KONVEKSE YAKIN HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Serkan ÇAKMAK

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKSE YAKIN HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Serkan ÇAKMAK
0000-0003-0368-7672

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2022

TEZ ONAYI

Serkan ÇAKMAK tarafından hazırlanan "KONVEKSE YAKIN HARMONİK DÖNÜŞÜMLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Başkan : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ İmza
0000-0002-0243-8263
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Orhan GÜRLER İmza
0000-0002-8463-3432
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Fizik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Elif YAŞAR İmza
0000-0003-0176-4961
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Öznur ÖZKAN KILIÇ İmza
0000-0003-4209-9320
Başkent Üniversitesi,
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi,
Teknoloji ve Bilgi Yönetimi Bölümü
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Bilal ŞEKER İmza
0000-0003-1777-8145
Dicle Üniversitesi,
Fen Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
../../….

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…/…/………

Serkan ÇAKMAK

TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Danışman Adı-Soyadı
Tarih

Öğrencinin Adı-Soyadı
Tarih

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Doktora Tezi

KONVEKSE YAKIN HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Serkan ÇAKMAK

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu tez çalışmasında konvekse yakın harmonik fonksiyonların yeni alt sınıfları incelenmiştir. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci ve ikinci bölümde, tezin amacı, kapsamı ve çalışmada kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ele alınan konu ile ilgili bazı çalışmalar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, ikinci ve üçüncü mertebeden diferensiyel eşitsizlik içeren harmonik fonksiyonların yeni alt sınıfları tanıtılmıştır. Bu sınıfların konvekse yakınlığı, katsayı sınırları, büyüme tahminleri gibi bazı özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu sınıfların konveks birleşim ve konvolüsyon özellikleri elde edilmiştir. Son olarak, bu sınıflara ait Gauss hipergeometrik fonksiyonu içeren harmonik polinomlar oluşturulmuştur.

Beşinci bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Harmonik, Yalınkat, Konvekse yakın, katsayı tahminleri, konvolüsyon, hipergeometrik fonksiyon

2022, vii+ 75 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

CLOSE TO CONVEX HARMONİC MAPPINGS

Serkan ÇAKMAK

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

In this thesis, new subclasses of close-to-convex harmonic functions are investigated. The study consists of five chapters.

In the first and second chapters, the aim and scope of the thesis and the basic definitions and theorems that will be used in the study are given.

In the third chapter, some studies related to the subject discussed are examined.

In the fourth chapter, new subclasses of harmonic functions containing second and third order differential inequalities are introduced. Some properties of these classes, such as close to convexity, coefficient bounds, and growth estimates are obtained. In addition, convex combination and convolution properties of these classes are obtained. Finally, harmonic polynomials involving Gaussian hypergeometric function belonging to these classes are construted.

In the fifth chapter, the results obtained in the study are evaluated.

Key words: harmonic, univalent, close to convex, coefficient estimates, convolution, hypergeometric function

2022, vii + 75 pages.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim sürecinde desteklerini esirgemeyen, bilgi ve birikimiyle bana yol gösteren, insani ve ahlaki değerleriyle kendime örnek aldığım ve öğrencisi olmaktan gurur duyduğum kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ'e

lisansüstü eğitimim sırasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, görüşleriyle beni destekleyen, samimiyetini her zaman hissettiren ve beni doğru yönde yönlendiren, beraber çalışmaktan mutluluk duyduğum kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Elif YAŞAR'a

kendisiyle çalışma şansı yakaladığım, desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Şahsene ALTINKAYA' ya

eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen kıymetli büyüklerim Sayın Gülay Savaş'a, Sayın Op. Dr. Metin Deniz SAVAŞ'a, Sayın Serkan ARICAN'a ve çocukluk arkadaşım Sayın Ömer Faruk Güler'e

beni her zaman destekleyen annem Nurten İNCAL'a

hayatımın her alanında olduğu gibi, çalışmalarımı hazırlarken de her aşamada bana yardımcı olan, motivasyon ve desteğini benden esirgemeyen ve bana olan güvenini hiç kaybetmeyen kıymetli eşim Büşra ERDOĞAN ÇAKMAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Serkan ÇAKMAK
…/…/…….

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
U	$\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$, Açık birim disk
A	U açık birim diskinde normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
A_p	U açık birim diskinde analitik ve $f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k$ şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonların sınıfı
S	U açık birim diskinde normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
$f \prec F$	f fonksiyonunun F foksiyonuna sabordine olması
S^*	U açık birim diskinde analitik, yalınkat ve yıldızıl fonksiyonların sınıfı
K	U açık birim diskinde analitik, yalınkat ve konveks fonksiyonların sınıfı
C	U açık birim diskinde analitik, yalınkat ve konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z)$	Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$(\mathfrak{a})_k$	Pochhammer sembolü
$\Gamma(\mathfrak{a})$	Gamma fonksiyonu
$J_f(z_0)$	f fonksiyonunun z_0 noktasındaki Jakobiyeni
SH	U açık birim diskinde harmonik, yalınkat, yön koruyan, $f(0) = 0$ ve $f_z(0) = 1$ ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı
SH^0	$g'(z) = b_1 = 0$ ile normalize edilmiş $f \in SH$ fonksiyonlarının sınıfı
$f_1 * f_2$	f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu (Hadamard Çarpımı)
$f \check{*} \varphi$	f harmonik fonksiyonunun φ analitik fonksiyonu ile konvolüsyonu
SH^*	U açık birim diskinde harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı
KH	U açık birim diskinde harmonik konveks fonksiyonların sınıfı
CH	U açık birim diskinde harmonik konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
FKH^0	Tam konveks fonksiyonların sınıfı
$FSH^{*,0}$	Tam yıldızıl fonksiyonların sınıfı

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$PH^0(\lambda)$	$Re\{h'(z) - \lambda\} > \vert g'(z)\vert$ şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonların sınıfı
WH^0	$Re\{h'(z) + zh''(z)\} > \vert g'(z) + zg''(z)\vert$ şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$W(\alpha,\beta)$	$Re\{h'(z) + \alpha zh''(z)\} > \beta$ şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$WH^0(\alpha,\beta)$	$Re\{h'(z) + \alpha zh''(z) - \beta\} > \vert g'(z) + \alpha zg''(z)\vert$ şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$RS(\lambda,\delta)$	$Re\{f'(z) + \lambda zf''(z) + \delta z^2 f'''(z)\} > 0$ eşitsizliğini sağlayan $f \in A$ fonksiyonlarının sınıfı
$RH^0(\lambda,\delta)$	$Re\{h'(z) + \lambda zh''(z) + \delta z^2 h'''(z)\} > \vert\alpha g'(z) + \lambda zg''(z) + \delta z^2 g'''(z)\vert$ şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$	$Re\{\alpha h'(z) + \beta zh''(z) - \lambda\} > \vert\alpha g'(z) + \beta zg''(z)\vert$ şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı
$RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$	$Re\left\{\alpha h'(z) + \beta zh''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 h'''(z) - \lambda\right\} > \left\vert\alpha g'(z) + \beta zg''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 g'''(z)\right\vert$ eşitsizliğini sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Karmaşık analizin bir dalı olan geometrik fonksiyonlar teorisi, Bernard Riemann'ın 1851 yılında her basit bağlantılı bölgenin açık birim disk üzerine konform olarak resmedilebileceğini ispatlamasıyla araştırmacıların ilgisini çekti. Bu alanda yeni sonuçlar bulmak araştırmacılar için çok önemlidir. Analitik yalınkat fonksiyon sınıfı için Bieberbach tahmini ispatlandıktan sonra sonuçların harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı için doğru olup olmayacağı sorusu ortaya çıkmıştır. Clunie ve Sheil-Small 1984 yılında yayınladığı makalede, analitik, yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı için yapılan tahminlerin harmonik, yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı için farklı olduğunu fakat bazı kısıtlamalarla benzer şekilde yapılabileceğini gösterdi.

Bu çalışmanın amacı, yüksek mertebeden diferensiyel eşitsizlik içeren harmonik fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanıtmak, bu sınıfların konvekse yakın olduklarını göstermek ve katsayı sınırları, büyüme tahminleri, konveks birleşim ve konvolüsyon özelliklerini elde etmektir.

İlk bölüm giriş için ayrılmış olup, ikinci bölümde; diğer bölümde kullanılacak olan analitik fonksiyonlar ve harmonik fonksiyonlar için bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Rajbala ve Prajapat (2021) ile Yaşar ve Yalçın (2021) tarafından tanımlanan sınıflar için elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde; ikinci ve üçüncü mertebeden diferensiyel eşitsizlik içeren harmonik fonksiyonların yeni alt sınıfları tanıtılmıştır. Bu sınıfların konvekse yakınlığı, katsayı sınırları, büyüme tahminleri gibi bazı özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu sınıfların konveks birleşim ve konvolüsyon özellikleri elde edilmiştir. Son olarak, bu sınıflara ait Gauss hipergeometrik fonksiyonu içeren harmonik polinomlar oluşturulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerine temel oluşturan bazı tanım ve teoremler verilecektir. Bu bölüm Ahlfors (1979), Goodman (1983), Clunie ve Sheil-Small (1984), Duren (2004), Başkan 2005, Zill ve Shanahan (2013) kaynaklarından derlenmiştir.

2.1. Analitik Fonksiyonlar

2.1.1. Tanım. $\mathbb{C}$ kompleks düzlem olmak üzere $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ cümlesi açık birim disk olarak adlandırılır.

2.1.2. Tanım. D kompleks düzlemde bir bölge olmak üzere D bölgesindeki farklı noktaların f fonksiyonu altındaki görüntüleri de farklı ise f fonksiyonuna, D bölgesinde yalınkat fonksiyon denir. f fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasının bir komşuluğunda yalınkat ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında yerel yalınkat denir.

2.1.3. Teorem. f analitik fonksiyonunun $z_0 \in D$ noktasında yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

2.1.4. Tanım. f fonksiyonu D bölgesinde sürekli bir dönüşüm ve $z_0 \in D$ olsun. Bu durumda z_0 noktasında kesişen D deki her yönlendirilmiş C_1 ve C_2 düzgün eğri çiftinin z_0 noktasındaki aralarındaki açı, C_1' ve C_2' görüntü eğrilerinin $f(z_0)$ noktasında aralarındaki açıya hem büyüklükte hem de yönde eşitse f fonksiyonuna z_0 noktasında konform dönüşüm denir. Eğer f fonksiyonu D bölgesindeki her noktada konform ise f fonksiyonuna D bölgesinde konformdur denir.

2.1.5. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). D, kompleks düzlemin tamamı olmayan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in D$ olsun. Bu durumda D bölgesini açık birim disk üzerine birebir olarak resmeden ve $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ özelliğinde yalnız bir f fonksiyonu vardır (Riemann, 1851).

2.1.6. Tanım. A, U açık birim diskinde analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şeklinde normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı olsun. Bu durumda A sınıfına ait her f fonksiyonu,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor serisi açılımına sahiptir. Ayrıca, A sınıfındaki yalınkat fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

2.1.7. Tanım. U açık birim diskinde analitik ve $p = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \tag{2.2}$$

şeklinde seri açılımına sahip f fonksiyonlarının sınıfı A_p ile gösterilir.

2.1.8. Tanım. $z \in U$ için $Re\{f(z)\} > 0$ olacak şekilde, U açık birim diskinde analitik ve

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_k z^k + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \tag{2.3}$$

şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}$ ile gösterilir. $\mathcal{P}$ sınıfına ait fonksiyona reel kısmı pozitif fonksiyon denir.

2.1.9. Teorem. $k \geq 1$ belli bir tamsayı olsun. Bu durumda, (2.3) ile verilen seri açılımına sahip f fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait ise $|p_k| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir (Carathéodory, 1907).

2.1.10. Lemma. $p' \in \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda,

$$|p'(z)| \geq \frac{1-|z|}{1-|z|} \text{ ve } \left|\frac{p''(z)}{p'(z)}\right| \leq \frac{2}{1-|z|^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır ve bu eşitsizlikler kesindir. Eşitlik, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere $p(z) = -z - 2e^{i\theta}\log(1 - ze^{i\theta})$ fonksiyonu için sağlanır.

2.1.11. Tanım. $k \to \infty$ için $u_k \to 0$ ve $u_0 - u_1 \geq u_1 - u_2 \geq \cdots \geq u_{k-1} - u_k \geq \cdots \geq 0$ özelliğindeki $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ negatif olmayan gerçel dizisine konveks sıfır dizisi denir.

2.1.12. Lemma. $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ konveks sıfır dizisi ise

$$Q(z) = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^k$$

fonksiyonu U açık birim diskinde analitiktir ve $Re\{Q(z)\} > 0$ eşitsizliği sağlanır (Fejer 1925).

2.1.13. Lemma. P fonksiyonu, U açık birim diskinde $P(0) = 1$ özelliğinde analitik ve $Re\{P(z)\} > \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda, U açık birim diskinde analitik her f fonksiyonu için $P * f$ fonksiyonu $f(U)$ yu kapsayan en dar konveks bölgede değer alır (Singh ve Singh, 1989).

2.1.14. Teorem (Schwarz Lemma). $\omega: U \to \mathbb{C}$ analitik ve $z \in U$ için $|\omega(z)| \leq 1$ ve $\omega(0) = 0$ olsun. Bu durumda $z \in U$ noktaları için $|\omega(z)| \leq |z|$ ve $|\omega'(0)| \leq 1$ dir. Üstelik $z_0 \in U$ $(z_0 \neq 0)$ için $|\omega(z_0)| = |z_0|$ ise c, $|c| = 1$ özelliğinde bir sabit olmak üzere $\omega(z) = cz$ şeklindedir.

2.1.15. Teorem. f ve F fonksiyonları U açık birim diskinde analitik olsun. Ayrıca, F fonksiyonu U açık birim diskinde yalınkat olsun. Bu durumda U açık birim diskinde

$f(z) \prec F(z)$ olması için gerek ve yeter şart $f(z) = F(\omega(z))$ olacak şekilde Schwarz Lemmanın şartlarını sağlayan bir ω fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

2.1.16. Lemma. ω, $\omega(0) = 0$ özelliğinde ve U açık birim diskinde analitik fonksiyon olsun. Eğer $|\omega(z)|$ maksimum değerini $|z| \leq |z_0|$ diskinde bir $z_0 \in U$ $(z_0 \neq 0)$ noktasında alıyorsa $m \geq 1$ gerçel sayısı için $z_0\omega'(z_0) = m\omega(z_0)$ eşitliği sağlanır (Jack, 1971).

2.1.17. Lemma. ω, $\omega(z) = c_k z^k + c_{k+1}z^{k+1} + \cdots$, $c_k \neq 0$ özelliğinde U açık birim diskinde analitik fonksiyon olsun. Eğer $|\omega(z)|$ maksimum değerini $|z| \leq |z_0| < 1$ diskinde bir $z_0 \in U$ $(z_0 \neq 0)$ noktasında alıyorsa

$$\frac{z_0\omega'(z_0)}{\omega(z_0)} = m \quad \text{ve} \quad Re\left\{1 + \frac{z_0\omega''(z_0)}{\omega'(z_0)}\right\} \geq m$$

olacak şekilde $m \geq k \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan bir m reel sayısı vardır (Miller ve Mocanu, 1981, 2000).

2.1.18. Tanım. Düzlemde bir D kümesinin w_0 noktasından çıkan her bir ışın ile D kümesinin içinin arakesiti ya bir doğru parçası ya da bir ışın ise D kümesine, w_0 iç noktasına göre yıldızıl küme denir.

2.1.19. Tanım. Açık birim diski yıldızıl bir bölgeye dönüştüren fonksiyona yıldızıl fonksiyon denir ve analitik yalınkat yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S^* ile gösterilir.

2.1.20. Teorem. f, $U_R: |z| < R$, $R > 0$ diskinde analitik, yalınkat bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ özelliğinde olsun. Bu durumda f fonksiyonunun, U_R diskini yıldızıl bir bölgeye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart $C_R: |z| = R$ üzerindeki her z için

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \tag{2.4}$$

olmasıdır (Nevanlinna, 1921).

2.1.21. Tanım. Düzlemde bir D kümesinin içindeki her bir w_1, w_2 nokta çifti için w_1 ve w_2 yi birleştiren doğru parçası D kümesinin içinde kalıyorsa, D ye konveks küme denir.

2.1.22. Tanım. Bir f fonksiyonu U açık birim diskini konveks bir bölgeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. S sınıfına ait konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.

2.1.23. Teorem. f fonksiyonu, $U_R: |z| \leq R, R > 0$ kapalı diskinde analitik ve yalınkat olsun. Bu durumda f fonksiyonunun U_R kapalı diskini konveks bir bölgeye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart $C_R: |z| = R$ üzerindeki her z için

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \tag{2.5}$$

olmasıdır (Study, 1913).

