ÖKLİT UZAYINDAKİ SABİT AÇILI YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

KADER ASLAN

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİT UZAYINDAKİ SABİT AÇILI YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Kader ASLAN

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2015

TEZ ONAYI

Kader ASLAN tarafından hazırlanan "Öklit Uzayındaki Sabit Açılı Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Üye: Prof. Dr. Kadri ARSLAN İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Basri ÇELİK İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Günay ÖZTÜRK İmza
Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../….

İmza

Kader ASLAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖKLİT UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Kader ASLAN

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu çalışmanın amacı $\mathbb{R}^n$ deki sabit açılı yüzeylerin bir sınıflandırmasını vermektir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm temel kavramlardan oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayları arasındaki açılar ile ilgili temel özellikler ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde $\mathbb{R}^3$ deki sabit açılı dönel yüzeyler ve kanal yüzeyler ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde $\mathbb{R}^4$ deki sabit açılı yüzeyler ele alınmıştır.

Son bölümde ise $S^2 \times \mathbb{R}$ deki sabit açılı yüzeyler ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yüzey, dönel yüzey, sabit açılı yüzey

2015, vi+35 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A CHARACTERIZATION OF CONSTANT ANGLE SURFACES IN EUCLIDEAN SPACES

Kader ASLAN

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

The aim of this thesis is to give a characterizations of constant angle surfaces in $\mathbb{R}^n$.

This thesis consist of six chapters.

First chapter is introduction.

In the second chapter it is given some basic definitions and theorems which will be use in the other chapters.

In the third chapter angles between the Euclidean spaces in $\mathbb{R}^n$ are considered.

In the fourth chapter constant angle surface of revolution and canal surfaces in $\mathbb{R}^3$ are considered. Some original results are obtained.

In the fifth chapter constant angle surfaces in 4-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^4$ are considered.

In the final chapter constant angle surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ are considered.

Key Words: Surface, surface of revolution, constant angle surface

2015, vi+35 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, maddi manevi desteğini asla benden esirgemeyen, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla benim yanımda olduğunu her zaman hissettiren, engin bilgi ve fikirleriyle beni aydınlatan ve yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN' a yürekten teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteklerini gördüğüm sayın hocalarım Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a, Doç. Dr. Esen İYİGÜN'e ve Araş. Gör. Dr. Betül BULCA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anne ve babama, ayrıca her zaman yanımda olan, beni her koşulda destekleyen, kendime güvenmemi sağlayan hayat arkadaşıma sonsuz teşekkürler...

Kader ASLAN
..... /..... /.....

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklit uzayı
γ	Eğri
V_i	Frenet vektörleri
κ_i	Frenet eğrilikleri
$\lVert\ ,\rVert$	Norm
X	Regüler yama
M	Yüzey
C^∞	Diferansiyellenebilme
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^\perp(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
∇	M üzerinde afin koneksiyon
$\tilde{\nabla}$	$\tilde{M}$ üzerinde afin koneksiyon
$\nabla^\perp$	Normal koneksiyon
$<,>$	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
h	İkinci temel form
A_ξ	Şekil operatörü
T_pM	p noktasında teğet uzay
$T_p^\perp M$	p noktasında normal uzay
$\vec{H}$	Ortalama eğrilik vektörü
$\lVert H\rVert$	Ortalama eğrilik
c_{ij}^k	M nin ikinci temel form katsayıları
N	Normal vektör
K	Gauss eğriliği

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı n-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^n$deki sabit açılı yüzeylerin bir sınıflandırmasını vermektir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm temel kavramlardan oluşmaktadır. Bu bölümde $\mathbb{R}^n$ deki yüzeylerin Gauss denklemi, Weingarten denklemi ve ikinci temel form ile ilgili temel kavramlar tanımlanmış bunlarla ilgili bazı temel özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayları arasındaki açılar ile ilgili temel özellikler ele alınmıştır. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda $\mathbb{R}^n$deki alt uzaylar arasındaki açılar ele alınmıştır. İkinci kısımda $\mathbb{R}^n$ de yüksek boyutlu açılar ile ilgili temel özellikler verilmiştir. Üçüncü kısımda ise asli açılar ilgili sonuçlar ve bazı eşitlikler verilmiştir. Son kısmında ise $\mathbb{R}^4$ deki 2-boyutlu alt uzaylar arasındaki asli açılar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde $\mathbb{R}^3$ deki sabit açılı yüzeyler ile ilgili temel kavramlar ele alınmıştır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda $\mathbb{R}^3$ deki sabit açılı yüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir. İkinci kısımda $\mathbb{R}^3$ deki dönel yüzeylerin sabit açılı olması ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Üçüncü kısımda ise $\mathbb{R}^3$ deki kanal yüzeylerin sabit açılı olması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

Beşinci bölümde $\mathbb{R}^4$ deki sabit açılı yüzeyler ele alınmıştır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmakta olup bazı orijinal sonuçlar içermektedir. Birinci kısımda $\mathbb{R}^4$ deki bir yüzeyin sabit açılı olması için gerek ve yeter şartlar ele alınmıştır. İkinci kısımda $\mathbb{R}^4$ deki meridyen yüzeylerinin sabit açılı olması ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Altıncı bölümde $S^2 \times \mathbb{R}$ deki sabit açılı yüzeyler ele alınmıştır. Bunlar ile ilgili bazı temel sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.0. Giriş

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan $\mathbb{R}^n$ de regüler yüzey yamasının Gauss ve Weingarten eşitlikleri ile ilgili bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir.

2.1. $\mathbb{R}^n$ de Yüzeyler

Tanım 2.1.1: $U \subset \mathbb{R}^2$ açık alt küme olmak üzere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$; $X(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), \dots, x_n(u,v))$ biçiminde tanımlanan türevlenebilir dönüşüme koordinat yaması ve bu X dönüşümünün izi ya da görüntüsü *X(D)* ye de lokal yüzey denir (Gray 1993).

M yüzeyi $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ yaması ile verilsin. M nin $p \in X(u,v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, X_u ve X_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M nin *birinci temel formu*

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.1.1}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

1. temel form katsayıları olup $\langle \, , \rangle$ bir Öklit iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.1.2) yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2 \tag{2.1.3}$$

elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \neq 0$ ise $X(u,v)$ yaması regülerdir denir (Gray 1993).

Tanım 2.1.2: M, $\mathbb{R}^n$ de bir yüzey olsun. M üzerinde için $X : M \to \bigcup T_p M$ birebir ve örten dönüşümüne bir vektör alanı denir ve M üzerinde vektör alanları kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1994).

Tanım 2.1.3: M, $\mathbb{R}^n$ de bir yüzey olsun. M üzerinde vektör alanları uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M); \\ (X,Y) &\to \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ için

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X (fY) = (\nabla_X f)Y + f\nabla_X Y$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya $\mathbb{R}^n$ de bir afin koneksiyon denir. Ayrıca bu afin koneksiyon,

iii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$,

iv) $X[\langle Y,Z\rangle] = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_X Z, Y\rangle$

şartlarını da sağlıyorsa $\mathbb{R}^n$de bir Riemann koneksiyonu olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu 1994).

Tanım 2.1.4: $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. $\mathbb{R}^n$ de Riemann koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin *ikinci temel form dönüşümü*

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^\perp(M) \;\; ; h(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \tag{2.1.4}$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.1.4) eşitliği *Gauss denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.1.5: $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $\forall X \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi^{\perp}(M)$ için M nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A : \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) \to \chi(M);\ A_{\xi} X = -\tilde{\nabla}_X \xi + \nabla^{\perp}_X \xi \tag{2.1.5}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_{\xi} X$, ξ ya karşılık gelen şekil operatörü ve $\nabla^{\perp}$ ise $\chi^{\perp}(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. Herhangi $X, Y \in T_p(M)$ için

$$\langle A_{\xi} X, Y \rangle = \langle h(X,Y), \xi \rangle \tag{2.1.6}$$

dir. Bu operatör self-adjoint ve 2-lineerdir. Literatürde (2.1.5) eşitliği *Weingarten denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

3. $\mathbb{R}^n$ ÖKLİT UZAYLARI ARASINDAKİ AÇILAR

3.0. Giriş

Bu bölümde n-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^n$ deki alt uzaylar arasındaki açılar incelenmiştir. Bu bölüm 4 kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda alt uzaylar arasındaki açılar incelenmiştir. İkinci kısımda alt uzaylar arasında yüksek boyutlu açılar ve bunlarla ilgili bazı bilinen sonuçlar verilmiştir. Üçüncü kısımda asli açılar incelenmiştir. Dördüncü kısımda ise 4-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^4$ deki alt uzaylar arasındaki asli açılar incelenmiştir.

3.1. Alt Uzaylar Arasındaki Açılar

($\mathbb{R}^n, <,>$) n-boyutlu reel lineer uzay olsun. Herhangi α, β vektörleri için α ile β nın iç çarpımı

$$< \alpha, \beta > = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \tag{3.1.1}$$

ile tanımlanır. Bununla birlikte, $\mathbb{R}^n$ deki p-tane $(1 \leq p \leq n)$ vektörün dış çarpımından oluşan lineer uzay $\Lambda^p \mathbb{R}^n$ ile gösterilir. Bu uzayın elemanları p-vektörlerdir. Bir p-vektör p-tane vektörün tek tip olarak dış çarpımı olarak yazılırsa bu p-vektör ayrıştırılabilir (ya da basit) dir denir. Herhangi $\alpha, \beta \in \Lambda^p \mathbb{R}^n$ p-vektör çiftleri

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_p \\ \beta &= b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_p \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

için

$$< \alpha, \beta > = \det(< a_i, b_i >) \tag{3.1.3}$$

ile tanımlanır.

