



## Lineer Olmayan Elektro Elastik (EE) Denkleminin $(\frac{G'}{G})$ Yöntemi ile Tam Çözümlerinin Elde Edilmesi

Nisa ÇELİK<sup>1</sup>, Mehmet Samir ÖZCAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> B.U.Ü., Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Bursa, TURKEY, ORCID ID 0000-0003-1209-991X

### Özet

Bu çalışmada, dördüncü mertebeden lineer olmayan, Elektro-Elastik (EE) çubuktaki yalnız gezen dalgalara karşılık gelen EE kısmi diferensiyel denklemi ele alındı.

Denklemin gezici dalga çözümlerini araştırmak için,  $(\frac{G'}{G})$  açılım yöntemi kullanıldı. Yöntemin içerdiği farklı durumlar için tam çözümler oluşturuldu. Trigonometrik, hiperbolik ve rasyonel fonksiyonları içeren çözümler elde edildi. Elde edilen çözümlerden biri için kararlılık analizi yapıldı. Son olarak çözümlerin farklı parametrelerdeki bazı özel değerleri için grafikleri, Maple programı ile çizdirilerek, parametreler değiştiğinde grafiklerin değişimi karşılaştırmalı olarak incelenmeye sunulmuştur.

### Article Info

Research Article

Received:

30/04/2021

Accepted:

16/06/2021

### Anahtar Kelimeler

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem, Elektro Elastik çubuk,  $(\frac{G'}{G})$  açılım yöntemi

### Öne Çıkanlar

gezici dalga çözümleri,  $(\frac{G'}{G})$  açılım yöntemi

### Exact Solutions of Electro-Elastic Rod Model with $(\frac{G'}{G})$ Expansion Method

### Abstract

In this paper, the Elektro-Elastic (EE) partial differential equation corresponding to traveling alone waves in a fourth order nonlinear (EE) rod is discussed. The expansion method  $(\frac{G'}{G})$  was used for investigate the traveling wave solutions of the equation. Exact solutions have been created for the different situations involved in the method. Solutions

### Keywords

Nonlinear partial differential equation, Electro-Elastic rod  $(\frac{G'}{G})$  expansion method

### Highlights

*including trigonometric, hyperbolic and rational functions were obtained. Stability analysis was performed for one of the obtained solutions. Finally, the graphs for some special values of the solutions with different parameters were drawn with Maple program, and the change of the graphics when the parameters changed was presented to be examined comparatively.*

*travelling wave solutions.  
( $\frac{G'}{G}$ ) expansion method*

## 1. Giriş

Fen bilimleri, sağlık bilimleri ve mühendislikte, birçok olayın açıklanmasına yardımcı olmak üzere matematiksel modeller geliştirilir. Bu modeller, açıklanacak olayla ilgili bilimsel kanun ya da prensiplerin kullanılmasıyla oluşturulur. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler birçok fiziksel olayın incelenmesi sonucunda ortaya çıkan modellerdir. Bu denklemlerin analitik ve bazı durumlarda sayısal çözümleri, matematiksel formülasyonları nedeni ile çeşitli bilim dallarında önemli bir yere sahiptir. Bu tür modeller optik, biyofizik, kuantum fiziği, kuantum mekaniği, kimyasal fizik, akışkanlar mekaniği, finans, hatta tıp vb. gibi birçok bilim dalında gözlemlenebilir. Bu modellerin her alanda, olaydaki bileşenlerin her değişiminde, farklı bir biçimde ortaya çıkması lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemleri üzerinde de olumlu etki oluşturmuş, araştırmacılar bu denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için birçok yöntem geliştirmişlerdir. Bunlardan bazıları F açılım yöntemi (Çelik ve ark. 2021), Kudryashov yöntemi (Yıldırım ve ark. 2017),  $\tan(\varphi/2)$  açılım yöntemi (Özkan ve ark. 2021), (Lie simetri yaklaşımı yöntemi (Yaşar 2016, Yaşar ve Giresunlu 2015, Yaşar ve Yıldırım 2018), Liu ve ark. 2009), ilk integral yöntemi (Giresunlu ve Yaşar 2015, Akram ve Mahak 2018), tanh-fonksiyon yöntemi (Wazwaz 2004), Jacobi eliptik yöntemi (Liu ve ark. 2001), exp fonksiyon açılım yöntemi (Mohyud ve Ali 2017, He ve Wu 2006), genişletilmiş deneme denklem yöntemi (Ekici ve Sönmezoğlu 2019), vb. yöntemlerdir.

Yukarıda bahsedilen kısmi diferensiyel denklemlerden biri, tek boyutlu dairesel çubuğa karşılık gelen yalnız gezen dalga dalgaları modelleyen, dördüncü mertebeden lineer olmayan kısmi türevli dalga denklemdir. a yarıçaplı ve yanall ataletli doğrusal olmayan elastik dairesel bir çubuğun uzunlamasına salınımının doğrusal olmayan dalga denklemini modellemek için Z.Wei ve Y.Gui (1986) bazı fiziksel koşullar altında, fiziğin temel hipotezlerini,

$$T = \frac{1}{2}pw \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4}\rho a^2 v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2$$

$$W = \frac{1}{2} w E \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{n+1} w E a_n \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n+1}$$

eşitliklerini ve bu eşitlikler için Hamilton prensibini kullanarak elektro elastik dairesel çubuk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \left[ 1 + n a_n \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n-1} \right] \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{v^2 a^2}{2} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \right) = 0$$

kısmi diferansiyel denklemini elde ettiler. Burada  $\frac{E}{\rho}$  doğrusal elastik uzunlamasına dalga hızının karesini temsil eder ve genellikle  $c_0^2$  ile gösterilir.  $a_n$  materyal sabitidir ve  $v$ , Poisson sabitidir. Yi Tian (2019) denklemi  $n = 2$  için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left( 1 + 2 a_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{v^2 J_p}{s} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \right) = 0 \quad (1)$$

biçiminde kullanmıştır. Burada  $s$  çubuğun enine kesit alanıdır,  $J_p$  polar atalet momenti,  $\frac{E}{\rho} = c_0^2$  doğrusal uzunlamasına dalga hızı,  $v$  Poisson oranı,  $E$  Young modülü ve  $a_n$  materyal sabitidir. Yian (2019), denkleme modified extended tanh-function metodu ve exp-function metodunu uygulayarak denklemin çeşitli çözümlerini elde etmiştir.