2.1.24. Tanım. Bir D bölgesinin tümleyeni kesişmeyen yarı doğruların (bir yarı doğrunun başlangıç noktası diğer yarı doğrulardan birinin üzerinde olabilir) birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa D ye konvekse yakın bölge denir.

2.1.25. Tanım. f fonksiyonu U açık birim diskinde analitik olsun. Bu durumda U açık birim diskinde

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \tag{2.6}$$

eşitsizliğini sağlayan yalınkat ve konveks bir g fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna konvekse yakın fonksiyon denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir (Kaplan, 1952).

S sınıfının alt sınıfları olan S^*, K ve C sınıfları için $K \subset S^* \subset C \subset S$ bağıntısı sağlanır.

2.1.26. Tanım. $f \in S$ fonksiyonu, her $z \in U$ için

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{2.7}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna α-mertebeli yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir (Robertson, 1936).

2.1.27. Tanım. $f \in S$ fonksiyonu, her $z \in U$ için

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{2.8}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna α-mertebeli konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $K(\alpha)$ ile gösterilir (Robertson, 1936).

2.1.28. Tanım. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{C}$ ve $\mathfrak{c} \neq 0, -1, -2, \ldots$ olsun. Gauss hipergeometrik fonksiyonu,

$${}_2F_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z) = F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{a})_k(\mathfrak{b})_k}{(\mathfrak{c})_k k!} z^k \quad (z \in U) \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $(\mathfrak{a})_0 = 1$ ve $(\mathfrak{a})_k$, $k \in \mathbb{N}$ için

$$(\mathfrak{a})_k = \frac{\Gamma(\mathfrak{a} + k)}{\Gamma(\mathfrak{a})} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a} + 1)(\mathfrak{a} + 2) \ldots (\mathfrak{a} + k - 1)$$

olarak tanımlı Pochhammer sembolüdür. $Re(\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b}) > 0$ ise

$$F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathfrak{c})\Gamma(\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{\Gamma(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})\Gamma(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})} \quad \mathfrak{c} \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{2.10}$$

olarak tanımlanır ve $F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z)$ hipergeometrik fonksiyonu birim diskte analitiktir (Temme, 1996).

2.1.29. Lemma. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \mathfrak{c} > 0$ olsun. Bu durumda,

i. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} > 0,\ \ \mathfrak{c} > \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{(\mathfrak{a})_k(\mathfrak{b})_k}{(\mathfrak{c})_k(1)_k} = \frac{\Gamma(\mathfrak{c})\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1)}{\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1),$$

ii. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} > 0,\ \ \mathfrak{c} > \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 2$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2\frac{(\mathfrak{a})_k(\mathfrak{b})_k}{(\mathfrak{c})_k(1)_k} = \frac{\Gamma(\mathfrak{c})\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})}\left(\frac{(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2}+\frac{3\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}+1\right),$$

iii. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} > 0,\ \ \mathfrak{c} > \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 3$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^3\frac{(\mathfrak{a})_k(\mathfrak{b})_k}{(\mathfrak{c})_k(1)_k} = \frac{\Gamma(\mathfrak{c})\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})}\left(\frac{(\mathfrak{a})_3(\mathfrak{b})_3}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-3)_3}+\frac{6(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2}+\frac{7\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}+1\right),$$

iv. $\mathfrak{c} > \text{maks}\{0, \mathfrak{a}+\mathfrak{b}-1\}$ olmak üzere $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \neq 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_k(\mathfrak{b})_k}{(\mathfrak{c})_k(1)_{k+1}} = \frac{1}{(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{b}-1)}\left[\frac{\Gamma(\mathfrak{c})\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1)}{\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})\Gamma(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})}(\mathfrak{c}-1)\right]$$

eşitlikleri sağlanır (Kim ve Ponnusamy, 1999).

2.2. Harmonik Fonksiyonlar

2.2.1. Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $u: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun D bölgesinde ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli olsun. Bu durumda, her $z \in D$ için

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa u fonksiyonuna, D bölgesinde reel harmonik fonksiyon denir. f, $f: D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ olarak tanımlı fonksiyon olmak üzere u ve v fonksiyonları D bölgesinde reel harmonik fonksiyonlar ise f fonksiyonuna D bölgesinde harmoniktir denir.

2.2.2. Yardımcı Teorem (Kanonik Gösterim). Basit bağlantılı bir D bölgesinde h ve g analitik fonksiyonlar olmak üzere f harmonik fonksiyonu

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu gösterim sabit farkıyla tektir. Bu gösterimde, h fonksiyonuna f fonksiyonunun analitik kısmı, g fonksiyonuna f fonksiyonunun eş analitik kısmı denir.

2.2.3. Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f = u + iv$ fonksiyonu D bölgesinde diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda $z_0 \in D$ için

$$J_f(z_0) = \begin{vmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} = u_x(z_0)v_y(z_0) - u_y(z_0)v_x(z_0)$$

şeklinde tanımlı $J_f(z_0)$ değerine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki Jakobiyeni denir. f fonksiyonu analitik ise $J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2$ dir.

2.2.4. Tanım. f fonksiyonuna, Jakobiyeni pozitif ise yön koruyan, Jakobiyeni negatif ise yönü ters çeviren denir.

2.2.5. Teorem. $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonunun U açık birim diskinde yerel yalınkat ve yön koruyan olması için gerek ve yeter şart U açık birim diskinde $|g'(z)| < |h'(z)|$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Clunie ve Sheil-Small, 1984).

2.2.6. Tanım. U açık birim diskinde harmonik, yalınkat, yön koruyan ve $f(0) = f_z(0) - 1 = 0$ ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı SH ile gösterilir.

2.2.7. Tanım. $f \in SH$ fonksiyonlarından $g'(0) = b_1 = 0$ şartını sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı SH^0 ile gösterilir. h ve g fonksiyonları U açık birim diskinde analitik ve

$$h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \, , g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k \qquad (2.11)$$

şeklinde seri açılımına sahip fonksiyonlar olmak üzere SH^0 sınıfına ait bir f fonksiyonu, $f = h + \overline{g}$ şeklindedir.

S, SH ve SH^0 fonksiyon sınıfları için $S \subset SH^0 \subset SH$ kapsaması gerçeklenir.

2.2.8. Tanım. $t = 1{,}2$ için

$$f_t(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,t} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_{k,t} z^k} \qquad (2.12)$$

şeklinde seri açılımına sahip iki harmonik fonksiyonun konvolüsyonu (Hadamard çarpımı)

$$f_1(z) * f_2(z) = (f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,1} a_{k,2} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_{k,1} b_{k,2} z^k}$$

ile tanımlanır. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonlarının eş analitik kısımları sıfır ise bu tanım analitik fonksiyonların Hadamard çarpımını verir.

2.2.9. Tanım. U açık birim diskinde analitik φ fonksiyonu ile $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonunun Hadamard çarpımı

$$f \check{*} \varphi = h * \varphi + \overline{g * \varphi}$$

biçiminde tanımlanır (Goodloe, 2002).

2.2.10. Tanım. SH (ya da SH^0) sınıfına ait f fonksiyonu altındaki görüntüsü orijine göre yıldızıl bir bölge olan f fonksiyonuna harmonik yıldızıl fonksiyon denir. Harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı SH^* (ya da $SH^{*,0}$) ile gösterilir.

2.2.11. Tanım. SH (ya da SH^0) sınıfına ait f fonksiyonu altındaki görüntüsü konveks bir bölge olan f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Harmonik konveks fonksiyonların sınıfı KH (ya da KH^0) ile gösterilir.

2.2.12. Tanım. SH (ya da SH^0) sınıfına ait f fonksiyonu altındaki görüntüsü konvekse yakın bir bölge olan f fonksiyonuna harmonik konvekse yakın fonksiyon denir. Harmonik konvekse yakın fonksiyonların sınıfı CH (ya da CH^0) ile gösterilir.

2.2.13. Teorem. h ve g, U açık birim diskinde analitik iki fonksiyon ve $|g'(0)| < |h'(0)|$ olsun. Bu durumda, $|\varepsilon| = 1$ özelliğindeki her ε için $h + \varepsilon g$, konvekse yakın bir fonksiyon ise $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu harmonik konvekse yakın bir fonksiyondur (Clunie ve Sheil-Small, 1984).

2.2.14. Tanım. U açık birim diskinde $|\varepsilon| = 1$ özelliğindeki her $f_\varepsilon = h + \varepsilon g$ fonksiyonu yalınkat (veya sırasıyla konveks, yıldızıl ya da konvekse yakın) ise $f = h + \overline{g}$ yön koruyan harmonik fonksiyonuna U açık birim diskinde stabil harmonik yalınkat (veya sırasıyla stabil harmonik konveks, stabil harmonik yıldızıl ya da stabil harmonik konvekse yakın) fonksiyon denir (Hernandez ve Martin, 2013).

2.2.15. Lemma. $f = h + \overline{g}$ yön koruyan harmonik fonksiyonunun stabil harmonik yalınkat (veya sırasıyla stabil harmonik konveks, stabil harmonik yıldızıl ya da stabil harmonik konvekse yakın) olması için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| = 1$ özelliğindeki her ε için $F_\varepsilon = h + \varepsilon g$ fonksiyonlarının yalınkat (veya sırasıyla konveks, yıldızıl ya da konvekse yakın) olmasıdır (Hernandez ve Martin, 2013).

Konvekslik ve yıldızıllık, konform dönüşümler için kalıtsal özelliklerdir ancak bu özellikler harmonik fonksiyonlara taşınamaz. Bu durum tam yıldızıl ve tam konveks fonksiyonlar kavramlarını ortaya çıkarır.

2.2.16. Tanım. Birim diskte tanımlı bir f harmonik fonksiyonu her $|z| = r < 1$ çemberini konveks bir eğriye bire bir dönüştürürse f harmonik fonksiyonuna tam konveks denir. Diğer yandan, $f(0) = 0$ özelliğindeki f harmonik fonksiyonu her $|z| = r < 1$ çemberini bire bir olarak orijine göre yıldızıl bir bölgeyi sınırlayan bir eğriye dönüştürürse f harmonik fonksiyonuna tam yıldızıl denir. Tam konveks ve tam yıldızıl fonksiyonların sınıfı sırasıyla FKH^0 ve $FSH^{*,0}$ ile gösterilir (Chuaqui ve ark., 2004).

Aşağıdaki iki Lemma, SH^0 sınıfına ait f fonksiyonlarının sırasıyla FKH^0 ve $FSH^{*,0}$ sınıfına ait olması için yeterli koşulları verir.

2.2.17. Lemma. $f = h + \overline{g}$, (2.11) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ve

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2\{|a_k| + |b_k|\} \leq 1 \quad (z \in U) \tag{2.13}$$

olsun. Bu durumda f, U açık birim diskinde harmonik, yalınkat ve FKH^0 sınıfına ait bir fonksiyondur (Silverman, 1998).

2.2.18. Lemma. $f = h + \overline{g}$, (2.11) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon ve

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\{|a_k| + |b_k|\} \leq 1 \quad (z \in U) \tag{2.14}$$

olsun. Bu durumda f, U açık birim diskinde harmonik, yalınkat ve $FSH^{*,0}$ sınıfına ait bir fonksiyondur (Silverman, 1998).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Ponnusamy ve ark. (2013), $z \in U$ için $Re\{h'(z)\} > |g'(z)|$ şartını sağlayan harmonik fonksiyonların sınıfını tanıttı ve bu sınıfa ait fonksiyonların konvekse yakın olduklarını gösterdi. Li ve Ponnusamy (2013a, 2013b), $z \in U$ ve $\lambda < 1$ için $Re\{h'(z) - \lambda\} > |g'(z)|$ şartını sağlayan harmonik fonksiyonların sınıfını tanıttı ve bu sınıfı $PH^0(\lambda)$ ile gösterdi. Nagpal ve Ravichandran (2014), $z \in U$ için $Re\{h'(z) + zh''(z)\} > |g'(z) + zg''(z)|$ şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfını WH^0 ile gösterdiler. Ghosh ve Vasudevarao (2019), $z \in U$ ve $0 \leq \alpha < 1$ özelliğindeki α reel sayıları için $Re\{h'(z) + \alpha zh''(z)\} > |g'(z) + \alpha zg''(z)|$ eşitsizliğini sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfını tanımladı ve bu fonksiyon sınıfları için katsayı sınırları, büyüme teoremi, konvolüsyon ve konvekslik yarıçapını inceledi.

Son zamanlarda, Rajbala ve Prajapat (2021), $z \in U$ ve $\alpha \geq 0,\ \ 0 \leq \beta < 1$ için $Re\{h'(z) + \alpha zh''(z) - \beta\} > |g'(z) + \alpha zg''(z)|$ şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfını ve Yaşar ve Yalçın (2021), $z \in U$ ve $\lambda \geq \delta \geq 0$ için $Re\{h'(z) + \lambda zh''(z) + \delta z^2 h'''(z)\} > |g'(z) + \lambda zg''(z) + \delta z^2 g'''(z)|$ şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfını tanıttı ve bu sınıflara ait bazı geometrik özellikleri inceledi. Bu bölümde, bu iki çalışmada kullanılan yöntemler ve elde edilen sonuçlar verilecektir.

3.1. $WH^0(\alpha, \beta)$ Sınıfı

Rajbala ve Prajapat (2021), açık birim diskte yön koruyan harmonik fonksiyonların yeni bir alt sınıfını tanıttı ve bu sınıfa ait fonksiyonların konvekse yakın olduğunu gösterdi. Ayrıca, bu sınıflara ait bazı geometrik özellikleri inceledi. Bu bölümde, Rajbala ve Prajapat (2021) tarafından yapılan bu çalışmada elde edilen sonuçlar verilecektir.

3.1.1. Tanım. $\alpha > 0$ ve $\beta < 1$ için

$$Re\{f'(z) + \alpha z f''(z)\} > \beta \quad (z \in U) \tag{3.1}$$

şartını sağlayan $f \in S$ fonksiyonlarının sınıfı $W(\alpha, \beta)$ ile gösterilir (Gao and Zhou, 2007).

3.1.2. Tanım. $\alpha \geq 0$ ve $0 \leq \beta < 1$ için

$$Re\{h'(z) + \alpha z h''(z) - \beta\} > |g'(z) + \alpha z g''(z)| \quad (z \in U) \tag{3.2}$$

şartını sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı $WH^0(\alpha, \beta)$ ile gösterilir (Rajbala ve Prajapat, 2021).

$WH^0(\alpha, \beta)$ sınıfında parametrelerin özel seçilmesiyle daha önce çalışılmış olan harmonik fonksiyon sınıfları aşağıda verilmiştir.

i. $WH^0(\alpha, 0) = WH^0(\alpha)$ (Ghosh ve Vasudevarao 2019)

ii. $WH^0(0, \beta) = PH^0(\beta)$ (Li ve Ponnusamy 2013a)

iii. $WH^0(0,0) = PH^0$ (Li ve Ponnusamy 2013b)

iv. $WH^0(1,0) = WH^0$ (Nagpal ve Ravichandran 2014)

3.1.3. Teorem. $f = h + \overline{g} \in WH^0(\alpha, \beta)$ olması için gerek ve yeter şart her ϵ ($|\epsilon| = 1$) için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in W(\alpha, \beta)$ olmasıdır.

3.1.4. Lemma. $F \in W(\alpha, \beta)$ ise $Re\{F'(z)\} > 0$ ve böylece F, U açık birim diskinde konvekse yakındır.

3.1.5. Teorem. $WH^0(\alpha, \beta)$ sınıfına ait fonksiyonlar U açık birim diskinde konvekse yakındır.

3.1.6. Teorem. $f = h + \overline{g} \in WH^0(\alpha, \beta)$ olsun. Bu durumda, $k \geq 2$ için

$$|b_k| \leq \frac{1-\beta}{k[1+\alpha(k-1)]}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç kesin olup eşitlik $f(z) = z + \frac{1-\beta}{k[1+\alpha(k-1)]}\overline{z}^k$ için sağlanır.

3.1.7. Teorem. $f = h + \overline{g} \in WH^0(\alpha, \beta)$ olsun. Bu durumda, $n \geq 2$ için

i. $$|a_k| + |b_k| \leq \frac{2(1-\beta)}{k[1+\alpha(k-1)]}$$

ii. $$|a_k| \leq \frac{2(1-\beta)}{k[1+\alpha(k-1)]}$$

iii. $$\big||a_k| - |b_k|\big| \leq \frac{2(1-\beta)}{k[1+\alpha(k-1)]}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu sonuçlar $f(z) = z + \frac{2(1-\beta)}{k[1+\alpha(k-1)]}\overline{z}^k$ için kesindir.

3.1.8. Teorem. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ ve

$$\sum_{k=2}^{\infty} k[1+\alpha(k-1)](|a_k| + |b_k|) \leq 1-\beta \qquad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f = h + \overline{g} \in WH^0(\alpha, \beta)$ dır.

