NOKTASAL 1-TİPİNDE KANONİK VEKTÖR ALANINA SAHİP YÜZEYLER

Eray DEMİRBAŞ

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NOKTASAL 1-TİPİNDE KANONİK VEKTÖR ALANINA SAHİP YÜZEYLER

Eray DEMİRBAŞ
0000-0003-4292-5880

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2022

TEZ ONAYI

Eray DEMİRBAŞ tarafından hazırlanan "NOKTASAL 1-TİPİNDE KANONİK VEKTÖR ALANINA SAHİP YÜZEYLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Başkan : Prof. Dr. Kadri ARSLAN İmza
0000-0002-1440-7050
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ İmza
0000-0001-8619-8334
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Eğitim Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Nurettin Cenk TURGAY İmza
000-0002-01713876
İstanbul Teknik Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Müh. Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Bengü BAYRAM İmza
0000-0002-1237-5892
Balıkesir Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Betül BULCA İmza
0000-0001-5861-0184
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
../../….

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…/…/………

Eray DEMİRBBAŞ

TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. Kadri ARSLAN	Eray DEMİRBAŞ
01.07.2022	01.07.2022
İmza	İmza

ÖZET

Doktora Tezi

NOKTASAL 1-TİPİNDE KANONİK VEKTÖR ALANINA SAHİP YÜZEYLER

Eray DEMİRBAŞ

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bir $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldunun G Gauss dönüşümü M üzerinde sıfırdan farklı türevlenebilir bir f fonksiyonu ve sabit bir C vektörü için $\Delta G = f(G + C)$ eşitliğini sağlıyorsa M altmanifoldu noktasal 1-tipine Gauss dönüşümüne sahip olduğu söylenir. Eğer f fonksiyonu sabit değilse, 1-tipindeki Gauss dönüşümü has olarak adlandırılır. Noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olan bir M altmanifoldu için C sıfır vektörü ise, birinci türden olduğu söylenir. Aksi takdirde, noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümümün ikinci türden olduğu söylenir. Son zamanlarda noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip olan $\mathbb{R}^4$ deki rotasyonel yüzeyler birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.
$M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmannifoldunun x konum vektörü alanı $x = x^T + x^N$ ayrışımına sahiptir. Burada x^T ve x^N, sırasıyla x in teğetsel ve normal bileşenlerini olup x^T kanonik vektör alanı olarak adlandırılır. Bir Riemann manifoldu üzerindeki bir vektör alanı, bu manifold üzerinde tanımlanan bir fonksiyonun gradyantı olarak ifade edilebilirse bu vektör alanına konservatif denir. Bu fonksiyon, skaler potansiyel olarak bilinir. Enerjinin korunduğu fiziksel sistemlerin kuvvetleri konservatif vektör alanlarıdır. Sonuçta, $\rho = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle$ için f nin gradienti $\nabla\rho = x^T$ dir.
Bu çalışmada, $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldunun kanonik vektör alanı x^T nin $\Delta x^T = \varphi(x^T + C)$ şartını sağladığı durumlar incelenmiştir. Bu eşitlik M üzerinde sıfırdan farklı türevlenebilir bir fonksiyon φ ve sabit bir C vektörü için geçerlidir. Bu eşitlikte C vektörü sıfıra eşit ise x^T kanonik vektör alanına noktasal 1-tipindedir denir. Bu çalışmada sırasıyla $\mathbb{R}^4$ deki rotasyonel hiperyüzeyler ve rotasyonel yüzeylerin kanonik vektör alanı x^T nin noktasal 1-tipindedir olması ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçları destekleyici örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dönel yüzey, sonlu tip yüzey, 1-tipinde Gauss dönüşümü

2022, x+ 55 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

SURFACES WITH POINTWISE 1-TYPE CANONICAL VECTOR FIELD

ERAY DEMİRBAŞ

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARRSLAN

A submanifold M of a Euclidean space $\mathbb{R}^{n+d}$ is said to have pointwise 1-type Gauss map if its Gauss map G satisfies $\Delta G = f(G + C)$ for some non-zero smooth function f on M and a constant vector C. A pointwise 1-type Gauss map is called proper if the function f is non-constant. A submanifold with pointwise 1-type Gauss map is said to be of the first kind if the vector C is zero vector. Otherwise, the pointwise 1-type Gauss map is said to be of the second kind. Rotational surfaces in $\mathbb{R}^4$ with pointwise 1-type Gauss map have been studied by many researchers.

For the Euclidean submanifold $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$, the position vector field x can be decomposed as follows: $x = x^T + x^N$, where x^T and x^N denote the tangential and the normal components of x, respectively. The tangent component x^T known as canonical vector field. If a vector field of a Riemannian manifold is the gradient of a function defined on this manifold, this vector field is called conservative. This function, known as a scalar potential. Conservative vector fields representing forces of physical systems in which energy is conserved. Consequently, for $\rho = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle$ the gradient $\nabla\rho = x^T$ holds.

In the present study, we considered immersed submanifold $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ which has pointwise 1-type canonical vector field x^T, i.e. $\Delta x^T = \varphi(x^T + C)$ holds for some non-zero smooth function φ on M and a constant vector C. A pointwise 1-type canonical vector field is called proper if the function φ is non-constant. We obtain some results of rotational surfaces and rotational hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+d}$ whose canonical vector fields x^T satisfy this condition. We also give some examples which support the obtained results.

Key words: General rotational surfaces, position vector field, finite type surfaces, pointwise 1-type Gauss map.

2022, x+ 55 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Lisans ve Lisansüstü eğitimim boyunca sağlam bir bilgi birikimine sahip olmamı sağlayan, doktora tez konusunun belirlenmesinde ve kayda değer sonuçlar elde edebileceğimiz problemlerin ortaya atılmasında çok büyük katkıları olan ve bu tez çalışmasının ortaya çıkışından son haline gelene kadar gerek akademik bilgisiyle gerek de manevi desteğiyle yanımda olduğunu hep gösteren hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma alanımda bilgi birikimiyle bana birçok konuda yardımcı olan, Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bilgi birikimiyle bana birçok konuda yardımcı olan, her zaman fikirlerine başvurduğum Doç. Dr. Betül BULCA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anne ve babama ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Eray DEMİRBAŞ
…/…/…….

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
U_α	Alt küme
M	Altmanifold
$\cap$	Arakesit
m, n	Boyut
x_α	Dönüşüm
γ	Eğri
γ'	Eğri türevi
f	Fonksiyon
∇f	f fonksiyonunun gradienti
df_p	f fonksiyonunun yöne göre türevi
G	Gauss dönüşümü
K	Gauss eğriliği
(U_α, x_α)	Harita
$\langle , \rangle$	İç çarpım
h	İkinci temel form
x	Konum vektörü
Δ	Laplasian
$[,]$	Lie parantez operatörü
∇	M nin koneksiyonu
$\mathbb{R}^{n+d}$	$(n+d)$-boyutlu Öklit uzayı
p	Nokta
$\lVert . \rVert$	Norm
x^N	Normal bileşen
$\nabla^\perp$	Normal koneksiyon
$\chi^\perp(M)$	Normal vektör alanları kümesi
H	Ortalama eğrilik
$\vec{H}$	Ortalama vektör alanı
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\widetilde{\nabla}$	$\mathbb{R}^{n+d}$ nin koneksiyonu
λ	Sabit fonksiyon
C	Sabit vektör
A	Şekil operatörü
$\mathbb{R}_1^3$	Minkowski uzayı
$div(x^T)$	Tanjant bileşenin divergenti
x^T	Teğet bileşen
$\chi(M)$	Teğet vektör alanları kümesi
ϕ^{-1}	Ters fonksiyon
dx_p	Türev dönüşümü
k	Türevlenebilir fonksiyon
$\vec{F}$	Vektör alanı
$\widetilde{M}$	Varış uzayı

1. GİRİŞ

M, n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olmak üzere $x: \ M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ bir izometrik daldırma olsun. Bu daldırma altında M ye $\mathbb{R}^{n+d}$ içine daldırılan n-boyutlu altmanifold adı verilir. M nin en önemli geometrik nesnelerinden biri x konum vektörüdür. Bu vektör $p \in M$ noktasını $o \in \mathbb{R}^{n+d}$ referans noktasına bağlayan $x = \overrightarrow{op}$ şeklinde tanımlı olan yer vektörü ya da yarıçap vektörü olarak da bilinir.

1970'lerin sonlarından beri Öklid uzayındaki sonlu tip altmanifoldlarının incelenmesi kapsamlı bir şekilde gerçekleştirilmiştir. $M \subset \mathbb{R}^{n+n}$ altmanifoldunun x konum vektörü M nin Laplasyeni Δ nin özvektörlerinin sonlu toplamı olarak ifade edilebilirse M ye sonlu tipte olduğu söylenir. Diğer bir deyişle $x = x_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i$; $\Delta \mathrm{x} = \lambda_i x_i, 1 \leq i \leq k$ ayrışımının sağlanmasıdır. Burada x_0 sabit, x_i ler ise sabit olmayan vektör değerli fonksiyonlar ve $\lambda_i \in \mathbb{R}$ dir. Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ birbirinden farklı ise M k-tipindedir denir. Benzer şekilde, M üzerindeki türevlenebilir bir φ fonksiyonu Δ nin $\mathbb{R}^{n+d}$-değerli özvektörlerinin sonlu toplamı oluyorsa φ ye sonlu tipdedir denir (bakınız, (Chen, 1983), (Chen, 1984; Chen, 1985; Yoon, 2001)). Sonlu tip altmanifold kavramı, doğal olarak M nin G Gauss dönüşümüne genişletilebilir (Chen ve Piccinni, 1987). Eğer, Öklid uzayının bir M altmanifoldu 1-tipinde bir G Gauss dönüşümüne sahipse, bazı $\lambda \in \mathbb{R}$ ve bazı sabit C vektörü için $\Delta G = \lambda(G + C)$, eşitliği sağlanır (Baikoussis ve Blair, 1992), (Baikoussis vd., 1993), (Baikoussis ve Verstraelen, 1993) ve (Kim ve Yoon, 2001). Bununla birlikte, Öklid 3-uzay $\mathbb{R}^3$ de helikoid, katenoid ve dik koni gibi bazı tipik iyi bilinen yüzeylerin Gauss dönüşümlerinin Laplası sıfırdan farklı bazı f fonksiyonu ve bazı sabit C vektörleri için $\Delta G = f(G + C)$, şartını sağladığı gösterildi (Chen ve Kim, 2001). Eğer f fonksiyonu sabit değilse bu takdirde noktasal 1-tipindeki G Gauss dönüşümü has olarak adlandırılır. Noktasal 1-tip Gauss dönüşümüne sahip bir M altmanifoldu için eğer C vektörü sıfır vektör ise birinci çeşit olduğu söylenir. Aksi takdirde, noktasal 1-tipindeki G Gauss dönüşümü ikinci çeşit olarak ifade edilir (Chen ve ark. 2005), (Kim ve Yoon 2000a), (Kim ve Yoon 2000b) ve (Kim ve Yoon 2005). Cho ve Kim 2001 yılında yaptıkları çalışmada minimal helikoidi birinci çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip olma durumunu incelediler. B.-Y. Chen, birinci çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip dönel yüzeylerinin, sabit ortalama eğrilikli dönel yüzeylere karşılık geldiğini göstermiştir. Ayrıca, noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip rasyonel yüzeylerin bir karakterizasyonu verildi (Chen vd., 2005). $\mathbb{R}^3$ de L_1-noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip yüzeyler için (Kim ve Turgay, 2013), Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip düz yüzeyler için ise (Dursun ve Coşkun, 2012) çalışması incelenebilir. Son zamanlarda, noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip $\mathbb{R}^4$ deki rotasyonel yüzeyler birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir (Aksoy ve Yaylı, 2020; Arslan vd, 2014; Arslan vd, 2011-a; Arslan vd, 2011-b); Arslan vd., 2010; Arslan vd., 2017; Bulca vd., 2012; Dursun ve Arslan 2011; Dursun ve Turgay, 2012-a). Bununla birlikte noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip Minkowski 4 uzayındaki uzay benzeri yüzeyler için (Dursun ve Turgay, 2012-b; Dursun ve Turgay, 2019) ve Minkowski uzayında noktasal 1-tipinde Gauss dönüşüme sahip hiperyüzeyler için (Dursun, 2009; Dursun, 2015) çalışmalarına bakılabilir.

M nin önemli invaryantlarından biri ortalama eğrilik vektör alanı $\vec{H}$ dır. Fizikte, ortalama eğrilik vektör alanı, altmanifold üzerine uygulanan burulma alanıdır. Malzeme biliminde yüzey gerilimi, yüzey stresi veya yüzey serbest enerjisi için kullanılır (Chen, 2017). E. Beltrami'nin iyi bilinen formülü, pozisyon vektör alanı *x* ile M nin ortalama eğrilik vektör alanı $\vec{H}$ nın arasında $\Delta x = -n\overrightarrow{H},$ biçiminde basit bir ilişki sağlar. Burada Δ, M nin indirgenmiş metriğe göre *Laplasyenini* ifade etmektedir. Bu eşitlikten M nin *minimal* (yani $\vec{H} = 0$) olması için gerek ve yeter koşul $\Delta x = 0$ olması, diğer bir değişle, M nin harmonik olmasıdır (Chen, 1973).

M nin x pozisyon vektör alanı, $x = x^T + x^N$ biçiminde doğal bir ayrışmaya sahiptir. Burada x^T ve x^N, x in sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir. B.Y. Chen 2017 yılında yapmış olduğu çalışmada Öklid altmanifoldlarının konum vektörü alanlarıyla ilişkili diferansiyel geometride çeşitli konuların bir araştırmasını sunmuştur. Bu ayrışımda x^T tanjant bileşeni kanonik vektör alanı olarak bilinir (Chen ve Deshmukh, 2018). Bir Riemann manifoldunun vektör alanı, bu manifold üzerinde tanımlanan bir fonksiyonun gradyanı ise, bu vektör alanına konservatifdir denir. Bu fonksiyon, skaler potansiyel olarak bilinir. Fiziksel kuvvetleri temsil eden konservatif vektör alanları enerjinin korunduğu sistemlerdir (Marsden ve Tromba, 2003).