## 2. Materyal ve Yöntem

Bu kısımda yukarıda verilen tam çözüm yöntemlerinden biri olan  $\left( \frac{G'}{G} \right)$  – açılım yönteminin temel teorisi verilecektir. Yöntem ilk olarak, Wang ve ark. (2008) KdV denklemi, mKdV denklemi, Variant Boussinesqu denklemleri ve Hiroto-Satsuma denklemlerine, Ahmet Bekir (2008) Boussinesq denklemi ve Modified Zakharov-Kuznetsov denkleminde uygulamıştır. Daha sonra birçok yazar tarafından, kaynaklarda verilen farklı modellerin tam çözümlerini bulmak için bu yöntem çalışılmıştır (Zhang ve ark. 2008, Zayed 2009, Liu ve ark. 2015, Guo ve Zhou 2010, Bekir ve Uygü 2012).

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için  $\left( \frac{G'}{G} \right)$  – açılım yöntemi, verilen kısmi diferansiyel denklemi değişken değişimi yardımı ile adi diferansiyel denkleme dönüştürdükten sonra denklemin çözümlerinin  $\left( \frac{G'}{G} \right)$  nin polinomu biçiminde ifade edilmesine dayanır. Bu polinomun derecesi, adi diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında kurulacak olan dengeleme prensibinden elde edilir. Bu yöntemin diğer yöntemlerden farkı, Riccati denklemi yerine ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemin kullanılmasıdır.

$$\psi(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (2)$$

kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $x, t$  bağımsız değişkenler ve

$u = u(x, t)$  bilinmeyen fonksiyondur.  $\xi = x - ct$  dalga değişkeni kullanılarak (2) denklemi,

$$Q(U, U', U'', U''' \dots) = 0 \quad (3)$$

adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Burada  $u(x, t) = U(\xi)$ ,  $c$  solitonun hızıdır. Denklem (3) olabildiğince integre edilerek denklemin mertebesi düşürülür. Burada integral sabitleri sıfır olarak kabul edilir. (3) adi diferansiyel denklemin çözümünün

$$U = \sum_{i=0}^n A_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \quad (4)$$

biçiminde ifade edilebileceğini varsayalım.  $G = G(\xi)$  ikinci mertebeden lineer

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (5)$$

adi diferansiyel denklemi sağlar. Burada  $G' = \frac{dG(\xi)}{d\xi}$ ,  $G'' = \frac{d^2G(\xi)}{d\xi^2}$  dir ve  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,

$\lambda, \mu$  daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir.  $n$  pozitif tamsayısı yukarıda bahsedildiği gibi, (3) denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında kurulacak olan dengeleme prensibinden elde edilir.

(5) denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$v^2 + \lambda v + \mu = 0$$

biçiminde yazılabilir. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$v_1 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}, \quad v_2 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}$$

dir. (5) denklemi

i)  $\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$  ise

$$G(\xi) = c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi},$$

genel çözümüne sahiptir. Genel çözümde  $\xi$  ye göre her iki tarafın türevi alınır

$$G'(\xi) = v_1 c_1 e^{v_1 \xi} + v_2 c_2 e^{v_2 \xi},$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{v_1 c_1 e^{v_1 \xi} + v_2 c_2 e^{v_2 \xi}}{c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}},$$

ve  $v_1, v_2$  yerine yazılarak

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_1 \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{v_1 \xi} + c_2 \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{v_2 \xi}}{c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}},$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-c_1 \frac{\lambda}{2} e^{\nu_1 \xi} - c_1 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{\nu_1 \xi} - c_2 \frac{\lambda}{2} e^{\nu_2 \xi} + c_2 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{\nu_2 \xi}}{c_1 e^{\nu_1 \xi} + c_2 e^{\nu_2 \xi}},$$

ve ortak parantezler düzenlenerek

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\frac{\lambda}{2} [c_1 e^{\nu_1 \xi} + c_2 e^{\nu_2 \xi}] + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} [-c_1 e^{\nu_1 \xi} + c_2 e^{\nu_2 \xi}]}{c_1 e^{\nu_1 \xi} + c_2 e^{\nu_2 \xi}},$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{-c_1 e^{\nu_1 \xi} + c_2 e^{\nu_2 \xi}}{c_1 e^{\nu_1 \xi} + c_2 e^{\nu_2 \xi}} \right],$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{-c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}}{c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}} \right],$$

elde edilir. Üstel fonksiyonlar ile hiperbolik fonksiyonlar arasındaki bağıttan

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \cdot \left[ \frac{-c_1 (\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi) + c_2 (\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi)}{c_1 (\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi) + c_2 (\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi)} \right]$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{(-c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{(-c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right],$$

bulunur. Bu son ifadede

$$(-c_1 + c_2) = A, (c_1 + c_2) = B,$$

alınırsa

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{A \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] \quad (6)$$

elde edilir. Benzer şekilde  $\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[ \frac{-A \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi}{A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi} \right] \quad (7)$$

ve  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  durumunda ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{A}{A\xi + B} - \frac{\lambda}{2} \quad (8)$$

elde edilir.

