.

Tanımlardan hareketle her patika bir izdir ancak her iz bir patika olmak zorunda değildir sonucuna varılır. Başladığı köşede biten patikalara *kapalı patika* (cycle), benzer şekilde aynı köşede başlayıp biten izlere *kapalı iz* (circuit) denir.

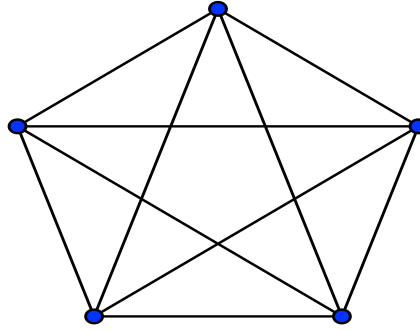


Şekil 1.8. P_5 patikası

P_n patikası n tane köşe ve $n-1$ tane kenar içerir.

1.13 Tanım. Bir grafın tüm köşeleri diğer tüm köşelerle komşu ise grafa *tam* (complete) graf adı verilir. n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir.

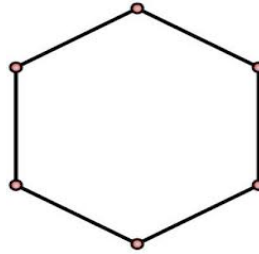
Örneğin Şekil 1.9'da verilen G grafı beş köşeli K_5 tam grafıdır.



Şekil 1.9. K_5 tam grafı

K_n grafı n tane köşe ve $\frac{n(n-1)}{2}$ tane kenar içerir.

1.14 Tanım. Tek bir devirden oluşan bir grafa *devir grafı* (cycle) denilir. n köşeli bir devir grafı C_n ile gösterilir.

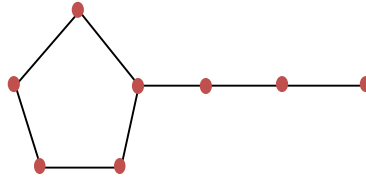


Şekil 1.10. C_6 devir grafı

C_n grafı n tane köşe ve n tane kenar içerir.

1.15 Tanım. C_n devir grafının bir köşesine P_m patikasının eklenmesiyle oluşturulan grafa *larva graf* (tadpole graph) denir. $T_{n,m}$ ile gösterilir.

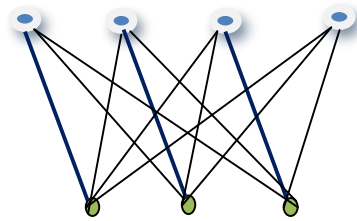
Örneğin Şekil 1.11’de verilen G grafi C_5 devir grafının ve P_3 patikasının birleştirilmesi ile oluşturulmuş $T_{5,3}$ larva graftır.



Şekil 1.11. $T_{5,3}$ larva grafi

$T_{n,m}$ larva grafi $m+n$ köşe ve aynı sayıda kenardan oluşur.

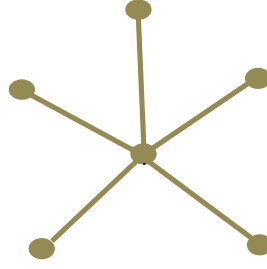
1.16 Tanım. Köşe kümesi A ve B gibi iki parçaya ayrılabilen ve her bir kenarı A ’daki bir köşeyi B ’deki herhangi bir köşeye birleştiren graflara *iki parçalı graf* (bipartite graph) denilir. Eğer bir iki parçalı grafta A ’nın her bir köşesi B ’nin her bir köşesiyle birleştirilmişse grafa *iki parçalı tam graf* (complete bipartite graph) denir ve A , r köşeye B , s köşeye sahipse böyle bir graf $K_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 1.12. $K_{1,3}$ iki parçalı tam graf

Örneğin yukarıda verilen graf $K_{1,3}$ grafidir. $K_{r,s}$ iki parçalı tam grafında $r+s$ adet köşe, $r.s$ adet kenar bulunur.

1.17 Tanım. $K_{1,n-1}$ şeklindeki bir grafa *yıldız (star) graf* adı verilir ve n köşeli bir yıldız graf S_n ile gösterilir.

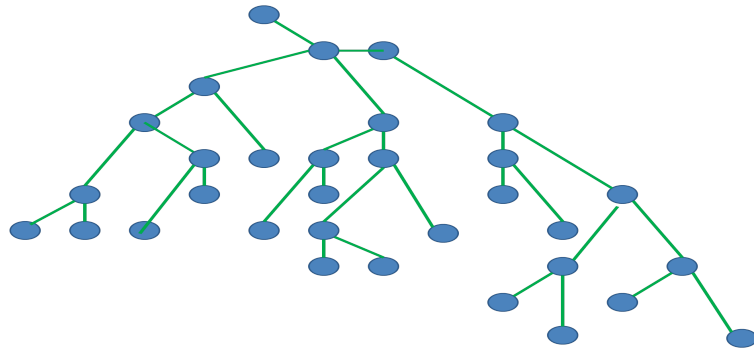


Şekil 1.13. S_6 yıldız grafı

Örneğin yukarıdaki graf, bir S_6 yıldız grafıdır.

Bir S_n grafının n tane köşesi, $n-1$ tane kenarı vardır.

1.18 Tanım. Hiç bir devir bulundurmayan bağlantılı graflara *ağaç* denilir ve n köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir.

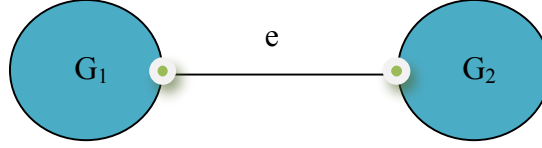


Şekil 1.14. T_{32} ağaç grafı

Yukarıdaki graf, bir T_{32} ağaç graf örneğidir.

T_n ağaç grafi n tane köşe ve $(n-1)$ tane kenardan oluşur.

1.19 Tanım. Bağlantısız iki grafi, köşelerinden birleştirerek bağlantılı hale getiren kenara köprü (bridge) denir. Şekil 1.15’de “e” kenarı G_1 ve G_2 graflarını birbirine bağlayan köprüdür.

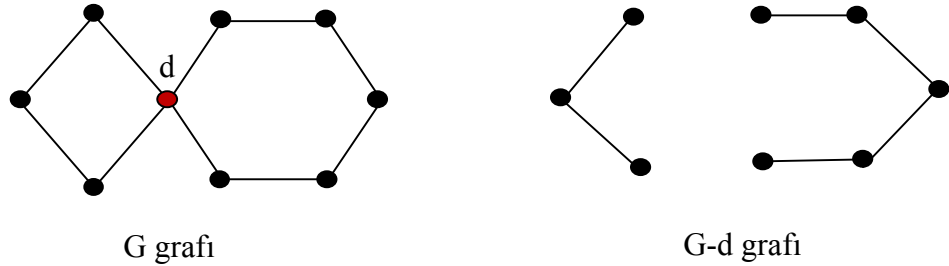


Şekil 1.15. Köprü

1.2 Graflarda Köşe ve Kenar Silme ve İki Köşeyi Büzme İşlemleri

1.2.1 Tanım. Bir G grafında belirli bir v köşesini ve ona bitişik tüm kenarları çıkarma işlemine *köşe silme işlemi* denir. Elde edilen yeni graf $G-v$ ile gösterilir.

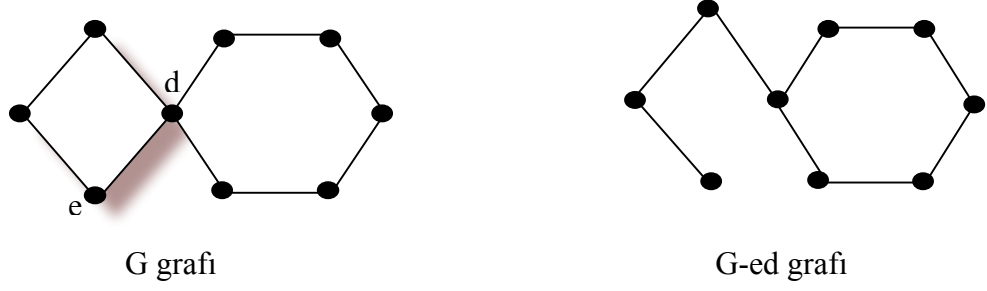
Örneğin Şekil 1.2.1’de; G grafından d köşesi çıkarılarak elde edilen $G-d$ grafi görülmektedir.



Şekil 1.16. G ve $G-d$ grafları

1.2.2 Tanım. Bir grafta *kenar silme* işlemi yapılırken; kenarın bitişik olduğu köşeler kalır, sadece kenar graftan çıkarılır.

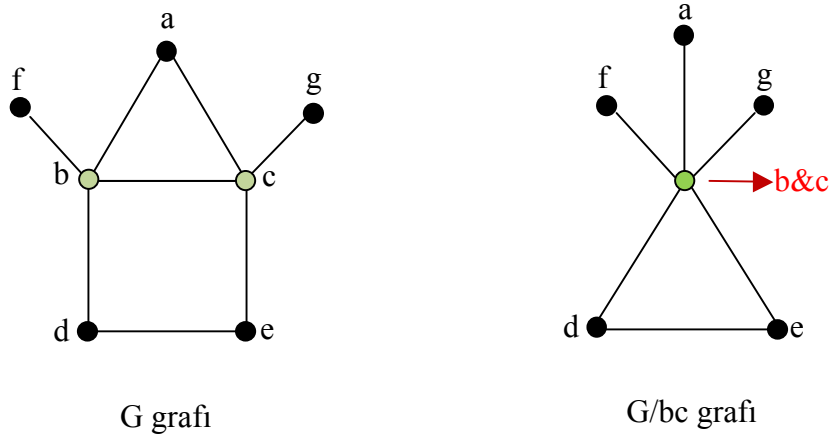
Şekil 1.17’de verilen G grafindan “ed” kenarı silinmiştir. Kenar silme işlemi $G-ed$ ile gösterilir.



Şekil 1.17. G ve $G-ed$ grafları

1.2.3 Tanım. Bir grafta bir kenarın uç noktalarını oluşturan iki köşenin birleştirilip tek bir köşe haline getirilmesi işlemine *kenar büzme* işlemi denir.

Örneğin Şekil 1.18 de G grafinin bc kenarı büzülmüştür. Kenar büzme işlemi G/bc ile gösterilir.



Şekil 1.18. G ve G/bc grafları

2. GRAFLARIN RENKLENDİRİLMESİ

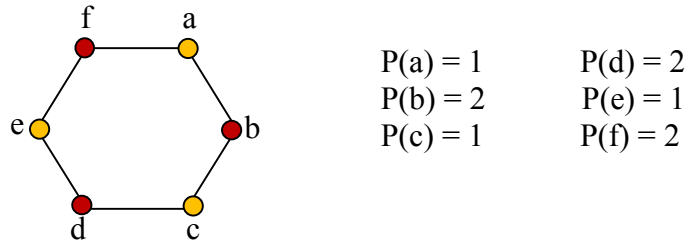
2.1 Kromatik Sayı

Bu bölümde grafların renklendirilmesi ilgili tanımlar, renklendirme ile ilgili formüller ve bulunuşları, bu formüllere ilgili uygulamalar yer alacaktır. Detaylı bilgi için Deng, H. ve ark. *On the harmonic index and the chromatic number of a graph* (2013) , Harris, J.M. ve ark. *Combinatorics and Graph Theory* başta olmak üzere referanslarda belirtilen kaynaklar incelenebilir.

2.1.1 Tanım. Bir G grafi ve bir k tamsayısı verilsin. k -renklendirme fonksiyonu; $K:V(G)\rightarrow\{1, 2, \dots, k\}$ olarak tanımlanır. Burada k renk sayısını belirtmek üzere, K her köşeye bir renk atamaktadır.

2.1.2 Tanım. Bir G grafinde her bir komşu u ve v köşe ikilisi için $K(u) \neq K(v)$ ise, yani komşu köşelerin renkleri farklı ise bu renklendirmeye G 'nin öz k -renklendirmesi denir. Eğer bu şekilde kullanılan tam k renk varsa G grafi k -renklendirme olarak tanımlanır.

Örneğin C_6 devir grafinin kaç renkle renklendirilebilir olduğunu hesaplamak istersek;

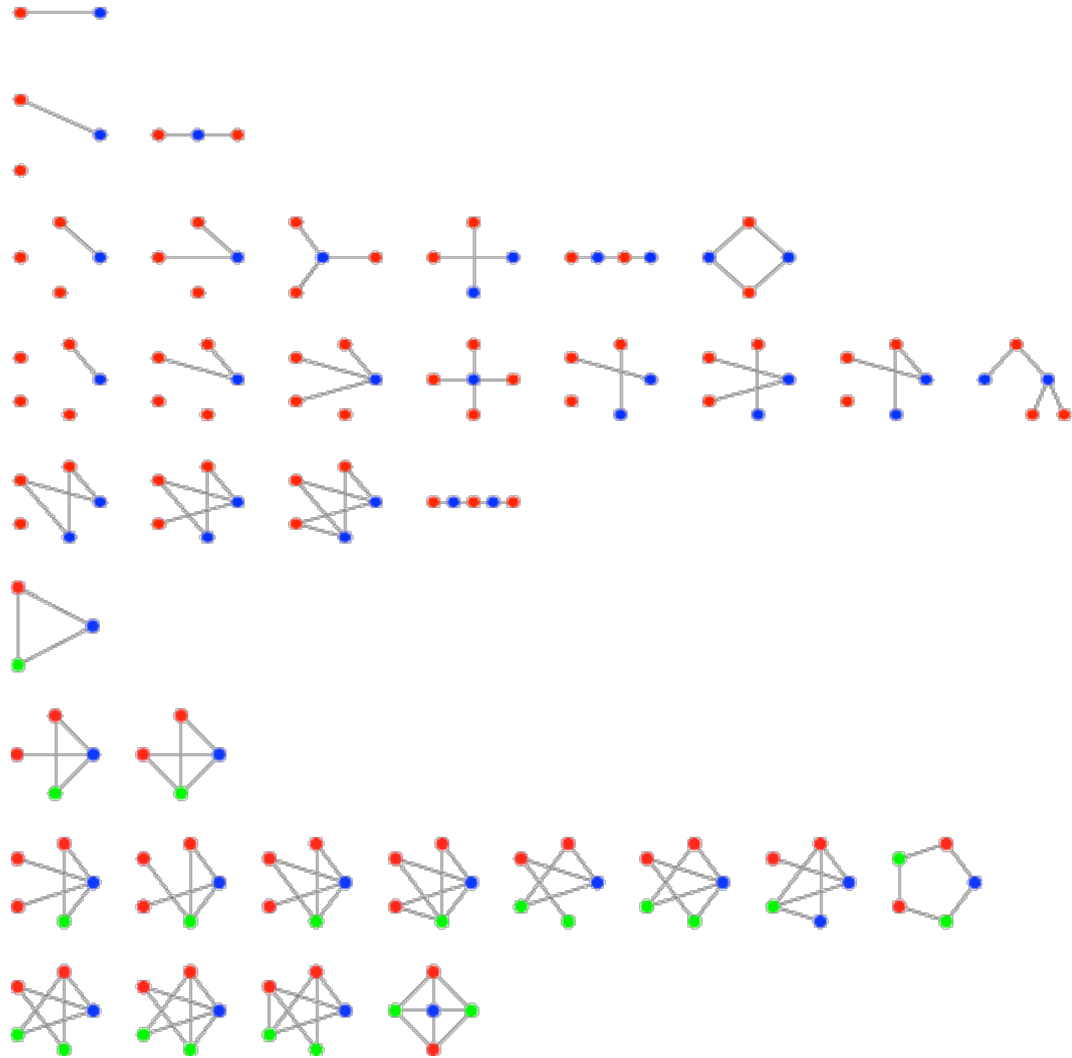


Şekil 2.1. C_6 grafi

şeklinde bir P fonksiyonu kullanırız. Burada P fonksiyonu, komşu köşeler farklı renk olacak şekilde köşelere renkler atamaktadır. Görüldüğü gibi C_6 grafini renklendirmek için en az 2 renk gereklidir. Dolayısıyla C_6 bir 2-renklendirme değildir.