3.1.9. Teorem. $f = h + \overline{g} \in WH^0(\alpha, \beta)$ olsun. Bu durumda,

$$|f(z)| \geq |z| + 2(1-\beta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}|z|^k}{\alpha k^2 + (1-\alpha)k}$$

$$|f(z)| \leq |z| + 2(1-\beta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{\alpha k^2 + (1-\alpha)k}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2(1-\beta)}{k[1+\alpha(k-1)]} \overline{z}^k$ fonksiyonu için kesindir.

3.1.10. Teorem. $WH^0(\alpha, \beta)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalıdır.

3.1.11. Lemma. $F \in W(\alpha, \beta)$ olsun. Bu durumda, $Re\left\{\frac{F(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2-\beta}$ eşitsizliği sağlanır.

3.1.12. Lemma. $i = 1,2$ için $F_i \in W(\alpha, \beta)$ ise $F_1 * F_2 \in W(\alpha, \beta)$ dır.

3.1.13. Teorem. $i = 1,2$ için $f_i \in WH^0(\alpha, \beta)$ ise $f_1 * f_2 \in WH^0(\alpha, \beta)$ dır.

3.1.14. Teorem. $f \in WH^0(\alpha, \beta)$, $\varphi \in A$ ve $z \in U$ için $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ ise $f \check{*} \varphi \in WH^0(\alpha, \beta)$ dır.

3.1.15. Sonuç. $f \in WH^0(\alpha, \beta)$ ve $\varphi \in K$ olsun. Bu durumda $f \check{*} \varphi \in WH^0(\alpha, \beta)$ dır.

3.1.16. Teorem. $\mathfrak{c}$ pozitif reel sayı, $\mathfrak{ab} > 0$ için $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in (-1, \infty)$ veya $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{a}}$ için $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere $t_1(z) = z + \overline{z^2 F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z)}$, $t_2(z) = z + \overline{z(F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z) - 1)}$ ve $t_3(z) = z + \overline{\int_0^z F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \zeta) d\zeta}$ olsun. Bu durumda

i. $\mathfrak{c} > Re(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + 3$ ve

$$\left[2(1+\alpha) + \frac{(1+4\alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1} + \frac{\alpha(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2}\right] F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1) \leq 1-\beta$$

ise t_1 fonksiyonu $WH^0(\alpha,\beta)$ sınıfına aittir.

ii. $\mathfrak{c} > Re(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + 3$ ve

$$\left[1 + \frac{(1+2\alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1} + \frac{\alpha(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2}\right] F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1) \leq 2-\beta$$

ise t_2 fonksiyonu $WH^0(\alpha,\beta)$ sınıfına aittir.

iii. $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} \neq 1$, $c > Re(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + 2$ ve

$$\left[\frac{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{b}-1)} + 1 + 2\alpha + \frac{\alpha\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}\right] F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1) \leq 1-\beta + \frac{\mathfrak{c}-1}{(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{b}-1)}$$

ise t_3 fonksiyonu $WH^0(\alpha,\beta)$ sınıfına aittir.

$\mu \in \mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\ldots\}$ ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\frac{(-1)^k(-\mu)_k}{k!} = \binom{\mu}{k} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{k!\,\Gamma(\mu-k+1)}$$

olup, burada $\mu = m \;\; (m \in \mathbb{N}, m \geq k)$ olarak seçilirse

$$(-m)_k = \frac{(-1)^k m!}{(m-k)!}$$

elde edilir. Şimdi, bu eşitlik Teorem 3.1.16 da uygulanarak $WH^0(\alpha,\beta)$ sınıfına ait harmonik polinomlar oluşturacaktır. $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=-m \quad (m\in\mathbb{N})$ olarak seçilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

3.1.17. Sonuç. $m\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{c}$ pozitif reel sayı ve

$$T_1(z)=z+\overline{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-k+1)_k}{(\mathfrak{c})_k}z^{k+2}},$$

$$T_2(z)=z+\overline{\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-k+1)_k}{(\mathfrak{c})_k}z^{k+1}},$$

$$T_3(z)=z+\overline{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-k+1)_k}{(k+1)(\mathfrak{c})_k}z^{k+2}}$$

olsun. Bu durumda

(i) $\left[2(1+\alpha)+(1+4\alpha)\frac{m^2}{\mathfrak{c}+2m-1}+\alpha\frac{m^2(m-1)^2}{(\mathfrak{c}+2m-1)(\mathfrak{c}+2m-2)}\right]F(-m,-m,\mathfrak{c};1)\le 1-\beta$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_1\in WH^0(\alpha,\beta)$,

(ii) $\left[1+(1+2\alpha)\frac{m^2}{\mathfrak{c}+2m-1}+\alpha\frac{m^2(m-1)^2}{(\mathfrak{c}+2m-1)(\mathfrak{c}+2m-2)}\right]F(-m,-m,\mathfrak{c};1)\le 2-\beta$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_2\in WH^0(\alpha,\beta)$,

(iii) $\left[\frac{(\mathfrak{c}+2m)}{(m+1)^2}+1+2\alpha+\alpha\frac{m^2}{\mathfrak{c}+2m-1}\right]F(-m,-m,\mathfrak{c};1)\le 1-\beta+\frac{\mathfrak{c}-1}{(m+1)^2}$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_3\in WH^0(\alpha,\beta)$ dır.

3.2. $RH^0(\lambda, \delta)$ Sınıfı

Yaşar ve Yalçın (2021), üçüncü mertebeden diferensiyel eşitsizlik ile harmonik fonksiyonların yeni bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıfa ait fonksiyonların konvekse yakın olduklarını göstermiştir. Ayrıca, tanımlanan sınıfın katsayı sınırları, büyüme teoremi, konveks birleşim ve konvolüsyon altında kapalılık gibi temel özelliklerini incelemiştir. Bu bölümde, Yaşar ve Yalçın (2021) tarafından elde edilen sonuçlar verilecektir.

3.2.1. Tanım. $z \in U$ ve $\lambda \geq \delta \geq 0$ için

$$Re\{f'(z) + \lambda z f''(z) + \delta z^2 f'''(z)\} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan $f \in A$ fonksiyonlarının sınıfı $R(\lambda, \delta)$ ile gösterilir. Bu sınıf Rosihan ve ark. (2011) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca, $\lambda \geq 1$ olmak üzere $R\left(\lambda, \frac{\lambda-1}{2}\right)$ sınıfı Al-Refai (2019) tarafından tanımlanan sınıfın özel halidir.

3.2.2. Tanım. $z \in U$ ve $\lambda \geq \delta \geq 0$ için

$$Re\{h'(z) + \lambda z h''(z) + \delta z^2 h'''(z)\} > |g'(z) + \lambda z g''(z) + \delta z^2 g'''(z)| \qquad (3.4)$$

eşitsizliğini sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı $RH^0(\lambda, \delta)$ ile gösterilir.

3.2.3. Teorem. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\lambda, \delta)$ olması için gerek ve yeter şart her ϵ ($|\epsilon| = 1$) için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in R(\lambda, \delta)$ olmasıdır.

3.2.4. Lemma. $F \in R(\lambda, \delta)$ ise $Re\{F'(z)\} > 0$ ve böylece F, U açık birim diskinde konvekse yakındır.

3.2.5. Teorem. $RH^0(\lambda, \delta)$ sınıfına ait fonksiyonlar U açık birim diskinde konvekse yakındır.

3.2.6. Teorem. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\lambda, \delta)$ olsun. Bu durumda, $k \geq 2$ için

$$|b_k| \leq \frac{1}{k\big[1 + (k-1)\big(\lambda + \delta(k-2)\big)\big]}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç kesin olup eşitlik $f(z) = z + \frac{1}{k[1+(k-1)(\lambda+\delta(k-2))]}\overline{z}^k$ fonksiyonu için sağlanır.

3.2.7. Teorem. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\lambda, \delta)$ olsun. Bu durumda, $k \geq 2$ için

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{2}{k\big[1 + (k-1)\big(\lambda + \delta(k-2)\big)\big]}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k[1+(k-1)(\lambda+\delta(k-2))]} z^k$ fonksiyonu için kesindir.

3.2.8. Teorem. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\big[1 + (k-1)\big(\lambda + \delta(k-2)\big)\big](|a_k| + |b_k|) \leq 1 \tag{3.5}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonları $RH^0(\lambda, \delta)$ sınıfına aittir.

3.2.9. Teorem. $f \in RH^0(\lambda, \delta)$ olsun. Bu durumda,

$$|f(z)| \geq |z| + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}|z|^k}{\delta k^3 + (\lambda - 3\delta)k^2 + (1 - \lambda + 2\delta)k}$$

$$|f(z)| \leq |z| + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{\delta k^3 + (\lambda - 3\delta)k^2 + (1 - \lambda + 2\delta)k}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\left[1+(k-1)\left(\lambda+\delta(k-2)\right)\right]}\overline{z}^k$ fonksiyonu için kesindir.

3.2.10. Teorem. $RH^0(\lambda, \delta)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalıdır.

3.2.11. Lemma. $F \in R(\lambda, \delta)$ olsun. Bu durumda $Re\left\{\frac{F(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$ eşitsizliği sağlanır.

3.2.12. Lemma. $i = 1{,}2$ için $F_i \in R(\lambda, \delta)$ ise $F_1 * F_2 \in R(\lambda, \delta)$ dır.

3.2.13. Teorem. $i = 1{,}2$ için $f_i \in RH^0(\lambda, \delta)$ ise $f_1 * f_2 \in RH^0(\lambda, \delta)$ dır.

3.2.14. Teorem. $f \in RH^0(\lambda, \delta)$, $\varphi \in A$ ve $z \in U$ için $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ ise $f \,\tilde{*}\, \varphi \in RH^0(\lambda, \delta)$ dır.

3.2.15. Sonuç. $f \in RH^0(\lambda, \delta)$ ve $\varphi \in K$ olsun. Bu durumda $f \,\check{*}\, \varphi \in RH^0(\lambda, \delta)$.

3.2.16. Teorem. $\mathfrak{c}$ pozitif reel sayı, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} > 0$ için $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in (-1, \infty)$ veya $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{a}}$ için $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere $t_1(\mathrm{z}) = z + \overline{z^2 F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z)}$, $t_2(\mathrm{z}) = z + \overline{z(F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z) - 1)}$ ve $t_3(\mathrm{z}) = z + \overline{\int_0^z F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \zeta) d\zeta}$ olsun. Bu durumda

i. $\mathfrak{c} > Re(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + 3$ ve

$$\left[2(1+\lambda) + \frac{(1+4\lambda+6\delta)\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1} + \frac{(\lambda+6\delta)(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2} + \frac{\delta(\mathfrak{a})_3(\mathfrak{b})_3}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-3)_3}\right] F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; 1) \leq 1$$

ise t_1 fonksiyonu $RH^0(\lambda, \delta)$ sınıfına aittir.

ii. $\mathfrak{c} > Re(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+3$ ve

$$\left[1+\frac{(1+2\lambda)ab}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}+\frac{(\lambda+3\delta)(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2}+\frac{\delta(\mathfrak{a})_3(\mathfrak{b})_3}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-3)_3}\right]F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)\leq 2$$

ise t_2 fonksiyonu $RH^0(\lambda,\delta)$ sınıfına aittir.

iii. $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\neq 1$, $\mathfrak{c} > Re(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+2$ ve

$$\left[\frac{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{b}-1)}+1+2\lambda+\frac{(\lambda+3\delta)\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}+\frac{\delta(a)_2(b)_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2}\right]F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)\leq 1+\frac{\mathfrak{c}-1}{(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{b}-1)}$$

ise t_3 fonksiyonu $RH^0(\lambda,\delta)$ sınıfına aittir.

3.2.17. Sonuç. $m\in\mathbb{N}$, c pozitif reel sayı ve

$$T_1(z)=z+\overline{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-k+1)_k}{(\mathfrak{c})_k}z^{k+2}},$$

$$T_2(z)=z+\overline{\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-k+1)_k}{(\mathfrak{c})_k}z^{k+1}},$$

$$T_3(z)=z+\overline{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-k+1)_k}{(k+1)(\mathfrak{c})_k}z^{k+2}}$$

olsun. Bu durumda

i. $$\left[2(1+\lambda)+\frac{(1+4\lambda+6\delta)m^2}{\mathfrak{c}+2m-1}+\frac{(\lambda+6\delta)m^2(m-1)^2}{(\mathfrak{c}+2m-1)(\mathfrak{c}+2m-2)}\right.$$
$$\left.+\frac{\delta m^2(m-1)^2(m-2)^2}{(\mathfrak{c}+2m-1)(\mathfrak{c}+2m-2)(\mathfrak{c}+2m-3)}\right]F(-m,-m,\mathfrak{c};1)\leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_1 \in RH^0(\lambda, \delta)$,

ii. $$\left[1 + \frac{(1+2\lambda)m^2}{c+2m-1} + \frac{(\lambda+3\delta)m^2(m-1)^2}{(c+2m-1)(c+2m-2)} + \frac{\delta m^2(m-1)^2(m-2)^2}{(c+2m-1)(c+2m-2)(c+2m-3)}\right] F(-m,-m,c;1) \leq 2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_2 \in RH^0(\lambda, \delta)$,

iii. $$\left[\frac{c+2m}{(m+1)^2} + 1 + 2\lambda + \frac{(\lambda+3\delta)m^2}{c+2m-1} + \frac{\delta m^2(m-1)^2}{(c+2m-1)(c+2m-2)}\right] F(-m,-m,c;1) \leq 1 + \frac{c-1}{(m+1)^2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_3 \in RH^0(\lambda, \delta)$ dır.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde, harmonik fonksiyonların yeni iki alt sınıfı tanımlanacak ve bu sınıflara ait fonksiyonların katsayı sınırları, büyüme tahmini, konveks birleşim ve konvolüsyon gibi bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu sınıflar ile Ghosh ve Vasudevarao (2019), Rajbala ve Prajapat (2021), Li ve Ponnusamy (2013a), Li ve Ponnusamy (2013b), Nagpal ve Ravichandran (2014) tarafından tanımlanan sınıflar arasındaki ilişki verilecektir.

4.1. $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ Sınıfı

Owa ve ark. (2007), $j = 0,1,2, \dots p-1$ olmak üzere $\alpha\ (\alpha > 0), \beta\ (\beta > 0)$ ve $\lambda\ (0 \leq \lambda < p! \{\alpha + (p-j)\beta\}/(p-j)!)$ için

$$Re\left\{\alpha \frac{f^{(j)}(z)}{z^{p-j}} + \beta \frac{f^{(j+1)}(z)}{z^{p-j-1}}\right\} > \lambda \quad (z \in U) \tag{4.1}$$

eşitsizliğini sağlayan f analitik fonksiyonlarının sınıfını $A_p(\alpha, \beta, \lambda; j)$ ile gösterdi. Bu sınıfa ait parametrelerin özel seçilmesiyle elde edilen $A_1(1, \beta, \lambda; 1)$ sınıfı Gao ve Zhou (2007) tarafından, $A_1(1,1, \lambda; 1)$ sınıfı Silverman (1994) tarafından çalışılmıştır. Wang ve ark. (2006), $A_0(\alpha, \beta, \lambda; 1)$ sınıfının yalınkatlık yarıçapını elde etmiştir. Ayrıca, (4.1) eşitsizliğinde $p = 1$ ve $j = 1$ seçilerek

$$Re\{\alpha f'(z) + \beta z f''(z)\} > \lambda \quad (\alpha > \lambda \geq 0 \text{ ve } \beta \geq 0) \tag{4.2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği sağlayan fonksiyonların sınıfı $A(\alpha, \beta, \lambda)$ ile gösterilir.

4.1.1. Tanım. $\alpha > \lambda \geq 0\ ve\ \beta \geq 0$ için

$$Re\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) - \lambda\} > |\alpha g'(z) + \beta z g''(z)| \tag{4.3}$$

şartını sağlayan $f = h + \overline{g}\ \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ ile gösterilir.

$AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfında parametrelerin özel seçilmesiyle elde edilen ve daha önce çalışılmış olan harmonik fonksiyon sınıfları aşağıda verilmiştir.

i.	$AH^0(1,\alpha,0) = WH^0(\alpha)$	(Ghosh ve Vasudevarao 2019)
ii.	$AH^0(1,\alpha,\beta) = WH^0(\alpha,\beta)$	(Rajbala ve Prajapat 2021)
iii.	$AH^0(1,0,0) = PH$	(Li ve Ponnusamy 2013a)
iv.	$AH^0(1,0,\alpha) = PH^0(\alpha)$	(Li ve Ponnusamy 2013b)
v.	$AH^0(1,1,0) = WH^0$	(Nagpal ve Ravichandran 2014).

İlk olarak, $f = h + \overline{g} \in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ fonksiyonunun konvekse yakın olduğu gösterilecek.

4.1.2. Teorem. $f = h + \overline{g} \in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olması için gerek ve yeter şart her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in A(\alpha,\beta,\lambda)$ olmasıdır.