(3) denkleminin çözümünü elde etmek için, denklemde  $U(\xi)$  yerine (4) ifadesi ve türevleri yerine yazılır. Elde edilen ifade (5) denklemi yardımıyla  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  nin polinomları biçimine getirilir.  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  nin polinomunun katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sisteminden  $A_i$ ,  $c$ ,  $\lambda$  ve  $\mu$ , Maple programı yardımıyla çözülür. Sistemin  $A_i$ ,  $c$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  değerleri (4) de yerine yazılır. (5) den elde edilen (6) - (8) çözümleri  $\lambda^2 - 4\mu$  nün durumlarına göre (4) de yerine yazılarak (3) adi diferansiyel denkleminin çözümleri bulunur. Bu çözümlerde  $\xi = x - ct$  yazılarak (2) lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin çözümleri elde edilir.

### 3. Bulgular ve Tartışma

Bu kısımda bir önceki kısımda teorisi verilen verilen  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  açılım yöntemi (1) denkleminde uygulanacaktır. Denklemde  $\xi = x - ct$  dönüşümü yapılırsa,  $u(x, t) = U(\xi)$  için (1) denklemi

$$(c^2 - c_0^2)sU'' - 2c_0^2sa_2U''U' - v^2J_p c^2U'''' = 0 \quad (9)$$

adi diferansiyel denklemin dönüşür. Bu denklemin her iki tarafı  $\xi$  e göre integre edilirse

$$(c^2 - c_0^2)sU' - c_0^2sa_2U'^2 - v^2J_p c^2U''' = 0 \quad (10)$$

denklemi ve bu denklemde  $U' = \Phi(\xi)$  dönüşümü yapılırsa

$$(c^2 - c_0^2)s\Phi - c_0^2sa_2\Phi^2 - v^2J_p c^2\Phi'' = 0 \quad (11)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin elde edilir.  $\Phi''$  ile  $\Phi^2$  terimleri arasında dengeleme prensibi kullanılırsa  $n + 2 = 2n$  eşitliği ve buradan da  $n = 2$  bulunur. Böylece (4) de  $U$  yerine  $\Phi(\xi)$  kullanılır ve  $n=2$  alınrsa (11) denkleminin çözümlerinin

$$\Phi(\xi) = A_0 + A_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + A_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (12)$$

biçiminde olacağı tahmin edilir. Burada  $G = G(\xi)$  aşağıdaki ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin sağlar.

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0$$

Denklemin her iki tarafı  $G \neq 0$  olmak üzere  $G$  ile bölünürse

$$\frac{G''}{G} = -\lambda \frac{G'}{G} - \mu \quad (13)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = \frac{G''}{G} - \left(\frac{G'}{G}\right)^2$$

olduğundan son eşitlik, (13) eşitliği ile birlikte kullanılırsa

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = -\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \lambda \frac{G'}{G} - \mu \quad (14)$$

elde edilir. (12) ve (14) kullanarak  $\Phi''$ ,  $\Phi^2$  aşağıda olduğu gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \Phi^2(\xi) &= A_2^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + 2A_2A_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (A_1^2 + 2A_2A_0) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2A_1A_0 \left(\frac{G'}{G}\right) + A_0^2 \\ \Phi''(\xi) &= 6A_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (2A_1 + 10A_2\lambda) \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (8A_2\mu + 3A_1\lambda + 4A_2\lambda^2) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \\ &\quad + (6A_2\lambda\mu + 2A_1\mu + A_1\lambda^2) \left(\frac{G'}{G}\right) + 2A_1\mu^2 + A_1\lambda\mu \end{aligned} \quad (15)$$

(12) ve (15), (11) de yerine yazılırsa  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  nin bir polinomu elde edilir. Bu polinomun bütün katsayıları sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki gibi bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} -6v^2J_p c^2 A_2 - c_0^2 s a_2 A_2^2 &= 0 \\ -2v^2J_p c^2 A_1 - 10v^2J_p c^2 A_2 \lambda - 2c_0^2 s a_2 A_1 A_2 &= 0 \\ -c_0^2 s a_2 A_1^2 - 2c_0^2 s a_2 A_0 A_2 - 3v^2J_p c^2 A_1 \lambda - c_0^2 s A_2 - 8v^2J_p c^2 A_2 \mu \\ &\quad + c^2 s A_2 - 4v^2J_p c^2 A_2^2 \lambda^2 = 0 \\ -2v^2J_p^2 A_1 \mu - v^2J_p c^2 A_1 \lambda^2 + c^2 s A_1 - c_0^2 s A_1 - 6v^2J_p c^2 A_2 \lambda \mu - 2c_0^2 s a_2 A_0 A_1 &= 0 \\ -2v^2J_p c^2 A_2 \mu^2 + c^2 s A_0 - v^2J_p c^2 A_1 \lambda \mu - c_0^2 s a_2 A_0^2 - c_0^2 s A_0 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

(16) denklem sistemi Maple programı kullanılarak  $A_0, A_1, A_2, c$  ye göre çözdürülürse aşağıdaki çözüm gruplarına ulaşılır.

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{6v^2J_p \mu}{(4v^2J_p \mu + s - v^2J_p \lambda^2)a_2}, & A_1 &= -\frac{6v^2J_p \lambda}{(4v^2J_p \mu + s - v^2J_p \lambda^2)a_2}, \\ A_2 &= -\frac{6v^2J_p}{(4v^2J_p \mu + s - v^2J_p \lambda^2)a_2}, & c &= \sqrt{\frac{s}{4v^2J_p \mu + s - v^2J_p \lambda^2}} c_0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= -\frac{6v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, & A_1 &= -\frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, \\
 A_2 &= -\frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, & c &= -\sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0
 \end{aligned} \tag{18}$$

ya da

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{v^2 J_p (2\mu + \lambda^2)}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, & A_1 &= \frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, \\
 A_2 &= \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, & c &= \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 i
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{v^2 J_p (2\mu + \lambda^2)}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, & A_1 &= -\frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, \\
 A_2 &= \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, & c &= -\sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 i
 \end{aligned} \tag{20}$$

