LORENTZ UZAYINDA NULL ve NULL OLMAYAN EĞRİLERİN YAPILARININ İNCELENMESİ

ÜMMÜ GÜLSÜM BAYRAK TORBALI

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA NULL ve NULL OLMAYAN EĞRİLERİN YAPILARININ İNCELENMESİ

ÜMMÜ GÜLSÜM BAYRAK TORBALI
0000-0002-5191-7930

Prof. Dr. Esen İYİGÜN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2022

TEZ ONAYI

Ümmü Gülsüm BAYRAK TORBALI tarafından hazırlanan "LORENTZ UZAYINDA NULL ve NULL OLMAYAN EĞRİLERİN YAPILARININ İNCELENMESİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Esen İYİGÜN

Başkan :	Prof. Dr. Esen İYİGÜN 0000-0001-6821-0248 Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye :	Doç. Dr. İrem KÜPELİ ERKEN 0000-0003-4471-3219 Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye :	Doç. Dr. Fatma ÖZEN ERDOĞAN 0000-0002-9691-4565 Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
../../….

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…/…/………

Ümmü Gülsüm BAYRAK TORBALI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LORENTZ UZAYINDA NULL ve NULL OLMAYAN EĞRİLERİN YAPILARININ İNCELENMESİ

Ümmü Gülsüm BAYRAK TORBALI

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Esen İYİGÜN

Bu çalışmada L^3 ve L^4 Lorentz uzaylarında null ve null olmayan eğrilerin Frenet çatılarının alt uzaylarındaki durumları araştırılmıştır. Bu durumlara ilişkin örneklere ve çizelgelere yer verilmiştir.
Anahtar Kelimeler: Null eğri, Null olmayan eğri, Frenet çatısı.
2022, vii + 90 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis
INVESTIGATION OF THE STRUCTURES OF NULL AND NON-NULL CURVES IN LORENTZ SPACE
Ümmü Gülsüm BAYRAK TORBALI

Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Esen İYİGÜN

In this study, the cases of null and non-null curves in L^3 and L^4 Lorentz spaces in the subspaces of Frenet frames were investigated. Examples and charts related to these situations are included.
Key Words: Null curve, Non-null curve, Frenet frame
2022, vii + 90 page.

TEŞEKKÜR

Çalışma boyunca gösterdiği tüm akademik profesyonellik ve çalışma ahlakı; karşılaşılan problemlerin çözümü ve çalışmanın her aşamasında destek ve önerilerini, değerli zaman ve fikirlerini cömertçe paylaşan değerli hocam Prof. Dr. Esen İYİGÜN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca olduğu gibi tez aşamasında da maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan anne ve babama, kardeşlerim; Rümeysa BAYRAK ve Habibe BAYRAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Akademik yönlendirmeleriyle, maddi ve manevi destekleriyle daima yanımda duran değerli eşim M. Ebubekir TORBALI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ümmü Gülsüm BAYRAK TORBALI
…/…/…….

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
U	Birinci binormal vektör alanı
$<,>$	Bir vektör uzayı üzerinde iç çarpım
α	Eğri
ρ	Eğrinin birinci Frenet eğriliği
σ	Eğrinin ikinci Frenet eğriliği
μ	Eğrinin üçüncü Frenet eğriliği
α'	Eğrinin teğet vektörü
s	Eğrilerin parametresi
{T,R,U}	Frenet 3-çatı alanı
{T,R,U,W}	Frenet 4-çatı alanı
W	İkinci binormal vektör alanı
$\|X\|$	Lorentz uzayında X in boyu (normu)
R	Normal vektör alanı
N_V	Null uzay
g_i	Reel sabitler
h_i	Reel sabitler
c_i	Reel sabitler
k_i	Reel sabitler
T	Teğet vektör alanı
IR^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$IR_1^n = L^n$	n-boyutlu Lorentz uzayı
L^3	3-boyutlu Lorentz uzayı
L^4	4-boyutlu Lorentz uzayı
$\omega, \varphi, \omega_1$	Vektör alanlarının işaretleri
V	Vektör uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Literatüre göre teorik fiziğin gelişiminde Riemann geometrisi önemli bir basamak oluşturmuştur. Fakat bu, özel rölativiteyi açıklamada yetersiz kalmıştır. Eğri uzay benzeri ve zaman benzeri olduğunda Frenet çatıları, eğrilikler kolayca elde edilirken, eğri null olduğunda hesaplamalar bu denli kolay olmamıştı. Bu nedenle 1994'de A. Bejancu Lorentz manifoldlarda null eğrilerin geometrilerini incelemek üzere bir yöntem geliştirdi. Bu yöntem "Lightlike curves in Lorentz manifolds" adlı çalışmada mevcuttur.

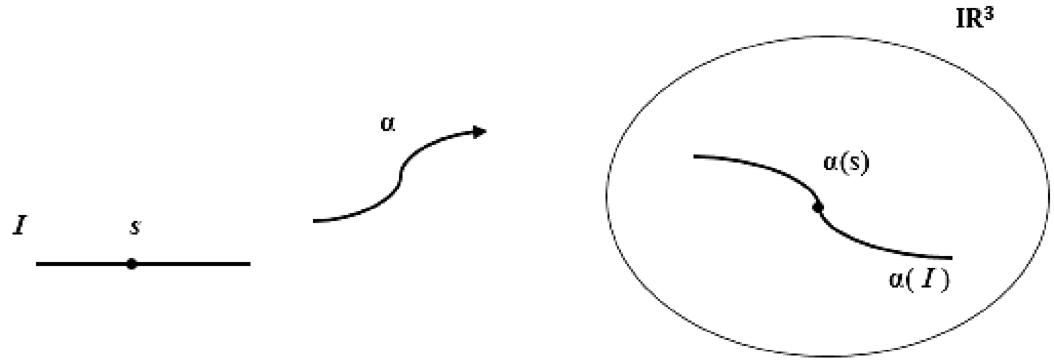
Lorentz uzay, özel rölativitenin matematiksel olarak formülüze edilmiş halidir.

Bu tez dört ana bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın ilk bölümünde genel bir bilgilendirme yapılmıştır. İkinci bölümünde Öklid uzayında ve Lorentz uzayında; eğri, null eğri ve null olmayan eğri ile ilgili temel kavramlar verildi. Çalışmanın üçüncü bölümünde materyal ve yöntemden bahsedilmiştir. Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmını oluşturup, bu bölümün ilk kısmında yer alan L^3 ve L^4 Lorentz uzaylarında null olmayan eğriler üzerinde incelemeler yapılarak genel bir çalışma sürdürülmüştür. Bu çalışma neticesinde elde edilen bulgular bir çizelgeler ile görsel hale getirilip örnek ile daha anlaşılır olması hedeflenmiştir. İkinci kısımda ise L^3 ve L^4 Lorentz uzaylarında null eğriler üzerine incelemeler yapılıp genel bir çalışma izlenmiştir. Çalışmanın bulguları ile bir sınıflandırma yapılmıştır. Ardından bu sınıflandırmaya dair çizelgeler verilip örneklendirme yapılmıştır.

2. ÖKLİD UZAYINDA ve LORENTZ UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

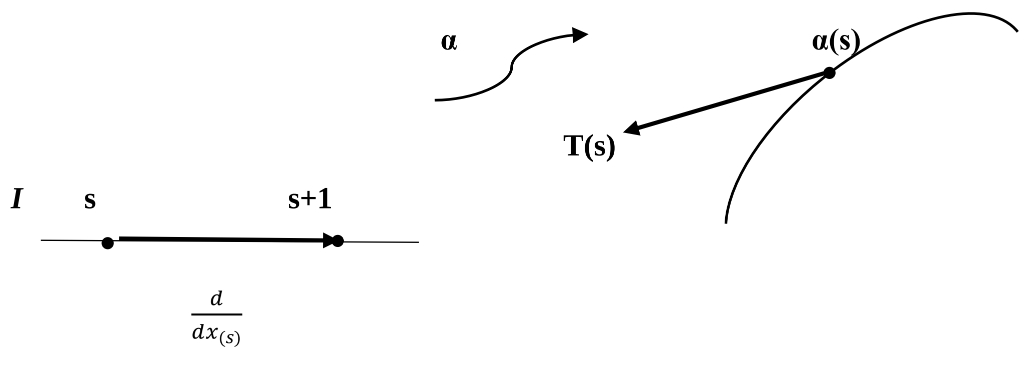
Tanım 2.1. $I \subset IR$ bir açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha : I \subset IR \rightarrow IR^3$ diferensiyellenebilir dönüşümüne IR^3 de eğri denir. Buradaki $I \subset IR$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (Hacısalihoğlu 1983).



Şekil 1.1 IR^3' de bir eğri

Tanım 2.2. $\alpha : I \rightarrow IR^3$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri, s parametresine de yay uzunluğu parametresi denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.3. IR^3 Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow IR^3$ eğrisi için $T(s) = \alpha'(s)$ eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir (Sabuncuoğlu 2010).



Şekil 1.2 IR^3'de bir eğrinin birim teğet vektörü (Özerdem 2018)

Tanım 2.4. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5. IR^3 Öklid uzayında birim hızlı bir $\alpha:I \to IR^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \to IR\ , \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. κ(s) sayısına eğrinin α(s) noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.6. IR^3 uzayında birim hızlı $\alpha:I\to IR^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

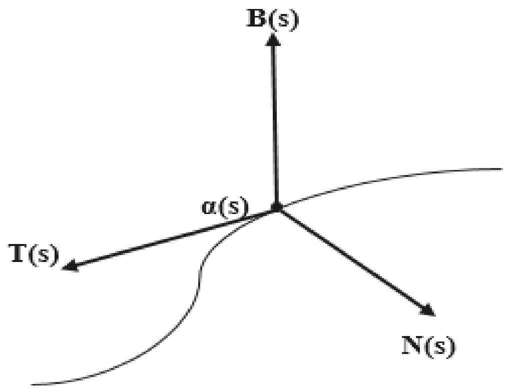
eşitliği ile belirli N(s) vektörüne, α eğrisinin α(s) noktasındaki dik vektörü (asli normali) denir. N vektör alanına, α eğrisinin birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım2.7. IR^3 uzayında birim hızlı $\alpha:I\to IR^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı B(s) vektörüne, α eğrisinin α(s) noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir. B vektör alanına, α eğrisinin ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı) denir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım2.8. T(s), N(s), B(s) vektörlerine, $\alpha:I\to IR^3$ eğrisinin α(s) noktasındaki Frenet vektörleri denir. {T(s), N(s), B(s)} kümesine α eğrisinin α(s) noktasındaki Frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir (Sabuncuoğlu 2010).



Şekil 1.3. IR^3'de bir eğrinin Frenet vektör alanları (Özerdem 2018)

Tanım 2.9. Birim hızlı bir $\alpha:I\to IR^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau: I\to IR^3,\ \tau(s) = -\langle B'(s), N'(s) \rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. τ(s) sayısına eğrinin α(s) noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.10. V bir reel vektör uzayı olsun. Eğer

$$<,>: V\times V\rightarrow IR$$
$$(x, y) \rightarrow <,>(x, y) = <x, y>$$

fonksiyonu

i) 2-lineer,

ii) Simetrik,

iii) Pozitif tanımlı

ise $<,>$ ye bir iç çarpım denir (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.11. V vektör uzay ve $<,>$ V üzerinde bir iç çarpım olsun. İç çarpımın negatif tanımlı olduğu maksimal boyutlu alt uzayının boyutuna V vektör uzayının indeksi denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.12. V' de $<,>$ iç çarpımlı vektör uzayı olsun.

$$N_V = \{x \mid <x, y> = 0, \forall y \in V\} \subset V$$

altuzayına V'nin null uzayı denir (W. H. Greub 1975).

Tanım 2.13. V' de $<,>$ iç çarpımı verilsin.

$$N_V = \{x \mid <x, y> = 0, \forall y \in V\}$$

null uzayı için

$$N_V = \{0\}$$

ise iç çarpıma dejenere değildir denir (W. H. Greub 1975).

Tanım 2.14. V vektör uzayında $<,>$ dejenere olmayan iç çarpım verilsin. Eğer V'nin indeksi 1 ise V' ye bir Lorentz vektör uzayı ve iç çarpımına da Lorentz iç çarpımı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.15. $\forall$ $x=(x_1, x_2 \ldots x_n) \in IR^n$ ve $\forall$ $y=(y_1, y_2 \ldots y_n) \in IR^n$ için

$$<,> = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

şeklinde tanımlanan;$<,>$ fonksiyonuna IR^n de bir Lorentz iç çarpımı ve bu iç çarpım ile verilen IR^n ye bir Lorentz vektör uzayı denir. Bu uzay IR^n_1 ile gösterilir ve Lorentz iç çarpımının standart baza göre karşılık geldiği matris

$$S=\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu iç çarpımla birlikte IR_1^n ye n-boyutlu standart Lorentz uzayı denir. L^n ile gösterilir (Graves 1979).

Tanım 2.16. L^n bir Lorentz uzayı, x Lorentz uzayının bir vektörü ve $<,>$, L^n üzerinde bir iç çarpım olsun. x'in boyu

$$\|x\| = \sqrt{|<x,x>|}$$

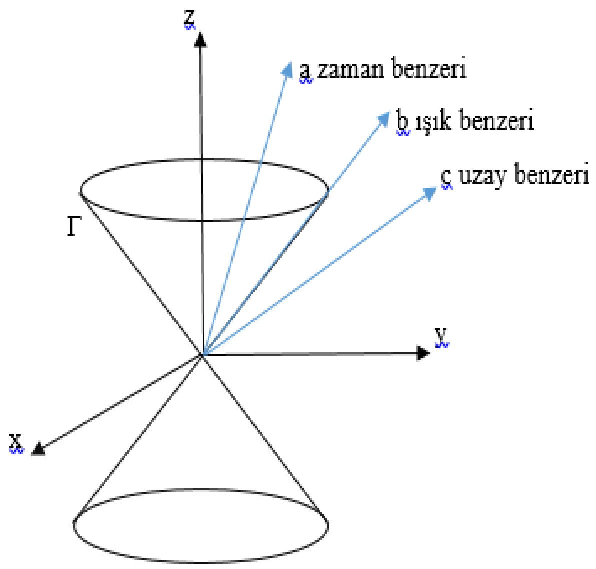
reel sayısına denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.17. L^n bir Lorentz uzayı ve üzerindeki iç çarpım$<,>$ olsun. x$\in L^n$ için;

i) $<x,x><0$ ise x'e Timelike (zaman benzeri) vektör,

ii) $<x,x>>0$ veya x=0 ise x'e Spacelike (uzay benzeri) vektör,

iii)$<x,x>=0$ veya x$\neq 0$ ise x'e Null (ışık benzeri, lightlike) vektör adı verilir (O'Neill 1983).



Şekil 1.4. Γ Lorentz uzayında vektörler

Tanım 2.18. n-boyutlu v-indeksli IR_v^n Lorentz uzayında, v=1 ve n $\geq$ 2 için IR_1^n; Lorentz uzayına Minkowski n-uzay denir. Boyutu 3, indeksi 1 olan IR_1^3 uzayına Minkowski (Lorentz) 3-uzay denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.19.M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \subset IR \rightarrow M$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı $\alpha'(s)$ =T olmak üzere,

i)$<T,T><0$ ise α eğrisine zaman benzeri eğri,

ii)$<T,T>>0$ ise α eğrisine uzay benzeri eğri,

iii)$<T,T>=0$ ise α eğrisine null eğri denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.20. IR_1^4 Lorentz uzayı, IR_1^4 in dik koordinat sistemi (x_1, x_2, x_3, x_4) olmak üzere

$$< x , x >= -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

olarak tanımlanan dejenere olmayan metrik ile donatılmış 4-boyutlu Lorentz uzayıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.21. IR_1^4 , 4-boyutlu Lorentz uzayında üç vektör $\vec{X}$, $\vec{Y}$ ve $\vec{Z}$ olsun.

$\vec{X} =(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{Y}=(y_1, y_2, y_3, y_4)$ ve $\vec{Z}=(z_1, z_2, z_3, z_4)$ olmak üzere

$$(X \times Y) \times Z = -\det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

vektörüne $\vec{X}$, $\vec{Y}$ ve $\vec{Z}$ nin vektörel çarpımı (dış çarpımı) denir (Tozak 2010).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. L^3 ve L^4 Lorentz Uzayında Null Olmayan Eğriler

Bu bölümde ilk olarak L^3 Lorentz uzayında null olmayan eğriler çalışılmıştır. Burada x=$(x_1, x_2, x_3) \in L^3$ ve y=$(y_1, y_2, y_3) \in L^3$ iki vektör olmak üzere Lorentz iç çarpımı

$$< x, y >= -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde tanımlanmıştır.∀ s∈ IR için {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısında T(s) ile teğet vektör alanı, R(s) ile normal vektör alanı ve U(s) ile binormal vektör alanı gösterilmiştir. Ayrıca $\rho(s)$ birinci Frenet eğriliği ve $\sigma(s)$ ikinci Frenet eğriliği, vektör alanlarının işaretleri de $\omega = < T(s), T(s) >= \mp1, \varphi =< R(s), R(s) >= \mp1, -\omega\varphi =< U(s), U(s) >$biçiminde ifade edilmiştir.

Bu çalışmada{T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının {T(s), R(s)}, {R(s), U(s)} ve {T(s), U(s)} alt uzaylarında yatıp yatmadığı araştırılacaktır ve bu çatının alt uzaylarında yatıp yatmayan eğriler için bir sınıflandırma tablosu oluşturulacaktır ve ayrıca örneklendirmesi yapılacaktır.

İkinci olarak da L^4 de Lorentz uzayındaki null olmayan eğriler çalışılmıştır. Burada x=$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in L^4$ ve y=$(y_1, y_2, y_3, y_4)\in L^4$ iki vektör olmak üzere Lorentz iç çarpımı

$$< x, y >= -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

şeklinde tanımlanmıştır. ∀ **s**∈ IR için {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısında T(s) ile teğet vektör alanı, R(s) ile normal vektör alanı, U(s) ile birinci binormal vektör alanı ve W(s) ile ikinci binormal vektör alanı gösterilmiştir. Ayrıca {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısına ait eğrilikler $\rho(s)$, $\sigma(s)$ ve $\mu(s)$ ile ifade edilmiştir ve vektör alanlarının işaretleri ise ω, φ, ω_1, ω_2 dir. Bu çalışmada {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısında {T(s), R(s)}, {T(s), U(s)},{T(s), W(s)}, {R(s), U(s)}, {R(s),W(s)}, {U(s), W(s)}, {T(s), R(s), U(s)}, {T(s), R(s), W(s)}, {T(s), U(s), W(s)}, {R(s), U(s), W(s)} alt uzaylarında yatıp yatmadığını araştırılıp bu çatının alt uzaylarında yatıp yatmayan eğrilerin sınıflandırma tablosu yapıldıktan sonra bununla ilgili örneklendirme yapılacaktır.

3.2. L^3 ve L^4 Lorentz Uzayında Null Eğriler

Bu bölümde ilk olarak L^3 Lorentz uzayında null eğriler çalışılmıştır. Burada x=$(x_1, x_2, x_3) \in L^3$ ve y=$(y_1, y_2, y_3) \in L^3$iki vektör olmak üzere Lorentz iç çarpımı

$$< x, y >= -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde tanımlanmıştır.∀s∈ IR için {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısında T(s) ile teğet vektör alanı, R(s) ile normal vektör alanı ve U(s) ile binormal vektör alanı gösterilmiştir. Ayrıca $\rho(s)$ ile birinci Frenet eğriliği ve $\sigma(s)$ ile ikinci Frenet eğriliği ifade edilmiştir. Bu çalışmada {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının {T(s), R(s)}, {R(s), U(s)} ve {T(s), U(s)} alt uzaylarında yatıp yatmadığı araştırılacaktır ve bu çatının alt uzaylarında yatıp yatmayan eğrilerinin sınıflandırma tablosu yapılacaktır ve bu kısımla ilgili örneklendirme verilecektir.

İkinci olarak da L^4de Lorentz uzayındaki null eğriler çalışılmıştır. Burada x=$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in L^4$ ve y=$(y_1, y_2, y_3, y_4) \in L^4$iki vektör olmak üzere Lorentz iç çarpımı

$$< x, y >= -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

şeklinde tanımlanmıştır. ∀s∈ IR için {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısında T(s) ile teğet vektör alanı, R(s) ile normal vektör alanı, U(s) ile birinci binormal vektör alanı ve W(s) ile ikinci binormal vektör alanı gösterilmiştir. Ayrıca {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısına ait eğrilikler ise $\rho(s)$, $\sigma(s)$ ve $\mu(s)$ ile ifade edilmiştir. Bu çalışmada {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısında {T(s), R(s)}, {T(s), U(s)},{T(s), W(s)}, {R(s), U(s)}, {R(s),W(s)}, {U(s), W(s)}, {T(s), R(s), U(s)}, {T(s), R(s), W(s)}, {T(s), U(s), W(s)}, {R(s), U(s), W(s)} alt uzaylarında yatıp yatmadığı araştırılacaktır ve bu çatının alt uzaylarında yatıp yatmayan eğrilerin sınıflandırma tablosu yapıldıktan sonra bununla ilgili örneklendirme yapılacaktır.

4. BULGULAR

4.1. L^3 Lorentz Uzayında Null Olmayan Eğriler

L^3 Lorentz uzayında null olmayan bir α eğrisi için {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısında $\omega(s)=\langle T(s),T(s)\rangle=\mp1$, $\varphi(s)=\langle R(s),R(s)\rangle=\mp1$, $\langle U(s),U(s)\rangle=-\omega\,\varphi$ şartlarında ki Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ R'(s) \\ U'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho(s) & 0 \\ -\omega\,\varphi\rho(s) & 0 & \sigma(s) \\ 0 & \omega\sigma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ R(s) \\ U(s) \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Özerdem 2018).

Teorem 4.1.1. α, L^3de birim hızlı null olmayan bir eğri ve {T(s), R(s), U(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {T(s), R(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=(s+g_1)T(s)$$

ve

$$\alpha(s)=(s+g_2)T(s)$$

Burada $g_1$ve $g_2$birer sabittir.