2.1.3 Tanım. Bir G grafini, komşu köşeler farklı renkte olmak üzere, renklendirmek için ihtiyaç duyulan en az renk sayısına G 'nin *kromatik sayısı* denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir.

Şekil 2.2'de çeşitli grafların renklendirilmeleri örneklenmiştir.



Şekil 2.2. Çeşitli graflar için renklendirmeler

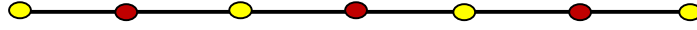
Bazı graf türleri için kromatik sayılar belirlenmek istenirse;

- E_n boş grafi için; hiçbir köşe birbiriyle komşu olmadığından ihtiyaç duyulan en az renk sayısı 1'dir.



Şekil 2.3. E_5 grafının renklendirilmesi

- P_n patika grafi için; her köşe sadece kendisinden sonra gelen köşeye komşu olduğundan bu graf için iki renk yeterli olacaktır.



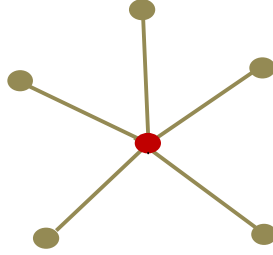
Şekil 2.4. P_7 grafının renklendirilmesi

- C_n devir grafi için; n çift sayı ise başlanılan köşe ilk rengi alır, ardından gelen köşe için ikinci renk kullanır. Sonraki köşe içinse ilk renge geri dönülebilir. Bu şekilde devam edilirse başlanılan köşeden bir önceki komşu köşeye gelindiğinde kullanılan ikinci renk kullanılabilir. Dolayısıyla ihtiyaç olan renk sayısı 2'dir. n tek sayı ise yukarıdaki yol aynı şekilde izlendiğinde başlanılan köşeden bir önceki köşe ilk renk ve ikinci rengin arasında kalır, üçüncü bir renk kullanılması gerekir. Dolayısıyla ihtiyaç duyulan en az renk sayısı 3'tür.



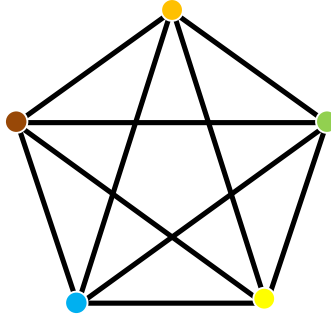
Şekil 2.5. C_5 ve C_6 graflarının renklendirilmesi

- S_n yıldız grafında tek bir köşe ayrı ayrı diğer tüm köşelerle komşu olduğundan, ilk köşe için bir renge, diğer tüm köşeler içinse ikinci bir renk yeterli olacaktır. Dolayısıyla 2 renge ihtiyaç vardır.



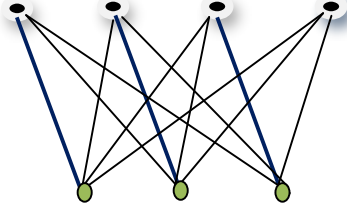
Şekil 2.6. S_6 grafının renklendirilmesi

- K_n tam grafında; tüm köşeler birbirleriyle komşu olduğundan her köşe için farklı renk kullanılmalıdır, dolayısıyla ihtiyaç olan en az renk sayısı tam grafın köşe sayısı kadardır.



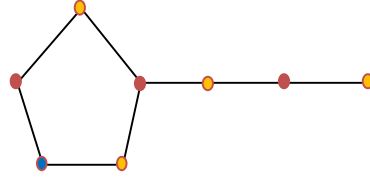
Şekil 2.7. K_5 tam grafının renklendirilmesi

- $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafı için birinci parçadaki tüm köşeler birbirinden bağımsız ve ikinci parçadaki tüm köşelerle komşu olduğundan ilk parçanın tüm köşeleri için tek renk kullanılır ve ikinci parçadaki köşeler de kendi aralarında komşu olmadıklarından ikinci renkle boyanır. Dolayısıyla ihtiyaç duyulan renk sayısı 2'dir.



Şekil 2.8. $K_{4,3}$ grafının renklendirilmesi

- $T_{r,s}$ larva grafi için; C_r için kullanılacak renk sayısı belirleyicidir. Çünkü kendisine bağlanacak olan patika graf için ihtiyaç duyulan 2 renk, devir grafında kullanılan renkler kullanılarak renklendirilebilir. Bu nedenle r çift sayı ise 2, tek sayı ise 3 renge ihtiyaç vardır.



Şekil 2.9. $T_{5,3}$ grafının renklendirilmesi

Yukarıdaki bilgiler formüleştirilirse;

$$\chi(E_n) = 1$$

$$\chi(P_n) = \begin{cases} 2, & n \gg 2 \text{ ise} \\ 1, & n = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ çift ise} \\ 3, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$\chi(S_n) = 2$$

$$\chi(K_n) = n$$

$$\chi(K_{m,n}) = 2$$

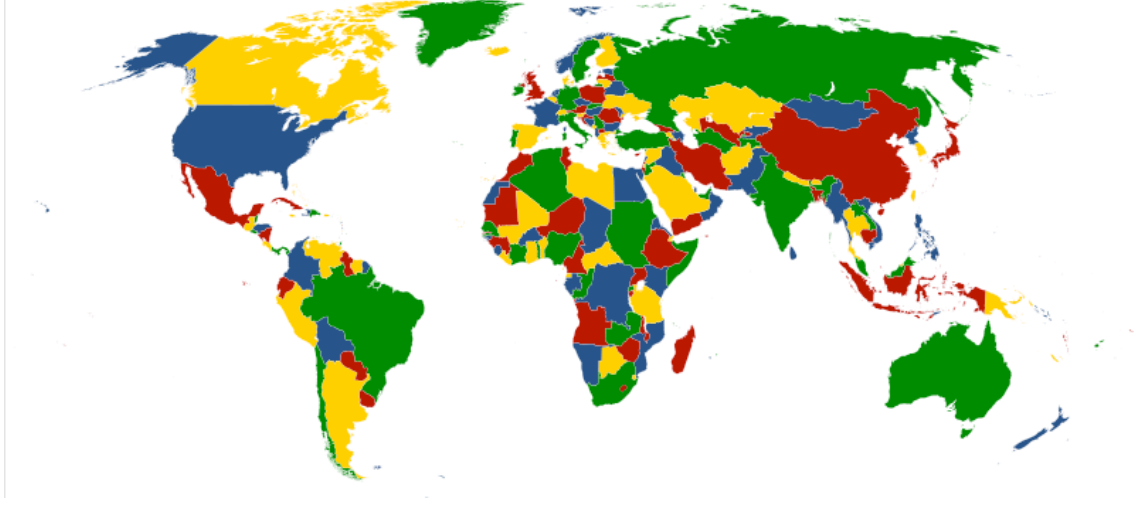
$$\chi(T_{r,s}) = \begin{cases} 2, & r \text{ çift ise} \\ 3, & r \text{ tek ise} \end{cases}$$

formülleri elde edilir.

2.2 Dört Renk Problemi

Herhangi bir haritada verilen ülkeler; komşu iki ülke aynı renge boyanmamak şartıyla en az kaç renkle boyanabilir? 1852 yılında ortaya atılan bu problemin çözümünde ilk yanıtı veren Francis Guthrie oldu. De Morgan'ın eski bir öğrencisi olan Francis Guthrie bir İngiltere haritasını renklendirirken, komşu şehirler değişik renkte olacak biçimde şehirleri dört renge boyayabileceğini gördü. Aynı yıl, tam olarak 23 Ekim'de, Francis'in kardeşi Frederick, şimdi Dört Renk Problemi olarak anılan soruyu De Morgan'a sordu: Bir haritanın ülkeleri, sınırdaş ülkeler ayrı renklerde olacak biçimde her zaman dört değişik renge boyanabilir mi? Soruya bayılan De Morgan soruyu hemen, aralarında filozof William Whewell'in de bulunduğu arkadaşlarıyla paylaştı. Whewell, De Morgan'ın *Buluşun Felsefesi* adlı kitabına yazdığı eleştiri yazısında bu sorudan söz etti. Soru bir süre unutuldu. 13 Haziran 1878'de ünlü matematikçi Cayley Londra Matematik Derneği'ne bu sorunun çözümünün bulunup bulunmadığını sordu. (*Matematik Dünyası, 2004*) Kısa bir zaman sonra, topluluk üyesi avukat Arthur Kempe, dört renkten fazlasının gereksiz olduğunu ispatladığını öne süren bir makale yayınladı. 1890'a kadar bu problemin çözüldüğüne inanıldı. Ancak 1890'da Kempe'nin çözümünün hatalı olduğu anlaşıldı. Çözüm için çabalar devam ederken 1950'ye gelindiğinde, içinde 36 dan az ülke barındıran haritaların dört renkle boyanabileceği artık gösterilmişti. Genel çözüm ise, ancak bilgisayarların devreye girmesiyle sağlanabildi. 1976 yılında, İllinoi Üniversitesinden Kenneth Appel ve Wolfgang Haken, bu problemin bilgisayar kullanarak çözümünü elde ettiler. Halen dört renk probleminin bilgisayar kullanılmadan çözümünün bulunması için çabalar devam ediyor. Bu problem için verilen savaşın graf teorisinin gelişiminde büyük katkısı olduğu kabul edilir. (*Tübitak, Bilim ve Teknik, 2007*)

Şekil 2.10'da dünya haritasının dört renk kullanılarak renklendirilmesi verilmiştir.



Şekil 2.10. Dört renk kullanılarak renklendirilmiş dünya haritası

2.3 Kromatik Polinomlar

Kromatik polinomlar 1900'lerin başında Birkhoff tarafından dört renk problemi çalışılırken ortaya çıkarılmıştır. Bu polinomlar grafların farklı renklerle kaç şekilde boyanabileceğinin sayısını vermektedir. Burada önemli olan nokta; renklendirme aynı renkler kullanılarak yapılsa da, köşelerin renklendirilmeleri değiştirilince elde edilenin yeni bir polinom olduğudur. Yani iki renklendirmede en az bir köşe farklı renklendirildiyse bu iki renklendirme farklı olarak düşünülecektir. Örneğin Şekil 2.11'de verilen graflar iki farklı renklendirmeye sahiptir.



Şekil 2.11. Aynı grafin iki farklı renklendirmesi

2.3.1 Örnek. “ K_5 tam grafi için kaç farklı renklendirme yapılabilir?” sorusuna cevap verirken belirleyici olan sahip olunan renk sayısıdır. Örneğin, 6 farklı renk varsa 1. köşe için 6, 2. köşe için 5, aynı şekilde devam edildiğinde 5. ve son köşe için 2 renk seçeneği olacaktır. Dolayısıyla renklendirme sayısı $6.5.4.3.2 = 6!$ olacaktır. Fakat renk sayısı 3 olsaydı bu graf için bir öz renklendirme yapılamayacaktı.

Bu sonuç, k tane renk ve K_n tam grafi için genelleştirilirse istenen renklendirme;

$$k.(k-1).(k-2)...(k-n+1)$$

farklı şekilde yapılacaktır.

Bir G grafının k tane renk ile yapılabilecek farklı renklendirmelerinin sayısı $C_G(k)$ ile gösterilir. Dolayısıyla $k \geq n$ iken

$$C_{K_n}(k) = k.(k-1).(k-2)...(k-n+1)$$

dir. $k < n$ ise $C_{K_n}(k) = 0$ olacaktır.

2.3.2 Örnek. E_n sadece köşelerden oluşan bir graf olduğundan, n farklı köşenin her biri için k tane renk seçenek vardır ve E_n , k^n farklı şekilde renklendirilebilir.

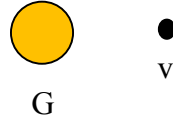
Aşağıdaki teorem kromatik polinomları hesaplamak için bugüne kadar en fazla kullanılan teoremdir (*Birkhoff-Lewis, 1946*):

2.3.3 Teorem. Bir G grafının kromatik polinomu

$$C_G(k) = C_{G-e}(k) - C_{G/e}(k)$$

şeklindedir.

2.3.4 Teorem. $G \amalg \{v\}$ ile, G grafi ile v köşesinin birlikte ve bağlantısız olduğu yeni graf gösterilecektir.



$$C_{G \amalg \{v\}}(k) = k \cdot C_G(k)$$

$$C_{G \amalg \{v_1, v_2, \dots, v_n\}}(k) = k^n \cdot C_G(k)$$

dır.

