

ÖKLİD UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİ VE YÜZEYLERİ

Tuğçe DİRİM



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİ VE YÜZEYLERİ

Tuğçe DİRİM
0000-0001-5893-0401

Doç. Dr. Betül BULCA SOKUR
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2022
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Tuğçe DİRİM tarafından hazırlanan “ÖKLİD UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİ VE YÜZEYLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Betül BULCA

Başkan : Prof. Dr. Kadri ARSLAN
0000-0002-1440-7050
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Doç. Dr. Betül BULCA SOKUR
0000-0002-2273-3243
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Doç. Dr. İrem KÜPELİ ERKEN
0000-0003-4471-3291
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü

.././.....

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.../.../.....

Tuğçe DİRİM

TEZ YAYINLANMA FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan “**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**” kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Doç. Dr. Betül BULCA SOKUR
Tarih

Tuğçe DİRİM
Tarih

İmza

Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum
anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

İmza

Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum
anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖKLİD UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİ VE YÜZEYLERİ

Tuğçe DİRİM

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Betül BULCA SOKUR

Bu tez çalışmasında Öklid uzayındaki Bezier eğrileri ele alınmıştır. İlk olarak n . dereceden bir Bezier eğrisi için Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu kullanılarak Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri için genel bir formül elde edilmiştir. İkinci olarak Bezier yüzeylerinin gerinim enerjileri hesaplanmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılan \mathbb{E}^n de eğriler ve yüzeylerle ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Öklid uzayında Bezier eğrileri ve Bezier yüzeyleri tanıtılmıştır. n . dereceden bir Bezier eğrisi ile ilgili özellikler verilmiştir. Benzer şekilde verilen özellikler Bezier yüzeyleri için de tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde düzlemde ve 3 ve 4-boyutlu uzaydaki Bezier eğrilerinin Frenet elemanları hesaplanmış ve n . dereceden bir Bezier eğrisi için bir yöntem elde edilmiştir. Ayrıca Bezier yüzeylerinin gerinim enerjilerine değinilmiş ve ilgili örnekler verilerek uygun gerinim enerjisine sahip olma durumları incelenmiştir.

Beşinci bölüm çalışmanın sonuç kısmı olup verilen bu sonuçlarla ileride karşımıza çıkabilecek açık problemler üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bezier eğrileri, Bezier yüzeyleri, Frenet çatısı, gerinim enerjisi, asli eğrilikler

2022, vii + 72 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

BEZIER CURVES AND BEZIER SURFACES IN EUCLIDEAN SPACE

Tuğçe DİRİM

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Betül BULCA SOKUR

In this thesis, Bezier curves in Euclidean space are discussed. Firstly, general formula for Frenet vectors and Frenet curvatures is obtained by using the Gram-Schmidt orthonormalization method for a Bezier curve of degree n . Secondly, the strain energies of the Bezier surfaces were calculated.

This thesis consists of five chapters.

The first section is the introduction.

In the second section, the basic definitions and theorems about curves and surfaces in \mathbb{E}^n are given which is used in the next part of the thesis.

In the third chapter, Bezier curves and Bezier surfaces are introduced in Euclidean space. The properties of a n .th degree Bezier curve are given. Similarly, the given properties are also introduced for Bezier surfaces.

In the fourth chapter, the Frenet elements of the Bezier curves in the plane and in the 3 and 4-dimensional space are calculated and a method for a n .th degree Bezier curve is obtained. In addition, the strain energies of Bezier surfaces are mentioned and giving examples related to these, the state of having the appropriate strain energy has been examined.

The fifth chapter is the conclusion part of the study, and with these results, open problems that may arise in the future are emphasized.

Key words: Bezier curves, Bezier surfaces, Frenet frame, strain energy, principle curvatures

2022, vii + 72 pages.

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın gerekleőmesinde, yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgilerini benimle paylaőan, kendisine ne zaman danıősam bana kıymetli zamanımı ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, bu tez çalışmasında baőından son haline gelene kadar gerek akademik bilgisiyle gerek manevi desteğiyle yanımda olduğunu her zaman gösteren hocam Sayın Doç. Dr. Betül BULCA'ya teőekkürlerimi sunarım.

Tez çalıőmam süresince ve tüm hayatım boyunca yanımda olan, beni bugünlere getiren ve desteklerini hiç esirgemeyen kıymetli aileme teőekkürlerimi sunarım.

Tuğçe DİRİM

.../.../.....

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	5
2.1. \mathbb{E}^n de Eğriler.....	5
2.2. \mathbb{E}^n de Yüzeyle.....	7
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	11
3.1. Bezier Eğrileri.....	11
3.1.1. Bezier eğri parçasının oluşturulması.....	12
3.1.2. Bernstein polinomlarının özellikleri.....	13
3.1.3. Bezier eğrisinin türevleri.....	14
3.1.4. Bezier eğrilerinin özellikleri.....	17
3.1.5. De Casteljau algoritması.....	18
3.1.6. Bezier eğrisi için bölme algoritması.....	20
3.2. Bezier Yüzeyle.....	21
3.2.1. Bezier yüzey yamasının kısmi türevleri.....	22
3.2.2. Bezier yüzeyinin bazı özellikleri.....	23
4. BULGULAR.....	25
4.1. \mathbb{E}^2 de Bezier Eğrileri.....	25
4.1.1. \mathbb{E}^2 de kuadratik Bezier eğrileri.....	25
4.1.2. \mathbb{E}^2 de kübik Bezier eğrileri.....	27
4.1.3. \mathbb{E}^2 de 4. dereceden Bezier eğrileri.....	31
4.1.4. \mathbb{E}^2 de n. dereceden Bezier eğrileri.....	35
4.2. \mathbb{E}^3 de Bezier Eğrileri.....	37
4.2.1. \mathbb{E}^3 de kuadratik Bezier eğrileri.....	37
4.2.2. \mathbb{E}^3 de kübik Bezier eğrileri.....	39
4.2.3. \mathbb{E}^3 de 4. dereceden Bezier eğrileri.....	42
4.2.4. \mathbb{E}^3 de n. dereceden Bezier eğrileri.....	47
4.3. \mathbb{E}^4 de Bezier Eğrileri.....	49
4.3.1. \mathbb{E}^4 de kuadratik Bezier eğrileri.....	49
4.3.2. \mathbb{E}^4 de kübik Bezier eğrileri.....	51
4.3.3. \mathbb{E}^4 de 4. dereceden Bezier eğrileri.....	53
4.3.4. \mathbb{E}^4 de n. dereceden Bezier eğrileri.....	58
4.4. \mathbb{E}^3 de Bezier Yüzeylelerinin Gerinim Enerjileri.....	61
5. TARTIŞMA ve SONUÇLAR.....	69
KAYNAKLAR.....	70
ÖZGEÇMİŞ.....	72

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
V_k	Frenet vektörleri
κ_k	Frenet eğrilikleri
k_1, k_2	Yüzeyin asli eğrilikleri
K	Gauss eğriliği
H	Ortalama eğrilik
$B_{i,n}(t)$	Bernstein polinomları
P_i	Bezier eğrisinin kontrol noktaları
P_{ij}	Bezier yüzeyinin kontrol noktaları
$\Delta^r P_i$	Fark operatörleri
\mathbb{W}	Gerinim enerjisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. $n = 2$ ve $n = 3$ için Bernstein polinomları	13
Şekil 3.2. Bezier eğrisi için de Casteljau algoritması	19
Şekil 3.3. Bezier eğrisi için de bölme algoritması	20
Şekil 4.1. E^2 de kuadratik Bezier eğrisi	27
Şekil 4.2. E^2 de kübik Bezier eğrisi	30
Şekil 4.3. E^2 de 4.dereceden Bezier eğrisi	35
Şekil 4.4. E^3 de kuadratik Bezier eğrisi	38
Şekil 4.5. E^3 de kübik Bezier eğrisi	41
Şekil 4.6. E^3 de 4.dereceden Bezier eğrisi	47
Şekil 4.7. E^4 de kuadratik Bezier eğrisinin izdüşümü	51
Şekil 4.8. E^4 de kübik Bezier eğrisinin izdüşümü	53
Şekil 4.9. E^4 de 4.dereceden Bezier eğrisinin izdüşümü	58
Şekil 4.10. 2×2 tipinde Bezier yüzeyi	64
Şekil 4.11. 3×3 tipinde Bezier yüzeyi	66
Şekil 4.12. $a = 0,2$ ve $a = 0,4$ için 2×2 tipinde Bezier ve gerinim enerjisi yüzeyi ..	67
Şekil 4.13. $a = 0,2$ ve $a = 0,4$ için 3×3 tipinde Bezier ve gerinim enerjisi yüzeyi ..	68

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 4.1. 2×2 tipindeki Bezier yüzeyinin gerinim enerjileri	67
Çizelge 4.2. 3×3 tipindeki Bezier yüzeyinin gerinim enerjileri	68

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri 17. yüzyıl boyunca Öklid düzlemindeki eğriler ve 3-boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyler üzerindeki eğrilerin, diferansiyel hesabı olarak incelenmesi alanında çalışmalar sağlamıştır. Eğrilerin diferansiyel geometrisi, düzlem ve Öklid uzayındaki düzgün eğrileri diferansiyel ve integral hesap yöntemleriyle ele alıp klasik diferansiyel geometri olarak adlandırılır. Bu şekilde ortaya çıkan klasik diferansiyel geometri eğriler ve yüzeylerin yerel özelliklerini araştırır. Bu anlamda yerel özellikler yalnızca bir noktanın komşuluğundaki davranışına bağlı özellikleri verir. Bununla birlikte bu yerel özelliklerin eğri veya yüzeylerin tümünün davranışı üzerindeki etkileri de global diferansiyel geometri ile incelenir (Do Carmo, 2016; Korkmaz, 2012).

Diferansiyel geometri, eğrilerin incelenmesinde uygun bir yöntem olan eğriyi parametre ile ifade etme yolunu seçer. Böylece eğrilik ve yay uzunluğu gibi geometrik özellikler ve bunlarla ilişkili diğer tüm özellikler vektör hesabı kullanılarak türev ve integral yardımıyla ifade edilir. Bir eğriyi incelemek için kullanılan en iyi yollardan biri eğrinin her noktasında, o noktanın yakınındaki eğriye en iyi uyarlanmış bir koordinat sistemi sağlayan hareketli çatı olan Frenet çatısıdır. Eğriler teorisi yüzeyler teorisine ve onun yüksek boyuttaki genellemelerine göre daha kolay uygulanabilir. Çünkü Öklid uzayında düzgün bir eğrinin içsel geometrisi olmayıp yay uzunluğu ile parametrelendirilir. Böylece eğriler geometrik değişmezleri olan eğrilikler ile belirlenebilir (Do Carmo, 2016; Kühnel, 2015).

Bununla birlikte eğriler sanat, endüstriyel tasarım, mimarlık, otomotiv ve bunun gibi birçok alandaki uygulamalarda ortaya çıkar. Eğriler teorisi yardımıyla mimarlık ve mühendislikte çok sayıda bilgisayar çizim paketinin oluşturulmasını kolaylaştırmak için bilgisayar destekli tasarım paketleri geliştirilmiştir. Özellikle basit ve anlaşılır bir örnek verilmek istenirse bilgisayarda yazılan yazı tiplerinin her karakterinin ana hatları eğrilerle tanımlanır. Böylece ölçekleme dönüşümü ile farklı yazı tipi boyutları, kesme ve dönme dönüşümleri ile de özel yazı tipi efektleri elde edilebilir (Marsh, 2005).

Bilgisayar grafikleri, bilgisayar bilimi, matematik ve mühendisliğin kesiştiği yerde izole edilmiş bir disiplinden daha fazlasıdır. Hayatlarımızı iyileştirmek konusunda bilgisayarları ve otomasyon sistemlerini nasıl kullandığımız kısmında bilgisayar grafikleri bir öncü olmuştur. Bu anlamda günümüzdeki en gelişmiş bilgisayar grafiği

uygulamalarının çoğunun temeli matematikle atılmıştır. Bunlar arasında bilgisayar destekli tasarım ve üretim (CAD/CAM), geometrik modelleme, robotik, sanal gerçeklik, sinema efektleri vb. birçok güncel ve kullanışlı uygulama alanı bulunmaktadır (Mortenson, 1999).

Bilgisayar destekli tasarımların (CAD) temelini parametrik eğriler ve parametrik yüzeyler oluşturmaktadır. Eğriler ve yüzeylerin en önemli matematiksel temsillerinden ikisi de bilgisayar grafiklerinde ve bilgisayar destekli tasarımda kullanılan Bezier eğrileri ve B-spline formlarıdır. Bilgisayar ortamında, nesnenin tasarımı yapılırken, istenilen şeklin elde edilmesi için belirli bir aralıkla, noktaların düzgün bir şekil oluşturularak birleştirilmesi yani parametrik olarak verilen noktaların çizimi sonucunda eğrinin oluşturulması sağlanmıştır. Bilgisayar destekli geometrik tasarımın (CAGD) başlangıcı konik kesitlerinin ortaya konulması ile birlikte Roma dönemlerine kadar uzanmaktadır. Bu alandaki bilimsel araştırmalar ilk olarak R. Liming tarafından yapılmıştır. Ancak, Liming'in sunduğu bu yeni teknikler uçak tasarımında kullanışlı olmasına rağmen diğer alanlarda kullanışlı olmamıştır (Farin, 2002; Marsh, 2005).

Bezier eğrilerinin matematiksel temeli Bernstein polinomları yardımıyla 1912'de kurulmuştur. Fakat yaklaşık 50 yıl sonra 1959 da Paul de Casteljaun eğrileri değerlendirmek için sayısal olarak kararlı bir yöntem olan De Casteljaun algoritmasını geliştirmesine kadar bu polinomlar grafiklere uygulanmamıştır (Farin, Hoschek ve Kim, 2002). Paul de Casteljaun Fransız otomobil fabrikası Citroen de çalışan bir mühendis olarak bu algoritma yardımıyla polinomları bilgisayar tasarıma uygulayan ilk kişi olup Fransa da bu çalışmasıyla patent almıştır; fakat bu çalışması 1980 lere kadar herhangi bir yerde yayınlanmamıştır (De Casteljaun, 1985). Aynı yıllarda Renault da mühendis olarak çalışan Pierre Bezier tarafından bu eğrilerle ilgili çalışmalar bağımsız olarak yapılmıştır. 1962 yılında Bezier otomobil gövdelerinin tasarlanması üzerinde çalışırken Bernstein polinomlarını kullanarak bu eğriler yardımıyla bir geometrik modelleme elde etmiştir. Böylece, polinom eğri ve yüzeylerin Bernstein formunda ifadesiyle tamamen gelişen Bezier eğri ve yüzeyleri teorisi, P. Bezier'in ismiyle anılmaya başlamıştır. Günümüzde Bezier eğri ve yüzeyleri denilen bu kavramlar Renault şirketinin kullandığı UNISURF için bir temel oluşturmuştur (Farin, 2002).

UNISURF, araç gövdesi tasarımına ve aletlerine yardımcı olmak için tasarlanmış öncü bir yüzey CAD/CAM sistemi olup Fransız mühendis Pierre Bezier tarafından 1968

yılında Renault için geliştirilmiş ve 1975 yılında şirkette tam kullanıma geçilmiştir. 1999 yılı itibariyle de yaklaşık 1500 çalışanı, otomobil tasarımı ve üretimi için UNISURF kullanmıştır (Bezier, 1971).

Bezier eğrileri, bilgisayar grafiklerinde düzgün eğrileri modellemek için yaygın olarak kullanılır. Eğri tamamen kontrol noktalarının dışbükey gövdesinde yer aldığından, noktalar grafiksel olarak görüntülenebilir ve eğriyi sezgisel olarak değiştirmek için kullanılabilir. Fakat bu eğriler polinom yapıları nedeni ile konik gösterimlerinde bazı sorunlar ortaya çıkarmaktadır. Bu alandaki çalışmalar geliştirilerek rasyonel Bezier eğrileri elde edilmiş ve konik gösterimleri sağlanmıştır.

Bezier eğrilerinin kontrol noktalarının sayısı ile eğrinin derecesi doğrudan ilişkilidir. n . dereceden bir Bezier eğrisinin elde edilmesinde $n + 1$ tane kontrol noktasına ihtiyaç vardır. Kontrol noktalarının sırasıyla birleştirilmesiyle oluşan doğru parçalarından elde edilen çokgen kontrol noktaları çokgeni olarak adlandırılır. Bu nedenle bir Bezier eğrisinin şeklinin kontrolü aslında kontrol noktaları çokgeninin değişimi ile elde edilir. CAD programları ve bilgisayar grafikleri çiziminde eğrinin kontrol noktaları çokgeni elde edilerek program üzerinde kontrol noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ile uygun eğri modelleri çıkarılabilir. Aynı zamanda yeni kontrol noktaları eklenerek kontrol noktası çokgeni tekrar elde edilebilir. Yeni nokta eklenmesi durumunda eğrinin derecesinin artması ile birlikte eğri parçalarının birleşim noktalarındaki süreklilik şartlarının sağlanması da önemli konulardan biridir.

Bir Bezier eğrisi kontrol noktaları çokgeni boyunca başlangıç ve bitiş noktalarından (uç noktalardan) geçer, diğer noktalar eğri üzerinde bulunmak zorunda değildir. Bu nedenle eğri kontrol noktaları çokgenine sadece uç noktalarda bağlıdır. Ayrıca eğrinin kontrol noktalarına ilgili dönüşümler uygulanarak, öteleme ve döndürme gibi afin dönüşümler eğri üzerinde uygulanabilir hale gelir (Farin, 2002; Laurent ve Sablonniere, 2001; Rabut, 2002; Rogers, 2002).

Benzer çalışmalar eğriler üzerinde olduğu gibi yüzeyler üzerinde de uygulanmıştır. Bezier ve De Casteljau'nun oluşturdukları metodlar iki eğrinin tensör çarpımı alınarak bir Bezier yüzeyinin elde edilmesinde de benzer şekilde uygulanabilir. Bezier tarafından otomobil gövdelerinin yüzeyleri için oluşturulan yöntem bir diğer taraftan 1964 yılında yüzey yamalarının birleştirilmesiyle James Ferguson tarafından Boeing firmasında uçak parçalarının tasarlanmasında kullanılmıştır. Ayrıca ilerleyen zamanlarda Ford

fabrikasında çalışan Steven Anson Coons tarafından da keyfi dört sınır eğrisi verilerek bir yüzey yaması elde edilmiştir.

Böylece verilen bu yöntemler yardımıyla eğri ve yüzey tasarım teknikleri eğri ve yüzeyin tamamen değişmeden sadece yerel değişiklikler yardımıyla uygun bir modelleme yapılmasına olanak sağlamaktadır.

Bu tez çalışmasında ise şimdiye kadar birçok matematikçinin çalıştığı Öklid uzayındaki Bezier eğrileri için eğrilikleri ile ilgili genel sonuçlar elde edilmiştir. Bu alanda birçok makale ve tezler çalışılmış olmakla birlikte Esra Erkan'ın doktora tezi bu çalışmaya temel kaynak oluşturmuştur (Erkan, 2019). Bununla birlikte bu çalışmada daha önceden yapılmış doktora ve yüksek lisans tezleri ile bazı çalışmalar temel kaynak olarak kullanılmıştır (İncesu, 2003; Luzum, 2018; Yılmaz, 2019; Ayar, 2019; Levent, 2013; Erkan ve Yüce, 2018; Erkan ve Yüce, 2020).

Bu tez çalışmasında Öklid düzleminde ve 3 ve 4-boyutlu Öklid uzayındaki Bezier eğrileri ele alınmış ve verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi için Frenet elemanlarını elde etmek için genel bir çıkarım yapılmıştır. Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayında bir Bezier yüzeyinin gerinim enerjisi üzerinde durulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde ilk olarak tezin ilerleyen bölümlerinde ihtiyaç duyulacak olan n -boyutlu Öklid uzayında eğriler ve yüzeylerle ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. E^n de Eğriler

Tanım 2.1. $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan bir

$$f: A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = PQ \quad (2.1)$$

fonksiyonu varsa A kümesine, V vektör uzayı ile birleşen bir *afin uzay* denir.

$$(A_1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A_2) \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

Burada $P, Q \in A$ için $f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$ şeklinde gösterilir. P noktasına \overrightarrow{PQ} vektörünün başlangıç noktası, Q noktasına da bitiş (uç) noktası denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Tanım 2.2. V bir vektör uzayı, A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörlerinin oluşturduğu $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n + 1)$ -lisine A afin uzayının bir *afin çatısı* denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve $P_i, 1 \leq i \leq n$ noktalarına da çatının birim noktaları denir.

Eğer $\dim V = n$ ise A ya *n -boyutlu bir afin uzay* denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Tanım 2.3. V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Bir $\Psi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise Ψ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde *iç-çarpım fonksiyonu*, V vektör uzayına da *iç-çarpım uzayı* adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Tanım 2.4. A, n -boyutlu V reel vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayında bir iç-çarpım işlemi olarak;

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.2)$$

Öklid çarpımı tanımlanırsa A afin uzayına *Öklid uzayı* denir ve \mathbb{E}^n ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2.5. \mathbb{E}^n , n -boyutlu bir Öklid uzayı olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{E}^n$ için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör kümesi \mathbb{E}^n ile birleşen V vektör uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine \mathbb{E}^n de bir *Öklid çatısı* veya bir *dik çatı* denir (Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2.6. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere verilen,

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad (2.3)$$

diferansiyellenebilir fonksiyonuna \mathbb{E}^n Öklid uzayında *parametrik eğri* denir (Hacısalihoglu, 1982).

Tanım 2.7. Bir $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\|\gamma'(t)\| = 1$ ise γ eğrisine *birim hızlı eğri* denir. Ayrıca $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ eğrisine *regüler eğri* adı verilir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.8. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ regüler parametrik bir eğri olsun. Bu takdirde $\forall t \in I$ için γ nın yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t)$ lineer bağımsız ve $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t), \gamma^{(d+1)}(t)$ lineer bağımlı ise γ eğrisine *d-ranklı Frenet eğrisi* adı verilir.

Eğer γ , d-ranklı bir Frenet eğrisi ise $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t)$ vektörlerine Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulanarak $V_1(t), V_2(t), \dots, V_d(t)$ ortonormal d-çatısı (Serret-Frenet Vektörleri) elde edilir. Yani;

$$E_1(t) = \gamma'(t), V_1(t) = \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|}$$

$$E_2(t) = \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), E_1(t) \rangle \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|^2},$$

$$E_k(t) = \gamma^{(k)}(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \gamma^{(k)}(t), E_i(t) \rangle \frac{E_i(t)}{\|E_i(t)\|^2}, \quad (2.4)$$

$$V_k(t) = \frac{E_k(t)}{\|E_k(t)\|}, \quad 2 \leq k \leq d \quad (2.5)$$

dir (Gluck, 1966).

Teorem 2.9. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ d-ranklı keyfi hızlı bir Frenet eğrisinin ortonormal çatısı $V_1(t), V_2(t), \dots, V_d(t)$ için,

$$E_k(t) = \gamma^{(k)}(t) - \sum_{j < k} \langle \gamma^{(k)}(t), V_j(t) \rangle V_j(t)$$

olmak üzere γ eğrisinin Frenet eğrilik fonksiyonları

$$\kappa_k(t) = \frac{\|E_{k+1}\|}{\|E_k\| \|E_1\|}, \quad 1 \leq k \leq d-1 \quad (2.6)$$

dir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.10. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ d-ranklı keyfi hızlı bir Frenet eğrisi olmak üzere γ nın ortonormal çatısı $V_1(t), V_2(t), \dots, V_d(t)$ nin türevleri $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ için

$$V_1'(t) = v(t)\kappa_1(t)V_2(t)$$

$$V_i'(t) = -v(t)\kappa_{i-1}(t)V_{i-1}(t) + v(t)\kappa_i(t)V_{i+1}(t), \quad (2.7)$$

$$V_d'(t) = -v(t)\kappa_{d-1}(t)V_{d-1}(t), \quad 2 \leq i \leq d-1$$

dir. Burada $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları γ nın Frenet eğrilik fonksiyonlarıdır (Gluck, 1966).

Sonuç 2.11. Her bir d-ranklı Frenet eğrisi γ nın $V_1(t), V_2(t), \dots, V_d(t)$ vektörlerine *Frenet d-çatısı* ve (2.6) da verilen eşitliklere de *Frenet denklemleri* adı verilir. Bu Frenet denklemlerinin matris formundaki gösterilişi

$$\begin{bmatrix} V_1'(t) \\ V_2'(t) \\ V_3'(t) \\ \dots \\ V_d'(t) \end{bmatrix} = v(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \cdot & \cdot & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\kappa_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \kappa_{d-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & -\kappa_{d-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \dots \\ V_d \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

dir (Gluck, 1966).