İspat: $\alpha(s)=\beta(s)T(s)+\gamma(s)R(s)$ eğrisi olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. αeğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)T'(s)+\gamma'(s)R(s)+\gamma(s)R'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ için

$$T(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)[\rho(s)R(s)]+\gamma'(s)R(s)+\gamma(s)[-\omega(s)\varphi(s)\rho(s)T(s)+\sigma(s)U(s)]$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \beta'(s)-\gamma(s)\omega(s)\varphi(s)\rho(s)=1, \\ \beta(s)\rho(s)+\gamma(s)=0, \\ \gamma(s)\sigma(s)=0, \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $\omega(s)=\mp1$, $\varphi(s)=\mp1$ şartları göz önüne alınırsa denklem sisteminin çözümü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

i) $\omega(s)=1$, $\varphi(s)=1$ ve $\omega(s)=-1, \varphi(s)=-1$ olması durumunda

$$\begin{cases} \beta'(s)-\gamma(s)\rho(s)=1, \\ \beta(s)\rho(s)+\gamma(s)=0, \\ \gamma(s)\sigma(s)=0, \end{cases}$$

$\gamma(s)\sigma(s)=0$ denkleminin çözümünde iki durum vardır. Bunlar $\gamma(s)=0$ ve $\sigma(s)=0$olma halleridir.$\gamma(s)=0$ için $\beta(s)\rho(s)+\gamma(s)=0$ denklemi $\beta(s)\rho(s)=0$ olup bu durumda da iki durum söz konusudur. İlk olarak $\beta(s) = 0$ ise $\beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminde $0 = 1$ çelişkisi elde edilir. İkinci olarak $\rho(s) = 0$ olması durumunda ise $\beta(s) = s + g_1$ değeri elde edilir. Burada g_1 sabittir. Diğer durum olan $\sigma(s) = 0$ için ise bir eğri mevcut değildir. Böylece aranılan eğri ;

$$\alpha(s) = (s + g_1)T(s)$$

şeklindedir.

ii) $\omega(s) = 1$, $\varphi(s) = -1$ ve $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ şartlarında aynı denklem sistemi mevcut olup bu sistem

$$\begin{cases} \beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma(s) = 0, \\ \gamma(s)\sigma(s) = 0. \end{cases}$$

biçimindedir. $\gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminin çözümünden $\gamma(s) = 0$ ve$\sigma(s) = 0$ bulunur. Eğer $\gamma(s) = 0$ ise sistemin ikinci denkleminden $\beta(s)\rho(s) = 0$ elde edilir. Burada iki durum söz konusudur. Birinci olarak $\beta(s) = 0$ ise $\beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1$ denklemi için $0 = 1$ çelişkisi elde edilir. İkinci olarak $\rho(s) = 0$ olması durumunda ise $\beta(s) = s + g_2$ dir. Burada g_2 sabittir. Eğer $\sigma(s) = 0$ için bir çözüm mevcut değildir. Böylece eğri

$$\alpha(s) = (s+g_2)T(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.2. α, L^3de birim hızlı null olmayan bir eğri ve $\{T(s), R(s), U(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{T(s), U(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (s + g_3)T(s) + g_4U(s)$$

dir. Burada g_3 ve g_4 birer sabittir.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)T(s) + \gamma(s)U(s)$ eğrisini olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)U(s) + \gamma(s)U'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ için

$$T(s) = \beta'(s)T(s) + \beta(s)[\rho(s)R(s)] + \gamma'(s)U(s) + \gamma(s)[\omega(s)\,\sigma(s)R(s)]$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\omega(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi çözülürse $\beta'(s) = 1$ için $\beta(s) = s + g_3$, (g_3 bir sabittir) ve $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s) = g_4$, (g_4 bir sabittir) bulunur. Ayrıca $\omega(s) = 1$ ve $\omega(s) = -1$ olma durumunda sırasıyla $\beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ ve $\beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ eşitlikleri elde edilir. Burada bulunan $\beta(s)$ ve $\gamma(s)$ değerleri yerlerine yazılırsa denklemler sırasıyla $(s + g_3)\rho(s) + g_4\,\sigma(s) = 0$ ve $(s + g_3)\rho(s) - g_4\,\sigma(s) = 0$, $(\rho(s) \neq 0)$ şeklindedir. Böylece {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının {T(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s) = (s + g_3)T(s) + g_4U(s)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.3. α, L^3de birim hızlı null olmayan bir eğri ve {T(s), R(s), U(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {R(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_5U(s),$$

$$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_6U(s),$$

$$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_7U(s)$$

ve

$$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_8U(s)$$

dir. Burada g_5, g_6, g_7 ve g_8 sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)R(s) + \gamma(s)U(s)$ eğrisi olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)R(s) + \beta(s)R'(s) + \gamma'(s)U(s) + \gamma(s)U'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ olmak üzere

$$T(s) = \beta'(s)R(s) + \beta(s)[-\omega(s)\varphi(s)\rho(s)T(s) + \sigma(s)U(s)] + \gamma'(s)U(s) + \gamma(s)[\omega(s)\sigma(s)R(s)]$$

dir. Buradan

$$\begin{cases} -\omega(s)\varphi(s)\rho(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) + \gamma(s)\omega(s)\sigma(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi bulunur ve bu sisteminin çözümünde aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i) $\omega(s) = 1$, $\varphi(s) = 1$ için;

$$\begin{cases} -\rho(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) + \gamma(s)\,\sigma(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

dır. Sistemdeki ilk denklem olan $-\rho(s)\beta(s) = 1$ ise$\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$, $(\rho(s) \neq 0)$ bulunur. Bulunan değer $\beta'(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ durumları elde edilir. Bu durumlardan $\gamma(s) = 0$ olması halinde $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden $-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)} = 0, (\rho(s) \neq 0)$ olur ve böylece $\sigma(s) = 0$ için denklem sağlanır. Diğer durum olan $\sigma(s) = 0$ dan $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denklemi için $\gamma(s) = g_5$, (g_5 bir sabittir) olduğu görülür. O halde {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının {R(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_5U(s)$$

olarak bulunur.

ii) $\omega(s) = 1$, $\varphi(s) = -1$ için;

$$\begin{cases} \rho(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemindeki ilk denklem olan $\rho(s)\beta(s) = 1$ için $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$, $(\rho(s) \neq 0)$ dir. $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ değeri $\beta'(s) + \gamma(s)\,\sigma(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ durumları ile karşılaşılır. İlk olarak $\gamma(s) = 0$ olması halinde $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden $\frac{\sigma(s)}{\rho(s)} = 0$, $(\rho(s) \neq 0)$ bulunarak $\sigma(s) = 0$ için denklem sağlanır. Diğer taraftan ikinci durumda ise $\sigma(s) = 0$ olması halinde $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denklemi için $\gamma(s) = g_6$, (g_6 sabit) elde edilir. Böylece {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının {R(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_6U(s)$$

olarak bulunur.

iii) $\omega(s) = -1$, $\varphi(s) = 1$ için;

$$\begin{cases} \rho(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi mevcuttur. Burada $\rho(s)\beta(s) = 1$ denklemi için $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$, $(\rho(s) \neq 0)$ değeri vardır. Bulunan bu değer $\beta'(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde yazılırsa $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ durumları elde edilir. İlk durum olan $\gamma(s) = 0$ için $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) =$

0 denkleminden $\frac{\sigma(s)}{\rho(s)} = 0$, $(\rho(s) \neq 0)$ bulunur ve $\sigma(s) = 0$ için denklem sağlanır. İkinci durum olan $\sigma(s) = 0$ için ise $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden $\gamma(s) = g_7$, (g_7 sabit) değeri elde edilir. {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının {R(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_7U(s)$$

dir.

iv) $\omega(s) = -1$, $\varphi(s) = -1$ olmak üzere;

$$\begin{cases} -\rho(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) - \gamma(s)\,\sigma(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \end{cases}$$

dir. Burada $-\rho(s)\beta(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$, $(\rho(s) \neq 0)$ değeri elde edilir. Bulunan bu değer $\beta'(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ değerleri bulunur ve $\gamma(s) = 0$ olması halinde $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden $-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)} = 0$, $(\rho(s) \neq 0)$ eşitliği elde edilir ve $\sigma(s) = 0$ için denklem sağlanır. Diğer durum olan $\sigma(s) = 0$ için $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden $\gamma(s) = g_8$, (g_8 bir sabittir) bulunur. Böylece aranılan {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının {R(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_8U(s)$$

biçimindedir.

Bu kısımda L^3 de birim hızlı null olmayan bir eğrinin $\{T(s), R(s), U(s)\}$ Frenet çatısının alt uzaylarında yatan aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.1. L^3 de birim hızlı null olmayan bir eğri

$\{T(s),R(s),U(s)\}$ Frenet Çatısının Alt Uzayları	**ω, φ Sabitleri İçin Durumlar**	**Eğri/Eğriler**	**Eğrinin Durumu**
$\{T(s), R(s)\}$	$\omega = 1, \varphi = 1;$ $\omega = -1, \varphi = -1$	$\alpha(s) = (s + g_1)T(s),$	YATAR
	$\omega = -1, \varphi = 1;$ $\omega = 1, \varphi = -1$	$\alpha(s) = (s + g_2)T(s),$	YATAR
$\{T(s), U(s)\}$	$\omega = -1, \varphi = 1$	$\alpha(s) = (s + g_3)T(s) + g_4U(s),$	YATAR
$\{R(s), U(s)\}$	$\omega = 1, \varphi = 1,$	$\alpha(s) = \frac{-1}{\rho(s)}R(s) + g_5U(s),$	YATAR
	$\omega = 1, \varphi = -1$	$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_6U(s),$	
	$\omega = -1, \varphi = 1$	$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_7U(s),$	
	$\omega = -1, \varphi = -1$	$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}R(s) + g_8U(s).$	

Örnek 4.1.1. L^3 de $\alpha(s)=(\frac{\sqrt{17}}{3}\sin hs, \frac{\sqrt{17}}{3}\cos hs, \frac{\sqrt{8}}{3}s)$ eğrisini ele alınırsa

$$\alpha'(s)=(\frac{\sqrt{17}}{3}\cos hs, \frac{\sqrt{17}}{3}\sin hs, \frac{\sqrt{8}}{3})$$

olduğundan

$$< \alpha^{'}(s), \alpha^{'}(s) >= \frac{-17}{9}\cosh s^2+\frac{17}{9}\sinh s^2+\frac{8}{9}$$
$$= -1$$

elde edilir. O halde α eğrisi bir null olmayan eğridir. Dolayısıyla α zaman benzeri eğridir.α eğrisinin s parametresine göre ikinci türevi

$$\alpha''(s) = (\frac{\sqrt{17}}{3}\sin hs, \frac{\sqrt{17}}{3}\cos hs, 0)$$

olarak bulunur.α eğrisinin birinci eğrilik fonksiyonu

$$\rho(s) = \|\alpha^{''}(s)\| = \frac{17}{9}$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$R(s) = \frac{\alpha^{''}(s)}{\|\alpha^{''}(s)\|} = (\sin hs, \cos hs, 0)$$

ve

$$U(s)=T(s) \times R(s) = (\frac{-\sqrt{8}}{3}\cos hs, \frac{\sqrt{8}}{3}\sin hs, \frac{\sqrt{17}}{3})$$

dir. Ayrıca α eğrisinin ikinci eğrilik fonksiyonu

$$\sigma(s) =< R^{'}(s), U(s) >= \frac{\sqrt{8}}{3}(\cosh s^2 + \sinh s^2)$$

olup sonuç olarak Frenet vektör alanları

$$T(s)=(\frac{\sqrt{17}}{3}\cos hs, \frac{\sqrt{17}}{3}\sin hs, \frac{\sqrt{8}}{3}),$$
$$R(s)= (\sin hs, \cos hs, 0)$$
$$U(s)= (\frac{-\sqrt{8}}{3}\cos hs, \frac{\sqrt{8}}{3}\sin hs, \frac{\sqrt{17}}{3})$$

ve bu çatıya ait eğrilikler ise

$$\rho(s) = \frac{17}{9},$$
$$\sigma(s) = \frac{\sqrt{8}}{3}(\cosh s^2 + \sinh s^2)$$

şeklindedir.

Bu kısımda L^3de birim hızlı null olmayan bir eğrinin {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının alt uzaylarında yatan eğrileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.2. L^3de birim hızlı null olmayan bir eğri örneği

{T(s),R(s),U(s)} Frenet Çatısının Alt Uzayları	**Eğri/Eğriler**
{T(s), R(s)}	$\alpha(s) = (s+g_1)\left(\frac{\sqrt{17}}{3}\cosh s, \frac{\sqrt{17}}{3}\sinh s, \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$, $\alpha(s) = (s+g_2)\left(\frac{\sqrt{17}}{3}\cosh s, \frac{\sqrt{17}}{3}\sinh s, \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$.
{T(s), U(s)}	$\alpha(s) = (s+g_3)\left(\frac{\sqrt{17}}{3}\cosh s, \frac{\sqrt{17}}{3}\sinh s \frac{\sqrt{8}}{3}\right) + g_4\left(\frac{-\sqrt{8}}{3}\cosh s, \frac{\sqrt{8}}{3}\sinh s, \frac{\sqrt{17}}{3}\right)$.
{R(s), U(s)}	$\alpha(s) = \frac{-1}{\rho(s)}(\sinh s, \cosh s, 0) + g_5\left(\frac{-\sqrt{8}}{3}\cosh s, \frac{\sqrt{8}}{3}\sinh s, \frac{\sqrt{17}}{3}\right)$, $\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}(\sinh s, \cosh s, 0) + g_6\left(\frac{-\sqrt{8}}{3}\cosh s, \frac{\sqrt{8}}{3}\sinh s, \frac{\sqrt{17}}{3}\right)$, $\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}(\sinh s, \cosh s, 0) + g_7\left(\frac{-\sqrt{8}}{3}\cosh s, \frac{\sqrt{8}}{3}\sinh s, \frac{\sqrt{17}}{3}\right)$, $\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}(\sinh s, \cosh s, 0) + g_8\left(\frac{-\sqrt{8}}{3}\cosh s \frac{\sqrt{8}}{3}\sinh s, \frac{\sqrt{17}}{3}\right)$.

4.2. L^4 Lorentz Uzayında Null Olmayan Eğriler

α, L^4 de normalleri null olmayan zaman benzeri veya uzay benzeri birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin T(s), R(s), U(s), W(s) Frenet vektörleri, $\rho(s)$, $\sigma(s)$ ve $\mu(s)$sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü eğrilikleri ve ω, φ,ω_1, $\omega_2 \in \{-1, 1\}$ işaretleri için

$< T(s), T(s) >= \omega$, $< R(s), R(s) >= \varphi$, $< U(s), U(s) >= \omega_1$, $< W(s), W(s) >= \omega_2$ ve $< T(s), R(s) > = < T(s), U(s) > = < T(s), W(s) > = < R(s), U(s) > = < R(s), W(s) >$ $= < U(s), W(s) > = 0$ şartlarında normalleri null olmayan zaman benzeri veya uzay benzeri eğriye ait Frenet denklemleri aşağıdaki gibi olup

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ R'(s) \\ U'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi\rho(s) & 0 & 0 \\ -\omega\rho(s) & 0 & \omega_1\sigma(s) & 0 \\ 0 & -\varphi\sigma(s) & 0 & -\omega\varphi\omega_1\mu(s) \\ 0 & 0 & -\omega_1\mu(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ R(s) \\ U(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

ve her s∈ I ⊂ R için eğer $\mu(s) \neq 0$ ise α eğrisi tamamıyla L^4 de yatar (Altın Erdem 2013).

Teorem 4.2.1. α, L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri ve {T(s), R(s), U(s), W(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {T(s), R(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = (s + g_9)T(s),$$
$$\alpha(s) = (s + g_{10})T(s),$$
$$\alpha(s) = (s + g_{11})T(s),$$
$$\alpha(s) = (s + g_{12})T(s),$$
$$\alpha(s) = (s + g_{13})T(s),$$
$$\alpha(s) = (s + g_{14})T(s),$$
$$\alpha(s) = (s + g_{15})T(s),$$
$$\alpha(s) = (s + g_{16})T(s)$$

dir. Burada g_9, g_{10} ,g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15} ve g_{16} birer sabittir.

İspat: α(s) =β(s)T(s) + γ(s)R(s) eğrisi olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)R(s) + \gamma(s)R'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) için

$T(s) = \beta'(s)T(s) + \beta(s)[\rho(s)\varphi(s)R(s)] + \gamma'(s)R(s) + \gamma(s)[-\omega(s)\rho(s)T(s) + \sigma(s)\omega_1(s)U(s)]$

dir. Buradan

$$\begin{cases} \beta'(s) - \omega(s)\rho(s)\gamma(s) = 1, \\ \varphi(s)\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \quad \sigma(s)\omega_1(s)\gamma(s) \ = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse $\omega(s)= \mp 1$, $\varphi(s) = \mp 1, \omega_1(s) = \mp 1$ olma durumları göz önüne alındığında denklem sisteminde sekiz farklı durum söz konusudur.

i) $\omega(s)= 1$, $\varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ için

$$\begin{cases} \beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \quad \sigma(s)\gamma(s) \ = 0 \end{cases}$$

sisteminden $\sigma(s)=0$ ve $\gamma(s) = 0$ olarak bulunur. Burada $\sigma(s)=0$ için denklem sistemi çözülmez. Diğer durum olan $\gamma(s) = 0$ için $\gamma'(s) = 0$ olur. $\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminde $\gamma'(s) = 0$ yerine yazılırsa $\rho(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ elde edilir. İlk olarak bulunan $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + g_9$ bulunur ve burada g_9 sabittir. İkinci olarak $\beta(s) = 0$ için $\beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden çelişki elde edilir. Bu durum için söz konusu olan eğri;

$$\alpha(s) = (s + g_9)T(s)$$

dir.

ii) $\omega(s)= 1$, $\varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ için

$$\begin{cases} \beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \quad -\sigma(s)\gamma(s) \ = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Denklem sistemindeki $-\sigma(s)\gamma(s) = 0$ denkleminden $\sigma(s)=0$ ve $\gamma(s) = 0$ bulunur. $\sigma(s)=0$ için denklem sistemi bir çözüme sahip değildir. Fakat $\gamma(s) = 0$ ise $\gamma'(s) = 0$ olur. Diğer bir denklem olan $\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminde bulunan bu değer yerine yazılırsa $\rho(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ olma durumları elde edilir. Buradan $\rho(s) = 0$ durumu için $\beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + g_{10}$ değeri bulunur ve g_{10} sabittir. $\beta(s) = 0$ durumu için $\beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden ise çelişki elde edilir. Bu denklem sistemindeki söz konusu olan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{10})T(s)$$

biçimindedir.

iii) $\omega(s)= 1$, $\varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ sabitleri ile beraber denklem sistemi;

$$\begin{cases} \beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1, \\ -\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \sigma(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

biçimindedir. Sistemdeki $\sigma(s)\gamma(s) = 0$ denklemi için $\sigma(s)=0$ ve $\gamma(s) = 0$durumları vardır. İlk durum olan $\sigma(s)=0$ için denklem sistemi çözülmez. İkinci durum olan $\gamma(s) = 0$ için ise $\gamma'(s) = 0$ olarak bulunur. Diğer bir denklem olan$-\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denklemi için elde edilen $\gamma'(s) = 0$ değeri denklemde yerine yazılırsa $\rho(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ durumları mevcuttur. Buradan $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + g_{11}$ elde edilir ve burada g_{11} sabittir. Dahası $\beta(s) = 0$ için $\beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden çelişki bulunur. O zaman aranılan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{11})T(s)$$

şeklindedir.

iv) $\omega(s) = -1$, $\varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} \beta'(s) + \rho(s)\gamma(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \sigma(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

dir. Denklem sistemindeki $\sigma(s)\gamma(s) = 0$ için $\sigma(s)=0$ ve $\gamma(s) = 0$ değerleri bulunur. Bu değerlerden $\sigma(s)=0$ ise denklem sistemi bir çözüme sahip değildir. Diğer değer olan $\gamma(s) = 0$ için $\gamma'(s) = 0$ değeri vardır. Sistemdeki $\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminde, bulunan $\gamma'(s) = 0$ değeri yerine yazılırsa $\rho(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ olma durumları söz konusudur. Durumların ilki $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) + \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + g_{12}$ elde edilir (g_{12} sabittir). Durumların ikincisi olan $\beta(s) = 0$ için $\beta'(s) + \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden çelişki elde edilir. Böylece bu denklem sistemi için eğri;

$$\alpha(s) = (s + g_{12})T(s)$$

olarak bulunur.

v) $\omega(s) = -1$, $\varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ şartları için

$$\begin{cases} \beta'(s) + \rho(s)\gamma(s) = 1, \\ -\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \sigma(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada $\sigma(s)\gamma(s) = 0$ denklemi çözülürse $\sigma(s)=0$ ve $\gamma(s) = 0$ bulunur. İlk olarak $\sigma(s)=0$ ise denklem sistemi için bir çözüm mevcut değildir. Sonra da $\gamma(s) = 0$ değeri için $\gamma'(s) = 0$ olduğu görülür. Bulunan bu bağıntı $-\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\rho(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ olmak üzere iki değer mevcuttur. Elde edilen ilk değer $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) + \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + g_{13}$ dir. Burada g_{13} sabittir. İkinci değer olan $\beta(s) = 0$ için ise $\beta'(s) + \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden çelişki söz konusudur. Bu çözümler neticesinde istenilen eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{13})T(s)$$

olarak vardır.

vi) $\omega(s) = 1$, $\varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartları denklem sistemi için kullanılırsa

$$\begin{cases} \beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1, \\ -\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\sigma(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. $-\sigma(s)\gamma(s) = 0$ denklemi için $\sigma(s)=0$ ve $\gamma(s) = 0$ değerleri mevcuttur. Burada $\sigma(s)=0$ değerinde denklem sistemi bir çözüme sahip değildir. Diğer değer olan $\gamma(s) = 0$ için ise $\gamma'(s) = 0$ bulunur. Elde edilen bu değer $-\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\rho(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ olma durumları elde edilir. Durumların ilki $\rho(s) = 0$, $\beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminde yazılırsa $\beta(s) = s + g_{14}$ değeri bulunur, (g_{14} sabittir). İkinci durum $\beta(s) = 0$ için $\beta'(s) - \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden çelişki söz konusudur. Böylece aranılan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{14})T(s)$$

dir.

vii) $\omega(s) = -1$, $\varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ için

$$\begin{cases} \beta'(s) + \rho(s)\gamma(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\sigma(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi bulunur. Burada $-\sigma(s)\gamma(s) = 0$ dan $\sigma(s)=0$ ve $\gamma(s) = 0$ durumları elde edilir. Birinci durum $\sigma(s)=0$ için denklem sisteminin bir çözümü bulunamaz. İkinci durum $\gamma(s) = 0$ ise $\gamma'(s) = 0$ olur. Bu bağıntılar ile beraber $\rho(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden $\rho(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ olma durumları söz konusudur. Buradan $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) + \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + g_{15}$ elde edilir ve burada g_{15} bir sabittir. Ayrıca $\beta(s) = 0$ için $\beta'(s) + \rho(s)\gamma(s) = 1$ denkleminden çelişki mevcuttur. Denklem sistemi için bulunan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{15})T(s)$$

şeklindedir.

viii) $\omega(s)=-1$, $\varphi(s)=-1$ ve $\omega_1(s)=-1$ şartlarının şeçimiyle

$$\begin{cases} \beta'(s)+\rho(s)\gamma(s)=1, \\ -\rho(s)\beta(s)+\gamma'(s)=0, \\ -\sigma(s)\gamma(s)\ =0 \end{cases}$$

denklem sistemi biçimindedir. Sistemin son denklemi olan $-\sigma(s)\gamma(s)=0$ için $\sigma(s)$=0 ve $\gamma(s)=0$ sonuçları bulunur. Burada $\sigma(s)$=0 için denklem sistemi çözülmez. Diğer bir sonuç olan $\gamma(s)=0$ için $\gamma'(s)=0$ elde edilir. Bulunan $\gamma'(s)=0$ değeri $-\rho(s)\beta(s)+\gamma'(s)=0$ denkleminde yerine yazılırsa $\rho(s)=0$ ve $\beta(s)=0$ olduğu görülür. Böylece $\rho(s)=0$ değeri $\beta'(s)+\rho(s)\gamma(s)=1$ denkleminde kullanılırsa $\beta(s)=s+g_{16}$ eşitliği bulunur ve bu eşitlik g_{16} sabitini içerir. $\beta(s)=0$ için ise $\beta'(s)+\rho(s)\gamma(s)=1$ denklemi çelişki ile sonuçlanır. Söz konusu olan eğri

$$\alpha(s)=(s+g_{16})T(s)$$

ile gösterilir.