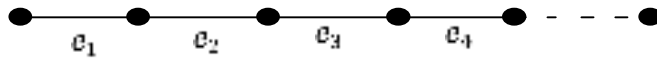
İspat. v köşesi G grafiyle bağlantılı olmadığından dolayı v 'nin renklendirilmesi G 'den bağımsızdır. Dolayısıyla $C_G(k)$; v 'nin renklendirme sayısı olan k ile çarpılır.

2.3.5 Teorem. $C_{P_n}(k) = k \cdot (k-1)^{n-1}$, dir.

İspat. $C_G(k) = C_{G-e}(k) - C_{G/e}(k)$ formülü P_n için uygulanırsa

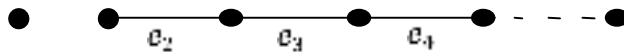
$$C_{P_n}(k) = C_{P_n-e}(k) - C_{P_n/e}(k)$$

elde edilir.

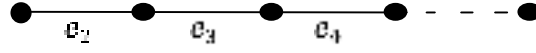


Şekil 2.12. P_n grafi

$$C_{P_n}(k) = C_{P_n-e_1}(k) - C_{P_n/e_1}(k)$$



Şekil 2.13. P_{n-1} grafi



Şekil 2.14. P_n/e_1 grafi

Şekil 2.13 ve 2.14'de elde edilen grafların $P_{n-1}(k)$ grafi olduğu görülmektedir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} C_{P_n}(k) &= k \cdot C_{P_{n-1}}(k) - C_{P_{n-1}}(k) \\ &= (k-1) \cdot C_{P_{n-1}}(k) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda gösterilen işlemler her adımda tekrarlandığında;

$$\begin{aligned} C_{P_n}(k) &= (k-1)^2 \cdot C_{P_{n-2}}(k) \\ &= (k-1)^3 \cdot C_{P_{n-3}}(k) = \dots = (k-1)^{n-1} \cdot C_{P_1}(k) = (k-1)^{n-1} \cdot k \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yani

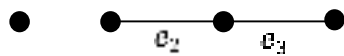
$$C_{P_n}(k) = k \cdot (k-1)^{n-1}$$

olarak elde edilir.

2.3.6 Örnek. $C_{P_4}(k)$ hesaplanmak istenirse;

$$C_{P_4}(k) = C_{P_4-e_1}(k) - C_{P_4/e_1}(k)$$

formülü kullanılır.



Şekil 2.15. $C_{P_4-e_1}$ grafi



Şekil 2.16. C_{P_4/e_1} grafi

Burada Şekil 2.15'deki graf G_{11} ve Şekil 2.16'deki graf G_{12} ile gösterilecektir.

$$C_{P_4}(k) = C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k)$$



Şekil 2.17. $G_{11} - e_2$ ve G_{11}/e_2 grafları

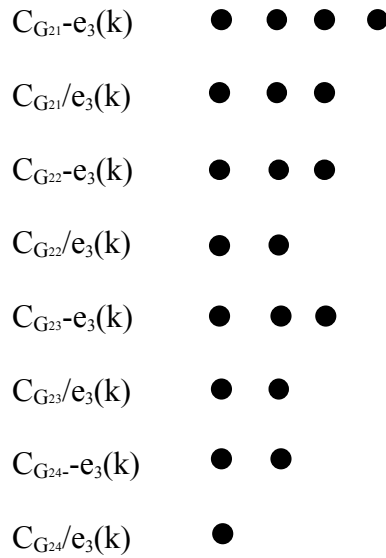


Şekil 2.18. $G_{12} - e_2$ ve G_{12}/e_2 grafları

Burada $G_{11} - e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12} - e_2$, G_{12}/e_2 grafları yerine sırasıyla G_{21} , G_{22} , G_{23} , G_{24} gösterimleri kullanılacaktır.

$$C_{P_4}(k) = C_{G_{21}-e_3}(k) - C_{G_{21}/e_3}(k) - C_{G_{22}-e_3}(k) + C_{G_{22}/e_3}(k) - C_{G_{23}-e_3}(k) + C_{G_{23}/e_3}(k) + C_{G_{24}-e_3}(k) - C_{G_{24}/e_3}(k) \quad (1.1)$$

elde edilir. Verilen grafların şekilleri aşağıdaki gibi olacaktır;



Şekil 2.19. (1.1) bağıntısında elde edilen şekiller

Elde edilen şekillerin renklendirme sayıları (1.1) formülünde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} C_{P_4}(k) &= k^4 - k^3 - k^3 + k^2 - k^3 + k^2 + k^2 - k \\ &= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \\ &= k.(k-1)^3 \end{aligned}$$

elde edilir ve çözüm tamamlanmış olur.

Örneğin 5 renk için P_4 grafının farklı renklendirmelerinin sayısı

$$C_{P_4}(5) = 5.(5-1)^3 = 5.64 = 320$$

olarak bulunur.

2.3.7 Teorem. T_n ağaç grafının kromatik polinomu

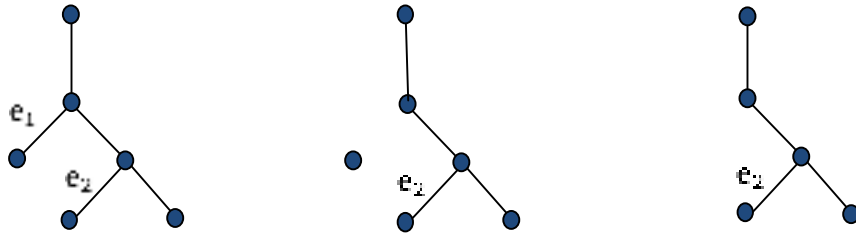
$$C_{T_n}(k) = k.(k-1)^{n-1}$$

şeklindedir.

2.3.8 Örnek. $C_{T_6}(k)$ hesaplanmak istenirse;

$$C_{T_6}(k) = C_{T_6-e_1}(k) - C_{T_6/e_1}(k)$$

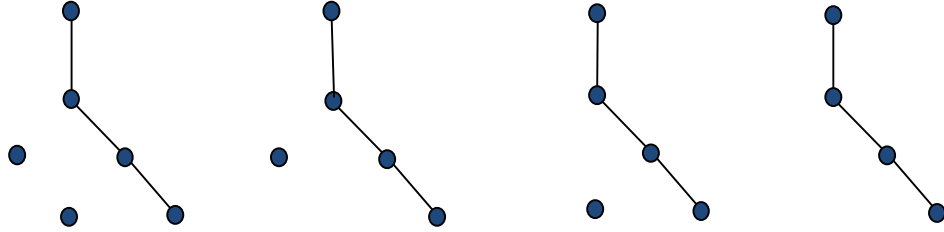
formülünü kullanmak gerekir.



Şekil 2.20. Sırasıyla T_6 , T_6-e_1 , T_6/e_1 grafları

Burada, T_6-e_1 , T_6/e_1 grafları yerine sırasıyla G_{11} ve G_{12} ifadeleri kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} C_{T_6}(k) &= (C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k)) - (C_{G_{12}-e_2}(k) - C_{G_{12}/e_2}(k)) \\ &= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k) \end{aligned}$$



Şekil 2.21. Sırasıyla $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları

Şekil 2.21’de elde edilen graflar incelendiğinde, her bir şeklin bağımsız kalan köşeler ile bir P_4 grafindan oluştuğu görülür. Dolayısıyla bu aşamadan sonra sorunun çözümünde P_4 grafinin özellikleri de kullanılacaktır.

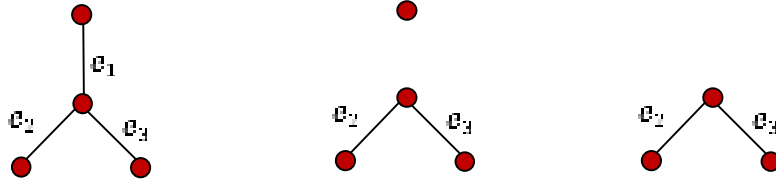
$$\begin{aligned} C_{T_6}(k) &= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k) \\ &= k^2 \cdot C_{P_4}(k) - k \cdot C_{P_4}(k) - k \cdot C_{P_4}(k) + C_{P_4}(k) \\ &= C_{P_4}(k) \cdot (k^2 - 2k + 1) \\ &= k \cdot (k-1)^3 \cdot (k-1)^2 \quad (\text{Teorem 2.3.5 gereği}) \\ &= k \cdot (k-1)^5 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.9 Teorem. $C_{S_n}(k) = k \cdot (k-1)^{n-1}$

2.3.10 Örnek. $C_{S_4}(k) = k \cdot (k-1)^3$ ’dir.

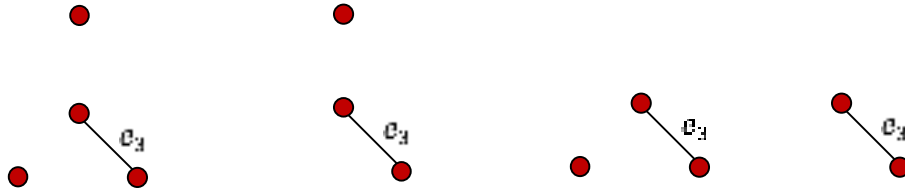
$C_{S_4}(k) = C_{S_4-e_1}(k) - C_{S_4/e_1}(k)$ formülündeki graflar şekille gösterilmek istenirse,



Şekil 2.22. Sırasıyla S_4 , $S_4-e_1 (G_{11})$, $S_4/e_1 (G_{12})$ grafları

Burada, S_4-e_1 , S_4/e_1 grafları yerine sırasıyla G_{11} ve G_{12} ifadeleri kullanılacaktır.

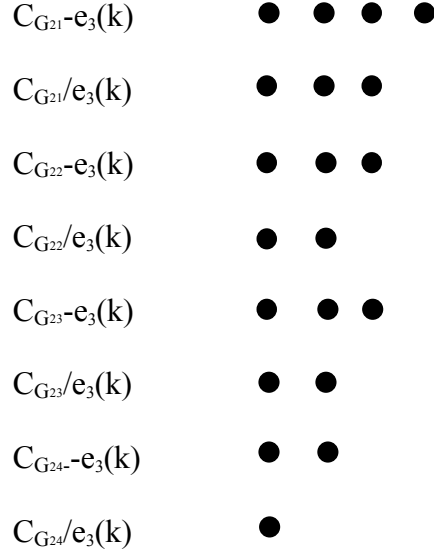
$$\begin{aligned} C_{S_4}(k) &= (C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k)) - (C_{G_{12}-e_2}(k) - C_{G_{12}/e_2}(k)) \\ &= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k) \end{aligned}$$



Şekil 2.23. Sırasıyla $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları

Burada $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları yerine sırasıyla G_{21} , G_{22} , G_{23} , G_{24} gösterimleri kullanılacaktır. Şekil 2.23'de bu grafların çizimi yapılmıştır.

$$\begin{aligned} C_{S_4}(k) &= C_{G_{21}-e_3}(k) - C_{G_{21}/e_3}(k) - C_{G_{22}-e_3}(k) + C_{G_{22}/e_3}(k) - C_{G_{23}-e_3}(k) + C_{G_{23}/e_3}(k) + \\ &C_{G_{24}-e_3}(k) - C_{G_{24}/e_3}(k) \end{aligned}$$



Şekil 2.24. (1.1) bağıntısında elde edilen şekiller

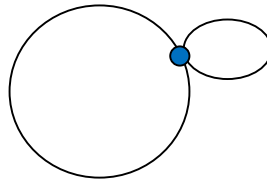
Elde edilen köşelerin renklendirme sayıları (1.1) bağıntısında yerine konulursa;

$$\begin{aligned}
C_{S_4}(k) &= k^4 - k^3 - k^3 + k^2 - k^3 + k^2 + k^2 - k \\
&= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \\
&= k.(k-1)^3
\end{aligned}$$

elde edilir ve çözüm tamamlanmış olur.

2.3.11 Teorem. Bir G grafi en az bir döngü (loop) içeriyorsa $C_G(k) = 0$ 'dır.

İspat.



Şekil 2.25. Döngü içeren G grafi

Teorem 2.3.3 gereği $C_G(k) = C_{G-e}(k) - C_{G/e}(k)$ olduğu biliniyor.



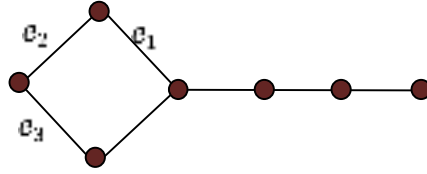
Şekil 2.26. G-e ve G/e grafları

G-e grafi ile G/e grafi Şekil 2.26’da görüldüğü gibi aynı olduklarından

$$C_G(k) = 0$$

bulunur.

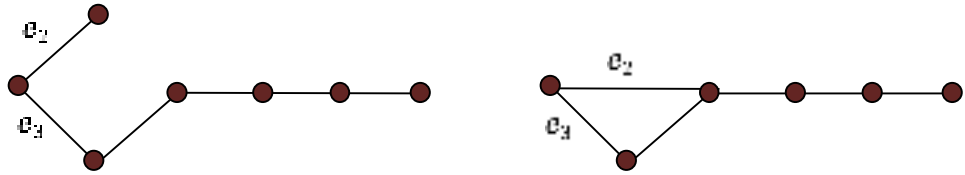
2.3.12 Örnek. $C_{T_{4,3}}(k)$ değeri hesaplanmak istenirse



Şekil 2.27. $T_{4,3}$ graf

$$C_{T_{4,3}}(k) = C_{T_{4,3}-e_1}(k) - C_{T_{4,3}/e_1}(k)$$

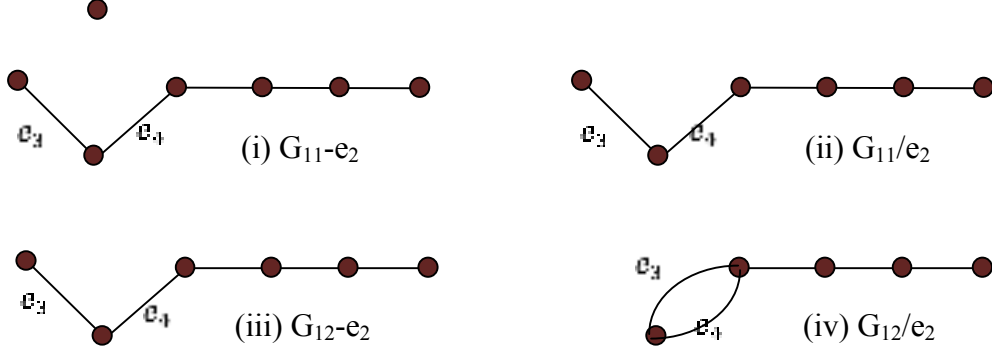
formülü kullanılır.