2.2. \mathbb{E}^n de Yüzeyler

Tanım 2.12. M yüzeyi $X: U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^n$ yaması ile verilsin. M nin $p \in X(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, X_u ve X_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M nin *birinci temel formu*

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2.9)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle, \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle
\end{aligned} \tag{2.10}$$

olup \langle , \rangle bir Öklid iç çarpımıdır. (2.10) eşitliğinde verilen E,F,G ise birinci temel form katsayıları olarak tanımlanır. Bununla birlikte (2.10) eşitliği yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2 = W^2 \tag{2.11}$$

elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \neq 0$ ise $X(u, v)$ yaması *regüler*dir denir.

Tanım 2.13. $M \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. \mathbb{E}^n de Riemann koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin *ikinci temel form dönüşümü*

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M); h(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlı olup *Gauss denklemi* olarak bilinir. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir (Chen, 1973).

Tanım 2.14. $M \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $\forall X \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi^\perp(M)$ için M nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); A_\xi X = -\tilde{\nabla}_X \xi + \nabla_X^\perp \xi \tag{2.13}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_\xi X$, ξ ya karşılık gelen şekil operatörü ve ∇^\perp ise $\chi^\perp(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle \tag{2.14}$$

olmak üzere bu eşitlikte *Weingarten denklemi* olarak bilinir. Bu operatör self-adjoint ve 2-lineerdir (Chen, 1973).

Tanım 2.15. $M \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u, v)$ yamasının 2. mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} ve normal vektör alanları N_1, N_2, \dots, N_{n-2} olmak üzere olmak üzere M nin *ikinci temel formu*

$$II = c_{11}^k du^2 + 2c_{12}^k dudv + c_{22}^k dv^2 \tag{2.15}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$c_{11}^k = \langle X_{uu}, N_k \rangle,$$

$$c_{12}^k = \langle X_{uv}, N_k \rangle, \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (2.16)$$

$$c_{22}^k = \langle X_{vv}, N_k \rangle$$

ikinci temel form katsayıları olarak tanımlanır (Mello, 2003).

Tanım 2.16. $X(u, v): (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ regüler yaması ile verilen $M \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu

$$K = \frac{1}{w^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k c_{22}^k - (c_{12}^k)^2) \quad (2.17)$$

ve ortalama eğrilik vektör alanı

$$\vec{H} = \sum_{k=1}^{n-2} H_k N_k \quad (2.18)$$

dir. Burada

$$H_k = \frac{1}{2w^2} \sum_{k=1}^{n-2} (Gc_{11}^k - 2Fc_{12}^k + Ec_{22}^k) \quad (2.19)$$

olup M yüzeyinin k 'inci ortalama eğrilik fonksiyonudur. Bununla birlikte M nin ortalama eğrilik fonksiyonu $H = \|\vec{H}\|$ dir (Mello, 2003, 2009).

Sonuç 2.17. $X(u, v): (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ regüler yaması ile verilen $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu

$$K = \frac{c_{11}^1 c_{22}^1 - (c_{12}^1)^2}{EG - F^2} \quad (2.20)$$

ve ortalama eğrilik fonksiyonu

$$H = \frac{Gc_{11}^1 - 2Fc_{12}^1 + Ec_{22}^1}{2(EG - F^2)} \quad (2.21)$$

dir.

Tanım 2.18. $M \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. M yüzeyinin bir p noktasındaki şekil operatörü dönüşümünün karakteristik değerlerine, p noktasındaki *asli eğrilikleri* denir. Asli eğriliklere karşılık gelen vektörlerin belirttiği doğrultulara da *asli doğrultular* adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.19. $M \subset \mathbb{E}^3$ regüler yüzeyi olmak üzere, K yüzeyin Gauss eğriliği ve H yüzeyin ortalama eğriliği olsun. Bu taktirde asli eğrilikler k_1 ve k_2 ile Gauss ve ortalama eğriliği arasında

$$K = k_1 k_2 \quad (2.22)$$

ve

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (2.23)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Sonuç olarak

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (2.24)$$

ve

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (2.25)$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Bezier Eğrileri

Bu bölümde Bezier eğrileri ile ilgili bazı temel bilgiler verilecektir.

Bezier eğrileri özel matematiksel gösterimlere sahip eğriler olup polinom fonksiyonları yardımıyla elde edilmektedir. Bu eğriler bilgisayar destekli geometrik tasarım ve modellemede kullandıkları için uygulamalı alanlarda önemli yere sahiptir.

Bezier eğrileri, eğriyi içinde barındıran kontrol çokgenine sahip olup sadece başlangıç ve bitiş noktaları eğri üzerinden olduğundan modellemede kullanım açısından avantaj sağlayan eğriler olarak karşımıza çıkmaktadır. Böylece kontrol çokgeni üzerinden istenilen değişiklikler yapma olanağı sağlar (Bezier, 1971).

Bezier eğrilerinin ortaya çıkışı 1962 yılında Renault'da mühendis olarak çalışan Pierre Bezier tarafından olmuştur. Bezier, modellemede tasarımcıya interpolasyon teknikleri ile daha büyük bir esneklik vermek için matematiksel bir formül üzerinde çalışmaya başlamıştır. Bununla birlikte bu matematiksel formül aynı zamanda birbirinden bağımsız olarak Citroen şirketinde mühendis olan De Casteljaou tarafından da 1960'lı yıllarda geliştirilmiştir. Bezier'in yaptığı çalışmalar bilim dünyasında daha erken yayınlandığı için bu eğriler onun ismiyle anılıp literatüre Bezier eğrileri olarak geçmiştir. Fakat bu eğrilerin oluşturulmasında kullanılan bölme algoritması da De Casteljaou algoritması olarak bilinir (Anand, 1992; Farin, 2002).

Bezier eğrileri için, eğriye yaklaşımı sağlayan interpolasyon yöntemi bu kontrol noktalarından geçme şartı olmaksızın (başlangıç ve bitiş noktaları hariç) ve sıralı noktalar kümesi olan (P_0, \dots, P_n) kontrol noktalarını kullanarak elde edilir. Bu noktalar, grafik üzerinde temsil edilebilir ve kullanıcıya eğrinin şeklini kontrol imkanı verir.

Bezier eğrileri, serbest şekilli eğrilerin gösteriminde kullanılan polinom fonksiyonlarını baz almıştır. n . dereceden Bezier eğrisi, $n + 1$ kontrol noktasına sahip vektör değerli bir fonksiyondur ve

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)P_i$$

ile verilir. Burada, verilen P_i ler eğrinin *kontrol noktalarıdır* (Forrest, 1968).

$B_{i,n}(t)$ fonksiyonu Bernstein polinomu olmak üzere

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, 0 \leq t \leq 1$$

ile tanımlanır ve

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad i = 0, \dots, n$$

binom katsayılarıdır. Bu gösterim karma fonksiyon olarak adlandırılır ve tüm i değerleri için,

$$B_{i,n}(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ve

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

şartlarını sağlar.

3.1.1. Bezier eğri parçasının oluşturulması

Tanım 3.1. \mathbb{E}^k Öklid uzayında verilen P_0, P_1 noktaları için bu iki kontrol noktasını birleştiren $\overline{P_0P_1}$ doğru parçası bir lineer Bezier eğrisi oluşturur. Böylece $t \in [0,1]$ olmak üzere *lineer Bezier eğrisi*;

$$P(t) = P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1; \quad (3.1)$$

parametrizasyonu ile ifade edilir. Burada;

$$B_{0,1}(t) = (1-t), \quad B_{1,1}(t) = t \quad (3.2)$$

1. dereceden Bernstein polinomları ve P_0, P_1 kontrol noktalarıdır (Kaplan ve Mann, 2006; Marsh, 2005).

Tanım 3.2. \mathbb{E}^k Öklid uzayında verilen P_0, P_1 ve P_2 noktaları için $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$P(t) = P_0^2(t) = (1-t)^2P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2P_2 \quad (3.3)$$

eğrisine *kuadratik Bezier eğrisi* denir. Burada

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2$$
$$B_{1,2}(t) = 2(1-t)t \quad (3.4)$$

$$B_{2,2}(t) = t^2$$

2.dereceden Bernstein polinomları ve P_0, P_1 ve P_2 kontrol noktalarıdır.

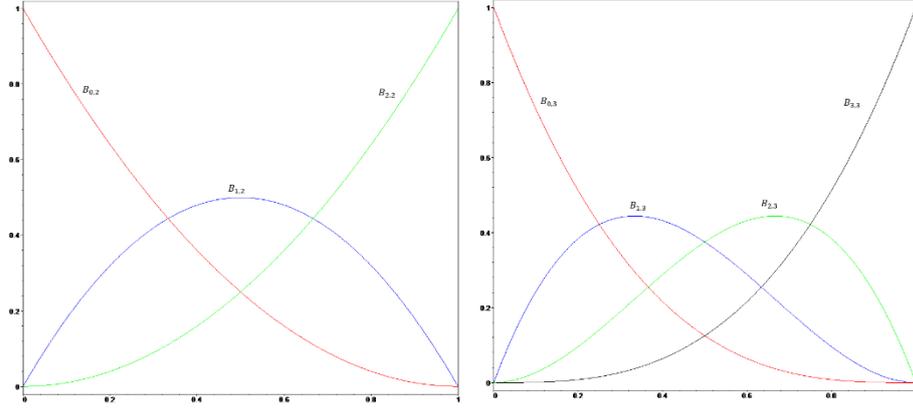
Tanım 3.3. \mathbb{E}^k Öklid uzayında verilen P_0, P_1, P_2 ve P_3 noktaları için $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$P(t) = P_0^3(t) = (1-t)^3P_0 + 3(1-t)^2tP_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3P_3 \quad (3.5)$$

eğrisine *kübik Bezier eğrisi* denir. Burada;

$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= (1-t)^3 \\ B_{1,3}(t) &= 3(1-t)^2t \\ B_{2,3}(t) &= 3(1-t)t^2 \\ B_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

3. dereceden Bernstein polinomları ve P_0, P_1, P_2 ve P_3 de kontrol noktalarıdır.



Şekil 3.1. $n = 2$ ve $n = 3$ için Bernstein polinomları

Tanım 3.4. \mathbb{E}^k Öklid uzayında verilen $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ noktaları için $t \in [0,1]$ ve $n \leq k$ olmak üzere

$$P(t) = P_0^n(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) \quad (3.7)$$

eğrisine *n. dereceden Bezier eğrisi* denir Burada;

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i ; 0 \leq i \leq n \quad (3.8)$$

n. dereceden Bernstein polinomları ve $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ kontrol noktalarıdır. Bu kontrol noktalarının sırasıyla oluşturduğu doğru parçaları yardımıyla elde edilen poligona *kontrol poligonu* denir (David, 2006; Marsh, 2005).

3.1.2. Bernstein polinomlarının özellikleri

Bu kısımda (3.8) eşitliği ile verilen Bernstein polinomlarının özellikleri üzerinde durulacaktır.

Birimin parçalanması özelliği: $\forall t \in [0,1]$ için

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$$

dir, yani n . dereceden Bernstein polinomlarının toplamı 1 dir (Marsh, 2005; Farin, 2002).

Pozitiflik özelliği: Bernstein polinomları, $[0,1]$ aralığı üzerinde pozitifler. Yani, $\forall t \in [0,1]$ için $B_{i,n}(t) \geq 0$ dir (Marsh, 2005).

Simetri özelliği: Bernstein polinomları $B_{i,n}(t)$ için;

$$B_{n-i,n}(t) = B_{i,n}(1-t), \quad i=0, \dots, n$$

eşitliği geçerlidir (Marsh, 2005).

Böylece, $B_{n-i,n}(t)$ fonksiyonunun grafiği, $B_{i,n}(1-t)$ fonksiyonunun grafiğinin yansımasıdır.

Rekürsiyon (özyineleme) özelliği: n . dereceden Bernstein polinomları $B_{i,n}(t)$, $(n-1)$. dereceden polinomlar cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t), \quad i=0, \dots, n.$$

Burada; $B_{-1,n-1}(t) = 0$ ve $B_{n,n-1}(t) = 0$ dir (Marsh, 2005; Farin, 2002).

3.1.3. Bezier eğrisinin türevleri

Teğetleri ve normalleri belirleme gibi eğrileri kapsayan birçok uygulama, türevlerin hesabını gerektirir. Bezier eğrilerinin türevleri, Bernstein polinomlarının türevlerinden elde edilir. Bu nedenle n . dereceden bir Bernstein polinomunun türevleri aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.5. \mathbb{E}^k Öklid uzayında (3.7) denklemi ile verilen bir Bezier eğrisinin n . dereceden Bernstein polinomlarının birinci ve ikinci türevleri sırasıyla,

$$B'_{i,n}(t) = \frac{i-nt}{t(1-t)} B_{i,n}(t), \quad (3.9)$$

ve

$$B''_{i,n}(t) = \left(\frac{i(i-1)-2i(n-1)t+n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_{i,n}(t) \quad (3.10)$$

ile ifade edilir. Ayrıca, (3.9) eşitliğini

$$B'_{i,n}(t) = n \left(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t) \right) \quad (3.11)$$

ile göstermek mümkündür (Kaplan ve Mann, 2006; Marsh, 2005).

İspat. (3.8) eşitliği ile verilen Bernstein polinomuna çarpımın türevi kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned} B'_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} (i(1-t)^{n-i}t^{i-1} - (n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i) \\ &= \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right) \binom{n}{i} (1-t)^{n-i}t^i \\ &= \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right) B_{i,n}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen Bernstein polinomunun birinci türevine tekrar türev alma işlemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} B''_{i,n}(t) &= \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right)' B_{i,n}(t) + \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right) B'_{i,n}(t) \\ &= \left(\frac{2it-nt^2-i}{t^2(1-t)^2} \right) B_{i,n}(t) + \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right)^2 B_{i,n}(t) \\ &= \left(\frac{i(i-1)-2i(n-1)t+n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_{i,n}(t) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} B'_{i,n}(t) &= -\binom{n}{i}(n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i + \binom{n}{i}i(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= -\frac{n!}{(n-i)!i!}(n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i + \frac{n!}{(n-i)!i!}i(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= -\frac{n(n-1)!}{(n-i-1)!i!}(1-t)^{n-i-1}t^i + \frac{n(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!}(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= n\left(-\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-i-1}t^i + \binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-i}t^{i-1}\right) \\ &= n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.5 yardımıyla n . dereceden Bernstein polinomlarının türevlerini kullanarak n . dereceden Bezier eğrilerinin türevleri için aşağıda verilen teorem ve sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.6. \mathbb{E}^k Öklid uzayında (3.7) denklemleri ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin birinci türevi

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 P_i \quad (3.12)$$

şeklindedir. Burada,

$$\Delta^1 P_i = P_{i+1} - P_i \quad (3.13)$$

olup *ileri fark operatörü* olarak adlandırılır (David, 2006; Marsh, 2005). Kolaylık olması açısından ilerleyen bölümlerde fark operatörü $\Delta^1 P_i = d_i$ olarak gösterilmiştir.

İspat. Rekürsiyon özelliğinden $B_{-1,n-1}(t) = B_{n,n-1}(t) = 0$ olmak üzere (3.11) eşitliği de kullanılarak,

$$\begin{aligned} P'(t) &= \sum_{i=0}^n B'_{i,n}(t)P_i = \sum_{i=0}^n n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t))P_i \\ &= \sum_{i=0}^n nB_{i-1,n-1}(t)P_i - \sum_{i=0}^n nB_{i,n-1}(t)P_i \\ &= \sum_{i=0}^n nB_{i-1,n-1}(t)P_i - \sum_{i=0}^{n-1} nB_{i,n-1}(t)P_i \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadenin toplamları tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} P'(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} nB_{i,n-1}(t)P_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} nB_{i,n-1}(t)P_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} nB_{i,n-1}(t)(P_{i+1} - P_i) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)\Delta^1 P_i \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. ■

Bezier eğrisinin ikinci ve daha yüksek mertebeden türevleri, birinci türev formülünün tekrar uygulanmasıyla elde edilir.

Sonuç 3.7. \mathbb{E}^k Öklid uzayında (3.7) denklemi ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin ikinci türevi,

$$P''(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) \Delta^2 P_i \quad (3.14)$$

şeklindedir. Burada

$$\Delta^2 P_i = (\Delta^1 P_{i+1} - \Delta^1 P_i) = (P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) \quad (3.15)$$

dir (Marsh, 2005).

Sonuç 3.8. \mathbb{E}^k Öklid uzayında (3.7) denklemi ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin r . türevi,

$$P^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} B_{i,n-r}(t) \Delta^r P_i \quad (3.16)$$

şeklindedir. Burada,

$$\Delta^r P_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} P_{i+j} \quad (3.17)$$

dir. Ayrıca,

$$\Delta^r P_j = \Delta^{r-1} P_{j+1} - \Delta^{r-1} P_j$$

eşitliği vardır (Marsh, 2005).

Sonuç 3.9. \mathbb{E}^k Öklid uzayında (3.7) denklemi ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin r . türevinin $t = 0$ ve $t = 1$ başlangıç ve bitiş noktalarındaki değerleri sırasıyla,

$$P^{(r)}(t)|_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r P_i B_{i,n-r}(t)|_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r P_0 \quad (3.18)$$

$$P^{(r)}(t)|_{t=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r P_i B_{i,n-r}(t)|_{t=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r P_{n-r} \quad (3.19)$$

şeklindedir (Marsh, 2005).

3.1.4. Bezier eğrilerinin özellikleri

\mathbb{E}^k Öklid uzayında verilen P_0, P_1, \dots, P_n kontrol noktalarına sahip n . dereceden bir $P(t)$ Bezier eğrisinin özellikleri aşağıdaki gibidir.

Uç nokta interpolasyon özelliği: Bir $P(t)$ Bezier eğrisinde başlangıç ve bitiş değerleri $t = 0$ ve $t = 1$ için $P(0) = P_0$ ve $P(1) = P_n$ dir (Marsh, 2005).

Uç nokta tanjant özelliği: Bir $P(t)$ Bezier eğrisi için uç noktalardaki tanjant vektörleri için $P'(0) = n(P_1 - P_0)$ ve $P'(1) = n(P_n - P_{n-1})$ özelliği sağlanır (Marsh, 2005).

Konveks kabuk (Convex hull) özelliği: \mathbb{E}^n de noktalar kümesi $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olmak üzere bu kümenin konveks kabuğu

$$CH\{X\} = \{a_0 x_0 + \dots + a_n x_n \mid \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0\}$$

şeklinde tanımlanır. O halde $P(t)$ Bezier eğrisinde $\forall t \in [0,1]$ için $P(t) \in CH\{P_0, \dots, P_n\}$ olur. Böylece bir Bezier eğrisinin her noktası eğriyi oluşturan kontrol noktalarının konveks kabuğu içinde yer alır. Kontrol noktalarının konveks kabuğu da genel olarak Bezier eğrisinin konveks kabuğu olarak adlandırılır (Marsh, 2005).

Afin dönüşümler altında değişmezlik: T bir afin dönüşüm olmak üzere bir $P(t)$ Bezier eğrisi afin dönüşümler altında invaryanttır. Yani;

$$T(P(t)) = T\left(\sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)\right) = \sum_{i=0}^n T(P_i) B_{i,n}(t)$$

dır (Marsh, 2005).

Varyasyon azaltma özelliği: Düzlemsel bir $P(t)$ Bezier eğrisi için varyasyon azaltma özelliği, verilen belirli bir doğrunun $P(t)$ Bezier eğrisi ile kesişme sayısı verilen doğrunun kontrol poligonu ile kesişme sayısından küçük veya eşit olduğunu verir (Marsh, 2005).

3.1.5. De Casteljau algoritması

Sayısal analiz alanında Bernstein formundaki veya Bezier eğrilerindeki polinomları değerlendirmek için özyinelemeli bir yöntem olan De Casteljau algoritması mühendis Paul De Casteljau tarafından elde edilmiştir.

De Casteljau algoritması, $t \in [0,1]$ parametresine karşılık bir Bezier eğrisi üzerindeki bir noktanın elde edilmesi için bir yöntem sağlar. Ayrıca bu yöntem rastgele parametre değerinde bir Bezier eğrisini iki Bezier eğrisine bölmek için de kullanılır.

Teorem 3.10. Kontrol noktaları P_0, P_1, \dots, P_n olan n . dereceden bir Bezier eğrisi verilsin. $\forall t \in [0,1]$ için

$$P_i^0 = P_i$$

ve

$$P_i^j = (1 - t)P_i^{j-1} + tP_{i+1}^{j-1}, \quad i = 0, \dots, n - j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

olmak üzere $P(t) = P_0^n$ dir (Marsh, 2005).

İspat. Bernstein polinomlarının özyineleme özelliği

$$B_{i,n}(t) = (1 - t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) \quad (3.21)$$

kullanılarak De Casteljau algoritmasını elde etmek mümkündür. O halde (3.21) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_i ((1 - t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)) \\ &= \sum_{i=0}^n (1 - t)P_i B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^n tP_i B_{i-1,n-1}(t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca, $B_{n,n-1}(t) = 0$ ve $B_{-1,n-1}(t) = 0$ olduğundan,

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 - t)P_i B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=1}^n tP_i B_{i-1,n-1}(t) \quad (3.22)$$

elde edilir.

Bu takdirde (3.22) eşitliğinde i indisi $i + 1$ ile olarak değiştirilip ikinci toplam yeniden numaralandırılırsa

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)P_i B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} tP_{i+1} B_{i,n-1}(t) \quad (3.23)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} ((1-t)P_i + tP_{i+1}) B_{i,n-1}(t)$$

bulunur.

Böylece, $i = 0, \dots, n-1$ için $P_i^1 = (1-t)P_i + tP_{i+1} = (1-t)P_i^0 + tP_{i+1}^0$ alınır

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^1 B_{i,n-1}(t) \quad (3.24)$$

elde edilir.

(3.24) eşitliği de P_0^1, \dots, P_{n-1}^1 kontrol noktalarına sahip $(n-1)$. dereceden bir $P(t)$ Bezier eğrisini belirtir. Elde edilen Bezier eğrisine aynı metod tekrar uygulanırsa $(n-2)$. dereceden Bezier eğrisi,

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-2} P_i^2 B_{i,n-2}(t)$$

olarak bulunur. Burada, $i = 0, \dots, n-2$ için

$$P_{i+1}^2 = (1-t)P_i^1 + tP_{i+1}^1$$

dir.

Böylece genel olarak, $i = 0, \dots, n-j$ için

$$P_i^j = (1-t)P_i^{j-1} + tP_{i+1}^{j-1}$$

olmak üzere Bezier eğrisi

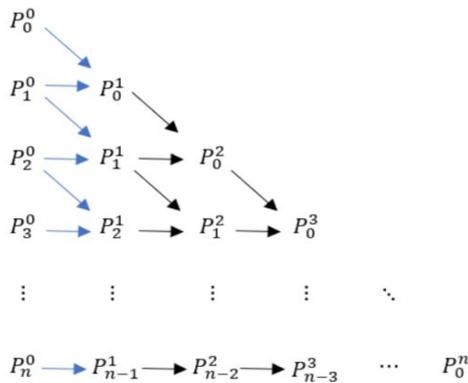
$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-j} P_i^j B_{i,n-j}(t)$$

eşitliği ile verilebilir.

Özel olarak $j = n$ alınır,

$$P(t) = \sum_{i=0}^0 P_i^n B_{i,n-n}(t) = P_0^n \quad (3.25)$$

olarak elde edilir (Şekil 3.2). ■



Şekil 3.3. Bezier eğrisi için De Casteljau algoritması

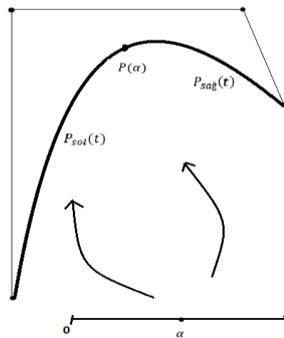
3.1.6. Bezier eğrisi için bölme algoritması

Eğrilerde bölme işleminin birçok uygulanabilir yönü vardır. Bölme algoritması eğri tasarımı için bağımsızlık sağlamak adına sırayla yeni kontrol noktaları oluşturmanın bir yoludur. Örneğin, iki Bezier eğrisinin kesişimini hesaplamak, yeni Bezier eğrilerini oluşturmak ve eğri tasarımını kolaylaştırmak için bu metod kullanılabilir. Böylece eğri bölme yardımıyla eğrinin bir parçası değiştirilirken diğer kısmına dokunulmadan bırakılabilir.