Bu çalışma dört bölümden oluşur. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde kuramsal temeller ve kaynak araştırmasına dönük tanım ve sonuçlar verilmiştir. Özellikle diferansiyellenebilir manifold, diferansiyellenebilir dönüşüm, Levi-civita koneksiyonu, türev dönüşümü ve difeomorfizm ile ilgili temel tanımlar ve eşitlikler tanıtılmıştır. Bölümün ilerleyen kısımlarında imersiyonlar, altmanifoldlar, 2. temel form, şekil operatörü, Gauss ve Weingarten formülleri ve bunlar yardımıyla tanımlanan ortalama eğrilik vektör alanı ve eğriliği ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde materyal ve yönteme yer verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan ibarettir. Birinci kısımda x pozisyon vektör alanı ve ayrışımı ile ilgili işlemlere yer verilmiştir. Özellikle $\rho = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle$ uzaklık fonksiyonu olmak üzere $\chi(M)$ nun gradiyenti $\nabla\rho = x^T$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Bununla birlikte M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektör alanı $\vec{H}$ olmak üzere $div(x^T) = n + n\langle\vec{H}, x\rangle$ eşitliği sağlandığı gösterilmiştir. Böylece $div(x^T) = 0$ ise x^T vektör alanı sıkıştırılamaz olduğu sonucuna varılmıştır. İkinci kısımda x^T kanonik vektör alanının Δx^T Laplasyeni Δx^T nin hesabına yer verilmiş, x^T nin harmonik olma koşulu $\Delta x^T = 0$ eşitliğinin sağlanması durumunda hangi şartların ortaya çıkacağı tartışılmıştır. Ayrıca türevlenebilir bir φ fonksiyonu için $\Delta x^T = \varphi x^T$ eşitliğinin sağlanması durumunda x^T kanonik vektör alanı noktasal 1-tipinde dir. Bu şartı sağlayan x^T kanonik vektör alanı ile ilgili bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm bulgulardan ibaret olup iki kısımdan oluşur. Birinci kısımda $\mathbb{R}^{n+1}$ deki dönel hiperyüzeyler incelenmiştir. Sırasıyla $\mathbb{R}^3$ deki dönel yüzeyler ile bunların genellemeleri olan $\mathbb{R}^4$ deki rotasyonel hiperyüzeler ve birotasyonel hiperyüzeler ele alınmıştır. İkinci kısımda $\mathbb{R}^4$ deki rotasyonel yüzeler, küresel çarpım yüzeyleri, meridyen yüzeyleri ve tensör çarpım yüzeleri ele alınmıştır. Bu yüzeyleri x^T kanonik vektör alanlarının noktasal 1-tipinde olması ile ilgili sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçları destekleyici bazı örnekler verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel kavramlar, teoremler ve tanımlar ele alınmıştır. Özellikle türevlenebilir dönüşümler, altmanifoldlar, birinci ve ikinci temel formlar, Gauss ve Weingarten denklemleri ve ortalama eğrilik ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Bu bölümde, ağırlıklı olarak, (do Carmo, 1976), (do Carmo, 1979), (Chen, 1973; Gray, 1993) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1 $M \neq \emptyset$ kümesi ve $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümesi için $x_\alpha: U_\alpha \to M$ dönüşümlerinin bire bir (injective) bir ailesi (atlası) $\{(U_\alpha, x_\alpha): \alpha \in \mathbb{Z}^+\}$ biçiminde tanımlansın. Böylece aşağıdaki şartlar sağlanırsa M ye n-boyutlu *diferansiyellenebilir manifold* adı verilir;

i) $x_\alpha(U_\alpha)$ ların sonlu birleşimleri M kümesini örtecektir.

ii) $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ şartını sağlayan herhangi α, β çifti için $x_\alpha^{-1}(W)$ ve $x_\beta^{-1}(W)$ kümeleri $\mathbb{R}^n$ nin açık alt kümeleridir. Bununla birlikte, $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ koordinat değişimi fonksiyonları türevlenebilirdir.

iii) $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ ailesi i) ve ii) şartlarıyla birlikte maksimaldir.

Burada (U_α, x_α) çifti (ya da x_α dönüşümü) $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ için M nin p noktasındaki bir *parametrizasyonu* (yada *koordinat sistemi*) olarak bilinir. Bununla birlikte $x_\alpha(U_\alpha)$ lara *koordinat komşuluğu* (ya da *harita*) adı verilir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.2 M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla *n* ve *m*-boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $x: M \to \widetilde{M}$ dönüşümü verilsin. Bu takdirde $x(p)$ noktasında tanımlanan $\phi: V \subset \mathbb{R}^n \to \widetilde{M}$ parametrizasyonu için $x(\varphi(U)) \subset \phi(V)$ ve

$$\phi^{-1} \circ x \circ \varphi: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dönüşümü diferansiyellenebilir olacak şekilde p noktasında bir $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \to M$ parametrizasyonu bulunabilirse x e *diferansiyellenebilir dönüşüm* adı verilir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.3 $\mathbb{R}^3$, *n*-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olmak üzere

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M);\ \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlı ∇ dönüşümü $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $f, g \in D(M)$ için aşağıdaki şartları sağlar ise ∇ ya M üzerinde bir *afin koneksiyon* denir (do Carmo, 1976);

1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ dir.
2) $\nabla_X(fY + Z) = X(f)Y + f\nabla_X Y + \nabla_X Z$ dir.

∇ da M nin bir afin koneksiyonu olsun.

3) $\forall\, X, Y \in \chi(M^n)$ için $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ise ∇ simetriktir.
4) $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

şartı sağlanırsa afin konneksiyonuna M üzerinde bir *Levi-Civita koneksiyonu* adı verilir (do Carmo, 1976). Bu durumda $(M, \langle , \rangle)$ *Riemann manifoldu* yapısına kavuşur.

Tanım 2.5 M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla *n* ve *m*-boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $x: M \to \widetilde{M}$ diferansiyellenebilir dönüşümü olsun. Herhangi $p \in M$ ve her $\nu_p \in T_p M$ tanjant vektörü için bir $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eğrisi $\gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = \nu_p$ olacak şekilde seçilsin. Böylece $\beta = x \circ \gamma$ eğrisi alındığında $dx_p: T_p M \to T_{x(p)}\widetilde{M}$ türev dönüşümü $dx_p(\nu) = \beta'(0)$ biçiminde tanımlı olan lineer bir dönüşüm olup γ eğrisi seçiminden bağımsızdır (Chen, 1973).

Tanım 2.6 M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla *n* ve *m*-boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $x: M \to \widetilde{M}$ dönüşümü verilsin. Eğer x dönüşümü diferansiyellenebilir, birebir, örten ve x^{-1} de diferansiyellenebilir ise x dönüşümüne bir *difeomorfizm* adı verilir. Benzer şekilde $p \in M$ ve $x(p) \in \widetilde{M}$ noktalarının komşulukları sırasıyla U ve V olmak üzere bunlar asındaki $x: U \to V$ dönüşümü bir difeomorfizm ise x dönüşümüne bir *lokal difeomorfizm* adı verilir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.7 M ve $\widetilde{M}$ Riemann manifoldları için $x: M \to \widetilde{M}$ bir difeomorfizm olsun. Her $p \in M$ ve $X, Y \in T_p M$ tanjant vektörleri için

$$\langle X,Y\rangle_p = \langle dx_p(X), dx_p(Y)\rangle_{x(p)}$$

şartı sağlanırsa x dönüşümüne bir *izometri* adı verilir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.8 M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve m-boyutlu, $m > n$ diferansiyellenebilir manifoldları için $x: M \to \widetilde{M}$ dönüşümü verilsin. Bu takdirde $dx_p: T_pM \to T_{x(p)}\widetilde{M}$ dönüşümü her $p \in M$ için injektif ise x e bir *daldırma* M ye de $\widetilde{M}$ nın *daldırılan altmanifoldu* adı verilir (Chen, 1973).

Bununla birlikte $x(M)$ alt uzayı $\widetilde{M}$ den indirgenen alt uzay topolojisi ile birlikte x daldırması $x(M) \subset \widetilde{M}$ üzerinde bir homeomorfizm ise x e bir *gömme* M ye de $\widetilde{M}$ nın *gömülen altmanifoldu* adı verilir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.9 M altmanifoldu $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması ile verilsin. $\mathbb{R}^{n+d}$ de Levi-Civita koneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda her $X_i, X_j \in T_pM$ lokal vektör alanları için M altmanifoldunun $\mathbb{R}^{n+d}$ dan indirgenmiş Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin *ikinci temel form* dönüşümü

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M); h(X_i, X_j) = \widetilde{\nabla}_{X_i}X_j - \nabla_{X_i}X_j \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.1) eşitliği *Gauss formülü* olarak bilinir (Chen, 1973).

Tanım 2.10 $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması verilsin. Böylece M nin birim normal vektörü N_α, $1 \leq \alpha \leq d$ olmak üzere M nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A: \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) \to \chi(M);\ A_{N_\alpha}X_i = -\widetilde{\nabla}_{X_i}N_\alpha + \nabla^{\perp}_{X_i}N_\alpha \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada A_{N_α} dönüşümü N_α ya karşılık gelen *şekil operatörüdür*. (2.2) eşitliği *Weingarten formülü* olarak bilinir (Chen, 1973).

Herhangi $X_i, X_j \in T_pM$ için M nin 2. temel form katsayıları

$$h_{ij}^{\alpha} = \langle A_{N_\alpha}X_i, X_j\rangle = \langle h(X_i, X_j), N_\alpha\rangle;\ 1 \leq i,j \leq n, 1 \leq \alpha \leq d \tag{2.3}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 2.11 $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması ile verilsin. Bu takdirde M nin *ortalama eğrilik vektör alanı*

$$\vec{H} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(X_k, X_k) \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanır.

Bununla birlikte, M nin *ortalama eğrili fonksiyonu* $H = \|\vec{H}\|$ ile hesaplanır. Eğer $H = 0$ ise M ye *minimaldir* denir (Chen, 1973).

Tanım 2.13 $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ kompakt altmanifoldu $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması verilsin. M nin $\mathbb{R}^{n+d}$den indirgenmiş metriğe göre Laplas operatörü Δ ve M nin ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}$ olmak üzere $\Delta x = -n\vec{H}$ *Bertrami formülünü* sağlanır (Chen, 1973).

Tanım 4.1.1: $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması ile verilsin. M üzerinde tanımlı herhangi bir türevlenebilir ψ fonksiyonu için ψ nin *Laplasyeni*

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{\nabla}_{X_i}\widetilde{\nabla}_{X_i}\psi - \widetilde{\nabla}_{\nabla_{X_i}X_i}\psi\right) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 1973).

Önerme 2.2.14: $M \subset \mathbb{R}^{2+d}$ yüzeyi $x: M \to \mathbb{R}^{2+d}$ izometrik daldırması ile verilsin. Bu takdirde T_pM nin bir $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazı için M nin Gauss eğriliği

$$K = \langle h(X_1, X_1), h(X_2, X_2)\rangle - \langle h(X_1, X_2), h(X_1, X_2)\rangle \tag{2.6}$$

dir (Chen, 1973).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Pozisyon Vektör Alanı ve Ayrışımı

$M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırma ile verilsin. Bununla birlikte $p \in M$ noktası $\mathbb{R}^{n+d}$ nin orijin noktası o ile birleştirildiğinde $x = \overrightarrow{op}$ *pozisyon vektörü* elde edilir. Doğal olarak

$$x = x^T + x^N \tag{3.1}$$

teğet ve normal ayrışımına sahiptir (Chen ve Deshmukh, 2018). Bu $\vec{x}$ vektörün fizikte önemli uygulama alanları mevcuttur. Örneğin, bir cismin hareketinin t anındaki durumu $x(t)$ pozisyon vektörü ile ifade edilir. Bu pozisyon vektörünün birinci ve ikinci türevleri sırasıyla cismin t anındaki hızını ve ivmesini verir.

Tanım 3.1.1. $D \subset \mathbb{R}^{n+d}$ açık küme, $f: D \to \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyon olmak üzere f nin gradyenti

$$\nabla f = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n+d}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece D üzerine tanımlı bir $\vec{F}$ vektör alanı

$$\vec{F} = \nabla f \tag{3.2}$$

biçiminde ifade edilirse $\vec{F}$ ye *konservatif vektör alanı* adı verilir. f fonksiyonuna ise $\vec{F}$ nin *potansiyel fonksiyonu* denir (Chen ve Deshmukh, 2018).

Önerme 3.1.2. $D \subset \mathbb{R}^{n+d}$ açık alt küme, $f: D \to \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyon ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to D \subset \mathbb{R}^{n+d}$ regüler eğri olsun. Bu durumda $\forall t \in I$ için

$$\frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) = \langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \rangle \tag{3.3}$$

dır. Herhangi $t_0 \in I$ anında $x_0 = \gamma(t_0), v_0 = \gamma'(t)$ olmak üzere (3.3) eşitliği

$$df_p(v_0) = \langle \nabla f(p_0), v_0 \rangle \tag{3.4}$$

olup f nin x_0 noktasında v_0 yönünde türevini verir.

$M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldunun pozisyon vektörü (3.1) ayrışımı ile tanımlansın. M nin ortonormal çatısı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ olmak üzere x^T vektör alanı

$$\mathrm{x}^{\mathrm{T}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \langle \mathrm{x}^T, \vec{e}_{\mathrm{i}} \rangle \vec{e}_i = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \langle x, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \tag{3.5}$$

dir.

$M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu üzerindeki *uzaklık fonksiyonu*

$$\rho = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle$$

olmak üzere ρ nin gradiyenti

$$\nabla\rho = \sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} x, x \rangle \, \vec{e}_i \tag{3.6}$$

eşitliği ile hesaplanır. Böylece

$$\tilde{\nabla}_{\vec{e}_i} x = \vec{e}_i \tag{3.7}$$

olduğundan (3.6) eşitliği

$$\nabla\rho = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e}_i, x \rangle \vec{e}_i \tag{3.8}$$

dir. Buradan (3.5) ve (3.8) eşitliklerinden

$$\nabla\rho = x^T \tag{3.9}$$

olduğu görülür. Bu da bize x^T nin bir konservatif vektör alanı olduğunu gösterir.

$M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldunun pozisyon vektörünün teğet bileşeni olan x^T vektör alanın diverjansı

$$div(x^T) = \sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{\vec{e}_i} x^T, \vec{e}_i \rangle \tag{3.10}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan (2.1) Gauss formülü

$$\tilde{\nabla}_{\vec{e}_i} x^T = \nabla_{\vec{e}_i} x^T + h(\vec{e}_i, x^T) \tag{3.11}$$

ve (3.5) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} div(x^T) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\vec{e}_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \langle x, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j \right), \vec{e}_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{\vec{e}_i} (\langle \vec{e}_j, x \rangle \vec{e}_j), \vec{e}_i \rangle \qquad (3.12) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{\vec{e}_i} \vec{e}_j, x \rangle \langle \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}\, x, \vec{e}_j \rangle \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{e}_j, x \rangle \langle \nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{\vec{e}_i} \vec{e}_j, x \rangle \delta_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \langle \vec{e}_i, x \rangle \langle \tilde{\nabla}_{\vec{e}_i} \vec{e}_j\,, \vec{e}_i \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte (3.12) eşitliğinde Gauss ve eşitliği kullanılırsa

$$div(\mathrm{x}^{\mathrm{T}}) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j + \mathrm{h}\big(\vec{e}_i, \vec{e}_j\big), x \rangle\, \delta_{ij} + \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{\mathrm{n}} \delta_{ij}^2 + \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{\mathrm{n}} \langle \vec{e}_i, \mathrm{x} \rangle \langle \nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j\,, \vec{e}_i \rangle$$

$$= \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{\mathrm{n}} \langle \nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j\,, \mathrm{x} \rangle \delta_{ij} + \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{\mathrm{n}} \langle h\big(\vec{e}_i, \vec{e}_j\big), \mathrm{x} \rangle \delta_{ij} + \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{\mathrm{n}} \delta_{ij}^2 + \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{\mathrm{n}} \langle \vec{e}_j, \mathrm{x} \rangle \langle \nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_j\,, \vec{e}_i \rangle$$

bulunur. Böylece son eşitlikte

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}^2 = n,$$

ve

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle h\big(\vec{e}_i, \vec{e}_j\big), x \rangle \delta_{ij} = n \langle \vec{H}, x \rangle$$

yerine yazılırsa

$$div(x^T) = n + n\langle \vec{H}, x\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j\,, x\rangle \delta_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} \langle \vec{e}_j, x\rangle\langle \nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j\,, \vec{e}_i\rangle$$

bulunur (Chen ve Deshmukh, 2018). Ayrıca herhangi $Z \in \chi(M)$ vektör alanı ve w_i^k koneksiyon formları için

$$\nabla_Z \vec{e}_i = \sum_{k=1}^{n} w_i^k(Z)\vec{e}_k\,;\ 1 \le i \le n \qquad (3.13)$$

dir. Burada w_i^k koneksiyon formları olup $w_i^k = -w_k^i$ dir. Bununla birlikte

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j\,, x\rangle \delta_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j\,, \vec{e}_i\rangle\langle \vec{e}_j, x\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} w_i^k(\vec{e}_i)\,\langle \vec{e}_k, x\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} w_j^i(\vec{e}_i)\,\langle \vec{e}_j, x\rangle$$

bulunur. Böylece son eşitlik

$$div(x^T) = n + n\langle \vec{H}, x\rangle \qquad (3.14)$$

halini alır.

Tanım 3.1.3 $M \subset R^m$ türevlenebilir altmanifold olmak üzere $Z \in T(M)$ olsun. Bu takdirde

$$div(Z) = 0$$

ise Z e *sıkıştırılamaz vektör alanı adı* verilir (Chen, 2017).