Şekil 2.28. Sırasıyla $T_{4,3}-e_1$ ve $T_{4,3}/e_1$

Burada, $T_{4,3}-e_1$ ve $T_{4,3}/e_1$ grafları yerine sırasıyla G_{11} ve G_{12} ifadeleri kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
C_{T_{4,3}}(k) &= C_{T_{4,3}-e_1}(k) - C_{T_{4,3}/e}(k) \\
&= C_{G_{11}}(k) - C_{G_{12}}(k) \\
&= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k) \quad (1.1)
\end{aligned}$$



Şekil 2.29. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları

(i), (ii), (iii), (iv) maddelerinde oluşan grafların yerine sırasıyla G_{21} , G_{22} , G_{23} , G_{24} ifadeleri kullanılacaktır. Burada, (iv) maddesinde oluşan grafla ilgili olarak ek bilgiye ihtiyaç duyulmaktadır. Bu graf G_{24} ile temsil edilirse; $C_{G_{24}}(k) = C_{G_{24}-e_3}(k) - C_{G_{24}/e_3}(k)$ eşitliği elde edilir. Oluşan yeni graflar Şekil 2.30'te çizilmiştir. Teorem 2.3.11 gereğince $C_{G_{24}/e_3}(k) = 0$ 'dır.



Şekil 2.30. $G_{24}-e_3$ ve G_{24}/e_3 grafları

$$C_{T_{4,3}}(k) = C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k) \quad (1.1)$$

eşitliğine geri dönülürse;

$$\begin{aligned}
C_{T_{4,3}}(k) &= C_{G_{21}}(k) - C_{G_{22}}(k) - C_{G_{23}}(k) + C_{G_{24}}(k) \\
&= k \cdot C_{P_6}(k) - C_{P_6}(k) - C_{P_6}(k) + C_{P_5}(k) \\
&= C_{P_6}(k) \cdot (k-2) + C_{P_5}(k) \\
&= k \cdot (k-1)^5 \cdot (k-2) + k \cdot (k-1)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k.(k-1)^4.[k^2-3k+2+1] \\
&= k.(k-1)^4.(k^2-3k+3)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.13 Teorem. $C_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n.(k-1)$

C_n devir grafından herhangi bir kenar silindiğinde oluşacak yeni graf, P_n ile tanımlı bir patika grafken, bir kenar büzüldüğünde oluşacak yeni graf ise C_{n-1} devir grafıdır. Dolayısıyla

$$C_{C_n}(k) = C_{P_n}(k) - C_{C_{n-1}}(k)$$

yazılabilir.

İspat. İspat tümevarımla yapılacaktır. En küçük devir graf C_3 olduğundan, bu yöntem n yerine 3 yazarak başlatılacaktır.

$$C_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n.(k-1) \text{ denklemini}$$

- n= 3 için doğruluğu kontrol edilirse;

C_3 grafı ikişer ikişer birbirine komşu olan üç köşeden oluşmaktadır. k tane renge sahip olduğunda renklendirme, ilk köşe için k, ikinci köşe için k-1 ve üçüncü köşe için k-2 farklı şekilde yapılabilir. Dolayısıyla k.(k-1).(k-2) farklı renklendirme yapılacaktır.

$$\begin{aligned}
k.(k-1).(k-2) &= (k-1).(k^2-2k+1-1) \\
&= (k-1).((k-1)^2-1) \\
&= (k-1)^3 - (k-1) \\
&= (k-1)^3 + (-1)^3.(k-1)
\end{aligned}$$

dır. Yani n=3 için denklem doğrudur.

- $n = m$ için doğru olsun. Yani,

$$C_{C_m}(k) = (k-1)^m + (-1)^m \cdot (k-1) \text{ denkleminin sağlandığı kabul edilsin.}$$

- $n = m+1$ için doğru olup olmadığı kontrol edilirse,

$$C_{C_{m+1}}(k) = (k-1)^{m+1} + (-1)^{m+1} \cdot (k-1) \text{ denkleminin doğruluğu kontrol edilirse,}$$

$$C_{C_{m+1}}(k) = C_{P_{m+1}}(k) - C_{C_m}(k)$$

$$= k \cdot (k-1)^m - [(k-1)^m + (-1)^m \cdot (k-1)] \quad (\text{Teorem 2.3.5})$$

$$= (k-1) \cdot (k-1)^m - (-1)^m \cdot (k-1)$$

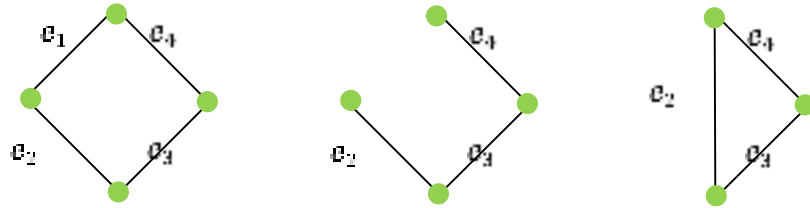
$$= (k-1)^{m+1} + (-1)^{m+1} \cdot (k-1)$$

elde edilir. Tümevarım yöntemi gereğince; $n = m+1$ için denklem sağlandığından ispat tamamlanmış olur.

2.3.14 Örnek. $C_{C_4}(k)$ hesaplanırsa;

$$C_{C_4}(k) = C_{C_4 - e_1}(k) - C_{C_4 / e_1}(k)$$

denkleminde ifade edilen graflar Şekil 2.31’de verilmiştir.



Şekil 2.31. $C_4, C_4 - e_1, C_4 / e_1$ grafları

Burada, $C_4 - e_1$ grafinin P_4 , C_4 / e_1 grafinin ise C_3 grafinin eşit olduğu görülür.

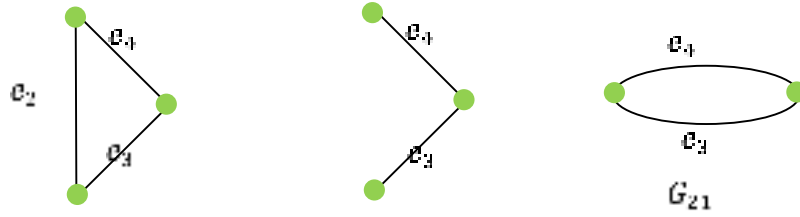
$$C_{C_4}(k) = C_{C_4 - e_1}(k) - C_{C_4 / e_1}(k)$$

eşitliğinde bu ifadeler yerine yazılırsa

$$C_{C_4}(k) = C_{P_4}(k) - C_{C_3}(k)$$

elde edilir. Bu aşamada P_4 grafinin kromatik polinom sayısı daha önce hesaplandığından C_3 grafinin kromatik polinom sayısı hesaplanacaktır.

$$C_{C_3}(k) = C_{C_3-e_2}(k) - C_{C_3/e_2}(k) \quad (1.3)$$



Şekil 2.32. C_3 , C_3-e_2 , C_3/e_2 grafları

Şekil 2.32 de oluşan graflardan C_3-e_2 grafinin P_3 grafına eşit olduğu görülebilir. Dolayısıyla,

$$C_{C_3}(k) = C_{P_3}(k) - C_{C_3/e_2}(k) \quad (1.4)$$

yazılabilir. C_3/e_2 grafi için G_{21} ifadesi kullanılırsa;

$$C_{C_3}(k) = C_{P_3}(k) - C_{G_{21}}(k) \quad (1.5)$$

eşitliği elde edilir.

$C_{G_{21}}(k) = C_{G_{21}-e_3}(k) - C_{G_{21}/e_3}(k)$ ifadesinde oluşan yeni graflar şekil 2.34’de çizilmiştir.



Şekil 2.33. $G_{21}-e_3$ ve G_{21}/e_3 grafları

Burada G_{21-e_3} grafinin P_2 grafına eşit olduğu görülmektedir. G_{21/e_4} grafinin kromatik polinomu ise döngü içerdiğinden 0'dır. Dolayısıyla (1.5) eşitliğinin yerine

$$C_{G_{21}}(k) = C_{P_2}(k) \quad (1.6)$$

yazılabilir.

$$C_{C_4}(k) = C_{P_4}(k) - C_{C_3}(k) \quad (1.2)$$

$$= C_{P_4}(k) - [C_{C_3-e_2}(k) - C_{C_3/e_2}(k)] \quad (1.3)$$

$$= C_{P_4}(k) - C_{C_3-e_2}(k) + C_{C_3/e_2}(k)$$

$$= C_{P_4}(k) - C_{P_3}(k) + C_{C_3/e_2}(k) \quad (1.4)$$

$$= C_{P_4}(k) - C_{P_3}(k) + C_{G_{21}}(k) \quad (1.5)$$

$$= C_{P_4}(k) - C_{P_3}(k) + C_{P_2}(k) \quad (1.6)$$

$$= k.(k-1)^3 - k.(k-1)^2 + k.(k-1)$$

$$= k.(k-1).[(k-1)^2 - (k-1) + 1]$$

$$= k.(k-1).(k^2 - 2k + 1 - k + 1 + 1)$$

$$= k.(k-1).(k^2 - 3k + 3)$$

$$= (k-1).(k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + 1)$$

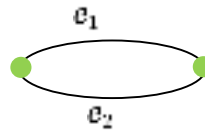
$$= (k-1).[(k-1)^3 + 1]$$

$$= (k-1)^4 + (k-1)$$

elde edilir.

2.3.15 Teorem. Bir G grafi sadece iki köşe arasında çoklu kenar olacak şekilde iki kenardan oluşuyorsa, bu grafin kromatik polinom sayısı P_2 'nin kromatik polinom sayısı olan $k.(k-1)$ 'e eşittir.

İspat. G grafi



Şekil 2.34. G grafi

şeklinde verilsin.

$C_G(k) = C_{G-e_1}(k) - C_{G/e_1}(k)$ ifadesindeki yeni graf şekilleri Şekil 2.35'deki gibi olacaktır.



Şekil 2.35. $G-e_1$ ve G/e_1 grafları

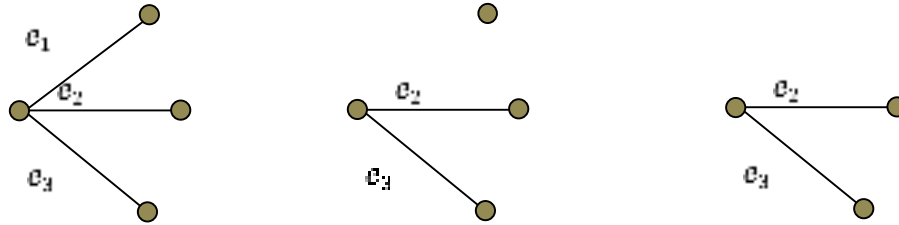
G/e_1 grafi döngü içerdiğinden $C_{G/e_1}(k) = 0$ olacaktır. Dolayısıyla, $C_G(k) = C_{G-e_1}(k)$ olur. Burada $G-e_1$ grafi P_2 grafına eşit olduğundan

$$C_G(k) = k.(k-1)$$

dir.

2.3.16 Örnek. $C_{K_{1,3}}(k)$ değeri hesaplanırsa;

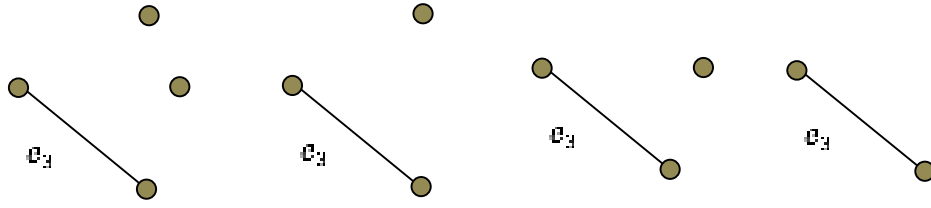
$$C_{K_{1,3}}(k) = C_{K_{1,3}-e_1}(k) - C_{K_{1,3}/e_1}(k)$$



Şekil 2.36. $K_{1,3}$, $K_{1,3}-e_1$, $K_{1,3}/e_1$ grafları

$K_{1,3}-e_1$ grafi G_{11} ve $K_{1,3}/e_1$ grafi G_{12} ile temsil edilirse;

$$\begin{aligned} C_{K_{1,3}}(k) &= C_{G_{11}}(k) - C_{G_{12}}(k) \\ &= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k) \end{aligned}$$



Şekil 2.37. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları

Şekil 2.37’de elde edilen şekiller incelendiğinde, her bir şeklin bağımsız kalan köşelerinden hariç olmak üzere P_2 graflarının elde edildiği görülür. Dolayısıyla bu aşamadan sonra sorunun çözümünde P_2 grafinin özellikleri de kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
 C_{K_{1,3}}(k) &= k^2 \cdot C_{P_2}(k) - k \cdot C_{P_2}(k) - k \cdot C_{P_2}(k) + C_{P_2}(k) \\
 &= C_{P_2}(k) \cdot (k^2 - 2k + 1) \\
 &= k \cdot (k-1) \cdot (k-1)^2 \\
 &= k \cdot (k-1)^3
 \end{aligned}$$

elde edilir.

3. GRAFLARI KÜÇÜLTME YOLLARI

3.1 Giriş

Bu bölümde grafların köşelerinden veya kenarlarından ayırıp, bağlantısız duruma getirerek daha az işlemle kromatik polinom sayılarını hesaplayabilmek için çeşitli teoremler verilecek, bölüm sonunda buna dair uygulamalar yapılacaktır.

3.1.1 Teorem. Bağlantısız iki graf G_1 ve G_2 olmak üzere, $G_1 \sqcup G_2 = G$ olsun. Bu durumda; $C_G(k) = C_{G_1}(k) \cdot C_{G_2}(k)$ 'dir.

İspat. G_1 ve G_2 bağımsız (ayrık) graflar olduklarından G_1 'in renklendirilmesi G_2 'nin renklendirilmesinden bağımsızdır. Saymanın temel ilkesi gereği ispat tamamlanır.