Teorem 4.2.2. α, L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri ve {T(s), R(s), U(s), W(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {T(s), U(s)} alt uzayında yatan eğriler;

$$\alpha(s)=(s+g_{17})T(s)+g_{18}U(s),$$
$$\alpha(s)=(s+g_{19})T(s)+g_{20}U(s),$$
$$\alpha(s)=(s+g_{21})T(s)+g_{22}U(s),$$
$$\alpha(s)=(s+g_{23})T(s)+g_{24}U(s),$$
$$\alpha(s)=(s+g_{25})T(s)+g_{26}U(s),$$
$$\alpha(s)=(s+g_{27})T(s)+g_{28}U(s),$$
$$\alpha(s)=(s+g_{29})T(s)+g_{30}U(s),$$
$$\alpha(s)=(s+g_{31})T(s)+g_{32}U(s)$$

şeklindedir. Burada g_{17}, g_{18}, g_{19}, g_{20}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, g_{24}, g_{25}, g_{26}, g_{27}, g_{28}, g_{29}, g_{30}, g_{31}, g_{32} birer sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s)=\beta(s)T(s)+\gamma(s)U(s)$ eğrisi olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)T'(s)+\gamma'(s)U(s)+\gamma(s)U'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) olarak alınırsa

$$T(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)[\rho(s)\varphi(s)R(s)]+\gamma'(s)U(s)+$$
$$\gamma(s)[-\sigma(s)\varphi(s)\omega_1(s)R(s)-\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)W(s)]$$

olduğu görülür. Eşitlikteki denklem düzenlenirse

$$\begin{cases} \beta^{'}(s) = 1, \\ \varphi(s)\rho(s)\beta(s) - \sigma(s)\varphi(s)\omega_1(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma^{'}(s) = 0, \\ -\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. $\omega(s) = \mp 1, \varphi(s) = \mp 1$ ve $\omega_1(s) = \mp 1$ için sekiz farklı durum mevcuttur:

i) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ için denklem sistemi

$$\begin{cases} \beta^{'}(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma^{'}(s) = 0, \\ -\mu(s) = 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Sistemin ilk denklemi $\beta'(s) = 1$ eşitliğinden $\beta(s) = s + g_{17}$ elde edilir ve burada g_{17} bir sabittir. Sonra sistemdeki $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s) = g_{18}$ sabiti vardır. Ayrıca $\mu(s) = 0$ olup aranılan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{17})T(s) + g_{18}U(s)$$

biçimindedir.

ii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ durumu seçilirse

$$\begin{cases} \beta^{'}(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma^{'}(s) = 0, \\ \mu(s) = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür. Burada $\beta'(s) = 1$ için $\beta(s) = s + g_{19}$ bulunur, burada g_{19} bir sabittir. Diğer bir denklem olan $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s) = g_{20}$ bulunur ve burada g_{20} nin bir sabit olduğu görülür. Ayrıca $\mu(s) = 0$ dır. O halde bulunan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{19})T(s) + g_{20}U(s)$$

şeklindedir.

iii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1, \omega_1(s) = 1$ için denklem sistemi

$$\begin{cases} \beta^{'}(s) = 1, \\ -\rho(s)\beta(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma^{'}(s) = 0, \\ \mu(s) = 0. \end{cases}$$

Buradan sistem çözülürse $\beta'(s) = 1$ ise $\beta(s) = s + g_{21}$ dir. Burada bahsedilen ifadedeki g_{21} sabittir. Denklem sistemi çözülmeye devam edilirse $\gamma'(s) = 0$ eşitliğinden $\gamma(s) = g_{22}$

bulunur ve buradaki g_{22} bir sabittir. Dahası denklem sisteminde $\mu(s) = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa aranılan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{21})T(s) + g_{22}U(s)$$

bulunur.

iv) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ alınması ile

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıdaki gibidir. Bu denklem sisteminin çözümü için ilk denklemden başlanırsa; $\beta'(s) = 1$ ise $\beta(s) = s + g_{23}$ elde edilir. Burada bulunan g_{23} sabittir. Böylece denklemlerin çözümünün devamında $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s) = g_{24}$ gibi sabittir. Ayrıca denklem sistemimizde $\mu(s) = 0$ olduğundan söz konusu aradığımız eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{23})T(s) + g_{24}U(s)$$

şeklinde bulunur.

v) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ -\rho(s)\beta(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s) = 0 \end{cases}$$

dır. Burada ilk denklem $\beta'(s) = 1$ ise $\beta(s) = s + g_{25}$, (g_{25} sabittir) elde edilir. Diğer denklem olan $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s) = g_{26}$ dır ve burada g_{26} sabittir. Diğer bir denklem de $\mu(s) = 0$ olup böylece aranılan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{25})T(s) + g_{26}U(s)$$

olarak elde edilir.

vi) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartları için denklem sistemi ;

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s) = 0 \end{cases}$$

olarak yazılır. Burada denklem sisteminin çözümü için ilk adım $\beta'(s) = 1$ denkleminin çözümünde $\beta(s) = s + g_{27}$ olduğu görülür. Ayrıca bu denklem için g_{27} bir sabittir. Sistemdeki diğer bir denklem $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s) = g_{28}$ olup g_{28} sabit olduğu söylenir. Diğer bilinen değer olan $\mu(s) = 0$ dır. Böylece aranılan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{27})T(s) + g_{28}U(s)$$

biçimindedir.

vii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ için

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ -\rho(s)\beta(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Denklem sistemi çözülürse $\beta'(s) = 1$ ifadesinden $\beta(s) = s + g_{29}$ bulunur ve burada g_{29} bir sabittir. Denklem sistemindeki diğer denklem olan $\gamma'(s) = 0$ ifadesinden ise $\gamma(s) = g_{30}$ elde edilir (g_{30} bir sabittir). İlaveten $\mu(s) = 0$ olduğu da denklem sisteminden açıkça bilindiğine göre sonuçta elde ettiğimiz eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{29})T(s) + g_{30}U(s)$$

şeklindedir.

viii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ için

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ -\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi bulunur. Buradaki denklemler çözülürse; ilk denklem olan $\beta'(s) = 1$ eşitliğinden $\beta(s) = s + g_{31}$ değeri elde edilir, (g_{31}bir sabittir). Sonrasında $\gamma'(s) = 0$ dan $\gamma(s) = g_{32}$ bulunur, (g_{32} sabittir). Ayrıca $\mu(s) = 0$ olduğu görülür. Böylece bu denklem sistemi için elde edilen eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{31})T(s) + g_{32}U(s)$$

biçimindedir.

Teorem 4.2.3. L^4de birim hızlı null olmayan bir eğri α ve bu eğrinin Frenet çatısı {T(s), R(s), U(s), W(s)} olsun. Bu çatının {T(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = (s + g_{33})T(s) + g_{34}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + g_{35})T(s) + g_{36}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + g_{37})T(s) + g_{38}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + g_{39})T(s) + g_{40}W(s)$$

şeklinde olup burada $g_{33}, g_{34}, g_{35}, g_{36}, g_{37}, g_{38}, g_{39}, g_{40}$ birer sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)T(s) + \gamma(s)W(s)$ eğrisi olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınması halinde

$$\alpha'(s) = \beta'(s)T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)W(s) + \gamma(s)W'(s)$$

olarak bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ için

$$T(s)= \beta'(s)T(s)+\beta(s)[\rho(s)\varphi(s)R(s)]+\gamma'(s)W(s)+\gamma(s)[-\mu(s)\omega_1(s)U(s)]$$

elde edilir. Buradan denklem düzenlenirse

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \varphi(s)\,\rho(s)\beta(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ -\mu(s)\omega_1(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $\varphi(s) = \mp 1$ ve$\omega_1(s) = \mp 1$ durumlarının incelenmesi sonucunda dört farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıdaki şekildedirler:

i) $\varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olması durumunda:

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ -\mu(s) = 0 \end{cases}$$

olarak elde edilir. Denklem sistemindeki ilk denklem olan $\beta'(s) = 1$ eşitliğinden $\beta(s) = s + g_{33}$ elde edilir, (g_{33} sabittir). $\beta(s)$ değerinden $\rho(s)\beta(s) = 0$ denklemi için $\rho(s)=0$ olarak bulunur. Diğer denklem olan $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s)= g_{34}$ bulunur ve burada g_{34} değerinin sabit olduğu açıktır. Denklem sisteminin çözümünden mevcut olan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{33})T(s) + g_{34}W(s)$$

biçimdedir.

ii) $\varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ için denklem sistemi:

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ -\rho(s)\beta(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ -\mu(s) = 0 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Denklem sistemindeki ilk denklem olan $\beta'(s) = 1$ ise $\beta(s) = s + g_{35}$ olur ve burada g_{35} sabittir. Sistem çözülmeye devam edilirse $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s)= g_{36}$, benzer şekilde elde edilen g_{36} sabittir. $\beta(s) = s + g_{35}$ olması gereğince $-\rho(s)\beta(s) = 0$ için söylenecek değer $\rho(s)=0$ olur. Sonuçta bu denklem sisteminden elde edilecek olan eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{35})T(s) + g_{36}W(s)$$

olarak bulunur.

iii) $\varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ alınırsa aşağıdaki denklem sistemi mevcuttur:

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \rho(s)\beta(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s) = 0. \end{cases}$$

eşitliklerin ilki $\beta'(s) = 1$ için $\beta(s) = s + g_{37}$ ve üçüncü eşitlikten $\gamma'(s) = 0$ ise $\gamma(s) = g_{38}$ elde edilir. Burada g_{37} ve g_{38} değerlerinin birer sabit olduğu söylenir. $\rho(s)\beta(s) = 0$ denkleminden bu sistem için bulunan değerler göz önüne alındığında $\rho(s)=0$ olarak elde edildiği görülür. Mevcut sistem için elde edilmesi beklenen eğri

$$\alpha(s) = (s + g_{37})T(s) + g_{38}W(s)$$

şeklindedir.

iv) $\varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartlarının seçilmesi halinde:

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ -\rho(s)\beta(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi bulunur. Sistemin ilk denklemi $\beta'(s) = 1$ için$\beta(s) = s + g_{39}$ değeri elde edilir ve burada g_{39} sabittir. Sistemin diğer bir denklemi $\gamma'(s) = 0$ dan $\gamma(s) = g_{40}$, (g_{40} sabittir). $\mu(s) = 0$ ve$-\rho(s)\beta(s) = 0$ için bilinen $\beta(s) = s + g_{39}$ değerinden $\rho(s)=0$ olduğu açıktır. Böylece bulunan eğri ise

$$\alpha(s) = (s + g_{39})T(s) + g_{40}W(s)$$

biçimindedir.

Teorem 4.2.4. L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri α ve {T(s), R(s), U(s), W(s)} eğrinin Frenet çatısı olmak üzere çatının {R(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = g_{41}R(s) ,$$

$$\alpha(s) = g_{42}R(s) ,$$

$$\alpha(s) = g_{48}R(s) ,$$

$$\alpha(s) = g_{44}R(s) ,$$

$$\alpha(s) = g_{45}R(s) ,$$

$$\alpha(s) = g_{46}R(s) ,$$

$$\alpha(s) = g_{47}R(s) ,$$

$$\alpha(s) = g_{48} R(s),$$

dir ve burada $g_{41}, g_{42}, g_{43}, g_{44}, g_{45}, g_{46}, g_{47}, g_{48}$ olarak bahsedilen ifadeler sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s)=\beta(s)R(s) + \gamma(s)U(s)$ eğrisini alalım. Eğride β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere α eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)R(s) + \beta(s)R'(s) + \gamma'(s)U(s) + \gamma(s)U'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ için

$T(s)=\beta'(s)R(s)+\beta(s)[-\rho(s)\omega(s)T(s)+ \sigma(s)\omega_1(s)U(s)]+\gamma'(s)U(s)+\gamma(s)[-\sigma(s)\omega_1(s)R(s) - \mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)W(s)]$

elde edilir. Buradan denklem düzenlenirse

$$\begin{cases} -\rho(s)\omega(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) - \sigma(s)\omega_1(s)\gamma(s) = 0, \\ \sigma(s)\omega_1(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)\gamma(s) = 0, \end{cases}$$

şeklinde bir denklem sistemi mevcuttur. Akabinde $\omega(s) = \mp 1, \varphi(s) = \mp 1$ ve $\omega_1(s) = \mp 1$ değerleri baz olarak alınırsa sekiz farklı durumdan bahsedilir. Bunlar aşağıdaki biçimdedir:

i) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olduğu durum için denklem sistemi:

$$\begin{cases} -\rho(s)\beta'(s) = 1, \\ \beta'(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\mu(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

olup $-\rho(s)\beta(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ olduğu görülür, $(\rho(s) \neq 0)$. Sistemdeki diğer denklem olan $-\mu(s)\gamma(s) = 0$ için ise $\mu(s) = 0$ veya $\gamma(s) = 0$ değerleri elde edilir. Denklem sisteminin ortak bir çözümünü bulmak için $\gamma(s) = 0$ ise $\gamma'(s) = 0$ dır. Burada $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminde bulunan değerler kullanılırsa $\sigma(s) = 0$ bulunur. Ayrıca benzer işlemler $\beta'(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0$ denklemi için de yapılırsa $\beta'(s) = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece $\beta(s) = g_{41}$ olup burada g_{41} bir sabittir. Buradan elde edilecek eğri;

$$\alpha(s) = g_{41} R(s)$$

şeklindedir.

ii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ için:

$$\begin{cases} \rho(s)\beta^{'}(s) = 1, \\ \beta^{'}(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0, \\ \mu(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri olduğu sonucuna ulaşılır. Sonra sistemindeki denklemlerden $\rho(s)\beta(s) = 1$ için elde edilen değer $\rho(s) \neq 0$ olduğundan $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ şeklindedir. Sistemdeki diğer denklem olan $\mu(s)\gamma(s) = 0$ çözülürse $\mu(s) = 0$ veya $\gamma(s) = 0$ olma durumları mevcuttur. İlk olarak $\gamma(s) = 0$ ise $\gamma^{'}(s) = 0$ bulunur. Elde edilen bu değer $\sigma(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0$ denkleminde kullanılırsa $\sigma(s) = 0$ değerinin olduğundan bahsedilir. Ayrıca bulunan bu değer $\beta'(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0$ denklemi için de kullanılırsa $\beta'(s) = 0$ olup $\beta(s) = g_{42}$ biçimindedir ve burada g_{42} bir sabittir. Böylece aranılan eğri ;

$$\alpha(s) = g_{42}R(s)$$

şeklindedir

iii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olduğu durum için

$$\begin{cases} -\rho(s)\beta^{'}(s) = 1, \\ \beta^{'}(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0, \\ \mu(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi mevcuttur. Buradaki $-\rho(s)\beta(s) = 1$ denkleminden $\rho(s) \neq 0$ olması halinde $\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ elde edilir. Diğer bir denklem olan $\mu(s)\gamma(s) = 0$ eşitliğinden ise $\mu(s) = 0$ veya $\gamma(s) = 0$ değerleri bulunur. Burada $\gamma(s) = 0$ kullanılırsa $\gamma'(s) = 0$ olur. Sistemdeki $\sigma(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0$ denkleminde $\gamma'(s) = 0$ alınırsa $\sigma(s) = 0$ dır. Bulunan bu değerler $\beta'(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\beta'(s) = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Bu ise $\beta(s) = g_{43}$ olduğunu ifade eder, (g_{43} bir sabittir). O halde elde edilecek olan eğri ;

$$\alpha(s) = g_{43}R(s)$$

dir.

iv) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartlarında:

$$\begin{cases} -\rho(s)\beta^{'}(s) = 1, \\ \beta^{'}(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ -\sigma(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0, \\ \mu(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi mevcuttur. İlk denklemden $\rho(s) \neq 0$ için $\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ bulunur. Dördüncü denklemden $\mu(s) = 0$ veya $\gamma(s) = 0$ durumları vardır. Bu durumlardan $\gamma(s) = 0$ için

$\gamma'(s) = 0$ olup üçüncü denklemde kullanılırsa $\sigma(s) = 0$ bulunur. Bulunan bu değerler ikinci denklem olan $\beta'(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0$ da yerine yazılırsa $\beta'(s) = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Diğer bir durum olan $\mu(s) = 0$ için denklem sisteminde bir çözümün varlığından söz edilmez. Böylece $\beta(s) = g_{44}$ elde edilir ve burada g_{44} bir sabittir. Son olarak sistem için mevcut olan eğri ;

$$\alpha(s) = g_{44}R(s)$$

biçimindedir.

v) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olduğu durum için;

$$\begin{cases} \rho(s)\beta'(s) = 1, \\ \beta'(s) - \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\mu(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

dır. İlk denklemden $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ elde edilir, ($\rho(s) \neq 0$). Denklem sistemindeki son denklemden $\mu(s) = 0$ veya $\gamma(s) = 0$ durumları söz konusudur. Denklem sisteminde ortak bir çözüm elde edebilmek için $\gamma(s) = 0$ ise $\gamma'(s) = 0$ bulunur. Benzer şekilde $\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denklemi için de $\sigma(s) = 0$ elde edilir ve bu değer ikinci denklemde kullanılırsa $\beta'(s) = 0$ olduğu görülür. Bu ise $\beta(s) = g_{45}$ olduğunu gösterir ve ayrıca g_{45} bir sabittir. Böylece aranılan eğri;

$$\alpha(s) = g_{45}R(s)$$

dir.

vi) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ durumu için denklem sistemi şu şekildedir;

$$\begin{cases} \rho(s)\beta'(s) = 1, \\ \beta'(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ -\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\mu(s)\gamma(s) = 0. \end{cases}$$

Denklem sistemindeki birinci denklemden $\rho(s) \neq 0$ olmak kaydıyla $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ dır. Dördüncü denklemden $\mu(s) = 0$ veya $\gamma(s) = 0$ gibi iki durum söz konusudur. Denklem sisteminin ortak bir çözüm için $\gamma(s) = 0$ ise $\gamma'(s) = 0$ olup üçüncü denklemden de $\sigma(s) = 0$ bulunur. Bulunan bu eşitlikler ikinci denklemde yerine yazılırsa $\beta'(s) = 0$ olduğu görülür. O halde $\beta(s) = g_{46}$ olup burada g_{46} bir sabittir. Böylece aranılan α eğrisi ;

$$\alpha(s) = g_{46}R(s)$$

dir.

vii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartları alınırsa;

$$\begin{cases} -\rho(s)\beta'(s) = 1, \\ \beta'(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ -\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\mu(s)\gamma(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıda belirtildiği gibidir. Bu sistemin ortak bir çözümü için ilk denklemden $\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ elde edilir, burada $\rho(s) \neq 0$ dır. Daha sonra $-\mu(s)\gamma(s) = 0$ denklemi ise $\mu(s) = 0$ veya $\gamma(s) = 0$ çözümlerini verir. Bu çözümlerden olan $\gamma(s) = 0$ için $\gamma'(s) = 0$ bulunur. Bulunan bu değer $-\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\sigma(s) = 0$ olduğu görülür. Böylece bulunan bu $\sigma(s) = 0$ değeri $\beta'(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\beta'(s) = 0$ olur. Son ifadeden de $\beta(s) = g_{47}$ olduğu görülür ve burada g_{47} bir sabittir. O zaman aranılan eğri;

$$\alpha(s) = g_{47}R(s)$$

şeklinde gösterilir.

viii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ olduğu durum için denklemler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \rho(s)\beta'(s) = 1, \\ \beta'(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0, \\ -\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \mu(s)\gamma(s) = 0. \end{cases}$$