Y.Teorem 3.1.1: $\Lambda^p \mathbb{R}^n$ lineer uzayı $<,>$ ile oluşturulmuş bir Öklit uzayıdır (Jiang 1996).

İspat. $\mathbb{R}^n$ de $\{e_j\}$, $1 \leq j \leq n$ ortonormal bir baz seçilsin. Bu takdirde $\Lambda^p \mathbb{R}^n$ nin ortonormal bir bazı $\{E_k\}$, $k = 1,2,...,\binom{n}{p}$ dir. Burada E_k p-tane farklı e_j vektörlerinin dış çarpımında oluşan bir *p*-vektördür (Flanders 1963, sf.14).

Herhangi bir *p*-vektörü $\vec{\alpha}$

$$\alpha = \sum_k \lambda_k \mathrm{E}_k \tag{3.1.4}$$

biçiminde gösterilir. Burada $\lambda_k \in \mathbb{R}$ reel skalerdir. Böylece

$$< \vec{\alpha}, \vec{\alpha} > = \sum_k \lambda_k^2 \tag{3.1.5}$$

elde edilir. Buradan $\alpha \in \Lambda^p \mathbb{R}^n$ için $< \alpha, \alpha > = 0$ dır $\Leftrightarrow \alpha = 0$ dır. Böylece $< , >$ bir Öklit iç çarpımı olduğu sonucuna varılır (Jiang 1996). $\square$

3.2. Yüksek Boyutlu Açılar

$\alpha = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_p$ sıfırdan farklı basit bir *p*-vektör olsun. Bu takdirde α *p*- vektörü $\mathbb{R}^n$ nin *p*- boyutlu alt uzayı A^p ye karşılık gelir. Tersine A^p alt uzayının herhangi bir baz vektörü $\kappa\alpha$ ya eşit olan baz vektörlerinin dış çarpımıdır. Bununla birlikte $1 \leq p < q < n$ için A^p ile B^q sırasıyla α ve β ya karşılık gelen alt uzaylar ve $A^\perp$ de A nın $\mathbb{R}^n$ deki dik bileşeni ise bu takdirde

$$a_i = a_i^T + a_i^\perp \ , \ a_i^T \in A \ , \ a_i^\perp \in A^\perp \ , \ 1 \leq i \leq p$$

dir. Böylece

$$\alpha^T = a_1^T \wedge a_2^T \wedge ... \wedge a_p^T$$
$$\alpha^\perp = a_1^\perp \wedge a_2^\perp \wedge ... \wedge a_p^\perp \qquad (3.2.1)$$
$$\alpha^M = \alpha_1^M \wedge \alpha_2^M \wedge ... \wedge \alpha_p^M$$

için

$$\alpha^M = \alpha - \alpha^T - \alpha^\perp$$

alınırsa

$$\alpha = \alpha^T + \alpha^\perp + \alpha^M \qquad (3.2.1)^*$$

elde edilir. Burada $\alpha^T, \alpha^\perp$ ve α^M sırasıyla α nın teğeti, dik ve karışık kısımlarıdır (Jiang 1996).

Y.Teorem 3.2.1: (3.2.1) ayrışımı A^p alt uzayının bazları arasındaki dönüşümler altında invaryant kalır. Sonuçta A^p alt uzayı içinde başka bir $\{a_j'\}$ bazı seçilirse bu baza karşılık gelen p-vektör

$$\alpha' = a_1' \wedge a_2' \wedge ... \wedge a_p' \qquad (3.2.2)$$

dir. Bu *p*-vektörün bileşenleri α'^T, $\alpha'^\perp$, α'^M olmak üzere

$$\alpha' = \kappa\alpha$$
$$\alpha'^T = \kappa\alpha^T$$
$$\alpha'^\perp = \kappa\alpha^\perp \qquad (3.2.3)$$
$$\alpha'^M = \kappa\alpha^M$$

dir. Buradan $\kappa \neq 0$ bir skalerdir (Jiang 1996).

Y.Teorem 3.2.2: $\alpha \in \Lambda^p \mathbb{R}^n$ bir *p*-vektör olmak üzere $< \alpha, \alpha^T > \geq 0$ dır. Eşitlik durumunda $\alpha^T = 0$ dır (Jiang 1996).

İspat. $\alpha = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_p$ olsun. Bu takdirde $\alpha^T = a_1^T \wedge a_2^T \wedge ... \wedge a_p^T$ dir. Buradan

$$< \alpha, \alpha^T > = \det(< \alpha_i, \alpha_i^T >) \geq 0 \tag{3.2.4}$$

bulunur. □

Y.Teorem 3.2.3: $\alpha^T \in \Lambda^p \mathbb{R}^n$ bir p-vektör olmak üzere

$$\|\alpha\|^2 = \|\alpha^T\|^2 + \|\alpha^\perp\|^2 + \|\alpha^M\|^2$$

dir (Jiang 1996).

İspat. (3.2.1)* ayrışımı yardımıyla

$$\langle \alpha^T, \alpha^\perp \rangle = \langle \alpha^T, \alpha^M \rangle = \langle \alpha^\perp, \alpha^M \rangle = 0 \tag{3.2.5}$$

şartları kullanılarak istenilen sonuç elde edilir. □

Tanım 3.2.4: A^p ve B^q, $p \leq q$ alt uzayları arasındaki açı θ olmak üzere

$$\theta = \arccos \frac{\|\alpha^T\|}{\|\alpha\|} \tag{3.2.6}$$

biçiminde tanımlanır (Jiang 1996).

Açıklama 3.2.5:

i) p-boyutlu açı iki doğru, doğru-düzlem ve iki düzlem arasındaki klasik açıların bir genellemesidir. Böylece Y.Teorem 3.2.3 den $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dir. Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise A^p ve B^q birbirine diktir.

ii) $p = q$ alındığında (3.2.6) formülü

$$\theta = \arccos \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|}{\|\alpha\|.\|\beta\|} \tag{3.2.7}$$

biçimine dönüşür. Burada α ve β basit p-vektörleri arasındaki p-boyutlu açı θ, $\Lambda^p \mathbb{R}^n$ den indirgenen α ve β vektörleri arasındaki Öklit açısına eşit olur.

Teorem 3.2.6: (İndirgenme Teoremi) A ve B, $\mathbb{R}^n$ nin sırasıyla p ve q boyutlu alt uzayları olsun. $(1 \le p \le q < n)$. Farz edelim ki $A \cap B \ne \phi$ ve $A \cap B$ nin A da ve B deki dik bileşenleri sırası ile A' ve B' olsun. Bu takdirde A ve B arasındaki açı A' ile B' arasındaki açıya eşittir (Jiang 1996).

Teorem 3.2.7: (Üç Kosinüs Teoremi) A^p ve B^q, $1 \le p \le q < n$, birbirine dik olmayan alt uzayları olsun. Farz edelim ki C^p, A^p nin B^q içindeki dik izdüşümü ve D^p de B^q nun p-boyutlu alt uzayı olsun. Bu takdirde, θ', θ ve ϕ sırasıyla A^p ile D^p, A^p ile B^q ve C^p ile D^p arasındaki açılar olmak üzere

$$\cos\theta' = \cos\theta . \cos\phi \tag{3.2.8}$$

dir.

İspat. α ve δ sırasıyla A^p ve D^p ye karşılık gelen p-vektörler olsun. Bu takdirde $\alpha^T, \alpha^\perp$ ve α^M, α nın B^q ya göre teğet, normal ve karışık bileşenlerini belirtsin. Bu nedenle $\alpha^\perp$, C^p ye karşılık gelir ve $\langle \alpha^\perp, \delta \rangle = \langle \alpha^M, \delta \rangle = 0$ dır. Böylece

$$\cos\theta' = \frac{|\langle \alpha, \delta \rangle|}{\|\alpha\|.\|\delta\|} = \frac{|\langle \alpha^T, \delta \rangle|}{\|\alpha\|.\|\delta\|}$$

$$= \frac{\|\alpha^T\|}{\|\alpha\|} . \frac{|\langle \alpha^T, \delta \rangle|}{\|\alpha\|.\|\delta\|}$$

$$= \cos\theta . \cos\phi$$

dır. $\square$

Sonuç 3.2.8: A^p ve B^q, $\mathbb{R}^n$ nin sırasıyla p ve q boyutlu alt uzayları olsun. $(1 \leq p \leq q < n.)$ Bu takdirde A^p ile B^q arasındaki θ açısı A^p ile $D^p \subset B^q$ arasındaki açının minimum değerine eşittir (Jiang 1996).

Teorem 3.2.9: (Üçgen Eşitsizliği) A, B ve C $\mathbb{R}^n$ nin üç farklı p-boyutlu alt uzayları olsun. $(1 < p < n)$. Ayrıca θ_{AB}, θ_{AC} ve θ_{BC} sırasıyla A ile B, A ile C ve B ile C arasındaki açılar olsun. Bu takdirde

$$\theta_{AB} + \theta_{BC} \leq \theta_{AC} \tag{3.2.9}$$

dir. Eşitlik durumunda $boy(A \cap B \cap C) = p - 1$ dir.