3.1.2 Sonuç. $G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup G_3 \sqcup \dots \sqcup G_n$ olsun.

$$C_G(k) = C_{G_1}(k) \cdot C_{G_2}(k) \cdot C_{G_3}(k) \dots C_{G_n}(k)$$

dir.

İspat. Tümevarım yoluyla ispat yapılacaktır.

- $n=2$ için doğruluğu kontrol edilirse;

$$C_G(k) = C_{G_1}(k) \cdot C_{G_2}(k)$$

olduğu Teorem 3.1.1'de gösterilmiştir.

$n=k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$C_G(k) = C_{G_1}(k) \cdot C_{G_2}(k) \cdot C_{G_3}(k) \dots C_{G_k}(k)$$

doğru olsun.

- $n=k+1$ için doğru olup olmadığı kontrol edilirse,

$$C_{G_1}(k).C_{G_2}(k).C_{G_3}(k) \dots C_{G_k}(k) = C_M(k)$$

olarak ifade edilirse;

$$C_G(k) = C_M(k). C_{G_{k+1}}(k)$$

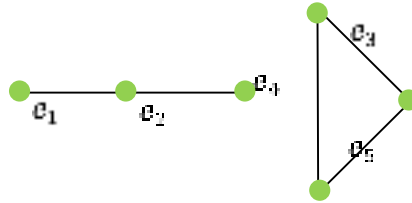
olacaktır. Teorem 3.1.1 gereğince G_M ve G_{k+1} grafları bağlantısız olduğundan bu eşitlik doğru olacaktır. Sonuç olarak G_M yerine eşiti yazılırsa,

$$C_G(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k).C_{G_3}(k) \dots C_{G_k}(k).C_{G_{k+1}}(k)$$

eşitliği gösterilerek ispat tamamlanmış olur.

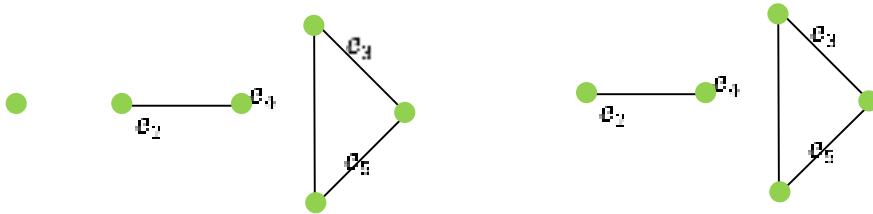
3.1.3 Örnek. C_3 ve P_3 grafları bağlantısız tek bir graf ve iki ayrı graf olarak alınırsa iki durumda da kromatik polinom sayıları eşit olup olmadığını inceleyelim.

(i) G grafi şekil 3.1’de verilmiştir



Şekil 3.1. G grafi

$$C_G(k) = C_{G-e_1}(k) - C_{G/e_1}(k)$$



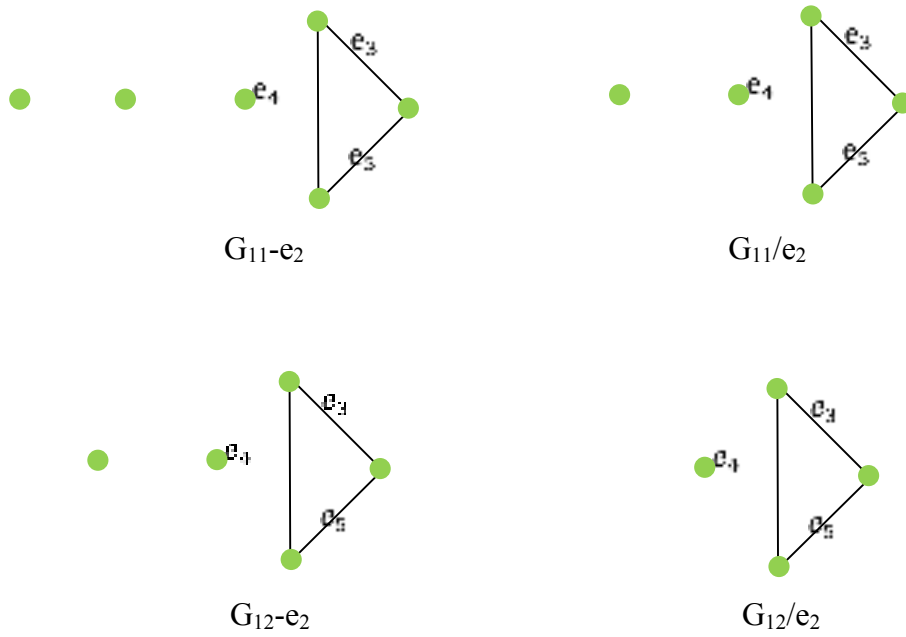
Şekil 3.2. $G-e_1$ ve G/e_1 grafları

$G-e_1$ ve G/e_1 grafları gösterimi için sırasıyla G_{11} ve G_{12} kullanılırsa;

$$\begin{aligned} C_G(k) &= C_{G_{11}}(k) - C_{G_{12}}(k) \\ &= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Şekil 3.3'te bu graflar gösterilmiştir:



Şekil 3.3. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları

Teorem 2.3.4 gereğince;

$$C_G(k) = C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k)$$

eşitliği

$$\begin{aligned} C_G(k) &= k^3 \cdot C_{C_3}(k) - k^2 \cdot C_{C_3}(k) - k^2 \cdot C_{C_3}(k) + k \cdot C_{C_3}(k) \\ &= C_{C_3}(k) \cdot (k^3 - 2k^2 + k) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$C_{C_3}(k) = (k-1)^3 - (k-1) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2)$ değeri bu eşitlikte yerine konulursa;

$$C_G(k) = k.(k-1).(k-2).(k^3 - 2k^2 + k)$$

$$= k^2.(k-1)^3.(k-2)$$

elde edilir.

(ii) Şimdi G grafi, $G = P_3 \amalg C_3$ olarak bağlantısız iki grafin ayrık birleşimi olarak alınır, Teorem 3.1.1 gereğince $C_G(k) = C_{P_3}(k) \cdot C_{C_3}(k)$ olacağından

$$C_G(k) = k.(k-1)^2.k.(k-1).(k-2)$$

$$= k^2.(k-1)^3.(k-2)$$

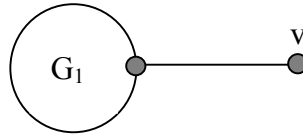
elde edilir. Dolayısıyla (i) = (ii) olduğu gösterilmiş olur.

3.1.4 Teorem. Bir G grafi bir köprü ile bir v köşesine bağlanıyorsa, bu grafin kromatik polinomu

$$(k-1) \cdot C_G(k)$$

çarpımı ile hesaplanır.

İspat.



Şekil 3.4. G grafi

$C_G(k) = C_{G-e_1}(k) - C_{G/e_1}(k)$ eşitliğindeki yeni graflar çizilirse;



Şekil 3.5. $G-e_1$ ve G/e_1 grafları

Teorem 2.3.4 gereğince $C_{G-e_1}(k) = k.C_{G_1}(k)$ yazılabilir. Ayrıca $C_{G/e_1}(k) = C_{G_1}(k)$ olduğundan;

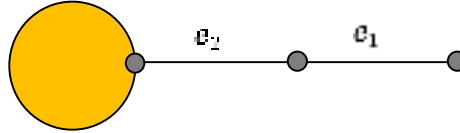
$$C_G(k) = k.C_{G_1}(k) - C_{G_1}(k)$$

$$C_G(k) = (k-1).C_{G_1}(k)$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

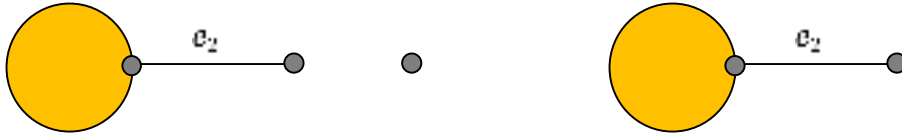
3.1.5 Gösterim. Birbirine bir köprü ile bağlanan G_1 ve G_2 grafları G_1UG_2 ile ifade edilecektir.

3.1.6 Örnek. Şekilde verilen graf için kromatik polinom sayısı bulunmak istenirse;



Şekil 3.6. G grafi

$$C_G(k) = C_{G-e_1}(k) - C_{G/e_1}(k)$$



Şekil 3.7. $G-e_1$ ve G/e_1 grafları

Teorem 2.3.4 ve Teorem 2.3.5 gereğince;

$$\begin{aligned} C_G(k) &= C_{G-e_1}(k) - C_{G/e_1}(k) \\ &= k.(k-1).C_G(k) - (k-1).C_G(k) \\ &= (k-1).C_G(k).(k-1) \\ &= (k-1)^2. C_G(k) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.7 Sonuç. Bir G grafi bir köprü ile bir P_n grafına bağlanıyorsa,

$$C_{GUP_n}(k) = (k-1)^n \cdot C_G(k)$$

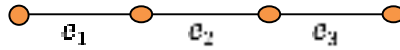
dir.

Harris, J.M. ve ark., $C_G(k)$ sayısını hesaplarken kenarların çıkarılış sırasının önemsiz olduğunu göstermişlerdir:

3.1.8 Teorem. $C_G(k) = C_{G-e_i}(k) - C_{G/e_i}(k)$ değeri hesaplanırken e_i 'lerin çıkarılış sırası önemli değildir. Çıkarma işlemine istenilen kenarla başlayıp istediğimiz sırada devam edebiliriz. (Harris ve ark. 2007)

Bir örnekle gösterilmek istenirse aşağıdaki örnek verilebilir:

3.1.9 Örnek. $C_{P_4}(k)$ hesaplanırken her seferinde başka bir kenar silinerek işleme başlanırsa, her işlem sonucunda $C_{P_4}(k) = k \cdot (k-1)^3$ eşitliğine ulaşıldığı gösterilirse;



Şekil 3.8. P_4 grafi

(i) e_1 kenarı çıkarılarak başlanırsa

$$C_{P_4}(k) = C_{P_4-e_1}(k) - C_{P_4/e_1}(k)$$



Şekil 3.9. P_4-e_1 ve P_4/e_1 grafları

$$\begin{aligned} C_{P_4}(k) &= k \cdot k \cdot (k-1)^2 - k \cdot (k-1)^2 \\ &= k \cdot (k-1)^2 \cdot (k-1) \end{aligned}$$

$$= k.(k-1)^3$$

elde edilir.

(ii) e_2 kenarı çıkarılarak başlanırsa

$$C_{P_4}(k) = C_{P_4-e_2}(k) - C_{P_4/e_2}(k)$$



Şekil 3.10. P_4-e_2 ve P_4/e_2 grafları

$$\begin{aligned} C_{P_4}(k) &= k.(k-1). k.(k-1) - k.(k-1)^2 \\ &= k^2.(k-1)^2 - k.(k-1)^2 \\ &= k.(k-1)^2.(k-1) \\ &= k.(k-1)^3 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) e_3 kenarı çıkarılarak başlanırsa

$$C_{P_4}(k) = C_{P_4-e_3}(k) - C_{P_4/e_3}(k)$$



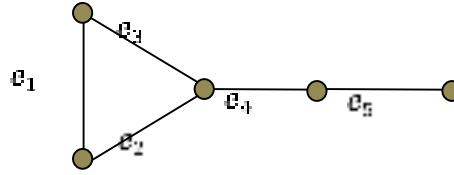
Şekil 3.11. P_4-e_3 ve P_4/e_3 grafları

$$\begin{aligned} C_{P_4}(k) &= C_{P_4-e_3}(k) - C_{P_4/e_3}(k) \\ &= k.k.(k-1)^2 - k.(k-1)^2 \\ &= k.(k-1)^2.(k-1) \\ &= k.(k-1)^3 \end{aligned}$$

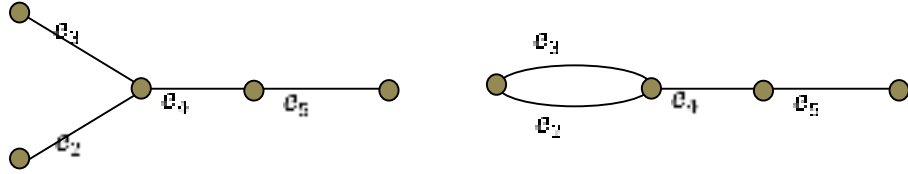
elde edilir.

(i), (ii), (iii) maddelerinde yapılan işlemler sonucunda bulunan sonuçlar aynı olup, farklı kenarlar çıkarıldığında sonucun değişmediği görülmüştür.

3.1.10 Örnek. $T_{3,2}$ grafının kromatik polinom sayısı ikinci aşamada farklı kenarlar çıkartılarak elde edilmek istenirse;



Şekil 3.12. $T_{3,2}$ grafi



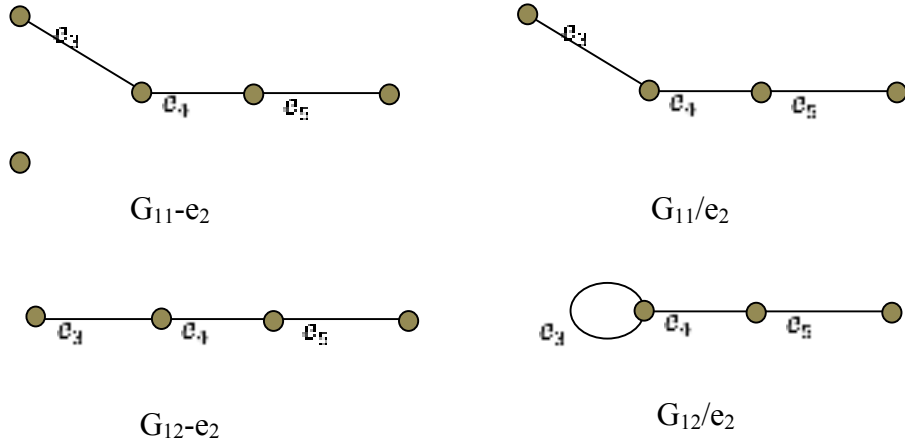
Şekil 3.13. $T_{3,2-e_1}$ ve $T_{3,2/e_1}$ grafları

$T_{3,2-e_1}$ ve $T_{3,2/e_1}$ gösterimleri yerine G_{11} ve G_{12} gösterimleri kullanılarak devam edilecektir. Bu aşamada önce e_2 kenarı, daha sonra e_3 kenarı kenarı silinerek aynı sonuca ulaşıldığı gösterilecektir.