Sistemin (17) ve (18) çözüm takımı kullanılarak (12) den

$$\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t \text{ olmak üzere,}$$

$$\Phi_1(\xi) = -\frac{6v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right) - \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \tag{21}$$

$$\text{ve } \xi = x + \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t \text{ olmak üzere,}$$

$$\Phi_2(\xi) = -\frac{6v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right) - \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \tag{22}$$

elde edilir. Sistemin (19) ve (20) çözüm takımı kullanılarak (12) den

$$\xi = x - \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t \text{ olmak üzere,}$$

$$\Phi_3(\xi) = \frac{v^2 J_p (2\mu + \lambda^2)}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right) + \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right)^2$$



(23)

ve  $\xi = x + \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  olmak üzere,

$$\Phi_4(\xi) = \frac{v^2 J_p (2\mu + \lambda^2)}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{G'}{G} \right) + \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \quad (24)$$

elde edilir. (11) denkleminin genel çözümlerini elde etmek için  $(\lambda^2 - 4\mu)$  nün durumlarına bağlı olarak, (6), (7) ve (8) eşitlikleri ile verilen  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  ifadeleri (21)-(24) ifadelerinde yerine yazılır. İsimlendirme ( $\Phi_{\text{çözüm adı durum adı}}$ ) biçiminde yapılmıştır)

**Durum (1):**  $\lambda^2 - 4\mu > 0$  için (11) denkleminin aşağıdaki çözümleri elde edilir:

$$\Phi_{11}(\xi) = \frac{3v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{3}{2} \frac{v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{c_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right)^2 \quad (25)$$

burada  $\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  dir.

$$\Phi_{21}(\xi) = \frac{3v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{3}{2} \frac{v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{c_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right)^2 \quad (26)$$

burada  $\xi = x + \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  dir.

$$\Phi_{31}(\xi) = -\frac{v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{3}{2} \frac{v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{c_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right)^2 \quad (27)$$

burada  $\xi = x + \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  dir.

$$\Phi_{41}(\xi) = -\frac{v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{3}{2} \frac{v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{c_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right)^2 \quad (28)$$

burada  $\xi = x - \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  dir.

**Durum (2):**  $\lambda^2 - 4\mu < 0$  için (11) denkleminin aşağıdaki çözümleri elde edilir:

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(\xi) = & -\frac{3v^2 J_p \lambda^2 (4\mu - \lambda^2)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \\ & + \frac{3v^2 J_p (4\mu - \lambda^2)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{c_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi \pm \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{c_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

burada  $\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  dir.

$$\begin{aligned} \Phi_{22}(\xi) = & -\frac{3v^2 J_p \lambda^2 (4\mu - \lambda^2)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \\ & + \frac{3v^2 J_p (4\mu - \lambda^2)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{c_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi \pm \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{c_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (30)$$

burada  $\xi = x + \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  dir.

$$\begin{aligned} \Phi_{32}(\xi) = & -\frac{3v^2 J_p \lambda^2 (4\mu - \lambda^2)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \\ & + \frac{3v^2 J_p (4\mu - \lambda^2)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{c_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi \pm \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{c_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

burada  $\xi = x - \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  dir.

$$\begin{aligned} \Phi_{42}(\xi) = & -\frac{3v^2 J_p \lambda^2 (4\mu - \lambda^2)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \\ & + \frac{3v^2 J_p (4\mu - \lambda^2)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left( \frac{c_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi \pm \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{c_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

burada  $\xi = x + \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  dir.

**Durum (3):**  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  için  $\Phi_{13}(\xi) = \Phi_{33}(\xi)$  ve  $\Phi_{23}(\xi) = \Phi_{43}(\xi)$  olup (11) denkleminin aşağıdaki çözümleri elde edilir:

$$\Phi_{13}(\xi) = \frac{6v^2 J_p c_2^2}{s a_2 (c_1 + c_2 \xi)^2} \quad (33)$$

(33) ün  $\xi$  ya göre integrali (9) denkleminin aşağıdaki  $U_{13}(\xi)$  çözümünü verir.

$$U_{13}(\xi) = \frac{6v^2 J_p c_2}{s a_2 (c_1 + c_2 \xi)} \quad (34)$$

Burada  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  olduğundan  $c = c_0$  ve böylece  $\xi = x - c_0 t$  dir. Son ifadede  $\xi = x - c_0 t$  yazılırsa EE denkleminin

$$u_{13}(x, t) = \frac{6v^2 J_p c_2}{s a_2 (c_1 + c_2 (x - c_0 t))} \quad (35)$$

çözümü elde edilir.

$$\Phi_{23}(\xi) = -\frac{6v^2 J_p c_2^2}{s a_2 (c_1 + c_2 \xi)^2} \quad (36)$$

(36) nın  $\xi$  ya göre integrali (9) denkleminin aşağıdaki  $U_{10}(\xi)$  çözümünü verir.

$$U_{23}(\xi) = \frac{6v^2 J_p c_2}{s a_2 (c_1 + c_2 \xi)} \quad (37)$$

Burada  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  olduğundan  $c = -c_0$  ve böylece  $\xi = x + c_0 t$  dir. Son ifadede  $\xi = x + c_0 t$  yazılırsa EE denkleminin

$$u_{23}(x, t) = \frac{6v^2 J_p c_2}{s a_2 (c_1 + c_2 (x + c_0 t))} \quad (38)$$

çözümü elde edilir.

(11) denkleminin çözümleri olan  $\Phi_{ij}(\xi)$  ( $i = 1..4, j = 1..3$  fonksiyonlarından  $U' = \Phi(\xi)$  dönüşümü yardımıyla  $\Phi_{ij}(\xi)$  ( $i = 1..4, j = 1..3$  fonksiyonlarının  $\xi$  ya göre integrali alınarak (9) denkleminin çözümleri olan  $U_{1j}(\xi)$ , ( $i = 1..4, j = 1..3$  fonksiyonları elde edilir.  $U_{1j}(\xi)$  fonksiyonlarında  $\xi = x - ct$  yazılarak (1) denkleminin çözümleri bulunur. Bazı çözümler için aşağıda bu işlemler uygulanıp çözümlerin nümerik simülasyonu yapılmıştır.