Teorem 3.2.10: (Bileşen) A^p ve B^q, $\mathbb{R}^n$ nin alt uzayları ($1 \leq p < q < n$, $p \leq n - q$) ve $B^\perp$, B nin $\mathbb{R}^n$ deki dik bileşeni olsun. Bu takdirde θ ve $\theta^\perp$ sırasıyla A ile B ve A ile $B^\perp$ arasındaki açılar olmak üzere $\cos^2\theta + \cos^2\theta^\perp \leq 1$ dir. Eşitlik durumunda p = 1 yada $\theta\theta^\perp = 0$ durumunda $p > 1$ dir.

3.3. Asli Açılar

A^p ve B^q sırasıyla $\mathbb{R}^n$ nin p ve q boyutlu alt uzayları olsun. $(1 \leq p \leq q < n)$. Bu takdirde A^p ile B^q arasındaki asli açılar $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq ... \leq \theta_p \leq \frac{n}{2}$

$$\cos\theta_i = \frac{\langle a_i, b_i \rangle}{\|a_i\| . \|b_i\|} \tag{3.3.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $a \in A^p$, $b \in B^q$ dur (Miso ve Ben-İsrael 1992).

Teorem 3.3.1: A^p ve B^q arasındaki açı θ ve asli açılar $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_p$ olsun. Bu takdirde

$$\cos\theta = \cos\theta_1 . \cos\theta_2 ... \cos\theta_p \tag{3.3.2}$$

dir.

İspat. a_i ve b_i ler birim vektörler olsun. Böylece A^p ye karşılık gelen p-vektör

$$\alpha = a_1 \wedge a_2 \wedge ... a_p$$

birim vektör, yani $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$ olsun. Bu takdirde $a_i^T = b_i \cos\theta_i$, $1 \le i \le p$ yardımıyla

$\alpha^T = \cos\theta_1 . \cos\theta_2 ... \cos\theta_p b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_p$ bulunur. Buradan

$$\cos\theta = \left\| \alpha^T \right\| = \cos\theta_1 . \cos\theta_2 ... \cos\theta_p$$

dir. $\square$

3.4. $\mathbb{R}^4$ deki 2-Boyutlu Alt Uzaylar Arasındaki Asli Açılar

Tanım 3.4.1: V ve W düzlemleri, $\mathbb{R}^4$ ün 2-boyutlu alt uzayları olsun. Böylece V ile W arasındaki $0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \frac{\pi}{2}$ asli açıları (3.3.1) yardımıyla

$$\cos\theta_1 = \langle v_1, w_1 \rangle = maks\{\langle v, w \rangle : v \in V, w \in W, \|v\| = \|w\| = 1\} \tag{3.4.1}$$

$$\cos\theta_2 = \langle v_2, w_2 \rangle = maks\{\langle v, w \rangle : \|v\| = \|w\| = 1, v \perp v, w \perp w\} \tag{3.4.2}$$

dir. Buna göre V ve W düzlemleri, $\mathbb{R}^4$ ün 2-boyutlu alt uzayları olmak üzere $P_W : \mathbb{R}^4 \to W$ dik izdüşümü yardımıyla V üzerinde

$$\langle P_W(v), P_W(v) \rangle = \theta_{WV}(v),\ v \in V \tag{3.4.3}$$

biçiminde simetrik semidefinit kuadratik formu tanımlanır. Böylece $\forall\, v, v' \in V$ için S_{WV} simetrik endomorfizm

$$\langle S_{WV}(v), v' \rangle = \langle P_W(v), P_W(v') \rangle \tag{3.4.4}$$

şeklinde tanımlanır. Yani $S_{WV} \in Sym(V)$ dir (Bayard ve ark. 2011).

Önerme 3.4.2: S_{WV} nin özdeğerleri $\cos^2\theta_1$ ve $\cos^2\theta_2$ dir. Sonuçta $\{v_1, v_2\}$ V nin ortonormal bir bazı vardır $\ni$ V nin her bir $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ elemanı için

$$Q_{WV}(v) = x_1^2 \cos^2\theta_1 + x_2^2 \cos^2\theta_2 \tag{3.4.5}$$

dir (Bayard ve ark. 2011).

İspat. (3.4.3) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} Q_{WV}(v) &= \langle P_W(v), P_W(v) \rangle \\ &= \langle P_W(x_1 v_1 + x_2 v_2), P_w(x_1 v_1 + x_2 v_2) \rangle \\ &= x_1^2 \langle P_W(v_1), P_W(v_1) \rangle + x_2^2 \langle P_W(v_2), P_W(v_2) \rangle \\ &= x_1^2 \langle S_{WV}(v_1), v_1 \rangle + x_2^2 \langle S_{WV}(v_2), v_2 \rangle_1 \end{aligned}$$

dir. Böylece $\langle S_{WV}(v_1), v_1 \rangle = \cos^2\theta_1$, $\langle S_{WV}(v_2), v_2 \rangle = \cos^2\theta_2$ eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir. □

Y.Teorem 3.4.3: V ve W , $\mathbb{R}^4$ ün 2-boyutlu alt uzayları olsun. Bu takdirde V ile W nun asli açıları θ_1 ve θ_2 olmak üzere V ile W' arasındaki asli açılar

$$\theta_1^{\perp} = \frac{\pi}{2} - \theta_2 < \theta_2^{\perp} = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \tag{3.4.6}$$

dir (Bayard ve ark. 2011).

İspat. $\forall\, v \in V$ elemanı

$$v = P_W(v) + P_w(v) \quad , \quad P_W(v) \perp P_{W^\perp}(v) \tag{3.4.7}$$

için

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= \langle P_W(v), P_W(v)\rangle + \langle P_{W^\perp}(v), P_{W^\perp}(v)\rangle \\ &= \theta_{WV}(v) + \theta_{W^\perp V}(v) \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

dir. Böylece (3.2.3) den dolayı

$$\theta_{W^\perp V}(v) = x_1^2 \sin^2\theta_1 + x_2 \sin^2\theta_2 \tag{3.4.9}$$

dir. Bununla birlikte Önerme 3.4.2 yardımıyla W yerine $W^\perp$ alınarak $\cos^2\theta_1^\perp = \sin^2\theta_2$ ve $\cos^2\theta_{21}^\perp = \sin^2\theta_1$ elde edilir. □

Önerme 3.4.4: Verilen $0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \dfrac{\pi}{2}$ açıları için $\mathbb{R}^4$ de V ve W gibi iki düzlem vardır ve bu açılar bu düzlemlerin asli açılarıdır (Bayard ve ark. 2011).

İspat. $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $\mathbb{R}^4$ de ortonormal baz olsun. Ayrıca $W = Sp\{w_1, w_2\}$ alınırsa v_1 ve v_2 ortonormal vektörleri

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos\theta_1 w_2 + \sin\theta_1 w_4 \\ v_2 &= \cos\theta_2 w_1 + \sin\theta_2 w_3 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Böylece $V = Sp\{v_1, v_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P_W(v_1) &= \cos\theta_1 w_2 \\ P_W(v_2) &= \cos\theta_2 w_1 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ için

$$\begin{aligned} \theta_{WV}(v) &= \langle P_W(v), P_W(v)\rangle = \langle P_w(x_1v_1 + x_2v_2), P_w(x_1v_1 + x_2v_2)\rangle \\ &= x_1^2\langle P_w(v_1), P_w(v_1)\rangle + x_2^2\langle P_w(v_2), P_w(v_2)\rangle = x_1^2\cos^2\theta_1 + x_2^2\cos^2\theta_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Önerme (3.4.4) yardımıyla θ_1 ve θ_2 asli açılar olduğu görülür. □

Tanım 3.4.5: (Lagrange özdeşliği) $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ vektör uzayı üzerinde

$$\langle v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle \langle v_1, w_2 \rangle \tag{3.4.10}$$

biçiminde tanımlanan doğal skaler çarpımı *Lagrange özdeşliği* olarak bilinir (Bayard ve ark. 2011).

$\mathbb{R}^4$ de yönlü düzlemler V ve W olmak üzere $\{v_1, v_2\}$ ve $\{w_1, w_2\}$ sırasıyla V ve W nun ortonormal bazları olsun. Ayrıca V ile W arasındaki $\theta \in [0, \pi]$ açısı

$$\cos\theta = \langle v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2 \rangle \tag{3.4.11}$$

dir. Bununla birlikte V ile $W^\perp$ arasındaki açı $\theta^\perp \in [0, \pi]$ ile ifade edilirse W ile $W^\perp$ in pozitif yönlü bazlarının birleşimi $\mathbb{R}^4$ ün pozitif yönlendirilmiş bazını verir. Yani $Sp\{v_1, v_2\} \equiv W$ ve $Sp\{w_1, w_2\} \equiv W^\perp$ ise $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ dir. Benzer şekilde $V^\perp$ ile W arasındaki açı da θ dır.

Y.Teorem 3.4.6: θ ve $\theta^\perp$ sırasıyla V ile W ve V ile $W^\perp$ (yada $V^\perp$ ile W) arasındaki açılar olmak üzere

$$\begin{aligned} |\cos\theta| &= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 \\ |\sin\theta| &= \sin\theta_1 . \sin\theta_2 \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

dir. Buradan θ_1 ve θ asli açılardır (Bayard ve ark. 2011).