Böylece (3.14) eşitliğinden (Chen, 2017) çalışmasındaki aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.4 $M \subset R^m$ türevlenebilir altmanifold olsun. M nin teğet vektör alanı x^T, sıkıştırılamaz olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle \vec{H}, x\rangle = -1 \qquad (3.15)$$

olmasıdır.

3. 2. $\Delta x^T = \varphi x^T$ Şartını Sağlayan Altmanifoldlar

Tanım 3.2.1. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırma ile verilsin. M üzerindeki herhangi bir Z vektör alanı için

$$Z = \widetilde{\nabla}_Z x \tag{3.16}$$

eşitliği sağlandığında x pozisyon vektörüne Z boyunca *kongruent vektör alanı* adı verilir. Burada $\widetilde{\nabla}$, $\mathbb{R}^{n+d}$ Öklid uzayının Levi-Civita koneksiyondur.

Buradan $\{\vec{e}_i\}, 1 \leq i \leq n$, M üzerindeki lokal çatı alanı olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_i} x = \vec{e}_i \tag{3.17}$$

dir. Diğer bir değişle, M nin x pozisyon vektörü $\vec{e}_j$ boyunca kongruent vektör alanıdır. Böylece x pozisyon vektörü $x = x^T + x^N$ ayrışımına sahip olduğundan Gauss ve Weingarten eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_i} x &= \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_i}(x^T + x^N) \\ &= \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_i} x^T + \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_i} x^N \\ &= \nabla_{\vec{e}_i} x^T + h(\vec{e}_i, x^T) - \mathrm{A}_{x^N}\vec{e}_i + \nabla^{\perp}{}_{\vec{e}_i} x^N \end{aligned}$$

dır. Böylece teğet ve normal bileşenler yardımıyla

$$\vec{e}_i = \nabla_{\vec{e}_i} x^T - \mathrm{A}_{x^N}\vec{e}_i \tag{3.18}$$

$$h(\vec{e}_i, x^T) + \nabla^{\perp}{}_{\vec{e}_i} x^N = 0 \tag{3.19}$$

eşitlikleri elde edilir.

M nin ∇ konneksiyonu ile ilişkilendirilen eğrilik tensörü herhangi $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k \in \chi(M)$ için

$$R(\vec{e}_i, \vec{e}_j)\vec{e}_k = \nabla_{\vec{e}_i}\nabla_{\vec{e}_j}\vec{e}_k - \nabla_{\vec{e}_j}\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_k - \nabla_{[\vec{e}_i, \vec{e}_j]}\vec{e}_k \tag{3.20}$$

biçiminde tanımlanır. Buradan (3.18) eşitliği kullanılarak

$$R(\vec{e}_j, \vec{e}_k)x^T = \left(\nabla_{A_{x^N}}\right)(\vec{e}_j, \vec{e}_k) - \left(\nabla_{A_{x^N}}\right)(\vec{e}_k, \vec{e}_j) \tag{3.21}$$

bulunur. Bu denklemden

$$\left(\nabla_{A_{x^N}}\right)(\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \nabla_{\vec{e}_j}\left(A_{x^N}\vec{e}_k\right) - A_{x^N}\left(\nabla_{\vec{e}_j}\vec{e}_k\right) \tag{3.22}$$

bulunur (Chen ve Deshmukh, 2018). Böylece (3.5) yardımıyla x^T vektör alanının Laplasyeni

$$\Delta x^T = \sum_{j=1}^{n}\left(\nabla_{A_{x^N}}\right)(\vec{e}_j, \vec{e}_j) \tag{3.23}$$

eşitliği ile hesaplanır. Sonuç olarak (3.22) ve (3.23) eşitlikleri kullanılarak

$$\Delta x^T = \sum_{j=1}^{n}\left(\nabla_{\vec{e}_j}\left(A_{x^N}\vec{e}_j\right) - A_{x^N}\left(\nabla_{\vec{e}_j}\vec{e}_j\right)\right) \tag{3.24}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 3.2.2. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ bir izometrik daldırma ile verilsin. Bu takdirde M üzerinde türevlenebilir bir φ fonksiyonu için

$$\Delta x^T = \varphi x^T \tag{3.25}$$

şartı sağlanırsa x^T vektör alanı *noktasal 1-tipindedir* denir. Burada φ *tayin fonksiyonu* olarak adlandırılır.

Aşikar olarak, $\varphi = 0$ olması durumunda x^T vektör alanı *harmonik* tir.

Böylece (3.5), (3.24) ve (3.25) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.3 M, *n*-boyutlu bağlantılı Riemann manifold olmak üzere $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ bir izometrik daldırma olsun. O halde x^T vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_{\vec{e}_j}\left(A_{x^N}\vec{e}_j\right) - A_{x^N}\left(\nabla_{\vec{e}_j}\vec{e}_j\right) - \varphi\langle\vec{e}_j, x\rangle\right) = 0, \tag{3.26}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

4. BULGULAR

4.1. $\Delta x^T = \varphi x^T$ Şartını Sağlayan Rotasyonel Hiperyüzeyler

Bu kısımda rotasyonel hiperyüzeyler incelenmiştir. İlk olarak $\mathbb{R}^3$ deki rotasyonel hiperyüzeyler, diğer bir ifadeyle dönel yüzeyler, ikinci olarak $\mathbb{R}^4$ deki rotasyonel hiperyüzeyler ve son olarak da $\mathbb{R}^4$ deki birotasyonel hiperyüzeyler ele alınmıştır. Bu hiperyüzeylerin x^T vektör alanlarının harmonik olması durumunda bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca x^T vektör alanlarının noktasal 1-tipinde olması incelenmiş, elde edilen sonuçları destekleyici bazı örnekler verilmiştir.

Bu bölümde rotasyonel hiperyüzeyler ile ilgili aşağıdaki durumlar ele alınmıştır:

I. Durum: ($\mathbb{R}^3$ deki dönel yüzeyler)

$\mathbb{R}^3$ de

$$x(u,v) = (f_1(u), f_2(u)cosv, f_2(u)sinv), \tag{4.1}$$

$f_2(u) \neq 0$, koordinat yamasıyla verilen yüzey *dönel yüzey* olarak bilinir. Burada $\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u))$ M nin meridyen eğrisidir (Gray, 1993). M nin ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\psi}\frac{\partial x}{\partial u} \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{f_2}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{\psi}(f_2', -f_1' cosv, -f_1' sinv) \end{aligned} \tag{4.2}$$

vektörleri tarafından gerilir (Bulca vd., 2009). Burada

$$\psi = \sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2} \tag{4.3}$$

M üzerinde reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece x in teğet bileşeni

$$\mathrm{x}^T = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \langle x, \vec{e}_{\mathrm{i}} \rangle \vec{e}_i = \frac{\eta}{\psi}\vec{e}_1 \tag{4.4}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\eta = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} f_i(u) f_i'(u) \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Böylece $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ çatı alanına göre Gauss ve Weingarten denklemleri

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 &= \frac{\kappa}{\psi^3}\vec{e}_3, \\
\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_1}\vec{e}_2 &= 0, \\
\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_2}\vec{e}_1 &= \frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_2, \\
\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 &= -\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_1 + \frac{f_1'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_3
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada

$$k = f_1'(u) f_2''(u) - f_2'(u) f_1''(u) \tag{4.7}$$

reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece (4.6) daki eşitlikler yardımıyla M nin şekil operatörü matrisi

$$A_{\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\psi^3} & 0 \\ 0 & \frac{f_1'}{\psi f_2} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Buradan $A_{\vec{e}_3}$ matrisinin izi alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir (Arslan vd 2017).

Teorem 4.1.1 $M \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyinin ortama eğrilik vektör alanı

$$\vec{H} = \left(\frac{kf_2 + \psi^2 f_1'}{2f_2\psi^3}\right)\vec{e}_3$$

dır. Burada φ ve k fonksiyonları sırasıyla (4.3) ve (4.5) eşitliklerinde verilmiştir.

Teorem 4.1.2 (4.1) koordinat yamasıyla verilen $M \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyinin x^T teğet vektör alanı sıkıştırılamaz olsun. Bu takdirde

$$(kf_2 + \psi^2 f_1')\sigma + 2f_2\psi^4 = 0$$

dır. Burada

$$\sigma = f_1' f_2 - f_2' f_1 \tag{4.7$_1$}$$

ve ψ, k türevlenebilir fonksiyonları sırasıyla (4.3) ve (4.7) ve de tanımlanmıştır.

İspat. (4.1) ve (4.2) yardımıyla

$$\langle \vec{e}_3, x \rangle = \frac{f_1' f_2 - f_2' f_1}{\psi} \tag{4.7$_2$}$$

elde edilir. Basitliğin hatırına $\sigma = f_1' f_2 - f_2' f_1$ alınırsa $\langle \vec{e}_3, x \rangle = \frac{\sigma}{\psi}$ bulunur. Buradan M nin teğet vektör alanı x^T nin sıkıştırılamaz olması durumunda

$$-1 = \langle \vec{H}, x \rangle = \left(\frac{kf_2 + \psi^2 f_1'}{2f_2\psi^3} \right) \langle \vec{e}_3, x \rangle = \frac{(kf_2 + \psi^2 f_1')\sigma}{2f_2\psi^4}$$

elde edilir. Böylece son eşitlik düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir. ■

M yüzeyinin x^T teğet vektör alanının Laplasını hesaplamak için (4.6) da verilen vektör alanlarının teğet bileşenlerine ihtiyaç vardır. Buna göre

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= 0, \\ \nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_2 &= 0, \\ \nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 &= \frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)} \vec{e}_2, \\ \nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)} \vec{e}_1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

olduğu görülür. Buradan (4.4) ve (4.8) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} \mathrm{x}^T &= \frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi} \right)_u \vec{e}_1, \\ \nabla_{\vec{e}_2} \mathrm{x}^T &= \frac{\eta}{\psi^2} \frac{f_2'}{f_2} \vec{e}_2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur. Böylece (3.18) ve (4.9) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1 &= \nabla_{\vec{e}_1}\mathrm{x}^T - \vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u - 1\right)\vec{e}_1, \\
\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2 &= \nabla_{\vec{e}_2}\mathrm{x}^T - \vec{e}_2 = \left(\frac{\eta}{\psi^2}\frac{f_2'}{f_2} - 1\right)\vec{e}_2
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.10) eşitliğindeki vektör alanlarının $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yönünde türevleri alınırsa

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\vec{e}_1}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1) &= \frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{\psi(u)}\left(\frac{\eta(u)}{\psi(u)}\right)_u\right)_u \vec{e}_1, \\
\nabla_{\vec{e}_2}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2) &= \frac{1}{\psi(u)}\left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)} - \frac{\eta(u)}{\psi^2(u)}\left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\right)^2\right)\vec{e}_1
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

bulunur. Benzer şekilde (4.8) ve (4.10) eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1\right) &= 0, \\
\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2\right) &= \frac{1}{\psi}\left(\frac{f_2'}{f_2} - \frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u \frac{f_2'}{f_2}\right)\vec{e}_1
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

elde edilir. Böylece, (4.11), (4.12) eşitlikleri (3.24) de yerine yazılırsa x^T vektör alanının Laplasyeni

$$
\begin{aligned}
\Delta x^T &= \nabla_{\vec{e}_1}\left(A_{x^N}\vec{e}_1\right) - A_{x^N}\left(\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1\right) + \nabla_{\vec{e}_2}\left(A_{x^N}\vec{e}_2\right) - A_{x^N}\left(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2\right) \\
&= \frac{1}{\psi}\left(\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u\right)_u + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u \frac{f_2'}{f_2} - \frac{\eta}{\psi^2}\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)^2\right)\vec{e}_1
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

olarak bulunur. Burada ψ ve η fonksiyonlar sırasıyla (4.3) ve (4.5) de tanımlanmıştır.

Teorem. 4.1.3 $M \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyi (4.1) koordinat yamasıyla verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$
\left(\frac{1}{\psi(u)}\left(\frac{\eta(u)}{\psi(u)}\right)_u\right)_u + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u \frac{f_2'}{f_2} - \frac{\eta}{\psi^2}\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)^2 = 0 \tag{4.14}
$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.1.4 $\mathbb{R}^3$ de $f_1(u) = au + b, f_2(u) = c \neq 0,$ meridyen eğrisi ile verilen dönel yüzey bir silindir belirtir. Bu yüzeyin x^T vektör alanı harmoniktir. □

Meridyen eğrisinin birim hızlı olması durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme. 4.1.5 $M \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyi (4.1) koordinat yamasıyla verilsin. Bu yüzeyin meridyen eğrisi birim hızlı ise bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\eta''(u) + \eta'(u)\frac{f_2'(u)}{f_2(u)} - \eta(u)\left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\right)^2 = 0 \tag{4.15}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada η türenlenebilir bir fonksiyon olup (4.5) eşitliğinde tanımlanmıştır.

Sonuç. 4.1.6 $M \subset \mathbb{R}^3$ birim hızlı meridyen eğrisine sahip bir dönel yüzey olsun. Bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$f_2^2(f_1f_1''' + f_2f_2''') + f_2'(1 + f_1f_1'' + f_2f_2'') - (f_2')^2(f_1f_1' + f_2f_2') = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.1.7 $\mathbb{R}^3$ de $f_1(u) = cu, f_2(u) = \sqrt{1 - c^2}u$ meridyen eğrisi ile verilen dönel yüzeyinin x^T vektör alanının harmoniktir. Bu yüzey bir koni belirtir. □

(4.4) ve (4.13) eşitlikleri (3.25) de yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1}{\eta\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u\right)_u + \frac{1}{\psi\eta}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u\frac{f_2'}{f_2} - \frac{\eta}{\psi^2}\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)^2 = \varphi \tag{4.16}$$

eşitliği elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuçlar ispatlanmış olur:

Teorem. 4.1.8 $M \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyi (4.1) koordinat yamasıyla verilmiş olan dönel yüzeyin x^T vektör alanı noktasal 1-tipinde olup bu yüzeyin tayin fonksiyonu (4.16) ile hesaplanır.

Sonuç 4.1.9 $M \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyin meridyen eğrisi

$$\gamma(u) = (r(u)cosu, r(u)sinu) \tag{4.16$_1$}$$

biçiminde polar koordinatlar ile verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için gerek ve yeter şart tayin fonksiyonun

$$\frac{1}{rr'}\left(\frac{(r')^4 + r^3r''}{(r^2 + (r')^2)^2}\right)_u + \frac{1}{rr'}\left(\frac{(r')^4 + r^3r''}{(r^2 + (r')^2)^2}\right)\left(\frac{r'}{r} + cotu\right) - \frac{1}{rr'}\left(\frac{rr'}{r^2 + (r')^2}\right)\left(\frac{r'}{r} + cotu\right)^2 = \varphi$$

olmasıdır. Burada $r(u) \neq sbt$ olan yarıçap fonksiyonudur.

Tanım 4.1.10 $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x: M \to \mathbb{R}^{n+d}$ bir izometrik daldırma ile verilsin. Bu takdirde bazı $c \in [0,1]$ için $\|x^T\| = c\|x\|$ eşitliği sağlanırsa M ye sabit oranlıdır denir. (Chen, 2003).

Aşağıdaki önermenin detaylı ispatı (Chen, 2003) de görülebilir.

Önerme 4.1.11 $\mathbb{R}^2$ de yatan regüler bir γ eğrisinin sabit oranlı olması için gerek ve yeter şart γ nın aşağıdaki eğrilerden birinin açık bir parçası olmasıdır:

(a) Orijinden geçen bir doğru,

(b) Orijin merkezli bir çember,

(c) Bir logaritmik spiral (polar koordinatlarda $r = ae^{b\theta}$, $a, b \in \mathbb{R}$) dir.