İspat. $f = h + \overline{g} \in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. Bu durumda her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ ve $z \in U$ için

$$\begin{aligned} Re\{\alpha F_\epsilon'(z) + \beta z F_\epsilon''(z)\} &= Re\left\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) + \epsilon\left(\alpha g'(z) + \beta z g''(z)\right)\right\} \\ &> Re\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z)\} - |\alpha g'(z) + \beta z g''(z)| > \lambda \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in A(\alpha,\beta,\lambda)$. Tersine, $F_\epsilon = h + \epsilon g \in A(\alpha,\beta,\lambda)$ ise $z \in U$ için

$$Re\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z)\} > Re\left\{-\epsilon\left(\alpha g'(z) + \beta z g''(z)\right)\right\} + \lambda$$

elde edilir. Buradan ϵ $(|\epsilon| = 1)$ parametresinin uygun bir seçimiyle

$$Re\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) - \lambda\} > |\alpha g'(z) + \beta z g''(z)|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $f = h + \overline{g} \in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ dir.

4.1.3. Lemma. $F \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ ise $Re\{F'(z)\} > 0$ ve böylece F, U açık birim diskinde konvekse yakındır.

İspat. $F \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ ve $\Psi(z) = \frac{\alpha F'(z) + \beta z F''(z) - \lambda}{\alpha - \lambda}$ olsun. Bu durumda, $z \in U$ için $Re\{\Psi(z)\} > 0$ dır. Bu durumda

$$F'(z) = \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} \quad (\omega(z) \neq 1)$$

olacak şekilde $\omega(0) = 0$ özelliğinde ve U açık birim diskinde analitik bir ω fonksiyonu vardır. O halde, her $z \in U$ için $|\omega(z)| < 1$ olduğu gösterilmelidir. Bu durumda

$$\Psi(z) = \frac{\alpha F'(z) + \beta z F''(z) - \lambda}{\alpha - \lambda} = \frac{\alpha}{\alpha - \lambda} \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} + \frac{2\beta}{\alpha - \lambda} \frac{z\omega'(z)}{\left(1 - \omega(z)\right)^2} - \frac{\lambda}{\alpha - \lambda}$$

bulunur. ω, $\omega(0) = 0$ özelliğinde ve U açık birim diskinde analitik olduğundan

$$\max_{|z| \leq |z_0|} |\omega(z)| = |\omega(z_0)| = 1$$

olacak şekilde bir $z_0 \in U$ vardır. Böylece Lemma 2.1.16 dan

$$\omega(z_0) = e^{i\theta}, \;\; z_0 \omega'(z_0) = m\omega(z_0) = me^{i\theta} \quad (m \geq 1, 0 < \theta < 2\pi)$$

yazılabilir. O halde $z_0 \in U$ için

$$Re\{\Psi(z)\} \;\; = Re\left\{\frac{\alpha}{\alpha - \lambda} \frac{1 + \omega(z_0)}{1 - \omega(z_0)} + \frac{2\beta}{\alpha - \lambda} \frac{z_0 \omega'(z_0)}{\left(1 - \omega(z_0)\right)^2} - \frac{\lambda}{\alpha - \lambda}\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \lambda} Re\left\{\frac{2\beta m \omega(z_0)}{\left(1 - \omega(z_0)\right)^2} - \lambda\right\}$$

$$= -\frac{1}{\alpha - \lambda} Re\left\{\frac{\beta m}{1 - cos\theta} + \lambda\right\} \leq 0$$

bulunur. Bu ise $Re\{\Psi(z)\} > 0$ olması ile çelişir. Böylece, her $z \in U$ için $|\omega(z)| < 1$ ve dolayısıyla $Re\{F'(z)\} > 0$ dır.

4.1.4. Teorem. $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına ait fonksiyonlar U açık birim diskinde konvekse yakındır.

İspat. Lemma 4.1.3 gereği her ϵ ($|\epsilon| = 1$) için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ fonksiyonu U açık birim diskinde konvekse yakındır. O halde, Teorem 2.2.13 ve Teorem 4.1.2 kullanılarak $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına ait fonksiyonlar U açık birim diskinde konvekse yakın olduğu elde edilir.

4.1.5. Teorem. $f = h + \overline{g} \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda, $k \geq 2$ için

$$|b_k| \leq \frac{\alpha - \lambda}{k[\alpha + \beta(k-1)]}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç kesin olup eşitlik $f(z) = z + \frac{\alpha - \lambda}{k[\alpha + \beta(k-1)]} \overline{z}^k$ için sağlanır.

İspat. $f = h + \overline{g} \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. $g(z)$ fonksiyonunun seri açılımı kullanılarak

$$r^{k-1} k[\alpha + \beta(k-1)]|b_k|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\alpha g'(re^{i\theta}) + \beta re^{i\theta} g''(re^{i\theta})\right| d\theta$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re\left\{\alpha h'(re^{i\theta}) + \beta re^{i\theta} h''(re^{i\theta}) - \lambda\right\} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re\left\{\alpha - \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha + \beta(k-1)]a_k r^{k-1} e^{i(k-1)\,\theta}\right\} d\theta$$

$$= \alpha - \lambda$$

bulunur. Buradan $r \to 1^{-}$ için verilen katsayı sınırı elde edilir.

4.1.6. Teorem. $f = h + \overline{g} \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda, $k \geq 2$ için

i. $$|a_k| + |b_k| \leq \frac{2(\alpha - \lambda)}{k[\alpha + \beta(k-1)]}$$

ii. $$|a_k| \leq \frac{2(\alpha - \lambda)}{k[\alpha + \beta(k-1)]}$$

iii. $$\big||a_k| - |b_k|\big| \leq \frac{2(\alpha - \lambda)}{k[\alpha + \beta(k-1)]}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu sonuçlar $f(z) = z + \frac{2(\alpha-\lambda)}{k[\alpha+\beta(k-1)]}\overline{z}^k$ için kesindir.

İspat i. $f = h + \overline{g} \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. O halde Teorem 4.1.2 gereği her ϵ ($|\epsilon| = 1$) için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ elde edilir. Böylece, her $|\epsilon| = 1$ için

$$Re\{\alpha(h + \epsilon g)' + \beta z(h + \epsilon g)''\} > \lambda \quad (z \in U)$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\alpha h'(z) + \beta z h''(z) + \epsilon\left(\alpha g'(z) + \beta z g''(z)\right) = \lambda + (\alpha - \lambda)P(z) \qquad (4.4)$$

olacak şekilde U açık birim diskinde $Re\{P(z)\} > 0$ özelliğinde ve $P(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k z^k$ seri açılımına sahip bir P analitik fonksiyonu vardır.

(4.4) ile verilen eşitlikteki fonksiyonların seri açılımları kullanılarak $k \geq 2$ için

$$k[\alpha + \beta(k-1)](a_k + \epsilon b_k) = (\alpha - \lambda)P_{k-1}$$

bulunur. Böylece, $k \geq 1$ için $|P_k| \leq 2$ olduğundan ve ϵ $(|\epsilon| = 1)$ uygun seçilmesiyle ispat tamamlanır.

ii ve iii nin ispatı, ispat i de kullanılan adımlar takip edilerek benzer biçimde yapılır.

Aşağıdaki teorem, bir fonksiyonun $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına ait olması için yeter şartı vermektedir.

4.1.7. Teorem. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ ve

$$\sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha + \beta(k-1)](|a_k| + |b_k|) \leq \alpha - \lambda \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ dır.

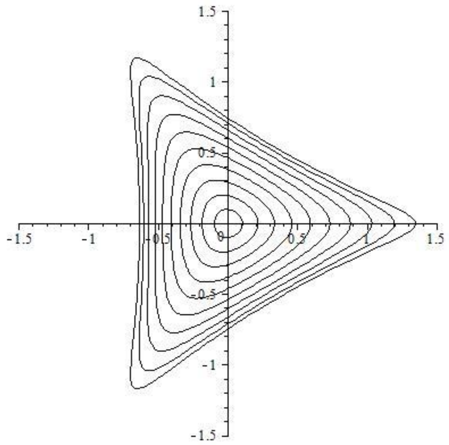
İspat. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ olsun. (4.5) ile verilen eşitsizlik kullanılarak,

$$\begin{aligned} Re\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) - \lambda\} &= Re\left\{\alpha - \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha + \beta(k-1)]a_k z^{k-1}\right\} \\ &> \alpha - \lambda - \sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha + \beta(k-1)]|a_k| \\ &\geq \sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha + \beta(k-1)]|b_k| \\ &> \left|\sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha + \beta(k-1)]b_k z^{k-1}\right| \end{aligned}$$

$$= |\alpha g'(z) + \beta z g''(z)|$$

elde edilir. Dolayısıyla $f \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ dır.

4.1.8. Örnek. $z \in U$, $\alpha > \lambda \geq 0$ ve $\beta \geq 0$ olmak üzere $f(z) = z + \frac{\alpha-\lambda}{2(\alpha+\beta)}\overline{z}^2$ fonksiyonu (4.5) ile verilen eşitsizliği sağladığından f fonksiyonu $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına aittir. Böylece, Teorem 4.1.4 gereği f konvekse yakın fonksiyondur. Diğer yandan, $\alpha = 3, \beta = 1$ ve $\lambda = 0.1$ seçilerek elde edilen $f_1(z) = z + 0.3625\overline{z}^2$ fonksiyonu $AH^0(3,1,0.1)$ sınıfına aittir. U açık birim diski içindeki eş merkezli çemberlerin f_1 fonksiyonu altındaki görüntüsü Şekil 4.1 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.1. $f_1(U)$ görüntü bölgesi

4.1.9. Teorem. $f \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda $\alpha > \lambda \geq 0$ ve $\beta > 0$ için,

$$|f(z)| \geq |z| + 2(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}|z|^k}{\beta k^2 + (\alpha - \beta)k}$$

$$|f(z)| \leq |z| + 2(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{\beta k^2 + (\alpha - \beta)k}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2(\alpha-\lambda)}{\beta k^2+(\alpha-\beta)k}\overline{z}^k$ fonksiyonu için kesindir.

İspat. $f\in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. Teorem 4.1.2 gereği her $|\epsilon|=1$ için $F_\epsilon\in A(\alpha,\beta,\lambda)$ dir. Böylece,

$$\alpha F_\epsilon{}'(z)+\beta z F_\epsilon{}''(z)=\frac{\alpha+(\alpha-2\beta)\omega(z)}{1-\omega(z)} \tag{4.6}$$

olacak şekilde $\omega(0)=0$ ve $|\omega(z)|<1$ özelliğinde U açık birim diskinde analitik bir ω fonksiyonu vardır. O halde (4.6) ile verilen eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} z^{\frac{\alpha}{\beta}}F_\epsilon{}'(z)&=\frac{1}{\beta}\int_0^z \zeta^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\frac{\alpha+(\alpha-2\beta)\omega(\zeta)}{1-\omega(\zeta)}d\zeta\\ &=\frac{1}{\beta}\int_0^{|z|}\left(te^{i\theta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\frac{\alpha+(\alpha-2\beta)\omega\left(te^{i\theta}\right)}{1-\omega(te^{i\theta})}e^{i\theta}dt\end{aligned}$$

bulunur ve buradan Schwarz Lemma kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|z^{\frac{\alpha}{\beta}}F_\epsilon{}'(z)\right|&=\left|\frac{1}{\beta}\int_0^{|z|}\left(te^{i\theta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\frac{\alpha+(\alpha-2\beta)\omega\left(te^{i\theta}\right)}{1-\omega(te^{i\theta})}e^{i\theta}dt\right|\\ &\le\frac{1}{\beta}\int_0^{|z|}t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\frac{\alpha+(\alpha-2\beta)t}{1-t}dt\end{aligned}$$

ve

$$\left|z^{\frac{\alpha}{\beta}}F_\epsilon{}'(z)\right|=\left|\frac{1}{\beta}\int_0^{|z|}\left(te^{i\theta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\frac{\alpha+(\alpha-2\beta)\omega\left(te^{i\theta}\right)}{1-\omega(te^{i\theta})}e^{i\theta}dt\right|$$

$$\geq \frac{1}{\beta}\int_0^{|z|} t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\, Re\left\{\frac{\alpha+(\alpha-2\beta)\omega\left(te^{i\theta}\right)}{1-\omega\left(te^{i\theta}\right)}\right\}dt$$

$$\geq \frac{1}{\beta}\int_0^{|z|} t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\,\frac{\alpha-(\alpha-2\beta)t}{1+t}\,dt$$

elde edilir. Böylece,

$$|F_\epsilon{}'(z)| = |h'(z)+\epsilon g'(z)| \leq 1+2(\alpha-\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^k}{\alpha+\beta k}$$

ve

$$|F_\epsilon{}'(z)| = |h'(z)+\epsilon g'(z)| \geq 1+2(\alpha-\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k|z|^k}{\alpha+\beta k}$$

bulunur. Ayrıca, ϵ $(|\epsilon|=1)$ keyfi olduğundan

$$|h'(z)|+|g'(z)| \leq 1+2(\alpha-\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^k}{\alpha+\beta k}$$

ve

$$|h'(z)|-|g'(z)| \geq 1+2(\alpha-\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k|z|^k}{\alpha+\beta k}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece, Γ, 0 dan z ye eğri parçası olmak üzere

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta}\right| \\
&\le \int_\Gamma (|h'(z)| + |g'(z)|)|d\zeta| \\
&\le \int_0^{|z|} \left(1 + 2(\alpha-\lambda)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^k}{\alpha+\beta k}\right) dt \\
&= |z| + 2(\alpha-\lambda)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)(\alpha+\beta k)} \\
&= |z| + 2(\alpha-\lambda)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{\beta k^2 + (\alpha-\beta)k}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &\ge \int_\Gamma (|h'(z)| - |g'(z)|)|d\zeta| \\
&\ge \int_0^{|z|} \left(1 + 2(\alpha-\lambda)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k|t|^k}{\alpha+\beta k}\right) dt \\
&= |z| + 2(\alpha-\lambda)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}|z|^k}{\beta k^2 + (\alpha-\beta)k}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

4.1.10. Örnek. Örnek 4.1.8 de, $\alpha = 1, \beta = 1$ ve $0 \le \lambda < 1$ seçilirse

$$
f_2(z) = (2\lambda - 1)z - 2(1-\lambda)\int_0^z \frac{\log(1-\xi)}{\xi} d\xi = z + 2(1-\lambda)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}
$$

fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon $AH^0(1,1,\lambda)$ sınıfı için Teorem 4.1.9 daki eşitsizliklerin kesin olduğunu gösterir.

4.1.11. Örnek. Örnek 4.1.8 de, $\alpha = 2,\ \beta = 1$ ve $\lambda = 0$ seçilirse

$$f_3(z) = \int_0^z \left[-1 - \frac{4}{\xi} - \frac{4}{\xi^2}\log(1-\xi)\right] d\xi = z + 4\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k(k+1)}$$

fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon $AH^0(2,1,\lambda)$ sınıfı için Teorem 4.1.9 un sonuçlarının kesin olduğunu gösterir.

Şimdi, $AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfının konveks birleşim ve konvolüsyon altında kapalı olduğu gösterilecek.

4.1.12. Teorem. $AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalıdır.

İspat. $i = 1,2,\dots$ için $f_i = h_i + \overline{g_i} \in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1\ (0 \le c_i \le 1)$ olsun. $i = 1,2,\dots$ için f_i fonksiyonlarının konveks birleşimleri,

$$h(z) = z + \sum_{i=1}^{\infty} c_i h_i(z) \quad ve \quad g(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i(z)$$

olmak üzere

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

şeklindedir. h ve g fonksiyonları U açık birim diskinde analitik ve $h(0) = g(0) = h'(0) - 1 = g'(0) = 0$ dır. Ayrıca

$$Re\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) - \lambda\} \quad = Re\left\{\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\alpha h_i{}'(z) + \beta z h_i{}''(z) - \lambda)\right\}$$

$$> \sum_{i=1}^{\infty} c_i|\alpha g_i{}'(z) + \beta z g_i{}''(z)|$$

$$\geq |\alpha g'(z) + \beta z g''(z)|$$

elde edilir. Dolayısıyla $f \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ dır.

4.1.13. Lemma. $F \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ ise $Re\left\{\frac{F(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k$ olmak üzere $F \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda

$$Re\left\{\alpha + \sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha + \beta(k-1)]A_k z^{k-1}\right\} > \lambda \quad (z \in U)$$

ya da denk olarak

$$P(z) = 1 + \frac{1}{2(\alpha - \lambda)} \sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha + \beta(k-1)]A_k z^{k-1}$$

olmak üzere U açık birim diskinde $Re\{P(z)\} > \frac{1}{2}$ dir. Diğer yandan, $k \geq 2$ için

$$u_0 = 1 \; ve \; u_{k-1} = \frac{2(\alpha - \lambda)}{k[\alpha + \beta(k-1)]}$$

olarak tanımlı $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ dizisi konveks sıfır dizisidir. O halde, Lemma 2.1.12. gereği

$$Q(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2(\alpha - \lambda)}{k[\alpha + \beta(k-1)]} z^{k-1}$$

fonksiyonu U' da analitik ve $Re\{Q(z)\} > 0$ dır. Bu durumda,

$$\frac{F(z)}{z} = P(z) * \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2(\alpha-\lambda)}{k[\alpha+\beta(k-1)]} z^{k-1}\right)$$

olduğundan, Lemma 2.1.13 kullanılarak $Re\left\{\frac{F(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$ elde edilir.