$c_1 = -2, c_2 = 3$  olması durumunda  $\Phi_{11}$  fonksiyonunun  $\xi$  ya göre integrali  $U_{11}(\xi)$  fonksiyonunu verir.  $U_{11}(\xi)$  fonksiyonunda  $\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  yazılarak (1)

denkleminin  $u_1(x, t)$  çözümü elde edilir.  $J_p = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $s = 7$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 6$ ,  $c_0 = 4$  parametre değerleri için

$$u_{11}(x, t) = \frac{0.02117086172 \tanh(-1.414213562x + 5.790762828t)}{(\tanh(-1.414213562x + 5.790762828t))^2 + 1.0 + 3.0 \tanh(-1.414213562x + 5.790762828t)} \quad (39)$$

Biçimindedir. Bu çözüm Şekil 1 de gösterilmiştir.

$\lambda$  değeri için yapılan değişikliklerle,  $J_p = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $s = 7$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 25$ ,  $c_0 = 4$  parametre değerleri için

$$u_{11}(x, t) = \frac{0.02117086172 \tanh(-1.414213562x + 16.83877382t)}{(\tanh(-1.414213562x + 16.83877382t))^2 + 1.0 + 3 \tanh(-1.414213562x + 16.83877382t)} \quad (40)$$

biçimine dönüşür. Bu çözüm Şekil 2 de gösterilmiştir

$c_0$  değeri için yapılan değişikliklerle,  $J_p = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $s = 7$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 6$ ,  $c_0 = 0.1$  parametre değerleri için

$$u_{11}(x, t) = \frac{0.02117086172 \tanh(-1.414213562x + 0.1447690707t)}{(\tanh(-1.414213562x + 0.1447690707t))^2 + 1 + 3 \tanh(-1.414213562x + 0.1447690707t)} \quad (41)$$

biçimine dönüşür. Bu çözüm Şekil 3 de gösterilmiştir.

$J_p = 10$ ,  $a_2 = 5$ ,  $\mu = 1$ ,  $s = 3$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 5$ ,  $c_0 = 2$  parametre değerleri için

$$u_{21}(x, t) = \frac{0.7637626160 \tanh(1.145643924x + 4.183300132t)}{(\tanh(1.145643924x + 4.183300132t))^2 + 1 - 3 \tanh(1.145643924x + 4.183300132t)} \quad (42)$$

biçimindedir. Bu çözüm Şekil 4 de gösterilmiştir.

$c_1 = -2$ ,  $c_2 = 3$  olması durumunda  $\Phi_{12}$  fonksiyonunun  $\xi$  ya göre integrali  $U_{12}(\xi)$

fonksiyonunu verir.  $U_{12}(\xi)$  fonksiyonunda  $\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  yazılarak (1)

denkleminin  $J_p = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\mu = 4$ ,  $s = 1$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c_0 = 4$  parametre değerleri için

$$u_{12}(x, t) = -\frac{0.3472329896}{3 \tan(-1.936491673x + 6.432675208t) + 2} \quad (43)$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm Şekil 5 de gösterilmiştir.

$c_1 = -2$ ,  $c_2 = 3$  olması durumunda  $\Phi_{32}$  fonksiyonunun  $\xi$  ya göre integrali  $U_{32}(\xi)$

fonksiyonunu verir.  $U_{32}(\xi)$  fonksiyonunda  $\xi = x + \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  yazılarak

(1) denkleminin  $J_p = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $\mu = 4$ ,  $s = 1$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c_0 = 4$  parametre değerleri için çözümü

$$\begin{aligned} u_{32}(x, t) = & -0.1527804081 \cdot 10^{-11} \ln(\tan^2(-1.936491673x + 9.258201002t) \\ & + 1) \\ & + 0.3055608163 \cdot 10^{-11} \ln(-3 \tan(-1.936491673x + 9.258201002t) - 2) \\ & + \frac{1.438536672}{-3 \tan(-1.936491673x + 9.258201002t) - 2} + 0.4285724286x - 2.048963332t \end{aligned} \quad (44)$$

biçimindedir. Bu çözüm Şekil 6 de gösterilmiştir.

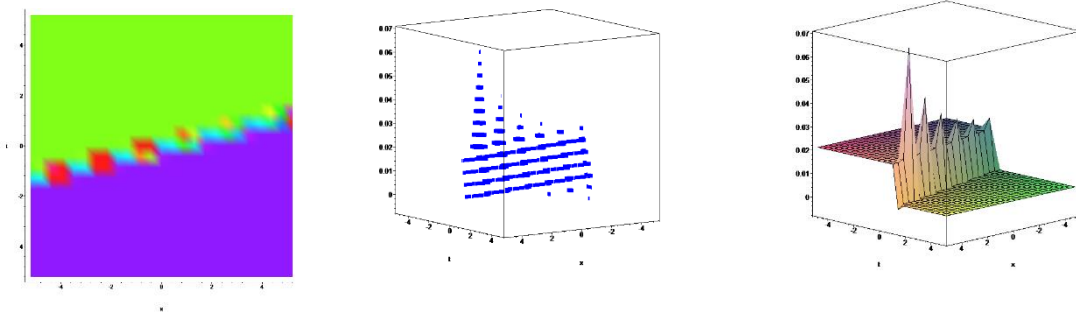
$\Phi_{13}$  fonksiyonunun  $\xi$  ya göre integrali  $U_{13}(\xi)$  fonksiyonunu verir.  $U_{13}(\xi)$  fonksiyonunda

$\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$  yazılarak (1) denkleminin  $J_p = 3$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $s = 1$ ,