Bir Bezier eğrisini verilen parametrelere bağlı olarak iki eğri parçasına ayırmak mümkündür. Sonunda elde edilen eğriler de yine Bezier eğrileri olarak bulunur. Bu durumda elde edilen yeni Bezier eğrilerinin kendi yeni kontrol noktalarına sahip olması gerektiğinden orijinal kontrol noktaları seti atılıp yerine yeni kontrol noktaları seti tanımlanır. Burada n . dereceden bir Bezier eğrisinin bölünmesi ile elde edilen yeni Bezier eğrileri de yine n . dereceden eğriler olacaktır.

Bir Bezier eğrisini $t = t_0$ parametre değerine karşılık iki eğri parçasına ayırmak ve sırasıyla yeni kontrol noktalarını elde etmek için (3.20) eşitliği ile verilen de Casteljau algoritmasını kullanmak mümkündür. Bunun için Bezier eğrisinin $t = \alpha$ parametresine bağlı olarak iki yeni Bezier eğri parçasına ayrılması ele alınırsa bu iki yeni eğriden ilki $0 \leq t \leq \alpha$ tanım aralığında ve ikincisi de $\alpha \leq t \leq 1$ tanım aralığında olup $P_{sol}(t)$ ve $P_{sağ}(t)$ şeklinde verilir ve $[0,1]$ aralığında Bezier formunda yazılabilirler (Şekil 3.4).

O halde bölme algoritması yardımıyla $P = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kontrol noktaları ile elde edilmiş olan poligonu sağ ve sol tarafta olacak şekilde yeni kontrol noktalarından elde edilen $P^* = \{P_0^0, P_0^1, \dots, P_0^n\}$ ve $P^\circ = \{P_0^n, P_1^{n-1}, \dots, P_n^0\}$ poligonlarının birleşimi şeklinde elde etmek mümkündür (Marsh, 2005).



Şekil 3.4. Bezier eğrisi için bölme algoritması

3.2. Bezier Yüzeyleri

Tanım 3.11. $B_{i,m}(u)$ ve $B_{j,n}(v)$ sırasıyla u ve v parametrelerine bağlı ve dereceleri m ve n olan Bernstein polinomları olsun. Böylece $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ olmak üzere \mathbb{E}^3 Öklid uzayında P_{ij} kontrol noktalarının oluşturduğu bir Bezier yüzeyi, $(u, v) \in [0,1] \times [0,1] = U$ için

$$P: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \quad (3.26)$$

yamasıyla tanımlanır (Marsh, 2005).

Tanım 3.12. Bir Bezier yüzeyi için m ve n sırasıyla Bernstein polinomlarının dereceleri olsun. Eğer $m = n = 3$ ise yüzey *bikübik*; $m = n = 2$ ise *bikvadratik* ve $m = n = 1$ ise *bilineer* olarak adlandırılır. Eğer $m \neq n$ ise yüzey için $(m \times n)$. dereceden bir Bezier yüzeyidir denir (Sederberg, 2017).

Tanım 3.13. (3.26) parametrelendirmesiyle verilen Bezier yüzeyinin iki parametresinden birinin sabitlenmesiyle, örneğin $u = u_0$ alınarak;

$$\begin{aligned} P(u_0, v) &= \sum_{j=0}^n \left[\sum_{i=0}^m P_{ij} B_{i,m}(u_0) \right] B_{j,n}(v) \\ &= \sum_{j=0}^n Q_j(u_0) B_{j,n}(v) \end{aligned} \quad (3.27)$$

eğri denklemi elde edilir. Burada;

$$Q_j(u_0) = \sum_{i=0}^m P_{ij} B_{i,m}(u_0)$$

dır. Böylece u parametresinin sabit tutulmasıyla elde edilen yüzey üzerindeki her eğriye v parametrelili eğri denir. Benzer şekilde $v = v_0$ alınarak;

$$\begin{aligned} P(u, v_0) &= \sum_{i=0}^m \left[\sum_{j=0}^n P_{ij} B_{j,n}(v_0) \right] B_{i,m}(u) \\ &= \sum_{i=0}^m Q_i(v_0) B_{i,m}(u) \end{aligned} \quad (3.28)$$

bir başka eğri denklemi elde edilir. Burada;

$$Q_i(v_0) = \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{j,n}(v_0)$$

dir. Böylece v parametresinin sabit tutulmasıyla elde edilen yüzey üzerindeki eğriye u parametrelili eğri denir. Bu nedenle, bir Bezier yüzeyi u ve v parametrelili eğrilerin ailesi olarak düşünülebilir (Sederberg, 2017).

Tanım 3.11 den de anlaşılacağı üzere $(m \times n)$. dereceden bir Bezier yüzeyi üzerinde $(m + 1) \times (n + 1)$ kontrol noktası vardır. Bu kontrol noktaları için $(m + 1)$ ‘satırlar’ ve $(n + 1)$ ‘sütunlar’ olarak adlandırılır (Sederberg, 2017).

Bu verilen tanımlarla birlikte Bezier eğrilerinde olduğu gibi Bernstein polinomunun özellikleri Bezier yüzeylerinde de benzer şekilde aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Birimin parçalanması özelliği: $B_{i,m}(u)$ ve $B_{j,n}(v)$ sırasıyla u ve v parametrelerine bağlı ve dereceleri m ve n olan Bernstein polinomları olmak üzere

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) = 1$$

özelliğini sağlar (Kaplan ve Mann, 2006; Marsh, 2005).

Pozitiflik özelliği: $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ için;

$$B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \geq 0$$

dır (Kaplan ve Mann, 2006; Marsh, 2005).

3.2.1. Bezier yüzey yamasının kısmi türevleri

Yüzeyler teorisinde yüzey üzerindeki eğrilikleri belirlemek için verilen yüzey yamasının u ve v parametrelerine bağlı kısmi türevlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle (3.26) eşitliği ile verilen Bezier yüzeyinin $P_u(u, v)$ ve $P_v(u, v)$ kısmi türevleri Teorem 3.6 da verilen Bezier eğrilerinin türev formülleri yardımıyla elde edilir. Bezier yüzey yaması

$$P(u, v) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m P_{ij} B_{i,m}(u) \right) B_{j,n}(v)$$

olmak üzere, u parametresine göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} P_u(u, v) &= \sum_{j=0}^n \left(m \sum_{i=0}^{m-1} (P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_{i,m-1}(u) \right) B_{j,n}(v) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n m (P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_{i,m-1}(u) B_{j,n}(v) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $P_{ij}^{(1,0)} = m(P_{(i+1)j} - P_{ij})$ olmak üzere Bezier yüzey yamasının u parametresine göre kısmi türevi

$$P_u(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n P_{ij}^{(1,0)} B_{i,m-1}(u) B_{j,n}(v) \quad (3.29)$$

biçiminde yazılır. Benzer şekilde, $P(u, v)$ yamasının v parametresine göre kısmi türevi

$$P_v(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} P_{ij}^{(0,1)} B_{i,m}(u) B_{j,n-1}(v) \quad (3.30)$$

olur. Burada $P_{ij}^{(0,1)} = n(P_{i(j+1)} - P_{ij})$ dir. Elde edilen kısmi türevlerin tekrar u ve v parametrelerine göre türevlerini almaya devam ederek, yüksek dereceden türevlere ulaşmak mümkündür (Marsh, 2005).

Teorem 3.14. Bezier yüzey yamasının u parametresine göre α . dereceden, v parametresine göre de β . dereceden türevi alınırsa;

$$P^{(\alpha,\beta)}(u, v) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial u^\alpha \partial v^\beta} P(u, v) = \sum_{i=0}^{m-\alpha} \sum_{j=0}^{n-\beta} P_{ij}^{(\alpha,\beta)} B_{i,m-\alpha}(u) B_{j,n-\beta}(v) \quad (3.31)$$

elde edilir. Burada,

$$P_{ij}^{(\alpha,\beta)} = \frac{n!}{(m-\alpha)!} \frac{m!}{(n-\beta)!} \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{l=0}^{\beta} (-1)^k (-1)^l \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{l} P_{(i+\alpha-k)(j+\beta-l)} \quad (3.32)$$

dir (Marsh, 2005).

Teorem 3.15. Bezier yüzey yamasının birinci ve ikinci temel formlarının matris gösterimleri sırasıyla

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} \langle P^{(1,0)}, P^{(1,0)} \rangle & \langle P^{(1,0)}, P^{(0,1)} \rangle \\ \langle P^{(0,1)}, P^{(1,0)} \rangle & \langle P^{(0,1)}, P^{(0,1)} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

ve

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} \langle P^{(2,0)}, N \rangle & \langle P^{(1,1)}, N \rangle \\ \langle P^{(1,1)}, N \rangle & \langle P^{(0,2)}, N \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

olarak verilebilir. Burada $N = \frac{P^{(1,0)} \times P^{(0,1)}}{\|P^{(1,0)} \times P^{(0,1)}\|}$ olup yüzeyin birim normal vektörüdür (Brama, 2018).

3.2.2. Bezier yüzeyinin bazı özellikleri

Son nokta interpolasyon özelliği: $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ olmak üzere (3.26) eşitliği ile verilen Bezier yüzey yaması

$$(u, v) = (0,0) \text{ da } P(0,0) = P_{00},$$

$$(u, v) = (1,0) \text{ da } P(1,0) = P_{n0},$$

$$(u, v) = (0,1) \text{ de } P(0,1) = P_{0m},$$

$$(u, v) = (1,1) \text{ de } P(1,1) = P_{nm},$$

dir (Marsh, 2005).

Son nokta teğet özelliği: (3.26) eşitliği ile verilen Bezier yüzey yamasının u ve v parametrelerine göre birinci kısmi türevlerinin $(0,0)$ ve $(1,1)$ uç noktalarındaki değerleri (3.29) ve (3.30) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} P_u(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} &= \sum_{i=0}^{m-1} (\sum_{j=0}^n m (P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_{j,n}(0)) B_{i,m-1}(0) \\ &= m \sum_{i=0}^{m-1} (P_{(i+1)0} - P_{i0}) B_{i,m-1}(0) = m(P_{10} - P_{00}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P_u(u, v)|_{(u,v)=(1,1)} &= \sum_{i=0}^{m-1} (\sum_{j=0}^n m (P_{(i+1)j} - P_{ij}) B_{j,n}(0)) B_{i,m-1}(1) \\ &= m \sum_{i=0}^{m-1} (P_{(i+1)n} - P_{in}) B_{i,m-1}(1) = m(P_{mn} - P_{(m-1)n}) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde v parametresine göre kısmi türev alınarak ve bu kısmi türevlerin $(0,0)$ ve $(1,1)$ de aldığı değerler bulunarak da

$$\begin{aligned} P_v(u, v)|_{(u,v)=(0,0)} &= n(P_{01} - P_{00}), \\ P_v(u, v)|_{(u,v)=(1,1)} &= n(P_{mn} - P_{m(n-1)}) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir (İncesu ve Gürsoy, 2004).

Konveks kabuk özelliği: (3.26) yaması ile verilen Bezier yüzeyi bir konveks kabuk içinde yatar (Marsh, 2005).

Afin dönüşümler altında değişmezlik: T bir afin dönüşüm olmak üzere bir $P(u, v)$ Bezier yüzeyi afin dönüşümler altında invarianttır. Yani;

$$T(P(u, v)) = T(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n T(P_{ij}) B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$

dır (Marsh, 2005).

4. BULGULAR

4.1. \mathbb{E}^2 de Bezier Eğrileri

Bu bölümde düzlemde verilen Bezier eğrileri için Frenet elemanlarının hesaplanmasıyla ilgili sonuçlar verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

4.1.1. \mathbb{E}^2 de kuadratik Bezier eğrileri

Teorem 4.1. $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{E}^2$ olmak üzere $P_0^2(t)$ eğrisi \mathbb{E}^2 de (3.3) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir kuadratik Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^2(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2\}$ Frenet vektörleri ve κ_1 Frenet eğriliği,

$$V_1(t) = \frac{(1-t)d_0 + td_1}{\|(1-t)d_0 + td_1\|} \quad (4.1)$$

$$V_2(t) = \frac{(1-t)d_1 D_0^0 + (td_1 - (1-t)d_0)D_0^1 - td_0 D_1^1}{\|(1-t)d_1 D_0^0 + (td_1 - (1-t)d_0)D_0^1 - td_0 D_1^1\|} \quad (4.2)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{1}{2} \frac{\|(1-t)d_1 D_0^0 + (td_1 - (1-t)d_0)D_0^1 - td_0 D_1^1\|}{\|(1-t)d_0 + td_1\|^4} \quad (4.3)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada, kolaylık olması açısından $i, j = 0,1$ olmak üzere fark operatörü $\Delta^1 P_i = d_i$ ve fark operatörlerinin iç çarpımı $\langle \Delta^1 P_i, \Delta^1 P_j \rangle = D_i^j$ olarak verilmiştir.

İspat. (3.3) denklemi ile verilen $P_0^2(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla (3.12) ve (3.14) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} (P_0^2)'(t) &= -2(1-t)P_0 + 2(1-t)P_1 - 2tP_1 + 2tP_2 \\ &= 2(1-t)(P_1 - P_0) + 2t(P_2 - P_1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Bununla birlikte $d_0 = P_1 - P_0$ ve $d_1 = P_2 - P_1$ olduğundan

$$(P_0^2)'(t) = 2(1-t)d_0 + 2td_1$$

elde edilir. Bunun türevinden

$$(P_0^2)''(t) = -2d_0 + 2d_1 \quad (4.5)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (2.4) ve (2.5) eşitliklerinden $E_1 = (P_0^2)'(t)$ olmak üzere

$$V_1(t) = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{2(1-t)d_0 + 2td_1}{\|2(1-t)d_0 + 2td_1\|} = \frac{(1-t)d_0 + td_1}{\|(1-t)d_0 + td_1\|}$$

bulunur. Ayrıca (2.4) eşitliğinde (4.4) ve (4.5) te verilen türevler kullanılırsa

$$E_2 = (P_0^2)''(t) - \langle (P_0^2)''(t), E_1 \rangle \frac{E_1}{\|E_1\|^2} = \frac{\|E_1\|^2 (P_0^2)''(t) - \langle (P_0^2)''(t), E_1 \rangle E_1}{\|E_1\|^2}$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\langle d_0, d_0 \rangle = D_0^0, \langle d_0, d_1 \rangle = D_0^1, \langle d_1, d_1 \rangle = D_1^1$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\langle E_1, E_1 \rangle = 4(1-t)^2 D_0^0 + 8t(1-t) D_0^1 + 4t^2 D_1^1$$

bulunur. Böylece

$$E_2 = \frac{2(1-t)d_1 D_0^0 + 2td_1 D_0^1 - 2(1-t)d_0 D_0^1 - 2td_0 D_1^1}{\|(1-t)d_0 + td_1\|^2} \quad (4.6)$$

elde edilir. Buradan

$$V_2(t) = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{(1-t)d_1 D_0^0 + td_1 D_0^1 - (1-t)d_0 D_0^1 - td_0 D_1^1}{\|(1-t)d_1 D_0^0 + td_1 D_0^1 - (1-t)d_0 D_0^1 - td_0 D_1^1\|}$$

şeklinde elde edilir. (2.8) eşitliğinden $P_0^2(t)$ eğrisinin eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_1(t) &= \frac{\|E_2\|}{\|E_1\|^2} = \frac{\|2(1-t)d_1 D_0^0 + 2td_1 D_0^1 - 2(1-t)d_0 D_0^1 - 2td_0 D_1^1\|}{\|(1-t)d_0 + td_1\|^2 \|2(1-t)d_0 + 2td_1\|^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\|(1-t)d_1 D_0^0 + (td_1 - (1-t)d_0) D_0^1 - td_0 D_1^1\|}{\|(1-t)d_0 + td_1\|^4} \end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Örnek 4.2. Kontrol noktaları $P_0 = (-1,2)$, $P_1 = (0,4)$ ve $P_2 = (3,2)$ olan kuadratik Bezier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{V_1, V_2\}$ Frenet vektörleri ve κ_1 Frenet eğriliği Teorem 4.1 yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

P_0, P_1, P_2 kontrol noktaları için kuadratik Bezier eğrisi

$$P_0^2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2 = (2t^2 + 2t - 1, -4t^2 + 4t + 2)$$

şeklinde verilip grafiği de aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 4.1).

Fark operatörleri

$$d_0 = P_1 - P_0 = (1,2), d_1 = P_2 - P_1 = (3,-2)$$

ve fark operatörlerinin iç çarpımları

$$D_0^0 = 5, D_0^1 = -1, D_1^1 = 13$$

olmak üzere (4.1)-(4.3) eşitliklerinden kuadratik Bezier eğrisinin Frenet elemanları

$$V_1(t) = \frac{(1+2t, 2-4t)}{\|(1+2t, 2-4t)\|}, V_2(t) = \frac{(2-4t, -1-2t)}{\|(2-4t, -1-2t)\|}$$

ve

$$\kappa_1(t) = \frac{4\|(2-4t, -1-2t)\|}{\|(1+2t, 2-4t)\|^4}$$

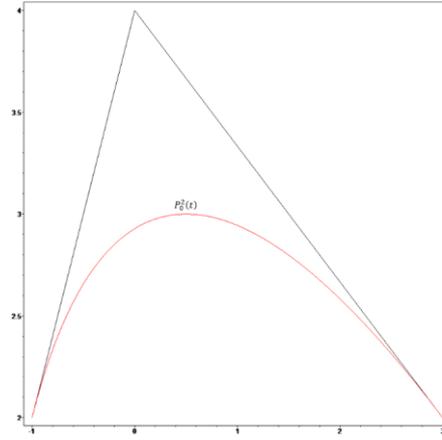
olarak bulunur. O halde $t = 0$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), V_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), \kappa_1 = \frac{4}{5\sqrt{5}}$$

ve $t = 1$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği de,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, -2), V_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, -3), \kappa_1 = \frac{4}{13\sqrt{13}}$$

elde edilir.



Şekil 4.1. \mathbb{E}^2 de kuadratik Bezier eğrisi

4.1.2. \mathbb{E}^2 de kübik Bezier eğrileri

Teorem 4.3. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{E}^2$ olmak üzere $P_0^3(t)$ eğrisi \mathbb{E}^2 de (3.5) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir kübik Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0, 1]$ için $P_0^3(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2\}$ Frenet vektörleri ve κ_1 Frenet eğriliği,

$$V_1(t) = \frac{(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)t d_1 + t^2 d_2}{\|(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)t d_1 + t^2 d_2\|} \quad (4.7)$$

$$V_2(t) = \frac{\vec{\alpha}_1}{\|\vec{\alpha}_1\|} \quad (4.8)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{(\gamma_1)^3}}, \gamma_1 \neq 0 \quad (4.9)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 = & (D_0^0)((1-t)^4 d_1 + t(1-t)^3 d_2) \\ & + (D_1^1)(-2t(1-t)^3 d_0 + 2t^3(1-t) d_2) \\ & + (D_2^2)(-t^3(1-t) d_0 - t^4 d_1) \\ & + (D_0^1)(-(1-t)^4 d_0 + 2t(1-t)^3 d_1 + 3t^2(1-t)^2 d_2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
& +(D_0^2)(-t(1-t)^3d_0 + t^3(1-t)d_2) \\
& +(D_1^2)(-3t^2(1-t)^2d_0 - 2t^3(1-t)d_1 + t^4d_2)
\end{aligned}$$

vektör değerli fonksiyonu ve

$$\begin{aligned}
\beta_1 = & -(1-t)^4(D_0^1)^2 - t^2(1-t)^2(D_0^2)^2 - t^4(D_1^2)^2 \\
& +(1-t)^4(D_0^0)(D_1^1) + t^2(1-t)^2(D_0^0)(D_2^2) \\
& + 2t(1-t)^3(D_0^0)(D_1^2) + 2t^3(1-t)(D_0^1)(D_2^2) \\
& - 2t(1-t)^3(D_0^1)(D_2^0) + 2t^2(1-t)^2(D_0^1)(D_1^2) \\
& - 2t^3(1-t)(D_0^2)(D_1^2) - 2t^2(1-t)^2(D_0^2)(D_1^1) \\
& + t^4(D_1^1)(D_2^2)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = & (1-t)^4(D_0^0) + 4t^2(1-t)^2(D_1^1) + t^4(D_2^2) \\
& + 4t(1-t)^3(D_0^1) + 2t^2(1-t)^2(D_0^2) + 4t^3(1-t)(D_1^2)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

reel değerli fonksiyonlardır. Burada, $\langle \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1 \rangle = \beta_1 \gamma_1$ dir. Ayrıca, burada kolaylık olması açısından $i, j = 0, 1, 2$ olmak üzere fark operatörü $\Delta^1 P_i = d_i$ ve fark operatörlerinin iç çarpımı $\langle \Delta^1 P_i, \Delta^1 P_j \rangle = D_i^j$ olarak verilmiştir.

İspat. (3.5) denklemi ile verilen $P_0^3(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla (3.12) ve (3.14) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(P_0^3)'(t) = & -3(1-t)^2P_0 - 6(1-t)tP_1 + 3(1-t)^2P_1 - 3t^2P_2 + 6(1-t)tP_2 + 3t^2P_3 \\
= & 3(1-t)^2(P_1 - P_0) + 6(1-t)t(P_2 - P_1) + 3t^2(P_3 - P_2) \\
= & 3(1-t)^2d_0 + 6(1-t)td_1 + 3t^2d_2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ve

$$\begin{aligned}
(P_0^3)''(t) = & -6(1-t)d_0 + 6(1-t)d_1 - 6td_1 + 6td_2 \\
= & 6(1-t)(d_1 - d_0) + 6t(d_2 - d_1)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olarak elde edilir. Böylece (2.4) ve (2.5) eşitliklerinden $E_1 = (P_0^3)'(t)$ olmak üzere

$$V_1(t) = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{3(1-t)^2d_0 + 6(1-t)td_1 + 3t^2d_2}{\|3(1-t)^2d_0 + 6(1-t)td_1 + 3t^2d_2\|} = \frac{(1-t)^2d_0 + 2(1-t)td_1 + t^2d_2}{\|(1-t)^2d_0 + 2(1-t)td_1 + t^2d_2\|}$$

bulunur. Ayrıca (2.4) eşitliğinde (4.13) ve (4.14) de verilen türevler kullanılırsa

$$E_2 = (P_0^3)''(t) - \langle (P_0^3)''(t), E_1 \rangle \frac{E_1}{\|E_1\|^2} = \frac{\|E_1\|^2 (P_0^3)''(t) - \langle (P_0^3)''(t), E_1 \rangle E_1}{\|E_1\|^2}$$

olup Maple programı yardımıyla yapılan hesaplamalar sonucu

$$\begin{aligned}
\langle E_1, E_1 \rangle &= 9(1-t)^4(D_0^0) + 36t^2(1-t)^2(D_1^1) + 9t^4(D_2^2) + 36t(1-t)^3(D_0^1) \\
&\quad + 18t^2(1-t)^2(D_0^2) + 36t^3(1-t)(D_1^2) \\
&= 9\gamma_1
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle (P_0^3)''(t), E_1 \rangle &= -18(1-t)^3(D_0^0) + 36t(1-2t)(1-t)(D_1^1) \\
&\quad + 18t^3(D_2^2) + 18(1-t)^2(1-4t)(D_0^1) \\
&\quad + 18t(1-2t)(1-t)(D_0^2) + 18t^2(3-4t)(D_1^2)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olmak üzere

$$54\vec{\alpha}_1 = \|E_1\|^2(P_0^3)''(t) - \langle (P_0^3)''(t), E_1 \rangle E_1$$

yardımla

$$E_2 = \frac{6\vec{\alpha}_1}{\gamma_1} \tag{4.17}$$

olarak bulunur.

Böylece (4.17) yardımla,

$$\langle E_2, E_2 \rangle = \frac{36\beta_1}{\gamma_1} \tag{4.18}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (4.17) eşitliğindeki $\langle E_2, E_2 \rangle$ çarpımı yardımla $\langle \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1 \rangle = \beta_1\gamma_1$ olarak bulunduğundan

$$V_2(t) = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{\vec{\alpha}_1}{\sqrt{\beta_1\gamma_1}} = \frac{\vec{\alpha}_1}{\|\vec{\alpha}_1\|}$$

eşitliğiyle verilir.

(2.6) eşitliğinden $P_0^3(t)$ eğrisinin eğriliği (4.17) ve (4.18) eşitlikleri yardımla

$$\kappa_1(t) = \frac{\|E_2\|}{\|E_1\|^2} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\gamma_1^3}}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\vec{\alpha}_1, \beta_1$ ve γ_1 fonksiyonları (4.10)-(4.12) eşitlikleri ile verilmiştir. ■

Örnek 4.4. Kontrol noktaları $P_0 = (-1,1)$, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ ve $P_3 = (1,1)$ olan kübik Bezier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{V_1, V_2\}$ Frenet vektörleri ve κ_1 Frenet eğriliği Teorem 4.3 yardımla aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

P_0, P_1, P_2, P_3 kontrol noktaları için kübik Bezier eğrisi

$$\begin{aligned}
P_0^3(t) &= (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3 \\
&= (-1 + 3t - t^3, 1 - 3t + 3t^2)
\end{aligned}$$

şeklinde verilip grafiği de aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 4.2).