4.1.14. Lemma. $i = 1,2$ için $F_i \in A(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. Bu taktirde $F_1 * F_2 \in A(\alpha,\beta,\lambda)$ dır.

İspat. $F_1(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k$ ve $F_2(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} B_k z^k$ olsun. Bu durumda F_1 ve F_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$F(z) = (F_1 * F_2)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k B_k z^k$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $F'(z) = F_1'(z) * \frac{F_2(z)}{z}$ ve $zF''(z) = zF_1''(z) * \frac{F_2(z)}{z}$ olduğundan

$$\frac{\alpha F'(z) + \beta z F''(z) - \lambda}{\alpha - \lambda} = \left(\frac{\alpha F_1'(z) + \beta z F_1''(z) - \lambda}{\alpha - \lambda}\right) * \frac{F_2(z)}{z}$$

yazılabilir. Böylece, $F_1 \in A(\alpha,\beta,\lambda)$ olduğundan

$$Re\left\{\frac{\alpha F_1'(z) + \beta z F_1''(z) - \lambda}{\alpha - \lambda}\right\} > 0 \quad (z \in U)$$

ve Lemma 4.1.13 gereği U' da $Re\left\{\frac{F_2(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$ elde edilir. Bu taktirde Lemma 2.1.13 ün kullanılmasıyla U' da $Re\{\alpha F'(z) + \beta z F''(z) - \lambda\} > 0$ bulunur. Dolayısıyla $F = F_1 * F_2$ fonksiyonu $A(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir.

4.1.15. Teorem. $i = 1,2$ için $f_i \in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. Bu taktirde $f_1 * f_2$, $AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir.

İspat. $i = 1,2$ için $f_i = h_i + g_i \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu $f_1 * f_2 = h_1 * h_2 + \overline{g_1 * g_2}$ olarak tanımlıdır. $f_1 * f_2 \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olduğunu göstermek için her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $F_\epsilon = h_1 * h_2 + \epsilon(g_1 * g_2) \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ olduğunu göstermek gerekir. Lemma 4.1.14 gereği $A(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfı konvolüsyon altında kapalı olduğundan

$$F_1 = (h_1 - g_1) * (h_2 - \epsilon g_2) \quad \text{ve} \quad F_2 = (h_1 + g_1) * (h_2 + \epsilon g_2)$$

olmak üzere F_1 ve F_2 fonksiyonları $A(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına aittir. $A(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalı olduğundan

$$F_\epsilon = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = h_1 * h_2 + \epsilon(g_1 * g_2)$$

$A(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına aittir. Böylece, $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ konvolüsyon altında kapalıdır.

4.1.16. Teorem. $f \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$, $\varphi \in A$ ve $z \in U$ için $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ ise $f \,\check{*}\, \varphi \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ dır.

İspat. $f \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ ise her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ dır. $f \,\check{*}\, \varphi \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olduğunu göstermek için her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $G = h * \varphi + \epsilon(g * \varphi) \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ olduğunu göstermek gerekir. $G = F_\epsilon * \varphi$ olduğundan

$$\frac{\alpha G'(z) + \beta z G''(z) - \lambda}{\alpha - \lambda} = \left(\frac{\alpha F_\epsilon'(z) + \beta z F_\epsilon''(z) - \lambda}{\alpha - \lambda}\right) * \frac{\varphi(z)}{z}$$

yazılabilir. U açık birim diskinde $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ ve $Re\{\alpha(z) + \beta z F_\epsilon''(z) - \lambda\} > 0$ olduğundan Lemma 2.1.13 gereği $G \in A(\alpha, \beta, \lambda)$ elde edilir.

4.1.17. Sonuç. $z \in U$ için $\varphi \in K$ ve $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $f \,\check{*}\, \varphi$ fonksiyonu $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına aittir.

Son olarak, eş analitik kısmı Gauss hipergeometrik fonksiyonu içeren harmonik fonksiyonun $AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına ait olması için yeter şart verilecektir.

4.1.18. Teorem. $\mathfrak{c}$ pozitif reel sayı, $\mathfrak{ab}>0$ için $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in(-1,\infty)$ veya $\mathfrak{b}=\bar{\mathfrak{a}}$ için $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere $t_1(z)=z+\overline{z^2F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};z)}$, $t_2(z)=z+\overline{z(F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};z)-1)}$ ve $t_3(z)=z+\overline{\int_0^z F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};\zeta)d\zeta}$ olsun. Bu durumda

i. $\mathfrak{c}>Re(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+3$ ve

$$\left[2(\alpha+\beta)+\frac{(\alpha+4\beta)\mathfrak{ab}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}+\frac{\beta(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2}\right]F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)\le\alpha-\lambda$$

ise t_1 fonksiyonu $AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir.

ii. $\mathfrak{c}>Re(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+3$ ve

$$\left[\alpha+\frac{(\alpha+2\beta)\mathfrak{ab}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}+\frac{\beta(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2}\right]F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)\le 2\alpha-\lambda$$

ise t_2 fonksiyonu $AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir.

iii. $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\neq 1$, $c>Re(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+2$ ve

$$\left[\frac{\alpha(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{b}-1)}+\alpha+2\beta+\frac{\mathfrak{ab}\beta}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}\right]F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)\le\alpha-\lambda+\frac{\alpha(\mathfrak{c}-1)}{(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{b}-1)}$$

ise t_3 fonksiyonu $AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir.

İspat.

(i) $k\ge 2$ için $S_{1,k}=\frac{(\mathfrak{a})_{k-2}(\mathfrak{b})_{k-2}}{(\mathfrak{c})_{k-2}(k-2)!}$ olmak üzere $t_1(z)=z+\overline{z^2F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};z)}$ $=z+\overline{\sum_{k=2}^{\infty}S_{1,k}z^k}$ olsun. $t_1\in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olduğunu göstermek için Teorem 4.1.7 gereği

$$\sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha+\beta(k-1)]\left|S_{1,k}\right| \leq \alpha-\lambda$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Lemma 2.1.29 ve (2.10) ile verilen Gauss formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha+\beta(k-1)]\left|S_{1,k}\right| &= \sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha+\beta(k-1)] \frac{(\mathfrak{a})_{k-2}(\mathfrak{b})_{k-2}}{(\mathfrak{c})_{k-2}(k-2)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)[\alpha+\beta(k+1)] \frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k} k!} \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k} k!} + (\alpha+\beta) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k} k!} \\
&\quad +\beta \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k} k!} \\
&= \alpha F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1) \\
&\qquad +(\alpha+\beta)\left[\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}+1\right] F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1) \\
&\quad +\beta\left[\frac{(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-2)_2}+\frac{3\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}+1\right] F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $k \geq 2$ için $S_{2,k} = \frac{(\mathfrak{a})_{k-1}(\mathfrak{b})_{k-1}}{(\mathfrak{c})_{k-1}(k-1)!}$ olmak üzere $t_2(z) = z + \overline{z(F(a,b,c;z)-1)}$ $= z + \overline{\sum_{k=2}^{\infty} S_{2,k} z^k}$ olsun. $t_2 \in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olduğunu göstermek için Teorem 4.1.17 gereği

$$\sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha+\beta(k-1)]\left|S_{2,k}\right| \leq \alpha-\lambda$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Lemma 2.1.29 ve (2.10) ile verilen Gauss formülü kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha+\beta(k-1)]|S_{2,k}|$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha+\beta(k-1)]\frac{(\mathfrak{a})_{k-1}(\mathfrak{b})_{k-1}}{(\mathfrak{c})_{k-1}(k-1)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)[\alpha+\beta(k+1)]\frac{(\mathfrak{a})_{k+1}(\mathfrak{b})_{k+1}}{(\mathfrak{c})_{k+1}(k+1)!}$$

$$=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_{k+1}(\mathfrak{b})_{k+1}}{(\mathfrak{c})_{k+1}(k+1)!}+(\alpha+2\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_{k+1}(\mathfrak{b})_{k+1}}{(\mathfrak{c})_{k+1}k!}$$

$$+\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_{k+1}(\mathfrak{b})_{k+1}}{(\mathfrak{c})_{k+1}(k-1)!}$$

$$=\alpha F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)-\alpha$$

$$+(\alpha+2\beta)\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}F(\mathfrak{a}+1,\mathfrak{b}+1,\mathfrak{c}+1;1)$$

$$+\beta\frac{(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c})_2}F(\mathfrak{a}+2,\mathfrak{b}+2,\mathfrak{c}+2;1)$$

bulunur.

(iii) $k\geq 2$ için $S_{3,k}=\frac{(\mathfrak{a})_{k-2}(\mathfrak{b})_{k-2}}{(\mathfrak{c})_{k-2}(k-1)!}$ olmak üzere $t_3(z)=z+\overline{\int_0^z F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};\zeta)d\zeta}$ $=z+\overline{\sum_{k=2}^{\infty}S_{3,k}z^k}$ olsun. Bu durumda, ispat (ii)deki adımlar kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha+\beta(k-1)]|S_{2,k}| = \sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha+\beta(k-1)]\frac{(\mathfrak{a})_{k-2}(\mathfrak{b})_{k-2}}{(\mathfrak{c})_{k-2}(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)[\alpha+\beta(k+1)]\frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k}(k+1)!}$$

$$= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k}(k+1)!} + (\alpha+2\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k}k!}$$

$$+\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k}(k-1)!}$$

$$= \frac{\alpha(\mathfrak{c}-1)}{(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{b}-1)}[F(\mathfrak{a}-1,\mathfrak{b}-1,\mathfrak{c}-1;1)-1]$$

$$+(\alpha+2\beta)F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1) + \frac{\beta\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)$$

elde edilir.

4.1.19. Sonuç. $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{c}$ pozitif reel sayı ve

$$T_1(z) = z + \overline{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-k+1)_k}{(\mathfrak{c})_k}z^{k+2}},$$

$$T_2(z) = z + \overline{\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-k+1)_k}{(\mathfrak{c})_k}z^{k+1}},$$

$$T_3(z) = z + \overline{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-k+1)_k}{(k+1)(\mathfrak{c})_k}z^{k+2}}$$

olsun. Bu durumda

(i) $\left[2(\alpha+\beta)+\frac{(\alpha+4\beta)m^2}{c+2m-1}+\frac{\beta m^2(m-1)^2}{(c+2m-1)(c+2m-2)}\right]F(-m,-m,c;1)\leq\alpha-\lambda$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_1\in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$,

(ii) $\left[\alpha+\frac{(\alpha+2\beta)m^2}{c+2m-1}+\frac{\beta m^2(m-1)^2}{(c+2m-1)(c+2m-2)}\right]F(-m,-m,c;1)\leq 2\alpha-\lambda$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_2\in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$,

(iii) $\left[\frac{\alpha(c+2m)}{(m+1)^2}+(\alpha+2\beta)+\frac{\beta m^2}{c+2m-1}\right]F(-m,-m,c;1)\leq\alpha-\lambda+\frac{\alpha(c-1)}{(m+1)^2}$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_3\in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ dır.

Şimdi, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı verilecektir.

4.1.20. Teorem. $f=h+\overline{g}\in AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$r^*=\inf_{k\geq 2}\left(\frac{1}{2(\alpha-\lambda)}\{\alpha+\beta(k-1)\}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere $|z|<r^*$ için f fonksiyonu yıldızıl fonksiyondur.

İspat. f fonksiyonunun, U_{r^*} diskinde yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $z\in U_{r^*}$ için

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(|a_k|+|b_k|)|z|^{k-1}\leq 1 \qquad (4.7)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Ayrıca Teorem 4.1.6 gereği, (4.7) ile verilen şartın sağlanması için

$$|z|^{k-1}\leq\frac{\alpha+\beta(k-1)}{2(\alpha-\lambda)}$$

ya da

$$|z| \leq \left(\frac{1}{2(\alpha-\lambda)}\{\alpha+\beta(k-1)\}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (k=2,3,\dots)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Böylece

$$r^{*} = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1}{2(\alpha-\lambda)}\{\alpha+\beta(k-1)\}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

için f, $U_{r^{*}}$ diskinde yıldızıl fonksiyondur.

Teorem 4.1.20 nin ispatında kullanılan yöntemler kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.21. Teorem. $f = h + \overline{g} \in AH^{0}(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$r^{c} = \inf_{k\geq 2}\left(\frac{1}{2(\alpha-\lambda)}\left\{\frac{\alpha+\beta(k-1)}{k}\right\}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

olmak üzere $|z| < r^{c}$ için f fonksiyonu konveks fonksiyondur.

4.2. $\boldsymbol{RH^{0}(\alpha,\beta,\lambda)}$ Sınıfı

Bu bölümde, üçüncü mertebeden diferensiyel eşitsizlik kullanılarak tanımlanan ve harmonik fonksiyonların alt sınıfı olan yeni bir sınıf tanıtılacak ve bu sınıfa ait fonksiyonların konvekse yakın oldukları gösterilecektir. Ayrıca, tanımlanan sınıfın katsayı sınırları, büyüme teoremi, konveks birleşim ve konvolüsyon altında kapalılık gibi temel özellikleri incelenecektir.

4.2.1. Tanım. $z \in U$ ve $0 \leq \lambda < \alpha \leq \beta$ için

$$Re\left\{\alpha f'(z) + \beta z f''(z) + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) z^2 f'''(z) - \lambda\right\} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan $f \in A$ fonksiyonlarının sınıfı $R(\alpha, \beta, \lambda)$ ile gösterilir. Bu sınıf Al-Refai (2019) tarafından çalışılan sınıfın özel halidir.

Rosihan ve ark. (2011, 2018), $R(1, \beta, \lambda)$ sınıfının yıldızıllık ve konvekslik özelliklerini çalıştı.

4.2.2. Tanım. $z \in U$ ve $0 \leq \lambda < \alpha \leq \beta$ için

$$\begin{aligned} Re\left\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) z^2 h'''(z) - \lambda\right\} \\ > \left|\alpha g'(z) + \beta z g''(z) + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) z^2 g'''(z)\right| \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitsizliğini sağlayan $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonlarının sınıfı $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ ile gösterilir. (Çakmak ve ark., 2021)

Parametrelerin özel seçilmesiyle $WH^0 \equiv WH^0(1) \equiv RH^0(1,1,0)$, $WH^0(1, \lambda) \equiv RH^0(1,1,\lambda)$ ve $RH^0\left(\beta, \frac{\beta-1}{2}\right) \equiv RH^0(1, \beta, 0)$ elde edilir.

4.2.3. Teorem. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olması için gerek ve yeter şart her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in R(\alpha, \beta, \lambda)$ olmasıdır.

İspat. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ ve $z \in U$ için

$$Re\left\{\alpha F_\epsilon'(z) + \beta z F_\epsilon''(z) + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) z^2 F_\epsilon'''(z)\right\}$$

$$= Re\left\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 h'''(z)\right\}$$

$$+\epsilon\left(\alpha g'(z) + \beta z g''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 g'''(z)\right)$$

$$> Re\left\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 h'''(z)\right\}$$

$$-\left|\alpha g'(z) + \beta z g''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 g'''(z)\right| > \lambda$$

bulunur. Böylece, her $\epsilon\ (|\epsilon| = 1)$ için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ dır. Tersine, $F_\epsilon = h + \epsilon g \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ ise $z \in U$ için

$$Re\left\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 h'''(z)\right\}$$
$$> Re\left\{-\epsilon\big(\alpha g'(z) + \beta z g''(z)\big) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 g'''(z)\right\} + \lambda$$

elde edilir. Buradan $\epsilon\ (|\epsilon| = 1)$ parametresinin uygun bir seçimiyle

$$Re\left\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 h'''(z) - \lambda\right\}$$
$$> \left|\alpha g'(z) + \beta z g''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 g'''(z)\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu $RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir.

4.2.4. Lemma. $F \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ ise $Re\{F'(z)\} > 0$ ve böylece F, U açık birim diskinde konvekse yakındır.