Sonuç 3.4.7: $\alpha, \beta \in \Lambda^2 \mathbb{R}^4$ için $<\alpha, \alpha><\beta, \beta> \geq <\alpha, \beta>^2$ dir. Eşitlik durumunda α bivektörü β dan skaler faktör ile ayrılır.

4. $\mathbb{R}^3$ DE SABİT AÇILI YÜZEYLER

4.0. Giriş

Bu bölümde 3-boyutlu Öklit uzayında sabit açılı yüzeyler ele alınmıştır. Bu bölüm 2 kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda $\mathbb{R}^3$ deki bir yüzeyin sabit açılı olması şartları ele alınmıştır. İkinci kısımda $\mathbb{R}^3$ de sabit açılı dönel yüzeyler incelenmiştir. Son kısımda ise $\mathbb{R}^3$ de sabit açılı kanal yüzeyler ele alınmıştır.

4.1. $\mathbb{R}^3$ de Sabit Açılı Yüzeyler

$M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. M üzerinde bir ortonormal çatı,

$$e_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|} \tag{4.1.1}$$

$$e_2 = \frac{\left(X_v - \langle X_u, X_v\rangle\right)\dfrac{X_u}{\|X_u\|^2}}{\left\|\left(X_v - \langle X_u, X_v\rangle\right)\dfrac{X_u}{\|X_u\|^2}\right\|} \tag{4.1.2}$$

$$e_3 = e_1 \times e_2 \tag{4.1.3}$$

biçiminde seçilsin. Gauss ve Weingarten denklemleri yardımıyla

$$\tilde{\nabla}_{e_i} e_j = \nabla_{e_i} e_j + h(e_i, e_j) \tag{4.1.4}$$

$$\nabla_{e_i} e_3 = -A_{e_3} e_i \tag{4.1.5}$$

$(1 \le i, j \le 2)$ elde edilir.

Tanım 4.1.1: $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bununla birlikte

$$\vec{k} = \vec{X}_u + \cos\theta \vec{e}_3 \tag{4.1.6}$$

birim sabit vektörü tanımlansın. Burada θ, $\vec{k}$ ile $\vec{e}_3$ arasındaki açı fonksiyonudur. Eğer θ açısı sabit ise M yüzeyine *sabit açılı yüzey* denir (Nistor 2009,2011).

$M \subset \mathbb{R}^3$ sabit açılı bir yüzey olsun. Bu taktirde

$$\left\|\vec{k}\right\|^2 = \left\|X_u\right\|^2 + \cos^2\theta \left\|e_3\right\|^2 \tag{4.1.7}$$

dir. Bununla birlikte $\vec{k}$ birim vektör olduğundan $\left\|X_u\right\| = \sin\theta$ dır. Yani $X_u = \sin\theta\, e_1$ dir. Böylece

$$\vec{k} = \sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_3 \tag{4.1.8}$$

elde edilir. Bu vektörün e_1 ve e_2 yönündeki türevleri sırasıyla

$$0 = \tilde{\nabla}_{e_1} \vec{k} = \sin\theta \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 + \cos\theta \tilde{\nabla}_{e_1} e_3 \tag{4.1.9}$$

$$0 = \tilde{\nabla}_{e_2} \vec{k} = \sin\theta \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 + \cos\theta \tilde{\nabla}_{e_2} e_3 \tag{4.1.10}$$

dir. Weingarten denklemi yardımıyla

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 = -\lambda_1 e_1 - \mu_1 e_2 \tag{4.1.11}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_3 = -\lambda_2 e_1 - \mu_2 e_2 . \tag{4.1.12}$$

Burada $\lambda_i, \mu_i \in C^\infty(M)$ dir. Böylece (4.1.9)-(4.1.12) yardımıyla

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \cot\theta(\lambda_1 e_1 + \mu_1 e_2) \tag{4.1.13}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = \cot\theta\,(\lambda_2 e_1 + \mu_2 e_2) \tag{4.1.14}$$

elde edilir. Ayrıca $\langle e_1, e_3 \rangle = 0$ ifadesi e_1 ve e_2 ye göre türevlerinden,

$$\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_1, e_3 \rangle + \langle e_1, \tilde{\nabla}_{e_1} e_3 \rangle = 0 \tag{4.1.15}$$

$$\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_1, e_3 \rangle + \langle e_1, \tilde{\nabla}_{e_2} e_3 \rangle = 0 \tag{4.1.16}$$

bulunur. Buradan, (4.1.11) - (4.1.16) denklemleri yardımıyla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ bulunur. Ayrıca şekil operatörü simetrik olduğundan

$$\langle A_{e_3} e_2, e_1 \rangle = 0$$
$$\langle A_{e_3} e_1, e_2 \rangle = -\mu_1 \langle e_1, e_2 \rangle = 0$$

yardımıyla $\mu_1 = 0$ dir.

Benzer şekilde $\langle e_3, e_2 \rangle$ nin e_1 e göre türevi alınırsa

$$\langle A_{e_3} e_1, e_2 \rangle = \langle h(e_1, e_2) e_3 \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_2, e_3 \rangle$$

dır. Ayrıca $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$ in e_1 vektörüne göre türevi alınırsa $\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_2, e_2 \rangle = 0$ bulunur. Buradan $\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0$ elde edilir. Bununla birlikte $\langle e_2, e_3 \rangle = 0$ ın e_2 vektörüne göre türevi alınırsa

$$\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_3 \rangle + \langle e_2, \tilde{\nabla}_{e_2} e_3 \rangle = 0$$

bulunur. Buradan

$$\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_3 \rangle = \mu_2 \quad \text{yani} \quad h(e_2, e_2) = \mu_2 e_3$$

dir. Ayrıca $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ ın e_2 vektörüne göre türevi alınırsa

$$\left\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_1, e_2 \right\rangle + \left\langle e_1, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \right\rangle = 0$$

bulunur. Buradan

$\left\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_1 \right\rangle = -\mu_2 \cot\theta$ yani $\nabla_{e_2} e_2 = -\mu_2 \cot\theta \, e_1$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Y.Teorem 4.1.2: $M \subset \mathbb{R}^3$ sabit açılı bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 &= \cot\theta \, \mu_2 e_2 \\ \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= -\cot\theta \, \mu_2 e_1 + \mu_2 e_3 \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

dir (Munteanu ve Nistor 2009).

Böylece (4.1.17) yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.1.3: $M \subset \mathbb{R}^3$ sabit açılı bir yüzey olsun. Bu takdirde M nin şekil operatörü matrisi

$$A_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \tag{4.1.18}$$

biçimindedir. Burada $\mu_2 \in C^{\infty}(M)$ dir.

Sonuç 4.1.4: $\mathbb{R}^3$ deki tüm sabit açılı yüzeyler düz olup ortalama eğrilikleri $H = \frac{1}{2}\mu_2$ dir.

İspat. $M \subset \mathbb{R}^3$ sabit açılı yüzey olsun. Bu takdirde (4.1.18) yardımıyla $K = \det A_{e_3} = 0$ ve $H = \frac{1}{2} iz A_{e_3} = \frac{1}{2}\mu_2$ elde edilir. □

Tanım 4.1.5: (Konformal yama) $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $X(u,v)$ yaması ile verilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned}&\langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle = \beta^2(u,v)\\&\langle X_u, X_v\rangle = 0\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

sağlanırsa $X(u,v)$ ye *konformal yama* adı verilir (Fröhlich 2013). Burada β türevlenebilir bir fonksiyondur.

Önerme 4.1.6: $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi konformal yama ile verilsin. Eğer M sabit açılı bir yüzey ise bu taktirde

$$\mu_2\left(\mu_2\beta^2 \cot\theta - \beta_u\right) = 0 \tag{4.1.20}$$

dir.

İspat. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $X(u,v)$ konformal yama ile verildiğinden

$$e_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|}\ ,\quad e_2 = \frac{X_v}{\|X_v\|} \tag{4.1.21}$$

dir. Böylece ikinci kısmi türevler kullanılarak

$$\begin{aligned}X_{uu} &= \tilde{\nabla}_{X_u} X_u = \nabla_{X_u}\|X_u\|e_1 = \tilde{\nabla}_{X_u}\beta e_1\\&= \beta_u e_1 + \beta\tilde{\nabla}_{X_u}e_1 = \beta_u e_1 + \beta^2\tilde{\nabla}_{e_1}e_1\\&= \beta_u e_1 = \frac{\beta_u}{\beta} = \beta_2 e_2\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

$$\begin{aligned}X_{uv} &= \tilde{\nabla}_{X_u} X_v = \tilde{\nabla}_{X_u}\beta e_2\\&= \beta_u e_2 + \beta^2\tilde{\nabla}_{e_1}e_2 = \frac{\beta_u}{\beta}X_v\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

$$
\begin{aligned}
X_{vu} &= \tilde{\nabla}_{X_v} X_u = \tilde{\nabla}_{X_v} \beta e_1 \\
&= \beta_v e_1 + \beta^2 \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 \\
&= \beta_v e_1 + \beta^2 \cot\theta \mu_2 e_2
\end{aligned}
\tag{4.1.24}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{vv} &= \tilde{\nabla}_{X_v} X_v = \tilde{\nabla}_{X_v} \beta e_2 \\
&= \beta_v e_2 + \beta \tilde{\nabla} X_v e_2 \\
&= \beta_v e_2 + \beta^2 \left(-\cot\theta \mu_2 e_1 + \mu_2 e_3 \right)
\end{aligned}
\tag{4.1.25}
$$

elde edilir. Burada $X_{uv} = X_{vu}$ olduğundan (4.1.23) ve (4.1.24) eşitliklerinden

$$
\beta_u e_2 = \beta_v e_1 + \beta^2 \cot\theta \, \mu_2 e_2 \tag{4.1.26}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
\beta_v &= 0 \\
\beta_u &= \beta^2 \cot\theta \mu_2
\end{aligned}
\tag{4.1.27}
$$

dır. Ayrıca e_3 vektörünün X_u ve X_v ye göre kovaryant türevleri alınırsa

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_u} e_3 &= \tilde{\nabla}_{\beta e_1} e_3 = \beta \tilde{\nabla}_{e_1} e_3 = 0 \\
\tilde{\nabla}_{X_v} e_3 &= \tilde{\nabla}_{\beta e_2} e_3 = \beta \tilde{\nabla}_{e_2} e_3 = -\beta \mu_2 e_2 = -\mu_2 X_v
\end{aligned}
\tag{4.1.28}
$$

elde edilir. Buradan

$$
-\tilde{\nabla}_{X_u} \tilde{\nabla}_{X_v} e_3 + \tilde{\nabla}_{X_v} \tilde{\nabla}_{X_u} e_3 = 0 \tag{4.1.29}
$$