(i) G_{11} ve G_{12} graflarından e_2 kenarı çıkarılsın

$$\begin{aligned}
 C_{T_{3,2}}(k) &= C_{T_{3,2}-e_1}(k) - C_{T_{3,2}/e_1}(k) \\
 &= C_{G_{11}}(k) - C_{G_{12}}(k) \\
 &= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k) \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

(1.1) eşitliğinde oluşan graflar şekilleri Şekil 3.14' de gösterilmiştir.



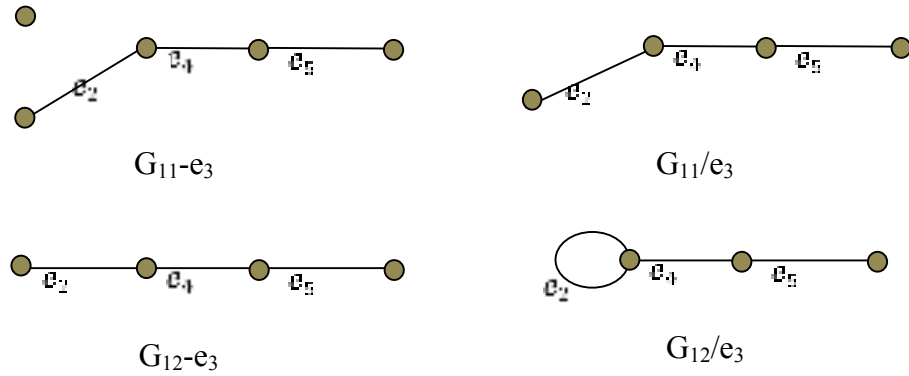
Şekil 3.14. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, G_{12}/e_2 grafları

G_{12}/e_2 grafi döngü içerdiğinden $C_{G_{12}/e_2}(k)$ değeri 0 olacaktır. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_2$, graflarında ise P_4 grafinin oluştuğu görülmektedir. Teorem 2.3.4 gereğince;

$$\begin{aligned}
 C_{T_{3,2}}(k) &= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_2}(k) + C_{G_{12}/e_2}(k) \\
 &= k \cdot C_{P_4}(k) - C_{P_4}(k) - C_{P_4}(k) \\
 &= k \cdot k \cdot (k-1)^3 - k \cdot (k-1)^3 - k \cdot (k-1)^3 \\
 &= k \cdot (k-1)^3 \cdot (k-2)
 \end{aligned}$$

(ii) G_{11} ve G_{12} graflarından e_3 kenarı çıkarılsın;

$$C_{T_{3,2}}(k) = C_{G_{11}-e_3}(k) - C_{G_{11}/e_3}(k) - C_{G_{12}-e_3}(k) + C_{G_{12}/e_3}(k) \quad (1.2)$$



Şekil 3.15. $G_{11}-e_3$, G_{11}/e_3 , $G_{12}-e_3$, G_{12}/e_3 grafları

(1.2) eşitliğinde oluşan grafların şekilleri Şekil 3.15’de gösterilmiştir.

G_{12}/e_3 grafi döngü içerdiğinden $C_{G_{12}/e_3}(k)$ değeri 0 olacaktır.

$$\begin{aligned}
 C_{T_{3,2}}(k) &= C_{G_{11}-e_3}(k) - C_{G_{11}/e_3}(k) - C_{G_{12}-e_3}(k) + C_{G_{12}/e_3}(k) & (1.2) \\
 &= k \cdot C_{P_4}(k) - C_{P_4}(k) - C_{P_4}(k) \\
 &= k \cdot k \cdot (k-1)^3 - k \cdot (k-1)^3 - k \cdot (k-1)^3 \\
 &= k \cdot (k-1)^3 \cdot (k-2)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(i) ve (ii) maddelerinde aynı sonuçlar elde edilmiştir.

3.1.11 Sonuç. $C_G(k) = C_{G-e_1}(k) - C_{G/e_1}(k)$ eşitliğinde,

$G-e_1$ gösterimi yerine G_{11} ; G/e_1 gösterimi yerine G_{12} kullanılırsa;

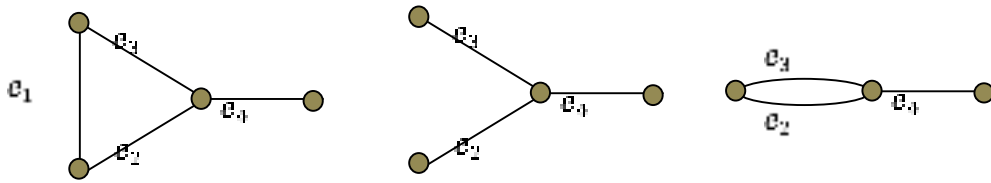
$$C_G(k) = C_{G_{11}-e_i}(k) - C_{G_{11}/e_i}(k) - [C_{G_{12}-e_i}(k) - C_{G_{12}/e_i}(k)]$$

yazılabilir. Yani ilk kenar silme işleminden sonra oluşan iki yeni graftan farklı kenarlar silinerek işleme devam edilebilir.

3.1.12 Örnek. $T_{3,1}$ grafini kullanarak Sonuç 3.1.11 örneklendirilirse;

$$C_{T_{3,1}}(k) = C_{T_{3,1}-e_1}(k) - C_{T_{3,1}/e_1}(k)$$

eşitliğindeki $T_{3,1}$, $T_{3,1}-e_1$, $T_{3,1}/e_1$ grafları Şekil 3.16’da gösterilmiştir.

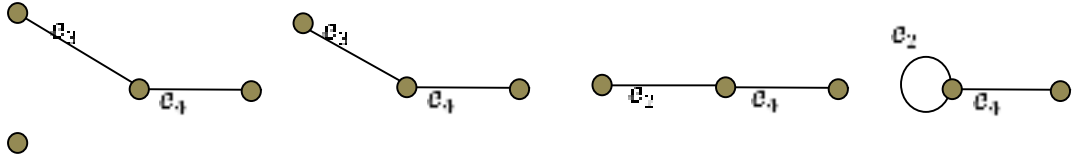


Şekil 3.16. $T_{3,1}$, $T_{3,1}-e_1$, $T_{3,1}/e_1$ grafları

Çözümün bu aşamasında $T_{3,1}-e_1$, $T_{3,1}/e_1$ graf gösterimleri yerine G_{11} ve G_{12} gösterimleri kullanılacak ve G_{11} 'den silinecek olan kenar ile G_{12} 'den silinecek kenar farklı seçilip, sonuçta $T_{3,1}$ grafının kromatik polinomunu veren $k.(k-1)^2.(k-2)$ ifadesine ulaşıldığı gösterilecektir.

$$\begin{aligned} C_{T_{3,1}}(k) &= C_{T_{3,1}-e_1}(k) - C_{T_{3,1}/e_1}(k) \\ &= C_{G_{11}}(k) - C_{G_{12}}(k) \\ &= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_3}(k) + C_{G_{12}/e_3}(k) \end{aligned}$$

$G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_3$, G_{12}/e_3 grafları Şekil 3.17'de gösterilmiştir.



Şekil 3.17. $G_{11}-e_2$, G_{11}/e_2 , $G_{12}-e_3$, G_{12}/e_3 grafları

G_{12}/e_3 grafi döngü içerdiğinden $C_{G_{12}/e_3}(k) = 0$ 'dır.

$$\begin{aligned} C_{T_{3,1}}(k) &= C_{G_{11}-e_2}(k) - C_{G_{11}/e_2}(k) - C_{G_{12}-e_3}(k) + C_{G_{12}/e_3}(k) \\ &= k. C_{P_3}(k) - C_{P_3}(k) - C_{P_3}(k) \\ &= k.k.(k-1)^2 - k.(k-1)^2 - k.(k-1)^2 \\ &= k.(k-1)^2.(k-2) \end{aligned}$$

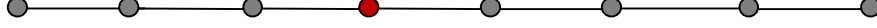
elde edilir. Böylece ikinci aşamada farklı kenarlar silindiğinde kromatik polinom olarak aynı sonuca ulaşıldığı görülebilir.

3.1.13 Teorem. Tek bir köşeden bağlı olan iki grafın oluşturduğu bir G grafi bağlantı köşesinden ayrılıp G_1 ve G_2 gibi bağlantısız iki grafa dönüştüğünde oluşan bağlantı;

$$k.C_G(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)$$

dır.

3.1.14 Örnek. Tek köşelerinden bağlı P_4 ve P_5 grafları için Teorem 3.1.13 örneklendirilirse; G grafi şekil 3.18'de verildiği gibi olacaktır.



Şekil 3.18. G grafi

Teorem 2.3.5 gereğince $C_G(k) = C_{P_8}(k) = k.(k-1)^7$ dir.

Eğer bu graflar bağlantı köşelerinden ayrılırlarsa bağlantısız P_4 ve P_5 grafları ortaya çıkacaktır. Bu yeni grafi G^* olarak adlandırırsak;



Şekil 3.19. G^* grafi

Teorem 3.1.1 gereğince bağlantısız iki grafin kromatik polinom sayısı

$$\begin{aligned} C_{G^*}(k) &= C_{P_4}(k) \cdot C_{P_5}(k) \\ &= k.(k-1)^3 \cdot k.(k-1)^4 \\ &= k^2.(k-1)^7 \end{aligned}$$

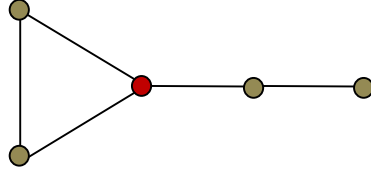
olacaktır.

$$\frac{C_G(k)}{C_{G^*}(k)} = \frac{k.(k-1)^7}{k^2.(k-1)^7} = \frac{1}{k}$$

$$k.C_G(k) = C_{G^*}(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)$$

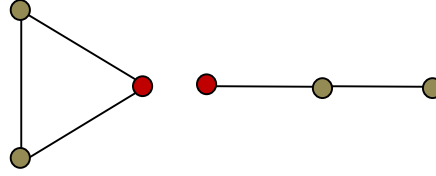
elde edilir.

3.1.15 Örnek. $C_{T_{3,2}}(k) = k.(k-1)^3.(k-2)$ olduğu hesaplanmıştır. Bağlantı köşesinden koparılsa oluşacak eşitlik gösterilirse;



Şekil 3.20. $T_{3,2}$ grafi

$T_{3,2}$ grafi bağlantı köşesinden koparılırsa oluşan yeni graf G olsun. Şekil 3.21’de bu graf gösterilmiştir. Oluşan bağlantısız grafların C_3 ve P_3 olduğu görülmektedir.



Şekil 3.21. G grafi

$$\begin{aligned}
 C_G(k) &= C_{C_3}(k).C_{P_3}(k) \quad (\text{Teorem 2.3.5 gereğince}) \\
 &= k.(k-1).(k-2).k.(k-1)^2 \\
 &= k^2.(k-1)^3.(k-2)
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla;

$$k. C_{T_{3,2}}(k) = C_{C_3}(k).C_{P_3}(k)$$

elde edilir.

$$\mathbf{3.1.16 Teorem.} \quad C_{T_{r,s}} = \begin{cases} (k-1)^{r-s} + (k-1)^{s+1}, & r \text{ çift ise} \\ (k-1)^{r+s} - (k-1)^{s+1}, & r \text{ tek ise} \end{cases}$$

İspat. $T_{r,s}$ grafi C_r devir grafi ile P_s patika grafinin bir köşe üzerinde eklenmesi ile oluşur. Bu köşeden ayırdığımızda bağlantısız C_r ile P_{s+1} grafları ortaya çıkmaktadır.

Teorem 3.1.13 gereğince; $k.C_{T_{r,s}}(k) = C_{C_r}(k).C_{P_{s+1}}(k)$ ’dir.

$$k. C_{Tr,s}(k) = [(k-1)^r + (-1)^r.(k-1)].[k.(k-1)^s]$$

r tek sayı ise;

$$C_{Cr}(k) = (k-1)^r - (k-1)$$

$$k. C_{Tr,s}(k) = [(k-1)^r - (k-1)].[k.(k-1)^s]$$

eşitliğinde her iki taraf $\frac{1}{k}$ ile çarpılırsa

$$C_{Tr,s}(k) = [(k-1)^r - (k-1)].(k-1)^s$$

$$C_{Tr,s}(k) = (k-1)^{r+s} - (k-1)^{s+1}$$

elde edilir.

r çift sayı ise;

$$C_{Cr}(k) = (k-1)^r + (k-1)$$

$$k. C_{Tr,s}(k) = [(k-1)^r + (k-1)].[k.(k-1)^s]$$

eşitliğinde her iki taraf $\frac{1}{k}$ ile çarpılırsa

$$C_{Tr,s}(k) = [(k-1)^r + (k-1)].(k-1)^s$$

$$C_{Tr,s}(k) = (k-1)^{r+s} + (k-1)^{s+1}$$

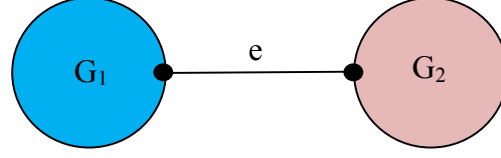
elde edilir.

3.1.17 Teorem. Birbirine bir köprü ile bağlanmış G_1 ve G_2 gibi iki graftan oluşmuş G grafinin, köprü olan kenar silindiğinde bağlantısız olacak G_1 ve G_2 graflarının kromatik polinomları arasındaki bağıntı;

$$k.C_G(k) = (k-1).C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)$$

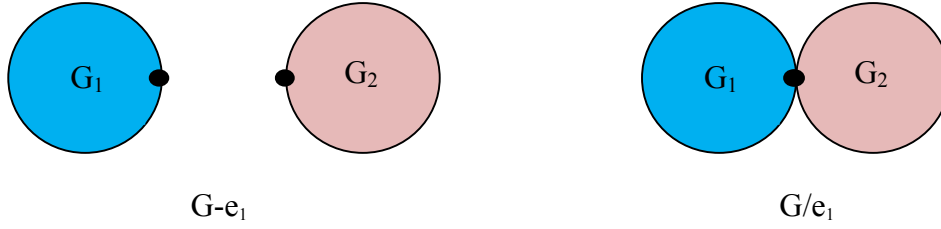
dir.

İspat. G grafi şekil 3.22’de gösterildiği gibi G_1 ve G_2 gibi iki grafin bir köprü ile birleşmesinden oluşmuş olsun.