İlk denklemden $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$, $(\rho(s) \neq 0)$ bulunur. Diğer denklemlerden biri olan $\mu(s)\gamma(s) = 0$ için $\mu(s) = 0$ veya $\gamma(s) = 0$ durumları söz konusudur. Bu durumlardan $\gamma(s) = 0$ için $\gamma'(s) = 0$ olarak bulunur. Ayrıca burada $-\sigma(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden $\sigma(s) = 0$ olduğu görülür. Son olarak ulaşılan bu değer $\beta'(s) + \sigma(s)\gamma(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\beta'(s) = 0$ dır. Dolayısıyla $\beta(s) = g_{48}$ olarak elde edilir, (g_{48} bir sabittir). Böylece mevcut olan eğri;

$$\alpha(s) = g_{48}R(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.5. α, L^4de birim hızlı null olmayan bir eğri ve {T(s), R(s), U(s), W(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {R(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = h_2R(s) + h_1W(s),$$

$$\alpha(s) = h_4R(s) + h_3W(s),$$

$$\alpha(s) = h_6 R(s) + h_5 W(s),$$
$$\alpha(s) = h_8 R(s) + h_7 W(s)$$

şeklindedir ve bu eğrilerde $h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_5,\ h_6,\ h_7,\ h_8$ denklemlere ait sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)R(s) + \gamma(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin s parametresine göre her iki tarafının türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)R(s) + \beta(s)R'(s) + \gamma'(s)W(s) + \gamma(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ için

$$T(s)=\beta'(s)R(s)+\beta(s)[-\rho(s)\omega(s)T(s)+\sigma(s)\omega_1(s)U(s)]+\gamma'(s)W(s)+\gamma(s)[-\mu(s)\omega_1(s)U(s)]$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafında gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{cases} -\rho(s)\omega(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) = 0, \\ \sigma(s)\omega_1(s)\beta(s) - \mu(s)\omega_1(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıdaki biçimdedir. Burada $\omega(s) = \mp 1$ ve $\omega_1(s) = \mp 1$ bahsedilen bu şartlar ile denklem sistemi dört farklı şekilde çözüme sahiptir. Bunlar;

i) $\omega(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ şartlarında

$$\begin{cases} -\rho(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) - \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi mevcuttur ve $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s) = h_1$ değeri bulunur, (h_1 bir sabittir). Sistemin başka bir denklemi olan $\beta'(s) = 0$ için $\beta(s) = h_2$ elde edilir ve burada h_2 bir sabittir. Ayrıca ilk denklemden $\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ olur ve $\rho(s) \neq 0$ dır. Denklemlerin çözümleri neticesinde oluşan eğri;

$$\alpha(s) = h_2 R(s) + h_1 W(s)$$

şeklindedir.

ii) $\omega(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ alınırsa;

$$\begin{cases} \rho(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) = 0, \\ \sigma(s)\beta(s) - \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

dır. Burada $\gamma'(s) = 0$ denkleminden $\gamma(s) = h_3$olup h_3 sabittir. İkinci denklem olan $\beta'(s) = 0$ için $\beta(s) = h_4$, ($h_4$sabittir). İlaveten $\rho(s)\beta(s) = 1$ denkleminden ise $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ değeri bulunur ve değerde belirtilen $\rho(s) \neq 0$ dır. Denklem sisteminde bulunan değerler için aranılan eğri;

$$\alpha(s) = h_4 R(s) + h_3 W(s)$$

şeklindedir.

iii) $\omega(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ olma durumu göz önüne alınırsa denklem sistemi

$$\begin{cases} -\rho(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) = 0, \\ -\sigma(s)\beta(s) + \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Burada son denklemden bir sabit olan h_5 için $\gamma(s) = h_5$ bulunur. İkinci denklemden de $\beta(s) = h_6$ elde edilir ve burada h_6 bir sabittir. Ayrıca $-\rho(s)\beta(s) = 1$ denklemi için ise bulunan değer $\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ dir, ($\rho(s) \neq 0$). Böylece bu denklem sisteminin çözümüne ilişkin eğri;

$$\alpha(s) = h_6 R(s) + h_5 W(s)$$

dir.

iv) $\omega(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ için;

$$\begin{cases} \rho(s)\beta(s) = 1, \\ \beta'(s) = 0, \\ -\sigma(s)\beta(s) + \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi mevcuttur. Sistemin dördüncü denklemi olan $\gamma'(s) = 0$ için $\gamma(s) = h_7$ vardır ve burada h_7 nin sabit olduğu açıktır. İkinci denklem olan $\beta'(s) = 0$ için $\beta(s) = h_8$, (h_8 bir sabittir). Ayrıca $\rho(s)\beta(s) = 1$ denklemi için de $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ biçimindedir ve burada $\rho(s) \neq 0$ dır. Sonuç olarak aranılan eğri;

$$\alpha(s) = h_8 R(s) + h_7 W(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.6. α, L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri ve {T(s), R(s), U(s), W(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Çatının {U(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = h_9 W(s),$$

$$\alpha(s) = h_{10} W(s),$$

$$\alpha(s) = h_{11}W(s),$$
$$\alpha(s) = h_{12}W(s),$$
$$\alpha(s) = h_{13}W(s),$$
$$\alpha(s) = h_{14}W(s),$$
$$\alpha(s) = h_{15}W(s),$$
$$\alpha(s) = h_{16}W(s)$$

biçimindedir ve h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{16} birer sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)U(s) + \gamma(s)W(s)$ eğrisi olarak alınsın. Burada β, γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınmak üzere

$$\alpha'(s) = \beta'(s)U(s) + \beta(s)U'(s) + \gamma'(s)W(s) + \gamma(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ için

$T(s)=\beta'(s)U(s)+\beta(s)[-\sigma(s)\varphi(s)R(s)\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)W(s)]+\gamma'(s)W(s)+$
$\gamma(s)[-\mu(s)\omega_1(s)U(s)]$ elde edilir. Buradan denklemin düzenlenmesi ile:

$$\begin{cases} -\sigma(s)\varphi(s)\beta(s) = 0, \\ \beta'(s) - \mu(s)\omega_1(s)\gamma(s) = 0, \\ -\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)\beta(s)+\gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Denklem sistemindeki sabitler olan $\omega(s) = \mp 1, \varphi(s) = \mp 1$ ve $\omega_1(s) = \mp 1$ için şartlar incelenerek sekiz farklı denklem sisteminden söz edilir. Bunların durumları aşağıda incelemiştir:

i) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ için denklem sistemi

$$\begin{cases} -\sigma(s)\beta(s) = 0, \\ \beta'(s) - \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ -\mu(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. İlk olarak $-\sigma(s)\beta(s) = 0$ denkleminden $\sigma(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ durumları bulunur. $\sigma(s) = 0$ için sistemin bir çözümü bulunamaz. Diğer taraftan $\beta(s) = 0$ durumu için $-\mu(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminde elde edilen bağıntılar yerine yazıldığında $\gamma'(s) = 0$ elde edilir. Buradan $\gamma(s) = h_9$ olup h_9 bir sabittir. O halde istenilen eğri

$$\alpha(s) = h_9W(s)$$

şeklindedir.

ii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ şartlarında

$$\begin{cases} -\sigma\,(s)\beta(s) = 0, \\ \beta'(s) - \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ \mu(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıdaki gibidir. İlk olarak $\sigma\,(s)\beta(s) = 0$ denkleminden $\sigma\,(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ olmak üzere iki durum mevcuttur. $\sigma\,(s) = 0$ için denklem sisteminin bir çözümü yoktur, dolayısıyla çözüme ait bir eğri de mevcut değildir. İkinci durum olan $\beta(s) = 0$ için $\mu(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden $\gamma'(s) = 0$ sonucuna ulaşılır. Böylece ulaşılan sonuç gereğince $\gamma(s) = h_{10}$ gibi bir sabittir. Bu şartlar çerçevesinde oluşan eğri;

$$\alpha(s) = h_{10}W(s)$$

şeklinde elde edilir.

iii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ şartları için

$$\begin{cases} \sigma\,(s)\beta(s) = 0, \\ \beta'(s) - \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ \mu(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

dir. Denklemlerin ilk $\sigma\,(s)\beta(s) = 0$ dan $\sigma\,(s) = 0$ veya $\beta(s) = 0$ olacak şekilde iki farklı durum söz konusudur. $\beta(s) = 0$ değeri üçüncü denklemde yerine yazılırsa $\gamma'(s) = 0$ olarak bulunur. Bu da $\gamma(s) = h_{11}$ olması demektir ve burada h_{11} bir sabittir. Böylece denklem sistemi için mevcut olan eğri;

$$\alpha(s) = h_{11}W(s)$$

olarak bulunur.

iv) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ olmak üzere denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} -\sigma\,(s)\beta(s) = 0, \\ \beta'(s) + \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ \mu(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0. \end{cases}$$

İlk denklem olan $\sigma\,(s)\beta(s) = 0$ için $\sigma\,(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ olacak şekilde iki durum mevcuttur. Sistemdeki üçüncü denklem için de bilinen $\beta(s) = 0$ eşitliği yerine yazıldığında $\gamma'(s) = 0$ olduğu görülür. Böylece $\gamma(s) = h_{12}$ olup (h_{12}bir sabittir). Dolayısıyla bulunan eğri

$$\alpha(s) = h_{12}W(s)$$

şeklindedir.

v) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ durumları için

$$\begin{cases} \sigma\,(s)\beta(s) = 0, \\ \beta'(s) - \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ -\mu(s)\beta(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıdaki gibidir. Burada $\sigma(s)\beta(s) = 0$ eşitliğinden $\sigma(s) = 0$ ile $\beta(s) = 0$ olmak üzere iki farklı durum söz konusudur. Eğer $\beta(s) = 0$ ise $-\mu(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0$ denklemi için $\gamma'(s) = 0$ olduğundan $\gamma(s) = h_{13}$ bulunur ve ifade edilen h_{13} bir sabittir. Dolayısıyla denklem sistemi için istenilen eğri

$$\alpha(s) = h_{13}W(s)$$

olarak bulunur.

vi) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartlarında denklem sistemi

$$\begin{cases} \sigma(s)\beta(s) = 0, \\ \beta^{'}(s) + \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ -\mu(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0 \end{cases}$$

olarak söylenir. Sistemin ilk denkleminden $\sigma(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ olacak şekilde iki durumdan söz edilebilir. İlk durum olan $\sigma(s) = 0$ için bir çözüm mevcut değildir. İkinci durum olan $\beta(s) = 0$ için ise üçüncü denklemden $\gamma'(s) = 0$ olduğu görülür. Böylece h_{14} bir sabit olmak üzere $\gamma(s) = h_{14}$ olup istenilen eğri;

$$\alpha(s) = h_{14}W(s)$$

şeklindedir.

vii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ olarak alınması halinde

$$\begin{cases} -\sigma(s)\beta(s) = 0, \\ \beta^{'}(s) + \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ -\mu(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi bulunur. $\sigma(s)\beta(s) = 0$ denkleminde iki durumdan bahsedilir. Bunlar $\sigma(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ dır. İlk durum için $-\mu(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0$ denkleminde ve $\beta(s) = 0$ değeri yerine yazıldığında $\gamma'(s) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\gamma(s) = h_{15}$ olarak bulunur, (h_{15} bir sabittir). Sistem için aranılan eğri;

$$\alpha(s) = h_{15}W(s)$$

dir.

viii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ olmak üzere

$$\begin{cases} \sigma(s)\beta(s) = 0, \\ \beta^{'}(s) + \mu(s)\gamma(s) = 0, \\ \mu(s)\beta(s) + \gamma^{'}(s) = 0 \end{cases}$$

dir. Burada denklem sistemin ilk denklemi $\sigma(s)\beta(s) = 0$ dan $\sigma(s) = 0$ ve $\beta(s) = 0$ olacak şekilde iki farklı değerin olduğu görülür. Değerlerin ilki $\sigma(s) = 0$ için denklem sistemine ait bir çözüm mevcut değildir. Ardından ikinci değer olan $\beta(s)=0$ için $\mu(s)\beta(s)+\gamma^{'}(s)=0$ denkleminden $\gamma'(s)=0$ sonucu elde edilir ki bu da $\gamma(s)=h_{16}$ olduğu anlamına gelir. Bulunan bu $\gamma(s)$ için h_{16} bir sabittir. Bu şartları sağlayan denklem sistemine ait eğri

$$\alpha(s)=h_{16}W(s)$$

biçimindedir.

Teorem 4.2.7. L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri α ve {T(s), R(s), U(s), W(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {T(s), R(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s)=h_{17}T(s),$$
$$\alpha(s)=h_{18}T(s),$$
$$\alpha(s)=h_{19}T(s),$$
$$\alpha(s)=h_{20}T(s),$$
$$\alpha(s)=h_{21}T(s),$$
$$\alpha(s)=h_{22}T(s),$$
$$\alpha(s)=h_{23}T(s),$$
$$\alpha(s)=h_{24}T(s)$$

olup h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24} birer sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s)=\beta(s)T(s)+\gamma(s)R(s)+\theta(s)U(s)$ eğrisi olarak alalım. Burada β, γ ve θ; s parametresi için diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup α eğrisinde her iki tarafın s parametresine göre türevinin alınmasıyla

$$\alpha'(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)T'(s)+\gamma'(s)R(s)+\gamma(s)R'(s)+\theta'(s)U(s)+\theta(s)U'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ olmak üzere

$$\alpha'(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)[\rho(s)\varphi(s)R(s)]+\gamma'(s)R(s)+\gamma(s)[-\rho(s)\omega(s)T(s)+\sigma(s)\omega_1(s)U(s)]$$
$$+\theta'(s)U(s)+\theta(s)[-\sigma(s)\varphi(s)R(s)-\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)W(s)]$$

bulunur. Buradan denklemin düzenlenmesiyle

$$\begin{cases}\beta^{'}(s)-\gamma(s)\rho(s)\omega(s)=1,\\ \beta(s)\rho(s)\varphi(s)+\gamma^{'}(s)-\theta(s)\sigma(s)\varphi(s)=0,\\ \gamma(s)\sigma(s)\omega_1(s)+\theta^{'}(s)=0,\\ -\theta(s)\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)=0\end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemindeki $\omega(s)=\mp1, \varphi(s)=\mp1$ ve $\omega_1(s)=\mp1$ değerleri için sekiz farklı durum mevcuttur. Bunlar aşağıdaki şekilde incelenmiştir:

i) $\omega(s)=1, \varphi(s)=1$ ve $\omega_1(s)=1$ olduğu durum için denklem sistemi

$$\begin{cases} \beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0, \\ -\theta(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. Sistemin son denklemi $-\theta(s)\mu(s) = 0$ dan $\theta(s) = 0$ veya $\mu(s) = 0$ olmak üzere elde edilen iki farklı değer mevcuttur. Değerlerden ilki $\theta(s) = 0$ durumu göz önüne alınırsa $\theta'(s) = 0$ olup bu üçüncü denklemde yerine yazılırsa $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ durumları elde edilir. Ayrıca $\mu(s) = 0$ durumu için denklem sisteminin bir çözümü yoktur. Diğer taraftan $\gamma(s) = 0$ durumu için $\gamma'(s) = 0$ dir ve $\beta'(s)\rho(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde bulunan değerler yerine yazılırsa $\beta'(s) = 0$ ve $\rho(s) = 0$ durumları elde edilir. $\beta'(s) = 0$ olması halinde ise 0= 1 gibi bir çelişki mevcut olduğundan bir α eğrisi elde edilmez. Diğer durum olan $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminden h_{17} sabit değeri için $\beta(s) = h_{17}$ mevcuttur. Bu şartlar altında aranılan α eğrisi

$$\alpha(s) = h_{17}T(s)$$

dir.

ii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olması durumunda

$$\begin{cases} \beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0, \\ \theta(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. Denklem sisteminin son denklemi $\theta(s)\mu(s) = 0$ dan $\theta(s) = 0$ veya $\mu(s) = 0$ olacak şekilde iki farklı durum söz konusudur. Burada $\theta(s) = 0$ durumu göz önüne alınması ile $\theta'(s) = 0$ olur ve bu $\gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ durumlarından söz edilir. Bu durumların ilki $\gamma(s) = 0$ için $\gamma'(s) = 0$ dır ve $\beta'(s)\rho(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde bulunan değerler yerlerine yazılırsa $\beta'(s) = 0$ ve $\rho(s) = 0$ değerlerinin var olduğu görülür. $\beta'(s) = 0$ olması halinde ise 0= 1 gibi bir çelişki bulunur ve bu şartlar için bir α eğrisinin mevcudiyetinden söz edilemez. İkinci durum olan $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = h_{18}$, (h_{18} bir sabittir). Böylece α eğrisi bu şartlar sağlandığında;

$$\alpha(s) = h_{18}T(s)$$

ifade edilir.

iii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ durumu için denklem sistemi şu şekildedir:

$$\begin{cases} \beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ -\beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) + \theta(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0, \\ \theta(s)\mu(s) = 0. \end{cases}$$

Burada $\theta(s)\mu(s) = 0$ denklemi için $\theta(s) = 0$ veya $\mu(s) = 0$ durumları vardır. $\theta(s) = 0$ durumu göz önüne alınırsa $\theta'(s) = 0$ elde edilir ve $\gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0$ denkleminde elde edilen bağıntı yerine yazılırsa $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ olma halleri bulunur. $\gamma(s) = 0$ durumu için $\gamma'(s) = 0$ olup $-\beta'(s)\rho(s) + \gamma'(s) + \theta(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\beta'(s) = 0$ ve $\rho(s) = 0$ durumlarından söz edilir. Buradan $\beta'(s) = 0$ olması halinde 0= 1 çelişkisi vardır ve bu şartlar göz önüne alınırsa bir α eğrisi elde edilemez. Diğer durum olan $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = h_{19}$ bulunur, (h_{19} sabittir). Aranılan α eğrisi bu şartlar altında;

$$\alpha(s) = h_{19}T(s)$$

biçimindedir.

iv) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartlarında

$$\begin{cases} \beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\sigma(s) = 0, \\ -\gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0, \\ \theta(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıda gösterildiği gibi ifade edilir. Sistemin dördüncü denklemi $\theta(s)\mu(s) = 0$ dan $\theta(s) = 0$ veya $\mu(s) = 0$ olacak biçimde iki farklı durum elde edilir. İlk olarak $\theta(s) = 0$ durumu göz önüne alınırsa $\theta'(s) = 0$ dır ve bu üçüncü denklemde yerine yazılırsa $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ durumları bulunur. İlk olarak $\gamma(s) = 0$ için $\gamma'(s) = 0$ dır ve ikinci denklemde yerine yazılırsa $\beta'(s) = 0$ ve $\rho(s) = 0$ durumları mevcuttur. Dahası $\beta'(s) = 0$ olması halinde 0= 1 den çelişki elde edilir ve bu şartları sağlayan bir α eğrisinden bahsedilemez. Diğer durum olan $\rho(s) = 0$ için birinci denklemden $\beta(s) = h_{20}$ bulunur ve burada h_{20} bir sabittir. Bu şartlar dahilinde elde edilen eğri;

$$\alpha(s) = h_{20}T(s)$$

dir.

v) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ alınırsa;

$$\begin{cases} \beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ -\beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) + \theta(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0, \\ \theta(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. $\theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminden $\theta(s) = 0$ veya $\mu(s) = 0$ değerleri bulunur. İlk olarak $\theta(s) = 0$ durumu göz önüne alınırsa $\theta'(s) = 0$ dır ve $\gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0$ denklemi için ise bulunan bu değerler yerine yazılırsa $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ durumları da elde edilir. Durumların ilki $\gamma(s) = 0$ için $\gamma'(s) = 0$ olduğu söylenir ve $-\beta'(s)\rho(s) + \gamma'(s) + \theta(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde elde edilen değerlerin yerine yazılması ile $\beta'(s) = 0$ ve $\rho(s) = 0$ durumlarının varlığından söz edilir. Şimdi $\beta'(s) = 0$ olması durumunda 0= 1 den çelişki elde edilir ve bu şartlarda bir α eğrisi yoktur. Diğer durum olan $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminde h_{21} sabit değeri için $\beta(s) = h_{21}$ olduğu görülür. Sistemin ortak çözümü için oluşturulan eğri;

$$\alpha(s) = h_{21}T(s)$$

biçiminde ifade edilir.

vi) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartlar altında aşağıdaki dört denklemden oluşan denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\sigma(s) = 0, \\ -\gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0, \\ -\theta(s)\mu(s) = 0. \end{cases}$$

Denklem sistemi çözülürse son denklemden $\theta(s) = 0$ veya $\mu(s) = 0$ hallerinden bahsedilir. Burada $\mu(s) = 0$ için denklem sisteminin bir çözümü mevcut değildir. Diğer hal olan $\theta(s) = 0$ dikkate alınırsa $\theta'(s) = 0$ bulunur. Ayrıca $-\gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0$ denklemi için ise $\gamma(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ değerleri mevcuttur. Eğer $\gamma(s) = 0$ durumu dikkate alınırsa $\gamma'(s) = 0$ vardır ve denklem sistemindeki $\beta'(s)\rho(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\sigma(s) = 0$ denkleminden $\beta'(s) = 0$ ve $\rho(s) = 0$ durumları söz konusudur. Bu durumların ilki olan $\beta'(s) = 0$ olması durumundan çelişki elde edilir ve bu şartlar için bir α eğrisi olmadığı görülür. Diğer durum olan $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = h_{22}$ bulunur burada h_{22} bir sabittir. O zaman denklem sistemine ait eğri ;

$$\alpha(s) = h_{22}T(s)$$

olarak bulunur.

vii) $\omega(s)=1, \varphi(s)=-1$ ve $\omega_1(s)=-1$ durumları için denklem sistemi

$$\begin{cases} -\beta'(s)+\gamma(s)\rho(s)=1, \\ -\beta(s)\rho(s)+\gamma'(s)+\theta(s)\sigma(s)=0, \\ -\gamma(s)\sigma(s)+\theta'(s)=0, \\ -\theta(s)\mu(s)=0, \end{cases}$$

şeklindedir. $-\theta(s)\mu(s)=0$ denkleminden $\theta(s)=0$ veya $\mu(s)=0$ bağıntıları mevcuttur. $\theta(s)=0$ durumu göz önüne alınırsa $\theta'(s)=0$ bulunur ve $-\gamma(s)\sigma(s)+\theta'(s)=0$ denkleminde yerine yazılırsa $\gamma(s)=0$ ve $\sigma(s)=0$ durumları elde edilir. O zaman $\gamma(s)=0$ durumu için $\gamma'(s)=0$ olup $-\beta'(s)\rho(s)+\gamma'(s)+\theta(s)\sigma(s)=0$ denkleminde yerine yazılırsa $\beta'(s)=0$ ve $\rho(s)=0$ olduğu görülür. Eğer $\beta'(s)=0$ ise 0= 1 çelişkisi elde edilir ve bu şartlarda bir α eğrisi elde edilemez. Diğer durum olan $\rho(s)=0$ için $-\beta'(s)+\gamma(s)\rho(s)=1$ denkleminden $\beta(s)=h_{23}$, (h_{23} bir sabittir). Böylece bu şartlarda α eğrisi

$$\alpha(s)=h_{23}T(s)$$

dir.

viii) $\omega(s)=-1, \varphi(s)=-1$ ve $\omega_1(s)=-1$ alınırsa;

$$\begin{cases} \beta'(s)+\gamma(s)\rho(s)=1, \\ -\beta(s)\rho(s)+\gamma'(s)+\theta(s)\sigma(s)=0, \\ -\gamma(s)\sigma(s)+\theta'(s)=0, \\ \theta(s)\mu(s)=0 \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıdaki gibi ifade edilir. Denklem sistemi çözülürse dördüncü denklemden $\theta(s)=0$ veya $\mu(s)=0$ durumlarının mevcut olduğu söylenir. Burada $\theta(s)=0$ durumu göz önüne alınırsa $\theta'(s)=0$ olur ve$-\gamma(s)\sigma(s)+\theta'(s)=0$ denklemi için $\theta'(s)=0$ yerine yazılırsa $\gamma(s)=0$ ve $\sigma(s)=0$ durumlarının olduğu ortaya çıkar. $\gamma(s)=0$ için $\gamma'(s)=0$ olup ikinci denklemde yerine yazılırsa $\beta'(s)=0$ ve $\rho(s)=0$ durumları elde edilir. Benzer işlem $\beta'(s)=0$ olması durumu için de tekrarlanırsa 0= 1 çelişkisi ortaya çıkar. Dolayısıyla bu durum için birα eğrisi elde edilemez. Diğer durum olan $\rho(s)=0$ için $\beta'(s)+\gamma(s)\rho(s)=1$ denkleminden $\beta(s)=h_{24}$ değeri bulunur ve h_{24} ün sabit olduğu söylenir. Böylece eğri

$$\alpha(s)=h_{24}T(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.8. L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri α ve {T(s), R(s), U(s), W(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {T(s), R(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = \frac{h_{25}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{25}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + h_{26})T(s) + \frac{h_{25}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{25}W(s);$$

$$\alpha(s) = \frac{h_{27}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{27}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + h_{28})T(s) + \frac{h_{27}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{27}W(s);$$

$$\alpha(s) = \frac{h_{29}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{29}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + h_{30})T(s) + \frac{h_{29}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{29} W(s);$$

$$\alpha(s) = \frac{h_{31}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{31}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + h_{32})T(s) + \frac{h_{31}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{31}W(s);$$

$$\alpha(s) = \frac{h_{33}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{33}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + h_{34})T(s) + \frac{h_{33}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{33}W(s);$$

$$\alpha(s) = \frac{h_{35}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{35}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + h_{36})T(s) + \frac{h_{35}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{35}W(s);$$

$$\alpha(s) = \frac{h_{37}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{37}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + h_{38})T(s) + \frac{h_{37}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{37}W(s);$$

$$\alpha(s) = \frac{h_{39}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{39}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + h_{40})T(s) + \frac{h_{39}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{39}W(s)$$

dir. Burada h_{25},h_{26}, h_{27}, h_{28}, h_{29}, h_{30}, h_{31}, h_{32}, h_{33}, h_{34}, h_{35}, h_{36}, h_{37},h_{38}, h_{39} ve h_{40} ile sabitlerin olduğu ifade edilmiştir.