Açıklama 4.1.12 ***1)*** $r = sbt$ olması durumunda $M \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyi bir küre belirtir. Bu durumda $\eta' = 0$ olacağından (4.4) eşitliği gereği $x^T = \vec{0}$ bulunur. Diğer bir değişle $x = x^N$ olmalıdır. Bu durumda $\|\nabla\rho\| = sbt$ olduğundan dönel yüzeyin küresel olduğunu sonucuna varılır.

2) $x^N = \vec{0}$ olması durumunda $x = x^T$ dır. Böylece (4.7_2) eşitliği yardımıyla

$$\langle \vec{e}_3, x \rangle = \frac{f_1'f_2 - f_2'f_1}{\psi} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$(f_1'f_2 - f_1f_2') = 0 \tag{4.17}$$

olduğu görülür. Bu da bize dönel yüzeyin meridyen eğrisinin orijinden geçen bir doğru parçası olduğunu gösterir. Böylece dönel yüzey bir koni belirtir. Basit bir hesaplama ile Örnek 4.5 de verilen f_1 ve f_2 fonksiyonlarının (4.17) eşitliğini sağladığı görülür.

Sonuç 4.1.9 dan yararlanarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.1.13 $r = e^u$ olması durumunda meridyen eğrisi logaritmik spiral belirtir. Elde edilen dönel yüzeyinin x^T vektör alanının noktasal 1- tipinde olması için tayin fonksiyonun $\varphi = -\frac{cotu(1+cotu)}{2e^{2u}}$ olmasıdır. □

Örnek 4.1.14 Dönel yüzeyin meridyen eğrisi

$$\gamma(u) = \left(\int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, du, \lambda e^{-u/c}\right)$$

parametrelendirmesi ile verilen bir traktriks eğrisi ise bu durumda yüzey $\mathbb{R}^3$ te Beltrami yüzeyi belirtir. Bu yüzeyin bir parametrelendirmesi,

$$x(u,v) = \left(\int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, du\,, \lambda e^{-u/c} \cos v\,, \lambda e^{-u/c} \sin v\right)$$

dir. Sonuç olarak Beltrami yüzeylerinin Gauss eğriliği $K = -\frac{1}{c^2}$ dir. Bu nedenle bu yüzeyler parabolik pseudo-küresel yüzeyler sınıfına girmektedir. Pseudo-küre, 1868 yılında Eugenio Beltrami tarafından tanımlanmış olup hiperbolik geometri için bir model teşkil eder (Beltrami, 1868). Bu çalışmalardan da bilindiği üzere pseudo-küre negatif, sabit Gauss eğriliğine sahiptir. Böylece yukarıdaki parametrelendirme ile verilen Beltrami yüzeyinin x^T vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için

$$\frac{\eta''(u)}{\eta(u)} - \frac{\eta'(u)}{c\eta(u)} - \frac{1}{c^2} = \varphi$$

eşitliği sağlanmalıdır. Buradan

$$\int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, du = -c\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}} - \frac{c}{2} ln\left(\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}} - 1\right) + \frac{c}{2} ln\left(\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}} + 1\right)$$

olduğundan bu integral yardımıyla

$$\begin{aligned}\eta &= \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}} \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, du - \frac{\lambda^2}{c} e^{-2u/c} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}} \left(-c\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}} - \frac{c}{2} ln\left(\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}} - 1\right)\right) \\ &+ \frac{c}{2} ln\left(\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}} + 1\right)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. □

<u>II. Durum</u>: ($\mathbb{R}^4$ deki Rotasyonel Hiperyüzeyler)

$M \subset \mathbb{R}^4$ dönel hiperyüzeyi,

$$x(s,u,v) = (f_1(s), f_2(s)sinu, f_2(s)cosusinv, f_2(s)cosucosv) \tag{4.18}$$

$f_2(s) \neq 0$, koordinat yamasıyla verilsin. Burada

$$\gamma(s) = (f_1(s), f_2(s))$$

regüler bir eğri olup meridyen eğrisi olarak bilinir (Do Carmo ve Dajczer, 1983; Güler vd., 2018). M nin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\psi}\frac{\partial x}{\partial s}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{f_2}\frac{\partial x}{\partial u}, \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{f_2 cosu}\frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned} \tag{4.19}$$

ortanormal vektörleri tarafından gerilir. Böylece M nin birim normalı

$$\vec{e}_4 = \frac{1}{\psi}(f_2', -f_1' sinu, -f_1' cosusinv, -f_1' cosucosv) \tag{4.20}$$

olarak hesaplanır. Böylece $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ çatı alanına göre Gauss ve Weingarten denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 &= \frac{\kappa}{\psi^3}\vec{e}_4, \\ \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 &= -\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_1 + \frac{f_1'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_4, \\ \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_3}\vec{e}_3 &= -\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_1 + \frac{tanu}{f_2(u)}\vec{e}_2 + \frac{f_1'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_4 \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada ψ ve κ fonksiyonları sırasıyla (4.3) ve (4.7) de verildiği gibidir. Böylece, (4.21) de verilen vektör alanlarının teğet bileşenler

$$\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 = 0,$$
$$\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_1 = \frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_2,$$
$$\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 = -\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_1, \tag{4.22}$$
$$\nabla_{\vec{e}_3}\vec{e}_1 = \frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_3,$$
$$\nabla_{\vec{e}_3}\vec{e}_3 = -\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_1 + \frac{tanu}{f_2(u)}\vec{e}_2$$

olduğu görülür. Bu durumda (4.21) yardımıyla *M* nin şekil operatörünün matris temsilcisi

$$A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\psi^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_1'}{\psi f_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_1'}{\psi f_2} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

olarak bulunur. Bu matrisin farklı bir yoldan hesaplanması için bakınız (Arslan vd., 2021). Buradan (4.23) kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.15 $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.18) koordinat yamasıyla verilsin. M nin ortama eğrilik vektör alanı

$$\vec{H} = \frac{kf_2 + 2\psi^2 f_1'}{3f_2\psi^3}\vec{e}_4 \tag{4.24}$$

dır. Burada φ ve k fonksiyonları (4.3) ve (4.5) eşitliklerinde verilmiştir.

Teorem 4.1.16 (4.18) koordinat yamasıyla verilen $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyinin x^T teğet vektör alanı sıkıştırılamaz olsun. Bu takdirde

$$(kf_2 + 2\psi^2 f_1')\sigma + 3f_2\psi^4 = 0$$

eşitliği sağlanır. Burada $\sigma = f_1'f_2 - f_2'f_1$ve ψ, k türevlenebilir fonksiyonları sırasıyla (4.3) ve (4.7) ve de tanımlanmıştır.

İspat. (4.1) ve (4.2) yardımıyla

$$\langle \vec{e}_4, x \rangle = \frac{f_1' f_2 - f_2' f_1}{\psi}$$

elde edilir. Böylece

$$\sigma = f_1' f_2 - f_2' f_1$$

alınırsa $\langle \vec{e}_4, x \rangle = \frac{\sigma}{\psi}$ bulunur. Böylece M nin x^T teğet vektör alanı sıkıştırılamaz olması durumunda

$$-1 = \langle \vec{H}, x \rangle = \left(\frac{k f_2 + 2\psi^2 f_1'}{3 f_2 \psi^3} \right) \langle \vec{e}_4, x \rangle = \frac{(k f_2 + 2\psi^2 f_1')\sigma}{3 f_2 \psi^4}$$

elde edilir. ■

Şimdi de $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyinin x^T teğet vektör alanı yardımıyla ilgili aşağıdaki hesaplamaları yapalım. Bunun için (4.18) yamasının teğet bileşenin

$$\mathrm{x}^T = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \langle x, \vec{e}_{\mathrm{i}} \rangle \vec{e}_i \ = \frac{\eta}{\psi} \vec{e}_1 \qquad (4.23)$$

eşitliğinden yararlanılır. Böylece (4.22) ve (4.23) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} \mathrm{x}^T &= \frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi} \right)_s \vec{e}_1, \\ \nabla_{\vec{e}_2} \mathrm{x}^T &= \frac{\eta f_2'(u)}{\psi^2 f_2(u)} \vec{e}_2, \\ \nabla_{\vec{e}_3} \mathrm{x}^T &= \frac{\eta f_2'(u)}{\psi^2 f_2(u)} \vec{e}_3 \end{aligned} \qquad (4.24)$$

bulunur. Böylece (3.18) ve (4.24) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_1 &= \nabla_{\vec{e}_1} \mathrm{x}^T - \vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi} \right)_s - 1 \right) \vec{e}_1, \\ A_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_2 &= \nabla_{\vec{e}_2} \mathrm{x}^T - \vec{e}_2 = \left(\frac{\eta f_2'(u)}{\psi^2 f_2(u)} - 1 \right) \vec{e}_2, \\ A_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_3 &= \nabla_{\vec{e}_3} \mathrm{x}^T - \vec{e}_3 = \left(\frac{\eta f_2'(u)}{\psi^2 f_2(u)} - 1 \right) \vec{e}_3 \end{aligned} \qquad (4.25)$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.10) eşitliğindeki vektör alanlarının $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yönünde türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{e}_1}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1) &= \frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\right)_s \vec{e}_1, \\
\nabla_{\vec{e}_2}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2) &= -\left(\frac{\eta f_2'(u)}{\psi^2 f_2(u)} - 1\right)\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_1, \\
\nabla_{\vec{e}_3}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_3) &= \left(\frac{\eta f_2'(u)}{\psi^2 f_2(u)} - 1\right)\left(-\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_1 + \frac{tanu}{f_2(u)}\vec{e}_2\right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
-\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1\right) &= 0, \\
-\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2\right) &= \frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s - 1\right)\vec{e}_1, \\
-\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_3}\vec{e}_3\right) &= \frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s - 1\right)\vec{e}_1 - \frac{tanu}{f_2(u)}\left(\frac{\eta f_2'(u)}{\psi^2 f_2(u)} - 1\right)\vec{e}_2
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Böylece, (4.26), (4.27) eşitlikleri (3.24) de yerine yazılırsa x^T vektör alanının Laplasyeni

$$\begin{aligned}
\Delta \mathrm{x}^T &= \sum_{i=1}^{3}\left(\nabla_{\vec{e}_i}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_i) - \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_i\right)\right) \\
&= \frac{1}{\psi}\left\{\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\right)_s + \frac{2}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\frac{f_2'}{f_2} - \frac{2\eta}{\psi^2}\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)^2\right\}\vec{e}_1
\end{aligned} \tag{4.28}$$

olarak bulunur. Burada ψ ve η reel değerli fonksiyonlar olup sırasıyla (4.3) ve (4.5) de tanımlanmıştır.

Teorem. 4.1.17 $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.18) koordinat yamasıyla verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{1}{\psi(u)}\left(\frac{\eta(u)}{\psi(u)}\right)_s\right)_s + \frac{2}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\frac{f_2'}{f_2} - \frac{2\eta}{\psi^2}\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)^2 = 0 \tag{4.29}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Meridyen eğrisinin birim hızlı olması durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç. 4.1.18 (4.18) koordinat yamasıyla verilen rotasyonel hiperyüzeyi birim hızlı meridyen eğrisine sahip olsun. Bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\eta''(u) + 2\eta'(u)\frac{f_2'(u)}{f_2(u)} - 2\eta(u)\left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\right)^2 = 0 \tag{4.30}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada η türenlenebilir bir fonksiyon olup (4.5) eşitliğinde tanımlanmıştır.

Örnek 4.1.19 $f_1(u) = cu, f_2(u) = \sqrt{1-c^2}u,\ \ c^2 < 1$ meridyen eğrisi ile verilen rotasyonel hiperyüzeyinin x^T vektör alanının harmoniktir. Bu hiperyüzeyin bir parametrizasyonu

$$x(s,u,v) = \left(cs, (\sqrt{1-c^2}s)sinu, (\sqrt{1-c^2}s)cosusinv, (\sqrt{1-c^2}s)cosucosv\right)$$

dır. Bu hiperyüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{kf_2 + 2\psi^2 f_1'}{3f_2\psi^3} = \frac{2c}{3\sqrt{1-c^2}u}, c^2 < 1,$$

olarak bulunur. □

(4.23) ve (4.28) eşitlikleri (3.25) de yerine yazılırsa

$$\varphi = \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\right)_s + \frac{2}{\eta\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\frac{f_2'}{f_2} - \frac{2\eta}{\eta\psi^2}\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)^2 \tag{4.31}$$

eşitliği elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuçlar ispatlanmış olur:

Teorem. 4.1.20 (4.18) koordinat yamasıyla verilmiş olan rotasyonel hiperyüzeyinin x^T vektör alanı noktasal 1- tipinde olup tayin fonksiyonu (4.31) ile hesaplanır.

Sonuç. 4.1.21 (4.18) koordinat yamasıyla verilmiş olan rotasyonel hiperyüzeyinin meridyen eğrisi $(4.16)_1$ polar koordinatlarda verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının noktasal 1- tipinde olması için gerek ve yeter şart tayin fonksiyonunun

$$\varphi = \frac{1}{\mathrm{rr}'}\left(\frac{(r')^4 + r^3r''}{(r^2+(r')^2)^2}\right)_s + \frac{2}{\mathrm{rr}'}\left(\frac{(r')^4 + r^3r''}{(r^2+(r')^2)^2}\right)\left(\frac{r'}{r} + cots\right) - \frac{2}{\mathrm{rr}'}\left(\frac{\mathrm{rr}'}{r^2+(r')^2}\right)\left(\frac{r'}{r} + cots\right)^2$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada $r(u) \neq sbt$, yarıçap fonksiyonunu belirtir.

<u>III. Durum</u>: ($\mathbb{R}^4$ deki Bi-rotasyonel Hiperyüzeyler)

$\mathbb{R}^4$ de

$$M: x(s,u,v) = (f_1(s)cosu, f_1(s)sinu, f_2(s)cosv, f_2(s)sinv) \tag{4.32}$$

koordinat yamasıyla verilen hiperyüzeye *bi-rotasyonel hiperyüzey* adı verilir (Drugan vd., 2018). M nin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{x_s}{\|x_s\|} = \frac{x_s}{\psi}, \\ e_2 &= \frac{x_u}{\|x_u\|} = \frac{x_u}{f_1}, \\ e_3 &= \frac{x_v}{\|x_v\|} = \frac{x_v}{f_2} \end{aligned} \tag{4.33}$$

ortanormal vektörleri tarafından gerilir. Böylece M nin birim normalı

$$\vec{e}_4 = \frac{1}{\psi}(f_2'(s)cosu, f_2'(s)sinu, -f_1'(s)cosv, -f_1'(s)sinv) \tag{4.34}$$

olarak hesaplanır. Burada ψ fonksiyonu (4.3) de tanımlanmıştır. Böylece $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ çatı alanına göre Gauss ve Weingarten denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 &= \frac{k}{\psi^3}\vec{e}_4, \\ \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 &= -\frac{f_1'(u)}{\psi f_1(u)}\vec{e}_1 - \frac{f_2'(u)}{\psi f_1(u)}\vec{e}_4, \\ \widetilde{\nabla}_{\vec{e}_3}\vec{e}_3 &= -\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_1 + \frac{f_1'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_4 \end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. Burada k ve ψ fonksiyonları sırasıyla (4.3) ve (4.7) de verildiği gibidir. Böylece, (4.35) de verilen vektör alanlarının teğet bileşenler

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 &= 0, \\ \nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_1 &= \frac{f_1'(u)}{\psi f_1(u)}\vec{e}_2, \\ \nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 &= -\frac{f_1'(u)}{\psi f_1(u)}\vec{e}_1, \\ \nabla_{\vec{e}_3}\vec{e}_1 &= \frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_3, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\nabla_{\vec{e}_3}\vec{e}_3 = -\frac{f_2'(u)}{\psi f_2(u)}\vec{e}_1$$

olduğu görülür. Buradan (4.35) yardımıyla *M* nin şekil operatörünün matris temsilcisi

$$A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\psi^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_2'}{\psi f_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_1'}{\psi f_2} \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

olarak bulunur. Bu matrisin farklı bir yoldan hesaplanması için bakınız (Arslan vd., 2021).