İspat. $F \in R(\alpha, \beta, \lambda)$ ve $\Psi(z) = \frac{2\alpha F'(z) + 2\beta z F''(z) + (\beta - \alpha) z^2 F'''(z) - 2\lambda}{2(\alpha - \lambda)}$ olsun. Bu taktirde $z \in U$ için $Re\{\Psi(z)\} > 0$ eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan ω, U açık birim diskinde analitik, $\omega(0) = 0$ ve

$$F'(z) = \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} \quad (\omega(z) \neq 1)$$

özelliğinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $z \in U$ için $|\omega(z)| < 1$ olduğu gösterilmelidir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= \frac{2\alpha F'(z) + 2\beta z F''(z) + (\beta - \alpha) z^2 F'''(z) - 2\lambda}{2(\alpha - \lambda)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha - \lambda} \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} + \frac{2\beta}{\alpha - \lambda} \frac{z\omega'(z)}{\big(1 - \omega(z)\big)^2} \\
&\quad + \frac{\beta - \alpha}{\alpha - \lambda} \frac{z^2 \left[\omega''(z)\big(1 - \omega(z)\big) + 2\big(\omega'(z)\big)^2\right]}{\big(1 - \omega(z)\big)^3} - \frac{\lambda}{\alpha - \lambda} \\
&= \frac{1}{\alpha - \lambda} \left(\alpha \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} + 2\beta \frac{z\omega'(z)}{\big(1 - \omega(z)\big)^2} \right. \\
&\quad \left. + (\beta - \alpha) \frac{z\omega'(z)}{\big(1 - \omega(z)\big)^2} \frac{z\omega''(z)}{\omega'(z)} + 2(\beta - \alpha) \frac{\big(z\omega'(z)\big)^2}{\big(1 - \omega(z)\big)^3} - \lambda \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. ω, $\omega(0) = 0$ özelliğinde ve U açık birim diskinde analitik olduğundan

$$\max_{|z| \leq |z_0|} |\omega(z)| = |\omega(z_0)| = 1$$

olacak şekilde bir $z_0 \in U$ vardır. Böylece Lemma 2.1.17 gereği

$$\omega(z_0) = e^{i\theta}, \;\; z_0 \omega'(z_0) = m\omega(z_0) = me^{i\theta} \quad (m \geq 1, 0 < \theta < 2\pi)$$

ve

$$Re\left\{\frac{z_0\omega''(z_0)}{\omega'(z_0)}\right\} \geq m-1$$

elde edilir. O halde $z_0 \in U$ için

$$\begin{aligned}
Re\{\Psi(z)\} &= \frac{1}{\alpha-\lambda} Re\left\{\alpha\frac{1+\omega(z_0)}{1-\omega(z_0)} + 2\beta\frac{z\omega'(z_0)}{\left(1-\omega(z_0)\right)^2}\right. \\
&\quad \left. +(\beta-\alpha)\frac{z_0\omega'(z_0)}{\left(1-\omega(z_0)\right)^2}\frac{z_0\omega''(z_0)}{\omega'(z_0)} + 2(\beta-\alpha)\frac{\left(z_0\omega'(z_0)\right)^2}{\left(1-\omega(z_0)\right)^3} - \lambda\right\} \\
&= \frac{1}{\alpha-\lambda}\left[\frac{-\beta m}{1-cos\theta} - \frac{(\beta-\alpha)m}{2(1-cos\theta)} Re\left\{\frac{z_0\omega''(z_0)}{\omega'(z_0)}\right\} + \frac{(\beta-\alpha)m^2}{2(1-cos\theta)} - \lambda\right] \\
&\leq \frac{1}{\alpha-\lambda}\left[\frac{-\beta m}{1-cos\theta} + \frac{(\beta-\alpha)m}{2(1-cos\theta)}(1-m) + \frac{(\beta-\alpha)m^2}{2(1-cos\theta)} - \lambda\right] \\
&= -\frac{1}{\alpha-\lambda}\left[\frac{(\beta+\alpha)m}{2(1-cos\theta)} + \lambda\right] < 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $Re\{\Psi(z)\} > 0$ olması ile çelişir. Böylece, her $z \in U$ için $|\omega(z)| < 1$ ve dolayısıyla $Re\{F'(z)\} > 0$ dır.

4.2.5. Teorem. $RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına ait fonksiyonlar U açık birim diskinde konvekse yakındır.

İspat. Lemma 4.2.4 gereği, her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ fonksiyonu U açık birim diskinde konvekse yakındır. Teorem 2.2.13 ve Teorem 4.2.3 birlikte kullanılarak $RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına ait fonksiyonların U açık birim diskinde konvekse yakın olduğu elde edilir.

4.2.6. Teorem. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda, $k \geq 2$ için

$$|b_k| \leq \frac{2(\alpha - \lambda)}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç kesin olup eşitlik $f(z) = z + \frac{2(\alpha-\lambda)}{k^2[2\alpha+(\beta-\alpha)(k-1)]}\overline{z}^k$ fonksiyonu için sağlanır.

İspat. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. g fonksiyonunun seri açılımı kullanılarak

$$r^{k-1}k^2\left[\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2}(k-1)\right]|b_k|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\alpha g'(re^{i\theta}) + \beta re^{i\theta}g''(re^{i\theta}) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)r^2e^{2i\theta}g'''(re^{i\theta})\right| d\theta$$

$$< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left\{\alpha h'(re^{i\theta}) + \beta re^{i\theta}h''(re^{i\theta}) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)r^2e^{2i\theta}h'''(re^{i\theta}) - \lambda\right\} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left\{\alpha - \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} k^2\left[\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2}(k-1)\right]a_k r^{k-1}e^{i(k-1)\theta}\right\} d\theta$$

$$= \alpha - \lambda$$

bulunur. Buradan $r \to 1^-$ için verilen katsayı sınırı elde edilir.

4.2.7. Teorem. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda, $k \geq 2$ için

i.
$$|a_k| \leq \frac{4(\alpha - \lambda)}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]}$$

ii. $$|a_k| + |b_k| \leq \frac{4(\alpha - \lambda)}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]}$$

iii. $$\big||a_k| - |b_k|\big| \leq \frac{4(\alpha - \lambda)}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu sonuçlar $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4(\alpha-\lambda)}{k^2[2\alpha+(\beta-\alpha)(k-1)]} z^k$ fonksiyonu için kesindir.

İspat i. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. O halde Teorem 4.2.3 gereği her ϵ ($|\epsilon| = 1$) için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in R(\alpha, \beta, \lambda)$ bulunur. Böylece, her $|\epsilon| = 1$ için

$$Re\left\{\alpha(h+\epsilon g)' + \beta z(h+\epsilon g)'' + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 (h+\epsilon g)'''\right\} > \lambda \quad (z \in U)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\alpha h'(z) + \beta z h''(z) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 h'''(z)$$

$$+\epsilon\left(\alpha g'(z) + \beta z g''(z) \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) z^2 g'''(z)\right) \tag{4.9}$$

$$= \lambda + (\alpha - \lambda) p(z)$$

olacak şekilde U' da $Re\{P(z)\} > 0$ özelliğinde ve $P(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k z^k$ seri açılımına sahip bir P analitik fonksiyonu vardır. Bu durumda (4.9) ile verilen eşitliği sağlayan fonksiyonların seri açılımları kullanılarak $k \geq 2$ için

$$k^2\left[\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2}(k-1)\right](a_k + \epsilon b_k) = (\alpha - \lambda) P_{k-1}$$

bulunur. Böylece, $k \geq 1$ için $|P_k| \leq 2$ olduğundan ϵ $(|\epsilon| = 1)$ karmaşık sayısının uygun seçilmesiyle ispat tamamlanır.

ii ve iii nin ispatı, ispat i' de kullanılan adımlar takip edilerek benzer biçimde yapılabilir.

Aşağıdaki teorem, bir fonksiyonun $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına ait olması için yeter şartı vermektedir.

4.2.8. Teorem. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)](|a_k| + |b_k|) \leq 2(\alpha - \lambda) \tag{4.10}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonları $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına aittir.

İspat. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ olsun. Bu durumda (4.10) kullanılarak,

$$Re\left\{\alpha h'(z) + \beta z h''(z) + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) z^2 h'''(z) - \lambda\right\}$$

$$= Re\left\{\alpha - \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left[\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}(k-1)\right] a_k z^{k-1}\right\}$$

$$> \alpha - \lambda - \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left[\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}(k-1)\right] |a_k|$$

$$\geq \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left[\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}(k-1)\right] |b_k|$$

$$> \left|\sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left[\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}(k-1)\right] b_k z^{k-1}\right|$$

$$= \left|\alpha g'(z) + \beta z g''(z) + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) z^2 g'''(z)\right|$$

elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına aittir.

4.2.9. Sonuç. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonu (4.10) eşitsizliğini sağlıyorsa f konvekse yakın stabil harmonik fonksiyondur.

4.2.10. Teorem. $f \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda,

$$|f(z)| \quad \geq |z| + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}|z|^k}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]}$$

$$|f(z)| \quad \leq |z| + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4(\alpha-\lambda)}{k^2[2\alpha+(\beta-\alpha)(k-1)]} \overline{z}^k$ fonksiyonu için kesindir.

İspat. $f \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Teorem 4.2.3 kullanılarak, her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $F_\epsilon \in R(\alpha, \beta, \lambda)$ ve

$$\Psi(z) = \alpha F_\epsilon{}'(z) + \beta z F_\epsilon{}''(z) + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) z^2 F_\epsilon{}'''(z)$$

olmak üzere $Re\{\Psi(z)\} > 0$ elde edilir. Ayrıca

$$\Psi(z) \quad = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \left[\frac{2\alpha}{\beta - \alpha} F_\epsilon{}'(z) + \left(\frac{2\alpha}{\beta - \alpha} + 2\right) z F_\epsilon{}''(z) + z^2 F_\epsilon{}'''(z)\right]$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left[\frac{2\alpha}{\beta-\alpha}\left(zF_{\epsilon}{}'(z)\right)' + \left(z^2F_{\epsilon}{}''(z)\right)'\right]$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left[\frac{2\alpha}{\beta-\alpha}\left(zF_{\epsilon}{}'(z)\right) + \left(z^2F_{\epsilon}{}''(z)\right)\right]'$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left[z^{2-\frac{2\alpha}{\beta-\alpha}}\left(z^{\frac{2\alpha}{\beta-\alpha}}F_{\epsilon}{}'(z)\right)'\right]'$$

olduğundan

$$\left(\frac{2}{\beta-\alpha}\right)z^{\frac{2\alpha}{\beta-\alpha}-2}\int_0^z \Psi(\varpi)\,d\varpi = \left(z^{\frac{2\alpha}{\beta-\alpha}}F_{\epsilon}{}'(z)\right)' \qquad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) eşitliğinde $\varpi = r^{\frac{\beta-\alpha}{2}}z$ değişken değişimi yapılır ve integral yeniden hesaplanırsa

$$F_{\epsilon}{}'(z) = \frac{1}{\alpha}\int_0^1\int_0^1 \Psi\left(v^{\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}}uz\right)dudv \qquad (4.12)$$

bulunur. Diğer yandan, $Re\left\{\frac{\Psi(z)-\lambda}{\alpha-\lambda}\right\} > 0$ olduğundan $\Psi(z) \prec \frac{\alpha+(\alpha-2\lambda)z}{1-z}$ yazılabilir. O halde

$$\Phi(z) = \int_0^1\int_0^1 \frac{dudv}{1-uv^{\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}}z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)\left(1+\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}k\right)}$$

ve

$$h(z) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha+(\alpha-2\lambda)z}{1-z}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(\alpha-\lambda)}{\alpha}z^k$$

denirse, (4.12) eşitliğinden

$$F_{\epsilon}'(z) \prec (\Phi * h)(z)$$

$$= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)\left(1 + \frac{\beta - \alpha}{2\alpha}k\right)}\right) * \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\alpha - \lambda)}{\alpha} z^k\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\alpha - \lambda)}{k^2(\beta - \alpha) + k(\beta + \alpha) + 2\alpha} z^k$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |F_{\epsilon}'(z)| &= |h'(z) + \epsilon g'(z)| \\ &\le 1 + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k^2(\beta - \alpha) + k(\beta + \alpha) + 2\alpha} \end{aligned} \tag{4.13}$$

ve

$$\begin{aligned} |F_{\epsilon}'(z)| &= |h'(z) + \epsilon g'(z)| \\ &\ge 1 + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k |z|^k}{k^2(\beta - \alpha) + k(\beta + \alpha) + 2\alpha} \end{aligned}$$

olduğundan

$$|h'(z)| + |g'(z)| \le 1 + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k^2(\beta - \alpha) + k(\beta + \alpha) + 2\alpha}$$

ve

$$|h'(z)| - |g'(z)| \geq 1 + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k |z|^k}{k^2(\beta - \alpha) + k(\beta + \alpha) + 2\alpha}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece, Γ, 0'dan z'ye doğru parçası olmak üzere

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right| \\ &\leq \int_{\Gamma} (|h'(z)| + |g'(z)|)|d\zeta| \\ &\leq \int_0^{|z|} \left(1 + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^k}{k^2(\beta - \alpha) + k(\beta + \alpha) + 2\alpha} \right) dt \\ &= |z| + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)(k^2(\beta - \alpha) + k(\beta + \alpha) + 2\alpha)} \\ &= |z| + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq \int_{\Gamma} (|h'(z)| - |g'(z)|)|d\zeta| \\ &\geq \int_0^{|z|} \left(1 + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k |t|^k}{\alpha + \beta k} \right) dt \\ &= |z| + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} |z|^k}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, $RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfının konveks birleşim ve konvolüsyon altında kapalı olduğu gösterilecek.

4.2.11. Teorem. $RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalıdır.

İspat. $i=1,2,\ldots$ için $f_i=h_i+\overline{g_i}\in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ ve $\sum_{i=1}^{\infty}c_i=1$ $(0\le c_i\le 1)$ olsun. $i=1,2,\ldots$ için f_i fonksiyonlarının konveks birleşimleri

$$h(z)=z+\sum_{i=1}^{\infty}c_ih_i(z)\quad ve\quad g(z)=\sum_{i=1}^{\infty}c_ig_i(z)$$

olmak üzere

$$f(z)=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i(z)=h(z)+\overline{g(z)}$$

olarak yazılabilir. h ve g fonksiyonları U açık birim diskinde analitik, $h(0)=g(0)=0$, $h'(0)-1=g'(0)=0$ ve

$$Re\left\{\alpha h'(z)+\beta zh''(z)+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)z^2h'''(z)-\lambda\right\}$$

$$=Re\left\{\sum_{i=1}^{\infty}c_i\left(\alpha h_i{}'(z)+\beta zh_i{}''(z)+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)z^2h_i{}'''(z)-\lambda\right)\right\}$$

$$>\sum_{i=1}^{\infty}c_i\left|\alpha g_i{}'(z)+\beta zg_i{}''(z)+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)z^2g_i{}'''(z)\right|$$

$$\ge|\alpha g'(z)+\beta zg''(z)+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)z^2g'''(z)|$$

olduğundan $f\in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ dır.

4.2.12. Lemma. $F \in R(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda $Re\left\{\frac{F(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $F \in R(\alpha, \beta, \lambda)$ ve $F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k$ biçiminde seri açılımına sahip fonksiyon olsun. Bu durumda $z \in U$ için

$$Re\left\{\alpha + \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left[\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}(k-1)\right] A_k z^{k-1}\right\} > \lambda$$

eşitsizliği ya da denk olarak

$$P(z) = 1 + \frac{1}{4(\alpha - \lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 [2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)] A_k z^{k-1}$$

olmak üzere U açık birim diskinde $Re\{P(z)\} > \frac{1}{2}$ eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan, $k \geq 2$ için

$$u_0 = 1 \; ve \; u_{k-1} = \frac{4(\alpha - \lambda)}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]}$$

şeklinde tanımlı $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ dizisi konveks sıfır dizidir. O halde, Lemma 2.1.12 gereği

$$Q(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\alpha - \lambda)}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]} z^{k-1}$$

fonksiyonu U' da analitik ve $Re\{Q(z)\} > 0$ dır. Bu durumda,

$$\frac{F(z)}{z} = P(z) * \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\alpha - \lambda)}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]} z^{k-1}\right)$$

olduğundan, Lemma 2.1.13 kullanılarak $Re\left\{\frac{F(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$ bulunur.

4.2.13. Lemma. $i=1,2$ için $F_i \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. Bu taktirde $F_1 * F_2 \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ dır.