Fark operatörleri

$$d_0 = P_1 - P_0 = (1, -1), d_1 = P_2 - P_1 = (1,0), d_2 = P_3 - P_2 = (0,1)$$

ve fark operatörlerinin iç çarpımları

$$D_0^0 = 2, D_1^1 = D_2^2 = D_0^1 = 1, D_0^2 = -1, D_1^2 = 0$$

olmak üzere (4.10)-(4.12) eşitlikleri aşağıdaki gibi

$$\vec{\alpha}_1 = (1 - 3t + 3t^2 - 2t^3, 1 - t + t^3 - t^4),$$

$$\beta_1 = 1 - 2t + 3t^2 - 2t^3 + t^4,$$

$$\gamma_1 = 2 - 8t + 16t^2 - 16t^3 + 7t^4$$

elde edilir. Böylece (4.7)-(4.9) eşitliklerinden kübik Bezier eğrisinin Frenet elemanları

$$V_1(t) = \frac{(1-t^2, -1+2t)}{\|(1-t^2, -1+2t)\|'}$$

$$V_2(t) = \frac{(1-3t+3t^2-2t^3, 1-t+t^3-t^4)}{\|(1-3t+3t^2-2t^3, 1-t+t^3-t^4)\|'}$$

$$\kappa_1(t) = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{1-2t+3t^2-2t^3+t^4}}{\sqrt{(2-8t+16t^2-16t^3+7t^4)^3}}$$

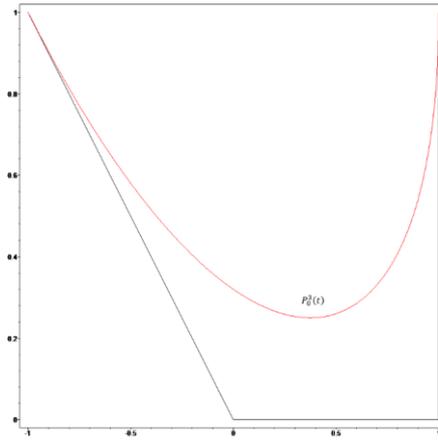
olarak bulunur. O halde $t = 0$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \kappa_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

ve $t = 1$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği de,

$$V_1 = (0,1), V_2 = (-1,0), \kappa_1 = \frac{2}{3}$$

elde edilir.



Şekil 4.2. \mathbb{E}^2 de kübik Bezier eğrisi

4.1.3. \mathbb{E}^2 de 4. dereceden Bezier eğrileri

Tanım 4.5. $t \in [0,1]$ olmak üzere (3.7) denklemini yardımıyla elde edilen $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{E}^2$ kontrol noktalarına sahip

$$P_0^4(t) = (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 t P_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t) t^3 P_3 + t^4 P_4 \quad (4.19)$$

eğrisine \mathbb{E}^2 de birim hızlı olmayan 4. dereceden Bezier eğrisi denir.

Teorem 4.6. $P_0^4(t)$ eğrisi \mathbb{E}^2 de (4.19) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir 4. dereceden Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^4(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2\}$ Frenet vektörleri ve κ_1 Frenet eğriliği,

$$V_1(t) = \frac{(1-t)^3 d_0 + 3(1-t)^2 t d_1 + 3(1-t) t^2 d_2 + t^3 d_3}{\|(1-t)^3 d_0 + 3(1-t)^2 t d_1 + 3(1-t) t^2 d_2 + t^3 d_3\|} \quad (4.20)$$

$$V_2(t) = \frac{\vec{\alpha}_2}{\|\vec{\alpha}_2\|} \quad (4.21)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{(\gamma_2)^3}} \quad (4.22)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_2 = & (D_0^0)((1-t)^7 d_1 + 2t(1-t)^6 d_2 + t^2(1-t)^5 d_3) \\ & + (D_1^1)(-3t(1-t)^6 d_0 + 9t^3(1-t)^4 d_2 + 6t^4(1-t)^3 d_3) \\ & + (D_2^2)(-6t^3(1-t)^4 d_0 - 9t^4(1-t)^3 d_1 + 3t^6(1-t) d_3) \\ & + (D_3^3)(-t^5(1-t)^2 d_0 - 2t^6(1-t) d_1 - t^7 d_2) \\ & + (D_0^2)(-2t(1-t)^6 d_0 + 6t^3(1-t)^4 d_2 + 4t^4(1-t)^3 d_3) \\ & + (D_0^3)(-t^2(1-t)^5 d_0 - t^3(1-t)^4 d_1 + t^4(1-t)^3 d_2 + t^5(1-t)^2 d_3) \\ & + (D_1^2)(-9t^2(1-t)^5 d_0 - 9t^3(1-t)^4 d_1 + 9t^4(1-t)^3 d_2 + 9t^5(1-t)^2 d_3) \\ & + (D_1^3)(-4t^3(1-t)^4 d_0 - 6t^4(1-t)^3 d_1 + 2t^6(1-t) d_3) \\ & + (D_2^3)(-5t^4(1-t)^3 d_0 - 9t^5(1-t)^2 d_1 + 3t^6(1-t) d_2) \end{aligned} \quad (4.23)$$

vektör değerli fonksiyonu ve

$$\begin{aligned} \beta_2 = & -(1-t)^8 (D_0^1)^2 - 4t^2(1-t)^6 (D_0^2)^2 - t^4(1-t)^4 (D_0^3)^2 \\ & - 9t^4(1-t)^4 (D_1^2)^2 - 4t^6(1-t)^2 (D_1^3)^2 - t^8 (D_2^3)^2 \\ & + (1-t)^8 (D_0^0)(D_1^1) + 4t^2(1-t)^6 (D_0^0)(D_2^2) \\ & + t^4(1-t)^4 (D_0^0)(D_3^3) + 4t(1-t)^7 (D_0^0)(D_1^2) \\ & + 2t^2(1-t)^6 (D_0^0)(D_1^3) + 4t^3(1-t)^5 (D_0^0)(D_2^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +12t^3(1-t)^5(D_0^1)(D_2^2) + 4t^5(1-t)^3(D_0^1)(D_3^3) \\
& -4t(1-t)^7(D_0^1)(D_0^2) - 2t^2(1-t)^6(D_0^1)(D_0^3) \\
& +6t^2(1-t)^6(D_0^1)(D_1^2) + 4t^3(1-t)^5(D_0^1)(D_1^3) \\
& +14t^4(1-t)^4(D_0^1)(D_2^3) - 12t^3(1-t)^5(D_0^2)(D_1^2) \\
& -4t^4(1-t)^4(D_0^2)(D_1^3) - 6t^2(1-t)^6(D_0^2)(D_1^1) \\
& -4t^3(1-t)^5(D_0^2)(D_0^3) + 4t^5(1-t)^3(D_0^2)(D_2^3) \\
& +2t^6(1-t)^2(D_0^2)(D_3^3) - 4t^3(1-t)^5(D_0^3)(D_1^1) \\
& -4t^5(1-t)^3(D_0^3)(D_2^2) - 10t^4(1-t)^4(D_0^3)(D_1^2) \\
& -4t^5(1-t)^3(D_0^3)(D_1^3) - 2t^6(1-t)^2(D_0^3)(D_2^3) \\
& +9t^4(1-t)^4(D_1^1)(D_2^2) + 12t^5(1-t)^3(D_1^1)(D_2^3) \\
& +4t^6(1-t)^2(D_1^1)(D_3^3) - 12t^5(1-t)^3(D_1^2)(D_1^3) \\
& +6t^6(1-t)^2(D_1^2)(D_2^3) + 4t^7(1-t)(D_1^2)(D_3^3) \\
& -6t^6(1-t)^2(D_1^3)(D_2^2) - 4t^7(1-t)(D_1^3)(D_2^3) \\
& + t^8(D_2^2)(D_3^3)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_2 = & (1-t)^6(D_0^0) + 9t^2(1-t)^4(D_1^1) + 9t^4(1-t)^2(D_2^2) + t^6(D_3^3) \\
& +6t(1-t)^5(D_0^1) + 6t^2(1-t)^4(D_0^2) + 2t^3(1-t)^3(D_0^3) \\
& +18t^3(1-t)^3(D_1^2) + 6t^4(1-t)^2(D_1^3) + 6t^5(1-t)(D_2^3)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

reel değerli fonksiyonlardır. Burada, $\langle \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2 \rangle = \beta_2 \gamma_2$ dir. Ayrıca, burada kolaylık olması açısından $i, j = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere fark operatörü $\Delta^1 P_i = d_i$ ve fark operatörlerinin iç çarpımı $\langle \Delta^1 P_i, \Delta^1 P_j \rangle = D_i^j$ olarak verilmiştir.

İspat. (4.19) denklemleri ile verilen $P_0^4(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla (3.12) ve (3.14) eşitliklerinden;

$$(P_0^4)'(t) = 4(1-t)^3 d_0 + 12(1-t)^2 t d_1 + 12(1-t) t^2 d_2 + 4t^3 d_3 \tag{4.26}$$

ve

$$(P_0^4)''(t) = -12(1-t)^2 d_0 + 12(1-t)(1-3t) d_1 + 12t(2-3t) d_2 + 12t^2 d_3 \tag{4.27}$$

olarak elde edilir. Böylece (2.4) ve (2.5) eşitliklerinden $E_1 = (P_0^4)'(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} &= \frac{4(1-t)^3 d_0 + 12(1-t)^2 t d_1 + 12(1-t) t^2 d_2 + 4t^3 d_3}{\|4(1-t)^3 d_0 + 12(1-t)^2 t d_1 + 12(1-t) t^2 d_2 + 4t^3 d_3\|} \\
&= \frac{(1-t)^3 d_0 + 3(1-t)^2 t d_1 + 3(1-t) t^2 d_2 + t^3 d_3}{\|(1-t)^3 d_0 + 3(1-t)^2 t d_1 + 3(1-t) t^2 d_2 + t^3 d_3\|}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (2.4) eşitliğinde (4.26) ve (4.27) de verilen türevler kullanılırsa

$$E_2 = (P_0^4)''(t) - \langle (P_0^4)''(t), E_1 \rangle \frac{E_1}{\|E_1\|^2} = \frac{\|E_1\|^2 (P_0^4)''(t) - \langle (P_0^4)''(t), E_1 \rangle E_1}{\|E_1\|^2}$$

olmak üzere Maple programı yardımıyla yapılan hesaplamalar sonucu

$$\begin{aligned} \langle E_1, E_1 \rangle &= 16(1-t)^6(D_0^0) + 144t^2(1-t)^4(D_1^1) + 96(1-t)t^5(D_2^3) \\ &+ 144t^4(1-t)^2(D_2^2) + 16t^6(D_3^3) + 96t(1-t)^5(D_0^1) \\ &+ 32t^3(1-t)^3(D_0^3) + 288t^3(1-t)^3(D_1^2) + 96(1-t)^2t^4(D_1^3) \\ &= 16\gamma_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle (P_0^4)''(t), E_1 \rangle &= -48(1-t)^5(D_0^0) + 144t(1-t)^3(1-3t)(D_1^1) \\ &+ 144t^3(1-t)(2-3t)(D_2^2) + 48t^5(D_3^3) \\ &+ 48t^2(1-t)^4(1-6t)(D_0^1) + 96t(1-t)^3(1-3t)(D_0^2) \\ &+ 48t^2(1-t)^2(D_0^3) + 432t^2(1-t)^2(1-2t)(D_1^2) \\ &+ 96t^3(1-t)(2-3t)(D_1^3) + 48(5-6t)t^4(D_2^3) \end{aligned} \quad (4.29)$$

olmak üzere

$$192\vec{\alpha}_2 = \|E_1\|^2 (P_0^4)''(t) - \langle (P_0^4)''(t), E_1 \rangle E_1$$

yardımıyla

$$E_2 = \frac{12\vec{\alpha}_2}{\gamma_2}, \quad \gamma_2 \neq 0 \quad (4.30)$$

elde edilir. Böylece (4.23) ve (4.24) eşitlikleri yardımıyla E_2 nin iç çarpımı

$$\langle E_2, E_2 \rangle = \frac{144\beta_2}{\gamma_2} \quad (4.31)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (4.30) eşitliğindeki $\langle E_2, E_2 \rangle$ çarpımı yardımıyla $\langle \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2 \rangle = \beta_2\gamma_2$ olarak bulunduğundan

$$V_2(t) = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{\vec{\alpha}_2}{\sqrt{\beta_2}\sqrt{\gamma_2}} = \frac{\vec{\alpha}_2}{\|\vec{\alpha}_2\|}$$

eşitliğiyle verilir. (2.6) eşitliğinden $P_0^4(t)$ eğrisinin eğriliği (4.28) ve (4.31) eşitlikleri yardımıyla

$$\kappa_1(t) = \frac{\|E_2\|}{\|E_1\|^2} = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{(\gamma_2)^3}}$$

olarak bulunur. Burada $\vec{\alpha}_2, \beta_2$ ve γ_2 fonksiyonları (4.23)-(4.25) eşitlikleri ile verilmiştir. ■

Örnek 4.7. Kontrol noktaları $P_0 = (-2,0), P_1 = (-1,1), P_2 = (0,1), P_3 = (1,0)$ ve $P_4 = (1,1)$ olan 4. dereceden Bezier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{V_1, V_2\}$ Frenet vektörleri ve κ_1 Frenet eğriliği Teorem 4.6 yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 kontrol noktaları için 4. dereceden Bezier eğrisi

$$\begin{aligned} P_0^4(t) &= (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 t P_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t)t^3 P_3 + t^4 P_4 \\ &= (-2 + 4t - t^4, 4t - 6t^2 + 3t^4) \end{aligned}$$

şeklinde verilip grafiği de aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 4.3).

Fark operatörleri

$$\begin{aligned} d_0 &= P_1 - P_0 = (1,1), d_1 = P_2 - P_1 = (1,0), \\ d_2 &= P_3 - P_2 = (1, -1), d_3 = P_4 - P_3 = (0,1) \end{aligned}$$

ve fark operatörlerinin iç çarpımları

$$\begin{aligned} D_0^0 &= D_2^2 = 2, D_0^2 = D_1^3 = 0, D_2^3 = -1 \\ D_0^1 &= D_1^1 = D_1^2 = D_3^3 = D_0^3 = 1 \end{aligned}$$

olmak üzere (4.23)-(4.25) eşitlikleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_2 &= (1 - 3t - 4t^2 + 17t^3 - 6t^4 - 12t^5 + 6t^7, -1 + 4t^2 - t^3 - 4t^5 + 8t^6 - 5t^7), \\ \beta_2 &= 1 - 8t^2 + 4t^3 + 8t^4 - 8t^5 + 4t^6, \\ \gamma_2 &= 2 - 6t + 9t^2 + 40t^3 - 18t^4 - 36t^5 + 10t^6 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.20)-(4.22) eşitliklerinden kübik Bezier eğrisinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{(1-t^3, 1-3t+3t^3)}{\|(1-t^3, 1-3t+3t^3)\|}, \\ V_2(t) &= \frac{(1-3t-4t^2+17t^3-6t^4-12t^5+6t^7, -1+4t^2-t^3-4t^5+8t^6-5t^7)}{\|(1-3t-4t^2+17t^3-6t^4-12t^5+6t^7, -1+4t^2-t^3-4t^5+8t^6-5t^7)\|}, \\ \kappa_1(t) &= \frac{3}{4} \frac{\sqrt{1-8t^2+4t^3+8t^4-8t^5+4t^6}}{\sqrt{(2-6t+9t^2+40t^3-18t^4-36t^5+10t^6)^3}} \end{aligned}$$

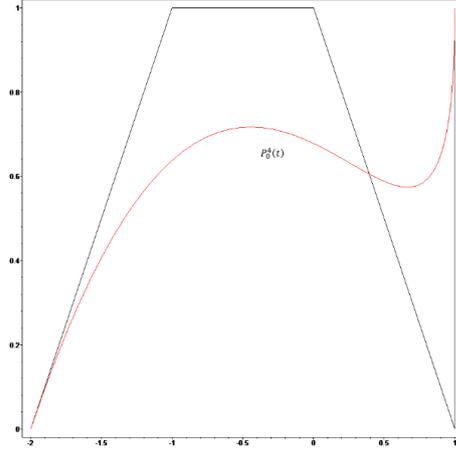
olarak bulunur. O halde $t = 0$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \kappa_1 = \frac{3}{8\sqrt{2}}$$

ve $t = 1$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği de,

$$V_1 = (0,1), V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1), \kappa_1 = \frac{3}{4}$$

elde edilir.



Şekil 4.3. \mathbb{E}^2 de 4. dereceden Bezier eğrisi

4.1.4. \mathbb{E}^2 de n. dereceden Bezier eğrileri

Teorem 4.8. $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{E}^2$ olmak üzere $P_0^n(t)$ eğrisi \mathbb{E}^2 de (3.7) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir n. dereceden Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^n(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2\}$ Frenet vektörleri ve κ_1 Frenet eğriliği,

$$V_1(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)P_i}{\|\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)P_i\|} \quad (4.32)$$

$$V_2(t) = \frac{\vec{\alpha}_3}{\|\vec{\alpha}_3\|} \quad (4.33)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{\gamma_3}^3} \quad (4.34)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_3 = & (\sum_{m=0}^{n-2} \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{m,n-2}(t)B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t)\langle \Delta^1 P_j, \Delta^1 P_k \rangle \Delta^2 P_m \\ & - \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-1} B_{m,n-2}(t) \left(B_{j,n-1}(t) \right)^2 \langle \Delta^2 P_m, \Delta^1 P_j \rangle \Delta^1 P_j) \end{aligned} \quad (4.35)$$

vektör değerli fonksiyonu ve

$$\begin{aligned} \beta_3 = & (\sum_{i,m=0}^{n-2} \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{i,n-2}(t)B_{m,n-2}(t)B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t)\langle \Delta^2 P_i, \Delta^2 P_m \rangle \langle \Delta^1 P_j, \Delta^1 P_k \rangle \\ & - (\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,n-2}(t)B_{j,n-1}(t)\langle \Delta^2 P_i, \Delta^1 P_j \rangle)^2) \end{aligned} \quad (4.36)$$

ve

$$\gamma_3 = \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t) \langle \Delta^1 P_j, \Delta^1 P_k \rangle \quad (4.37)$$

reel değerli fonksiyonlarıdır.

İspat. (3.7) denklemleri ile verilen $P_0^n(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla (3.12) ve (3.14) eşitliklerinde verilmek üzere (2.4) ve (2.5) eşitlikleri yardımıyla

$E_1 = (P_0^n)'(t)$ olduğundan

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 P_i}{\|n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 P_i\|} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 P_i}{\|\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta^1 P_i\|}$$

bulunur. Ayrıca (2.4) eşitliğinde (3.12) ve (3.14) de verilen türevler kullanılırsa

$$E_2 = (P_0^n)''(t) - \langle (P_0^n)''(t), E_1 \rangle \frac{E_1}{\|E_1\|^2} = \frac{\|E_1\|^2 (P_0^n)''(t) - \langle (P_0^n)''(t), E_1 \rangle E_1}{\|E_1\|^2} = \frac{\vec{\theta}}{\|E_1\|^2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\vec{\theta} = (P_0^n)''(t) \|E_1\|^2 - \langle (P_0^n)''(t), E_1 \rangle E_1 \quad (4.38)$$

olmak üzere verilen türevler kullanılırsa

$$\vec{\theta} = n^3(n-1)\vec{\alpha}_3$$

ve

$$\langle E_1, E_1 \rangle = n^2 \gamma_3 \quad (4.39)$$

eşitlikleri yardımıyla

$$E_2 = \frac{n(n-1)\vec{\alpha}_3}{\gamma_3} \quad (4.40)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\sigma = \langle (P_0^n)''(t), (P_0^n)''(t) \rangle \|E_1\|^2 - \langle (P_0^n)''(t), E_1 \rangle^2 \quad (4.41)$$

olmak üzere

$$\sigma = n^4(n-1)^2 \beta_3$$

şeklinde elde edilir. Böylece E_2 vektörünün iç çarpımından

$$\langle E_2, E_2 \rangle = \frac{\sigma}{\|E_1\|^2} = n^2(n-1)^2 \frac{\beta_3}{\gamma_3} \quad (4.42)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (4.40) eşitliğinden $\langle E_2, E_2 \rangle$ çarpımı $\langle \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_3 \rangle = \beta_3 \gamma_3$ olarak bulunduğundan

$$V_2(t) = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{\vec{\alpha}_3}{\|\vec{\alpha}_3\|}$$

şeklinde elde edilir.

(2.6) eşitliğinden $P_0^n(t)$ eğrisinin eğriliği (4.39) ve (4.42) eşitlikleri yardımıyla

$$\kappa_1(t) = \frac{\|E_2\|}{\|E_1\|^2} = \frac{n-1}{n} \frac{\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{(\gamma_3)^3}}$$

bulunur. Burada $\vec{\alpha}_3, \beta_3, \gamma_3$ fonksiyonları (4.35)-(4.37) eşitliklerinde verilmiştir. ■

4.2. \mathbb{E}^3 de Bezier Eğrileri

Bu bölümde üç boyutlu Öklid uzayında verilen Bezier eğrileri için Frenet elemanlarının hesaplanmasıyla ilgili sonuçlar verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

4.2.1. \mathbb{E}^3 de kuadratik Bezier eğrileri

Teorem 4.9. $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere $P_0^2(t)$ eğrisi \mathbb{E}^3 de (3.3) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir kuadratik Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^2(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet vektörleri ve κ_1, κ_2 Frenet eğrilikleri,

$$V_1(t) = \frac{(1-t)d_0 + td_1}{\|(1-t)d_0 + td_1\|} \quad (4.43)$$

$$V_2(t) = \frac{(1-t)d_1 D_0^0 + (td_1 - (1-t)d_0)D_0^1 - td_0 D_1^1}{\|(1-t)d_1 D_0^0 + (td_1 - (1-t)d_0)D_0^1 - td_0 D_1^1\|} \quad (4.44)$$

$$V_3(t) = 0 \quad (4.45)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{1}{2} \frac{\|(1-t)d_1 D_0^0 + (td_1 - (1-t)d_0)D_0^1 - td_0 D_1^1\|}{\|(1-t)d_0 + td_1\|^4} \quad (4.46)$$

$$\kappa_2(t) = 0 \quad (4.47)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada, kolaylık olması açısından $i, j = 0,1$ olmak üzere fark operatörü $\Delta^1 P_i = d_i$ ve fark operatörlerinin iç çarpımı $\langle \Delta^1 P_i, \Delta^1 P_j \rangle = D_i^j$ olarak verilmiştir.

İspat. (3.3) denklemleri ile verilen $P_0^2(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri (4.4) ve (4.5) eşitliğinde verilmiş olup üçüncü türevi $(P_0^2)'''(t) = 0$ dır. Böylece $V_1(t)$ ve $V_2(t)$ Frenet vektörleri ile $\kappa_1(t)$ eğriliği Teorem 4.1 in ispatındaki gibi bulunur. Bununla birlikte $(P_0^2)'''(t) = 0$ olduğundan $V_3(t) = 0$ ve $\kappa_2(t) = 0$ olduğu açıkça görülür. ■

Örnek 4.10. Kontrol noktaları $P_0 = (1,0,1)$, $P_1 = (0,1,-1)$ ve $P_2 = (-1,1,0)$ olan kuadratik Bezier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet vektörleri ve κ_1, κ_2 Frenet eğrilikleri Teorem 4.9 yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

P_0, P_1, P_2 kontrol noktaları için kuadratik Bezier eğrisi

$$P_0^2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2 = (1-2t, 2t-t^2, 1-4t+3t^2)$$

şeklinde verilir grafiği de aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 4.4).