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.22 $M \subset \mathbb{R}^4$ bi-rotasyonel hiperyüzeyi (4.32) koordinat yamasıyla verilsin. Bu taktirde *M* nin ortalama eğriliği

$$H = \frac{kf_1f_2 + \psi^2\mu}{3f_1f_2\psi^3} \tag{4.38}$$

dır. Burada μ reel değerli türevlenebilir fonksiyon olup

$$\mu = f_1(s)f_1'(s) - f_2(s)f_2'(s) \tag{4.39}$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 4.1.23 Meridyen eğrisi r yarıçaplı bir çember olsun. Bu takdirde M bi-rotasyonel hiperyüzeyi

$$x(s,u,v) = ((rcoss)cosu, (rcoss)sinu, (rsins)cosv, (rsins)sinv) \tag{4.40}$$

koordinat yamasına sahip $H = -\frac{1}{3r}$ sabit eğrilikli hiperküredir (Drugan vd., 2018). □

Teorem 4.1.24 $M \subset \mathbb{R}^4$ bi-rotasyonel hiperyüzeyi (4.32) parametrelendirmesi ile verilsin. Eğer M nin x^T teğet vektör alanı sıkıştırılamaz ise bu takdirde

$$(kf_1f_2 + \psi^2\mu)\sigma + 3f_1f_2\psi^4 = 0 \tag{4.41}$$

dır. Burada $\sigma = f_1' f_2 - f_2' f_1$ve ψ, k türevlenebilir fonksiyonları sırasıyla (4.3) ve (4.7) ve de tanımlanmıştır.

İspat. (4.32) ve (4.34) yardımıyla $\langle \vec{e}_4, x \rangle = \frac{\sigma}{\psi}$ elde edilir. Böylece M nin x^T teğet vektör alanı sıkıştırılamaz olması durumunda

$$-1 = \langle \vec{H}, x \rangle = \left(\frac{k f_1 f_2 + \psi^2 \mu}{3 f_1 f_2 \psi^3} \right) \langle \vec{e}_4, x \rangle = \left(\frac{k f_1 f_2 + \psi^2 \mu}{3 f_1 f_2 \psi^4} \right) \sigma$$

elde edilir. ■

Şimdi de $M \subset \mathbb{R}^4$ bi-rotasyonel hiperyüzeyinin x^T teğet vektör alanı yardımıyla ilgili aşağıdaki hesaplamalar yapalım. Bunun için (4.23) eşitliğinden yararlanılır. Böylece (4.36) ve (4.23) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} \mathrm{x}^T &= \frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi} \right)_s \vec{e}_1, \\ \nabla_{\vec{e}_2} \mathrm{x}^T &= \frac{\eta f_1'(s)}{\psi^2 f_1(s)} \vec{e}_2, \\ \nabla_{\vec{e}_3} \mathrm{x}^T &= \frac{\eta f_2'(s)}{\psi^2 f_2(s)} \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{4.42}$$

bulunur. Böylece (3.26) ve (4.42) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_1 &= \nabla_{\vec{e}_1} \mathrm{x}^T - \vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi} \right)_s - 1 \right) \vec{e}_1, \\ \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_2 &= \nabla_{\vec{e}_2} \mathrm{x}^T - \vec{e}_2 = \left(\frac{\eta f_1'(s)}{\psi^2 f_1(s)} - 1 \right) \vec{e}_2, \\ \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_3 &= \nabla_{\vec{e}_3} \mathrm{x}^T - \vec{e}_3 = \left(\frac{\eta f_2'(s)}{\psi^2 f_2(s)} - 1 \right) \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{4.43}$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.43) eşitliğindeki vektör alanlarının $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yönünde türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} (\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_1) &= \frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi} \right)_s \right)_s \vec{e}_1, \\ \nabla_{\vec{e}_2} (\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_2) &= -\frac{f_1'(s)}{\psi f_1(s)} \left(\frac{\eta f_1'(s)}{\psi^2 f_1(s)} - 1 \right) \vec{e}_1, \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\nabla_{\vec{e}_3}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_3)=-\frac{f_2'(s)}{\psi f_2(s)}\left(\frac{\eta f_2'(s)}{\psi^2 f_2(s)}-1\right)\vec{e}_1$$

bulunur. Benzer şekilde

$$-\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1\right)=0,$$

$$-\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2\right)=\frac{f_1'(s)}{\psi f_1(s)}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s-1\right)\vec{e}_1, \tag{4.45}$$

$$-\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_3}\vec{e}_3\right)=\frac{f_2'(s)}{\psi f_2(s)}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s-1\right)\vec{e}_1$$

elde edilir. Böylece, (4.45), (4.46) eşitlikleri (3.24) de yerine yazılırsa x^T vektör alanının Laplasyeni

$$\Delta\mathrm{x}^T=\sum_{i=1}^{3}\left(\nabla_{\vec{e}_i}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_i)-\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_i\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\psi}\left\{\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\right)_s+\frac{1}{\psi}\left(\frac{f_1'f_2+f_1f_2'}{f_1f_2}\right)\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s-\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{(f_1')^2f_2^2+f_1^2(f_2')^2}{f_1^2f_2^2}\right)\eta\right\}\vec{e}_1 \tag{4.46}$$

olarak bulunur. Burada ψ ve η reel değerli fonksiyonlar olup sırasıyla (4.3) ve (4.5) de tanımlanmıştır.

Teorem. 4.1.25 $M\subset\mathbb{R}^4$ bi-rotasyonel hiperyüzeyi (4.32) koordinat yamasıyla ile verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\right)_s+\frac{1}{\psi}\left(\frac{f_1'f_2+f_1f_2'}{f_1f_2}\right)\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s-\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{(f_1')^2f_2^2+f_1^2(f_2')^2}{f_1^2f_2^2}\right)\eta=0 \tag{4.47}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada ψ ve η türenlenebilir bir fonksiyon olup sırasıyla (4.3) ve (4.5) eşitliğinde tanımlanmıştır.

Meridyen eğrisinin birim hızlı olması durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç. 4.1.26 $M\subset\mathbb{R}^4$ bi-rotasyonel hiperyüzeyi (4.32) koordinat yamasıyla verilsin. O halde M nin meridyen eğrisi birim hızlı ise bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\eta'' + \left(\frac{f_1'f_2 + f_1f_2'}{f_1f_2}\right)\eta' - \left(\frac{(f_1')^2f_2^2 + f_1^2(f_2')^2}{f_1^2f_2^2}\right)\eta = 0 \tag{4.48}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.1.27 $\mathbb{R}^3$ de $f_1(s) = cs, f_2(s) = \sqrt{1-c^2}s,\ c^2 < 1$ meridyen eğrisi ile verilen bi-rotasyonel hiperyüzeyinin x^T vektör alanının harmoniktir. Bu hiperyüzeyin bir parametrizasyonu

$$x(s,u,v) = \Big((cs)cosu, (cs)sinu, (\sqrt{1-c^2}s)cosv, (\sqrt{1-c^2}s)sinv\Big)$$

dır. Bu hiperyüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{kf_1f_2 + \psi^2\mu}{3f_1f_2\psi^3} = \frac{2c^2s - 1}{3c\sqrt{1-c^2}s^2}, c^2 < 1,$$

olarak bulunur. □

(4.23) ve (4.46) eşitlikleri (3.25) de yerine yazılırsa

$$\varphi = \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\right)_s + \frac{1}{\eta\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_s\left(\frac{f_1'f_2 + f_1f_2'}{f_1f_2}\right) - \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{(f_1')^2f_2^2 + f_1^2(f_2')^2}{f_1^2f_2^2}\right) \tag{4.49}$$

eşitliği elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuçlar ispatlanmış olur:

Teorem. 4.1.28 (4.32) koordinat yamasıyla verilmiş olan bi-rotasyonel hiperyüzeyinin x^T vektör alanı noktasal 1- tipinde olup tayin fonksiyonu (4.49) ile hesaplanır. Burada ψ ve η türenlenebilir bir fonksiyon olup sırasıyla (4.3) ve (4.5) de tanımlanmıştır.

Sonuç. 4.1.29 (4.32) koordinat yamasıyla verilen bi-rotasyonel hiperyüzeyin meridyen eğrisi $(4.16)_1$ polar koordinatlarda verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için gerek ve yeter şart tayin fonksiyonunun

$$\varphi = \frac{1}{\mathrm{r}r'}\left(\frac{(r')^4 + r^3r''}{(r^2+(r')^2)^2}\right)_s + \frac{2}{\mathrm{r}r'}\left(\frac{(r')^4 + r^3r''}{(r^2+(r')^2)^2}\right)\left(\frac{r'}{r} + cot2s\right)$$
$$-\frac{1}{\mathrm{r}r'}\left(\frac{\mathrm{r}r'}{r^2+(r')^2}\right)\left(2\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + 4cces^2 2s - \frac{4r'}{r}cot2s - 2\right)$$

eşitliğini sağlanmasıdır. Burada $r(u) \neq sbt$, yarıçap fonksiyonunu belirtir.

Örnek 4.1.30 Bi-rotasyonel hiperyüzeyin meridyen eğrisi $r = e^s$ şeklinde bir logaritmik spiral olsun. x^T vektör alanının noktasal 1- tipinde ise bu takdirde tayin fonksiyonu

$$\varphi = \frac{1 + 3cot2s - 2csec^2 2s}{e^{2s}}$$

dir. □

4.2. $\mathbb{R}^4$ de $\Delta \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}$ Şartını Sağlayan Rotasyonel Yüzeyler

3-boyutlu diferansiyel geometride dönel yüzeylerinin birçok alanda uygulamaları mevcuttur. Bununla birlikte, F.N Cole 1890 yılında 4-boyutlu Öklid uzayında genel rotasyonel yüzeyler ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Daha sonra C.L.E Moore 1919 yılında bu tür yüzeylerin aşağıdaki parametrelendirmesini tanımlamışlardır;

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(u,v) &= x_1(u)coscv - x_2(u)sincv, \\
\tilde{x}_2(u,v) &= x_1(u)sincv + x_2(u)coscv, \\
\tilde{x}_3(u,v) &= x_3(u)cosdv - x_4(u)sindv, \\
\tilde{x}_4(u,v) &= x_3(u)sindv + x_4(u)cosdv
\end{aligned} \tag{4.50}$$

burada $c, d \in \mathbb{R}$ ve $\gamma(u) = \big(x_1(u), x_2(u), x_3(u), x_4(u)\big)$ rotasyon yüzeyinin meridyen eğrisidir. Eğer c veya d sabitlerinden birisi sıfıra eşit alınırsa (4.50) parametrelendirmesi klasik rotasyonel yüzey olarak adlandırılır. Sabit eğrilikli rotasyonel yüzeyler (Wong, 1946) ve (Coung, 2013) de çalışılmıştır. Sonlu koordinat tipinde rotasyon yüzeyleri (Bayram vd., 2014) de ele alınmıştır.

Bu kısımda genel rotasyonel yüzeyleri üç farklı durumda incelenmiştir;

<u>I. Durum</u>: Meridyen Eğrisi

$$\gamma(u) = (f_1(u), 0, f_2(u), 0) \tag{4.51}$$

olarak seçildiğinde genel rotasyonel yüzeyi

$$M_1: \quad x(u,v) = (f_1(u)cosav, f_1(u)sinav, f_2(u)cosbv, f_2(u)sinbv) \tag{4.52}$$

koordinat yamasıyla tanımlanır. Burada $f_1(u)$ ve $f_2(u)$ reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar olup $a^2 f_1^2 + b^2 f_2^2 > 0,\ a, b \in \mathbb{R}$ şartı sağlanır (Arslan vd., 2012; Dursun ve Turgay, 2012; Ganchev ve Mileusheva, 2012).

M_1 yüzeyinin tanjant uzayı

$$x_u(u,v) = (f_1'(u)cosav, f_1'(u)sinav, f_2'(u)cosbv, f_2'(u)sinbv),$$
$$x_v(u,v) = (-af_1(u)sinav, af_1(u)cosav, -bf_2(u)sinbv, bf_2(u)cosbv)$$

vektörleri tarafından gerilir. Böylece 1.temel form katsayıları

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle x_u, x_u \rangle = (f_1')^2 + (f_2')^2, \\ g_{12} &= \langle x_u, x_v \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle x_v, x_v \rangle = a^2 f_1^2 + b^2 f_1^2 \end{aligned} \tag{4.53}$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$\psi^2 = (f_1')^2 + (f_2')^2, \tag{4.54}$$
$$\phi^2 = a^2 f_1^2 + b^2 f_2^2 \tag{4.55}$$

alınırsa

$$\begin{aligned} g_{11} &= \psi^2, \\ g_{12} &= 0, \\ g_{22} &= \phi^2 \end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. Buradaki, ψ fonksiyonu daha önceden (4.3) de tanımlanmıştı. Buradan (2.10) eşitliği yardımıyla M_1 yüzeyinin Christoffel sembolleri

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{(g_{11})_u}{2g_{11}}, \qquad \Gamma_{11}^2 = -\frac{(g_{11})_v}{2g_{22}} = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{(g_{11})_v}{2g_{11}} = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{(g_{22})_u}{2g_{22}}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{(g_{22})_u}{2g_{11}}, \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{(g_{22})_v}{2g_{22}} = 0 \end{aligned} \tag{4.57}$$

olarak hesaplanır. Böylece Gauss denkleminden

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x_u} x_u &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v, \\
\nabla_{x_u} x_v &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v, \\
\nabla_{x_v} x_v &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

elde edilir. Böylece (4.57) ve (4.58) eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x_u} x_u &= \frac{(g_{11})_u}{2g_{11}} x_u, \\
\nabla_{x_u} x_v &= \frac{(g_{22})_u}{2g_{22}} x_v, \\
\nabla_{x_v} x_v &= -\frac{(g_{22})_u}{2g_{11}} x_u
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

bulunur. Buradan (4.56) eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x_u} x_u &= \frac{(\psi^2)_u}{2\psi^2} x_u, \\
\nabla_{x_u} x_v &= \frac{(\phi^2)_u}{2\phi^2} x_v, \\
\nabla_{x_v} x_v &= -\frac{(\phi^2)_u}{2\psi^2} x_u
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

elde edilir, burada $\nabla_{x_u} x_v = \nabla_{x_v} x_u$ dır. M_1 yüzeyinin $p \in M_1$ noktasındaki tanjant uzayı nın bir ortogonal bazı

$$
\vec{e}_1 = \frac{x_u}{\psi}, \vec{e}_2 = \frac{x_v}{\phi} \tag{4.61}
$$

biçiminde alınırsa

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= \nabla_{\frac{x_u}{\psi}} \frac{x_u}{\psi} \\
&= \frac{1}{\psi^2} \nabla_{x_u} x_u + \frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{\psi}\right)_u x_u \\
&= \frac{1}{\psi^2} \frac{(\psi^2)_u}{2\psi^2} x_u + \frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{\psi}\right)_u x_u \\
&= 0,
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

$$\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_1 = \nabla_{\frac{x_v}{\phi}}\frac{x_u}{\psi}$$

$$= \frac{1}{\phi\psi}\nabla_{x_v}x_u + \frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{\psi}\right)_v x_u \tag{4.63}$$

$$= \frac{1}{\phi\psi}\frac{(\phi^2)_u}{2\phi^2}x_v$$

$$= \frac{\phi_u}{\phi\psi}\ \vec{e}_2,$$

$$\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_2 = \nabla_{\frac{x_u}{\psi}}\frac{x_v}{\phi}$$

$$= \frac{1}{\phi\psi}\nabla_{x_u}x_v + \frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{\phi}\right)_u x_v \tag{4.64}$$

$$= \frac{1}{\phi\psi}\frac{(\phi^2)_u}{2\phi^2}x_v + +\frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{\phi}\right)_u x_v$$

$$= 0,$$

$$\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 = \nabla_{\frac{x_v}{\phi}}\frac{x_v}{\phi}$$

$$= \frac{1}{\phi^2}\nabla_{x_v}x_v + \frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{\phi}\right)_v x_v \tag{4.65}$$