İspat: $\alpha(s)=\beta(s)T(s)+ \gamma(s)R(s)+\theta(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada β, γ ve θ; s parametresi için diferensiyellenebilir fonksiyonları gösterir. α eğrisinde her iki tarafının s parametresine göre türevini alma işlemi yapılırsa;

$$\alpha'(s) = \beta'(s)T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)R(s) + \gamma(s)R'(s) + \theta'(s)W(s) + \theta(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ yazılırsa

$$\alpha'(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)[\rho(s)\varphi(s)R(s)]+\gamma'(s)R(s)+\gamma(s)[-\rho(s)\omega(s)T(s) + \sigma(s)\omega_1(s)U(s)]$$

$$+\theta'(s)W(s)+ \theta(s)[-\mu(s)\omega_1(s)U(s)]$$

denklem bu şekilde elde edilir. Eşitliğin düzenlenmesi ile

$$\begin{cases} \beta'(s) - \gamma(s)\rho(s)\omega(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s)\varphi(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \gamma(s)\sigma(s)\omega_1(s) - \theta(s)\mu(s)\omega_1(s) = 0, \\ \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sisteminin bu şekilde olduğu görülür. Bu denklemlerden oluşan sistemin ortak bir çözümünün ve bu çözüme ait eğri veya eğrilerin elde edilebilmesi için $\omega(s) = \mp 1, \varphi(s) = \mp 1$ ve $\omega_1(s) = \mp 1$ sabitleri baz olarak alınarak sekiz farklı durumun olduğu gözlemlenir ve bu durumlara göre denklem sisteminin alacağı haller aşağıdakiler gibidir.

i) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olduğu durum için denklem sistemi şu şekildedir;

$$\begin{cases} \beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

$\theta'(s) = 0$ ise $\theta(s) = h_{25}$ ve h_{25} bir sabittir. Diğer bir denklem $\gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ dan $\theta(s) = h_{25}$ kullanılırsa $\gamma(s) = \frac{h_{25}\mu(s)}{\sigma(s)}$ olacak şekilde bir sabit olduğu görülür ($\sigma(s) \neq 0$), $\gamma'(s) = 0$ dır. Ardından diğer denklem olan $B(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0$ için $\beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden $\beta(s)\rho(s) = 0$ elde edilir. Buradan iki durum söz konusu olur. Bunların ilki $\beta(s) = 0$ dır ve bu durum için $\beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1$ dir. İkinci durum $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + h_{26}$ ve h_{26} bir sabit olduğu görülür. $\beta(s) = 0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s) = \frac{h_{25}\mu(s)}{\sigma(s)} R(s) + h_{25} W(s)$$

dir, $\rho(s) = 0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s) = (s + h_{26})T(s) + \frac{h_{25}\mu(s)}{\sigma(s)} R(s) + h_{25} W(s)$$

dir.

ii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ şartlarını sağlayan denklem sistemi

$$\begin{cases} \beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

dır. Burada ortak çözüm için sistemin son denkleminden başlanılırsa; $\theta'(s) = 0$ ise $\theta(s) = h_{27}$ ve burada ifade edilen h_{27} bir sabittir. Üçüncü denklem $\gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ da $\theta(s) = h_{27}$ yerine yazılırsa $\gamma(s) = \frac{h_{27}\,\mu(s)}{\sigma(s)}$ sabit olup ($\sigma(s) \neq 0$). Böylece $\gamma'(s) = 0$

vardır. $\beta(s)\rho(s)+\gamma'(s)=0$ denklemi için $\gamma'(s)=0$ değerinin kullanılmasıyla birlikte $\beta(s)\rho(s)=0$ elde edilir. Buradan iki durum söz konusu olur. $\beta(s)=0$ durumu için $\beta'(s)+\gamma(s)\rho(s)=1$ dir. $\rho(s)=0$ durumu için $\beta'(s)+\gamma(s)\rho(s)=1$ denkleminden $\beta(s)=s+h_{28}$ ve h_{28} bir sabittir

$\beta(s)=0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s)=\frac{h_{27}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s)+h_{27}W(s)$$

şeklindedir.

$\rho(s)=0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s)=(s+h_{28})T(s)+\frac{h_{27}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s)+h_{27}W(s)$$

şeklindedir.

iii) $\omega(s)=1, \varphi(s)=-1$ ve $\omega_1(s)=1$ şartları alınırsa;

$$\begin{cases} \beta'(s)-\gamma(s)\rho(s)=1, \\ -\beta(s)\rho(s)+\gamma'(s)=0, \\ \gamma(s)\sigma(s)-\theta(s)\mu(s)=0, \\ \theta'(s)=0, \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıdaki gibi yazılır. Sistemin son denklemi olan $\theta'(s)=0$ dan $\theta(s)=h_{29}$ ve h_{29} bir sabit olarak söylenir. $\gamma(s)\sigma(s)-\theta(s)\mu(s)=0$ denklemi için $\theta(s)=h_{29}$ yerine yazılması ile $\gamma(s)=\frac{h_{29}\,\mu(s)}{\sigma(s)}$ sabit olduğu görülür ve $\sigma(s)\neq 0$ olup $\gamma'(s)=0$ olduğu ifade edilir. $-\beta(s)\rho(s)+\gamma'(s)=0$ denklemi için ise $-\beta(s)\rho(s)+\gamma'(s)=0$ denkleminden $\beta(s)\rho(s)=0$ bulunur. Buradan iki durum mevcut ve bu durumlar sırasıyla $\beta(s)=0$ ve $\rho(s)=0$ dir. $\beta(s)=0$ durumu için $\beta'(s)-\gamma(s)\rho(s)=1$ dir. Diğer durum olan $\rho(s)=0$ için $\beta'(s)-\gamma(s)\rho(s)=1$ denkleminden $\beta(s)=s+h_{30}$ elde edilir, (h_{30} bir sabittir). Böylece $\beta(s)=0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s)=\frac{h_{29}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s)+h_{29}W(s)$$

dir. $\rho(s)=0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s)=(s+h_{30})T(s)+\frac{h_{29}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s)+h_{29}W(s)$$

biçimindedir.

iv) $\omega(s)=1, \varphi(s)=1$ ve $\omega_1(s)=-1$ olmak üzere

$$\begin{cases} \beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\gamma(s)\sigma(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıda gibi yazılır. Denklem sisteminin ortak çözümünü elde etmek için sistemin son denklemi $\theta'(s) = 0$ dan $\theta(s) = h_{31}$ bulunur (h_{31}bir sabittir). Üçüncü denklem $-\gamma(s)\sigma(s) + \theta(s)\mu(s) = 0$ için $\theta(s) = h_{31}$ olduğu kullanılırsa $\gamma(s) = \frac{h_{31}\mu(s)}{\sigma(s)}$ sabit olduğu söylenir $(\sigma(s) \neq 0)$. Bulunan sabitten $\gamma'(s) = 0$ elde edilir. İkinci denklem $\beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0$ da bulunan bu eşitliğin yazılması ile $\beta(s)\rho(s) = 0$ elde edilir. Buradan iki durum söz konusudur. $\beta(s) = 0$ durumundan $-\gamma(s)\rho(s) = 1$ elde edilir. $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + h_{32}$ ve h_{32} sabit olduğu söylenir. Sonuç olarak ;

$\beta(s) = 0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s) = \frac{h_{31}\mu(s)}{\sigma(s)} R(s) + h_{31} W(s)$$

formunda yazılır. $\rho(s) = 0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s) = (s + h_{32}) T(s) + \frac{h_{31}\mu(s)}{\sigma(s)} R(s) + h_{31} W(s)$$

dir.

v) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ durumu için denklem sistemi şu şekildedir;

$$\begin{cases} \beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ -\beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

olduğu görülür. Burada $\theta'(s) = 0$ ise $\theta(s) = h_{33}$ vardır, ayrıca h_{33} bir sabittir. Sistemin diğer bir denklemi $\gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ için elde edilen bu değer yerine yazılırsa $\gamma(s) = \frac{h_{33}\mu(s)}{\sigma(s)}$ sabiti elde edilir $(\sigma(s) \neq 0)$ ve $\gamma'(s) = 0$ dır. $-\beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0$ denklemi için bulunan $\gamma'(s) = 0$ denklemde yerine yazılırsa $\beta(s)\rho(s) = 0$ mevcut olduğu söylenir. Buradan iki durum söz konusudur. $\beta(s) = 0$ durumu göz önüne alınırsa $\gamma(s)\rho(s) = 1$ dir. Diğer durum göz önüne alınırsa $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + h_{34}$ dir. Dolayısıyla h_{34} birsabittir.

$\beta(s) = 0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s) = \frac{h_{33}\mu(s)}{\sigma(s)} R(s) + h_{33} W(s)$$

biçimindedir.

$\rho(s) = 0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s) = (s + h_{34})T(s) + \frac{h_{33}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{33}W(s)$$

biçimindedir.

vi) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartlarının göz önüne alınması ile;

$$\begin{cases} \beta^{'}(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma^{'}(s) = 0, \\ -\gamma(s)\sigma(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \theta^{'}(s) = 0. \end{cases}$$

Bu dört denklemden oluşan sistemin ortak çözümü için sistemdeki denklemler irdelenirse; $\theta'(s) = 0$ denkleminden $\theta(s) = h_{35}$ bulunur, (h_{35} bir sabit). Diğer denklem olan $-\gamma(s)\sigma(s) + \theta(s)\mu(s) = 0$ için elde edilen bulunan değer yerine yazılırsa $\gamma(s) = \frac{h_{35}\mu(s)}{\sigma(s)}$ sabiti bulunur ve $\sigma(s) \neq 0$. Böylece $\gamma'(s) = 0$ olduğundan bahsedilir. Burada $\beta(s)\rho(s) + \gamma^{'}(s) = 0$ denklemi için $\gamma'(s) = 0$ ise $\beta(s)\rho(s) = 0$ elde edilir. Burada iki durumun varlığından söz edilir. İlk durum $\beta(s) = 0$ için $\gamma(s)\rho(s) = 1$ dir. İkinci durum $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) = 1$eşitliğinden $\beta(s) = s + h_{36}$ söylenir ve burada h_{36} bir sabittir.

$\beta(s) = 0$ durumu için elde edilen eğri;

$$\alpha(s) = \frac{h_{35}\mu(s)}{\sigma(s)} R(s) + h_{35}W(s)$$

şeklindedir.

$\rho(s) = 0$ durumu için elde edilen eğri;

$$\alpha(s) = (s + h_{36})T(s) + \frac{h_{35}\mu(s)}{\sigma(s)} R(s) + h_{35}W(s)$$

şeklindedir.

vii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$durum için denklem sistemi;

$$\begin{cases} \beta^{'}(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ -\beta(s)\rho(s) + \gamma^{'}(s) = 0, \\ -\gamma(s)\sigma(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \theta^{'}(s) = 0, \end{cases}$$

dir. Burada $\theta'(s) = 0$ denklemi için $\theta(s) = h_{37}$ olup bir sabit olduğu görülür. Diğer bir denklem olan $-\gamma(s)\sigma(s) + \theta(s)\mu(s) = 0$ için $\theta(s) = h_{37}$ kullanılırsa $\gamma(s) = \frac{h_{37}\mu(s)}{\sigma(s)}$ elde edilir ve bu ifade bir sabittir ($\sigma(s) \neq 0$). Dolayısıyla $\gamma'(s) = 0$ dır. Sistemin başka bir denklemi $-\beta(s)\rho(s) + \gamma^{'}(s) = 0$ da elde edilen $\gamma'(s) = 0$ değeri için $\beta(s)\rho(s) =$

0 bulunur. $\beta(s)\rho(s) = 0$ için iki durumun varlığı söz konusudur. İlki $\beta(s) = 0$ durumu için $\gamma(s)\rho(s) = 1$ dir. İkinci $\rho(s) = 0$durumu için $\beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + h_{38}$ olup h_{38} birsabit olduğu görülür.

$\beta(s) = 0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s) = \frac{h_{37}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{37}W(s)$$

dir.

$\rho(s) = 0$ durumu için oluşan eğri;

$$\alpha(s) = (s + h_{38})T(s) + \frac{h_{37}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{37}W(s)$$

şeklindedir.

viii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$şartlar altında

$$\begin{cases} \beta'(s) + \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ -\beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\gamma(s)\sigma(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

sistem yukarıda bahsedildiği gibidir. Denklem sisteminin ilk denklemi olan $\theta'(s) = 0$ için $\theta(s) = h_{39}$, dolayısıyla h_{39} bir sabit olarak mevcuttur. Diğer bir denklem olan $-\gamma(s)\sigma(s) + \theta(s)\mu(s) = 0$ için ise $\theta(s)$ kullanılırsa $\gamma(s) = \frac{h_{39}\mu(s)}{\sigma(s)}$ bulunur. Burada $\gamma(s)$sabit ve $\gamma'(s) = 0$ dır, $(\sigma(s) \neq 0)$. İkinci denkleminde, elde edilen değer yerine yazılırsa $\beta(s)\rho(s) = 0$ olur. Bu son elde edilen eşitlikten iki farklı hal mevcuttur. İlk hal $\beta(s) = 0$ için $\gamma(s)\rho(s) = 1$ dir. İkinci hal $\rho(s) = 0$ için $\beta'(s) = 1$ eşitliğinden söz edilir ve $\beta(s) = s + h_{40}$ olduğu bulunur (h_{40} sabittir).

$\beta(s) = 0$ için aranılan eğri;

$$\alpha(s) = \frac{h_{39}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{39}W(s)$$

ve $\rho(s) = 0$ içinaranılan eğri;

$$\alpha(s) = (s + h_{40})T(s) + \frac{h_{39}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{39}W(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.9. α, L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri ve eğrinin Frenet çatısı {T(s), R(s), U(s), W(s)} olsun. Bu çatının {T(s), U(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = (s + c_1)\, T(s) + \frac{(s+c_1)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s) + \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + c_2)\, T(s) + \frac{(s+c_2)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s) + \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)\ ,$$

$$\alpha(s) = (s + c_3)\, T(s) + \frac{(s+c_3)\rho(s)}{\sigma(s)} U(s) + \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)} W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + c_4) T(s) + \frac{(s+c_4)\rho(s)}{\sigma(s)} U(s) + \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)} W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + c_5)\, T(s) + \frac{(s+c_5)\rho(s)}{\sigma(s)} U(s) - \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)} W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + c_6)\, T(s) + \frac{(s+c_6)\rho(s)}{\sigma(s)} U(s) - \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)} W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + c_7)\, T(s) + \frac{(s+c_7)\rho(s)}{\sigma(s)} U(s) - \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)} W(s),$$

$$\alpha(s) = (s + c_8)\, T(s) + \frac{(s+c_8)\rho(s)}{\sigma(s)} U(s) - \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)} W(s)$$

formunda ifade edilir. Burada c_1,c_2, c_3, c_4, c_5,c_6, c_7, c_8 birer sabittirler.

İspat: $\alpha(s)=\beta(s)T(s)+\gamma(s)U(s)+\theta(s)W(s)$ eğrisi olarak alalım. Burada β, γ ve θ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup α eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\, T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)\, U(s) + \gamma(s)U'(s) + \theta'(s)W(s) + \theta(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)= T(s)$ olmak üzere

$\alpha'(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)[\rho(s)\varphi(s)R(s)]+\gamma'(s)U(s)+\gamma(s)[-\sigma(s)\varphi(s)R(s) -$

$\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)W(s)] + \theta'(s)W(s)+ \theta(s)\, [-\mu(s)\omega_1(s)U(s)]$

bulunur. Denklemin düzenlenmesi ile

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s)\varphi(s) - \gamma(s)\sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s)\omega_1(s) = 0, \\ -\gamma(s)\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s) + \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $\omega(s) = \mp 1, \varphi(s) = \mp 1$ ve $\omega_1(s) = \mp 1$ şartlarının dikkate alınması ile sekiz farklı durumla karşılaşıldığı görülür.

i) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$olmak üzere

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ -\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

dir. Denklem sisteminin ilk denklemi $\beta'(s) = 1$ in çözümüyle $\beta(s) = s + c_1$ bulunur ve c_1 bir sabittir. İkinci denklem $\beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ için bulunan $\beta(s) = s + c_1$ değeri yerine yazılırsa $\gamma(s) = \frac{(s+c_1)\rho(s)}{\sigma(s)}$ ve $\sigma(s) \neq 0$ dır. Böylece $\gamma'(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)}$ olup $\gamma'(s) -$

$\theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\theta(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}$ elde edilir ve dahası $(\mu(s) \neq 0)$. Dolayısıyla $\theta'(s) = 0$ olup $-\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ denklemi sağlanır. Buradan elde edilen eğri ;

$$\alpha(s) = (s + c_1)T(s) + \frac{(s+c_1)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s) + \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$$

biçimindedir.

ii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$alınırsa;

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

dir. Denklem sistemindeki denklemlerin ilki $\beta'(s) = 1$ için $\beta(s) = s + c_2$ ve c_2 sabittir. Burada $\beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denklemi için bulunan $\beta(s) = s + c_2$ değeri yerine yazılırsa $\gamma(s) = \frac{(s+c_2)\rho(s)}{\sigma(s)}$ ve $\sigma(s) \neq 0$ dır. $\gamma'(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)}$ olup $\gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminde yazılmasıyla $\theta(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}$ elde edilir. Burada $\mu(s) \neq 0$ olup $\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ denklemi sağlandığı görülür. Denklem sisteminde aranılan eğri ;

$$\alpha(s) = (s + c_2)\, T(s) + \frac{(s+c_2)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s) + \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}\, W(s)$$

biçimindedir.

iii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olmak üzere ;

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ -\beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi mevcuttur. İlk denklem olan $\beta'(s) = 1$ için $\beta(s) = s + c_3$ elde edilir ve c_3 bir sabittir. İkinci denklem olan $-\beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ için yerine yazılan $\beta(s)$ değerinden $\gamma(s) = \frac{(s+c_3)\rho(s)}{\sigma(s)}$ sonucu bulunur, $(\sigma(s) \neq 0)$. Ayrıca $\gamma'(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)}$ olup $\gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ için $\theta(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}$ elde edilir. Aynı zamanda $\mu(s) \neq 0$ dır ve $\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ denkleminin sağlandığı görülür. Böylece elde edilen eğri ;

$$\alpha(s) = (s + c_3)T(s) + \frac{(s+c_3)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s) + \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}\, W(s)$$

dir.

iv) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ olarak alınırsa;

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sisteminin ilk denklemi olan $\beta'(s) = 1$ için $\beta(s) = s + c_4$ bulunur ve (c_4 bir sabittir). İkinci denklem olan $\beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ de bulunan $\beta(s) = s + c_4$ değerinin yerine yazılması ile $\gamma(s) = \frac{(s+c_4)\rho(s)}{\sigma(s)}$ elde edilip $\sigma(s) \neq 0$ dır. Ayrıca $\gamma'(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)}$ olup üçüncü denklemde yerine yazılırsa $\theta(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}$ olduğu görülür. Dahası $\mu(s) \neq 0$, $\theta'(s) = 0$ olup $\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ denkleminin sağlandığı görülür. Denklem sistemine ait olan eğri;

$$\alpha(s) = (s + c_4)T(s) + \frac{(s+c_4)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s) + \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$$

biçimindedir.

v) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olarak alınmasıyla;

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ -\beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ -\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

yukarıdaki denklem sisteminin mevcut olduğu söylenir. Denklem sisteminin birinci denkleminden $\beta(s) = s + c_5$ elde edilir, (c_5 bir sabittir). Bulunan bu değer ikinci denklemde yerine yazılırsa $\gamma(s) = \frac{(s+c_5)\rho(s)}{\sigma(s)}$ bulunup $\sigma(s) \neq 0$ olduğu söylenir. İlaveten $\gamma'(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)}$ olup bu değer $\gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminde kullanılırsa $\mu(s) \neq 0$ için $\theta(s) = -\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}$ elde edilir. Bulunan değerler son denklem olan $-\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ için sağlanır. Buradan elde edilen eğri ;

$$\alpha(s) = (s + c_5)T(s) + \frac{(s+c_5)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s) - \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$$

şeklindedir.

vi) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ olmak üzere;

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ -\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sisteminin varlığından bahsedilir. Burada $\beta'(s) = 1$ denklemi için $\beta(s) = s + c_6$ elde edilir ve c_6 bir sabittir. $\beta(s)\rho(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde ise bulunan $\beta(s) = s + c_6$ değeri yerine yazılırsa $\gamma(s) = \frac{(s+c_6)\rho(s)}{\sigma(s)}$ bulunur, $(\sigma(s) \neq 0)$. Diğer taraftan $\gamma'(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)}$ olup $\gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0$ için $\theta(s) = -\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}$ elde edilir, $(\mu(s) \neq 0)$. Denklem sisteminin son denklemi sağlanıp ortak çözüm bulunur. Dolayısıyla elde edilen eğri ;

$$\alpha(s) = (s + c_6)T(s) + \frac{(s+c_6)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s) - \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$$

ifade edilir.

vii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ durumu için;

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ -\beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ -\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi mevcuttur. $\beta'(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = s + c_7$ elde edilir ve burada c_7 bir sabittir. Denklem sistemi çözülmeye devam edilirse $-\beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde $\beta(s) = s + c_7$ değeri yerine yazılırsa $\gamma(s) = \frac{(s+c_7)\rho(s)}{\sigma(s)}$ bulunur, $(\sigma(s) \neq 0)$. Ayrıca $\gamma'(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)}$ olur ve $\gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminden $\theta(s) = -\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}$ elde edilir, $(\mu(s) \neq 0)$. Böylece denklem sisteminin son denklemi olan $-\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ denkleminin sağlandığı görülür. Denklem sisteminin ortak çözümüne dair bulunan eğri ;

$$\alpha(s) = (s + c_7)T(s) + \frac{(s+c_7)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s) - \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$$

şeklindedir.

viii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ durumu için denklem sistemi şu şekilde ifade edilir;

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ -\beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0. \end{cases}$$

Denklem sisteminin ilk denkleminden c_8 sabit olmak üzere $\beta(s) = s + c_8$ olduğu görülür. $-\beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde ise bulunan $\beta(s) = s + c_8$ değeri yerine yazılırsa $\gamma(s)=\frac{(s+c_8)\rho(s)}{\sigma(s)}$ ve $\sigma(s)\neq 0$ dır. Dolayısıyla $\gamma'(s)=\frac{\rho(s)}{\sigma(s)}$ olup denklem sisteminin üçüncü denkleminde yerine yazılırsa $\theta(s)=-\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}$ bulunur. Ayrıca $\mu(s)\neq 0$ olup $\gamma(s)\mu(s)+\theta^{'}(s)=0$ denklemi sağlanır. Buradan aranılan eğri ;

$$\alpha(s)=(s+c_8)T(s)+\frac{(s+c_8)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s)-\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$$

bulunur.