Schwartz eşitliği ve (4.1.28) eşitliği yardımıyla

$$
-\tilde{\nabla}_{X_u} \tilde{\nabla}_{X_v} e_3 + \tilde{\nabla}_{X_v} \tilde{\nabla}_{X_u} e_3 = -\tilde{\nabla}_{X_u} \left(\mu_2 X_v \right) = 0
$$

elde edilir. Buradan

$$
\left(\mu_2 \right)_u X_v + \mu_2 X_{uv} = 0 \tag{4.1.30}
$$

bulunur. Böylece (4.1.23) eşitliği kullanılırsa

$$(\mu_2)_u + \mu_2 \frac{\beta_u}{\beta} = 0 \tag{4.1.31}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.1.24) eşitliği yardımıyla

Ayrıca (4.1.27) eşitliğinden

$$(\mu_2)_u + \mu_2{}^2 \beta \cot\theta = 0 \tag{4.1.32}$$

elde edilir. Böylece (4.1.32) eşitliğindeki ifadeler karşılıklı eşitlenirse (4.1.20) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

4.2. $\mathbb{R}^3$ de Sabit Açılı Dönel Yüzeyler

$M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi,

$$X(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v) \tag{4.2.1}$$

yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun, burada $\alpha(u) = (g(u), h(u))$ eğrisi M nin üreteç eğrisidir. M nin teğet uzayı

$$\begin{aligned} X_u &= (g', h'\cos v, h'\sin v) \\ X_v &= (0, -h\sin v, h\cos v) \end{aligned}$$

vektörleri ile gerilir. M nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = (g')^2 + (h')^2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G &= \langle X_u, X_v \rangle = h^2 \end{aligned} \tag{4.2.1)*}$$

dir. Böylece

$$\|X_u \times X_v\| = EG - F^2 = h\sqrt{(g')^2 + (h')^2}$$

yardımıyla

$$N=\frac{X_u\times X_v}{\left\|X_u\times X_v\right\|}=\frac{1}{\sqrt{(g')^2+(h')^2}}\left(u',-g'\cos v,-g'\sin v\right)$$

bulunur. Ayrıca X_u ve X_v nin u ve v ye göre türevlerinden

$$\begin{aligned}
X_{uu}&=\left(g'',h''\cos v,h''\sin v\right)\\
X_{uv}&=\left(0,-h'\sin v,h'\cos v\right)\\
X_{vv}&=\left(0,-h\cos v,-h\sin v\right)
\end{aligned}$$

dir. Böylece M nin 2. temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
c_{11}&=\left\langle X_{uu},e_3\right\rangle=\frac{h'g''-g'h''}{\sqrt{(g')^2+(h')^2}}\\
c_{12}&=\left\langle X_{uv},e_3\right\rangle=0\\
c_{22}&=\left\langle X_{vv},e_3\right\rangle=\frac{hg'}{\sqrt{(g')^2+(h')^2}}
\end{aligned}$$

dir. Böylece (Bulca 2012) den

$$\begin{aligned}
h_{11}&=\frac{c_{11}}{E}\\
h_{12}&=\frac{c_{12}}{\sqrt{EG}}=0\\
h_{22}&=\frac{c_{22}}{G}=\frac{g'}{h\sqrt{(g')^2+(h')^2}}
\end{aligned}$$

dir. Böylece M nin şekil operatörü matrisi

$$A_N=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{h'g''-g'h''}{\left((g')^2+(h')^2\right)^{\frac{3}{2}}}&0\\0&\dfrac{g'}{h\sqrt{(g')^2+(h')^2}}\end{pmatrix}\qquad(4.2.2)$$

elde edilir. Buradan Önerme 4.1.2 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.1: $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.2.1) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. Bu takdirde M yüzeyinin sabit açılı olması için gerek ve yeter şart

$$h'g'' - g'h'' = 0 \tag{4.2.3}$$

$$\mu_2 = \frac{g'}{h\sqrt{(g')^2 + (h')^2}} \tag{4.2.4}$$

olmasıdır.

Bu teoremin yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2: $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.2.1) yaması ile verilen bir dönel yüzey ve M nin üreteç eğrisi $\alpha(u) = (g(u), h(u))$ birim hızlı olsun. Bu taktirde M yüzeyinin sabit açılı olması için gerek ve yeter şart

$$h(u) = au + b, \quad g(u) = \pm\sqrt{1-a^2}\,u + c \text{ ya da } g(u) = au + b, \quad h(u) = \pm\sqrt{1-a^2}\,u + c \tag{4.2.5}$$

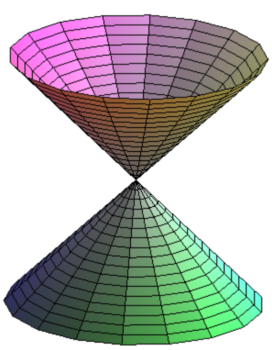
olmasıdır. Burada a,b ve c integral sabitleridir.

İspat. $\alpha(u) = (g(u), h(u))$ birim hızlı olsun. Bu taktirde M yüzeyi sabit açılı ise (4.2.3) eşitliğinden

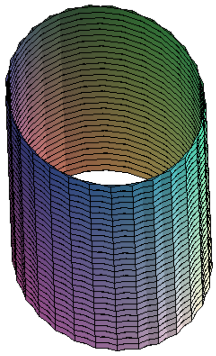
$$h'g'' - g'h'' = 0, \quad (g')^2 + (h')^2 = 1 \tag{4.2.6}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin aşikar olmayan bir çözümü (4.2.5) dür. □

Bu yüzeylerin $h = 0.2u + 5,\ g = \pm\sqrt{1-0.4u} + 11$ ya da $g(u) = 0.2u + 5,\ h(u) = \pm\sqrt{1-0.4u} + 11$ değerleri için grafikleri sırasıyla Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 de verilmiştir.



Şekil 4.1



Şekil 4.2

Genel durumlarda aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 4.2.3:

1) $g = \sin\theta$ sabit olsun. Bu takdirde M dönel yüzeyi bir düzlem olup $\mu_2 = 0$ dır. Bu nedenle düzlem minimal, sabit açılı bir yüzeydir.

2) $g = u\sin\theta$ olsun. Bu takdirde (4.1.21) eşitliğinden $h'' = 0$ dır. Buradan $h(u) = au + b$ bulunur. Böylece M dönel yüzeyi bir koni olur. Ayrıca (4.1.22) eşitliğinden

$$\mu_2 = \frac{\sin\theta}{(au+b)\sqrt{a^2+\sin^2\theta}}$$

dır.

3) $h = \sin\theta$ sabit olsun. Bu takdirde M dönel yüzeyi bir silindir olup $\mu_2 = \dfrac{1}{\sin\theta}$ dır.

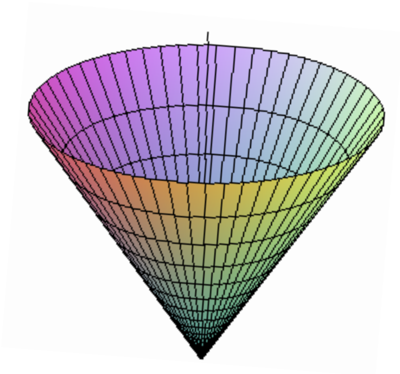
4) $h = e^{\lambda u}$ olsun. Bu durumda

$$g = c_1 e^{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}u} + c_2 e^{-\sqrt{2}\sqrt{\lambda}u}$$

dır. Bu takdirde M dönel yüzeyi bir koni olup

$$\mu_2 = \frac{g'}{h\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}$$

dir (Şekil 4.3).



Şekil 4.3 $h = e^{2u}$ için sabit açılı dönel yüzey

Sonuç 4.2.4: $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi sabit açılı dönel yüzey olsun. Bu takdirde M nin minimal olması için gerek ve yeter şart M nin bir düzlem parçası olmasıdır.