Fark operatörleri

$$d_0 = P_1 - P_0 = (-1, 1, -2), d_1 = P_2 - P_1 = (-1, 0, 1)$$

ve fark operatörlerinin iç çarpımları

$$D_0^0 = 6, D_0^1 = -1, D_1^1 = 2$$

olmak üzere (4.43)-(4.47) eşitliklerinden kuadratik Bezier eğrisinin Frenet elemanları

$$V_1(t) = \frac{(-1, 1-t, -2+3t)}{\|(-1, 1-t, -2+3t)\|}, V_2(t) = \frac{(-7+10t, 1-3t, 4-5t)}{\|(-7+10t, 1-3t, 4-5t)\|}$$

$$\kappa_1(t) = \frac{1}{2} \frac{\|(-7+10t, 1-3t, 4-5t)\|}{\|(-1, 1-t, -2+3t)\|^4}$$

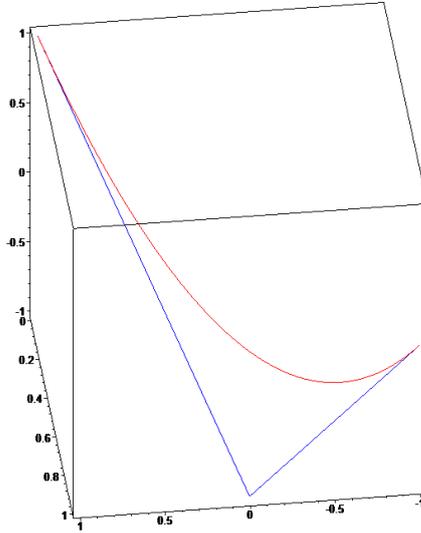
olarak bulunur. Ayrıca teoremden de belirtildiği üzere $V_3(t) = 0$ ve $\kappa_2(t) = 0$ olup Bezier eğrisi düzlemsel bir eğridir. O halde $t = 0$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, -2), V_2 = \frac{1}{\sqrt{66}}(-7, 1, 4), \kappa_1 = \frac{11}{12\sqrt{66}}$$

ve $t = 1$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği de,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), V_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -2, -1), \kappa_1 = \frac{7}{2\sqrt{7}}$$

elde edilir.



Şekil 4.4. \mathbb{E}^3 de kuadratik Bezier eğrisi

4.2.2. \mathbb{E}^3 de kübik Bezier eğrileri

Teorem 4.11. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere $P_0^3(t)$ eğrisi \mathbb{E}^3 de (3.5) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir kübik Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^3(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet vektörleri ve κ_1, κ_2 Frenet eğrilikleri,

$$V_1(t) = \frac{(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)t d_1 + t^2 d_2}{\|(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)t d_1 + t^2 d_2\|} \quad (4.48)$$

$$V_2(t) = \frac{\vec{\alpha}_1}{\|\vec{\alpha}_1\|} \quad (4.49)$$

$$V_3(t) = \frac{\vec{\alpha}_4}{\|\vec{\alpha}_4\|} \quad (4.50)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{(\gamma_1)^3}} \quad (4.51)$$

$$\kappa_2(t) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{\beta_4}}{\beta_1} \quad (4.52)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_4 = & -(D_0^1)^2(1-t)^2 d_2 - (D_1^2)^2 t^2 d_0 + (D_0^2)^2 t(1-t) d_1 \\ & + (D_0^0)(D_1^1)(1-t)^2 d_2 - (D_0^0)(D_2^2)t(1-t) d_1 \\ & + (D_0^0)(D_1^2)((-1-t)^2 d_1 + t(1-t) d_2) \\ & + (D_0^1)(D_2^2)((1-t)^2 d_1 - t(1-t) d_2) + (D_0^1)(D_1^2)((1-t)^2 d_0 + t^2 d_2) \\ & + (D_0^1)(D_2^2)(t(1-t) d_0 - t^2 d_1) + (D_0^2)(D_1^2)(-t(1-t) d_0 + t^2 d_1) \\ & + (D_1^1)(D_0^2)((-1-t)^2 d_0 - t^2 d_2) + (D_1^1)(D_2^2)t^2 d_0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

vektör değerli fonksiyon ve

$$\begin{aligned} \beta_4 = & -(D_0^1)^2(D_2^2) - (D_0^2)^2(D_1^1) - (D_1^2)^2(D_0^0) \\ & + 2(D_0^1)(D_0^2)(D_1^1) + (D_0^0)(D_1^1)(D_2^2) \end{aligned} \quad (4.54)$$

reel değerli fonksiyonu olup kontrol noktaları $P_i \in \mathbb{E}^3$ olduğundan $\vec{\alpha}_1, \beta_1$ ve γ_1 fonksiyonları da (4.10)-(4.12) eşitliklerindeki gibi verilebilir. Burada, kolaylık olması açısından $i, j = 0,1,2$ olmak üzere fark operatörü $\Delta^1 P_i = d_i$ ve fark operatörlerinin iç çarpımı $\langle \Delta^1 P_i, \Delta^1 P_j \rangle = D_i^j$ olarak verilmiştir.

İspat. (3.5) denklemi ile verilen $P_0^3(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri (4.13) ve (4.14) eşitlikleri ile hesaplanmıştır. Ayrıca üçüncü türevi de

$$(P_0^3)'''(t) = 6d_0 - 12d_1 + 6d_2 \quad (4.55)$$

olarak elde edilir. Böylece $V_1(t)$ ve $V_2(t)$ Frenet vektörleri ile $\kappa_1(t)$ eğriliği Teorem 4.3 in ispatındaki gibi bulunur.

Ayrıca (2.4) eşitliğinden

$$E_3 = (P_0^3)'''(t) - \langle (P_0^3)'''(t), E_1 \rangle \frac{E_1}{\|E_1\|^2} - \langle (P_0^3)'''(t), E_2 \rangle \frac{E_2}{\|E_2\|^2}$$

olduğundan $\langle (P_0^3)'''(t), E_1 \rangle$ ve $\langle (P_0^3)'''(t), E_2 \rangle$ iç çarpımlarının Maple programı yardımıyla hesaplanması ve gerekli düzenlemeler yapılması sonucunda

$$E_3 = \frac{6\vec{\alpha}_4}{\beta_1} \quad (4.56)$$

olarak bulunur.

Böylece (4.11) ve (4.54) eşitlikleri yardımıyla,

$$\langle E_3, E_3 \rangle = \frac{36\beta_4}{\beta_1} \quad (4.57)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca (4.56) eşitliğindeki $\langle E_3, E_3 \rangle$ çarpımı yardımıyla $\langle \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_4 \rangle = \beta_1\beta_4$ olarak bulunduğundan

$$V_3(t) = \frac{E_3}{\|E_3\|} = \frac{\vec{\alpha}_4}{\sqrt{\beta_4}\sqrt{\beta_1}} = \frac{\vec{\alpha}_4}{\|\vec{\alpha}_4\|}$$

olarak elde edilir. Bununla birlikte, (2.6) eşitliğinden $P_0^3(t)$ eğrisinin ikinci Frenet eğriliği de (4.15), (4.18) ve (4.57) eşitlikleri yardımıyla,

$$\kappa_2(t) = \frac{\|E_3\|}{\|E_2\|\|E_1\|} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{\beta_4}}{\beta_1}$$

bulunur. Burada $\vec{\alpha}_4$ ve β_4 fonksiyonları (4.53) ve (4.54) eşitlikleri ile verilmiştir. ■

Örnek 4.12. Kontrol noktaları $P_0 = (1,0,1)$, $P_1 = (0,1,1)$, $P_2 = (1,1,0)$ ve $P_3 = (1,1,1)$ olan kübik Bezier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet vektörleri ve κ_1, κ_2 Frenet eğrilikleri Teorem 4.11 yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

P_0, P_1, P_2, P_3 kontrol noktaları için kübik Bezier eğrisi

$$\begin{aligned} P_0^3(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \\ &= (1-3t+6t^2-3t^3, 3t-3t^2+t^3, 1-3t^2+3t^3) \end{aligned}$$

şeklinde verilip grafiği de aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 4.5).

Fark operatörleri

$$d_0 = P_1 - P_0 = (-1,1,0), d_1 = P_2 - P_1 = (1,0,-1), d_2 = P_3 - P_2 = (0,0,1)$$

ve fark operatörlerinin iç çarpımları

$$D_0^0 = D_1^1 = 2, D_0^1 = D_1^2 = -1, D_2^2 = 1, D_0^2 = 0$$

olmak üzere (4.10), (4.11), (4.51) ve (4.52) eşitlikleri aşağıdaki gibi

$$\vec{\alpha}_1 = (1 + 2t - 15t^2 + 19t^3 - 19t^4, 1 - 8t + 21t^2 - 23t^3 + 9t^4, \\ -2 + 12t - 27t^2 + 32t^3 - 15t^4),$$

$$\beta_1 = 3 - 16t + 34t^2 - 34t^3 + 14t^4, \quad \gamma_1 = 2 - 4t + 8t^2 - 16t^3 + 11t^4,$$

$$\vec{\alpha}_4 = (1 - 3t, 1 - 3t + t^2, 1 - 2t + t^2), \quad \beta_4 = 1$$

elde edilir. Böylece (4.48)-(4.52) eşitliklerinden kübik Bezier eğrisinin Frenet elemanları

$$V_1(t) = \frac{(-1+4t-3t^2, 1-2t+t^2, -2t+3t^2)}{\|(-1+4t-3t^2, 1-2t+t^2, -2t+3t^2)\|}$$

$$V_2(t) = \frac{(1+2t-15t^2+19t^3-19t^4, 1-8t+21t^2-23t^3+9t^4, -2+12t-27t^2+32t^3-15t^4)}{\|(1+2t-15t^2+19t^3-19t^4, 1-8t+21t^2-23t^3+9t^4, -2+12t-27t^2+32t^3-15t^4)\|}$$

$$V_3(t) = \frac{(1-3t, 1-3t+t^2, 1-2t+t^2)}{\|(1-3t, 1-3t+t^2, 1-2t+t^2)\|}$$

$$\kappa_1(t) = \frac{2\sqrt{3-16t+34t^2-34t^3+14t^4}}{3\sqrt{(2-4t+8t^2-16t^3+11t^4)^3}}, \quad \kappa_2(t) = \frac{1}{3(3-16t+34t^2-34t^3+14t^4)}$$

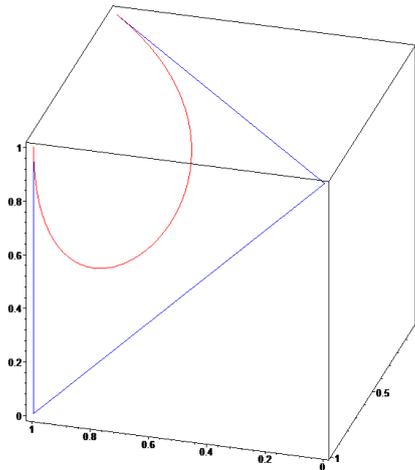
olarak bulunur. O halde $t = 0$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), V_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \kappa_2 = \frac{1}{9}$$

ve $t = 1$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri de,

$$V_1 = (0, 0, 1), V_2 = (-1, 0, 0), V_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1, 0), \kappa_1 = \frac{2}{3}, \kappa_2 = \frac{1}{3}$$

elde edilir.



Şekil 4.5. \mathbb{E}^3 de kübik Bezier eğrisi

4.2.3. \mathbb{E}^3 de 4. dereceden Bezier eğrileri

Teorem 4.13. $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere $P_0^4(t)$ eğrisi \mathbb{E}^3 de (4.19) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir 4. dereceden Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^4(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet vektörleri ve κ_1, κ_2 Frenet eğrilikleri,

$$V_1(t) = \frac{(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)t d_1 + t^2 d_2}{\|(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)t d_1 + t^2 d_2\|} \quad (4.58)$$

$$V_2(t) = \frac{\vec{\alpha}_2}{\|\vec{\alpha}_2\|} \quad (4.59)$$

$$V_3(t) = \frac{\vec{\alpha}_5}{\|\vec{\alpha}_5\|} \quad (4.60)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{3\sqrt{\beta_2}}{4\sqrt{(\gamma_2)^3}} \quad (4.61)$$

$$\kappa_2(t) = \frac{1\sqrt{\beta_5}}{2\beta_2} \quad (4.62)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_5 = & (D_0^1)^2 (-(1-t)^7 d_2 - t(1-t)^6 d_3) \\ & + (D_0^2)^2 (2t(1-t)^6 d_1 - 2t^3(1-t)^4 d_3) \\ & + (D_0^3)^2 (t^3(1-t)^4 d_1 + t^4(1-t)^3 d_2) \\ & + (D_1^2)^2 (-3t^2(1-t)^5 d_0 - 3t^5(1-t)^2 d_3) \\ & + (D_1^3)^2 (-2t^4(1-t)^3 d_0 + 2t^6(1-t) d_2) \\ & + (D_2^3)^2 (-t^6(1-t) d_0 - t^7 d_1) \\ & + (D_0^0)(D_1^1)((1-t)^7 d_2 + t(1-t)^6 d_3) \\ & + (D_0^0)(D_1^2)(-(1-t)^7 d_1 + 2t(1-t)^6 d_2 + 3t^2(1-t)^5 d_3) \\ & + (D_0^0)(D_1^3)(-t(1-t)^6 d_1 + t^3(1-t)^4 d_3) \\ & + (D_0^0)(D_2^2)(-2t(1-t)^6 d_1 + 2t^3(1-t)^4 d_3) \\ & + (D_0^0)(D_3^3)(-t^3(1-t)^4 d_1 - t^4(1-t)^3 d_2) \\ & + (D_0^1)(D_0^2)((1-t)^7 d_1 - 2t(1-t)^6 d_2 - 3t^2(1-t)^5 d_3) \\ & + (D_0^1)(D_0^3)(t(1-t)^6 d_1 - t^3(1-t)^4 d_3) \\ & + (D_0^1)(D_1^2)((1-t)^7 d_0 + 4t^3(1-t)^4 d_3 + 3t^2(1-t)^5 d_2) \\ & + (D_0^1)(D_1^3)(t(1-t)^6 d_0 + t^3(1-t)^4 d_2 + 2t^4(1-t)^3 d_3) \\ & + (D_0^1)(D_3^3)(t^3(1-t)^4 d_0 - 2t^4(1-t)^3 d_1 - 3t^5(1-t)^2 d_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(D_0^2)(D_1^1)(-(1-t)^7d_0 - 3t^2(1-t)^5d_2 - 4t^3(1-t)^4d_3) \\
& +(D_0^2)(D_1^3)(3t^2(1-t)^5d_1 + 2t^3(1-t)^4d_2 - t^4(1-t)^3d_3) \\
& +(D_0^2)(D_1^2)(-2t(1-t)^6d_0 + 3t^2(1-t)^5d_1 - 5t^4(1-t)^3d_3) \\
& +(D_0^2)(D_1^3)(4t^3(1-t)^4d_1 + 4t^4(1-t)^3d_2) \\
& +(D_0^2)(D_1^3)(t^4(1-t)^3d_0 - t^6(1-t)d_2) \\
& +(D_0^3)(D_1^3)(-t^3(1-t)^4d_0 + 2t^4(1-t)^3d_1 + 3t^5(1-t)^2d_2) \\
& +(D_0^3)(D_1^1)(-t(1-t)^6d_0 - t^3(1-t)^4d_2 - 2t^4(1-t)^3d_3) \\
& +(D_0^3)(D_1^2)(-2t^3(1-t)^4d_0 - t^4(1-t)^3d_1 - t^6(1-t)d_3) \\
& +(D_1^2)(D_1^3)(3t^5(1-t)^2d_2 - 5t^3(1-t)^4d_0 - 2t^6(1-t)d_3) \\
& +(D_1^2)(D_0^3)(-3t^2(1-t)^5d_0 + t^3(1-t)^4d_1 + t^4(1-t)^3d_2 - 3t^5(1-t)^2d_3) \\
& +(D_1^2)(D_2^3)(3t^5(1-t)^2d_1 + 4t^4(1-t)^3d_0 + t^7d_3) \\
& +(D_1^2)(D_3^3)(3t^5(1-t)^2d_0 + 2t^6(1-t)d_1 - t^7d_2) \\
& +(D_1^1)(D_2^2)(3t^2(1-t)^5d_0 + 3t^5(1-t)^2d_3) \\
& +(D_1^1)(D_2^2)(5t^3(1-t)^4d_0 - 3t^5(1-t)^2d_2 + 2t^6(1-t)d_3) \\
& +(D_1^1)(D_3^3)(2t^4(1-t)^3d_0 - 2t^6(1-t)d_2) \\
& +(D_2^2)(D_0^1)(2t(1-t)^6d_0 - 3t^2(1-t)^5d_1 + 5t^4(1-t)^3d_3) \\
& +(D_2^2)(D_1^3)(-4t^4(1-t)^3d_0 - 3t^5(1-t)^2d_1 - t^7d_3) \\
& +(D_2^2)(D_3^3)(t^6(1-t)d_0 + t^7d_1) \\
& +(D_2^3)(D_0^0)(-3t^2(1-t)^5d_1 - 2t^3(1-t)^4d_2 + t^4(1-t)^3d_3) \\
& +(D_2^3)(D_0^1)(3t^2(1-t)^5d_0 - 5t^3(1-t)^4d_1 - 5t^4(1-t)^3d_2 + 3t^5(1-t)^2d_3) \\
& +(D_2^3)(D_0^2)(t^4(1-t)^3d_1 + 2t^3(1-t)^4d_0 + t^6(1-t)d_3) \\
& +(D_2^3)(D_0^3)(-t^4(1-t)^3d_0 + t^6(1-t)d_2) \\
& +(D_2^3)(D_1^3)(-3t^5(1-t)^2d_0 - 2t^6(1-t)d_1 + t^7d_2),
\end{aligned} \tag{4.63}$$

vektör değerli fonksiyonu ve

$$\begin{aligned}
\beta_5 = & -(1-t)^6(D_0^1)^2(D_2^2) - 2t(1-t)^5(D_0^1)^2(D_2^3) \\
& -t^2(1-t)^4(D_0^1)^2(D_3^3) - (1-t)^6(D_0^2)^2(D_1^1) \\
& +2t^2(1-t)^4(D_0^2)^2(D_1^3) - t^4(1-t)^2(D_0^2)^2(D_3^3) \\
& -t^2(1-t)^4(D_0^3)^2(D_1^1) - t^4(1-t)^2(D_0^3)^2(D_2^2) \\
& -2t^3(1-t)^3(D_0^3)^2(D_1^2) - (1-t)^6(D_1^2)^2(D_0^0) \\
& -2t^3(1-t)^3(D_1^2)^2(D_0^3) - t^6(D_1^2)^2(D_3^3) \\
& -t^2(1-t)^4(D_1^3)^2(D_0^0) + 2t^4(1-t)^2(D_1^3)^2(D_0^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -t^6(D_1^3)^2(D_2^2) - t^4(1-t)^2(D_2^3)^2(D_0^0) \\
& -t^6(D_2^3)^2(D_1^1) - 2t^5(1-t)(D_2^3)^2(D_0^1) \\
& +(1-t)^6(D_0^0)(D_1^1)(D_2^2) + t^4(1-t)^2(D_0^0)(D_2^2)(D_3^3) \\
& +2t(1-t)^5(D_0^0)(D_1^1)(D_2^3) + t^2(1-t)^4(D_0^0)(D_1^1)(D_3^3) \\
& -2t(1-t)^5(D_0^0)(D_1^2)(D_1^3) + 2t^2(1-t)^4(D_0^0)(D_1^2)(D_2^3) \\
& +2t^3(1-t)^3(D_0^0)(D_1^2)(D_3^3) - 2t^2(1-t)^4(D_0^0)(D_1^3)(D_2^2) \\
& -2t^3(1-t)^3(D_0^0)(D_1^3)(D_2^3) + 2t(1-t)^5(D_0^2)(D_0^1)(D_1^3) \\
& -2t^2(1-t)^4(D_0^2)(D_0^1)(D_2^3) - 2t^3(1-t)^3(D_0^2)(D_0^1)(D_3^3) \\
& -2t(1-t)^5(D_0^2)(D_0^3)(D_1^1) - 2t^2(1-t)^4(D_0^2)(D_0^3)(D_1^2) \\
& +2t^3(1-t)^3(D_0^2)(D_0^3)(D_1^3) + 2t^4(1-t)^2(D_0^2)(D_0^3)(D_2^3) \\
& -2t^5(1-t)(D_0^2)(D_1^2)(D_3^3) + 2t^3(1-t)^3(D_0^2)(D_1^3)(D_1^2) \\
& +2t^5(1-t)(D_0^2)(D_1^3)(D_2^3) + 2t(1-t)^5(D_0^3)(D_0^1)(D_1^2) \\
& +2t^2(1-t)^4(D_0^3)(D_0^1)(D_1^3) + 2t^2(1-t)^4(D_0^3)(D_0^1)(D_2^2) \\
& +2t^3(1-t)^3(D_0^3)(D_0^1)(D_2^3) + 2t^3(1-t)^3(D_0^3)(D_1^1)(D_2^2) \\
& +2t^4(1-t)^2(D_0^3)(D_1^1)(D_2^3) - 2t^4(1-t)^2(D_0^3)(D_1^2)(D_1^3) \\
& +2t^5(1-t)(D_0^3)(D_1^2)(D_2^3) - 2t^5(1-t)(D_0^3)(D_2^2)(D_1^3) \\
& +2(1-t)^6(D_1^2)(D_0^1)(D_0^2) + 2t^3(1-t)^3(D_1^2)(D_0^1)(D_2^3) \\
& +2t^4(1-t)^2(D_1^2)(D_0^1)(D_3^3) - 2t^4(1-t)^2(D_1^3)(D_2^3)(D_0^1) \\
& +2t^6(D_1^3)(D_2^3)(D_1^2) - 2t^3(1-t)^3(D_1^3)(D_0^2)(D_2^3) \\
& -2t^4(1-t)^2(D_1^3)(D_0^2)(D_3^3) - 2t^3(1-t)^3(D_2^2)(D_0^1)(D_1^3) \\
& +2t^5(1-t)(D_2^2)(D_0^1)(D_3^3) + t^6(D_1^1)(D_2^2)(D_3^3)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

reel değerli fonksiyonu olup kontrol noktaları $P_i \in \mathbb{E}^3$ olduğundan $\vec{\alpha}_2, \beta_2$ ve γ_2 fonksiyonları da (4.23)-(4.25) eşitliklerindeki gibi verilebilir. Ayrıca, burada kolaylık olması açısından $i, j = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere fark operatörü $\Delta^1 P_i = d_i$ ve fark operatörlerinin iç çarpımı $\langle \Delta^1 P_i, \Delta^1 P_j \rangle = D_i^j$ olarak verilmiştir.

İspat. (4.19) denklemi ile verilen $P_0^4(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri (4.26) ve (4.27) eşitlikleri ile hesaplanmıştır. Ayrıca üçüncü türevi de

$$(P_0^4)'''(t) = 24(1-t)d_0 - 24(2-3t)d_1 + 24(1-3t)d_2 + 24td_3 \tag{4.65}$$

olarak elde edilir. Böylece $V_1(t)$ ve $V_2(t)$ Frenet vektörleri ile $\kappa_1(t)$ eğriliği Teorem 4.6 in ispatındaki gibi bulunur.

Bununla birlikte (2.4) eşitliğinden

$$E_3 = (P_0^4)'''(t) - \langle (P_0^4)'''(t), E_1 \rangle \frac{E_1}{\|E_1\|^2} - \langle (P_0^4)'''(t), E_2 \rangle \frac{E_2}{\|E_2\|^2}$$

olduğundan $\langle (P_0^4)'''(t), E_1 \rangle$ ve $\langle (P_0^4)'''(t), E_2 \rangle$ iç çarpımlarının Maple programı yardımıyla hesaplanması ve gerekli düzenlemeler yapılması sonucunda

$$E_3 = \frac{24\vec{\alpha}_5}{\beta_2} \quad (4.66)$$

olarak bulunur.

Böylece (4.64) eşitliği yardımıyla

$$\langle E_3, E_3 \rangle = \frac{576\beta_5}{\beta_2} \quad (4.67)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca (4.66) eşitliğindeki $\langle E_3, E_3 \rangle$ çarpımı yardımıyla $\langle \vec{\alpha}_5, \vec{\alpha}_5 \rangle = \beta_2\beta_5$ olarak bulunduğundan

$$V_3(t) = \frac{E_3}{\|E_3\|} = \frac{\vec{\alpha}_5}{\sqrt{\beta_2}\sqrt{\beta_5}} = \frac{\vec{\alpha}_5}{\|\vec{\alpha}_5\|}$$

olarak elde edilir.