İspat. $F_1(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k$ ve $F_2(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} B_k z^k$ olsun. Bu durumda F_1 ve F_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$F(z) = (F_1 * F_2)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k B_k z^k$$

şeklindedir. Ayrıca, $F'(z) = F_1'(z) * \frac{F_2(z)}{z}$, $zF''(z) = zF_1''(z) * \frac{F_2(z)}{z}$ ve $z^2F'''(z) = z^2F_1'''(z) * \frac{F_2(z)}{z}$ olduğundan

$$\frac{2\alpha F'(z) + 2\beta zF''(z) + (\beta-\alpha)z^2F'''(z) - 2\lambda}{2(\alpha-\lambda)}$$
$$= \left(\frac{2\alpha F_1'(z) + 2\beta zF_1''(z) + (\beta-\alpha)z^2F_1'''(z) - 2\lambda}{2(\alpha-\lambda)}\right) * \frac{F_2(z)}{z}$$

yazılabilir. Böylece, $F_1 \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ olduğundan $z \in U$ için

$$Re\left\{\frac{2\alpha F_1'(z) + 2\beta zF_1''(z) + (\beta-\alpha)z^2F_1'''(z) - 2\lambda}{2(\alpha-\lambda)}\right\} > 0$$

eşitsizliği sağlanır ve Lemma 4.2.12 kullanılarak $Re\left\{\frac{F_2(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla, Lemma 2.1.13 gereği $z \in U$ için $Re\left\{\frac{2\alpha F'(z)+2\beta zF''(z)+(\beta-\alpha)z^2F'''(z)-\lambda}{2(\alpha-\lambda)}\right\} > 0$ bulunur. Yani $F = F_1 * F_2$ fonksiyonu $R(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir.

4.2.14. Teorem. $i=1,2$ için $f_i \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. Bu taktirde $f_1 * f_2 \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ dır.

İspat. $i=1,2$ için $f_i = h_i + \overline{g_i} \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu $f_1 * f_2 = h_1 * h_2 + \overline{g_1 * g_2}$ olarak tanımlıdır. $f_1 * f_2 \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olduğunu göstermek için her ϵ ($|\epsilon| = 1$) için $F_\epsilon = h_1 * h_2 + \epsilon(g_1 * g_2) \in R(\alpha,\beta,\lambda)$

olduğu gösterilmelidir. Lemma 4.2.13 gereği $R(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfı konvolüsyon altında kapalı olduğundan

$$F_1 = (h_1 - g_1) * (h_2 - \epsilon g_2) \quad ve \quad F_2 = (h_1 + g_1) * (h_2 + \epsilon g_2)$$

olmak üzere F_1 ve F_2 fonksiyonları $R(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir. $R(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfı konveks birleşim altında kapalı olduğundan

$$F_\epsilon = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = h_1 * h_2 + \epsilon(g_1 * g_2)$$

$R(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir. Böylece, $RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ konvolüsyon altında kapalıdır.

4.2.15. Teorem. $f \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$, $\varphi \in A$ ve $z \in U$ için $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ ise $f \tilde{*} \varphi$ fonksiyonu $RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına aittir.

İspat. $f \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ ise her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $F_\epsilon = h + \epsilon g \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ dır. $f \tilde{*} \varphi \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olduğunu göstermek için her ϵ $(|\epsilon| = 1)$ için $G = h * \varphi + \epsilon(g * \varphi) \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ olduğu gösterilmelidir. $G = F_\epsilon * \varphi$ olduğundan

$$\frac{2\alpha G'(z) + 2\beta z G''(z) + (\beta - \alpha) z^2 G'''(z) - 2\lambda}{2(\alpha - \lambda)}$$
$$= \left(\frac{2\alpha F_\epsilon'(z) + 2\beta z F_\epsilon''(z) + (\beta - \alpha) z^2 F_\epsilon'''(z) - 2\lambda}{2(\alpha - \lambda)}\right) * \frac{\varphi(z)}{z}$$

yazılabilir. U açık birim diskinde $Re\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ ve $Re\{2\alpha F_\epsilon'(z) + 2\beta z F_\epsilon''(z) + (\beta - \alpha) z^2 F_\epsilon'''(z) - 2\lambda\} > 0$ olduğundan Lemma 2.1.13 gereği $G \in R(\alpha,\beta,\lambda)$ elde edilir.

Şimdi, $RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfının tam konvekslik ve tam yıldızıllık yarıçapı elde edilecektir.

4.2.16. Lemma. $0 < \rho < 1$ için

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{\rho(2-\rho)}{(1-\rho)^2} \tag{4.14}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2\rho^{k-1} = \frac{\rho(4-3\rho+\rho^2)}{(1-\rho)^3} \tag{4.15}$$

eşitlikleri sağlanır.

4.2.17. Teorem. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu, $|z| < \rho_c$ için tam konvekstir. Burada ρ_c,

$$\begin{aligned} pc(\rho) = {} & (-\beta - 2\alpha + \lambda)\rho^3 + (3\beta + 6\alpha - 3\lambda)\,\rho^2 \\ & + (-3\beta - 7\alpha + 4\lambda)\rho + \beta + \alpha \end{aligned} \tag{4.16}$$

olmak üzere $pc(\rho) = 0$ denkleminin (0,1) aralığındaki tek köküdür.

İspat. $f = h + \overline{g}$, (2.11) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. $\rho \in (0,1)$ için,

$$f_\rho = \frac{f(\rho z)}{\rho} = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\rho^{k-1}z^k + \overline{\sum_{k=2}^{\infty} b_k\rho^{k-1}z^k}$$

olmak üzere $f_\rho \in FKH^0$ olduğu gösterilmelidir. Ayrıca

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} k^2\{|a_k| + |b_k|\}\rho^{k-1} \tag{4.17}$$

için teorem 4.2.7, (4.15) ve (4.17) kullanılarak

$$S \leq \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left\{ \frac{4(\alpha - \lambda)}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]} \right\} \rho^{k-1}$$

$$\leq \frac{\alpha - \lambda}{\beta + \alpha} \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \rho^{k-1} = \frac{\alpha - \lambda}{\beta + \alpha} \frac{\rho(4 - 3\rho + \rho^2)}{(1-\rho)^3} = X_1$$

elde edilir. $f_\rho \in FKH^0$ olduğunu göstermek için Lemma 2.2.16 gereği $X_1 \leq 1$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. $X_1 \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanması için

$$pc(\rho) = (-\beta - 2\alpha + \lambda)\rho^3 + (3\beta + 6\alpha - 3\lambda)\rho^2 + (-3\beta - 7\alpha + 4\lambda)\rho + \beta + \alpha \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Diğer yandan, $pc(0) = \beta + \alpha > 0$ ve $pc(1) = 2(\lambda - \alpha) < 0$ eşitsizlikleri sağlandığından $pc(\rho)$ denkleminin (0,1) aralığında en az bir kökü vardır. $pc(\rho)$ fonksiyonunun (0,1) aralığında yalnız bir kökünün olduğunu göstermek için (0,1) aralığında monoton fonksiyon olduğunu göstermek yeterlidir. Basit bir hesaplamayla $\rho \in (0,1)$ için,

$$pc'(\rho) = (-6\alpha + 3\lambda - 3\beta)\rho^2 + (12\alpha - 6\lambda + 6\beta)\rho - 3\beta - 7\alpha + 4\lambda,$$

$$pc'(0) = -3\beta - 7\alpha + 4\lambda = -3(\alpha + \beta) - 4(\alpha - \lambda) < 0,$$

$$pc'(1) = \lambda - \gamma < 0,$$

$$pc''(r) = (-6\beta - 12\alpha + 6\lambda)\rho + 6\beta + 12\alpha - 6\lambda$$

$$= [-6(\alpha + \beta) - 6(\beta - \lambda)]\rho - [-6(\alpha + \beta) - 6(\beta - \lambda)]$$

$$= [-6(\alpha + \beta) - 6(\beta - \lambda)](\rho - 1) > 0$$

bulunur. Dolayısıyla $pc'(\rho)$, $(0,1)$ de monoton artan bir fonksiyondur. Üstelik $pc'(1) < 0$ olduğundan, $(0,1)$ aralığında $pc'(\rho) < 0$ eşitsizliği sağlanır. O halde $pc(\rho)$, $(0,1)$ aralığında monoton olarak azalan bir fonksiyondur. Böylece $pc(\rho) = 0$ denklemi $(0,1)$ aralığında bir tek köke sahiptir. Ayrıca $pc(\rho)$, $pc(0) > 0$ ve $pc(\rho_c) = 0$ olacak şekilde $(0,1)$ aralığında monoton olarak azalan bir fonksiyon olduğundan $0 < \rho \leq \rho_c$ için $pc(\rho) \geq 0$ eşitsizliği sağlanır. O halde f fonksiyonu, $|z| < \rho_c$ diskinde tam konvekstir.

4.2.18. Teorem. $f = h + \overline{g} \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu, $|z| < \rho_s$ için tam yıldızıldır. Burada ρ_s,

$$ps(\rho) = (\beta + 2\alpha - \lambda)\,\rho^2 + (-2\beta - 4\alpha + 2\lambda)\,\rho + \beta + \alpha \qquad (4.18)$$

olmak üzere $ps(\rho) = 0$ denkleminin (0,1) aralığındaki tek köküdür.

İspat. $f = h + \overline{g}$, (2.11) ile verilen seri açılımına sahip fonksiyon olsun. $\rho \in (0,1)$ için,

$$f_\rho = \frac{f(\rho z)}{\rho} = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \rho^{k-1} z^k + \overline{\sum_{k=2}^{\infty} b_k \rho^{k-1} z^k}$$

olmak üzere $f_\rho \in FSH^{*,0}$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} k\{|a_k| + |b_k|\}\rho^{k-1} \qquad (4.19)$$

toplamı ele alınsın. Bu durumda, Teorem 4.2.7, (4.14) ve (4.19) kullanılarak

$$S \leq \sum_{k=2}^{\infty} k \left\{ \frac{4(\alpha - \lambda)}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]} \right\} \rho^{k-1}$$

$$\leq \frac{\alpha-\lambda}{\beta+\alpha}\sum_{k=2}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{\alpha-\lambda}{\beta+\alpha}\frac{\rho(2-\rho)}{(1-\rho)^2} = X_2$$

elde edilir. $f_\rho \in FSH^{*,0}$ olduğunu göstermek için Lemma 2.2.17 gereği $X_2 \leq 1$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. $X_2 \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanması için $ps(\rho) = (\beta + 2\alpha - \lambda)\,\rho^2 + (-2\beta - 4\alpha + 2\lambda)\,\rho + \beta + \alpha \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Diğer yandan, $ps(0) = \beta + \alpha > 0$ ve $ps(1) = \lambda - \alpha < 0$ eşitsizlikleri sağlandığından $ps(\rho)$ denkleminin $(0,1)$ aralığında en az bir kökü vardır. $ps(\rho)$ fonksiyonunun $(0,1)$ aralığında yalnız bir kökünün olduğunu göstermek için $(0,1)$ aralığında monoton fonksiyon olduğunu göstermek yeterlidir. Basit bir hesaplamayla $\rho \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} ps'(\rho) &= 2\,(\beta + 2\alpha - \lambda)\,(\rho - 1) < 0, \\ ps'(0) &= 2\,(\lambda - \beta - 2\alpha), \\ ps'(1) &= 0, \\ ps''(\rho) &= 2\,(\beta + 2\alpha - \lambda) > 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $ps'(\rho)$, $(0,1)$ de monoton artan bir fonksiyondur. Üstelik $ps'(1) < 0$ olduğundan, $(0,1)$ aralığında $ps'(\rho) < 0$ eşitsizliği sağlanır. O halde $ps(\rho)$, $(0,1)$ aralığında monoton olarak azalan bir fonksiyondur. Böylece $ps(\rho) = 0$ denklemi $(0,1)$ aralığında bir tek köke sahiptir. Ayrıca $ps(\rho)$, $ps(0) > 0$ ve $ps(\rho_s) = 0$ olacak şekilde $(0,1)$ aralığında monoton olarak azalan bir fonksiyon olduğundan $0 < \rho \leq \rho_s$ için $ps(\rho) \geq 0$ eşitsizliği sağlanır. O halde f fonksiyonu, $|z| < \rho_s$ diskinde tam yıldızıldır.

Son olarak, eş analitik kısmı Gauss hipergeometrik fonksiyonu içeren harmonik fonksiyonun $AH^0(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına ait olması için yeter şart verilecektir.

4.2.19. Teorem. $\mathfrak{c}$ pozitif reel sayı, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} > 0$ için $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in (-1, \infty)$ veya $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{a}}$ için $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere $t_1(\mathrm{z}) = z + \overline{z^2 F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, ; z)}$, $t_2(\mathrm{z}) = z + \overline{z(F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z) - 1)}$ ve $t_3(\mathrm{z}) = z + \overline{\int_0^z F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \zeta) d\zeta}$ olsun. Bu durumda

i. $\mathfrak{c} > Re(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + 3$ ve

$$\left[2(\alpha + \beta) + \frac{(4\beta - 2\alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 1} + \frac{(\beta - \alpha)(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 2)_2}\right] F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; 1) \leq 2(\alpha - \lambda)$$

ise t_1 fonksiyonu $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına aittir.

ii. $\mathfrak{c} > Re(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + 3$ ve

$$\left[2\alpha + \frac{2\beta\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 1} + \frac{(\beta - \alpha)(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 2)_2}\right] F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; 1) \leq 4\alpha - 2\lambda$$

ise t_2 fonksiyonu $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına aittir.

iii. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \neq 1$, $\mathfrak{c} > Re(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + 2$ ve

$$\left[\frac{2\alpha(\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{(\mathfrak{a} - 1)(\mathfrak{b} - 1)} + 2\beta + \frac{(\beta - \alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 1}\right] F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; 1) \leq 2(\alpha - \lambda) + \frac{2\alpha(\mathfrak{c} - 1)}{(\mathfrak{a} - 1)(\mathfrak{b} - 1)}$$

ise t_3 fonksiyonu $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına aittir.

İspat i. $k \geq 2$ için $S_{1,k} = \frac{(\mathfrak{a})_{k-2}(\mathfrak{b})_{k-2}}{(\mathfrak{c})_{k-2}(k-2)!}$ olmak üzere $t_1(z) = z + \overline{z^2 F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; z)}$ $= z + \overline{\sum_{k=2}^{\infty} S_{1,k} z^k}$ olsun. $t_1 \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olduğunu göstermek için

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k - 1)]\left|S_{1,k}\right| \leq 2\,(\alpha\ -\ \lambda)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Lemma 2.1.29 ve (2.10) ile verilen Gauss formülü kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]|S_{1,k}|$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)] \frac{(\mathfrak{a})_{k-2}(\mathfrak{b})_{k-2}}{(\mathfrak{c})_{k-2}(k-2)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)[2\alpha + (\beta - \alpha)(k+1)] \frac{(\mathfrak{a})_k(\mathfrak{b})_k}{(\mathfrak{c})_k k!}$$

$$= 2\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{a})_k(\mathfrak{b})_k}{(\mathfrak{c})_k k!} + (\alpha + \beta) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{(\mathfrak{a})_k(\mathfrak{b})_k}{(\mathfrak{c})_k k!}$$

$$+(\beta - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \frac{(\mathfrak{a})_k(\mathfrak{b})_k}{(\mathfrak{c})_k k!}$$

$$= 2\alpha F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1) + (\alpha + \beta)\left[\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 1} + 1\right] F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)$$

$$+(\beta - \alpha)\left[\frac{(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 2)_2} + \frac{3\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 1} + 1\right] F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)$$

elde edilir.

ii. $k \geq 2$ için $S_{2,k} = \frac{(\mathfrak{a})_{k-1}(\mathfrak{b})_{k-1}}{(\mathfrak{c})_{k-1}(k-1)!}$ olmak üzere $t_2(z) = z + \overline{z(F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};z) - 1)}$ $= z + \overline{\sum_{k=2}^{\infty} S_{2,k} z^k}$ olsun. $t_2 \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olduğunu göstermek için

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]|S_{2,k}| \leq 2\,(\alpha - \lambda)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Lemma 2.1.29 ve (2.10) ile verilen Gauss formülü kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha+(\beta-\alpha)(k-1)]\left|S_{2,k}\right|$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha+(\beta-\alpha)(k-1)]\frac{(\mathfrak{a})_{k-1}(\mathfrak{b})_{k-1}}{(\mathfrak{c})_{k-1}(k-1)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)[2\alpha+(\beta-\alpha)(k+1)]\frac{(\mathfrak{a})_{k+1}(\mathfrak{b})_{k+1}}{(\mathfrak{c})_{k+1}(k+1)!}$$

$$=2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_{k+1}(\mathfrak{b})_{k+1}}{(\mathfrak{c})_{k+1}(k+1)!}+2\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_{k+1}(\mathfrak{b})_{k+1}}{(\mathfrak{c})_{k+1}k!}$$

$$+(\beta-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{a})_{k+1}(\mathfrak{b})_{k+1}}{(\mathfrak{c})_{k+1}(k-1)!}$$

$$=2\alpha F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};1)-2\alpha+2\beta\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}F(\mathfrak{a}+1,\mathfrak{b}+1,\mathfrak{c}+1;1)$$

$$+(\beta-\alpha)\frac{(\mathfrak{a})_2(\mathfrak{b})_2}{(\mathfrak{c})_2}F(\mathfrak{a}+2,\mathfrak{b}+2,\mathfrak{c}+2;1)$$

bulunur.

iii. $k\geq 2$ için $S_{3,k}=\frac{(\mathfrak{a})_{k-2}(\mathfrak{b})_{k-2}}{(\mathfrak{c})_{k-2}(k-1)!}$ olmak üzere $t_3(z)=z+\overline{\int_0^z F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c};\zeta)d\zeta}$ $=z+\overline{\sum_{k=2}^{\infty} S_{3,k}z^k}$ olsun. Bu durumda, ispat ii deki adımlar kullanılarak

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha+(\beta-\alpha)(k-1)]\left|S_{3,k}\right|$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)] \frac{(\mathfrak{a})_{k-2}(\mathfrak{b})_{k-2}}{(\mathfrak{c})_{k-2}(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)[2\alpha + (\beta - \alpha)(k+1)] \frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k}(k+1)!}$$

$$= 2\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k}(k+1)!} + 2\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k}k!}$$

$$+(\beta - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{a})_{k}(\mathfrak{b})_{k}}{(\mathfrak{c})_{k}(k-1)!}$$

$$= \frac{2\alpha(\mathfrak{c}-1)}{(\mathfrak{a}-1)(\mathfrak{b}-1)}[F(\mathfrak{a}-1, \mathfrak{b}-1, \mathfrak{c}-1; 1) - 1]$$

$$+2\beta F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; 1) + \frac{(\beta - \alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1} F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; 1)$$

elde edilir.