Şekil 3.22. G grafi

$C_G(k) = C_{G-e}(k) - C_{G/e}(k)$ ifadesinde oluşan graflar şekil 3.23’de gösterilmiştir.



Şekil 3.23. $G-e_1$, G/e_1 grafları

Teorem 2.3.4 gereğince; $C_{G-e_1}(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)$ ’dir. Teorem 3.1.13 gereğince; $k.C_{G/e_1}(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)$ olup

$$C_{G/e_1}(k) = \frac{C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)}{k}$$

yazılabilir. Bu değerler $C_G(k) = C_{G-e}(k) - C_{G/e}(k)$ ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$C_G(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k) - \frac{C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)}{k}$$

$$C_G(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k).[1 - \frac{1}{k}]$$

$$C_G(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k).[\frac{k-1}{k}]$$

$$k.C_G(k) = (k-1).C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)$$

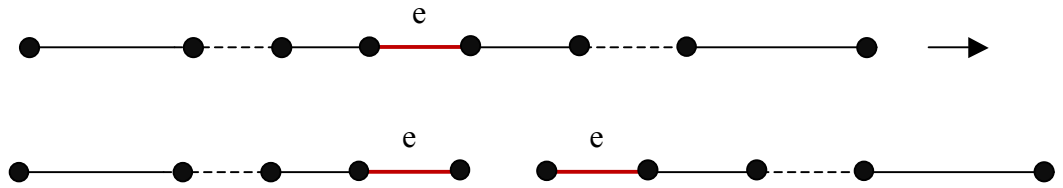
bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

3.1.18 Teorem. Bir G grafi ortak bir kenar boyunca birbirine yapıştırılmış olan iki tane patika grafdan meydana gelmiş olsun. Bu graflar ortak olan kenarlarından ayrılıp iki bağlantısız graf haline getirilirse, bağlantısız kalacak graflar P_1 ve P_2 olarak adlandırıldığında, oluşan bağıntı

$$k.(k-1).C_G(k) = C_{P_1}(k).C_{P_2}(k)$$

dır.

İspat. Teorem 3.1.18’de tanımlanan işlem Şekil 3.24’te gösterilmiştir.



Şekil 3.24. P_n grafinin e kenarından ayrılması

P_n grafi e kenarından ayrıldığında oluşacak ilk grafa P_k grafi denilirse, ikinci graf P_{n-k+1} olacaktır. Teorem 2.3.5 gereğince,

$$\begin{aligned} C_{P_n}(k) &= k.(k-1)^{n-1} \\ C_{P_k}(k) &= k.(k-1)^{k-1} \\ C_{P_{n-k+1}}(k) &= k.(k-1)^{n-k+1} \end{aligned}$$

denklemleri yazılabilir. Bu durumda

$$C_{P_k}(k).C_{P_{n-k+1}}(k) = k.(k-1)^{k-1}.k.(k-1)^{n-k+1}$$

$$= k^2 \cdot (k-1)^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$k \cdot (k-1) \cdot C_{P_n}(k) = C_{P_k}(k) \cdot C_{P_{n-k+1}}(k)$$

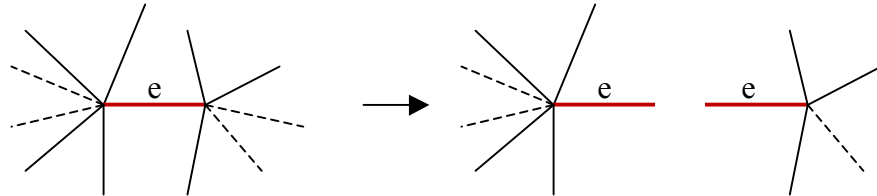
elde edilir.

3.1.19 Teorem. Bir G grafi ortak bir kenar boyunca birbirine yapıştırılmış olan iki tane yıldız grafdan meydana gelmiş olsun. Bu graflar ortak olan kenarlarından ayrılıp iki bağlantısız graf haline getirilirse, bağlantısız kalacak graflar S_1 ve S_2 olmak üzere, oluşan bağıntı

$$k \cdot (k-1) \cdot C_G(k) = C_{S_1}(k) \cdot C_{S_2}(k)$$

ile verilir.

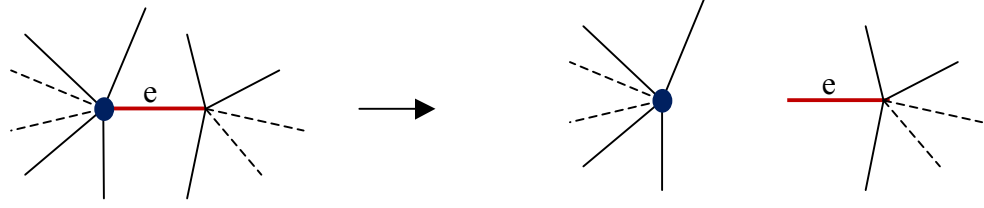
İspat. Teorem 3.1.19'da tanımlanan işlem Şekil 3.25'te gösterilmiştir.



Şekil 3.25. G grafinin ayrılması

Şekil 3.25'te görüldüğü gibi G grafi tanımlandığı gibi ayrıldığında iki tane yıldız graf oluşmaktadır. Bu grafları S_m ve S_n olarak adlandırılın. İspatın ilk kısmında G grafinin, ikinci kısmında ise oluşan bağlantısız grafların kromatik polinomları bulunacaktır.

(i) G grafi şekil 3.26'da gösterilen köşeden ayrılın.



Şekil 3.26. G grafinin belirtilen köşeden ayrılması

Şekil 3.26 da gösterilen ayrılma sonrası oluşan graflar S_{m-1} ve S_n grafları olacaktır. Teorem 3.1.13 gereğince

$$k.C_G(k) = C_{S_{m-1}}(k) \cdot C_{S_n}(k)$$

yazılabilir.

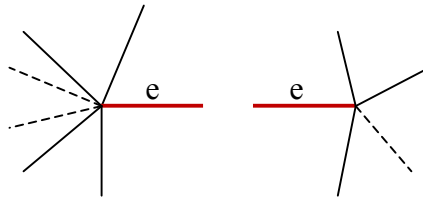
$$k.C_G(k) = k.(k-1)^{m-2}.k.(k-1)^{n-1} \quad (\text{Teorem 2.3.9})$$

$$k.C_G(k) = k^2.(k-1)^{m+n-3}$$

$$C_G(k) = k.(k-1)^{m+n-3}$$

elde edilir.

(ii)



Şekil 3.27. Bağlantısız S_m ve S_n grafları

Bağlantısız bu grafların oluşturduğu grafa G^* denilirse, kromatik polinomu teorem 3.1.1 gereğince

$$C_{G^*}(k) = C_{S_m}(k) \cdot C_{S_n}(k)$$

$$\begin{aligned}
&= k.(k-1)^{m-1}.k.(k-1)^{n-1} && \text{(Teorem 2.3.9)} \\
&= k^2.(k-1)^{m+n-2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(i) ve (ii) bölümlerinde bulunan sonuçlar göz önüne alındığında

$$k.(k-1).C_G(k) = C_{G^*}(k)$$

eşitliğine ulaşıldığı görülebilir. Dolayısıyla

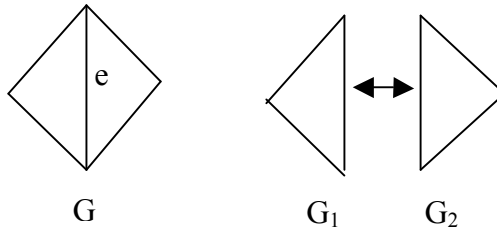
$$k.(k-1).C_G(k) = C_{S_m}(k). C_{S_n}(k)$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

3.1.20 İddia. Bir G grafi ve bir e kenarı verilsin. e 'nin bir kopyası G_1 'in, bir kopyası da G_2 'nin birer kenarı olacak şekilde G 'yi G_1 ve G_2 graflarının ayrık birleşimi olarak ayırabiliyorsak;

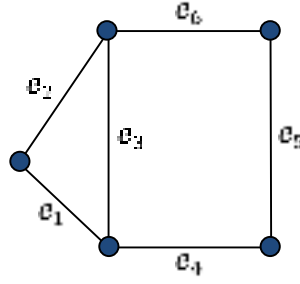
$$C_{G_1}(k). C_{G_2}(k) = k.(k-1).C_G(k)$$

dır.



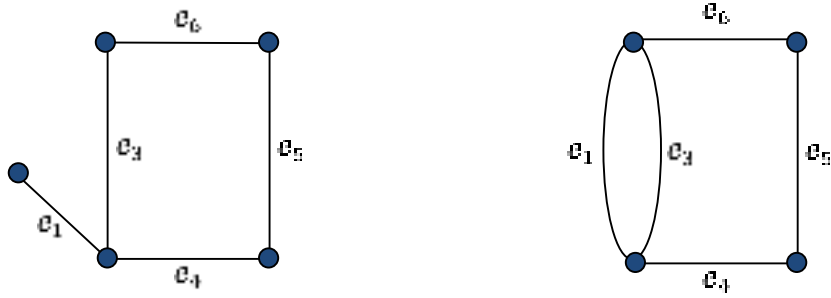
Şekil 3.28. Bir kenarı boyunca ayrılan G grafi

3.1.21 Örnek. (i) C_3 ve C_4 graflarının e_1 kenarı boyunca yapıştırıldığı graf G olsun.



Şekil 3.29. G grafi

$C_G(k) = C_{G-e_2}(k) - C_{G/e_2}(k)$ eşitliği dolayısıyla yeni oluşan graflar Şekil 3.30'da gösterilmiştir.



Şekil 3.30. $G-e_2$ ve G/e_2 grafları

$G-e_2$ grafinin $T_{4,1}$ grafiyle aynı olduğu görülmektedir. Teorem 3.1.16 gereğince

$$C_{T_{4,1}}(k) = (k-1)^5 + (k-1)^2$$

dir.

G/e_2 grafi için G_{12} gösterimini kullanırsak;

$$C_G(k) = C_{T_{4,1}}(k) - C_{G_{12}-e_1}(k) + C_{G_{12}/e_1}(k)$$

eşitliği oluşur.

$G_{12}-e_1$ ve G_{12}/e_1 grafları Şekil 3.31’te gösterilmiştir.



Şekil 3.31. $G_{12}-e_1$ ve G_{12}/e_1 grafları

$G_{12}-e_1$ grafinin C_4 grafiyle aynı olduğu, G_{12}/e_1 grafi ise döngü içerdiğinden $C_{G_{12}/e_1}(k)$ değerinin 0 olacağı bilinmektedir. Dolayısıyla;

$$C_G(k) = C_{T_{4,1}}(k) - C_{G_{12}-e_1}(k) + C_{G_{12}/e_1}(k)$$

eşitliğinde bu değerler yerlerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} C_G(k) &= C_{T_{4,1}}(k) - C_{C_4}(k) \\ &= [(k-1)^5 + (k-1)^2] - [(k-1)^4 + (k-1)] \\ &= [(k-1)^2 \cdot ((k-1)^3 + 1)] - [(k-1) \cdot ((k-1)^3 + 1)] \\ &= ((k-1)^3 + 1) \cdot (k-1) \cdot (k-1-1) \\ &= k \cdot (k^2 - 3k + 3) \cdot (k-1) \cdot (k-2) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $G^* = C_3 \amalg C_4$ olarak alınırsa, Teorem 3.1.1 gereğince

$$C_{G^*}(k) = C_{C_3}(k) \cdot C_{C_4}(k)$$

dır.



Şekil 3.32. $G^* = C_3 \amalg C_4$ grafi

$C_{C_3}(k)$ ve $C_{C_4}(k)$ değerleri denklemde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} C_G^*(k) &= k.(k-1).(k-2).k.(k-1).(k^2-3k+3) \\ &= k^2.(k-1)^2.(k-2).(k^2-3k+3) \end{aligned}$$

elde edilir.

(i) ve (ii) şıklarında elde edilen çözümler,

$$C_G(k) = k.(k-1).(k-2).(k^2-3k+3)$$

$$C_{C_3}(k).C_{C_4}(k) = k^2.(k-1)^2.(k-2).(k^2-3k+3)$$

şeklinde bulunmuştur. Dolayısıyla

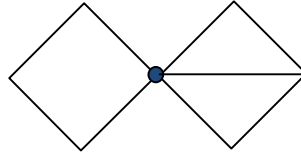
$$k.(k-1).C_G(k) = C_{C_3}(k).C_{C_4}(k)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

3.2 Örnekler

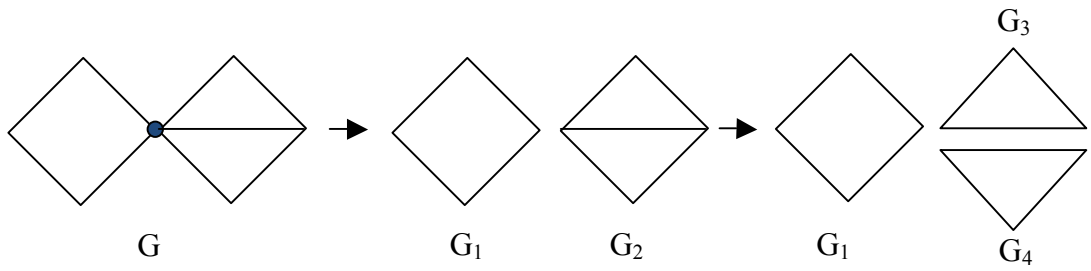
Verilen G graflarının, küçültme yöntemleri kullanılarak kromatik polinomları bulunursa,

1-)



Şekil 3.33. G grafi

Şekil 3.34’de gösterilen yolu takip ederek G grafi bağlantısız parçalara ayrılırsa,



Şekil 3.34. G grafinin küçültülmesi

Teorem 3.1.13 gereğince;

$$k.C_G(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)$$

elde edilir.

$$C_{G_2}(k) = \frac{k.C_G(k)}{C_{G_1}(k)}$$

İddia 3.1.20 gereğince;

$$k.(k-1).C_{G_2}(k) = C_{G_3}(k).C_{G_4}(k)$$

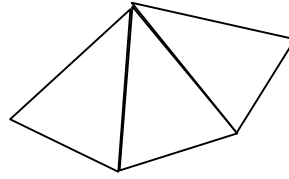
dir. $C_{G_2}(k)$ değeri bu eşitlikte yerine konulursa;

$$k.(k-1). \frac{k.C_G(k)}{C_{G_1}(k)} = C_{G_3}(k).C_{G_4}(k)$$

$$C_G(k) = \frac{C_{G_3}(k).C_{G_4}(k).C_{G_1}(k)}{k^2(k-1)}$$

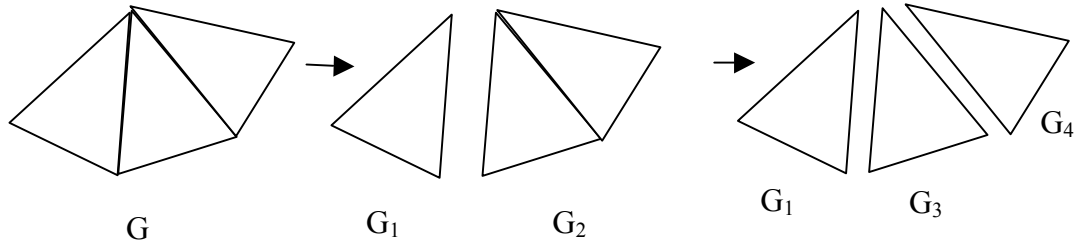
ifadesine ulaşılır.