Teorem 4.2.10. α, L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri ve {T(s), R(s), U(s), W(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {R(s), U(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s)=\frac{1}{\rho(s)}R(s)+\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s),$$

$$\alpha(s)=-\frac{1}{\rho(s)}R(s)+\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s),$$

$$\alpha(s)=\frac{1}{\rho(s)}R(s)-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s),$$

$$\alpha(s)=-\frac{1}{\rho(s)}R(s)-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s)=\beta(s)R(s)+\gamma(s)U(s)+\theta(s)W(s)$ eğrisi olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\beta'(s)R(s)+\beta(s)R'(s)+\gamma'(s)U(s)+\gamma(s)U'(s)+\theta'(s)W(s)+\theta(s)W'(s)$$

olarak bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ için

$$\alpha'(s)=\beta'(s)R(s)+\beta(s)[-\rho(s)\omega(s)T(s)+\sigma(s)\omega_1(s)U(s)]+\gamma^{'}(s)U(s)+\gamma(s)$$

$$[-\sigma(s)\varphi(s)R(s)-\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)W(s)]+\theta'(s)W(s)+\theta(s)[-\mu(s)\omega_1(s)U(s)]$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{cases} -\beta(s)\rho(s)\omega(s)=1, \\ \beta^{'}(s)-\gamma(s)\sigma(s)\varphi(s)=0, \\ \beta(s)\sigma(s)\omega_1(s)+\gamma^{'}(s)-\theta(s)\mu(s)\omega_1(s)=0, \\ -\gamma(s)\mu(s)\omega(s)\varphi(s)\omega_1(s)+\theta^{'}(s)=0, \end{cases}$$

denklem sisteminin yukarıda belirtildiği gibi olduğu görülür. Denklem sisteminin içerdiği $\omega(s)=\mp 1,\varphi(s)=\mp 1,\omega_1(s)=\mp 1$ için farklı durumları göz önüne alınarak sekiz farklı denklem sistemi elde edilir. Bunlar:

i) $\omega(s)=1,\varphi(s)=1$ ve $\omega_1(s)=1$ şartlarının seçimiyle

$$\begin{cases} -\beta(s)\,\rho(s) = 1, \\ \beta^{'}(s) - \gamma(s)\sigma\,(s) = 0, \\ \beta(s)\sigma(s) + \gamma^{'}(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ -\gamma(s)\mu(s) + \theta^{'}(s) = 0, \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Burada $-\beta(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ ve $\rho(s) \neq 0$ dır. $\beta'(s) = 0$, elde edilen değer $\beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde yazılırsa $\gamma(s)\sigma(s) = 0$ durumu söz konusudur. Oluşan durumlardan ilki $\gamma(s) = 0$ için $\gamma'(s) = 0$ vardır. $\beta(s)\sigma(s) + \gamma^{'}(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminden $\theta(s) = -\frac{\sigma\,(s)}{\rho(s)\mu(s)}$, $\mu(s) \neq 0$ ve $\theta'(s) = 0$ elde edilir. Böylece $-\gamma(s)\mu(s) + \theta^{'}(s) = 0$ denklemi sağlanır ve denklem sitemi için ortak bir çözümden bahsedilir. O zaman elde edilen eğri ise;

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\rho(s)}\,R(s) - \frac{\sigma\,(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s)$$

biçimindedir.

ii) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = 1$ için;

$$\begin{cases} \beta(s)\,\rho(s) = 1, \\ \beta^{'}(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \beta(s)\sigma(s) + \gamma^{'}(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \gamma(s)\mu(s) + \theta^{'}(s) = 0, \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. Sistemin ilk denklemi $\beta(s)\rho(s) = 1$ den $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ ve $\rho(s) \neq 0$ olduğu görülür. Ardından $\beta'(s) = 0$ bulunur. İkinci denklem $\beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ da yerine yazılırsa $\gamma(s)\sigma(s) = 0$ durumu elde edilir. Burada $\gamma(s) = 0$ olması durumu incelenirse $\beta(s)\sigma(s) + \gamma^{'}(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminden $\theta(s) = \frac{\sigma\,(s)}{\rho(s)\mu(s)}$, $\mu(s) \neq 0$ dir ve $\theta'(s) = 0$ elde edilir. Böylece $\gamma(s)\mu(s) + \theta^{'}(s) = 0$ denklemi sağlanıp denklem sistemi çözülür. Buradan elde edilen eğri ise;

$$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)}\,R(s) + \frac{\sigma\,(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s)$$

şeklindedir.

iii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olduğu durum için denklem sistemi şu şekildedir;

$$\begin{cases} -\beta(s)\,\rho(s) = 1, \\ \beta^{'}(s) + \gamma(s)\sigma\,(s) = 0, \\ \beta(s)\sigma(s) + \gamma^{'}(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \gamma(s)\mu(s) + \theta^{'}(s) = 0, \end{cases}$$

dir. Burada birinci denklem$-\beta(s)\rho(s) = 1$ den $\beta(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ bulunur ve dolayısıyla $\rho(s) \neq 0$ olduğu söylenir. Ayrıca $\beta'(s) = 0$ dır. Sistemin diğer denklemi $\beta'(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ için $\gamma(s)\sigma(s) = 0$ elde edilir. Eşitlikten $\gamma(s) = 0$ olması halinde $\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminden $\theta(s) = \frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}$ biçimindedir, aynı zamanda $\mu(s) \neq 0$ ve $\theta'(s) = 0$ dır. Böylece $\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ denklemi için bir çözüm mevcuttur. Eğri ise;

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\rho(s)} R(s) + \frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)} W(s)$$

şeklindedir.

iv) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$ şartları göz önüne alınırsa;

$$\begin{cases} -\beta(s)\rho(s) = 1, \\ \beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ -\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ \gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıdaki hali alır. Burada $-\beta(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = \frac{-1}{\rho(s)}$, $(\rho(s) \neq 0)$ dır. Bulunan bu değer için $\beta'(s) = 0$ olarak elde edilir. Sistemin diğer denklemi $\beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ da $\beta'(s) = 0$ yazılırsa $\gamma(s)\sigma(s) = 0$ olup iki farklı durum söz konusudur. İlk olarak $\gamma(s) = 0$ durumu için $-\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0$ denklemi incelenirse $\theta(s) = -\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}$, $\mu(s) \neq 0$ eşitliğinin mevcudiyetinden bahsedilir ve $\theta'(s) = 0$ dır. Böylece $\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ denklemi sağlanır. Ortak çözüme ait eğri ise;

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\rho(s)} R(s) - \frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)} W(s)$$

biçimindedir.

v) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = 1$ olarak alınması ile

$$\begin{cases} \beta(s)\rho(s) = 1, \\ \beta'(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0, \\ -\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

elde edilir. Birinci denklem $-\beta(s)\rho(s) = 1$ den $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ bulunur ve $\rho(s) \neq 0$ dır. Diğer taraftan $\beta'(s) = 0$ olduğu da bilinir. İkinci denklem olan $\beta'(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ da yerine yazılırsa $\gamma(s)\sigma(s) = 0$ denklemi elde edilip buradan iki farklı durumun olduğu söylenir. Burada ilk durum; $\gamma(s) = 0$ olması durumunda üçüncü denklem $\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ dan $\theta(s) = \frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}$ eşitliği bulunur,

$(\mu(s) \neq 0)$. Dolayısıyla $\theta'(s) = 0$ olduğu görülür. Böylece dördüncü denklem $-\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ sağlanır ve denklem sistemi için ortak çözüm vardır. Buradan elde edilen eğri ise;

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\rho(s)} R(s) + \frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)} W(s)$$

formunda yazılır.

vi) $\omega(s) = -1, \varphi(s) = 1$ ve $\omega_1(s) = -1$şartı için denklem sistemi şu şekildedir:

$$\begin{cases} \beta(s)\,\rho(s) = 1, \\ \beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ -\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ -\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0. \end{cases}$$

Burada $\beta(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ eşitliği bulunur ve $\rho(s) \neq 0$ dır. Dolayısıyla $\beta'(s) = 0$ olduğu söylenir. $\beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde, bulunan bu değer yazılırsa $\gamma(s)\sigma(s) = 0$ elde edilir. İlk durum $\gamma(s) = 0$ olmasıdır ve bu durum ile birlikte $-\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminden $\theta(s) = -\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}$ dır $(\mu(s) \neq 0)$, ayrıca $\theta'(s) = 0$ olduğu ifade edilir. Böylece $-\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ denklemi sağlanıp denklem sistemi çözülür. Buradan elde edilen eğri ise;

$$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)} R(s) - \frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)} W(s)$$

dir.

vii) $\omega(s) = 1, \varphi(s) = -1$ ve $\omega_1(s) = -1$ olduğu durum için denklem sistemi şu şekildedir;

$$\begin{cases} \beta(s)\,\rho(s) = 1, \\ \beta'(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ -\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) + \theta(s)\mu(s) = 0, \\ -\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0, \end{cases}$$

dir. Burada $\beta(s)\rho(s) = 1$ denkleminden $\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ ve $\rho(s) \neq 0$ dır. $\beta'(s) = 0$, $\beta'(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde yazılırsa $\gamma(s)\sigma(s) = 0$ durumu söz konusudur. Burada $\gamma(s) = 0$ olması durumunda $\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) - \theta(s)\mu(s) = 0$ denkleminden $\theta(s) = \frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}$, $\mu(s) \neq 0$ ve $\theta'(s) = 0$ elde edilir. Böylece $-\gamma(s)\mu(s) + \theta'(s) = 0$ denklemi sağlanıp denklem sistemi çözülür. Buradan elde edilen eğri ise;

$$\alpha(s) = \frac{1}{\rho(s)} R(s) + \frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)} W(s)$$

dir.

viii) $\omega(s)=-1, \varphi(s)=-1$ ve $\omega_1(s)=-1$ olduğu durum için

$$\begin{cases} \beta(s)\,\rho(s)=1, \\ \beta'(s)+\gamma(s)\sigma(s)=0, \\ -\beta(s)\sigma(s)+\gamma'(s)+\theta(s)\mu(s)=0, \\ -\gamma(s)\mu(s)+\theta'(s)=0 \end{cases}$$

dir. Sistemdeki ilk denklem $\beta(s)\rho(s)=1$ den $\beta(s)=\frac{1}{\rho(s)}$ elde edilir ($\rho(s)\neq 0$). Buradan $\beta'(s)=0$ olarak bulunur. İkinci denklem $\beta'(s)+\gamma(s)\sigma(s)=0$ da elde edilen bu değer yerine yazılırsa $\gamma(s)\sigma(s)=0$ olup iki farklı sonuç söz konusudur. $\gamma(s)=0$ olması durumunda $-\beta(s)\sigma(s)+\gamma'(s)+\theta(s)\mu(s)=0$ dan $\theta(s)=\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}$ dır ($\mu(s)\neq 0$) ve $\theta'(s)=0$ elde edilir. Dördüncü denklem $-\gamma(s)\mu(s)+\theta'(s)=0$ denklem sistemi için sağlanır. Dolayısıyla bulunan eğri ise;

$$\alpha(s)=-\frac{1}{\rho(s)}R(s)+\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu kısımda L^4de birim hızlı null olmayan bir eğrinin {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısının alt uzaylarında yatan/ yatmayan eğrileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.3. L^4de birim hızlı null olmayan bir eğri

{T(s),R(s),U(s), W(s)}Frenet Çatısının Alt Uzayları	**ω, φ, ω_1 Durumları**	**Eğri/Eğriler**	**Eğrinin Durumu**
{T(s), R(s)}	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	α(s) =($s + g_9$)T(s),	YATAR
	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	α(s) =($s + g_{10}$)T(s),	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	α(s) =($s + g_{11}$)T(s),	
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	α(s) =($s + g_{12}$)T(s),	
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	α(s) =($s + g_{13}$)T(s)	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	α(s) =($s + g_{14}$)T(s),	
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	α(s) =($s + g_{15}$)T(s),	
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	α(s) =($s + g_{16}$)T(s).	
{T(s), U(s)}	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	α(s)=($s + g_{17}$)T(s)+ g_{18}U(s),	YATAR
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	α(s)=($s + g_{19}$)T(s)+ g_{20}U(s),	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	α(s)=($s + g_{21}$)T(s)+ g_{22}U(s),	
	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	α(s)=($s + g_{23}$)T(s)+ g_{24}U(s),	
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	α(s)=($s + g_{25}$)T(s)+ g_{26}U(s),	
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	α(s)=($s + g_{27}$)T(s)+ g_{28}U(s),	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	α(s)=($s + g_{29}$)T(s)+ g_{30}U(s),	

Çizelge 4.3. L^4de birim hızlı null olmayan bir eğri (devam)

	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	α(s)=($s + g_{31}$)T(s)+ g_{32}U(s).	
{T(s), W(s)}	$\varphi = 1, \omega_1 = 1$	α(s)=($s + g_{33}$)T(s)+ g_{34}W(s),	YATAR
	$\varphi = -1, \omega_1 = -1$	α(s)=($s + g_{35}$)T(s)+ g_{36}W(s)	
	$\varphi = 1, \omega_1 = -1$	α(s)=($s + g_{37}$)T(s)+ g_{38}W(s),	
	$\varphi = -1, \omega_1 = -1$	α(s)=($s + g_{39}$)T(s)+ g_{40}W(s),	
{R(s), U(s)}	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	α(s) =g_{41}R(s) ,	YATAR
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	α(s) =g_{43}R(s) ,	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	α(s) =g_{42}R(s) ,	
	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	α(s) =g_{44}R(s) ,	
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	α(s) =g_{45}R(s) ,	
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	α(s) =g_{46}R(s) ,	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	α(s) =g_{47}R(s) ,	
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	α(s) =g_{48}R(s) .	
{R(s), W(s)}	$\omega = 1, \omega_1 = 1$	α(s) =h_2R(s) +h_1W(s),	YATAR
	$\omega = -1, \omega_1 = 1$	(s) =h_4R(s) +h_3W(s),	
	$\omega = 1, \omega_1 = -1$	α(s) =h_6R(s) +h_5W(s),	
	$\omega = -1, \omega_1 = -1$	α(s) =h_8R(s) +h_7W(s).	

Çizelge 4.3. L^4de birim hızlı null olmayan bir eğri (devam)

{U(s), W(s)}	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = h_9 W(s)$,	YATAR
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = h_{10} W(s)$,	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = h_{11} W(s)$,	
	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = h_{12} W(s)$,	
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = h_{13} W(s)$,	
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = h_{14} W(s)$,	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = h_{15} W(s)$,	
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = h_{16} W(s)$.	
{T(s),R(s), U(s)}	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = h_{17} T(S)$,	YATAR
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = h_{18} T(s)$,	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = h_{19} T(s)$,	
	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = h_{20} T(s)$,	
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = h_{21} T(s)$,	
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = h_{22} T(s)$,	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = h_{23} T(s)$,	
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = h_{24} T(s)$.	

Çizelge 4.3. L^4de birim hızlı null olmayan bir eğri (devam)

	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = \frac{h_{25}\mu(s)}{\sigma(s)} h_{25}W(s)$, $\alpha(s) = (s + h_{26})T(s) + \frac{h_{25}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{25}W(s)$.	
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = \frac{h_{27}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{27}W(s)$, $\alpha(s) = (s + h_{28})T(s) + \frac{h_{27}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{27}W(s)$.	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = \frac{h_{29}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{29}W(s)$, $\alpha(s) = (s + h_{30})T(s) + \frac{h_{29}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{29} W(s)$.	
{T(s),R(s),W(s)}	$\omega = 1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = \frac{h_{31}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{31}W(s)$, $\alpha(s) = (s + h_{32})T(s) + \frac{h_{31}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{31}W(s)$.	YATAR
	$\omega = -1, \varphi = -1, \omega_1 = 1$	$\alpha(s) = \frac{h_{33}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{33}W(s)$, $\alpha(s) = (s + h_{34})T(s) + \frac{h_{33}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{33}W(s)$.	
	$\omega = -1, \varphi = 1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = \frac{h_{35}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{35}W(s)$, $\alpha(s) = (s + h_{36})T(s) + \frac{h_{35}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{35}W(s)$.	
	$\omega = 1, \varphi = -1, \omega_1 = -1$	$\alpha(s) = \frac{h_{37}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{37}W(s)$, $\alpha(s) = (s + h_{38})T(s) + \frac{h_{37}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s) + h_{37}W(s)$.	

Çizelge 4.3. L^4de birim hızlı null olmayan bir eğri (devam)

	$\omega=-1, \varphi=-1, \omega_1=-1$	$\alpha(s)=\frac{h_{39}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s)+h_{39}W(s)$, $\alpha(s)=(s+h_{40})T(s)+\frac{h_{39}\mu(s)}{\sigma(s)}R(s)+h_{39}W(s)$.	
{T(s),U(s),W(s)}	$\omega=1, \varphi=1, \omega_1=1$	$\alpha(s)=(s+c_1)T(s)+\frac{(s+c_1)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s)+\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$,	YATAR
	$\omega=-1, \varphi=1, \omega_1=1$	$\alpha(s)=(s+c_2)T(s)+\frac{(s+c_2)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s)+\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$,	
	$\omega=1, \varphi=-1, \omega_1=1$	$\alpha(s)=(s+c_3)T(s)+\frac{(s+c_3)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s)+\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$,	
	$\omega=1, \varphi=1, \omega_1=-1$	$\alpha(s)=(s+c_4)T(s)+\frac{(s+c_4)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s)+\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$,	
	$\omega=-1, \varphi=-1, \omega_1=1$	$\alpha(s)=(s+c_5)T(s)+\frac{(s+c_5)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s)-\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$,	
	$\omega=-1, \varphi=1, \omega_1=-1$	$\alpha(s)=(s+c_6)T(s)+\frac{(s+c_6)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s)-\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$,	
	$\omega=1, \varphi=-1, \omega_1=-1$	$\alpha(s)=(s+c_7)T(s)+\frac{(s+c_7)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s)-\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$,	
	$\omega=-1, \varphi=-1, \omega_1=-1$	$\alpha(s)=(s+c_8)T(s)+\frac{(s+c_8)\rho(s)}{\sigma(s)}U(s)-\frac{\rho(s)}{\sigma(s)\mu(s)}W(s)$.	

Çizelge 4.3. L^4de birim hızlı null olmayan bir eğri (devam)

{R(s),U(s),W(s)}	$\omega=-1, \varphi=1, \omega_1=1$ $\omega=1, \varphi=-1, \omega_1=-1$	$\alpha(s)=\frac{1}{\rho(s)}R(s)+\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s)$,	YATAR
	$\omega=1, \varphi=-1, \omega_1=1$; $\omega=-1, \varphi=-1, \omega_1=1$	$\alpha(s)=\frac{-1}{\rho(s)}R(s)+\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s)$	
	$\omega=1, \varphi=1, \omega_1=-1$; $\omega=-1, \varphi=1, \omega_1=-1$	$\alpha(s)=\frac{1}{\rho(s)}R(s)-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s)$	
	$\omega=1, \varphi=1, \omega_1=1$; $\omega=1, \varphi=1, \omega_1=-1$	$\alpha(s)=\frac{-1}{\rho(s)}R(s)-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}W(s)$	

Örnek 4.1.2. L^4 de α (s)= $(\sqrt{3}s, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sin s, \sqrt{2}\cos s)$ eğrisini ele alalım. Burada

α' (s)= $(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$

$\Rightarrow \alpha''(s)= (0, 0, -\sqrt{2}\sin s, -\sqrt{2}\cos s)$)

$\Rightarrow \alpha'''(s)= (0, 0, -\sqrt{2}\cos s, \sqrt{2}\sin s)$

ve

$\|\acute{\alpha}(s)\| = 1$

olup eğri birim hızlı zaman benzeri eğridir. Buradan

$T(s)=(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$,

$R(s)= (0,0 \; -\sin s, -\cos s)$

elde edilir.

$T(s)\times R(s) \times \alpha'''(s)=(0,\sqrt{6}, 0, 0)$

olup

$W(s)=(0,-1, 0, 0)$

elde edilir. Burada, $\varepsilon = 1$ olarak seçilirse $\varepsilon R(s) \times T(s) \times W(s)=U(s)$.