$$= -\frac{1}{\phi^2}\frac{(\phi^2)_u}{2\psi^2}x_u$$

$$= -\frac{\phi_u}{\phi\psi}\ \vec{e}_1$$

elde edilir. Böylece (4.52) ve (4.61) eşitlikleri yardımıyla

$$\langle\vec{e}_1, x\rangle = \frac{1}{\psi}(f_1f_1' + f_2f_2') = \frac{\eta}{\psi}, \langle\vec{e}_2, x\rangle = 0 \tag{4.66}$$

elde edilir. Burada

$$\eta(u) = f_1f_1' + f_2f_2' \tag{4.67}$$

alınmıştır. Böylece, (3.8) ve (4.56) eşitlikleri yardımıyla x^T vektörü

$$\mathrm{x}^T = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2}\langle\mathrm{x}^T, \vec{e}_{\mathrm{i}}\rangle\vec{e}_i$$

$$= \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \langle \mathrm{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \tag{4.68}$$
$$= \frac{\eta}{\psi} \vec{e}_1$$

olarak hesaplanır. Buradan, (4.68), (4.62) ve (4.65) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} \mathrm{x}^T &= \nabla_{\frac{x_u}{\psi}} \mathrm{x}^T \\ &= \frac{1}{\psi} \nabla_{x_u} \mathrm{x}^T \\ &= \frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u \vec{e}_1 + \frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi}\right) \nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 \\ &= \frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u \vec{e}_1, \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_2} \mathrm{x}^T &= \nabla_{\frac{x_v}{\phi}} \mathrm{x}^T \\ &= \frac{1}{\phi} \left(\frac{\eta}{\psi}\right)_v \vec{e}_1 + \left(\frac{\eta}{\psi}\right) \nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 \\ &= \frac{\eta \phi_u}{\phi \psi^2} \vec{e}_2 \end{aligned} \tag{4.70}$$

bulunur. Böylece (3.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_1 &= \nabla_{\vec{e}_1} \mathrm{x}^T - \vec{e}_1, \\ \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_2 &= \nabla_{\vec{e}_2} \mathrm{x}^T - \vec{e}_2 \end{aligned} \tag{4.71}$$

olduğu bilinmektedir. Buradan (4.69)-(4.71) eşitlikleri kullanılarak

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u - 1 \right) \vec{e}_1, \tag{4.72}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_2 = \left(\frac{\eta \phi_u}{\psi^2 \phi} - 1 \right) \vec{e}_2 \tag{4.73}$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.72), (4.73) eşitliklerinin $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yönünde türevleri alınırsa

$$\nabla_{\vec{e}_1} (\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N} \vec{e}_1) = \frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u \right)_u \vec{e}_1 + \left(\frac{1}{\psi} \left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u - 1 \right) \nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1$$

$$= \frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u\right)_u \vec{e}_1, \tag{4.74}$$

$$\nabla_{\vec{e}_2}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2) = \frac{1}{\phi}\left(\frac{\eta\phi_u}{\phi\psi^2} - 1\right)_v \vec{e}_2 + \left(\frac{\eta\phi_u}{\phi\psi^2} - 1\right)\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2$$

$$= \left(\frac{\eta\phi_u}{\phi\psi^2} - 1\right)\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 \tag{4.75}$$

$$= -\left(\frac{\eta\phi_u}{\psi^2\phi} - 1\right)\frac{\phi_u}{\phi\psi}\ \vec{e}_1$$

dır. Benzer şekilde

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1\right) = 0, \tag{4.76}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2\right) = -\frac{\phi_u}{\phi\psi}\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1$$

$$= -\frac{\phi_u}{\phi\psi}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u - 1\right)\vec{e}_1 \tag{4.77}$$

elde edilir. Bununla birlikte (3.24) eşitliği düzenlenirse

$$\Delta \mathrm{x}^T = \nabla_{\vec{e}_1}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1) + \nabla_{\vec{e}_2}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2) - \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1\right) - \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2\right) \tag{4.78}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (4.74)-(4.77) eşittlikleri (4.78) de yerine yazılırsa x^T vektör alanının Laplasyeni

$$\Delta \mathrm{x}^T = \frac{1}{\psi}\left(\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u\right)_u - \left(\frac{\eta\phi_u}{\phi\psi^2} - 1\right)\frac{\phi_u}{\phi} + \frac{\phi_u}{\phi}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u - 1\right)\right)\vec{e}_1$$

$$= \frac{1}{\psi}\left(\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u\right)_u - \frac{\mu(\phi_u)^2}{\psi^2\phi^2} + \frac{\phi_u}{\psi\phi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u\right)\vec{e}_1 \tag{4.79}$$

olarak bulunur.

Eğer $\Delta \mathrm{x}^T = 0$ şartını sağlanırsa x^T vektör alanı *harmoniktir* denir. Böylece (4.79) eşitliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.31 $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ genel rotasyon yüzeyi (4.52) koordinat yamasıyla verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u\right)_u - \frac{\eta(\phi_u)^2}{\psi^2\phi^2} + \frac{\phi_u}{\psi\phi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u = 0 \tag{4.80}$$

olmasıdır. Burada ψ, ϕ ve η reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar olup sırasıyla (4.3), (4.55) ve (4.67) de tanımlanmıştır.

Meridyen eğrisi γ nın birim hızlı olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.32 $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ genel rotasyon yüzeyi birim hızlı meridyen eğrisi ile verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$\eta_{uu} + \phi_u\left(\frac{\eta}{\phi}\right)_u = 0 \tag{4.81}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. (4.80) eşitliğinde $\psi = 1$ alındığında (4.81) elde edilir. ■

(4.68) ve (4.79) eşitlikleri (3.25) de yerine yazılırsa

$$\varphi = \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u\right)_u - \frac{\phi_u^2}{\psi^2\phi^2} + \frac{\phi_u}{v\psi\phi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_u \tag{4.82}$$

eşitliği elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuçlar ispatlanmış olur:

Teorem. 4.33 (4.52) koordinat yamasıyla verilmiş olan genel rotasyonel yüzeyinin x^T vektör alanı noktasal 1- tipinde olup tayin fonksiyonu (4.82) ile hesaplanır. Burada ψ, ϕ ve η reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar olup sırasıyla (4.3), (4.55) ve (4.67) de tanımlanmıştır.

Meridyen eğrisi γ nın birim hızlı olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.34 M_1 yüzeyi birim hızlı meridyen eğrisine sahip bir genel rotasyonel yüzey olsun. Bu takdirde x^T vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için gerek ve yeter koşul tayin fonksiyonu

$$\varphi = \frac{\eta_{uu}}{\eta} + \frac{\phi_u}{v}\left(\frac{\eta}{\phi}\right)_u \tag{4.83}$$

eşitliğini sağlanmasıdır.

İspat. (4.82) eşitliğinde $\psi = 1$ alındığında (4.83) elde edilir. ■

Örnek 4.35 (4.52) koordinat yamasında

$$f_1(u) = \frac{1}{\kappa}sin(\kappa u), f_2(u) = \frac{1}{\kappa}\big(1 - cos(\kappa u)\big), a = 1, b = 2 \tag{4.84}$$

alınırsa *Blaschke yüzeyi* elde edilir (Kim ve Lee, 1993). Burada κ fonksiyonu M_1 yüzeyinin geodezik eğriliğidir. Bununla birlikte $p \in M_1$ noktası boyunca her bir geodeziğin E^4 de bir W-eğrisi olduğunu da Y. H. Kim tarafından ispatlamıştır. Eğer κ eğriliği sabit seçilirse Blaschke yüzeyi için

$$\begin{aligned} &\eta(u) = \frac{1}{\kappa}\sin(\kappa u),\\ &\psi(u) = 1,\\ &\phi(u) = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2}\sin^2(\kappa u) + \frac{1}{\kappa^2}(1-\cos(\kappa u))^2} \end{aligned} \tag{4.85}$$

olarak hesaplanır. Özel olarak $\kappa = 1$ için bu yüzeyinin $\kappa = 1$ için x^T vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için gerek ve yeter koşul bu yüzeyin tayin fonksiyonunun

$$\varphi = -\frac{5}{4}$$

olmasıdır. □

Örnek 4.36 (4.52) koordinat yamasında $f_1(u) = u, f_2(u) = 1$, ve $a = 1, b \in \mathbb{R}^+$ alalım. Bu yüzey $\mathbb{R}^3$ deki $y(u,v) = (vcosu, vsinu, bu)$ yamasıyla verilen helikoid yüzeyinin $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_3^2 + x_3^2 = 1\}$ hipersilindir etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey *döngü yüzeyi* olarak adlandırılır (bknz. (Geysens vd., 1983)). Bu yüzey için $\eta(u) = u, \psi(u) = 1$ ve $\phi(u) = \sqrt{u^2 + b^2}$ olarak hesaplanır. Bununla birlikte, döngü yüzeyinin x^T vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için bu yüzeyin tayin fonksiyonunun

$$\varphi = \frac{b^2}{(u^2 + b^2)^2}$$

olmasıdır.□

Tanım 4.37 (4.52) koordinat yamasında $a = b = 1$ ve

$$f_1(u) = r(u)cosu, \qquad (4.86)$$
$$f_2(u) = r(u)sinu$$

alındığında *Vranceanu yüzeyi* elde edilir (Vranceanu, 1977).

Vranceanu yüzeyi için (4.80) eşitliğinde verilen fonksiyonlar

$$\eta(u) = r(u)r'(u),$$
$$\psi(u) = \sqrt{(r(u))^2 + (r'(u))^2}\,, \qquad (4.87)$$
$$\phi(u) = r(u)$$

olarak hesaplanır. Böylece (2.53), (254), (4.52) ve (4.86) eşitlikleri kullanılarak Vranceanu yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{(r'(u))^2 - r(u)r''(u)}{((r(u))^2 + (r'(u))^2)^2} \qquad (4.88)$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 4.38 M_1 yüzeyi (4.86) koordinat yamasıyla verilen bir Vranceanu yüzeyi olsun. Bu takdirde M_1 yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter şart $r(u) = \lambda e^{\mu u}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmasıdır (Arslan vd., 2011a).

Böylece Vranceanu yüzeyinin x^T vektör alanı harmonik ise bu takdirde (4.86) eşitliğindeki fonksiyonlar (4.79) da yerine yazılırsa

$$\Delta x^T = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}\left\{\left(\frac{(r')^4 + r^3r''}{(r^2 + (r')^2)^2}\right)_u + \frac{(r')^5 + r^3r'r'' - (r')^3(r^2 + (r')^2)}{r(r^2 + (r')^2)^2}\right\}\vec{e}_1 \qquad (4.89)$$

elde edilir.

Sonuç.4.39 M_1 yüzeyi (4.86) koordinat yamasıyla verilen düz bir Vranceanu yüzeyi olsun. Bu takdirde M_1 yüzeyinin x^T vektör alanı harmoniktir.

İspat. Vranceanu yüzeyi düz olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Sonuç 4.2.8 gereği $r(u) = \lambda e^{\mu u}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dir. Bu değer (4.89) de yerine yazılırsa $\Delta x^T = 0$ elde edilir.

Önerme 4.40 M_1 yüzeyi $r(u)=u$ koordinat yamasıyla verilen bir Vranceanu yüzeyi olsun. Bu yüzeyinin x^T vektör alanının noktasal 1.tipinde olması için $\varphi=-\frac{5+\mathrm{u}^2}{(\mathrm{u}^2+1)^3}$ eşitliğinin sağlanmasıdır

İspat. (4.89) deki eşitliklerde $r(u)=u$ alınıp (4.82) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

II. Durum:

Meridyen eğrisi $\gamma(u)=\big(f_1(u),f_2(u),f_3(u)\big)$ olarak alındığında elde edilen rotasyon yüzeyi

$$M_2:\ x(u,v)=(f_1(u),f_2(u),f_3(u)cosv,f_3(u)sinv) \tag{4.90}$$

$u\in I,\ v\in(0,2\pi)$ koordinat yamasıyla temsil edilir. Bu yüzey $\gamma(u)$ birim hızlı eğrisinin birim çember etrafında döndürülmesiyle elde edilir. (Gancheva ve Milousheva, 2008). Literatürde bu yüzey, $\mathbb{R}^4$ de küresel çarpım yüzeyi olarak bilinir (Arslan vd., 2011), (Arslan vd., 2012). Ayrıca klasik rotasyonel yüzey olarak da adlandırılır (Moore, 1919). $M_2\subset\mathbb{R}^4$ küresel çarpım yüzeyi olsun. M_2 nin ortonormal çatı alanı

$$\vec{e}_1=\frac{\partial x}{\partial u},\vec{e}_2=\frac{1}{f_3(u)}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{4.91}$$

dır. Böylece

$$\mathrm{x}^T=\sum_{\mathrm{i}=1}^{2}\langle\mathrm{x}^T,\vec{e}_\mathrm{i}\rangle\vec{e}_i=\eta(u)\vec{e}_1 \tag{4.92}$$

elde edilir. Burada

$$\eta(u)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{3}f_i(u)f_i'(u) \tag{4.93}$$

şeklinde tanımlı türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ çatı alanına göre Gauss ve Weingarten denklemleri yardımıyla

$$\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1=0$$
$$\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_2=0,$$

$$\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_1 = \frac{f_3'(u)}{f_3(u)}\vec{e}_2, \tag{4.94}$$

$$\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 = -\frac{f_3'(u)}{f_3(u)}\vec{e}_1$$

elde edilir. Buradan, (4.92) ve (4.94) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1}\mathrm{x}^T &= \eta'(u)\vec{e}_1, \\ \nabla_{\vec{e}_2}\mathrm{x}^T &= \eta(u)\tfrac{f_3'(u)}{f_3(u)}\vec{e}_2 \end{aligned} \tag{4.95}$$

bulunur. Böylece (3.26) ve (4.95) eşitliklerinden

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1 = (\eta'(u) - 1)\vec{e}_1, \tag{4.96}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2 = \left(\eta(u)\frac{f_3'(u)}{f_3(u)} - 1\right)\vec{e}_2 \tag{4.97}$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.96), (4.97) eşitliklerinin $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yönünde türevleri alınırsa

$$\nabla_{\vec{e}_1}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1) = \eta''(u)\vec{e}_1, \tag{4.98}$$

$$\nabla_{\vec{e}_2}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2) = \left(\frac{f_3'(u)}{f_3(u)} - \eta(u)\left(\frac{f_3'(u)}{f_3(u)}\right)^2\right)\vec{e}_1 \tag{4.99}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1\right) = 0, \tag{4.100}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2\right) = \left(\frac{f_3'(u)}{f_3(u)} - \eta'(u)\frac{f_3'(u)}{f_3(u)}\right)\vec{e}_1 \tag{4.101}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (4.98)-(4.101) eşitlikleri (3.24) de yerine yazıldığında x^T vektör alanının Laplasyeni

$$\Delta\mathrm{x}^T = \left(\eta''(u) + \eta'(u)\frac{f_3'(u)}{f_3(u)} - \eta(u)\left(\frac{f_3'(u)}{f_3(u)}\right)^2\right)\vec{e}_1 \tag{4.102}$$

olarak bulunur. Böylece (4.102) yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem. 4.41 $M_2 \subset \mathbb{R}^4$ küresel çarpım yüzeyi (4.90) koordinat yamasıyla verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\eta''(u) + \eta'(u)\frac{f_3'(u)}{f_3(u)} - \eta(u)\left(\frac{f_3'(u)}{f_3(u)}\right)^2 = 0 \tag{4.103}$$

eşitliğinin. Burada η fonksiyonu (4.93) de tanımlanmıştır.