2-)



Şekil 3.35. G grafi

Şekil 3.36' de gösterilen yolu takip ederek G grafi bağlantısız parçalara ayrılırsa,



Şekil 3.36. G grafinin küçültülmesi

İddia 3.1.20 gereğince;

$$k.(k-1).C_G(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k) \quad (1.2)$$

$$k.(k-1).C_{G_2}(k) = C_{G_3}(k).C_{G_4}(k)$$

$$C_{G_2}(k) = \frac{C_{G_3}(k).C_{G_4}(k)}{k.(k-1)}$$

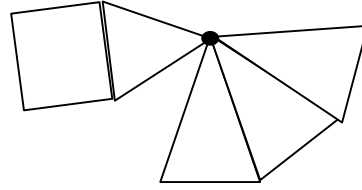
elde edilir. Bulunan $C_{G_2}(k)$ değeri (1.2) denkleminde yerine yazılırsa;

$$k \cdot (k-1) \cdot C_G(k) = C_{G_1}(k) \cdot \frac{C_{G_3}(k) \cdot C_{G_4}(k)}{k}$$

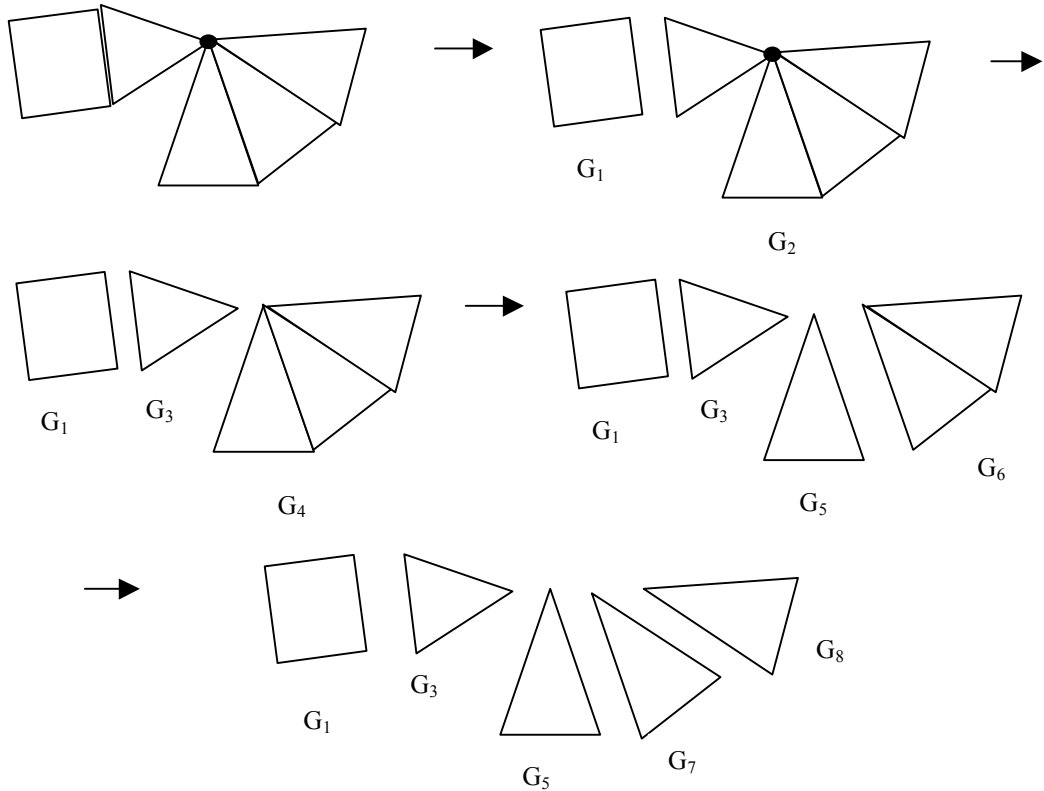
$$C_{G_1}(k) = \frac{C_{G_1}(k) \cdot C_{G_3}(k) \cdot C_{G_4}(k)}{k^2(k-1)^2}$$

elde edilir.

3-)



Şekil 3.37. G grafi



Şekil 3.38. G grafinin küçültülmesi

Şekil 3.38'da gösterilen yolu takip ederek G grafi bağlantısız parçalara ayrılırsa,

İddia 3.1.20 ve Teorem 2.3.4 gereğince;

$$k.(k-1).C_G(k) = C_{G_1}(k).C_{G_2}(k)$$

$$k.C_{G_2}(k) = C_{G_3}(k).C_{G_4}(k)$$

$$k.(k-1).C_{G_4}(k) = C_{G_5}(k).C_{G_6}(k)$$

$$k.(k-1).C_{G_6}(k) = C_{G_7}(k).C_{G_8}(k)$$

eşitlikleri elde edilir.

$$C_{G_6}(k) = \frac{C_{G_7}(k).C_{G_8}(k)}{k.(k-1)}$$

$$C_{G_4}(k) = \frac{C_{G_3}(k).C_{G_5}(k).C_{G_6}(k)}{k^2(k-1)^2}$$

$$C_{G_2}(k) = \frac{C_{G_3}(k).C_{G_5}(k).C_{G_7}(k).C_{G_8}(k)}{k^3(k-1)^2}$$

$$C_G(k) = \frac{C_{G_1}(k).C_{G_3}(k).C_{G_5}(k).C_{G_7}(k).C_{G_8}(k)}{k^4(k-1)^3}$$

elde edilir.

3.3 Kromatik Polinomlar Arasında Geçiş

Bu kısımda bir graf türünden bir kenar silerek kromatik polinomunu bildiğimiz bir başka graf türünü elde etmek suretiyle başlangıçtaki grafın kromatik polinomunu elde etmeye yarayan bir yönteme örnek vereceğiz. Burada sadece C_n devir grafından herhangi bir kenar silinerek geriye kalan P_n patikasının önceden bulunmuş olan kromatik polinomundan faydalanarak C_n devir grafının kromatik polinomunun hesaplanmasını göstereceğiz. Benzer işlemler diğer graf türleri için de yapılabilir.

C_n devir grafından herhangi bir kenar silindiğinde geriye P_n patikasının kaldığı önceki bölümlerde gösterilmişti (Teorem 2.3.13) Bu bölümde silme işlemi ardı ardına yapıldığında oluşacak graflar arasında bir kural tanımlanacaktır.

$$C_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n \cdot (k-1) \quad (\text{Teorem 2.3.13})$$

$$C_{P_n}(k) = k \cdot (k-1)^{n-1} \quad (\text{Teorem 2.3.5})$$

olduğu biliniyor. En küçük devir grafi olan C_3 ve C_3 'ten herhangi bir kenar silinerek elde edilen P_3 grafının kromatik polinomlarının oranları ile işlemlere başlanır ve bu işlemlere çıkarılan kenar sayıları her defasında birer arttırılarak devam edilirse;

$$\begin{aligned} \frac{C_{C_3}(k)}{C_{P_3}(k)} &= \frac{k-2}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1} \\ \frac{C_{C_4}(k)}{C_{P_4}(k)} &= \frac{k^2-3k+3}{(k-1)^2} = 1 + \frac{k-2}{(k-1)^2} \\ \frac{C_{C_5}(k)}{C_{P_5}(k)} &= \frac{k^3-4k^2+6k-4}{(k-1)^3} = 1 - \frac{k^2-3k+3}{(k-1)^3} \\ \frac{C_{C_6}(k)}{C_{P_6}(k)} &= \frac{k^4-5k^3+10k^2-10k+5}{(k-1)^4} = 1 + \frac{k^3-4k^2+6k-4}{(k-1)^4} \end{aligned}$$

oranları elde edilir. Bulunan bu oranlar genelleştirilirse;

$$\frac{C_{C_n}(k)}{C_{P_n}(k)} = \frac{C_{C_n}(k)}{C_{C_{n-1}}(k)} = 1 - \frac{(k-1)^{n-1} - 1}{k \cdot (k-1)^{n-1}}, \quad n \text{ çift ise}$$

$$\frac{C_{C_n}(k)}{C_{P_n}(k)} = \frac{C_{C_n}(k)}{C_{C_{n-1}}(k)} = 1 + \frac{(k-1)^{n-1} + 1}{k \cdot (k-1)^{n-1}}, \quad n \text{ tek ise}$$

sonuçlarına varılır.

Bu sonuçlardan hareketle,

$$\begin{aligned}
(k-1).(k-2) + 1 &= k^2 - 3k + 3 \\
(k-1).(k^2 - 3k + 3) - 1 &= k^3 - 4k^2 + 6k - 4 \\
(k-1).(k^3 - 4k^2 + 6k - 4) + 1 &= k^4 - 5k^3 + 10k^2 - 10k + 5 \\
&\dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerde;

$$\begin{aligned}
k-2 &= A_1(k) \\
k^2 - 3k + 3 &= A_2(k) \\
k^3 - 4k^2 + 6k - 4 &= A_3(k) \\
k^4 - 5k^3 + 10k^2 - 10k + 5 &= A_4(k) \\
&\dots
\end{aligned}$$

yazılırsa;

$$\begin{aligned}
(k-1).A_1(k) + 1 &= A_2(k) \\
(k-1).A_2(k) - 1 &= A_3(k) \\
(k-1).A_3(k) + 1 &= A_4(k) \\
&\dots
\end{aligned}$$

bağıntıları oluşacaktır. Bu gruplandırma genelleştirilirse

$$A_n(k) = \begin{cases} (k-1).A_{n-1}(k) + 1, & n \text{ çift ise} \\ (k-1).A_{n-1}(k) - 1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir. Buradaki A_n polinomları A_1 polinomu türünden yazılmak istenirse;

$$\begin{aligned}
A_1(k) &= k-2 \\
A_2(k) &= (k-1).A_1(k) + 1 \\
A_3(k) &= (k-1)^2.A_1(k) + (k-1) - 1 \\
A_4(k) &= (k-1)^3.A_1(k) + (k-1)^2 - (k-1) + 1 \\
A_5(k) &= (k-1)^4.A_1(k) + (k-1)^3 - (k-1)^2 + (k-1) - 1 \\
&\dots
\end{aligned}$$

işlemlere bu şekilde devam edildiğinde,

$$A_n(k) = \begin{cases} (k-1)^{n-1} \cdot A_1(k) + (k-1)^{n-2} - (k-1)^{n-3} + \dots + 1, & n \text{ çift ise} \\ (k-1)^{n-1} \cdot A_1(k) + (k-1)^{n-2} - (k-1)^{n-3} + \dots - 1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

formülü elde edilir.

KAYNAKLAR

Albertson, M.O., Boutin, D.L., Gethner, E., The thickness and chromatic number of r -inflated graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 310 (2010) 2725-2734.

Aldous, J.M., Wilson, R.J., *Graphs and Applications*, The Open University, UK

Berge, C., *The Theory Of Graphs*, Fletcher&Son Ltd., UK.

Bollobas, B., *Graduate Texts in Mathematics, Modern Graph Theory*, Springer, New York.

Bondy, J.A., Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*, Springer, New York.

Biggs, N.L., Lloyd, E.K., Wilson, R.J. 1986. *Graph Theory 1736-1936*. Oxford University Press, London.

Balakrishnan, R., Ranganathan, K. 2012. *A Textbook of Graph Theory (Second Edition)*. Springer, New York.

Brown, J., Erey, A., New bounds for chromatic polynomials and chromatic roots, *Discrete Applied Mathematics* 338 (2015) 1938-1946.

Chen, W., *Applied Graph Theory*, North-Holland Publishing Company, New York.

Deng, H., Balachandran, S., Ayyaswamy, S.K., Venkatakrishnan, Y.B., On the harmonic index and the chromatic number of a graph, *Discrete Applied Mathematics* 161 (2013) 2740-2744.

Dicks, W., Dunwoody, M.J., *Groups acting on graphs*, Cambridge, UK.

Diestel, R., *Graduate Texts in Mathematics, Graph Theory*, Springer, New York.

Foulds, L.R. 1992. *Graph Theory Applications*. Springer, New York.

Golumbic, M.C., Hartman, I.B., *Graph Theory, Combinatorics and Algorithms*, Springer, New York.

Gross, J.L., Tucker, T.W., *Topological Graph Theory*, Wiley, USA.

Harary, F. 1994. *Graph Theory*. Addison-Wesley, US, 22 pp.

Harris, J.M., Hirst J.L., Mossinghoff M.J., *Combinatorics and Graph Theory*. Springer, New York.

Ray, S.S., *Graph Theory with Algorithms and its Applications*, Springer, New York.

West, D.B. 1996. *Introduction to Graph Theory*. Upper Saadle River: Prentice Hall.

Matematik Dünyası Dergisi, 2004

Tübitak, Bilim ve Teknik, 2007

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Utkum ŞANLI
Doğum Yeri ve Tarihi : Kızılcahamam/Ankara, 08/04/1982
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Bursa Kız Lisesi, 1995-1999
Lisans : Ankara Üniversitesi, 1999-2004
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi, 2013-...

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Milli Eğitim Bakanlığı 2010-...
İletişim (e-posta) : utkumsanli@hotmail.com