Bununla birlikte (2.6) eşitliğinden $P_0^4(t)$ eğrisinin ikinci Frenet eğriliği de (4.28), (4.30) ve (4.67) eşitlikleri yardımıyla,

$$\kappa_2(t) = \frac{\|E_3\|}{\|E_2\|\|E_1\|} = \frac{1\sqrt{\beta_5}}{2\beta_2}$$

bulunur. Burada $\vec{\alpha}_5$ ve β_5 fonksiyonları (4.63) ve (4.64) eşitlikleri ile verilmiştir. ■

Örnek 4.14. Kontrol noktaları $P_0 = (1,0,1)$, $P_1 = (0,1,1)$, $P_2 = (1,1,0)$, $P_3 = (1,1,1)$ ve $P_4 = (0,0,1)$ olan 4. dereceden Bezier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet vektörleri ve κ_1, κ_2 Frenet eğrilikleri Teorem 4.13 yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 kontrol noktaları için 4. dereceden Bezier eğrisi

$$\begin{aligned} P_0^4(t) &= (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 t P_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t) t^3 P_3 + t^4 P_4 \\ &= (1-4t+12t^2-12t^3+3t^4, 4t-6t^2+4t^3-2t^4, 1-6t^2+12t^3-6t^4) \end{aligned}$$

şeklinde verilip grafiği de aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 4.6).

Fark operatörleri

$$\begin{aligned} d_0 &= P_1 - P_0 = (-1,1,0), d_1 = P_2 - P_1 = (1,0,-1), d_2 = P_3 - P_2 = (0,0,1), \\ d_3 &= P_4 - P_3 = (-1,-1,0) \end{aligned}$$

ve fark operatörlerinin iç çarpımları

$$D_0^0 = D_1^1 = D_3^3 = 2, D_0^2 = D_2^3 = D_0^3 = 0,$$

$$D_0^1 = D_1^2 = D_1^3 = -1, D_2^2 = 1$$

olmak üzere (4.23)-(4.25) eşitlikleri ile (4.63) ve (4.64) eşitlikleri aşağıdaki gibi

$$\vec{\alpha}_2 = ((1-t)^7 + 3t(1-t)^6 - 11t^2(1-t)^5$$

$$+ 22t^3(1-t)^4 - 24t^4(1-t)^3 + 11t^5(1-t)^2 - 8t^6(1-t),$$

$$(1-t)^7 - 6t(1-t)^6 + 7t^2(1-t)^5 - 3t^3(1-t)^4$$

$$- 12t^4(1-t)^3 + 7t^5(1-t)^2 - 4t^6(1-t),$$

$$- 2(1-t)^7 + 7t(1-t)^6 - 9t^2(1-t)^5 + 9t^3(1-t)^4$$

$$+ 3t^4(1-t)^3 + 4t^6(1-t) - 2t^7),$$

$$\beta_2 = 3(1-t)^8 - 8t(1-t)^7 + 10t^2(1-t)^6 - 8t^3(1-t)^5 + 13t^4(1-t)^4$$

$$- 20t^5(1-t)^3 + 18t^6(1-t)^2 - 8t^7(1-t) + 2t^8,$$

$$\gamma_2 = 2(1-t)^6 - 6t(1-t)^5 + 18t^2(1-t)^4 - 18t^3(1-t)^3 + 3t^4(1-t)^2 + 2t^6,$$

$$\vec{\alpha}_5 = ((1-t)^7 - 4t(1-t)^6 + 6t^2(1-t)^5 - 3t^3(1-t)^4 - 3t^4(1-t)^3$$

$$+ 6t^5(1-t)^2 - 4t^6(1-t) + t^7,$$

$$(1-t)^7 - 4t(1-t)^6 + 9t^2(1-t)^5 - 13t^3(1-t)^4$$

$$+ 13t^4(1-t)^3 - 9t^5(1-t)^2 + 4t^6(1-t) - t^7,$$

$$(1-t)^7 - 2t(1-t)^6 + 5t^3(1-t)^4 - 8t^4(1-t)^3 + 6t^5(1-t)^2 - 2t^6(1-t)),$$

$$\beta_5 = (1-t)^6 - 4t(1-t)^5 + 8t^2(1-t)^4 - 10t^3(1-t)^3 + 8t^4(1-t)^2$$

$$- 4t^5(1-t) + t^6$$

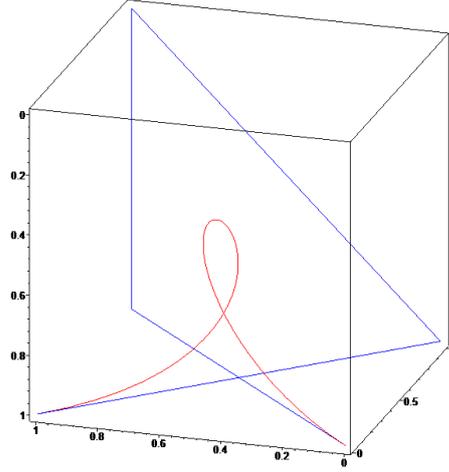
elde edilir. Böylece (4.59)-(4.62) eşitliklerinden ve yukarıda elde edilen fonksiyonlardan 4. dereceden Bezier eğrisinin Frenet elemanları bulunur. O halde $t = 0$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), V_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \quad \kappa_1 = \frac{9}{8\sqrt{6}}, \kappa_2 = \frac{1}{6}$$

ve $t = 1$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri de,

$$V_1 = (0, 0, 1), V_2 = (0, 0, -1), V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \quad \kappa_1 = \frac{3}{8}, \kappa_2 = \frac{1}{4}$$

elde edilir.



Şekil 4.6. \mathbb{E}^3 de 4. dereceden Bezier eğrisi

4.2.4. \mathbb{E}^3 de n. dereceden Bezier eğrileri

Teorem 4.15. $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere $P_0^n(t)$ eğrisi \mathbb{E}^3 de (3.7) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir n. dereceden Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^n(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet vektörleri ve κ_1, κ_2 Frenet eğrilikleri,

$$V_1(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)P_i}{\|\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t)P_i\|} \quad (4.68)$$

$$V_2(t) = \frac{\vec{\alpha}_3}{\|\vec{\alpha}_3\|} \quad (4.69)$$

$$V_3(t) = \frac{\vec{\alpha}_6}{\|\vec{\alpha}_6\|} \quad (4.70)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{(\gamma_3)^3}} \quad (4.71)$$

$$\kappa_2(t) = \frac{n-2}{n} \frac{\sqrt{\beta_6}}{\beta_3} \quad (4.72)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= n^3(n-1)(n-2) \left(\sum_{i=0}^{n-3} \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{i,n-3}(t)B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t) \langle \Delta^1 P_j, \Delta^1 P_k \rangle \Delta^3 P_i \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{n-3} \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,n-3}(t) \left(B_{j,n-1}(t) \right)^2 \langle \Delta^3 P_i, \Delta^1 P_j \rangle \Delta^1 P_j \right), \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\gamma = n^4(n-1)^2(n-2)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^{n-3} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{i,n-3}(t)B_{m,n-2}(t)B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t) \langle \Delta^3 P_i, \Delta^2 P_m \rangle \langle \Delta^1 P_j, \Delta^1 P_k \rangle \right. \\ & \left. - \sum_{i=0}^{n-3} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,n-3}(t)B_{m,n-2}(t) \left(B_{j,n-1}(t) \right)^2 \langle \Delta^3 P_i, \Delta^1 P_j \rangle \langle \Delta^2 P_m, \Delta^1 P_j \rangle \right), \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\beta = n^4(n-1)^2(n-2)^2$$

$$\left(\sum_{i,l=0}^{n-3} \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{i,n-3}(t)B_{l,n-3}(t)B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t)\langle \Delta^3 P_i, \Delta^3 P_l \rangle \langle \Delta^1 P_j, \Delta^1 P_k \rangle \right. \\ \left. - \left(\sum_{i=0}^{n-3} \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,n-3}(t)B_{j,n-1}(t)\langle \Delta^3 P_i, \Delta^1 P_j \rangle \right)^2 \right), \quad (4.75)$$

eşitlikleri ile verilip

$$\frac{\sigma \vec{\xi} - \gamma \vec{\theta}}{\|E_1\|^2} = n^5(n-1)^3(n-2)\vec{\alpha}_6 \quad (4.76)$$

vektör değerli fonksiyonu ve

$$\frac{\sigma \beta - \gamma^2}{\|E_1\|^2} = n^6(n-1)^4(n-2)^2\beta_6 \quad (4.77)$$

reel değerli fonksiyondur. Burada kontrol noktaları $P_i \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere $\vec{\theta}$ ve σ sırasıyla (4.38) ve (4.41) eşitliklerinde ve $\vec{\alpha}_3, \beta_3$ ve γ_3 fonksiyonları da (4.35)-(4.37) eşitliklerinde verilmiştir.

İspat. (3.7) denklemi ile verilen $P_0^n(t)$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla (3.20) eşitliğinden elde edilmek üzere $V_1(t)$ ve $V_2(t)$ Frenet vektörleri ile $\kappa_1(t)$ eğriliği Teorem 4.8 in ispatındaki gibi bulunur.

Ayrıca (2.4) eşitliğinden

$$E_3 = (P_0^n)'''(t) - \langle (P_0^n)'''(t), E_1 \rangle \frac{E_1}{\|E_1\|^2} - \langle (P_0^n)'''(t), E_2 \rangle \frac{E_2}{\|E_2\|^2} = \frac{\sigma \vec{\xi} - \gamma \vec{\theta}}{\sigma \|E_1\|^2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\vec{\xi} = (P_0^n)'''(t)\|E_1\|^2 - \langle (P_0^n)'''(t), E_1 \rangle E_1, \\ \gamma = \langle (P_0^n)'''(t), (P_0^n)''(t) \rangle \|E_1\|^2 - \langle (P_0^n)''(t), E_1 \rangle \langle (P_0^n)'''(t), E_1 \rangle, \\ \beta = \langle (P_0^n)'''(t), (P_0^n)'''(t) \rangle \|E_1\|^2 - \langle (P_0^n)'''(t), E_1 \rangle^2$$

olmak üzere türevler verilen eşitliklerde yerine yazılırsa

$$\frac{\sigma \vec{\xi} - \gamma \vec{\theta}}{\|E_1\|^2} = n^5(n-1)^3(n-2)\vec{\alpha}_6$$

olarak bulunur. Burada, \mathbb{E}^3 de olmak üzere $\vec{\theta}$ ve σ sırasıyla (4.38) ve (4.41) eşitliklerinde verilmiş olup

$$E_3 = \frac{n(n-1)(n-2)\vec{\alpha}_6}{\beta_3} \quad (4.78)$$

olarak bulunur.

Ayrıca E_3 vektörünün iç çarpımından

$$\langle E_3, E_3 \rangle = \frac{\sigma \beta - \gamma^2}{\sigma \|E_1\|^2} \quad (4.79)$$

olmak üzere

$$\frac{\sigma\beta-\gamma^2}{\|E_1\|^2} = n^6(n-1)^4(n-2)^2\beta_6$$

olarak bulunduğundan

$$\langle E_3, E_3 \rangle = \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2\beta_6}{\beta_3}$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.78) eşitliğinden $\langle E_3, E_3 \rangle$ çarpımı yardımıyla $\langle \vec{\alpha}_6, \vec{\alpha}_6 \rangle = \beta_3\beta_6$ olarak bulunduğundan

$$V_3(t) = \frac{E_3}{\|E_3\|} = \frac{\vec{\alpha}_6}{\|\vec{\alpha}_6\|}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $P_0^n(t)$ eğrisinin ikinci Frenet eğriliği de (4.39), (4.42) ve (4.79) yardımıyla

$$\kappa_2(t) = \frac{\|E_3\|}{\|E_2\|\|E_1\|} = \frac{n-2}{n} \frac{\sqrt{\beta_6}}{\beta_3}$$

bulunur. Burada $\vec{\alpha}_6$ ve β_6 fonksiyonları (4.76) ve (4.77) eşitlikleri ile verilmiştir. ■

4.3. \mathbb{E}^4 de Bezier Eğrileri

Bu bölümde dört boyutlu Öklid uzayında verilen Bezier eğrileri için Frenet elemanlarının hesaplanmasıyla ilgili sonuçlar verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

4.3.1. \mathbb{E}^4 de kuadratik Bezier eğrileri

Teorem 4.16. $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{E}^4$ olmak üzere $P_0^2(t)$ eğrisi \mathbb{E}^4 de (3.3) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir kuadratik Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^2(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ Frenet eğrilikleri,

$$V_1(t) = \frac{(1-t)d_0 + td_1}{\|(1-t)d_0 + td_1\|} \quad (4.80)$$

$$V_2(t) = \frac{(1-t)d_1(D_0^0) + (td_1 - (1-t)d_0)(D_0^1) - td_0(D_1^1)}{\|(1-t)d_1(D_0^0) + (td_1 - (1-t)d_0)(D_0^1) - td_0(D_1^1)\|} \quad (4.81)$$

$$V_3(t) = V_4(t) = 0 \quad (4.82)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{1}{2} \frac{\|(1-t)d_1(D_0^0) + (td_1 - (1-t)d_0)(D_0^1) - td_0(D_1^1)\|}{\|(1-t)d_0 + td_1\|^4} \quad (4.83)$$

$$\kappa_2(t) = \kappa_3(t) = 0 \quad (4.84)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada, kolaylık olması açısından $i, j = 0, 1$ olmak üzere fark operatörü $\Delta^1 P_i = d_i$ ve fark operatörlerinin iç çarpımı $\langle \Delta^1 P_i, \Delta^1 P_j \rangle = D_i^j$ olarak verilmiştir.

İspat. (3.3) denklemi ile verilen $P_0^2(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri (4.4) ve (4.5) eitliğinde verilmiş olup üçüncü ve dördüncü türevleri $(P_0^2)'''(t) = (P_0^2)^{iv}(t) = 0$ dır. Böylece $V_1(t)$ ve $V_2(t)$ Frenet vektörleri ile $\kappa_1(t)$ eğriliği Teorem 4.1 in ispatındaki gibi bulunur. Bununla birlikte üçüncü ve dördüncü türevleri sıfır olduğundan $V_3(t) = V_4(t) = 0$ ve $\kappa_2(t) = \kappa_3(t) = 0$ olduğu açıkça görülür. ■

Örnek 4.17. Kontrol noktaları $P_0 = (1, 1, -1, 1)$, $P_1 = (1, -1, 1, -1)$ ve $P_2 = (-1, 1, 1, 1)$ olan kuadratik Bezier eğrisinin $\forall t \in [0, 1]$ için $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ Frenet eğrilikleri Teorem 4.16 yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

P_0, P_1, P_2 kontrol noktaları için kuadratik Bezier eğrisi

$$\begin{aligned} P_0^2(t) &= (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2 \\ &= (1-2t^2, 1-4t+4t^2, -1+4t-2t^2, 1-4t+4t^2) \end{aligned}$$

şeklinde verilip grafiğinin \mathbb{E}^3 deki izdüşümü aşağıdaki gibi elde edilir elde edilir (Şekil 4.7).

Fark operatörleri

$$d_0 = P_1 - P_0 = (0, -2, 2, -2), d_1 = P_2 - P_1 = (-2, 2, 0, 2)$$

ve fark operatörlerinin iç çarpımları

$$D_0^0 = D_1^1 = 12, D_0^1 = -8,$$

olmak üzere (4.80)-(4.84) eşitliklerinden kuadratik Bezier eğrisinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{(-t, -1+2t, 1-t, -1+2t)}{\|(-t, -1+2t, 1-t, -1+2t)\|} \\ V_2(t) &= \frac{(-3+5t, 5-4t, 2-5t, 1+4t)}{\|(-3+5t, 5-4t, 2-5t, 1+4t)\|} \\ \kappa_1(t) &= \frac{1}{4} \frac{\|(-3+5t, 5-4t, 2-5t, 1+4t)\|}{\|(-t, -1+2t, 1-t, -1+2t)\|^4} \end{aligned}$$

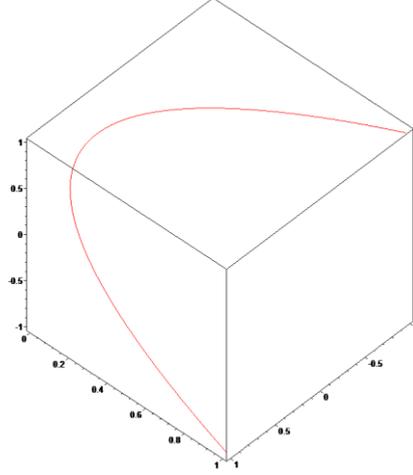
olarak bulunur. Ayrıca teoremde de belirtildiği üzere $V_3(t) = V_4(t) = 0$ ve $\kappa_2(t) = \kappa_3(t) = 0$ olup Bezier eğrisi düzlemsel bir eğridir. O halde $t = 0$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, 1, -1), V_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}(-3, 5, 2, 1), \kappa_1 = \frac{13}{12\sqrt{39}}$$

ve $t = 1$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğriliği de,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1), V_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}(2, 1, -3, 5), \kappa_1 = \frac{13}{12\sqrt{39}}$$

elde edilir.



Şekil 4.7. \mathbb{E}^4 de kuadratik Bezier eğrisinin izdüşümü

4.3.2. \mathbb{E}^4 de kübik Bezier eğrileri

Teorem 4.18. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere $P_0^3(t)$ eğrisi \mathbb{E}^3 de (3.5) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir kübik Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^3(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ Frenet eğrilikleri,

$$V_1(t) = \frac{(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)td_1 + t^2 d_2}{\|(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)td_1 + t^2 d_2\|} \quad (4.85)$$

$$V_2(t) = \frac{\vec{\alpha}_1}{\|\vec{\alpha}_1\|} \quad (4.86)$$

$$V_3(t) = \frac{\vec{\alpha}_4}{\|\vec{\alpha}_4\|} \quad (4.87)$$

$$V_4(t) = 0 \quad (4.88)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{(\gamma_1)^3}} \quad (4.89)$$

$$\kappa_2(t) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{\beta_4}}{\beta_1} \quad (4.90)$$

$$\kappa_3(t) = 0 \quad (4.91)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada, kontrol noktaları $P_i \in \mathbb{E}^4$ olduğundan $\vec{\alpha}_1, \beta_1$ ve γ_1 fonksiyonları (4.10)-(4.12) eşitliklerindeki gibi ve $\vec{\alpha}_4$ ve β_4 fonksiyonları da (4.53) ve (4.54) eşitliklerindeki gibi verilebilir.

İspat. (3.5) denklemi ile verilen $P_0^3(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri (4.13) ve (4.14) eşitlikleri ile verilmiş olup üçüncü türevi de (4.55) eşitliği şeklinde hesaplanmıştır. Ayrıca bu eğrinin dördüncü türevi de sıfırdır.

Böylece $V_1(t), V_2(t)$ ve $V_3(t)$ Frenet vektörleri ile $\kappa_1(t)$ ve $\kappa_2(t)$ eğrilikleri Teorem 4.11'nin ispatındaki gibi bulunur. Bununla birlikte $(P_0^3)^{iv}(t) = 0$ olduğundan $V_4(t) = 0$ ve $\kappa_3(t) = 0$ olduğu açıkça görülür. ■

Örnek 4.19. Kontrol noktaları $P_0 = (1,1,1,0)$, $P_1 = (1,0,1,1)$, $P_2 = (1,1,0,1)$ ve $P_3 = (0,1,1,1)$ olan kübik Bezier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ Frenet eğrilikleri Teorem 4.18 yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

P_0, P_1, P_2, P_3 kontrol noktaları için kübik Bezier eğrisi

$$\begin{aligned} P_0^3(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \\ &= (1-t^3, 1-3t+6t^2-3t^3, 1-3t^2+3t^3, 3t-3t^2+t^3) \end{aligned}$$

şeklinde verilip grafiğinin \mathbb{E}^3 deki izdüşümü aşağıdaki gibi elde edilir elde edilir (Şekil 4.8).

Fark operatörleri

$$d_0 = P_1 - P_0 = (0, -1, 0, 1), d_1 = P_2 - P_1 = (0, 1, -1, 0), d_2 = P_3 - P_2 = (-1, 0, 1, 0)$$

ve fark operatörlerinin iç çarpımları

$$D_0^0 = D_1^1 = D_2^2 = 2, D_0^1 = D_1^2 = -1, D_0^2 = 0$$

olmak üzere (4.10)-(4.12) eşitlikleri ile (4.53)-(4.54) eşitlikleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= (-2t(1-t)^3 + 3t^2(1-t)^2 - 4t^3(1-t) + t^4, \\ &(1-t)^4 + 2t(1-t)^3 - 3t^2(1-t)^2 + 4t^3(1-t) - 2t^4, \\ &-2(1-t)^4 + 4t(1-t)^3 - 3t^2(1-t)^2 + 2t^3(1-t) + t^4, \\ &(1-t)^4 - 4t(1-t)^3 + 3t^2(1-t)^2 - 2t^3(1-t)), \\ \beta_1 &= 3(1-t)^4 - 4t(1-t)^3 + 6t^2(1-t)^2 - 4t^3(1-t) + 3t^4, \\ \gamma_1 &= 2(1-t)^4 - 4t(1-t)^3 + 8t^2(1-t)^2 - 4t^3(1-t) + 2t^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_4 &= (-3(1-t)^2, (1-t)^2 - 2t(1-t) - t^2, \\ &(1-t)^2 + 2t(1-t) - t^2, (1-t)^2 - 2t(1-t) + 3t^2), \\ \beta_4 &= 4\end{aligned}$$

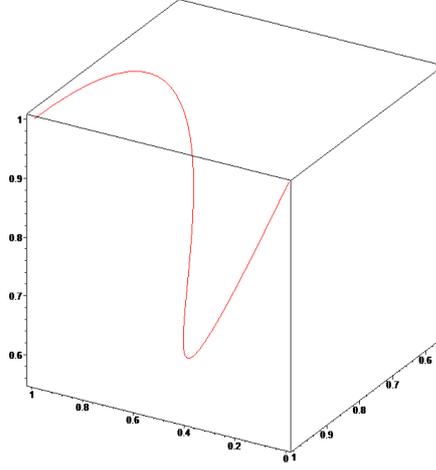
elde edilir. Böylece (4.85)-(4.91) eşitliklerinden ve yukarıda elde edilen fonksiyonlardan kübik Bezier eğrisinin Frenet elemanları bulunur. O halde $t = 0$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1), V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, -2, 1), V_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-3, 1, 1, 1) \quad \kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \kappa_2 = \frac{2}{9}$$

ve $t = 1$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri de,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0), V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0), V_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}(0, -1, -1, 3) \quad \kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \kappa_2 = \frac{2}{9}$$

elde edilir.