Örnek 4.43 Meridyen eğrisi

$$f_1(u) = cu, f_2(u) = \sqrt{1-c^2}u \tag{4.104}$$

olması durumunda küresel çarpım yüzeyi $x(u,v) = \left(cu, \sqrt{1-c^2}u, rcosv, rsinv\right)$ parametrizasyona sahip olur. Bu yüzey orijinden geçen bir doğru ile r-yarıçaplı bir çemberin Riemann çarpımıdır. Bu parametrizasyon için (4.103) eşitliği sağlandığından x^T vektör alanının harmoniktir. □

Tanım 4.44 M_2 küresel çarpım yüzeyin meridyen eğrisi

$$\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), sinu)$$

olarak alındığında elde edilen rotasyon yüzey *Otsuki yüzeyi* olarak adlandırılır (Otsuki, 1966). Burada $(f_1')^2 + (f_2')^2 = sin^2u$ dır. Aynı çalışmasında ayrıca

a) $f_1(u) = \frac{4}{3}cos^3\left(\frac{u}{2}\right), f_2(u) = \frac{4}{3}sin^3\left(\frac{u}{2}\right)$,

b) $f_1(u) = \frac{1}{2}sin^2ucos(2u), f_2(u) = \frac{1}{2}sin^2usin(2u)$

durumlarını da göz önüne almıştır. a) durumu için $x(u,v)$ kooordinat yamasıyla verilen yüzey $\mathbb{R}^4$ ün 3-boyutlu alt uzayında yatmayan Otsuiki küresi olarak adlandırılır. Bu yüzeylerinin Gauss eğriliği $K=1$ dir.

$M_2 \subset \mathbb{R}^4$ Otsuki yüzeyi olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.45 $M_2 \subset \mathbb{R}^4$ küresel çarpım yüzeyi bir Otsuki yüzeyi olsun. Bu takdirde M_2 nin x^T tanjant vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$(f_1f_1' + f_2f_2')(f_3')^2 - (f_1f_1'' + f_2f_2'')f_3f_3' - (f_1f_1''' + f_2f_2''' - f_3f_3')((f_1')^2 + (f_2')^2) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $f_3(u) = sinu$ ve $(f_1')^2 + (f_2')^2 = sin^2u$ dur.

(4.92) ve (4.102) eşitlikleri (3.25) de yerine yazılırsa

$$\varphi = \frac{\eta''}{\eta} + \frac{\eta'}{\eta}\frac{f_3'}{f_3} - \left(\frac{f_3'}{f_3}\right)^2 \tag{4.105}$$

eşitliği elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuçlar ispatlanmış olur:

Teorem. 4.46 (4.90) koordinat yamasıyla verilmiş olan küresel çarpım yüzeyinin x^T vektör alanı noktasal 1- tipinde olup tayin fonksiyonu (4.105) ile hesaplanır. Burada $\eta(u)$ herhangi türevlenebilir bir fonksiyon olup (4.93) de verilmiştir.

<u>III. Durum</u>: Meridyen eğrisi $\gamma: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(u) = (f_1(u), 0, f_2(u))$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu takdirde γ nın $\rho(v)$ birim küresel eğrinin etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey

$$M_3:\ z(u,v) = f_1(u)E_1 + f_2(u)\rho(v) \tag{4.106}$$

koordinat yamasına sahip olup bu yüzeye $\mathbb{R}^4$ te *meridyen yüzeyi* adı verilir (Ganchev ve Mileusheva, 2015). Burada $E_1 = (1,0,0,0)$ birim vektördür. Meridyen yüzeyleri *2. tip rotasyonel yüzey* olarak da bilinir (Arslan vd., 2014), (Bulca ve Arslan, 2015), (Arslan vd., 2017). M_3 nin ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \frac{\partial}{\partial u},\\
\vec{e}_2 &= \frac{1}{f_2}\frac{\partial}{\partial v},\\
\vec{e}_3 &= n(v),\\
\vec{e}_4 &= f_1'(u)\rho(v) + f_2'(u)E_1
\end{aligned} \tag{4.107}$$

vektör alanları tarafından gerilir. Böylece Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 &= \kappa_\gamma \vec{e}_4,\\
\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_1}\vec{e}_2 &= 0,\\
\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_2}\vec{e}_1 &= \frac{f_2'}{f_2}\vec{e}_2,\\
\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 &= -\frac{f_2'}{f_2}\vec{e}_1 + \frac{\kappa}{f_2}\vec{e}_3 + \frac{f_1'}{f_2}\vec{e}_4
\end{aligned} \tag{4.108}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_1}\vec{e}_3 = 0,\\
&\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_2}\vec{e}_3 = -\frac{\kappa}{f_2}\vec{e}_2,\\
&\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_1}\vec{e}_4 = -\kappa_\gamma \vec{e}_1,\\
&\widetilde{\nabla}_{\vec{e}_2}\vec{e}_4 = -\frac{f_1'}{f_2}\vec{e}_2
\end{aligned} \tag{4.109}$$

elde edilir. Burada $\rho = \rho(v)$ küresel eğrinin eğriliği $\kappa = \kappa(v)$ ve

$$\kappa_\gamma = f_2'(u) f_1''(u) - f_2''(u) f_1'(u) = -\frac{f_2''(u)}{\sqrt{\left(1-\left(f_2'(u)\right)^2\right)}} \tag{4.110}$$

meridyen eğrisinin eğriliğidir.

Buradan (2.6), (4.108) ve (4.109) eşitlikleri kullanılarak M_3 yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \langle h(e_1,e_1), h(e_2,e_2)\rangle - \langle h(e_1,e_2), h(e_1,e_2)\rangle = \kappa_\gamma(u)\frac{f_1'(u)}{f_2(u)}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca (4.110) eşitliğinden $K = -\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}$ sonucuna varılır.

Örnek 4.47 $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ meridyen yüzeyinin meridyen eğrisi $f_1(u) = c, f_2(u) = u + b$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu eğrinin eğriliği $\kappa_\gamma(u) = 0$ dır. Bu durumda γ eğrisi düz bir doğrudur. Buradan M_3 meridyen yüzeyinin Gauss eğriliği $K = 0$ olduğundan $\mathbb{R}^3$ de yatan açılabilir bir regle yüzeyidir. □

Örnek 4.48 $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ meridyen yüzeyinin meridyen eğrisi $f_1(u) = cu, f_2(u) = \sqrt{1-c^2}u$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu eğrinin eğriliği $\kappa_\gamma(u) = 0$ dır. Bu durumda γ eğrisi düz bir doğrudur. Buradan M_3 meridyen yüzeyinin Gauss eğriliği $K = 0$ olduğundan açılabilir bir regle yüzeyidir. □

M_3 yüzeyinin x^T teğet vektör alanının Laplasını hesaplamak için bazı hazırlıklar yapmaya ihtiyaç vardır. Buna göre (4.106) ve (4.107) eşitlikleri yardımıyla

$$\langle \vec{e}_1, x\rangle = \eta(u), \qquad \langle \vec{e}_2, x\rangle = 0 \tag{4.111}$$

elde edilir. Burada, η fonksiyonu (4.67) de tanımlandığı gibidir. Böylece, (3.8) ve (4.56) eşitlikleri yardımıyla x pozisyon vektörünün teğet bileşeni

$$\begin{aligned} \mathrm{x}^T &= \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \langle \mathrm{x}^T, \vec{e}_{\mathrm{i}} \rangle \vec{e}_i \\ &= \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \langle \mathrm{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \\ &= \eta(u)\vec{e}_1 \end{aligned} \tag{4.113}$$

olarak hesaplanır. Buradan, (4.68), (4.62) ve (4.65) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} \mathrm{x}^T &= \nabla_{x_u} \mathrm{x}^T \\ &= \eta'(u)\vec{e}_1 + \eta(u)\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 \\ &= \eta'(u)\vec{e}_1, \end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_2} \mathrm{x}^T &= \eta(u)\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_1 \\ &= \eta(u)\frac{f_1'(u)}{f_1(u)}\vec{e}_2 \end{aligned} \tag{4.115}$$

bulunur. Böylece (3.26) eşitliğinden

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_i = \nabla_{\vec{e}_i}\mathrm{x}^T - \vec{e}_i;\ i = 1, 2 \tag{4.116}$$

olduğu bilinmektedir. Buradan (4.114)-(4.116) eşitlikleri kullanılarak

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1 = (\eta'(u) - 1)\vec{e}_1 \tag{4.117}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2 = \left(\eta(u)\frac{g'(u)}{g(u)} - 1\right)\vec{e}_2 \tag{4.118}$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.117), (4.118) eşitliklerinin $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yönünde türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1) &= \nabla_{\vec{e}_1}\{(\eta'(u) - 1)\vec{e}_1\} \\ &= \eta''(u)\vec{e}_1 + (\eta'(u) - 1)\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 \\ &= \eta''(u)\vec{e}_1 \end{aligned} \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_2}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2) &= \nabla_{\vec{e}_2}\left\{\left(\eta(u)\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} - 1\right)\vec{e}_2\right\} \\ &= \left(\eta(u)\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} - 1\right)\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 \\ &= -\left(\eta(u)\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} - 1\right)\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\vec{e}_1 \end{aligned} \tag{4.120}$$

dır. Benzer şekilde

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1\right) = 0, \tag{4.121}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2\right) &= \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(-\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\vec{e}_1\right) \\
&= -\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1 \\
&= -\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}(\eta'(u)-1)\vec{e}_1 \qquad (4.122)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (4.119)-(4.122) eşitlikleri (3.32) de yerine yazılırsa x^T vektör alanının Laplasyeni

$$\Delta\mathrm{x}^T = \left\{\eta''(u) + \eta'(u)\left(\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\right)^2 - \eta(u)\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\right\}\vec{e}_1 \tag{4.123}$$

olarak bulunur.

x^T vektör alanın harmonik olması durumunda (4.123) eşitliğinden yararlanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.49 $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ meridyen yüzeyi (4.106) koordinat yamasıyla verilsin. Bu takdirde M_3 yüzeyinin x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\eta''(u) + \eta'(u)\left(\frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\right)^2 - \eta(u)\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} = 0 \tag{4.124}$$

olmasıdır. Burada $\eta(u)$ fonksiyonu (4.67) de tanımlanmıştır.

(4.113) ve (4.123) eşitlikleri (3.25) de yerine yazılırsa

$$\varphi = \frac{\eta''}{\eta} + \frac{\eta'}{\eta}\left(\frac{f_2''}{f_2}\right)^2 - \frac{f_2''}{f_2} \tag{4.125}$$

elde edilir. eşitliği elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuçlar ispatlanmış olur:

Teorem. 4.50 (4.106) koordinat yamasıyla verilmiş olan küresel çarpım yüzeyinin x^T vektör alanı noktasal 1- tipinde olup tayin fonksiyonu (4.125) ile hesaplanır. Burada $\eta(u)$ fonksiyonu (4.67) de tanımlanmıştır.

Örnek 4.51 Örnek 4.47 de verilen meridyen yüzeyinin x^T tanjant vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için tayin fonksiyonu

$$\varphi = \frac{1-(u+b)^2}{(u+b)^3}$$

olmalıdır, burada $b \in \mathbb{R}$ reel sabittir. □

Örnek 4.52 Örnek 4.48 de verilen $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyinin x^T tanjant vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için tayin fonksiyonu

$$\varphi(u) = -\frac{1}{u}, u \neq 0$$

olmalıdır. □

<u>IV. Durum</u>: (Tensör çarpım Yüzeyi)

Düzlemde bir $\beta(u) = (cosu, sinu)$ birim çemberi ile bir $\gamma(v) = \big(f_1(v), f_2(v)\big)$ eğrisinin tensörel çarpımı

$$M_4:\ x(u,v) = (f_1(v)cosu, f_2(v)cosu, f_1(v)sinu, f_2(v)sinu) \tag{4.126}$$

$v \in I,\ \in (0,2\pi)$ koordinat yamasıyla temsil edilir. Bu yüzeye $\mathbb{R}^4$ de bir *tensör çarpım yüzeyi* adı verilir (Mihai vd., 1995), (Arslan vd., 2011c), (Bulca ve Arslan, 2014). Burada $\gamma(u)$ eğrisi *profil eğrisi* olarak adlandırılır.

$M_4 \subset \mathbb{R}^4$ tensör çarpım yüzeyi olsun. Bu takdirde M_4 ün tanjant uzayı

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\gamma(v)\|}\frac{\partial x}{\partial u},\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\|\gamma'(v)\|}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{4.127}$$

vektörleri tarafından gerilir. Böylece

$$\mathrm{x}^T = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2}\langle \mathrm{x}^T, \vec{e}_{\mathrm{i}}\rangle \vec{e}_i = \frac{\eta(v)}{\psi(v)}\vec{e}_2 \tag{4.128}$$

elde edilir. Burada ψ ve η türevlenebilir fonksiyonlar olup (4.3) ve (4.5) de tanımlanmıştır. Böylece $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ çatı alanına göre Gauss ve Weingarten denklemleri yardımıyla

$$\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1 = -\frac{\eta(v)}{\rho(v)\psi(v)}\,\vec{e}_2$$
$$\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2 = 0$$
$$\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_1 = 0 \tag{4.129}$$
$$\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_2 = \frac{\eta(v)}{\rho(v)\psi(v)}\,\vec{e}_1$$

elde edilir. Burada

$$\rho(v) = \|x(u,v)\| = \|\gamma(v)\| \tag{4.130}$$

uzaklık fonksiyonudur. Buradan, (4.128) ve (4.129) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1}\mathrm{x}^T &= \frac{\eta^2(v)}{\rho(v)\psi^2(v)}\vec{e}_1 \\ \nabla_{\vec{e}_2}\mathrm{x}^T &= \frac{1}{\psi(v)}\left(\frac{\eta(v)}{\psi(v)}\right)_v \vec{e}_2 \end{aligned} \tag{4.131}$$

bulunur. Böylece $\vec{e}_i = \nabla_{\vec{e}_i}\mathrm{x}^T - \mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_i$ ve (4.131) deki eşitlikler kullanılarak

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1 = \left(\frac{\eta^2(v)}{\rho(v)\psi^2(v)} - 1\right)\vec{e}_1 \tag{4.132}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\psi(v)}\left(\frac{\eta(v)}{\psi(v)}\right)_v - 1\right)\vec{e}_2 \tag{4.133}$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.133) eşitliklerinin $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yönünde türevleri alınıp (4.129) yardımıyla

$$\nabla_{\vec{e}_1}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_1) = -\frac{\eta(v)}{\rho(v)\psi(v)}\left(\frac{\eta^2(v)}{\rho(v)\psi^2(v)} - 1\right)\vec{e}_2 \tag{4.134}$$

$$\nabla_{\vec{e}_2}(\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\vec{e}_2) = \frac{1}{\psi(v)}\left(\frac{1}{\psi(v)}\left(\frac{\eta(v)}{\psi(v)}\right)_v\right)_v \vec{e}_2 \tag{4.135}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_1}\vec{e}_1\right) = -\frac{\eta(v)}{\rho(v)\psi(v)}\left(\frac{1}{\psi(v)}\left(\frac{\eta(v)}{\psi(v)}\right)_v - 1\right)\vec{e}_2, \tag{4.136}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x}^N}\left(\nabla_{\vec{e}_2}\vec{e}_2\right) = 0 \tag{4.137}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (4.134)-(4.137) eşitlikleri (3.34) de yerine yazıldığında x^T vektör alanının Laplasyeni

$$\Delta\mathrm{x}^T = \frac{1}{\psi(v)}\left(\left(\frac{1}{\psi(v)}\left(\frac{\eta(v)}{\psi(v)}\right)_v\right)_v + \frac{\eta(v)}{\rho(v)\psi(v)}\left(\frac{\eta(v)}{\psi(v)}\right)_v - \frac{\eta^3(v)}{\rho^2(v)\psi^2(v)}\right)\vec{e}_2 \qquad (4.138)$$

olarak bulunur. Böylece (4.138) yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem. 4.53 $M_4 \subset \mathbb{R}^4$ tensör çarpım yüzeyi (4.126) koordinat yamasıyla verilsin. Bu takdirde x^T vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{1}{\psi(v)}\left(\frac{\eta(v)}{\psi(v)}\right)_v\right)_v + \frac{\eta(v)}{\rho(v)\psi(v)}\left(\frac{\eta(v)}{\psi(v)}\right)_v - \frac{\eta^3(v)}{\rho^2(v)\psi^2(v)} = 0 \qquad (4.139)$$

eşitliğinin. Burada η, ψ ve ρ fonksiyonları sırasıyla (4.3), (4.5) ve (4.130) de tanımlanmıştır.