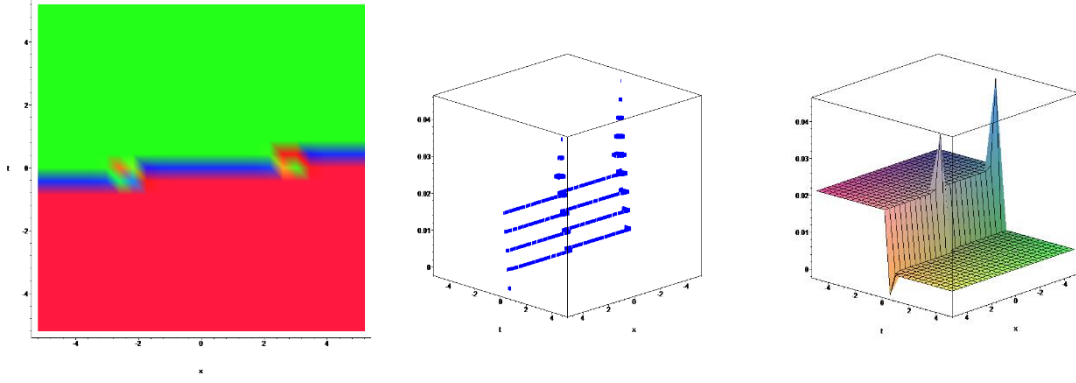
$v = 0.1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $c_0 = 2$  parametre değerleri için

$$u_{13}(x, t) = \frac{0.18}{-2+3x-6t} \quad (45)$$

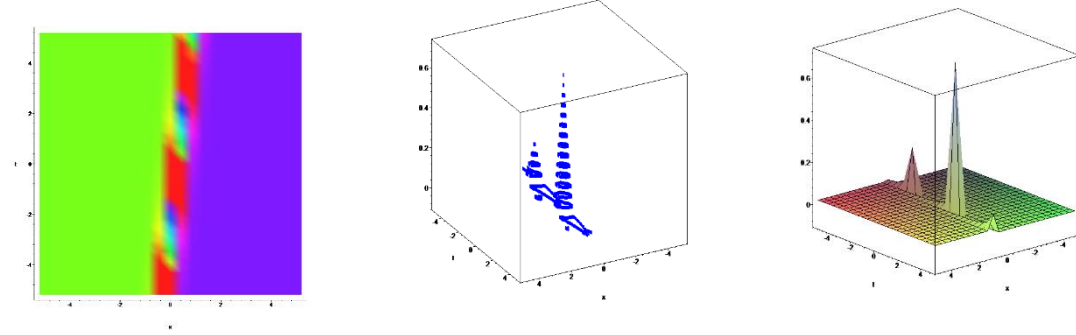
çözümü elde edilir. Bu çözüm Şekil 7 de gösterilmiştir.



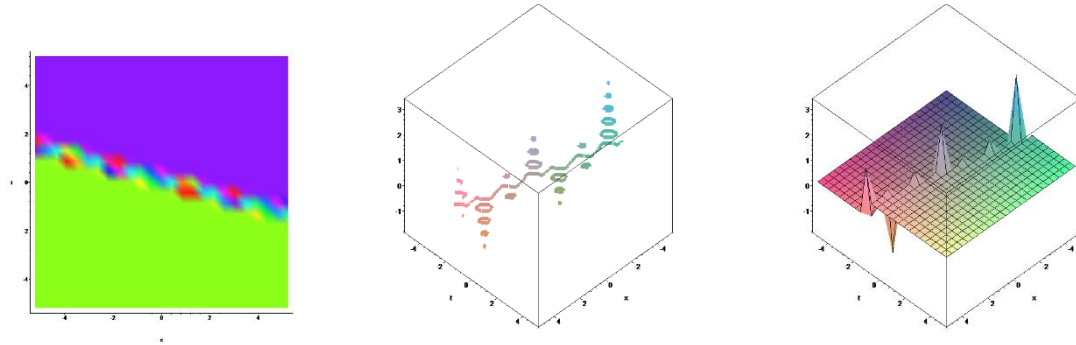
**Şekil 1.**  $c_1 = -2$ ,  $c_2 = 3$ ,  $J_p = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $s = 7$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 6$ ,  $c_0 = 4$  parametre değerleri için (39) ile verilen  $u_{11}(x, t)$  çözüm fonksiyonunun grafikleri



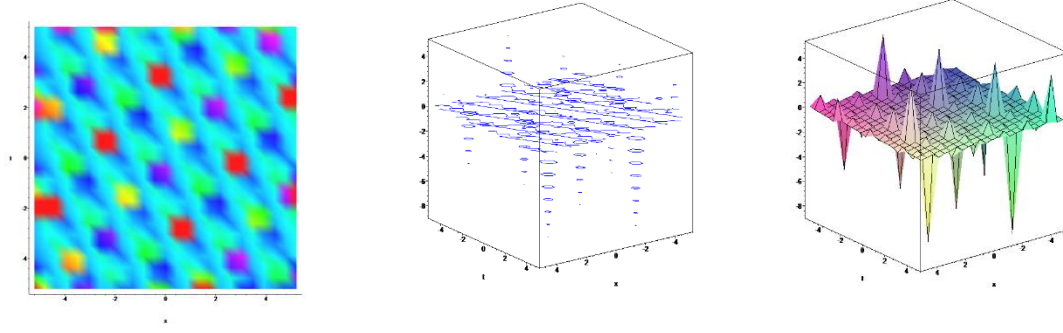
**Şekil 2.**  $c_1 = -2$ ,  $c_2 = 3$ ,  $J_p = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $s = 7$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 25$ ,  $c_0 = 4$  parametre değerleri için (40) ile verilen  $u_{11}(x, t)$  çözüm fonksiyonunun grafikleri