Şekil 4.8. \mathbb{E}^4 de kübik Bezier eğrisinin izdüşümü

4.3.3. \mathbb{E}^4 de 4. dereceden Bezier eğrileri

Teorem 4.20. $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{E}^4$ olmak üzere $P_0^4(t)$ eğrisi \mathbb{E}^4 de (4.19) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir 4. dereceden Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0, 1]$ için $P_0^4(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ Frenet eğrilikleri,

$$V_1(t) = \frac{(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)t d_1 + t^2 d_2}{\|(1-t)^2 d_0 + 2(1-t)t d_1 + t^2 d_2\|} \quad (4.92)$$

$$V_2(t) = \frac{\vec{\alpha}_2}{\|\vec{\alpha}_2\|} \quad (4.93)$$

$$V_3(t) = \frac{\vec{\alpha}_5}{\|\vec{\alpha}_5\|} \quad (4.94)$$

$$V_4(t) = \frac{\vec{\alpha}_7}{\|\vec{\alpha}_7\|} \quad (4.95)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{(\gamma_2)^3}} \quad (4.96)$$

$$\kappa_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\beta_5}}{\beta_2} \quad (4.97)$$

$$\kappa_3(t) = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\beta_7}}{\beta_5 \sqrt{\gamma_2}} \quad (4.98)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_7 = & (D_0^1)^2 (D_2^2) (-(1-t)^3 d_3) + (D_0^1)^2 (D_2^3) ((1-t)^3 d_2 - t(1-t)^2 d_3) \\ & + (D_0^1)^2 (D_3^3) (t(1-t)^2 d_2) + (D_0^2)^2 (D_1^1) (-(1-t)^3 d_3) \\ & + (D_0^2)^2 (D_1^3) ((1-t)^3 d_1 - t^2(1-t) d_3) + (D_0^2)^2 (D_3^3) (-t^2(1-t) d_1) \\ & + (D_0^3)^2 (D_1^1) (t(1-t)^2 d_2) + (D_0^3)^2 (D_2^2) (-t^2(1-t) d_1) \\ & + (D_0^3)^2 (D_2^1) (-t(1-t)^2 d_1 + t^2(1-t) d_2) + (D_1^2)^2 (D_0^0) (-(1-t)^3 d_3) \\ & + (D_1^2)^2 (D_0^3) ((1-t)^3 d_0 - t^3 d_3) + (D_1^2)^2 (D_3^3) (t^3 d_0) \\ & + (D_1^3)^2 (D_0^0) (t(1-t)^2 d_2) + (D_1^3)^2 (D_0^2) (-t(1-t)^2 d_0 - t^3 d_2) \\ & + (D_1^3)^2 (D_2^2) (t^3 d_0) + (D_2^3)^2 (D_0^0) (-t^2(1-t) d_1) \\ & + (D_2^3)^2 (D_0^1) (t^2(1-t) d_0 - t^3 d_1) + (D_2^3)^2 (D_1^1) (t^3 d_0) \\ & + (D_0^0) (D_1^1) (D_2^2) ((1-t)^3 d_3) + (D_0^0 D_0^0) (D_1^1 D_1^1) (D_3^3 D_3^3) (-t(1-t)^2 d_2) \\ & + (D_0^0) (D_1^1) (D_2^3) (-(1-t)^3 d_2 + 4t(1-t)^2 d_3) \\ & + (D_0^0) (D_1^2) (D_1^3) ((1-t)^3 d_2 - t(1-t)^2 d_3) \\ & + (D_0^0) (D_1^1) (D_2^3) ((1-t)^3 d_1 + t^2(1-t) d_3) \\ & + (D_0^0) (D_1^1) (D_3^3) (t(1-t)^2 d_1 - t^2(1-t) d_2) \\ & + (D_0^0) (D_1^3) (D_2^2) (-(1-t)^3 d_1 - t^2(1-t) d_3) \\ & + (D_0^0) (D_1^3) (D_3^3) (-t(1-t)^2 d_1 + t^2(1-t) d_2) \\ & + (D_0^0) (D_2^2) (D_3^3) (t^2(1-t) d_1) \\ & + (D_0^1) (D_0^2) (D_1^1) (2(1-t)^3 d_3) \\ & + (D_0^1) (D_0^2) (D_1^3) (-(1-t)^3 d_2 + t(1-t)^2 d_3) \\ & + (D_0^1) (D_0^2) (D_3^3) (-t(1-t)^2 d_1 + t^2(1-t) d_2) \\ & + (D_0^1) (D_0^2) (D_2^3) (-(1-t)^3 d_1 - t^2(1-t) d_3) \\ & + (D_0^1) (D_1^2) (D_0^3) (-(1-t)^3 d_2 + t(1-t)^2 d_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(D_0^1)(D_1^2)(D_2^3)(-(1-t)^3d_0+t^3d_3) \\
&+(D_0^1)(D_1^2)(D_3^3)(-t(1-t)^2d_0-t^3d_2) \\
&+(D_0^1)(D_1^3)(D_2^2)((1-t)^3d_0-t^3d_3) \\
&+(D_0^2)(D_1^1)(D_2^3)((1-t)^3d_0-t^3d_3) \\
&+(D_0^2)(D_1^2)(D_0^3)(-(1-t)^3d_1-t^2(1-t)d_3) \\
&+(D_0^2)(D_1^2)(D_1^3)(-(1-t)^3d_0+t^3d_3) \\
&+(D_0^2)(D_1^2)(D_3^3)(t^2(1-t)d_0-t^3d_1) \\
&+(D_0^3)(D_1^0)(D_2^2)((1-t)^3d_1+t^2(1-t)d_3) \\
&+(D_0^3)(D_1^0)(D_2^2)(t(1-t)^2d_1-t^2(1-t)d_2) \\
&+(D_0^3)(D_0^2)(D_1^1)((1-t)^3d_2-t(1-t)^2d_3) \\
&+(D_0^3)(D_0^2)(D_1^3)((t(1-t)^2d_1-t^2(1-t)d_2) \\
&+(D_0^3)(D_0^2)(D_2^3)(2t^2(1-t)d_1) \\
&+(D_1^1)(D_0^3)(D_2^2)(-(1-t)^3d_0+t^3d_3) \\
&+(D_1^1)(D_0^3)(D_2^2)(-t(1-t)^2d_0-t^3d_2) \\
&+(D_1^2)(D_0^1)(D_3^3)((t(1-t)^2d_0+t^3d_2-2t^3d_0) \\
&+(D_1^2)(D_0^3)(D_1^3)(t(1-t)^2d_0+t^3d_2) \\
&+(D_1^2)(D_0^3)(D_2^3)(-t^2(1-t)d_0+t^3d_1) \\
&+(D_1^3)(D_0^1)(D_2^3)(t(1-t)^2d_0+t^3d_2) \\
&+(D_1^3)(D_0^2)(D_2^3)(-t^2(1-t)d_0+t^3d_1) \\
&+(D_1^3)(D_0^3)(D_0^1)(-2t(1-t)^2d_2) \\
&+(D_1^3)(D_0^3)(D_2^2)(t^2(1-t)d_0-t^3d_1) \\
&+(D_2^2)(D_0^1)(D_3^3)(-t^2(1-t)d_0+t^3d_1) \\
&+(D_2^2)(D_1^1)(D_3^3)(-t^3d_0),
\end{aligned} \tag{4.99}$$

vektör değerli fonksiyonu ve

$$\begin{aligned}
\beta_7 = & (D_0^1)^2(D_2^3)^2 + (D_0^2)^2(D_1^3)^2 + (D_0^3)^2(D_1^2)^2 \\
& -(D_0^1)^2(D_2^2)(D_3^3) - (D_0^2)^2(D_1^1)(D_3^3) - (D_0^3)^2(D_1^1)(D_2^2) \\
& -(D_1^2)^2(D_3^3)(D_0^0) - (D_1^3)^2(D_0^0)(D_2^2) - (D_2^3)^2(D_0^0)(D_1^1) \\
& +(D_0^0)(D_1^1)(D_2^2)(D_3^3) + 2(D_0^0)(D_1^1)(D_1^1)(D_2^3) \\
& -2(D_0^0)(D_0^0)(D_1^1)(D_2^3) + 2(D_0^2)(D_0^1)(D_1^1)(D_3^3) \\
& -2(D_0^2)(D_0^3)(D_1^2)(D_1^3) + 2(D_0^2)(D_0^3)(D_1^1)(D_2^3) \\
& -2(D_1^2)(D_0^3)(D_2^3)(D_0^1) + 2(D_1^3)(D_0^3)(D_2^2)(D_0^1)
\end{aligned} \tag{4.100}$$

reel değerli fonksiyonu olup kontrol noktaları $P_i \in \mathbb{E}^4$ olmak üzere $\vec{\alpha}_2, \beta_2$ ve γ_2 fonksiyonları (4.23)-(4.25) eşitlikleri ile ve $\vec{\alpha}_5$ ve β_5 fonksiyonları da (4.63) ve (4.64) eşitlikleri ile verilmiştir. Ayrıca, burada kolaylık olması açısından $i, j = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere fark operatörü $\Delta^1 P_i = d_i$ ve fark operatörlerinin iç çarpımı $\langle \Delta^1 P_i, \Delta^1 P_j \rangle = D_i^j$ olarak verilmiştir.

İspat. (4.19) denklemi ile verilen $P_0^4(t)$ eğrisinin birinci ve ikinci türevleri (4.26) ve (4.27) eşitlikleri ile üçüncü türevi de (4.65) eşitliği ile verilmiştir. Ayrıca eğrinin dördüncü türevi

$$(P_0^4)^{iv}(t) = -24d_0 + 72d_1 - 72d_2 + 24d_3 \quad (4.101)$$

olarak elde edilir. Böylece $V_1(t), V_2(t)$ ve $V_3(t)$ Frenet vektörleri ile $\kappa_1(t)$ ve $\kappa_2(t)$ eğrilikleri Teorem 4.13 ün ispatındaki gibi bulunur.

Bununla birlikte (2.4) eşitliğinden

$$E_4 = (P_0^4)^{iv}(t) - \langle (P_0^4)^{iv}(t), E_1 \rangle \frac{E_1}{\|E_1\|^2} - \langle (P_0^4)^{iv}(t), E_2 \rangle \frac{E_2}{\|E_2\|^2} - \langle (P_0^4)^{iv}(t), E_3 \rangle \frac{E_3}{\|E_3\|^2}$$

olduğundan $\langle (P_0^4)^{iv}(t), E_1 \rangle, \langle (P_0^4)^{iv}(t), E_2 \rangle$ ve $\langle (P_0^4)^{iv}(t), E_3 \rangle$ iç çarpımlarının Maple programı yardımıyla hesaplanması ve gerekli düzenlemeler yapılması sonucunda

$$E_4 = \frac{24\vec{\alpha}_7}{\beta_5} \quad (4.102)$$

olarak bulunur.

Böylece (4.100) eşitliği yardımıyla

$$\langle E_4, E_4 \rangle = \frac{576\beta_7}{\beta_5} \quad (4.103)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca (4.102) eşitliğindeki $\langle E_4, E_4 \rangle$ çarpımı yardımıyla $\langle \vec{\alpha}_7, \vec{\alpha}_7 \rangle = \beta_5\beta_7$ olarak bulunduğundan

$$V_4(t) = \frac{E_4}{\|E_4\|} = \frac{\vec{\alpha}_7}{\sqrt{\beta_7}\sqrt{\beta_5}} = \frac{\vec{\alpha}_7}{\|\vec{\alpha}_7\|}$$

olarak elde edilir.

Bununla birlikte üçüncü Frenet eğriliği de (4.28), (4.67) ve (4.103) eşitlikleri yardımıyla,

$$\kappa_3(t) = \frac{\|E_4\|}{\|E_3\|\|E_1\|} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\beta_2}\sqrt{\beta_7}}{\beta_5\sqrt{\gamma_2}}$$

bulunur. Burada β_5 fonksiyonu (4.64) eşitliğinde ve γ_2, β_2 fonksiyonları da (4.24)-(4.25) eşitlikleri ile verilmiştir. ■

Örnek 4.21. Kontrol noktaları $P_0 = (1,0,0,0)$, $P_1 = (1,1,0,0)$, $P_2 = (1,1,1,0)$, $P_3 = (1,1,1,1)$ ve $P_4 = (1,0,1,0)$ olan 4. dereceden Bezier eğrisinin $\forall t \in [0,1]$ için $t = 0$ başlangıç ve $t = 1$ bitiş noktalarındaki $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ Frenet eğrilikleri Teorem 4.20 yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 kontrol noktaları için 4. dereceden Bezier eğrisi

$$\begin{aligned} P_0^4(t) &= (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 t P_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t)t^3 P_3 + t^4 P_4 \\ &= (1, 4t - 6t^2 + 4t^3 - 2t^4, 6t^2 - 8t^3 + 3t^4, 4t^3 - 4t^4) \end{aligned}$$

şeklinde verilip grafiğinin \mathbb{E}^3 deki izdüşümü aşağıdaki gibi elde edilir elde edilir (Şekil 4.9).

Fark operatörleri

$$\begin{aligned} d_0 &= P_1 - P_0 = (0,1,0,0), d_1 = P_2 - P_1 = (0,0,1,0), \\ d_2 &= P_3 - P_2 = (0,0,0,1), d_3 = P_4 - P_3 = (0, -1,0, -1) \end{aligned}$$

ve fark operatörlerinin iç çarpımları

$$\begin{aligned} D_0^0 &= D_1^1 = D_2^2 = 1, D_0^2 = D_0^1 = D_1^3 = D_1^2 = 0, \\ D_0^3 &= D_2^3 = -1, D_3^3 = 2 \end{aligned}$$

olmak üzere (4.23)-(4.25), (4.63)-(4.64) ve (4.99)-(4.100) eşitlikleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_2 &= (0, -3t(1-t)^6 - 6t^3(1-t)^4 - t^4(1-t)^3 - 3t^5(1-t)^2 - 3t^6(1-t), \\ &\quad (1-t)^7 + t^3(1-t)^4 - 9t^4(1-t)^3 + 9t^5(1-t)^2 - 4t^6(1-t), \\ &\quad 2t(1-t)^6 - t^2(1-t)^5 + 9t^3(1-t)^4 - 7t^4(1-t)^3 + t^5(1-t)^2 - 6t^6(1-t) - 2t^7), \\ \beta_2 &= (1-t)^8 + 4t^2(1-t)^6 + 10t^4(1-t)^4 - 8t^5(1-t)^3 + 6t^6(1-t)^2 + t^8, \\ \gamma_2 &= (1-t)^6 + 9t^2(1-t)^4 - 2t^3(1-t)^3 + 9t^4(1-t)^2 - 6t^5(1-t) + 2t^6, \\ \vec{\alpha}_5 &= (0, 3t^2(1-t)^5 - 3t^3(1-t)^4 - 2t^4(1-t)^3 + -3t^5(1-t)^2 - 2t^6(1-t) \\ &\quad + t^7, 3t^2(1-t)^5 - t^3(1-t)^4 + t^4(1-t)^3 - 3t^5(1-t)^2 + t^7, \\ &\quad (1-t)^7 - t(1-t)^6 + 2t^3(1-t)^4 - t^6(1-t) + t^7), \\ \beta_5 &= (1-t)^6 - 2t(1-t)^5 + 3t^2(1-t)^4 - 2t^3(1-t)^3 + 2t^4(1-t)^2 + t^6, \\ \vec{\alpha}_7 &= (0, 2(1-t)^3 - 5t(1-t)^2 + t^3, 0, 2(1-t)^3 - 5t(1-t)^2 + t^3), \\ \beta_7 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.92)-(4.98) eşitliklerinden ve yukarıda elde edilen fonksiyonlardan 4. dereceden Bezier eğrisinin Frenet elemanları bulunur. O halde $t = 0$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri,

$$V_1 = (0,1,0,0), V_2 = (0,0,1,0), V_3 = (0,0,0,1), V_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1),$$

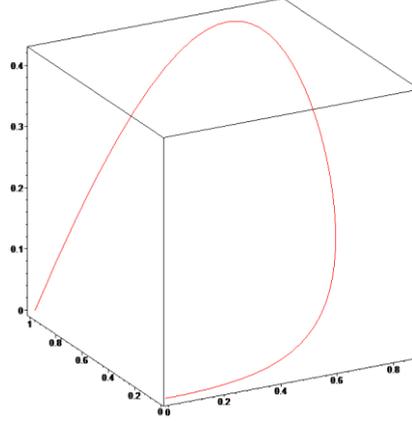
$$\kappa_1 = \frac{3}{4}, \kappa_2 = \frac{1}{2} \kappa_3 = 0$$

ve $t = 1$ için Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri de,

$$V_1 = (0,0,0,1), V_2 = (0,0,0, -1), V_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1) V_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$$

$$\kappa_1 = \frac{3}{8\sqrt{2}}, \kappa_2 = \frac{1}{2} \kappa_3 = 0$$

elde edilir.



Şekil 4.9. \mathbb{E}^4 de 4. dereceden Bezier eğrisinin izdüşümü

4.3.4. \mathbb{E}^4 de n. dereceden Bezier eğrileri

Teorem 4.22. $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{E}^4$ olmak üzere $P_0^n(t)$ eğrisi \mathbb{E}^4 de (3.7) parametrelendirmesiyle verilen birim hızlı olmayan bir n. dereceden Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,1]$ için $P_0^n(t)$ eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri ve κ_1, κ_2 ve κ_3 Frenet eğrilikleri,

$$V_1(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) P_i}{\|\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) P_i\|} \quad (4.104)$$

$$V_2(t) = \frac{\vec{\alpha}_3}{\|\vec{\alpha}_3\|} \quad (4.105)$$

$$V_3(t) = \frac{\vec{\alpha}_6}{\|\vec{\alpha}_6\|} \quad (4.106)$$

$$V_4(t) = \frac{\vec{\alpha}_8}{\|\vec{\alpha}_8\|} \quad (4.107)$$

$$\kappa_1(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{(\gamma_3)^3}} \quad (4.108)$$

$$\kappa_2(t) = \frac{n-2}{n} \frac{\sqrt{\beta_6}}{\beta_3} \quad (4.109)$$

$$\kappa_3(t) = \frac{n-3}{n} \frac{\sqrt{\beta_3}\sqrt{\beta_8}}{\beta_6\sqrt{\gamma_3}} \quad (4.110)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada,

$$\vec{\lambda} = n^3(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\begin{aligned} & (\sum_{i=0}^{n-4} \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{i,n-4}(t)B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t)\langle\Delta^1P_j, \Delta^1P_k\rangle\Delta^4P_i \\ & - \sum_{i=0}^{n-4} \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,n-4}(t) \left(B_{j,n-1}(t)\right)^2 \langle\Delta^4P_i, \Delta^1P_j\rangle\Delta^1P_j), \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\alpha = n^4(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

$$\begin{aligned} & (\sum_{i=0}^{n-4} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{i,n-4}(t)B_{m,n-2}(t)B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t)\langle\Delta^4P_i, \Delta^2P_m\rangle\langle\Delta^1P_j, \Delta^1P_k\rangle \\ & - \sum_{i=0}^{n-4} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,n-4}(t)B_{m,n-2}(t) \left(B_{j,n-1}(t)\right)^2 \langle\Delta^4P_i, \Delta^1P_j\rangle\langle\Delta^2P_m, \Delta^1P_j\rangle), \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\varphi = n^4(n-1)^2(n-2)^2(n-3)$$

$$\begin{aligned} & (\sum_{i=0}^{n-4} \sum_{m=0}^{n-3} \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{i,n-4}(t)B_{m,n-3}(t)B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t)\langle\Delta^4P_i, \Delta^3P_m\rangle\langle\Delta^1P_j, \Delta^1P_k\rangle \\ & - \sum_{i=0}^{n-4} \sum_{m=0}^{n-3} \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,n-4}(t)B_{m,n-3}(t) \left(B_{j,n-1}(t)\right)^2 \langle\Delta^4P_i, \Delta^1P_j\rangle\langle\Delta^3P_m, \Delta^1P_j\rangle), \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\phi = n^4(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2$$

$$\begin{aligned} & (\sum_{i,l=0}^{n-4} \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{i,n-4}(t)B_{l,n-4}(t)B_{j,n-1}(t)B_{k,n-1}(t)\langle\Delta^4P_i, \Delta^4P_l\rangle\langle\Delta^1P_j, \Delta^1P_k\rangle \\ & - (\sum_{i=0}^{n-4} \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,n-4}(t)B_{j,n-1}(t)\langle\Delta^4P_i, \Delta^1P_j\rangle)^2), \end{aligned} \quad (4.114)$$

eşitlikleri ile verilip

$$\frac{(\vec{\lambda}\sigma - \vec{\theta}\alpha)(\sigma\beta - \gamma^2) - (\sigma\varphi - \gamma\alpha)(\sigma\vec{\xi} - \gamma\vec{\theta})}{\sigma\|E_1\|^4} = n^7(n-1)^5(n-2)^3(n-3)\vec{\alpha}_8 \quad (4.115)$$

vektör değerli fonksiyon ve

$$\frac{(\sigma\beta - \gamma^2)(\sigma\phi - \alpha^2) - (\sigma\varphi - \gamma\alpha)^2}{\sigma\|E_1\|^4} = n^8(n-1)^6(n-2)^4(n-3)^2\beta_8 \quad (4.116)$$

reel değerli fonksiyondur. Burada kontrol noktaları $P_i \in \mathbb{E}^4$ olmak üzere $\vec{\theta}$ ve σ sırasıyla (4.38) ve (4.41) eşitliklerinde ve $\vec{\xi}, \gamma$ ve β fonksiyonları da (4.73)–(4.75) eşitlikleri ile verilmiştir.

İspat. (3.7) denklemi ile verilen $P_0^n(t)$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla (3.20) eşitliğinden elde edilmek üzere $V_1(t)$, $V_2(t)$ ve $V_3(t)$ Frenet vektörleri ile $\kappa_1(t)$ ve $\kappa_2(t)$ eğrilikleri Teorem 4.15 in ispatındaki gibi bulunur.

Ayrıca (2.4) eşitliğinden

$$E_4 = (P_0^n)^{lv}(t) - \langle(P_0^n)^{lv}(t), E_1\rangle \frac{E_1}{\|E_1\|^2} - \langle(P_0^n)^{lv}(t), E_2\rangle \frac{E_2}{\|E_2\|^2} - \langle(P_0^n)^{lv}(t), E_3\rangle \frac{E_3}{\|E_3\|^2}$$

$$= \frac{(\vec{\lambda}\sigma - \vec{\theta}\alpha)(\sigma\beta - \gamma^2) - (\sigma\varphi - \gamma\alpha)(\sigma\vec{\xi} - \gamma\vec{\theta})}{\sigma\|E_1\|^2(\sigma\beta - \gamma^2)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}\vec{\lambda} &= (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t)\|E_1\|^2 - \langle (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t), E_1 \rangle E_1, \\ \alpha &= \langle (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t), (P_0^n)^{\prime\prime}(t) \rangle \|E_1\|^2 - \langle (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t), E_1 \rangle \langle (P_0^n)^{\prime\prime}(t), E_1 \rangle, \\ \varphi &= \langle (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t), (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t) \rangle \|E_1\|^2 - \langle (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t), E_1 \rangle \langle (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t), E_1 \rangle, \\ \phi &= \langle (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t), (P_0^n)^{\prime\prime}(t) \rangle \|E_1\|^2 - \langle (P_0^n)^{\prime\prime\prime}(t), E_1 \rangle \langle (P_0^n)^{\prime\prime}(t), E_1 \rangle\end{aligned}$$

olmak üzere türevler verilen eşitliklerde yerine yazılırsa

$$(\vec{\lambda}\sigma - \vec{\theta}\alpha)(\sigma\beta - \gamma^2) - (\sigma\varphi - \gamma\alpha)(\sigma\vec{\xi} - \gamma\vec{\theta}) = n^{15}(n-1)^7(n-2)^3(n-3)\beta_3\gamma_3^2\vec{\alpha}_8$$

olarak bulunur. Böylece

$$E_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\vec{\alpha}_8}{\beta_6} \quad (4.117)$$

olarak bulunur. Ayrıca E_4 vektörünün iç çarpımından

$$\langle E_4, E_4 \rangle = \frac{(\sigma\beta - \gamma^2)(\sigma\phi - \alpha^2) - (\sigma\varphi - \gamma\alpha)^2}{\sigma\|E_1\|^2(\sigma\beta - \gamma^2)} \quad (4.118)$$

olmak üzere

$$\sigma\|E_1\|^2(\sigma\beta - \gamma^2) = n^{14}(n-1)^6(n-2)^2\beta_3\gamma_3^2\beta_6$$

olarak bulunduğundan

$$\langle E_4, E_4 \rangle = \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2\beta_8}{\beta_6}$$

elde edilir. Ayrıca (4.117) eşitliğinden $\langle E_4, E_4 \rangle$ çarpımı yardımıyla $\langle \vec{\alpha}_8, \vec{\alpha}_8 \rangle = \beta_6\beta_8$ olarak bulunduğundan

$$V_4(t) = \frac{E_4}{\|E_4\|} = \frac{\vec{\alpha}_8}{\|\vec{\alpha}_8\|}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $P_0^n(t)$ eğrisinin üçüncü Frenet eğriliği de (4.39), (4.79) ve (4.118) eşitlikleri yardımıyla,

$$\kappa_3(t) = \frac{\|E_4\|}{\|E_3\|\|E_1\|} = \frac{n-3}{n} \frac{\sqrt{\beta_3}\sqrt{\beta_8}}{\beta_6\sqrt{\gamma_3}}$$

bulunur. Burada $\vec{\alpha}_8$ ve β_8 fonksiyonları (4.115) ve (4.116) eşitlikleri ile verilmiştir. ■

4.4. \mathbb{E}^3 de Bezier Yüzeylerinin Gerinim Enerjileri

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında Bezier yüzeylerinin gerinim enerjileri üzerinde durulmuştur. Gerinim enerjisi ile ilgili temel kavramlar verilip 2×2 tipindeki ve 3×3 tipindeki Bezier yüzeylerinin gerinim enerjileri hesaplanmıştır.

Esneklik teorisi mühendislik problemlerinin çözümünde önemli bir uygulama alanıdır. Malzemelerin temel dayanma yöntemlerinin mühendislik yapılarındaki gerinim dağılımı hakkında tatmin edici bilgiler sağlamak adına yetersiz olmasından kaynaklı esneklik teorisi ile daha güçlü yöntemlere başvurmak mümkün olmuştur. Bu yöntemlerden birisi de gerinim enerjisidir (Timoshenko ve Goodier, 1951).

Gerinim enerjisi deformasyon nedeniyle bir yapıda oluşan enerji olarak tanımlanabilir. Bir yapı ya da bir malzeme inşa ederken gerinim enerjisini göz önünde bulundurmamak oldukça önemlidir. Örneğin bir uçak tasarlarken en önemli hususlardan birisi, malzemedeki gerinim enerjisidir. Eğer gerinim enerjisi çok büyükse bu uçağın bu kısmındaki gövdesinde kırılmalara neden olabilir. Bu nedenle bu malzemeleri oluştururken uygun gerinim enerjisine göre hesaplama yapmak bu alanda önem arz etmektedir.