Sonuç 4.54 $M_4 \subset \mathbb{R}^4$ tensör çarpım yüzeyinin profil eğrisi yay parametresi ile verilsin. Bu takdirde M_4 ün x^T tanjant vektör alanının harmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$\eta'' + \frac{\eta\eta'}{\rho} - \frac{\eta^3}{\rho^2} = 0 \qquad (4.140)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.55 $M_4 \subset \mathbb{R}^4$ tensör çarpım yüzeyinin profil eğrisi $\gamma(v) = (cosv, sinv)$ birim çemberi olsun. Bu durumda yüzey

$$x(u,v) = (cosvcosu, cosvsinu, sinvcosu, sinvsinu)$$

parametrizasyona sahip Clifford tor yüzeyi olur (Yoon, 2003). Basit bir hesaplama ile bu yüzeyin x^T tanjant vektör alanının harmonik olduğu görülür.

(4.128) ve (4.138) eşitlikleri (3.25) de yerine yazılırsa

$$\varphi = \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{\eta\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_v\right)_v + \frac{1}{\rho\psi}\left(\frac{\eta}{\psi}\right)_v - \frac{\eta^2}{\rho^2\psi^2} \tag{4.141}$$

eşitliği elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuçlar ispatlanmış olur:

Teorem. 4.56 (4.126) koordinat yamasıyla verilmiş olan tensör çarpım yüzeyinin x^T vektör alanı noktasal 1- tipinde olup tayin fonksiyonu (4.141) ile hesaplanır. Burada η , ψ ve ρ fonksiyonları sırasıyla sırasıyla (4.67), (4.5) ve (4.130) de tanımlanmıştır.

Sonuç 4.57 $M_4 \subset \mathbb{R}^4$ tensör çarpım yüzeyinin profil eğrisi yay parametresi ile verilsin. Bu takdirde M_4 ün x^T tanjant vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için gerek ve yeter koşul tayin fonksiyonunun

$$\varphi = \frac{\eta''}{\eta} + \frac{\eta'}{\rho} - \frac{\eta^2}{\rho^2} \tag{4.142}$$

olmasıdır.

Örnek 4.58 $M_4 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyinin profil eğrisi $f_1(v) = cv, f_2(v) = \sqrt{1-c^2}v$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M_4 yüzeyi

$$x(u,v) = \left((cv)cosu, (cv)sinu, (\sqrt{1-c^2}v)cosu, (\sqrt{1-c^2}v)sinu\right)$$

parametrizasyona sahip bir yüzey olur. Bu yüzeyin x^T tanjant vektör alanının noktasal 1-tipinde olması için gerek ve yeter koşul tayin fonksiyonunun $\varphi = \frac{1}{v} - 1$ olmasıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

$M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldunun en önemli geometrik nesnelerinden biri x pozisyon vektörüdür. Bu vektör $p \in M$ noktasını $o \in \mathbb{R}^{n+d}$ referans noktasına bağlayan $x = \overrightarrow{op}$ şeklinde tanımlı olan yer vektörü ya da yarıçap vektörüdür. Bu vektörünün $\vec{x} = x^T + x^N$

teğet ve normal bileşenlere ayrışımı son zamanların popüler konulardan biridir. M nin önemli invaryantlarından biri de ortalama eğrilik vektör alanı $\vec{H}$ dır. Fizikte, ortalama eğrilik vektör alanı, altmanifoldlar üzerine uygulanan burulma alanıdır. Malzeme biliminde yüzey gerilimi, yüzey stresi veya yüzey serbest enerjisi için kullanılır. Diferansiyel geometride $\vec{H}$ nın Laplası $\Delta\vec{H} = 0$ olması durumu "Chen conjecture" olarak bilinir. Bu şarta sahip olan altmanifoldlar minimal olmasıdır, diğer bir değişle $\|\vec{H}\| = 0$ olmalıdır. Biz bu çalışmada $\vec{H}$ yerine x^T alarak bazı sonuçlar elde ettik. $\Delta x^T = 0$ olması durumunda $\|x^T\|$ nin sıfıra eşit olma zorunluluğunun olmadığını gösterdik. Ayrıca $\Delta x^T = \varphi x^T$ şartını sağlayan altmanifoldlar için bir karakterizasyon vermiş olduk. Bununla birlikte meridyen eğrisi logaritmik spiral olan dönel koni yüzeyinin $\Delta x^T = 0$ şartını sağlamadığını fakat ikinci şartı sağladığını gösterdik. Tüm bu hesaplamalar ileriki çalışmalarda yüksek boyutlu yüzeyler ve altmanifoldlara uygulanması açısından bir başlangıç noktası oluşturacağını düşünmekteyiz.

KAYNAKLAR

Aksoyak, F.,Yaylı, Y. (2020). Flat rotational surfaces with pointwise 1- type Gauss map in $\mathbb{E}^4$. *Proc. Nat. Acad. of Sci., India Section A: Physical Sciences,* 90, 251-257.

Arslan, K., Bayram (Kılıç), B., Bulca, B., Öztürk, G. (2012). Generalized rotation surfaces in $\mathbb{E}^4$, Results. Math., 61, 315.327.

Arslan, K., Bayram B.K., Bulca B., Kim Y.H., Murathan C., Öztürk G. (2011). Rotational embeddings in $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map. *Turk. J. Math.*, 35, 493-499.

Arslan, K., Bayram B.K., Bulca B., Kim Y.H., Murathan C., Öztürk G. (2011b). Vranceanu surfaces in $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-Type Gauss Map. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 42(1), 41-51.

Arslan, K., Bayram B.K., Bulca B., Kim Y.H., Murathan C., Öztürk G. (2011c). Tensor product surfaces with pointwise 1-Type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.*, 48, 601-609.

Arslan, K., Bulca, B., Mileusheva, V. (2014). Meridian surfaces in $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.*, 51, 911.922.

Arslan, K., Bulca, B., Kosova, D. (2017). On Generalized rotational surfaces in Euclidean spaces, *J. Korean Math. Soc.*, 54(3), 999-1013.

Arslan, K., Sütveren, A., Bulca, B. (2021). Rotational $\lambda-$hypersurfaces in Euclidean spaces, *Creat. Math. Inform.*, 30, 29 – 40.

Baikoussis, C., Blair D.E. (1992). On the Gauss map of ruled surfaces. *Glasgow Math. J.*, 34, 355-359.

Baikoussis, C., Chen B.Y., Verstraelen L. (1993). Ruled surfaces and tubes with finite type Gauss map. *Tokyo J. Math.*, 16, 341-349.

Baikoussis, C., Verstraelen L. (1993). On the Gauss map of helicoidal surfaces. *Rend. Sem. Mat. Messina ser. II*, 16, 31-42.

Bayram B., K. Arslan K.,Önen N, Bulca B. (2014). Coordinate finite type rotational surfaces in Euclidean spaces, *Filomat*, 28, 2131-2140.

Beltrami, E. (1868). Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. *Giorneale di Mathemattiche,* 4, 285-315.

Bulca, B., (2012). $\mathbb{E}^4$ *deki yüzeylerin bir karekterizasyonu*, [Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi], U.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü.

Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B. K., Öztürk, G. (2012). Spherical product surfaces in $\mathbb{E}^4$, *An. St. Univ. Ovidius Constanta.*, 20, 41.54.

Bulca B., Arslan K. (2015). Semi-paralelel meridian surfaces in $\mathbb{E}^4$. *International Electronic Journal of Geometry,* 8(2), 147-153.

Bulca B., Arslan K. (2014). Semiparallel tensor product surfaces in $\mathbb{E}^4$. *International Electronic Journal of Geometry,* 7, 36-43.

Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B. K., Öztürk, G. Ugail, H. (2009, September 7-11). *On spherical product surfaces in* $\mathbb{E}^3$. International Conference on Cyberworlds, University of Bradford, Bradford.

Chen, B.Y. (1973). Geometry of submanifolds. Dekker, New York.

Chen, B.Y. (1983). Submanifolds of finite type and their applications. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica,* 11, 309-328.

Chen, B. Y. (1984). Total mean curvature and subsmanifolds of finite type, Series in Pure Mathematics, 1. World Scienti.c Publishing Co., Singapore.

Chen, B. Y. (1985). Finite type submanifolds and generalizations, Universita degli Studi di Roman La Sapienza", Istituto Matematico n Guido Castelnuovo", Rome.

Chen, B.Y. (2003). When Does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in Its Rectifying Plane? *American Math. Monthly*, 110, 147-152
Chen, B.Y. (2017) Euclidean submanifolds with incompressible canonical vector field, *Serdica Mathematical Journal*, 43, 321-334.
Chen, B.Y., Choi M., Kim Y.H. (2005). Surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map. *J. Korean Math. Soc.*, 42, 447-455.
Chen B.Y. Deshmukh S. (2018). Euclidean submanifolds with onformal canonical vector field, *Bull. Korean Math. Soc.*, 55, 1823-1834.
Chen, B.Y., Piccinni, P. (1987). Submanifolds with finite type Gauss map, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 35, 161-186.
Choi, M., Kim Y.H. (2001). Characterization of the helicoid as ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.*, 38, 753-761.
Cole F. N. (1890). On rotations in space of four dimensions, *Amer. J. Math.*, 12, 191-210.
Cuong, D.V. (2013). Surfaces of evolution with Constant Gaussian Ccurvature in four-Space, *Asian-Europian J. Math.*, 6, 1-13.
Do Carmo M. (1976). Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
Do Carmo M. (1979). Riemannian geometry, Boston, Basel, Berlin.
Do Carmo M., Dajczer, M. (1983). Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvatures, *Trans. Amer. Math. Soc*., 277, 685-709.
Drugan, G., Lee, H. and Nguyen, X. H. (2018). A survey of Closed self-shrinkers with symmetry, *Results Math.*, 32, 32–73.
Dursun, U. (2009). Hypersurfaces with ointwise 1-Type Gauss map in Lorentz-Minkowski space, *Proc. Est. Acad. Sei.*, 58, 146.161.
Dursun, U. (2015). On spacelike rotational surfaces with pointwise 1-type gauss map, *Bull. Of The Korean Math. Soc.*, 52, 301-312.
Dursun U., Arsan, G.G. (2011). Surfaces in the Euclidean space $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map, *Hacettepe J. Math. Stat.*, 40, 617.625.
Dursun U., Turgay, N. C. (2012a). General rotational surfaces in Euclidean space $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map, *Math. Commun.*, 17, 71-81.
Dursun, U., Turgay, N.C. (2012b). On Space-like surfaces in Minkowski 4-Sspace with pointwise 1-type Gauss map of second type, *Balkan J. Geom. App.*, 17, 34-45.
Dursun, U., Turgay, N. C. (2019). Space-like surfaces in the Minkowski space $\mathbb{E}_1^4$ with pointwise 1-type gauss maps. *Ukrainian Mathematical Journal*, 71, 64-80.
Dursun, U., Coşkun, E. (2012). Flat surfaces in the Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$ with pointwise 1-type Gauss map, *Turk. J. Math.*, 36, 613-629.
Ganchev, G., Milousheva V. (2008a). Minimal surfaces in the four dimensional euclidean Space. *ArXiv:0806.3334v1*.
Ganchev, G., Milousheva V. (2008b). On the theory of surfaces in the four dimensional Euclidean Space. *Kodai Math. J.*, 31, 183-198.
Ganchev G,, Milousheva V. (2012). An invariant theory of spacelike surfaces in the four-dimensional Minkowski space. *Mediterr J Math.*, 9, 267–294.
Ganchev, G., Milousheva V. (2015). Special classes of meridian surfaces in the four-dimensional Euclidean space, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 52(6), 2035-2045.
Geysens, F., Verheyen L., Verstraelen L. (1983). Characterization and examples of Chen submanifolds. *Journal of Geometry*, 20, 47-62.

Gray, A. (1993). Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. CRC Pres Inc., USA.

Güler E., Magid M., Yaylı Y. (2016). Laplace Beltrami operator of a helicoidal hypersurface in four space," J. Geom. Symm. Phys., 41, 77–95.

Kim, Y.H., Turgay, N.C. (2013). Surfaces in $\mathbb{E}^3$ with L1-pointwise 1-type Gauss map, Bull. Korean Math. Soc., 50, 935-949.

Kim, Y.H., Yoon D.W. (2000a). Ruled surfaces with finite type Gauss map in Minkowski spaces. *Soochow J. Math.*, 26, 85-96.

Kim, Y.H., Yoon D.W. (2000b). Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *J. Geom. Phys.*, 34, 191-205.

Kim, Y.H., Yoon D.W. (2005). On the Gauss map of ruled surfaces in Minkowski space. *Rocky Mountain J. Math.*, 35, 1555-1581.

Marsden J., Tromba A. (2003). Vector calculus, 5th Ed., W. H. Freedman and Company, New York, NY.

Mihai, A., Rosca R., Verstraelen L.,Vrancken L. (1995). Tensor product surfaces of Euclidean planar curves. *Rend. Sem. Mat. Messina*, 3,173-184.

Moore, C. L. E. (1919). Surfaces of rotations in a space of four dimensions. *Ann. Math.*, 21(2), 81-93.

Otsuki, T. (1966). Surfaces in the 4-dimensional Euclidean Space Isometric to a Sphere. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 18, 101-115.

Vranceanu, G. (1977). Surfaces de rotation dans $\mathbb{E}^4$. *Rev. Roum. Math. Pures Appl. XXII*, 6, 857-862.

Wong, Y.C. (1946). Contributions to the theory of surfaces in 4-space of constant curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 59, 467-507.

Yoon D. W. (2001). Rotation urfaces with finite Ttype Gauss map in $\mathbb{E}^4$. *Indian J. Pura Appl. Math.*, 32, 1803-1808.

Yoon, D.W. (2003). Some properties of the Clifford torus as rotation surfaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34, 857-862.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Eray DEMİRBAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi :
Yabancı Dil : İNGİLİZCE

Eğitim Durumu
Lise :
Lisans : ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
Yüksek Lisans :ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

Çalıştığı Kurum/Kurumlar :

İletişim (e-posta) :

Yayınları :

Demirbaş, E., Arslan, K., Bulca, B. (2022). General rotational surfaces satisfying $\Delta x^T = \varphi x^T$, *Mediterr. J. Math.*, 19(6), 166-174. DOI: 10.1007/s00009-021-01893-4.
Demirbaş, E., Arslan, K., Bulca, B. (2021, 23-25 Aralık). *Rotational surfaces of* $\mathbb{R}^3$ *with pointwise 1-type canonical vector field*. 2. Uluslararası İstanbul Modern Bilimsel Araştırmalar Kongresi, İstanbul- TÜRKİYE.
Demirbaş, E., Arslan, K. (2019). Grassmann images of tensor product surfaces in $\mathbb{R}^4$, *J. BAUN Inst. Sci. Technol.*, 21(1), 63-71, DOI: 10.25092/baunfbed.485650.
Demirbaş, E., Arslan, K. (2018, July 4-7). *On Grassmann images of rotational surfaces in* $\mathbb{R}^4$, 16th International Geometry Symposium, Manisa Celal Bayar University, Manisa-TÜRKİYE.
Arslan, K., Yılmaz, A., Demirbaş, E., Yazla, A. (2018). Euclidean curves with incompressible canonical vector field, *Adıyaman University J. of Sci.,* 8(2), 70-82.
Arslan, K., Yılmaz, A., Demirbaş, E., Yazla, A. (2018, July 4-7). *Euclidean Curves with Incompressiable Canonical Vector Fields*, 16th International Geometry Symposium, Manisa Celal Bayar University, Manisa-TÜRKİYE.
Demirbaş, E., Arslan, K., Bulca, B. (2022, 27-30 Haziran). *On constant-ratio surface of rotation in Euclidean 4-space*. 19. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Edirne-TÜRKİYE.