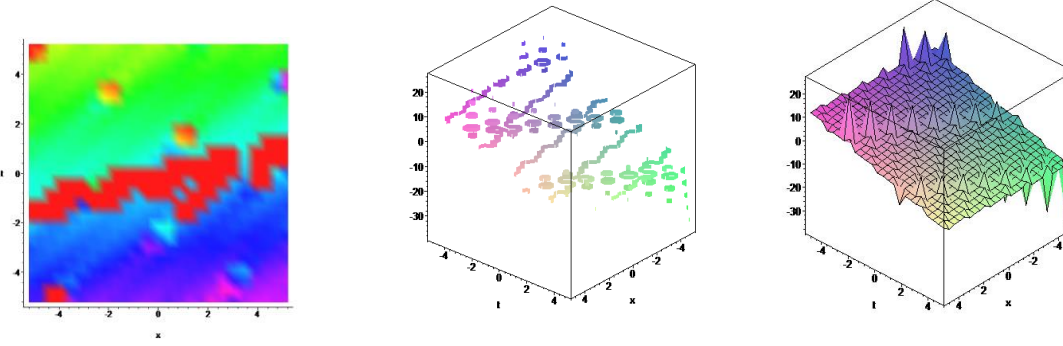
**Şekil 3.**  $c_1 = -2$ ,  $c_2 = 3$ ,  $J_p = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $s = 7$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 6$ ,  $c_0 = 0.1$  parametre değerleri için (41) ile verilen  $u_{11}(x, t)$  çözüm fonksiyonunun grafikleri



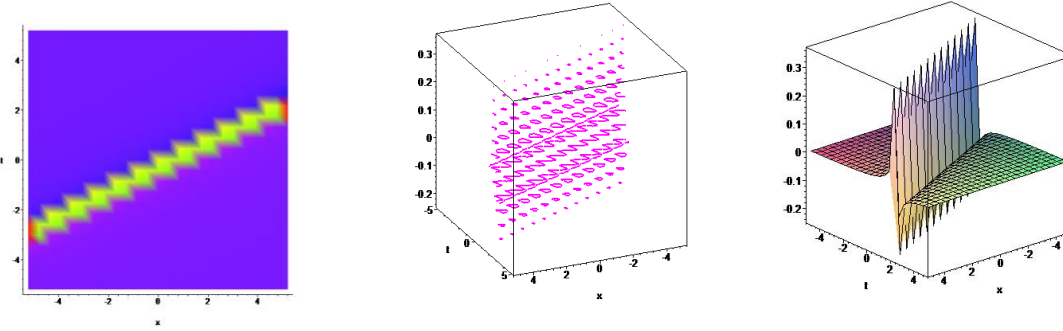
**Şekil 4.**  $c_1 = -2$ ,  $c_2 = 3$ ,  $J_p = 10$ ,  $a_2 = 5$ ,  $\mu = 1$ ,  $s = 3$ ,  $v = 0.1$ ,  $\lambda = 5$ ,  $c_0 = 2$  parametre değerleri için  $u_{21}(x, t)$  çözüm fonksiyonunun grafikleri



Şekil 5.  $c_1 = -2, c_2 = 3, J_p = 3, a_2 = 3, \mu = 4, s = 1, v = 0.1, \lambda = 1, c_0 = 4$  parametre değerlerinde  $u_{12}(x, t)$  çözüm fonksiyonunun grafikleri



Şekil 6.  $c_1 = -2, c_2 = 3, J_p = 2, a_2 = 1, \mu = 4, s = 1, v = 0.1, \lambda = 1, c_0 = 4$  parametre değerleri için  $u_{32}(x, t)$  çözüm fonksiyonunun grafikleri



Şekil 7.  $c_1 = -2, c_2 = 3, J_p = 3, a_2 = 1, \mu = 1, s = 1, v = 0.1, \lambda = 2, c_0 = 2$  parametre değerlerinde  $u_{13}(x, t)$  çözüm fonksiyonunun grafikleri

### Kararlılık Özelliği

Bu kısımda, Hamilton sisteminin özelliklerini kullanarak elde edilen çözümlerin kararlılık özelliği incelenecektir.

$$M_H = \frac{1}{2} \int_{-G}^G \Phi^2(\xi)$$

burada  $\Phi(\xi)$  modelin çözümüdür ve kararlılık için gerekli koşul

$$\frac{\partial M}{\partial c} > 0,$$

biçimindedir,  $c$  ise dalga hızıdır.

(25) ile tanımlanan  $\Phi_1(\xi)$  için kararlılık analizi:  $c_1 = -2, c_2 = 1, J_p = 0.1, a_2 = 3, \mu = 0.1, s = 12, v = 4, \lambda = 2, c_0 = 4$  değerleri için

$$M = -\frac{81}{6728} \frac{-525c + 2 \ln(1 + e^{5\sqrt{21}c + 5\sqrt{21}}) - 2 \ln(e^{5\sqrt{21}} + e^{5\sqrt{21}c})}{c}$$

biçimindedir. Böylece

$$\left. \frac{\partial M}{\partial c} \right|_{c=2} = 0.1379268101 > 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, çözüm kararlıdır. Elde edilen diğer çözümlere de aynı adımlar uygulanarak herbirinin kararlılık özelliği incelenebilir.

#### 4. Sonuç

Bu çalışmada, EE çubukta yalnız gezen dalgaların analizi yapıldı. EE denkleminin hareketli dalga çözümlerini araştırmak için, tam çözümlerin elde edilmesinde oldukça güçlü bir yöntem olan  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  açılım yöntemi kullanıldı. Bu yöntem Yi Tian (2019) ın, aynı denklemin tam çözümlerini bulmak için kullandığı, modifiye tanh-açılım yöntemi ve exp-fonksiyon açılım yöntemine göre daha genel bir yöntemdir.  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  açılım yöntemi ile elde edilen genel çözümlerde keyfi sabitlere özel değerler verilerek Yi Tian (2019) ın çalışmasındaki çözümler elde edilebilir. İlave olarak, bu çalışmada fiziksel yorumlamaya yardımcı olacak grafik çizimleri bulunmaktadır.

Çalışmamızda önce, yöntemin ihtiyaç duyduğu yardımcı denklemin çözümleri yardımıyla çözüm fonksiyonları oluşturuldu.  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  açılım yönteminin içerdiği farklı durumlar için trigonometrik, hiperbolik, rasyonel fonksiyonlar içeren zengin çözümler elde edildi. Fiziksel problemlerin yorumlanmasında büyük öneme sahip olan bu çözümler Maple programı ile orijinal denklemde yerine yazılarak doğrulanmıştır. Ancak bazı durumlarda  $\Phi(\xi)$  nın integre edilmesi durumunda elde edilen çözümler çok geniş yer tutacağından özel parametre değerlerindeki durumları ele alınmıştır. Örneğin (42) denklemi ile verilen  $u_{21}$  periyodik dalga çözümünü, (43) denklemi ile verilen  $u_{12}$ , çok önemli ve dikkat çekici olan soliton dalga çözümünü temsil eder. Solitonların önemi diğer dalgalarla etkileşime girdiklerinde kimliklerini korumalarından ileri gelir. Çalışmada son olarak, çözüm fonksiyonlarının farklı parametrelerdeki bazı özel değerleri kullanılarak, grafikleri Maple programı ile çizdirilmiş ve aynı çözüm fonksiyonunun farklı özel değerlerdeki grafikleri, fizik ve mühendislik alanında çalışanların çözüm fonksiyonlarını



karşılaştırabilmesi amacıyla, alt alta çizdirilmiştir. Bu konularda çalışmaya başlayanlara temel bir rehber olacağı kanaatindeyiz.

## 5. Kaynaklar

**Çelik N., Seadawy A.R., Sağlam Y., Yaşar E., 2021.** A model of solitary waves in a nonlinear elastic circular rod: Abundant different type exact solutions and conservation laws, *Choas, Solitons and Fractals*, 143 110486, 1-19

**Yıldırım Y., Çelik N., Yaşar E., 2017.** Nonlinear Schrödinger equations with spatio-temporal dispersion in Kerr, parabolic, power and dual power law media: A novel extended Kudryashov's algorithm and soliton solutions. *Results in Physics*, 7: 3116-3123.

**Özkan, Y.S., Yaşar E., Çelik N., 2021.** On the exact and numerical solutions to a new (2+1)- dimensional Korteweg-de Vries equation with conformable derivative, *Nonlinear Engineering*, 10, 46-65.

**Yaşar E., 2016.** Lie group analysis, exact solutions and conservation laws of (3+1) dimensional a B-type KP equation. *New Trends in Mathematical Sciences*, 4 (4): 163-174.

**Yaşar E, Giresunlu İ.B., 2015.** Lie symmetry reductions, exact solutions and conservation laws of the third order variant Boussinesq system. *Acta Physica Polonica A*, 128(3).

**Yaşar E, Yıldırım Y., 2018.** On the Lie symmetry analysis and travelling wave of time fractional fifth-order modified Sawada-Kotera equation. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 8(2):411-416.

**Liu H., Li J., Zhang Q., 2009.** Lie symmetry analysis and exact explicit solutions for general Burger's equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics* , 228:1-9.

**Giresunlu İ.B., Yaşar E., 2015.** First integrals and exact solutions for path equation describing minimum drag work. *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2(4):41-52.

**Akram G., Mahak N., 2018.** Analytical solution of the Korteweg-de Vries equation and microtubule equation using the first integral method. *Optical and Quantum Electornics*, 50 (3):145.

**Wazwaz, A. M. 2004.** The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 154(3): 713-723.

**Liu S., Fu Z., Liu S., Zhao Q. 2001.** Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equation. *Physics Letter A*, 289:69-74

**Mohyud-Din, S. T., Ali, A. 2017.**  $Exp(-\varphi(\varepsilon))$ -expansion Method and Shifted Chebyshev Wavelets for Generalized Sawada-Kotera of Fractional Order. *Fundamenta Informaticae*, 151(1-4): 173-190.

**He J.H., Wu X.H. 2006.** Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(3): 700-708.

**Ekici M., Sonmezoğlu A., 2019.** Optical solitons with Biswas-Arshed equation by extended trial function method. *Optik- International Journal for Light and Electron Optics*, 177:13-20.

**Wei Z , Gui-tong Y.1986.** The propagation of solitary waves in a nonlinear elastic rod, *Appl.Math Mech* ,(7):615-626.

**Yi Tian, 2019.** Quasi hyperbolic function expansion method and tanh-function method for solving vibrating string equation and elastic rod equation, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 38, 1455-1465.

**Wang, M.L., Li, X., Zhang, J. 2008.** The  $G'/G$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letter A*, 372(7): 417-423.

**Bekir A. 2008.** Application of the  $(G'/G)$ -expansion method for nonlinear evolution equations. *Physics Letter A*, 372: 3400-3406.

**Zhang, J., Wei, X., Lu, Y. 2008.** A Generalized  $G'/G$  Expansion Method and its Applications, *Phys. Lett. A*, 372(6): 3653-3658.

**Zayed, E.M.E. 2009.** The  $G'/G$  expansion method and its application to some nonlinear evolution equations. *J. Appl. Math. Comp.* 30:89-103, (2009).

**Liu, X., Zhang, W., Li, Z. 2015.** Application of improved  $(G'/G)$  -expansion method to travelling wave solutions of two nonlinear evolution equations, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics Vol. 4*, (9):122-130.

**Guo, S., Zhou, Y. 2010.** The Extended  $(G'/G)$ -Expansion Method and its Applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like Equations and Coupled Hirota–Satsuma KdV Equations. *Appl. Math. Comput.*, 215 (8) : 3214-3221

**Bekir A., Uygun F. 2012.** Exact travelling wave solutions of linear evolution equations by using the  $(G'/G)$ -expansion method. King Saud University, *Arab Journal of Mathematical Science*, 18, 73-85.