4.2.20. Sonuç. $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{c}$ pozitif reel sayı ve

$$T_1(z) = z + \overline{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{(m-k+1)_k}{(\mathfrak{c})_k} z^{k+2}},$$

$$T_2(z) = z + \overline{\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{(m-k+1)_k}{(\mathfrak{c})_k} z^{k+1}},$$

$$T_3(z) = z + \overline{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{(m-k+1)_k}{(k+1)(\mathfrak{c})_k} z^{k+2}}$$

olsun. Bu durumda

i. $\left[2(\alpha+\beta)+(4\beta-2\alpha)\frac{m^2}{\mathrm{c}+2m-1}+(\beta-\alpha)\frac{m^2(m-1)^2}{(\mathrm{c}+2m-1)(\mathrm{c}+2m-2)}\right]F(-m,-m,\mathrm{c};1)\leq 2(\alpha-\lambda)$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_1 \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$,

ii. $\left[2\alpha+\frac{2\beta m^2}{\mathrm{c}+2m-1}+(\beta-\alpha)\frac{m^2(m-1)^2}{(\mathrm{c}+2m-1)(\mathrm{c}+2m-2)}\right]\ F(-m,-m,\mathrm{c};1)\leq 4\alpha-2\lambda$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_2 \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$,

iii. $\left[\frac{2\alpha(\mathrm{c}+2m)}{(m+1)^2}+2\beta+(\beta-\alpha)\frac{m^2}{\mathrm{c}+2m-1}\right]F(-m,-m,\mathrm{c};1)\leq 2(\alpha-\lambda)+\frac{2\alpha(\mathrm{c}-1)}{(m+1)^2}$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T_3 \in RH^0(\alpha,\beta,\lambda)$'dır.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, konvekse yakın harmonik fonksiyonların iki yeni alt sınıfı tanımlanmıştır. Bu tanımlanan fonksiyon sınıfları için katsayı sınırları, büyüme tahminleri gibi bazı özellikler elde edilmiştir. Ayrıca, bu sınıfların konveks birleşim ve konvolüsyon özellikleri elde edilmiştir. Son olarak, bu sınıflara ait Gauss hipergeometrik fonksiyonu içeren harmonik polinomlar oluşturulmuştur.

Çalışmanın üçüncü bölümünde konvekse yakın harmonik fonksiyonlar üzerine yapılmış çalışmalara yer verilmiştir. Bu bölüm iki alt bölümden oluşmuştur. İlk bölümde, Rajbala ve Prajapat (2021) tarafından çalışılan $WH^0(\alpha, \beta)$ sınıfı, ikinci bölümde Yaşar ve Yalçın (2021) tarafından çalışılan $RH^0(\lambda, \delta)$ sınıfı tanıtılmış ve elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ ve $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfları tanımlanmış, bu sınıfların konvekse yakın olduğu gösterilmiştir ve $f = h + \overline{g} \in SH^0$ olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty} k[\alpha + \beta(k-1)](|a_k| + |b_k|) \leq \alpha - \lambda$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ olduğu ve

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)](|a_k| + |b_k|) \leq 2(\alpha - \lambda)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfına ait olduğu gösterilmiştir. Büyüme teoremleri, $f \in AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ ve $\alpha > \lambda \geq 0$ ve $\beta > 0$ için,

$$|f(z)| \quad \geq |z| + 2(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}|z|^k}{\beta k^2 + (\alpha - \beta)k}$$

$$|f(z)| \quad \leq |z| + 2(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{\beta k^2 + (\alpha - \beta)k}$$

olarak ve $f \in RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ için

$$|f(z)| \quad \geq |z| + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}|z|^k}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]}$$

$$|f(z)| \quad \leq |z| + 4(\alpha - \lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{k^2[2\alpha + (\beta - \alpha)(k-1)]}$$

olarak bulunmuştur. Diğer yandan, her iki fonksiyon sınıfının da konveks birleşim ve konvolüsyon altında kapalı oldukları elde edilmiştir. Daha sonra $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfının yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı, $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfının tam konvekslik ve tam yıldızıllık yarıçapları verilmiştir. Ayrıca, eş-analitik kısmı Gauss hipergeometrik fonksiyonu içeren harmonik fonksiyonun, tanıtılan harmonik fonksiyon sınıflarına ait olması için yeter şart verilmiştir. Son olarak $WH^0(\alpha, \beta)$, $RH^0(\lambda, \delta)$, $AH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ ve $RH^0(\alpha, \beta, \lambda)$ sınıfları için parametrelerin özel seçilmesiyle

(i) $AH^0(\alpha, \alpha, 0) = RH^0(\alpha, \alpha, 0) = RH^0(\beta, 0) = WH^0(\alpha, 0)$,

(ii) $RH^0(1, 2\delta + 1, 0) = RH^0(\beta, \delta)$

(iii) $AH^0(1, \beta, \lambda) = WH^0(\beta, \lambda)$

sonuçları elde edilmiştir

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. (1979). *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. McGraw-Hill.

Al-Refai, O. (2019). Some properties for a class of analytic functions defined by a higher-order differential inequality. *Turkish Journal of Mathematics, 43*(5), 2473-2493. https://dergipark.org.tr/tr/pub/tbtkmath/issue/50820/662536

Başkan, T. (2005). *Kompleks fonksiyonlar teorisi*. Nobel Basımevi.

Carathéodory, C. (1907). Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Mathematische Annalen, 64*(1), 95-115. https://doi.org/10.1007/BF01449883

Clunie, J., & Sheil-Small, T. (1984). Harmonic univalent functions. *Annales Academie Scientiarum Fennice, 9*, 3-25. https://doi.org/10.5186/aasfm.1984.0905

Chuaqui, M., Duren, P., & Osgood, B. (2004). Curvature properties of planar harmonic mappings. *Computational Methods and Function Theory*, *4*(1), 127-142. https://doi.org/10.1007/BF03321060

Çakmak, S., Yaşar, E., & YALCIN, S. (2022). New subclass of the class of close-to-convex harmonic mappings defined by a third-order differential inequality. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, (51)1, 172-186.
https://doi.org/10.15672/hujms.922981

Duren, P. (2004). *Harmonic Mappings in the Plane (Vol 156)*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511546600

Fejér, L. (1925). Über die positivitat von summen, die nach trigonometrischen order Legendreschen funktionen fortschreiten, *Acta Litt. Ac Sei. Szeged, 2*: 2-2, 75-86.

Gao, C. Y., & Zhou, S. Q. (2007). Certain subclass of starlike functions. *Applied mathematics and computation*, *187*(1), 176-182. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.08.113

Ghosh, N., & Vasudevarao, A. (2019). On a subclass of harmonic close-to-convex mappings. *Monatshefte für Mathematik*, *188*(2), 247-267. https://doi.org/10.1007/s00605-017-1138-7

Goodloe, M. R. (2002). Hadamard products of convex harmonic mappings. *Complex Variables, 47*(2), 81-92. https://doi.org/10.1080/02781070290010841

Goodman, A. W. (1983). *Univalent Functions, Vol. 2*, Polygonal Publishing House.

Hernández, R., & Martín, M. (2013). Stable geometric properties of analytic and harmonic functions. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *155*(2), 343-359. https://doi.org/10.1017/S0305004113000340

Jack, I. S. (1971). Functions starlike and convex of order α. *Journal of the London Mathematical Society*, *2*(3), 469-474. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-3.3.469

Kaplan, W. (1952). Close-to-convex schlicht functions. *Michigan Mathematical Journal*, *1*(2), 169-185. https://doi.org/10.1307/mmj/1028988895

Kim, Y. C., & Ponnusamy, S. (1999). Sufficiency for Gaussian hypergeometric functions to be uniformly convex. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *22*(4), 765-773. https://doi.org/10.1155/S0161171299227652

Li, L., & Ponnusamy, S. (2013a). Disk of convexity of sections of univalent harmonic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *408*(2), 589-596. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.06.021

Li, L., & Ponnusamy, S. (2013b). Injectivity of sections of univalent harmonic mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *89*, 276-283. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.05.016

Miller, S. S., & Mocanu, P. T. (1981). Differential subordinations and univalent functions. *Michigan Mathematical Journal*, *28*(2), 157-172. https://doi.org/10.1307/mmj/1029002507

Miller, S. S., & Mocanu, P. T. (2000). *Differential subordinations: theory and applications*. CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781482289817

Nagpal, S., & Ravichandran. V. (2014). Construction of subclasses of univalent harmonic mappings, *Journal of the Korean Mathematic Society, 51*(3), 567-592. https://doi.org/10.4134/JKMS.2014.51.3.567

Nevanlinna, R. (1921). Uber die konforme Abbidungen Sterngebieten. *Finska Vetenskaps-Societeten Förhandlingar*, *63*(6), 18.

Owa, S., Hayami, T., & Kuroki, K. (2007). Some properties of certain analytic functions. *International journal of mathematics and mathematical sciences*. https://doi.org/10.1155/2007/91592

Ponnusamy, S., Yamamoto, H., & Yanagihara, H. (2013). Variability regions for certain families of harmonic univalent mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *58*(1), 23-34. https://doi.org/10.1080/17476933.2010.551200

Rajbala, & Prajapat, J. K. (2021). On a subclass of close-to-convex harmonic mappings. *Asian-European Journal of Mathematics*, *14*(06), 2150102. https://doi.org/10.1142/S1793557121501023

Riemann, B. 1851. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. *PhD Thesis*, University of Göttingen, Germany. https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Grund/Grund.pdf

Robertson, M. I. (1936). On the theory of univalent functions. *Annals of Mathematics,37*, 374-408. https://doi.org/10.2307/1968451

Rosihan, M. A., Lee, S. K., Subramanian, K. G., & Swaminathan, A. (2011). A third-order differential equation and starlikeness of a double integral operator. In *Abstract and Applied Analysis* Hindawi, *2011*. https://doi.org/10.1155/2011/901235

Rosihan, M. A., Devi, S., & Swaminathan, A. (2018). Inclusion properties for a class of analytic functions defined by a second-order differential inequality. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, *112*(1), 117-133. https://doi.org/10.1007/s13398-016-0368-1

Silverman, H. (1994). A class of bounded starlike functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *17*(2), 249-252. https://doi.org/10.1155/S0161171294000360

Silverman, H. (1998). Harmonic univalent functions with negative coefficients. *Journal of mathematical analysis and applications*, *220*(1), 283-289. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5882

Singh, R., & Singh, S. (1989). Convolution properties of a class of starlike functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *106*(1), 145-152. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1989-0994388-6

Study, E. (1913). Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Zweites Heft; Konforme Abbildung Einfach-Zusammenhängender Bereiche.

Temme, N. M. (1996). *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*. John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/9781118032572

Wang, Z. G., Gao, C. Y., & Yuan, S. M. (2006). On the univalency of certain analytic functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, *7*(1), 4. https://www.emis.de/journals/JIPAM/images/125_05_JIPAM/125_05.pdf

Yaşar, E., & Yalçın, S. (2021). Close-to-convexity of a class of harmonic mappings defined by a third-order differential inequality. Turkish Journal of Mathematics, *45*(2), 678-694. https://doi.org/10.3906/mat-2004-50

Zill, D. G., & Shanahan, P. D. (2013). *Complex analysis: A first course with applications*. Jones & Bartlett Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Serkan ÇAKMAK
Doğum Yeri ve Tarihi	: UŞAK / 12.02.1990
Yabancı Dil	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Uşak Anadolu Lisesi, 2004-2007
Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi, 2012-2015
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi, 2016-2018

Çalıştığı Kurum/Kurumlar :

: Bursa Özel Emine Örnek Fen Lisesi,
Matematik Öğretmeni
2021- …

: Bursa Özel Şahinkaya Fen Lisesi,
Matematik Öğretmeni
2018-2021

: Bursa Küpkök Eğitim Kurumları,
Matematik Öğretmeni
2017-2018

: Uşak Ümmü Baykan İmam Hatip Ortaokulu,
Matematik Öğretmeni
2015-2016

İletişim (e-posta) : serkan.cakmak64@gmail.com

Yayınları :

Altınkaya, Ş., Yalçın, S., & **Çakmak, S.** (2019). A subclass of bi-univalent functions based on the Faber polynomial expansions and the Fibonacci numbers. *Mathematics*, *7*(2), 160. (Q1)

Çakmak, S., Yalçın, S., & Altınkaya, Ş. (2020). A New Class of Salagean-Type Multivalent Harmonic Functions Defined by Subordination. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, *44*(6), 1899-1904. (Q3)

Çakmak, S., Yaşar, E., & Yalçın, S. (2021). Convolutions of harmonic mappings convex in the horizontal direction. *Journal of Function Spaces*, vol. 2021, Article ID 2949573, 1-9. (Q1)

Çakmak, S., Yaşar, E., & YALCIN, S. (2022). New subclass of the class of close-to-convex harmonic mappings defined by a third-order differential inequality. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* (51)1, 172-186. (Q3)

Çakmak, S., Yaşar, E., & YALCIN, S. Some basic properties of a subclass of close-to-convex harmonic mappings, *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, baskıda. **(Q1)**

Altinkaya, S., **Cakmak, S.,** & Yalcin, S. (2018). On a new class of Salagean-type harmonic univalent functions associated with subordination. *Honam Mathematical Journal*, *40*(3), 433-446. (ESCI)

Çakmak, S., Yalçın, S., & Altınkaya, Ş. (2017). On a subclass of harmonic univalent functions based on subordination. *Theory and Applications of Mathematics & Computer Science*, *7*(2), 51-62.

Çakmak, S., Yalçın, S., & Altinkaya, Ş. (2018). A Subclass of Harmonic Univalent Functions Defined by Means of Differential Subordination. *Khayyam Journal of Mathematics*, *4*(1), 28-38.

Çakmak, S., Yalçın, S., & Altınkaya, Ş. (2019). Some connections between various classes of analytic functions associated with the power series distribution. *Sakarya University Journal of Science*, *23*(5), 982-985. (TR Dizin)

Çakmak, S., Yalçın, S., & Altınkaya, Ş. (2019). An application of the power series distribution for certain analytic univalent function classes. *Lıbertas Mathematıca (new series)*, *39*(1), 95-102.

Çakmak, S., Yalçın, S., & Altınkaya, S. (2020). An application of the distribution series for certain analytic function classes. *Surveys in Mathematics and its Applications*, *13*, 225-231.

Çakmak, S., Yalçın, S., & Altınkaya, S. (2020). Certain Subclasses of Harmonic Univalent Functions Defined by Subordination. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, *44*(1). (ESCI)

Çakmak, S., Yalçın, S., & Altınkaya, Ş. (2020). A new subclass of starlike harmonic functions defined by subordination. *Al-Qadisiyah Journal Of Pure Science*, *25*(1), 36-39.

Çakmak, S., Yaşar, E., Yalçın, S., & Altınkaya, Ş. (2021). Some Connections Between Various Subclasses of Harmonic Univalent Functions Involving Pascal Distribution. *Acta Universitatis Apulensis*, *66*, 133-147.

Çakmak, S., Yaşar, E., & Yalçın, S. Some basic geometric properties of a subclass of harmonic mappings, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana,* baskıda. (ESCI)

Murugusundaramoorthy, G., Yalçın, S., Yaşar, E., & **Çakmak, S.** An Application Of The Power Series Distribution For Univalent Function Classes With Positive Coefficients, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, baskıda. (ESCI)

Uluslararası kongrelerde sözlü sunulan ve tam metni veya özeti yayınlanan bildiriler:

Çakmak, S., Yalçın, S., & Altınkaya, Ş. On A Subclass Of Goodman Ronning Type Harmonic Functions Defined By Q Calculus Operator, 8th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2019), İstanbul, Turkey.