Bir yüzey üzerinde gerinim enerjisi hesaplamak için yüzey üzerindeki eğrilikler kullanılır. Parametre seçiminden bağımsız olarak bir yüzeyin şekli aynı olduğundan yüzeyin her noktasındaki asli eğrilikler de parametreden bağımsızdır. O halde keyfi bir parametrelendirme için bir yüzeyin gerinim enerjisinin asli eğrilikleri yardımıyla hesaplanabileceği sonucu ortaya çıkar (Bonneau, 1993).

Araba, uçak vb. araçların yüzey materyalleri için matematiksel modelleme en yaygın olarak Bezier yüzeyleri ile yapılmaktadır. Bu nedenle de bu bölümde bir Bezier yüzeyinin farklı parametreler yardımıyla gerinim enerjilerini hesaplayarak yüzey gerilmesinde dayanıklılık için nasıl bir katkı sağladığına örnekler verilmiştir (Brama, 2018).

Tanım 4.23. $X: U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ regüler yüzeyi olmak üzere M yüzeyinin gerinim enerjisi \mathbb{W}

$$\mathbb{W} = \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} (k_1^2 + k_2^2) \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (4.119)$$

şeklinde tanımlanır. Burada k_1 ve k_2 yüzeyin asli eğrilikleri, E , F , G ise birinci temel form katsayılarıdır (Timoshenko ve Goodier, 1951).

(2.24) ve (2.25) eşitlikleri yardımıyla

$$k_1^2 + k_2^2 = 4H^2 - 2K$$

olmak üzere

$$dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

yüzeyin alan elamanı olarak da verildiğinden yüzeyin gerinim enerjisi

$$\mathbb{W} = \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} (4H^2 - 2K) dA \quad (4.120)$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 4.24. $P: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ olmak üzere M yüzeyi (3.26) parametrelendirmesi ile verilen 2×2 tipinde bir Bezier yüzeyi olsun. Yüzeyin kontrol noktaları P_{ij} , $i, j = 0,1,2$ olmak üzere kontrol noktaları matrisi

$$\begin{aligned} \text{CP} &= \begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} \\ | & | & | & | & | & | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,8 & 0,8 & 0,8 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0,8 & 1 & 0 & 0,2 & 1 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ile verilsin. Bu takdirde 2×2 tipindeki Bezier yüzeyinin $P(0,1,0,1)$ noktasındaki gerinim enerjisi aşağıdaki gibi hesaplanır.

(3.26) parametrelendirmesi yardımıyla Bezier yüzeyi

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 P_{i,j} B_{i,2}(u) B_{j,2}(v)$$

olmak üzere $u = v = 0,1$ için

$$P(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,04402 \\ 0,06382 \\ 0,06876 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca bu kontrol noktaları için yüzeyin grafiği Şekil 4.10'da verilmiştir.

Böylece yüzeyin birinci kısmi türevleri alınır

$$P^{10}(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 2(P_{i+1,j} - P_{i,j}) B_{i,1}(u) B_{j,2}(v)$$

$$P^{01}(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 2(P_{i,j+1} - P_{i,j}) B_{i,2}(u) B_{j,1}(v)$$

olup aynı noktadaki değerleri

$$P^{10}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,4804 \\ 0,1764 \\ 0,2912 \end{pmatrix}, P^{01}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,0004 \\ 0,6604 \\ 0,2912 \end{pmatrix}$$

ve bu noktadaki birim normal vektörü

$$N(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} -0,3766 \\ -0,3735 \\ 0,8476 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca ikinci kısmi türevleri

$$P^{20}(u, v) = \sum_{j=0}^2 2(P_{0,j} - 2P_{1,j} + P_{2,j})B_{j,2}(v)$$

$$P^{02}(u, v) = \sum_{i=0}^2 2(P_{i,0} - 2P_{i,1} + P_{i,2})B_{i,2}(u)$$

$$P^{11}(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 4(P_{i+1,j+1} - P_{i,j+1} - P_{i+1,j} + P_{i,j})B_{i,1}(u)B_{j,1}(v)$$

şeklinde olup buradan değerleri de

$$P^{20}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,804 \\ -0,436 \\ -0,328 \end{pmatrix}, P^{02}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,004 \\ 0,444 \\ -0,328 \end{pmatrix}, P^{11}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,008 \\ 1,608 \\ -0,656 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece (3.33) ve (3.34) eşitliklerinden birinci ve ikinci temel form matrisleri

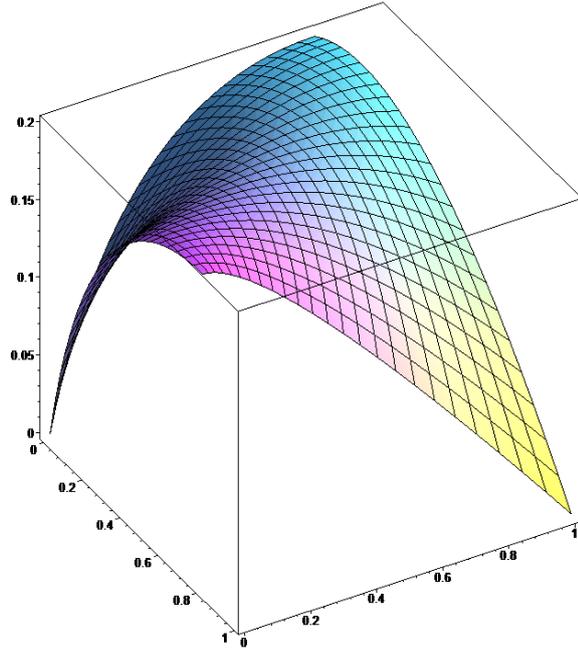
$$\mathcal{F}_I(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,3466 & 0,2014 \\ 0,2014 & 0,5209 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{II}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} -0,4180 & -1,1597 \\ -1,1597 & -0,4454 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece Sonuç 2.17 ve Teorem 3.15 yardımıyla yüzeyin bu noktalardaki Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla $K = -8,2773$ ve $H = -0,7088$ olup (4.120) eşitliğinden yüzeyin gerinim enerjisi

$$\mathbb{W} = 6,3672$$

olarak bulunur.



Şekil 4.10. 2×2 tipinde Bezier yüzeyi

Örnek 4.25. $P: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ olmak üzere M yüzeyi (3.26) parametrelendirmesi ile verilen 3×3 tipinde bir Bezier yüzeyi olsun. Yüzeyin kontrol noktaları P_{ij} , $i, j = 0,1,2,3$ olmak üzere kontrol noktaları matrisi

$$\begin{aligned}
 CP &= \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | & | & \cdots & | & | & \cdots & | \\ P_{0,0} & P_{0,1} & \cdots & P_{1,0} & P_{1,1} & \cdots & P_{3,0} & P_{3,1} & \cdots & P_{3,3} \\ | & | & \cdots & | & | & \cdots & | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 1 & 0 & 0,2 & 0,8 & 1 & 0 & 0,2 & 0,8 & 1 & 0 & 0,2 & 0,8 & 1 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ile verilsin. Bu takdirde 3×3 tipindeki Bezier yüzeyinin $P(0,1,0,1)$ noktasındaki gerinim enerjisi aşağıdaki gibi hesaplanır.

(3.26) parametrelendirmesi yardımıyla Bezier yüzeyi

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{i,j} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v)$$

olmak üzere $u = v = 0,1$ için

$$P(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,0712 \\ 0,0712 \\ 0,0934 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca bu kontrol noktaları için yüzeyin grafiği Şekil 4.11’de verilmiştir.

Böylece yüzeyin birinci kısmi türevleri alınır

$$P^{10}(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 3(P_{i+1,j} - P_{i,j}) B_{i,2}(u) B_{j,3}(v)$$

$$P^{01}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^2 3(P_{i,j+1} - P_{i,j}) B_{i,3}(u) B_{j,2}(v)$$

olup aynı noktadaki değerleri

$$P^{10}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,8160 \\ 0 \\ 0,3504 \end{pmatrix}, P^{01}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8160 \\ 0,3504 \end{pmatrix}$$

ve bu noktadaki birim normal vektörü

$$N(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} -0,3670 \\ -0,3670 \\ 0,8547 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca ikinci kısmi türevleri

$$P^{20}(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^3 6(P_{i+2,j} - 2P_{i+1,j} + P_{i,j}) B_{i,1}(u) B_{j,3}(v)$$

$$P^{02}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^1 6(P_{i,j+2} - 2P_{i,j+1} + P_{i,j}) B_{i,3}(u) B_{j,1}(v)$$

$$P^{11}(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 9(P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j} - P_{i,j+1} + P_{i,j}) B_{i,3}(u) B_{j,1}(v)$$

şeklinde olup buradan değerleri de

$$P^{20}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 1,9200 \\ 0 \\ -0,8760 \end{pmatrix}, P^{02}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,9200 \\ -0,8760 \end{pmatrix},$$

$$P^{11}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,1520 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece (3.33) ve (3.34) eşitliklerinden birinci ve ikinci temel form matrisleri

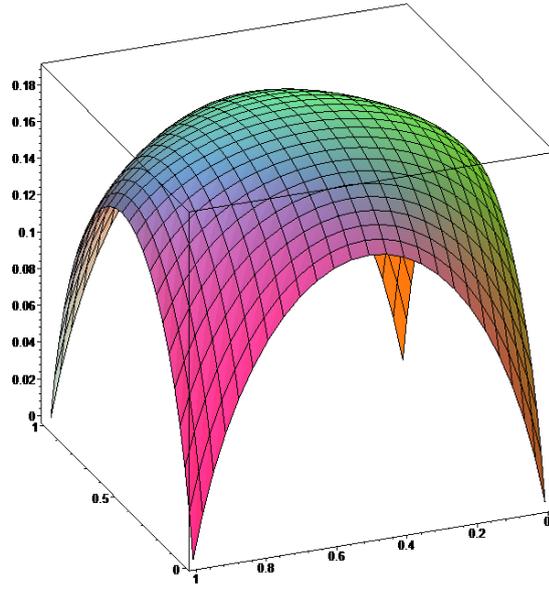
$$\mathcal{F}_I(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 0,7886 & 0,1228 \\ 0,1228 & 0,7886 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{II}(0,1,0,1) = \begin{pmatrix} -1,4535 & -0,9847 \\ -0,9847 & -1,4535 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece Sonuç 2.17 ve Teorem 3.15 yardımıyla yüzeyin bu noktalardaki Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla $K = 1,8833$ ve $H = -1,6895$ olup (4.120) eşitliğinden yüzeyin gerinim enerjisi

$$\mathbb{W}(0,1,0,1) = 5,9603$$

olarak bulunur (Brama, 2018).



Şekil 4.11. 3×3 tipinde Bezier yüzeyi

Açıklama 4.26. Genel olarak bir kontrol noktaları matrisi ele alınırsa $0 < a < 0,5$ olmak üzere 2×2 ve 3×3 tipindeki Bezier yüzeyleri için kontrol noktaları matrisleri sırasıyla

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & a & a & 1-a & 1-a & 1 \\ 0 & a & 1-a & 0 & 1-a & 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & a & a & a & a & a & a & 0 \end{pmatrix} \quad (4.121)$$

ve

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & a & a & 1-a & 1-a & 1-a & 1-a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1-a & 1 & 0 & a & 1-a & 1 & 0 & a & 1-a & 1 & 0 & a & 1-a & 1 \\ 0 & a & a & 0 & a & a & a & a & a & a & a & a & 0 & a & a & 0 \end{pmatrix} \quad (4.122)$$

eşitlikleri ile verilir. Burada a parametresi Bezier yüzeyinin şeklini belirlemektedir.

Tanım 4.27. $P: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{E}^3$, Bezier yüzeyi ve $\mathbb{W}(u, v)$ gerinim enerjisi olmak üzere gerinim enerjisi yüzeyi

$$Q(u, v) = P(u, v) + \frac{1}{\omega} \mathbb{W}(u, v)N(u, v): (0,1) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{E}^3 \quad (4.123)$$

parametrelendirmesi ile verilir. Burada N , Bezier yüzeyinin birim normalidir. Ayrıca $\frac{1}{\omega}$ çarpanı gerinim enerjisini ölçeklendirmek için kullanılır ve çizimlenir yorumlanmasını kolaylaştıracak şekilde seçilir (Brama, 2018).

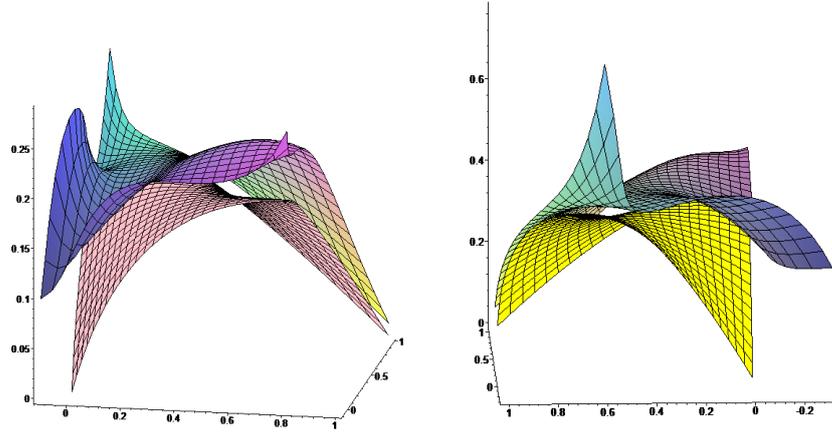
Uç noktalarda sınır eğrileri oluşturulurken birim normal vektör tanımlı olmadığından gerinim enerjisini hesaplamak mümkün değildir. Bu nedenle yüzey parametrelendirmesi açık aralıklar üzerinden tanımlanmıştır.

2×2 tipindeki Bezier yüzeyi için $\omega = 10$ değerine karşılık a parametresi ve yüzey üzerindeki nokta seçimlerine bağlı olarak (uç noktalara yakın ve ortada) yüzeyin gerinim enerjileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.1. 2×2 tipindeki Bezier yüzeyinin gerinim enerjileri

$P(u, v)$	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$
$P(0,1,0,1)$	5,4073	6,3672	5,1640	3,8714
$P(0,5,0,5)$	0,0277	0,1239	0,3141	0,6582
$P(0,9,0,5)$	0,0027	0,0180	0,0848	0,5031

Bununla birlikte Çizelge 4.1 de verilen değerlerle bir Bezier yüzeyi ve gerinim enerjisi yüzeyinin grafikleri de aşağıdaki gibi verilebilir (Şekil 4.12).



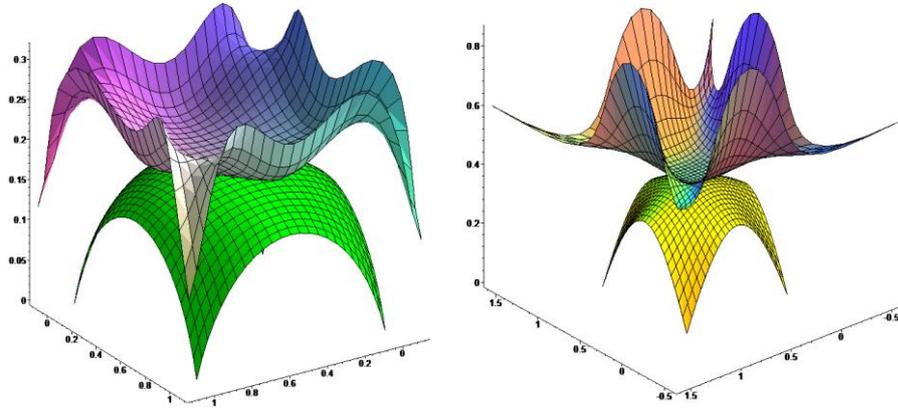
Şekil 4.12. $a = 0,2$ ve $a = 0,4$ için 2×2 tipinde Bezier ve gerinim enerjisi yüzeyi

Benzer şekilde 3×3 tipindeki Bezier yüzeyi için de $\omega = 10$ değerine karşılık a parametresi ve yüzey üzerindeki nokta seçimlerine bağlı olarak (uç noktalara yakın ve ortada) yüzeyin gerinim enerjileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir (Brama, 2018).

Çizelge 4.2. 3×3 tipindeki Bezier yüzeyinin gerinim enerjileri

$P(u, v)$	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$
$P(0,1, 0,1)$	0,3362	0,2980	0,1844	0,1528
$P(0,5, 0,5)$	0,0012	0,0062	0,0184	0,0444
$P(0,9, 0,5)$	0,0451	0,0534	0,0861	0,2292

Bununla birlikte Çizelge 4.2 de verilen değerlerle bir Bezier yüzeyi ve gerinim enerjisi yüzeyinin grafikleri de aşağıdaki gibi verilebilir (Şekil 4.13).



Şekil 4.13. $a = 0,2$ ve $a = 0,4$ için 3×3 tipinde Bezier ve gerinim enerjisi yüzeyi

Şekil 4.12-4.13 de 2×2 ve 3×3 tipindeki Bezier yüzeylerinin a parametre değerlerine bağlı olarak gerinim enerjisi yüzeylerinin grafikleri verilmiştir. Gerinim enerjisi $W \geq 0$ olduğundan gerinim enerjisi yüzeyinin teğet düzleme göre Bezier yüzeyinin üzerinde olması ve $W = 0$ olması durumunda da iki yüzeyin bu noktalarda birbirine teğet olması gerekmektedir. Gerinim enerjisi yüzeylerinin renklendirilmesine bakılırsa koyu olan kısımlarda düşük gerinim enerjisinden açık renkli kısımlara doğru yüksek gerinim enerjisine geçmektedir. Bezier yüzeyi üzerinde ise gerinim enerjisi tek renk olarak karşımıza çıkmaktadır. Burada a nın küçük değerleri için yüzeyin merkezi neredeyse orta noktadaki enerjiyi verir. Fakat a değerleri arttıkça yüzey şekli daha kavisli hale gelerek gerinim enerjisi de yüzeyin merkezinde artar.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında Öklid uzaylarında Bezier eğrileri ele alınmıştır. Bezier eğrileri matematiksel modelleme ve geometrik tasarım konusunda oldukça kullanılan önemli eğrilerdir. E. Erkan tarafından 2019 da yapılan doktora tezi “Öklid Düzleminde ve Öklid Uzayında Bezier Eğrileri” kaynak olarak ele alınmış olup Bezier eğrileri için farklı bir metod uygulanmıştır (Erkan, 2019). Öklid düzleminde Bezier eğrileri ile 3 ve 4 boyutlu Öklid uzayında Bezier eğrileri ele alınmış ve bu eğrilerin eğrilikleri ile ilgili genel sınıflandırmalar verilmiştir. Bu sınıflandırma yardımıyla n . dereceden bir Bezier eğrisi için Frenet elemanlarını formüllerini elde etmek mümkündür.

Bununla birlikte 3-boyutlu Öklid uzayında verilen Bezier yüzeyleri için gerinim enerjileri ele alınmış ve örneklerle birlikte bunlarla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bir yüzeyin gerinimi bir yapıyı oluştururken mühendislik alanında oldukça önemlidir. Bezier yüzeyleri özellikle araba, uçak vb. araçların yüzey modellemelerinde kullanılan yüzeyler olduğundan bunların üzerindeki gerinimi Bezier yüzeyleri yardımıyla hesaplamak kolaylık sağlar.

Bu tez çalışması sonucunda hem rasyonel Bezier eğrileri hem de rasyonel Bezier yüzeyleri için eğriliklerin hesaplanması ve gerinim enerjilerinin bulunması bir açık problem olarak düşünülebilir.

KAYNAKLAR

- Anand, V. B. (1992). *Computer graphics and geometric modeling for engineers* (1st ed.). John Wiley and Sons. Inc., New York.
- Ayar, A. (2019). *Bezier benzeri eğrilerin spiral olma şartları ve geçiş eğrileri* [Doktora tezi, Ege Üniversitesi], Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Bezier, P. (1971). Example of an existing system in the motor industry: the Unisurf system. *Proceedings of the Royal Society of London*, 321(1545), 207-218.
- Bonneau, G.P. (1993). *Variational design of rational Bezier curves and surfaces* [PhD Thesis, University of Kaiserslautern], University of Kaiserslautern Department of Computer Science.
- Brama, E. (2018). *Strain energy of Bezier surfaces* [Student thesis, Linköping University], Linköping University Department of Mathematics.
- Chen, B.Y. (1973). *Geometry of submanifolds*. Dekker, New York.
- David, S. (2006). *Curves and surfaces for computer graphics*. Springer Science+Business Media. Inc., USA. doi.org/10.1007/0-387-28452-4.
- De Casteljaou, P. (1986). *Mathematiques et CAO Tome 2: Formes a poles*. Hermes.
- Do Carmo, M.P. (2016). *Differential geometry of curves and surfaces* (2nd ed.). Mineola, Dover Publications, Inc., New York.
- Erkan, E. & Yüce, S. (2020). Some notes on geometry of Bezier curves in Euclidean 4-space. *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences*, 5(3), 93-101.
- Erkan, E. (2019). *Öklid düzleminde ve Öklid uzayında Bezier eğrileri* [Doktora tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi], Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Erkan, E. & Yüce, S. (2018). Serret-Frenet frame and curvatures of Bezier curves. *Mathematics*, 6(321), 1-20.
- Farin, G. (2002). *Curves and surfaces for CAGD: A Practical Guide*, Academic Press.
- Farin, G., Hoschek, J. & Kim, M.S. (2002). *The handbook of computer aided geometric design*. Elsevier.
- Farin, G. & Hansford, D. (2019). *The essentials of CAGD*. A.K. Peters Ltd., US.
- Forrest, A.R. (1968). *Curves and surfaces for computer aided design* [PhD Thesis, University of Cambridge], University of Cambridge Department of Mathematics.
- Gluck, H. (1966). Higher curvatures of curves in Euclidean space. *Am. Math. Monthly*, 73, 699-704.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel Geometri*. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (2002). *Diferensiyel Geometri II. Cilt*. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- İncesu, M. & Gürsoy, O. (2004, 23-26 Ağustos). *Bezier eğrilerinde esas formlar ve eğrilikler*. XVII Ulusal Matematik Sempozyumu, Bolu.
- İncesu, M. (2003). *Bezier eğrileri, Bezier yüzeyleri ve Matlab ile sayısal algoritmalar* [Yüksek lisans tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi], Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Kaplan, C.S. & Mann, S. (2006). *Introduction to computer graphics*. Lecture notes CS 488/688 of University of Waterloo.
- Kühnel, W. (2015). *Differential geometry: curves, surfaces, manifolds*. American Mathematical Society.
- Laurent, P.J. & Sablonniere, P. (2001). Pierre Beziér: An engineer and a mathematician. *Computer Aided Geometric Design*, 18, 609-617.

- Levent, A. (2013). *Bezier yüzeyleri ve kıvrımlı yüzeyler* [Yüksek lisans tezi, İnönü Üniversitesi], İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Marsh, D. (2005). *Applied geometry for computer graphics and CAD* (2nd ed.). Springer-Verlag, London.
- Mello, L.F. (2003). Mean directionally curved lines on surfaces immersed in \mathbb{R}^4 . *Publ. Math.*, 47, 415-440.
- Mello, L.F. (2009). Orthogonal asymptotic lines on surfaces immersed in \mathbb{R}^4 . *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 39(5), 1597-1612.
- Mortenson, M. E. (1999). *Mathematics for Computer Graphics Applications*. Industrial Press Inc.
- O'Neill, B. (1997). *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, USA.
- Rogers, D. F. (2002). Pierre Etienne Beziér (1910-1999) in memoriam. *Computer Aided-Design*, 34, 489-491.
- Sederberg, T.W. (2017). *Computer aided geometric design course notes*. Brigham Young University Publication. <https://scholarsarchive.byu.edu/facpub/1>.
- Rabut, C. (2002). On Pierre Beziér's life and motivations. *Computer Aided-Design*, 34, 493-510.
- Timoshenko, S. & Goodier, J.N. (1951). *Theory of Elasticity* (2nd ed.). McGraw-Hill, New York.
- Yılmaz, A. (2009). *Bezier eğrileri ve Bezier yüzeyleri* [Yüksek lisans tezi, Akdeniz Üniversitesi], Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Yılmaz Luzum, C. (2018). \mathbb{R}^3 deki yüzey eğrilerinin Bezier eğrileri ve Matlab uygulamaları [Yüksek lisans tezi, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi], Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuğçe DİRİM
Doğum Yeri ve Tarihi : Bursa, 19/12/1994
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Biga Atatürk Anadolu Lisesi
Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar :

İletişim (e-posta) : tugcedirim1@gmail.com

Yayımları :

Dirim, T. & Bulca, B. (2022, May 6-8). *Conchoidal surfaces in Euclidean 3-spaces satisfying $\Delta x_i = \lambda_i x_i$* . Istanbul International Modern Scientific Research Congress III, İstanbul.