$U(s)=(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s)$.

Bu eğriye ait eğrilikler ise $\rho(s) = \sqrt{2}$, $\sigma(s) = \sqrt{3}$ ve $\mu(s) = 0$ olarak hesaplanır.

Bu kısımda L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğrinin {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısının alt uzaylarında yatan eğrileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.4. L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri örneği

{T(s),R(s),U(s),W(s)} Frenet Çatısının Alt Uzayları	**Eğri/Eğriler**
{T(s), R(s)}	$\alpha(s) = (s + g_9)(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{10})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{11})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{12})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{13})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{14})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{15})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{16})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$.
{T(s), U(s)}	$\alpha(s) = (s + g_{17})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $g_{18}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{19})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $g_{20}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{21})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $g_{22}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{23})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $g_{24}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{25})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $g_{26}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{27})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $g_{28}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{29})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $g_{30}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s) = (s + g_{31})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $g_{32}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}\cos s, -\sqrt{3}\sin s)$.

Çizelge 4.4. L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri örneği (devam)

$\{T(s), W(s)\}$	$\alpha(s)=(s+g_{33})(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s)+g_{34}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=(s+g_{35})(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s)+g_{36}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=(s+g_{37})(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s)+g_{38}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=(s+g_{39})(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s)+g_{40}(0,-1,0,0)$.
$\{R(s), U(s)\}$	$\alpha(s)=g_{41}(0,0-\sin s,-\cos s)$, $\alpha(s)=g_{42}(0,0-\sin s,-\cos s)$, $\alpha(s)=g_{43}(0,0-\sin s,-\cos s)$, $\alpha(s)=g_{44}(0,0-\sin s,-\cos s)$, $\alpha(s)=g_{45}(0,0-\sin s,-\cos s)$, $\alpha(s)=g_{46}(0,0-\sin s,-\cos s)$, $\alpha(s)=g_{47}(0,0-\sin s,-\cos s)$, $\alpha(s)=g_{48}(0,0-\sin s,-\cos s)$.
$\{R(s), W(s)\}$	$\alpha(s)=h_2(0,0-\sin s,-\cos s)+h_1(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_4(0,0-\sin s,-\cos s)+h_3(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_6(0,0-\sin s,-\cos s)+h_5(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_8(0,0-\sin s,-\cos s)+h_7(0,-1,0,0)$.
$\{U(s), W(s)\}$	$\alpha(s)=h_9(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_{10}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_{11}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_{12}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_{13}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_{14}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_{15}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=h_{16}(0,-1,0,0)$.

Çizelge 4.4. L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri örneği (devam)

$\{T(s), R(s), U(s)\}$	$\alpha(s) = h_{17}(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = h_{18}(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = h_{19}(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = h_{20}(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = h_{21}(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = h_{22}(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = h_{23}(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$, $\alpha(s) = h_{24}(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s)$.

Çizelge 4.4. L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri örneği (devam)

$\{T(s), R(s), W(s)\}$	$\alpha(s) = h_{25}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s) = (s + h_{26})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $h_{25}(0,-1,0,0)$; $\alpha(s) = h_{27}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s) = (s + h_{28})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $h_{27}(0,-1,0,0)$; $\alpha(s) = h_{29}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s) = (s + h_{30})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) + h_{29}$ $(0,-1,0,0)$; $\alpha(s) = h_{31}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s) = (s + h_{32})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $h_{31}(0,-1,0,0)$; $\alpha(s) = h_{33}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s) = (s + h_{34})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $h_{33}(0,-1,0,0)$; $\alpha(s) = h_{35}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s) = (s + h_{36})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $h_{35}(0,-1,0,0)$; $\alpha(s) = h_{37}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s) = (s + h_{38})(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s) +$ $h_{37}(0,-1,0,0)$; $\alpha(s) = h_{39}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s) = (s + h_{40})\left(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}\cos s, -\sqrt{2}\sin s\right) +$ $h_{39}(0,-1,0,0)$.

Çizelge 4.4. L^4 de birim hızlı null olmayan bir eğri örneği (devam)

$\{T(s), U(s), W(s)\}$	$\alpha(s)=(s+c_1)(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s)+\frac{(s+c_1)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\cos s,-\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s)=(s+c_2)(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\,c\cos s,-\sqrt{2}\sin s)+\frac{(s+c_2)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\cos s,-\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s)=(s+c_3)(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s)+\frac{(s+c_3)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\cos s,-\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s)=(s+c_4)\left(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s\right)+\frac{(s+c_4)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\cos s,-\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s)=(s+c_5)\left(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s\right)-\frac{(s+c_5)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\cos s,-\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s)=(s+c_6)\left(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s\right)-\frac{(s+c_6)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\cos s,-\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s)=(s+c_7)\left(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s\right)-\frac{(s+c_7)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\cos s,-\sqrt{3}\sin s)$, $\alpha(s)=(s+c_8)\left(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\cos s,-\sqrt{2}\sin s\right)-\frac{(s+c_8)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,-\sqrt{3}\cos s,-\sqrt{3}\sin s)$.
$\{R(s), U(s), W(s)\}$	$\alpha(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0\ -\sin s,-\cos s)+\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0\ -\sin s,-\cos s)+\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0\ -\sin s,-\cos s)-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}(0,-1,0,0)$, $\alpha(s)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0\ -\sin s,-\cos s)-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)\mu(s)}(0,-1,0,0)$.

4.3. L^3 Lorentz Uzayda Null Eğriler

L^3Lorentz uzayında null bir α eğrisi için {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısında

$< T(s), T(s) > = < R'(s), R(s) > = 0$, $< T(s), R(s) > = 1$ ve

$< T'(s), R(s) > = -< T(s), R'(s) > = m$ olup burada m bir C^∞ fonksiyondur. Özel olarak m=0 şeçimi ile Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ R'(s) \\ U'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho(s) \\ 0 & 0 & \sigma(s) \\ -\sigma(s) & -\rho(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ R(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Ayrıca Frenet çatısına ait birinci eğrilik $\rho(s) = \|T'(s)\|$ ve ikinci eğrilik

$\sigma(s) = < R'(s), U(s) >$ biçimindedir (Duggal ve Jin 2007).

Teorem 4.3.1. α, L^3 de null eğri ve {T(s), R(s), U(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {T(s), R(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (s + k_1)T(s) + (s + k_2)R(s)$$

dir. Burada k_1 ve k_2 birer sabittirler.

İspat: α(s)=β(s)T(s) + γ (s)R(s) eğrisini alalım. Burada β ve γ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)R(s) + \gamma(s)R'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ olmak üzere

$$T(s) = \beta'(s)T(s) + \beta(s)[\rho(s)U(s)] + \gamma'(s)R(s) + \gamma(s)[\sigma(s)U(s)]$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. $\beta'(s) = 1$ eşitliğinden $\beta(s) = s + k_1$, k_1 sabittir. $\gamma'(s) = 0$ eşitliği benzer şekilde çözülürse $\gamma(s) = s + k_2$, k_2 sabittir. $\beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa denklem sistemi için ortak bir çözüm elde edilir. İstenilen eğri

$$\alpha(s) = (s + k_1)T(s) + (s + k_2)R(s),$$

burada k_1 ve k_2 sabitlerdir.

Teorem 4.3.2. α, L^3 de null bir eğri ve {T(s), R(s), U(s)} eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının {T(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\rho(s)}R(s), \ \rho(s) \neq 0$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)T(s) + \gamma(s)U(s)$ eğrisi olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\, T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)\, U(s) + \gamma(s)U'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için

$$T(s) = \beta'(s)\, T(s) + \beta(s)[\rho(s)U(s)] + \gamma'(s)\, R(s) + \gamma(s)[-\rho(s)T(s) - \sigma(s)R(s)]$$

eşitliğinde gerekli düzenlemelerin yapılırsa

$$\begin{cases} \beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \gamma'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \beta(s)\rho(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi bulunur. Üçüncü denklemden $\beta(s) = 0$ veya $\rho(s) = 0$ durumları söz konusudur. Eğer $\beta(s) = 0$ olarak alınırsa $\beta'(s) = 0$ dır ve bulunan bu değer $\beta'(s) - \gamma(s)\rho(s) = 1$ denkleminde yerine yazılırsa $\gamma(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ olduğu görülür, $(\rho(s) \neq 0)$. Buradan $\gamma(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ ise $\gamma'(s) = 0$ olur. $\gamma'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denkleminde elde edilen değerler yerine yazılırsa $\frac{\sigma(s)}{\rho(s)} = 0$ olup $\sigma(s) = 0$ elde edilir. Ayrıca $\rho(s) = 0$ olması durumunda ise $\gamma'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denklemi için bir bağıntı elde edilemeyip denklem sistemi çözülmez. Buradan aranılan eğri;

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\rho(s)} R(s)\,,\ \rho(s) \neq 0$$

biçimindedir.

Teorem 4.3.3. α, L^3 de bir null eğri ve eğrinin Frenet çatısı $\{T(s), R(s), U(s)\}$ olmak üzere bu çatının $\{R(s), U(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = \left(-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)} s + k_3\right) R(s) - \frac{1}{\rho(s)} U(s)$$

şeklindedir. Burada $\rho(s) \neq 0$ ve k_3 bir sabittir.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)R(s) + \gamma(s)U(s)$ eğrisini alalım. Burada β ve γ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\, R(s) + \beta(s)R'(s) + \gamma'(s)\, U(s) + \gamma(s)U'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için

$$T(s) = \beta'(s)\, R(s) + \beta(s)[\sigma(s)U(s)] + \gamma'(s)\, U(s) + \gamma(s)[-\rho(s)T(s) - \sigma(s)R(s)]$$

bulunur. Eğrinin denklem sistemi

$$\begin{cases} -\gamma(s)\rho(s) = 1, \\ \beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

biçimindedir. Birinci denklemden $\rho(s) \neq 0$ için $\gamma(s) = -\frac{1}{\rho(s)}$ elde edilir ve $\gamma'(s) = 0$ olur. İkinci denklemde bulunan bu değerler kullanılırsa $\beta'(s) = -\frac{\sigma(s)}{\rho(s)}$ ve $\beta(s) = -\frac{\sigma(s)}{\rho(s)} s + k_3$, ($\rho(s) \neq 0, k_3$ sabittir) bulunur. Ayrıca son denklem $\sigma(s) = 0$ için sağlanır. Böylece aranılan eğri;

$$\alpha(s) = \left(-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)} s + k_3\right) R(s) - \frac{1}{\rho(s)} U(s)$$

şeklindedir.

Bu kısımda L^3 de birim hızlı null bir eğrinin {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının alt uzaylarında yatan eğrileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.5. L^3 de birim hızlı null bir eğri

{T(s),R(s),U(s)} Frenet Çatısının Alt Uzayları	**Eğri/Eğriler**	**Eğrinin Durumu**
{T(s), R(s)}	$\alpha(s) = (s + k_1)T(s) + (s + k_2)R(s)$,	YATAR
{T(s), U(s)}	$\alpha(s) = -\frac{1}{\rho(s)}R(s)$,	YATAR
{R(s), U(s)}	$\alpha(s)=(-\frac{\sigma(s)}{\rho(s)}s+k_3)R(s) - \frac{1}{\rho(s)}U(s)$.	YATAR

Örnek 4.1.3 $\alpha(s)=(\sin hs,\ \cos hs,\ s)$, $s \in IR$ için L^3 de bir null eğri olsun. Eğrinin s parametresine göre türevleri,

$\alpha'(s)=(\cos hs, -\sin hs, 1)$

ve

$\alpha''(s)=(-\sin hs, -\cos hs, 0)$

dir. Bir vektör V=(0,0,1) olarak seçilirse

$<\alpha'(s), V>=1$ ve $<V, V>=1$

bağıntıları elde edilir. Eğrinin Frenet vektörleri

$T(s)=(\cos hs, \sin hs, 1)$,

$R(s)=(-\frac{1}{2}\cos hs, -\frac{1}{2}\sin hs, \frac{1}{2})$

ve

$U(s)=(\sin hs, \cos hs, 0)$

olup $m=<\alpha''(s), R(s)>=0$ olarak hesaplanır. Ayrıca eğrinin eğrilikleri

$\rho(s)=\|\alpha''(s)\|=1$ ve $\sigma(s)=<\alpha''(s), U(s)>=1$

olarak bulunur.

Bu kısımda Örnek 4.1.3 için {T(s), R(s), U(s)} Frenet çatısının alt uzaylarında yatan eğrileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.6. L^3 de birim hızlı null bir eğri örneği

{T(s),R(s),U(s)} Frenet Çatısının Alt Uzayları	**Eğri**
{T(s), R(s)}	$\alpha(s)=(s+k_1)(\cos hs, \sin hs, 1)+(s+k_2)(\frac{-1}{2}\cos hs, \frac{-1}{2}\sin hs, \frac{1}{2})$
{T(s), U(s)}	$\alpha(s)=(\frac{1}{2}\cos hs, \frac{1}{2}\sin hs, -\frac{1}{2})$
{R(s), U(s)}	$\alpha(s)=(s+k_3)(\frac{-1}{2}\cos hs, \frac{-1}{2}\sin hs, \frac{1}{2})-(\sin hs, \cos hs, 0)$.

4.4. L^4 Lorentz Uzayda Null Eğriler

α, L^4 de bir null eğri ve eğrinin T(s), R(s), U(s), W(s) Frenet vektörleri, $\rho(s)$, $\sigma(s)$ ve $\mu(s)$ sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü eğrilikleri olsun. Burada T(s)= $\alpha'(s)$ dir.

$< \alpha''(s), \alpha''(s) > = < \alpha''(s), \alpha'''(s) > = < \alpha'(s), \alpha''''(s) > = 0$ ve $< \alpha'(s), \alpha'''(s) > = 0$

şartları ve özel olarak m=0 seçimi ile null eğriye ait Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ R'(s) \\ U'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho(s) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(s) & \mu(s) \\ -\sigma(s) & -\rho(s) & 0 & 0 \\ -\mu(s) & 0 & -\rho(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ R(s) \\ U(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

Burada Frenet vektörleri

$R(s) = -\alpha'''(s) - \frac{1}{2} < \alpha'''(s), \alpha'''(s) > \alpha'(s),$

$U(s) = \alpha''(s),$

$W(s) = -\frac{1}{\mu(s)}(\alpha''''(s) + < \alpha'''(s), \alpha'''(s) > \alpha'' + < \alpha''''(s), \alpha'''(s) > \alpha'(s))$

olup ayrıca birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikler sırasıyla

$\rho(s) = 1,$

$\sigma(s) = \frac{1}{2} < \alpha'''(s), \alpha'''(s) >,$

$\mu(s) = \sqrt{< \alpha''''(s), \alpha''''(s) > - < \alpha'''(s), \alpha'''(s) >^2}$

şeklindedir (Ferrandez, Gimenez ve Lucas 2001).

Teorem 4.4.1. L^4 de null bir eğri α ve bu eğrinin Frenet çatısı {T(s), R(s), U(s), W(s)} olsun. Bu çatının {T(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = (s + k_4)T(s)$$

ve

$$\alpha(s) = [(1 + k_5\sigma(s))s + k_6]\, T(s) + k_5\, U(s)$$

olup k_4, k_5, k_6 birer sabitlerdir.

İspat: α(s) =β(s)T(s) + γ(s)U(s) eğrisi olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\, T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)\, U(s) + \gamma(s)U'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$= T(s) için

$T(s) = \beta'(s)\, T(s) + \beta(s)(\rho(s)U(s)) + \gamma'(s)\, U(s) + \gamma(s)[-\sigma(s)T(s) - \rho(s)R(s)]$

işlemler düzenlenirse

$$\begin{cases} \beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 1, \\ \gamma(s)\rho(s) = 0, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. İkinci denklem olan $\gamma(s)\rho(s) = 0$ için iki durum söz konusudur. $\gamma(s) = 0$ olması durumu düşünülürse $\beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 1$ eşitliğinden $\beta'(s) = 1$ ve $\beta(s) = s + k_4$ dir. Burada k_4 sabittir. $\beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0$ eşitliğinde elde edilen bu değerlerin sağlandığı görülür. Diğer durum olan $\rho(s) = 0$ durumunda $\beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0$ için $\gamma'(s) = 0$ olup $\gamma(s) = k_5$ elde edilir ve k_5 sabittir. $\beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) = 1$ denkleminde $\beta'(s) = 1$ ve $\gamma(s) = k_5$ değerleri yazılırsa $\beta(s) = \left(1 + k_5\sigma(s)\right)s + k_6$ elde edilir, (k_6 sabittir). Dolayısıyla aranılan eğriler

$$\alpha(s) = (s + k_4)T(s)$$

ve

$$\alpha(s) = [\left(1 + k_5\sigma(s)\right)s + k_6]\, T(s) + k_5 U(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.4.2. L^4 de null bir eğri α ve bu eğrinin Frenet çatısı {T(s), R(s), U(s), W(s)} olsun. Bu çatının {T(s), R(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s) = (s + k_7)T(s) + k_8 R(s)$$

biçimindedir. Burada k_7 ve k_8 eğriler için birer sabittirler.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)T(s) + \gamma(s)R(s)$ eğrisini alalım. Burada β ve γ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\, T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)\, R(s) + \gamma(s)R'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için

$$T(s) = \beta'(s)\, T(s) + \beta(s)[\rho(s)U(s)] + \gamma'(s)\, R(s) + \gamma(s)[\sigma(s)U(s)]$$

bulunur. Eşitliğinde gerekli düzenlemeler sonucu

$$\begin{cases} \beta'(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi yukarıdaki gibi olur. Birinci denklem olan $\beta'(s) = 1$ için $\beta(s) = s + k_7$, (k_7 sabittir) bulunur. Üçüncü denklem $\gamma'(s) = 0$ için ise $\gamma(s) = k_8$ değeri mevcuttur ve burada k_8 sabittir. Bulunan değerler $\beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0$ denklemi için sağlandığı görülür. Dolayısıyla denklem sistemi ortak çözüme sahiptir. İstenilen eğri

$$\alpha(s) = (s + k_7)T(s) + k_8 R(s)$$

dir.

Teorem 4.4.3. L^4 de null bir eğri α ve bu eğrinin Frenet çatısı {T(s), R(s), U(s), W(s)} olsun. Bu çatının {T(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s) = [(1 - k_9\mu(s))s + k_{10}]\,T(s) + k_9 W(s)$$

dir. Burada k_9 ve k_{10} ile ifade edilenler eğriye ait sabitlerdir.

İspat: α(s) =β(s)T(s) + γ(s)W(s) eğrisi olarak alalım. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\,T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)\,W(s) + \gamma(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere

$$T(s) = \beta'(s)\,T(s) + \beta(s)[\rho(s)U(s)] + \gamma'(s)\,W(s) + \gamma(s)[\mu(s)T(s)]$$

dir. Eşitliğin düzenlenmesi ile

$$\begin{cases} \beta'(s) + \gamma(s)\mu(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0, \end{cases}$$

denklemlerini içeren bir sistem için ortak bir çözüm incelenirse; $\gamma'(s) = 0$ eşitiliğinden $\gamma(s) = k_9$, dolayısıyla k_9 sabittir. $\beta'(s) + \gamma(s)\mu(s) = 1$ denklemi için elde edilen değer yerine yazılırsa $\beta(s) = (1 - k_9\mu(s))s + k_{10}$, k_{10} sabittir. $\beta(s)\rho(s) = 0$ eşitliği sağlanır ve aranılan eğri;

$$\alpha(s) = [(1 - k_9\mu(s))s + k_{10}]\,T(s) + k_9 W(s)$$

biçimindedir.

Teorem 4.4.4. L^4 de null bir eğri α ve eğrinin Frenet çatısı {T(s), R(s), U(s), W(s)} olsun. Bu çatının {R(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s) = \left(\frac{\rho(s)}{\sigma(s)}s + k_{11}\right)R(s) - \frac{1}{\sigma(s)}U(s)$$

olup k_{11} bir sabittir.

İspat: α(s)=β(s)R(s) + γ(s)U(s) eğrisini alalım. Β ve γ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alnırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\,R(s) + \beta(s)R'(s) + \gamma'(s)\,U(s) + \gamma(s)U'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için

$$T(s) = \beta'(s)R(s) + \beta(s)[\sigma(s)U(s)] + \gamma'(s)U(s) + \gamma(s)[-\sigma(s)T(s) - \rho(s)R(s)]$$

olup eşitlikten aşağıda verilen

$$\begin{cases} -\gamma\,(s)\sigma(s) = 1, \\ \beta'(s) - \gamma\,(s)\rho(s) = 0, \\ \beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) = 0, \end{cases}$$

denklem sistemi mevcuttur. Birinci denklemden $(s) = -\frac{1}{\sigma(s)}$, $(\sigma(s) \neq 0)$ elde edilip $\gamma'(s) = 0$ sonucuna ulaşılır. Üçüncü denklemde bulunan bu değer yerine yazılırsa $\beta(s) = \frac{\rho(s)}{\sigma(s)}s + k_{11}$ elde edilir, (k_{11} sabittir). Denklem sistemindeki son denklem olan $\beta'(s) - \gamma\,(s)\rho(s) = 0$ eşitliğinde, bulunan değerler yazılırsa $\rho(s) = 0$ elde edilir. Burada istenilen eğri;

$$\alpha(s) = \left(\frac{\rho(s)}{\sigma(s)}s + k_{11}\right)R(s) - \frac{1}{\sigma(s)}U(s)$$

biçimindedir.

Teorem 4.4.5. L^4 de null bir eğri α ve bu eğrinin Frenet çatısı {T(s), R(s), U(s), W(s)} olsun. Bu çatının {R(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s) = k_{12}\,R(s) + \frac{1}{\mu(s)}W(s), \quad (k_{12} \text{ sabittir})$$

veya

$$\alpha(s) = \frac{1}{\mu(s)}W(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)R(s) + \gamma(s)W(s)$ eğrisi alınsın. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\,R(s) + \beta(s)R'(s) + \gamma'(s)\,W(s) + \gamma\,(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için

$$T(s) = \beta'(s)\,R(s) + \beta(s)[\sigma(s)U(s)] + \gamma'(s)\,U(s) + \gamma\,(s)[\mu(s)T(s)]$$

denklem sisteminin

$$\begin{cases} \gamma\,(s)\mu(s) = 1, \\ \beta'(s) = 0, \\ \beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

şeklinde olduğu görülür. Burada $\gamma(s)\mu(s) = 1$ denkleminden $\gamma(s) = \frac{1}{\mu(s)}$ elde edilir, $(\mu(s) \neq 0)$. Dahası $\gamma'(s) = 0$ dır. $\beta'(s) = 0$ denkleminden ise $\beta(s) = k_{12}$ olur ve burada k_{12} bir sabittir. Denklem sistemi çözülmeye devam edilirse, $\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminde elde edilen bağıntılar yerlerine yazılırsa $k_{12}\sigma(s) = 0$ olur. Burada iki durum söz konusudur. Bunlar; $\sigma(s) = 0$ veya $k_{12} = 0$ dır. Böylece denklem sisteminden elde edilen eğriler;

$$\alpha(s) = k_{12} R(s) + \frac{1}{\mu(s)} W(s)$$

veya

$$\alpha(s) = \frac{1}{\mu(s)} W(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.6. α , L^4 de bir null eğri ve eğrinin {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısı olsun. Bu çatının {U(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s) = k_{13} U(s) - \frac{1}{\mu(s)} W(s), \ (k_{13} \text{ sabittir})$$

biçimindedir.