İspat. $M \subset \mathbb{R}^3$ sabit açılı bir dönel yüzey olsun. Bu taktirde Sonuç 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 yardımıyla

$$2H = \frac{g'}{h\sqrt{(g')^2 + (h')^2}}$$

dir. Buradan $H = 0$ ise $g = \text{sabit}$ dir. Bu da bize M nin bir düzlem parçası olduğunu gösterir. Tersine M düzlemin bir parçası olsun. Bu takdirde M yüzeyi sabit açılı minimal bir yüzeydir. $\square$

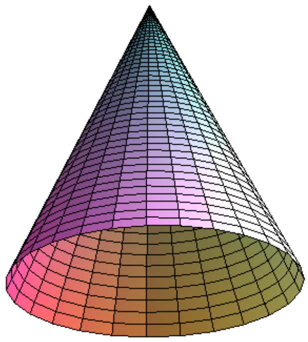
Teorem 4.2.5: $M \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyi konformal yama ile verilsin. Bu takdirde M yüzeyinin sabit açılı ise M yüzeyi

$$h(u) = c(\frac{1}{2}u + a)^2, \quad g(u) = \frac{1}{4}u^2 + au + b \tag{4.2.7}$$

parametrizasyona sahip bir yüzeyidir.

İspat. $M \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyi konformal yama ile verilsin. Bu taktirde (4.1.19) ve (4.2.1)* yardımıyla $h'g'' - g'h'' = h^2$ elde edilir. Ayrıca M yüzeyi sabit açılı olduğundan Teorem 4.2.1 den $h'g'' - g'h'' = 0$ dir. Bu iki denklemin çözümü (4.2.7) olduğu görülür. □

(4.2.7) parametrizasyonu ile verilen yüzey bir koni yüzeyidir. Bu yüzeyin a=3, b=5, c=1 değerleri için grafiği Maple komutları ile çizdirilip Şekil 4.4 de verilmiştir.



Şekil 4.4 sabit açılı dönel yüzey

4.3. Sabit Açılı Kanal Yüzeyleri

Düzlemde $\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), 0)$ birim hızlı regüler bir eğri olmak üzere Frenet denklemleri sağlanır. Buradan $e_1(u)$ ve $e_2(u)$ sırasıyla γ nın teğet ve normal vektörleridir. $\mathbb{R}^3$ de $e_3 = (0,0,1)$ sabit vektörü için γ eğrisi üzerine kurulan kanal yüzeyi

$$X(u,v) = \gamma(u) + r(u)\,(e_2(u)\cos v + e_3(u)\sin v) \tag{4.3.1}$$

regüler yaması ile tanımlanır (Gal ve Pal 2009).

M nin teğet uzayı

$$X_u = (1 - r\kappa\cos v)e_1 + r'\cos v e_2 + r'\sin v e_3$$
$$X_v = -r\sin v e_2 + r\cos v e_3$$

vektörü ile gerilir. Burada κ, γ nın Frenet eğriliğidir. Böylece M nin 1. temel form katsayıları

$$
\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = (r')^2 + (1 - r\kappa osv)^2 \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\
G &= \langle X_u, X_v \rangle = r^2
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $\|X_u \times X_u\| = EG - F^2 = W$ yardımıyla

$$
N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{W}\{rr'e_1 - r\cos v(1 - r\kappa\cos v)e_2 - r\sin v(1 - r\kappa\cos v)e_3\}
$$

bulunur. Kısmi türevler yardımıyla

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= -\cos v(2r'\kappa + r\kappa')e_1 + (\kappa - r\kappa^2\cos v + r''\cos v)e_2 + (r''\sin v)e_3 \\
X_{uv} &= (r\kappa\sin v)e_1 - (r'\sin v)e_2 + (r'\cos v)e_3 \\
X_{vv} &= (-r\cos v)e_2 - (r\sin v)e_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG}}\{\cos v(-2r(r')^2\kappa - r^2r'\kappa' - r\kappa + r^2r''\kappa\sin^2 v) \\
&\quad + \cos^2 v(2r^2\kappa^2) + \cos^3 v(r^2r''\kappa - r^3\kappa^3) - rr''\} \\
c_{12} &= \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{r^2r'\kappa\sin v}{\sqrt{EG}} \\
c_{22} &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{r^2 - r^3\kappa\cos v}{\sqrt{EG}}
\end{aligned}
$$

dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{C_{11}}{E} = \frac{1}{E\sqrt{EG}}\{\cos v(-2r(r')^2\kappa - r^2r'\kappa' - r\kappa + r^2r''\kappa\sin^2 v) \\
&\quad + \cos^2 v(2r^2\kappa^2) + \cos^3 v(r^2r''\kappa - r^3\kappa^3) - rr''\} \\
h_{12} &= \frac{1}{W}C_{12} = \frac{r^2r'\kappa\sin v}{W^2} = \frac{r^2r'\kappa\sin v}{((r')^2 + (1 - r\kappa\cos v)^2)r^2} \qquad (4.3.2) \\
h_{22} &= \frac{1}{W^2}EC_{22} = \frac{EC_{22}}{EG\sqrt{EG}} = \frac{r^2 - r^3\kappa\cos v}{r^2\sqrt{EG}} = \frac{1 - r\kappa\cos v}{\sqrt{EG}}
\end{aligned}
$$

elde edilir (Öztürk ve ark. 2010). Bununla birlikte M yüzeyi sabit açılı ise (4.1.18) eşitliğinden $h_{11}=0, h_{12}=0$ ve $h_{22}=\mu_2$ dür. Buradan $r'\kappa=0$ elde edilir. Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur;

i) $r'=0\ (r\neq 0)(\kappa\neq 0)\Rightarrow M$ tüp yüzeydir. Ayrıca $h_{11}=0$ olduğundan $\left(1-r\kappa\cos v\right)=0$ bulunur. Buradan $h_{22}=0$ olduğundan yüzey bir düzlem parçasıdır.

ii) $k=0\Rightarrow\gamma$ eğrisi düz doğrudur. Böylece (3.2.7) denklemi yardımıyla $rr''=0$ bulunur. Buradan $r=au+b$ ve $\mu=\dfrac{1}{(au+b)\sqrt{1+a^2}}$ olup M yüzeyi bir silindir belirtir.

5. $\mathbb{R}^4$ DE SABİT AÇILI YÜZEYLER

5.0. Giriş

Bu bölümde 4-boyutlu Öklit uzayında sabit açılı yüzeyler ele alınmıştır. Bu bölüm 3 kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda $\mathbb{R}^4$ deki sabit açılı yüzeyler ele alınmıştır. İkinci kısımda ise $\mathbb{R}^4$ deki sabit açılı meridyen yüzeyleri incelenmiştir.

5.1. $\mathbb{R}^4$ de Sabit Açılı Yüzeyler

Tanım 5.1.1: $M \subset \mathbb{R}^4$ lokal yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Ayrıca $\pi \subset \mathbb{R}^4$ 2-boyutlu alt uzayı (düzlem) olmak üzere θ_1 ve θ_2 bu düzleme göre asli açılar olsun. Eğer θ_1 ve θ_2 açıları sabit ise M yüzeyine π düzlemine göre sabit açılı yüzey denir.

$M^2 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $\pi \subset \mathbb{R}^4$ düzlemine göre sabit açılı yüzey olsun. Ayrıca $T_1, T_2 \in T_p M$ ve $N_1, N_2 \in T^{\perp}{}_p M$ için

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos\theta_1 T_1 + \sin\theta_2 N_1 \\ e_2 &= \cos\theta_2 T_2 + \sin\theta_2 N_2 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

vektörleri π düzlemini geren vektörler olsun. Böylece M üzerinde tanımlı bir vektör alanı için

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X e_1 &= \cos\theta_1 \tilde{\nabla}_X .T_1 + \sin\theta_1 \tilde{\nabla}_X N_1 \\ &= \cos\theta_1 \tilde{\nabla}_X .T - \sin\theta_1 A_{N_1} X \\ &\quad + \cos\theta_1 h(X,T_1) + \sin\theta_1 \nabla^{\perp}_X N_1 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X e_2 &= \cos\theta_2 \tilde{\nabla}_X T_2 + \sin\theta_2 \tilde{\nabla}_X N_2 \\ &= \cos\theta_2 \nabla_X T_2 - \sin\theta_2 A_{N_{21}} X + \cos\theta_2 h(X,T_2) + \sin\theta_2 \nabla^{\perp}_X N_2 \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

elde edilir (Bayard ve ark. 2011). Ayrıca M üzerinde tanımlı reel değerli bir $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X e_1 &= df(X)e_2 \\ \tilde{\nabla}_X e_2 &= -df(X)e_1 \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

dir. Böylece (5.1.3) ve (5.1.4) denkleminde teğet ve normal kısımlar düzenlenirse sırasıyla

$$\begin{aligned} \cos\theta_2 df(X)T_2 &= \cos\theta_1 \nabla_X T_1 - \sin\theta_1 A_{N_1} X \\ \cos\theta_1 df(X)T_1 &= -\cos\theta_2 \nabla_X T_2 + \sin\theta_2 A_{N_2} X \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

ve

$$\begin{aligned} \sin\theta_2 df(X)N_2 &= \cos\theta_1 h(X,T_1) + \sin\theta_1 \nabla_X^{\perp} N_1 \\ \sin\theta_1 df(X)N_1 &= \cos\theta_2 h(X,T_2) + \sin\theta_2 \nabla_X^{\perp} N_2 \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

elde edilir. Böylece (5.1.6) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} & h(T_1,T_2) = 0 \\ & h(T_1,T_1) \perp h(T_2,T_2) \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

bulunur (Bayard ve ark. 2011). Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 5.1.2: M yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Eğer M yüzeyi sabit açılı ise bu takdirde M nin şekil operatörü matrisleri

$$A_{N_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad A_{N_2} = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.8}$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} & h(T_1,T_1) = \mu_2 N_2 \\ & h(T_2,T_2) = \mu_1 N_1 \\ & h(T_1,T_2) = 0 \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

dir.

Sonuç 5.1.3: $M \subset \mathbb{R}^4$ deki tüm sabit açılı yüzeyler düz ve ortalama eğrilikleri $H = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ dir.

İspat. $M \subset \mathbb{R}^4$ sabit açılı yüzey olsun. Bu takdirde (5.1.8) yardımıyla $K = \det A_{N_1} + \det A_{N_2} = 0$ ve $H = \frac{1}{2}\left(izA_{N_1} + izA_{N_2}\right) = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ elde edilir. □

Örnek 5.1.4: **(Clifford Tor)** $T^2 = S' \times S' \subset \mathbb{R}^4$ tor yüzeyi $\Pi_{12} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$ düzlemine göre sabit açılı bir yüzeydir.

Çözüm: T^2 yüzeyinin $p = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ noktasındaki tanjant uzayı

$$v_1 = (-x_2, x_1, 0, 0),$$

$$v_2 = (0, 0, -x_4, x_3)$$

ortonormal vektörleri tarafından gerilir. Böylece $w_1 = v_1 \in T_pT^2 \cap \Pi_{12}$ olduğundan $\cos\theta_1 = \langle v_1, w_1 \rangle = 1$ dir. Buradan $\theta_1 = 0$ elde edilir. Bununla birlikte $v_2 \perp v_1$ olduğundan $w_2 = (x_1 x_2, 0, 0) \in \Pi_{12}$ ve $w_2 \perp w_1$ dir. Böylece $\cos\theta_2 = \langle v_2, w_2 \rangle = 0$ dır. Yani $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ dir. Bu nedenle Clifford tor yüzeyi Π_{12} düzlemine göre $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ sabit asli açılı bir yüzeydir. Yani T^2 yüzeyi Π_{12} düzlemine göre sabit açılı bir yüzeydir.

Benzer şekilde T^2 yüzeyi $\Pi_{34} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = 0\}$ düzlemine göre sabit asli açılı bir yüzeydir.

5.2. $\mathbb{R}^4$ de Sabit Açılı Meridyen Yüzeyleri

$\mathbb{R}^4$ ün standart ortonormal bazı $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ olmak üzere $\{e_1,e_2,e_3\}$ tarafından gerilen orjin merkezli birim küre $S^2(1)$ olsun. Bu takdirde $S^2(1)$ birim küresi üzerinde birim hızlı $\gamma=\gamma(v),\ v\in J\subset R$ eğrisi verilsin. $T=\gamma'$ olmak üzere γ eğrisinin çatısı $T(v),N(v),\gamma(v)$ vektörleri ile verilir ve

$$\begin{aligned}
&\gamma'(v)=T(v),\\
&T'(v)=\kappa(v)N(v)-\gamma(v),\\
&N'(v)=-\kappa(v)T(v)
\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

denklemleri sağlanır. Burada $\kappa(v)$, γ eğrisinin küresel eğriliğidir ve $\kappa_\alpha(u)$ da $\alpha:\alpha(u)=(\alpha_1(u),\alpha_2(u))$ meridyen eğrisinin eğriliği olup

$$\kappa_\alpha=\alpha_1'(u)\alpha_2''(u)-\alpha_1''(u)\alpha_2'(u)=\frac{-\alpha_1''(u)}{\sqrt{1-(\alpha_1'(u))^2}}\tag{5.2.2}$$

dır.

Tanım 5.2.1: $\alpha:\alpha(u)=(\alpha_1(u),\alpha_2(u))$ eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde

$$M^2:X(u,v)=\alpha_1(u)\gamma(v)+\alpha_2(u)e_4\tag{5.2.3}$$

parametrelendirmesiyle verilen M^2 yüzeyi α meridyen eğrisinin E^4 de Oe_4 ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen $M^3\subset E^4$ rotasyonel hiperyüzeyinde yatan bir yüzeydir. Böylece M^2 yüzeyi M^3 ün meridyenlerinden oluştuğundan *meridyen yüzeyi* adı verilir (Ganchev ve Milousheva 2010). Burada $\alpha_1(u)$ ve $\alpha_2(u)$ reel değerli türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece $\gamma=\gamma(v)=(\gamma_1(v),\gamma_2(v),\gamma_3(v))$ olmak üzere (5.2.3) parametrelendirilmesiyle verilen meridyen yüzeyi

$$M^2:X(u,v)=(\alpha_1(u)\gamma_1(v),\alpha_1(u)\gamma_2(v),\alpha_1(u)\gamma_3(v),\alpha_2(u))\tag{5.2.4}$$

yamasıyla ifade edilir.

M bir meridyen yüzeyi olmak üzere M nin p noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$ $\{X_1, X_2\}$ ve p noktasındaki normal uzayı $T_p^{\perp}(M)$ ise $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları ile gerilsin. Bu vektörler sırasıyla

$$X_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|} = \alpha_1'(u)\gamma(v) + \alpha_2'(u)e_4$$

$$X_2 = \frac{X_v}{\|X_v\|} = T(v)$$

$$N_1 = N(v)$$

$$N_2 = -\alpha_2'(u)\gamma(v) + \alpha_1'(u)e_4$$

biçiminde bir ortonormal çatı oluşturur. Bununla birlikte (2.1.4) Gauss denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{X_1} X_1 = \kappa_\alpha(u) N_2 \\
&\tilde{\nabla}_{X_2} X_2 = -\frac{\alpha_1'(u)}{\alpha_1(u)} X_1 + \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} N_1 + \frac{\alpha_2'(u)}{\alpha_1(u)} N_2 \\
&\tilde{\nabla}_{X_2} X_1 = \frac{\alpha_1'(u)}{\alpha_1(u)} X_2
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

elde edilir. Burada $\kappa(v)$, γ eğrisinin küresel eğriliğidir ve $\kappa_\alpha(u)$ da $\alpha : (a_1(u), a_2(u))$ meridyen eğrisinin eğriliğidir. (5.2.5) denklemlerindeki normal bileşenleri

$$\begin{aligned}
&h(X_1, X_1) = \kappa_\alpha(u) N_2 \\
&h(X_1, X_2) = 0 \\
&h(X_2, X_2) = \frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)} N_1 + \frac{\alpha_2'(u)}{\alpha_1(u)} N_2
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

dir. Böylece (5.2.6) denkleminden M nin şekil operatörü matrisleri

$$A_{N_2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)}\end{pmatrix} \quad , \quad A_{N_1}=\begin{pmatrix}\kappa_\alpha(u) & 0\\ 0 & \dfrac{\alpha_2'(u)}{\alpha_1(u)}\end{pmatrix} \tag{5.2.7}$$

biçimindedir.

Buradan (5.1.8) ve (5.2.7) denklemleri yardımıyla M sabit açılı bir yüzey ise

$$\begin{aligned}&\frac{\kappa(v)}{\alpha_1(u)}=\mu_1\\ &\kappa_\alpha(u)=\mu_2\\ &\alpha_2'(u)=0\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.2.2: M yüzeyi (5.2.3) yaması ile verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi sabit açılı ise bu taktirde M yüzeyi, meridyen eğrisi

$$\alpha(u)=\left(\sqrt{1-a^2}u+c, au+b\right) \tag{5.2.9}$$

olan açılabilir bir regle yüzeyidir.

İspat. M yüzeyi (5.2.3) yaması ile verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi sabit açılı ise bu takdirde (5.1.8) ve (5.2.7) deki şekil operatörü matrisleri karşılaştırılırsa $\alpha_2'(u)$=0 elde edilir. Ayrıca $\alpha(u)$ meridyen eğrisi birim hızlı olduğundan $\alpha_1'(u)^2+\alpha_2'(u)^2=1$ dir. Maple komutları ile bu diferansiyel denklemlerin ortak çözümünden istenilen sonuç elde edilir. $\square$

6. $S^2 \times \mathbb{R}$ DE SABİT AÇILI YÜZEYLER

6.0. Giriş

Bu bölümde $S^2 \times \mathbb{R}$ deki sabit açılı yüzeyler ele alınmıştır. Bunlar ile ilgili bazı temel sonuçlar verilmiştir.

6.1. $S^2 \times \mathbb{R}$ de Sabit Açılı Yüzeyler

$S^2 \times \mathbb{R}$, 2-küresi ile $\mathbb{R}$nin Riemann çarpımı olsun. Bu takdirde $M \subset S^2 \times \mathbb{R}$ de bir yüzey olmak üzere $\frac{\partial}{\partial t}$ birim vektörü $T(S^2 \times R)$ nin tanjant demetinin elemanı olsun. Böylece $\frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} = T + \cos\theta\xi \tag{6.1.1}$$

biçiminde bir ayrışıma sahiptir. Burada T vektörü M nin tanjant uzayı üzerine izdüşümüdür.

Burada $\xi \in T^{\perp}M$ birim vektörü $\frac{\partial}{\partial t}$ nin normal bileşenidir. θ ise açı fonksiyonu olup $\forall p \in M$ için

$$\cos\theta(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \xi \right\rangle \tag{6.1.2}$$

dir (Dillen ve ark. 2007).

Önerme 6.1.1: $\forall X \in TM$ için

$$\nabla_X T = \cos\theta\, AX \tag{6.1.3}$$

ve

$$X[\cos\theta] = -\langle AX, T\rangle \tag{6.1.4}$$

dir (Dillen ve ark. 2007).

İspat. $\dfrac{\partial}{\partial t}$ birim vektörü $S^2 \times \mathbb{R}$ de paralel vektör alanıdır. Bu nedenle $\tilde{\nabla}_X \dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ dır.

Burada

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{\nabla}_X (T + \cos\theta\xi) &= \tilde{\nabla}_X T + \cos\theta\, \tilde{\nabla}_X \xi + X[\cos\theta]\xi \\ &= \nabla_X T + h(X,T) + \cos\theta\left(-A_\xi X + \nabla_X^{\perp}\xi\right) \\ &= \nabla_X T - A_\xi X \cos\theta \\ &\quad + h(X,T) + \cos\theta\, \nabla_X^{\perp}\xi + X[\cos\theta]\xi \end{aligned}$$

ve

$$\nabla_X T - A_\xi X \cos\theta = 0$$

dır. Buradan

$$h(X,T) + \cos\theta \nabla_X^{\perp}\xi + X[\cos\theta]\xi = 0 \tag{6.1.5}$$

elde edilir. Böylece 1. eşitlikten

$$\nabla_X T = \cos\theta\, A_\xi X$$

bulunur. Ayrıca 2. eşitlik ξ ile çarpılırsa

$$\langle h(X,T), \xi\rangle + \cos\theta \langle \nabla_X^{\perp}\xi, \xi\rangle + X\lceil \cos\theta \rceil = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\left\langle A_\xi X, T \right\rangle = \left\langle h(X,T), \xi \right\rangle$$

yardımıyla

$$\left\langle A_\xi X, T \right\rangle + \cos\theta \left\langle \nabla_X^\perp \xi, \xi \right\rangle + X\left[\cos\theta\right] = 0 \tag{6.1.6}$$

dır. Bununla birlikte

$$\left\langle \xi, \xi \right\rangle = 1$$

olduğundan

$$\left\langle \tilde{\nabla}_X \xi, \xi \right\rangle = 0$$

dır. Ayrıca Weingarten denklemi yardımıyla

$$-\left\langle A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \xi \right\rangle = 0$$

bulunur. Böylece $A_\xi X$ ile ξ birbirine dik olduğundan $\left\langle \nabla_X^\perp \xi, \xi \right\rangle = 0$ dır. Buradan

$$\left\langle A_\xi X, T \right\rangle + X\left[\cos\theta\right] = 0$$

sonucuna varılır. □

Tanım 6.1.2: θ açı fonksiyonu sabit ise $M \subset S^2 \times \mathbb{R}$ yüzeyine sabit açılıdır denir. $\theta = 0$ ve $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ aşikar durumlardır. $\theta = 0$ durumunda $\dfrac{\partial}{\partial t}$ vektörü her zaman normaldir. Bu nedenle $S^2 \times \{t_0\}$ elde edilir. İkinci durumda ise $\dfrac{\partial}{\partial t}$ her zaman teğet vektör olur. Bu durumda S^2 deki bir α eğrisi ile $\mathbb{R}$ nin Riemann çarpımı, yani $\alpha \times \mathbb{R}$ elde edilir (Dillen ve ark. 2007).

Farz edelim ki $\theta \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ olsun. Böylece (6.1.4) eşitliğinden θ sabit alınarak $\forall X \in T_p M$ için

$$\left\langle A_\xi X, T \right\rangle = \left\langle A_\xi T, X \right\rangle = 0$$

bulunur. Bu da bize T nin asli eğrilik 0'a karşılık gelen asli vektör olduğunu gösterir. Buradan da $e_1 = \frac{T}{\|T\|}$, e_2 de e_4'e dik bir vektör olacak şekilde seçilsin. Bu takdirde şekil operatörü matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{6.1.7}$$

biçimindedir. Burada $\lambda : M \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyondur. Gauss denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z, W \rangle = {} & \langle AY, Z \rangle \langle AX, W \rangle - \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle \\ & + \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\ & + \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \langle X, Z \rangle \\ & + \langle X, Z \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle \\ & - \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \langle Y, Z \rangle \\ & - \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

eşitliği görülür.

Teorem 6.1.3: $M \subset S^2 \times \mathbb{R}$ sabit açılı bir yüzey olsun. M nin Gauss eğriliği $K = \langle R(e_1, e_2) e_2, e_1 \rangle = \cos^2 \theta$

(6.1.9) ve T bir asli yöndür (Dillen ve ark. 2007).

Böylece aşağıdaki sınıflandırma teoremi verilebilir

Teorem 6.1.4: $M \subset S^2 \times \mathbb{R}$ sabit açılı olması için gerek ve yeter şart $F : M \to S^2 \times \mathbb{R}$; $(u,v) \to F(u,v)$ immersiyonu

$$F(u,v) = (\cos(u\cos\theta) f(v) + \sin(u\cos\theta) f(v) \times f'(v), u\sin\theta) \qquad (6.1.10)$$

$f : I \to S^2$, birim hızlı eğri ve $\theta \in [0,\pi]$ sabit açıdır (Dillen ve ark. 2007).

İspat. Önce (6.1.10) immersiyonu $S^2 \times \mathbb{R}$ de sabit açılı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_u &= \left(\cos\theta\left(-\sin(u\cos\theta)\right) f(v) + \cos(u\cos\theta) f(v) \times f'(v), \sin\theta\right) \\ F_v &= \left(\cos(u\cos\theta) f'(v) + \sin(u\cos\theta) f(v) \times f''(v), 0\right) \\ &= \left(\cos(u\cos\theta) + \sin(u\cos\theta)\tau(v) f'(v), 0\right) \end{aligned}$$

dır. Buradan $\tau : M \to \mathbb{R}$ dir. f birim hızlı eğri olduğundan $f \times f''$ çarpımı f' nün bir katıdır.
Böylece

$$\tilde{\zeta} \in T^{\perp}\left(S^2 \times \mathrm{R}\right) \subset R^4$$

dır. Böylece M nin $S^2 \times \mathbb{R}$ deki normali ζ olmak üzere

$$\zeta = \left(-\sin\theta\left(-\sin(u\cos\theta)\right) f(v) + \cos(u\cos\theta) f(v) \times f'(v) \cos\theta\right)$$

dir. Buradan

$$\left\langle \zeta, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \cos\theta$$

sabittir sonucuna varılır.

Sonuç: $f : I \to \mathbb{R}^2$, büyük çember ise bu takdirde (6.1.10) immersiyonu

$$F(u,v) = \left(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u, u\tan\theta\right)$$

biçimini alır. Burada $(\Rightarrow) : \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sabittir.

KAYNAKLAR

Bayard, P., Scala A.J.D., Castro O.O., Hernandez B.R. 2011. Surfaces with Constant principal Angles with Respect to a Plane, arXiv: 1105.1791v1.

Bulca, B. 2012. E^4 deki Yüzeylerin bir Karakterizasyonu, Doktora tezi, U.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Chen, B. Y.1973. Geometry of Submanifolds, Dekker, New York.

Çelik, B. 2011. Maple ve Maple ile Matematik, Dora Yayıncılık, Bursa.

Dillen, F., Fastenakels J.,Van Der Veken J., Vrancken L. 2007. Constant Angle Surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$, Monatsh. Math. 152, 89–96.

Flanders, H.1963. Differential Forms, Academic Press, New York, London.

Fröhlic, S. 2013. Surfaces-in-Euclidean-Space, www.scribd.com/doc.

Gal, R.O., Pal, L. 2009. Some Notes on Drawing Twofolds in 4-dimensional Euclidean space, Acta Univ. Sapientiae, Informatica, 1, 2, 125—134.

Ganchev, G., Milousheva V., 2010. Invariants and Bonnet-type theorem for surfaces in R^4, Cent. Eur. J. Math. 8, No.6, 993-1008.

Gray, A. 1993. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press, Inc.

Hacısalihoğlu,H.H.1994. Diferansiyel Geometri,A.Ü.Fen Fakültesi Yayınları,Ankara

Jiang, S. 1996. Angles Between Euclidean Subspaces, Geometriae Dedicata63:113-121, 1996.

Miao, J., Israel A.B. 1992. On Principal Angles between Subspaces in R^n. Lin. Algeb. and its Appl.171, 81-98

Munteanu, M. I., Nistora I. 2009. A New Approach on Constant Angle Surfaces in E^3, Turk. J Math, 33, 168-178.

Nistor, A. 2011. Certain Constant Angle Surfaces Constructed on Curves. Int. Elect. J. Geom., 4, 79-87.

Öztürk, G., Bulca, B., Bayram, B. And Arslan, K. 2010. On Canal Surfaces in E^3, Selcuk Journal of Applied Mathematics, Vol. 11,Number 2, 103-108.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Kader ASLAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 22/04/1990
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Bursa Cumhuriyet Lisesi, 2004-2008
Lisans	: Celal Bayar Üniversitesi, 2008-2012

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :	Meb (Ücretli Öğretmenlik)	, 2012-2013
	Uludağ Eğitim Dershanesi	, 2013-2014
	Özel Tan Okulları	, 2014-2015

İletişim (e-posta) : kader-aslan@outlook.com