İspat: $\alpha(s) = \beta(s)U(s) + \gamma(s)W(s)$ eğrisi alınsın. Burada β ve γ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup eğrinin s parametresine göre her iki tarafının türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s) U(s) + \beta(s)U'(s) + \gamma'(s) W(s) + \gamma(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere

$$T(s) = \beta'(s) U(s) + \beta(s)[-\sigma(s)T(s) - \rho(s)R(s)] + \gamma'(s) W(s) + \gamma(s)[-\mu(s)T(s)]$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse

$$\begin{cases} \beta(s)\sigma(s) + \gamma(s)\mu(s) = -1, \\ \beta'(s) = 0, \\ \beta(s)\rho(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sisteminin varlığından bahsedilir. $\beta'(s) = 0$ denkleminden $\beta(s) = k_{13}$ ve $\gamma'(s) = 0$ denkleminden ise $\gamma(s) = k_{14}$ bulunur burada k_{13} ve k_{14} birer sabittir. Ayrıca denklem sistemindeki $\beta(s)\rho(s) = 0$ ve $\beta(s)\sigma(s) + \gamma(s)\mu(s) = -1$ denklemleri için bulunan değerler yerlerine yazılırsa; $\beta(s)\rho(s) = 0$ denklemi için iki durum söz konusudur. $\beta(s) = 0$ veya $\rho(s) = 0$ olur. Burada $\beta(s) = 0$ için $\beta(s)\sigma(s) + \gamma(s)\mu(s) = -1$ denkleminden $\gamma(s) = -\frac{1}{\mu(s)} = k_{14}$ ve $\mu(s) \neq 0$ dır. $\rho(s) = 0$ durumu için ortak bir çözüm elde edilmez. İstenilen eğri ise;

$$\alpha(s) = k_{13} R(s) - \frac{1}{\mu(s)} W(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.4.7. L^4 de bir null eğri α ve eğrinin Frenet çatısı{T(s), R(s), U(s), W(s)} olmak üzere bu çatının {T(s), R(s), U(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s) = [[1+\theta(s)\sigma(s)]s + k_{15}]\, T(s) + [\theta(s)\rho(s)s + k_{16}]\, R(s) + k_{17}U(s)$$

biçimindedir ve burada k_{15}, k_{16}, k_{17} birer sabitlerdir.

İspat: α(s)=β(s)T(s)+γ(s)R(s)+θ(s)U(s) eğrisi olarak alalım. Burada β, γ ve θ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup α eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\, T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)\, R(s) + \gamma(s)R'(s) + \theta'(s)U(s) + \theta(s)U'(s)$$

olup $\alpha'(s)$= T(s) için

$$T(s)=\beta'(s)T(s)+ \beta(s)[\rho(s)U(s)]+ \gamma'(s)\, R(s) + \gamma(s)[\sigma(s)U(s)] + \theta'(s)U(s)+ \theta(s)[-\sigma(s)T(s)-\rho(s)R(s)]$$

elde edilir. Buradan eşitlik düzenlenirse

$$\begin{cases} \beta'(s) - \theta(s)\,\sigma(s) = 1, \\ \gamma'(s) - \theta(s)\rho(s) = 0, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) + \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. $\beta'(s) - \theta(s)\,\sigma(s) = 1$ denklemi çözülürse $\beta'(s) = 1 + \theta(s)\,\sigma(s)$ olduğu görülür ve burada $\theta(s) = k_{17}$ gibi bir sabit olup $\beta(s) = [1+\theta(s)\sigma(s)]s + k_{15}$ olarak elde edilir, (k_{15} bir sabittir). Ayrıca ikinci denklemden ise $\gamma(s) = \theta(s)\rho(s)s + k_{16}$ bulunur, (k_{16} sabit). Böylece elde edilen bağıntılar üçüncü denklemde yerlerine yazıldığında denklem sistemi ortak bir çözüme sahip olur. Dolayısıyla denklem sisteminde aranılan eğri;

$$\alpha(s) = [[1+\theta(s)\sigma(s)]s + k_{15}]\, T(s) + [\theta(s)\rho(s)s + k_{16}]\, R(s) + k_{17}\, U(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.4.8. L^4 de bir null eğri α ve eğrinin Frenet çatısı {T(s), R(s), U(s), W(s)} olmak üzere çatının {T(s), R(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s) = \{[1+k_{19}\mu(s)]s + k_{20}\}\, T(s) + k_{18}R(s) + k_{19}W(s)$$

olup burada k_{18}, k_{19} ve k_{20} birer sabittirler.

İspat: α(s)=β(s)T(s)+γ(s)R(s)+θ(s)W(s) eğrisi alınırsa β, γ ve θ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alındığında

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\, T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)\, R(s) + \gamma(s)R'(s) + \theta'(s)W(s) + \theta(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$= T(s) için

$$T(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)[\rho(s)U(s)]+ \gamma'(s)\, R(s) + \gamma(s)[\sigma(s)U(s)] + \theta'(s)W(s)+ \theta(s)[-\mu(s)T(s)]$$

bulunur. Buradan eşitlik düzenlenirse

$$\begin{cases} \beta'(s) - \theta(s)\,\mu(s) = 1, \\ \gamma'(s) = 0, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma(s)\sigma(s) = 0, \\ \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

böyle bir denklem sisteminin mevcut olduğu görülür. İkinci denklemden $\gamma(s) = k_{18}$ bulunup k_{18} sabittir. Benzer şekilde $\theta'(s) = 0$ denklemi için de $\theta(s)=k_{19}$ bulunur, (k_{19} bir sabittir). Böylece bu bulunan değerler birinci denklemde yerlerine yazılırsa $\beta'(s) = 1 + k_{19}\mu(s)$ olup buradan $\beta(s) =[1 + k_{19}\mu(s)]s + k_{20}$ olduğu görülür, (k_{20} sabittir). Üçüncü denklemde $\rho(s) = 0$ ve $\sigma(s) = 0$ alınması ile denklem sağlanır. Dolayısıyla elde edilen eğri;

$$\alpha(s) =\{[1 + k_{19}\mu(s)]s + k_{20}\}\, T(s) + k_{18}R(s)+ k_{19}W(s)$$

dir

Teorem 4.4.9. L^4 de null bir eğri α ve eğrinin {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), U(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrileri;

$$\alpha(s)=\{[1 + k_{21}\,\mu(s) + k_{22}\,\sigma(s)]s +k_{23}\}T(s) +k_{22}\,U(s) +k_{21}W(s)$$

veya

$$\alpha(s)=k_{21}W(s),$$

şeklindedir. Eğriler için k_{21},k_{22} ve k_{23} birer sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s)=\beta(s)T(s)+\gamma(s)U(s)+\theta(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada β, γ ve θ; s parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi

$$\alpha'(s) =\beta'(s)\, T(s) + \beta(s)T'(s) + \gamma'(s)\, U(s) + \gamma(s)U'(s) +\theta'(s)W(s)+ \theta(s)W'(s)$$

olarak bulunur. $\alpha'(s)= T(s)$ için

$$T(s)=\beta'(s)T(s)+\beta(s)[\rho(s)U(s)]+\gamma'(s)U(s) + \gamma(s)[-\sigma(s)T(s) - \rho(s)R(s)] +\theta'(s)W(s)+ \theta(s)[-\mu(s)T(s)]$$

elde edilir. Buradan eşitlik düzenlenirse

$$\begin{cases} \beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\,\mu(s) = 1, \\ \beta(s)\rho(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\gamma(s)\rho(s) = 0, \\ \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi mevcuttur. Dördüncü denklemden $\theta(s) = k_{21}$ bulunur, (k_{21} bir sabittir). Üçüncü denklem için iki durum söz konusu olur. Bunlar $\gamma(s) = 0$ ve $\rho(s) = 0$ dir. Birinci durum olan $\gamma(s) = 0$ durumu göz önüne alınırsa $\gamma'(s) = 0$ olur. Bulunan değer $\beta(s)\rho(s) +$

$\gamma'(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\beta(s)\rho(s) = 0$ olup $\beta'(s) = 0$ elde edilir. $\beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\,\mu(s) = 1$ denkleminde bulunan bu bağıntılar yerlerine yazılırsa $\mu(s) = \frac{-1}{k_{21}}$, $(k_{21} \neq 0)$ dır. Buradan elde edilen eğri

$$\alpha(s) = k_{21}W(s)$$

dir.

İkinci durum olan $\rho(s) = 0$ için ise ikinci denklemden $\gamma'(s) = k_{22}$ dir ve burada k_{22} bir sabittir. $\beta'(s) - \gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\,\mu(s) = 1$ denklemi için ise bulunan değerler yerlerine yazılırsa $\beta'(s) = 1 + k_{21}\,\mu(s) + k_{22}\,\sigma(s)$ bulunur, buradan da $\beta(s) = [1 + k_{21}\,\mu(s) + k_{22}\,\sigma(s)]s + k_{23}$ elde edilir ve k_{23} bir sabittir. Sonuç olarak aranılan eğrinin;

$$\alpha(s)=\{[1 + k_{21}\,\mu(s) + k_{22}\,\sigma(s)]s + k_{23}\}T(s) + k_{22}\,U(s) + k_{21}W(s)$$

şeklinde olduğu görülür.

Teorem 4.4.10. α, L^4 de bir null eğri ve $\{T(s), R(s), U(s), W(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{R(s), U(s), W(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s)= \left[\frac{-1-k_{24}\mu(s)}{\sigma(s)}\right]U(s) + k_{24}W(s), \ (k_{24} \text{ bir sabittir})$$

biçimindedir.

İspat: $\alpha(s)=\beta(s)R(s)+\gamma(s)U(s)+\theta(s)W(s)$ eğrisi olarak alalım. Burada β, γ ve θ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s)\,R(s) + \beta(s)R'(s) + \gamma'(s)\,U(s) + \gamma\,(s)U'(s) + \theta'(s)W(s) + \theta(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)= T(s)$ için

$$T(s)=\beta'(s)R(s)+\beta(s)[\sigma(s)U(s)]+\gamma'(s)U(s)+\gamma\,(s)[-\sigma\,(s)T(s) - \rho(s)R(s)] + \theta'(s)W(s)+ \theta(s)\,[-\mu(s)T(s)]$$

bulunur. Buradan denklem sistemi

$$\begin{cases} -\gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\,\mu(s) = 1, \\ \beta'(s) - \gamma\,(s)\,\rho(s) = 0, \\ \beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) = 0, \\ \theta'(s) = 0 \end{cases}$$

olarak bulunur. Denklem sisteminin dördüncü denkleminden $\theta(s) = k_{24}$ olup k_{24} bir sabittir. $-\gamma(s)\sigma(s) - \theta(s)\,\mu(s) = 1$ denkleminde $\theta(s)$ değeri yerine yazılırsa $\gamma(s) = \frac{-1-k_{24}\mu(s)}{\sigma(s)}$ elde edilir burada $\sigma(s) \neq 0$ olduğundan $\gamma'(s) = 0$ bulunur. $\beta(s)\sigma(s) + \gamma'(s) = 0$ denkleminden ise $\beta(s) = 0$ olur ve dahası $\beta'(s) = 0$ dır. Son denklem olan $\beta'(s) -$

γ (s) $\rho(s) = 0$ için de $\rho(s) = 0$ elde edilip denklem sistemi için ortak çözüm bulunur. Dolayısıyla burada aranılan eğri;

$$\alpha(s)= [\frac{-1-k_{24}\mu(s)}{\sigma(s)}]U(s) + k_{24}W(s)$$

biçimindedir.

Bu kısımda L^4 de birim hızlı null bir eğrinin {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısının alt uzaylarında yatan eğrileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.7. L^4 de birim hızlı null bir eğri

{T(s),R(s),U(s), W(s)} Frenet Çatısının Alt Uzayları	**Eğri /Eğriler**	**Eğrinin Durumu**
{T(s), R(s)}	$\alpha(s) = (s+k_7)T(s) + k_8 R(s)$	YATAR
{T(s), U(s)}	$\alpha(s) = [(1+k_5\sigma(s))s + k_6]\, T(s) + k_5\, U(s)$,	YATAR
{T(s), W(s)}	$\alpha(s) = [(1-k_9\mu(s))s + k_{10}]\, T(s) + k_9 W(s)$	YATAR
{R(s), U(s)}	$\alpha(s) = [\frac{\rho(s)}{\sigma(s)} s + k_{11}]R(s) - \frac{1}{\sigma(s)}U(s)$,	Y ATAR
{R(s), W(s)}	$\alpha(s) = k_{12} R(s) + \frac{1}{\mu(s)} W(s)$ veya $\alpha(s) = \frac{1}{\mu(s)} W(s)$,	YATAR
{U(s), W(s)}	$\alpha(s) = k_{13} U(s) - \frac{1}{\mu(s)}W(s)$,	YATAR
{T(s), R(s), U(s)}	$\alpha(s)=[[1+\theta(s)\sigma(s)]s + k_{15}]T(s)$ $+[\theta(s)\rho(s)s + k_{16}]\, R(s)+k_{17}\, U(s)$,	YATAR
{T(s), R(s), W(s)}	$\alpha(s) = \{[1+k_{19}\mu(s)]s+k_{20}\}\ T(s) + k_{18}R(s)+$ $k_{19}W(s)$,	YATAR
{T(s), U(s), W(s)}	$\alpha(s)=\{[1+k_{21}\,\mu(s)+k_{22}\,\sigma(s)]s+k_{23}\}T(s)$ $+k_{22}\, U(s) + k_{21}W(s)$ veya $\alpha(s)=k_{21}W(s)$,	YATAR
{R(s), U(s), W(s)}	$\alpha(s)= [\frac{-1-k_{24}\mu(s)}{\sigma(s)}]U(s) + k_{24}W(s)$.	YATAR

Örnek 4.1.4. L^4 de null eğri $\alpha(s) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s)$ $s \in IR$ ise,

$\alpha'(s) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s)$,

$T(s) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s)$

$\alpha''(s) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s, -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s)$

olarak bulunur. Burada

$V = (0, 0, \sqrt{3}\cos s, \sqrt{3}\sin s)$ olarak seçilirse $< \alpha'(s), V >= 1$ ve $< V, V >= 3$

olarak hesaplanır. Eğer

$R(s) = \frac{1}{<\frac{d}{d_s}, V>}\{ V - \frac{<V,V>}{2<\frac{d}{d_s}, V>}\frac{d}{d_s}\}$

formülü kullanılırsa

$R(s) = (\frac{-3}{2\sqrt{3}}\cos hs, \frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin hs, \frac{3}{2\sqrt{3}}\cos s, \frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin s)$,

$R'(s) = (\frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin hs \frac{-3}{2\sqrt{3}}\cos hs, \frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin s, \frac{-3}{2\sqrt{3}}\cos s)$

olarak bulunur. Ayrıca $m =< \alpha''(s), R(s) >= 0$ dır ve

$\rho(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ elde edilir. Buradan hareketle $U(s) = \frac{1}{\rho(s)}\alpha''(s)$ yi hesaplanırsa

$U(s) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$ dir.

$\sigma(s) =< R'(s), U(s) >= 0$ ve $\mu(s) = \|R'(s)\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ olup eğrilikleri hesaplanır. Son olarak ikinci binormal vektör

$W(s) = \frac{R'(s)}{\mu(s)} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$

şeklindedir. Böylece istenilen Frenet çatısının vektör alanları ve bu vektör alanlarından oluşan eğrilikleri hesaplanmış olur.

Bu kısımda L^4 de birim hızlı null bir eğrinin {T(s), R(s), U(s), W(s)} Frenet çatısının alt uzaylarında yatan eğrileri örneği aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.8. L^4 de birim hızlı null bir eğri örneği

{T(s),R(s),U(s),W(s)} Frenet Çatısının Alt Uzayları	**Eğri /Eğriler**
{T(s), R(s)}	$\alpha(s) = (s+ k_7)\ (\frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s)$ $+k_8(\frac{-3}{2\sqrt{3}}\cos hs, \frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin hs, \frac{3}{2\sqrt{3}}\cos s, \frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin s)$
{T(s), U(s)}	$\alpha(s)=[\left(1 + k_5\sigma(s)\right)s + k_6](\frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s)+k_5(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$
{T(s), W(s)}	$\alpha(s)=[\left(1 - k_9\mu(s)\right)s + k_{10})(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s)+k_9(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$
{R(s), U(s)}	$\alpha(s)=[\frac{\rho(s)}{\sigma(s)}s+k_{11}](\frac{-3}{2\sqrt{3}}\cos hs,\frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin hs,\frac{3}{2\sqrt{3}}\cos s,\frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin s)-$ $\frac{1}{\sigma(s)}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s),$
{R(s), W(s)}	$\alpha(s)=k_{12}(\frac{-3}{2\sqrt{3}}\cos hs,\frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin hs, \frac{3}{2\sqrt{3}}\cos s, \frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin s)+\frac{1}{\mu(s)}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$ veya $\alpha(s) = \frac{1}{\mu(s)}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s),$
{U(s), W(s)}	$\alpha(s)=k_{13}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)-\frac{1}{\mu(s)}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s),$

Çizelge 4.8. L^4 de birim hızlı null bir eğri örneği (devam)

{T(s),R(s),U(s)}	$\alpha(s)=[[1+\theta(s)\sigma(s)]s+k_{15}](\frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s)+[\theta(s)\rho(s)s+k_{16}](\frac{-3}{2\sqrt{3}}\cos hs,\frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin hs,\frac{3}{2\sqrt{3}}\cos s,$ $\frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin s)+k_{17}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$
{T(s), R(s), W(s)}	$\alpha(s)=\{[1+k_{19}\mu(s)]s+k_{20}\}(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s)$ $+k_{18}(\frac{-3}{2\sqrt{3}}\cos hs,\frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin hs,\frac{3}{2\sqrt{3}}\cos s,\frac{-3}{2\sqrt{3}}\sin s)+k_{19}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$
{T(s), U(s), W(s)}	$\alpha(s)=\{[1+k_{21}\mu(s)+$ $k_{22}\sigma(s)]s+k_{23}\}(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin hs,\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s)+$ $k_{22}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)+k_{21}$ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$ veya $\alpha(s)=k_{21}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$
{R(s),U(s),W(s)}	$\alpha(s)=[\frac{-1-k_{24}\mu(s)}{\sigma(s)}](\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)+$ $k_{24}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos hs,-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s)$

5. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde Lorentz uzayında 3-boyutlu ve 4-boyutlu null ve null olmayan eğriler incelenmiştir. Bunlara ilişkin teoremler verilip ispatlanmıştır. Bu ispatlar yapılırken özellikle 3-boyutlu ve 4-boyutlu null eğrilerin Frenet çatısının alt uzaylarında eğrilerin yatma durumlarına ilişkin çözüm yöntemlerini barındıran "Null curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds" ve "Characterization of Null Curves in Lorentz Minkowski Spaces" makalelerinden faydalanılmıştır.

Tezin 4.bölümünde her bir eğri için Frenet çatısı, bu çatının alt uzaylarında yatan eğrilerin tabloları ve bu eğrilere ait örnekler örnek tabloları ile birlikte verilmiştir. Bu ise tezi diğer tezlerden ayıran en büyük özelliktir. Böylece daha sonraki araştırmacılar için bir kolaylık sağlanması hedeflenmiştir.

KAYNAKLAR

Duggal, K. L., & Jin, D. H. (2007). Null curves and hypersurfaces of semi-riemannian manifolds. *Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, 1–293. https://doi.org/10.1142/6449

Ferrández, A., Gimenez, A., & Lucas, P. (2001). Characterization of null curves in Lorentz-Minkowski spaces. *Publicaciones de la RSME*, *3*, 221-226.

Graves, L. (1979). *Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces*. Transactions of the American Mathematical Society, 252: 367-392.

Greub, W. H. (1975). *Linear Algebra*. Springer –Verlag, New York Heidelberg Berlin, 451pp.

Hacısalihoğlu, H. (1983). *Diferensiyel Geometri*. İnönü Üniv. Fen-Edb. Fak., Yayınları Mat., No:2, Malatya, 895s.

Hacısalihoğlu, H. (1985). *Lineer Cebir*. Gazi Üniv. Fen-Edb. Fak., No:7, Ankara, 765s

Ilarslan, K., & Nešović, E. (2009). The first kind and the second kind osculating curves in Minkowski space-time. *Comptes Rendus de L'Academie Bulgare Des Sciences*, *62*(6), 677–686.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, New York, 468pp.

Özerdem, Ö. (2018). *Minkowski 3-uzayında Tzitzeica eğrileri* [Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan University (Turkey)].

Erdem, H. A. (2013). *Minkowski uzay zamanda oskülatör eğrilerin karakterizasyonu* (Master's thesis, Kırıkkale Üniversitesi).

Sabuncuoğlu, A.(2010). *Diferensiyel geometri*. Nobel Yayınları, Ankara.

Tozak, H. (2010). *Minkowski 4-uzayında eğriler ve hareketlerin geometrisi* [Yüksek lisans tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü].

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ümmü Gülsüm Bayrak Torbalı
Doğum Yeri ve Tarihi	: Şiran/ 03.12.1992
Yabancı Dil	: İngilizce/Japonca
Eğitim Durumu	
Lise	: Mudanya İmam Hatip Lisesi
Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı
Çalıştığı Kurum/Kurumlar	: Ahmet Erdem Anadolu Lisesi (Staj/ 2014-2015) Özel Özgün Anadolu Lisesi (2016-2017) Özel Yedi Renkli Çınar Anadolu Lisesi (2017-2020) Özel Yedi Renkli Çınar Fen Lisesi (2017-2020)
İletişim (e-posta)	: ummubayrak@gmail.com

: