T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİHARMONİK İMERSİYONLARIN BİR KARAKTERİZASYONU

YILMAZ AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA 2008

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİHARMONİK İMERSİYONLARIN BİR KARAKTERİZASYONU

YILMAZ AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008

Bu tez ……………… tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Kadri ARSLAN (Danışman)	....	……………………
Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN	....	……………………
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ	....	……………………

ÖZET

Bu çalışmada IE^n deki biharmonik imersiyonların bir karakterizasyonu ele alınmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde IE^n deki biharmonik ve biminimal eğriler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde biharmonik ve λ-biminimal hiperyüzeyler ele alınmıştır.

Beşinci bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Vranceanu yüzeyleri ele alınmış olup bu yüzeylerin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. İkinci kısımda tensör çarpım yüzeyleri ele alınmıştır. Düzlemsel bir eğri ile bir çemberin tensör çarpım yüzeyi incelenmiş ve biharmonik olması dutumunda gerek ve yeter koşul verilmiştir.

A CHARACTERIZATION OF BIHARMONIC IMERSIONS

ABSTRACT

In this thesis we give a charactirization of biharmonic immersions.

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, some basic definitions and notions which will be used in other chapters are given.

In the third chapter, biharmonic and biminimal curves in IE^n are invastigated.

In the fourth chapter, biharmonic and λ-biminimal hypersurfaces are considered.

In the fifth chapter, some orginal results related with Vrenceannu surface and tensor product of two plane curves are obtained.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$M, \widetilde{M}$	Manifold
$g, \widetilde{g}$	Metrik tensör
C^{∞}	Diferansiyellenebilme
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$C^{\infty}(M, IR)$	M den IR ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
D	Nornal koneksiyon
∇	M üzerinde afin koneksiyon
$\widetilde{\nabla}$	$\widetilde{M}$ üzerinde afin koneksiyon
$\overline{\nabla}$	Van-der Waerden –Bortolotti koneksiyonu
$[\ ,]$	Lie parantez operatörü
h	İkinci temel form
f	İmmersiyon
A_{ξ}	Şekil operatörü
NM	M nin normal demeti
T_pM	p noktasında teğet uzay
$T^{\perp}M$	p noktasında normal uzay
$\lVert H \rVert = \alpha$	Ortalama eğrilik
H	Ortalama eğrilik vektörü
∂	Kısmi türev
Δ	Laplas operatörü
γ	Eğri
$\lVert\ ,\rVert$	Norm
κ	Eğrinin 1. eğriliği
τ	Eğrinin burulması
R	M nin eğrilik tensörü
$\widetilde{R}$	$\widetilde{M}$ nin eğrilik tensörü
R^{D}	NM üzerindeki eğrilik tensörü

1.GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı biharmonik ve biminimal imersiyonlarını incelemektir

Bu tez giriş hariç olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır

İkinci bölüm ilerideki bölümlerde kullanılan temel tanım ve kavramları içermektedir. Diğer bölümler ise kısmen orjinal sonuçlar içermektdir

İkinci bölümde bir Riemann manifoldu kavramı tanıtılarak bu tür manifoldlar üzerindeki koneksiyonlar tanımlanmştır. Ayrıca bir M Riemann manifoldunun eğrilik tensörü tanımlanarak bunun özellikleri verilmiştir. Bundan başka bir M manifoldu için Gauss ve Weingarten denklemleri verilerek M nin ikinci temel formu ve ortalama eğrilik vektörü ile ilgili özellikler tanımlanmıştır. İkinci kısımda IE^n de eğrilerin genel özellikleri ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde biharmonik ve biminimal eğriler ele alınmıştır. Ayrıca Euler-Lagrange denklemleri, Riemann manifoldu üzerinde biminimal eğriler ile IE^n deki biminimal eğriler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde biminimal hiperyüzeyler ele alınmıştır. Bu bölümde biharmonik hiperyüzeyler ile ilgili bilinen sonuçların yanında λ-biharmonik hiper yüzeyleri ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise biminimal yüzeyler ele alınmıştır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Vranceannu yüzeyleri ve ikinci kısımda Tensör çarpım yüzeyleri incelenmiş olup bu tür yüzeylerin biharmonik olması durumunda gerek ve yeter şartlar elde dilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

2.1 Manifoldlar

Tanım 2.1.1: M n-boyutlu diferansiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den IR ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere, M üzerinde $g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, IR)$ şeklinde 2-lineer, simetrik ve pozitif tanımlı bir metrik tanımlı ise M ye bir *Riemann manifoldu* denir. Burada g ye *Riemann metriği* (veya metrik tensör) adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2.1.2: M diferansiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) ; \quad \nabla (X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall$ f, g $\in C^\infty(M, IR)$, $\forall$ X, Y, Z $\in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii) $\nabla_{fX + gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$

iii) $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$

lineerlik özeliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir *Afin Koneksiyon* adı verilir Burada ∇_X operatörüne *X e göre kovaryant türev* denir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.1.3: M bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir Afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall$ X, Y$\in \chi(M)$ için, ∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (sıfır torsiyon)

ii) $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ (koneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu* (veya M nin Levi-Civita Koneksiyonu) adı verilir. Bu koneksiyon kısaca M deki Riemann Koneksiyonu olarak adlandırılır (Chen 1973 ve Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.1.4: M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve n+d–boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere f: M $\to$ $\widetilde{M}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her p $\in$ M için df_p: $T_p(M) \to T_{f(p)}(\widetilde{M})$ dönüşümü birebir ise f ye bir *imersiyon (daldırma)* denir. Ayrıca, f: M $\to$ $\widetilde{M}$ bir homeomorfizm ise f ye bir *imbedding (gömme)* denir. Eğer $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ ve f: M $\to$ $\widetilde{M}$ dönüşümü bir gömme ise M ye $\widetilde{M}$ nin n-boyutlu bir *imersd* (gömülen) *altmanifoldu* adı verilir. Bununla beraber f bir imersiyon olmak üzere $\forall$ X, Y $\in$ T_pM için,

$$\tilde{g}\,(df_p(X), df_p(Y))_{f(p)} = (X,Y)_p$$

şartını sağlıyorsa f ye bir *izometrik imersiyon* adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2.1.5: $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold ve $\widetilde{\nabla}$ da $\widetilde{M}$ de kovaryant türev olsun. Böylece her X, Y $\in$ $\chi(M)$ ve her p$\in$M için $(\widetilde{\nabla}_X Y)_p$ tanımlıdır. Ayrıca $(\nabla_X Y)_p \in T_pM$ ve $h_p(X, Y) \in T_p^{\perp}M$ olmak üzere,

$$(\widetilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + h_p(X, Y) \qquad (2.1.1)$$

biçiminde tanımlanan denkleme *Gauss Denklemi* adı verilir. Burada h, M nin ikinci temel formudur. Eğer h = 0 ise M ye *total (toplam) geodezik* denir (Chen 1973).

Önerme 2.1.1: $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold ve g ile $\tilde{g}$ de sırasıyla M ve $\widetilde{M}$ üzerinde tanımlı metrikler olsun. Böylece h(X, Y) M üzerinde bir normal vektör alanı olup simetrik ve 2-lineerdir. Ayrıca ∇ da M üzerinde indirgenmiş $g = f^*(\tilde{g})$ metriğinin bir Riemann koneksiyonudur (Chen 1973).

Tanım 2.1.6: $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold olmak üzere M ye normal bir birim normal vektör alanı ξ olsun. Böylece $\tilde{\nabla}_X \xi$ nın teğet bileşeni $-A_\xi(X)$ ve normal bileşeni $D_X\xi$ olmak üzere;

$$(\tilde{\nabla}_X \xi)_X = -(A_\xi(X))_X + (D_X\xi)_X \qquad (2.1.2)$$

şeklinde *Weingarten denklemi* tanımlanır. Burada A_ξ ya şekil operatörü, D ye de M nin NM normal demetindeki (normal) koneksiyonu denir (Chen 1973).

Önerme 2.1.2: i) $A_\xi(X)$, ξ ve X üzerinde 2-lineerdir.

ii) M nin her bir ξ normal vektörü ve X, Y tanjant vektörleri için

$$g(A_\xi(X), Y) = \tilde{g}\,(h(X,Y), \xi\,) \qquad (2.1.3)$$

dır (Chen 1973).

Önerme 2.1.2: $T^{\perp}M$ üzerinde indirgenmiş metrikle $M \subset \widetilde{M}$ nin NM normal demetinde D : TM x NM → NM

$$(X, \xi) \rightarrow D(X, \xi) = D_X\xi$$

biçiminde tanımlanan D dönüşümü bir metrik koneksiyondur (Chen 1973).

İkinci temel form h nın türevi $\overline{\nabla}_X h$;

$$(\overline{\nabla}_X h\,)(Y,Z) = D_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y, \nabla_X Z) \qquad (2.1.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overline{\nabla}$ ya M nin *Van-der Waerden-Bortolotti koneksiyonu* adı verilir. Eğer M = IE^n için $\overline{\nabla}h$ = 0 ise M nin ikinci temel formu paraleldir (veya 1-paraleldir) denir.

Böylece M nin NM normal demetinde tanımlanan $\overline{\nabla}$ normal koneksiyonu;

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z)) = (\overline{\nabla}_Z h\,)(X,Y) \qquad (2.1.5)$$

şeklinde *Codazzi eşitliğini* sağlar (Chen 1973).

$\overline{\nabla}h$ nın kovaryant türevi $\overline{\nabla}\overline{\nabla}h$ ya M nin üçüncü temel formu adı verilir ve ∀X, Y, Z, W ∈ χ(M) için

$$(\overline{\nabla}_W \overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = D_W((\overline{\nabla}_X h)(Y, Z)) - (\overline{\nabla}_X h)(\nabla_W Y, Z) \qquad (2.1.6)$$

$$- (\overline{\nabla}_X h)(Y, \nabla_W Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(\nabla_W X, Z)$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $\overline{\nabla}\overline{\nabla}h = 0$ ise M nin üçüncü temel formu paraleldir (Lumiste ve Dillen, 1990) veya M ye 2-paraleldir denir (Lumiste ve Arslan 2000).

Tanım 2.1.7: M bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann konneksyonu olsun. Böylece;

α: I ⊆ R → M eğrisi için,

$$\nabla_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = 0 \qquad (2.1.7)$$

eşitliği sağlanıyorsa α ya M de bir *geodezik eğri* ve $\forall$ X $\in$ $\chi(M)$ için $\alpha(0) = p$ ve $\alpha'(0) = X_p$ olacak şekilde tanımlanan , $\alpha: \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\rightarrow$ M geodeziğine (p, X_p) nin belirlediği geodezik adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2.1.8: $\alpha: I \subseteq R \rightarrow M$ eğrisi, $\forall$ s $\in$ I için $\alpha'(s) \neq 0$ şartını sağlıyorsa α ya bir *regüler eğri* denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.9: M bir Riemann manifoldu ve ξ bir normal vektör alanı olsun. Eğer M ye teğet herhangi bir X vektör alanı için $D_X\xi = 0$ ise ξ ya *paralel normal vektör alanı* denir (Chen 1973).

Tanım 2.1.10: M, $\widetilde{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu ve $e_1,e_2,\ldots,e_n$ de T_pM nin p $\in$ M noktasındaki dik çatı alanları olsun. Böylece

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \tag{2.1.8}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{m} h_{ij}^{\alpha} e_{\alpha}$$

biçiminde tanımlanan H $\in$ N_pM vektörüne M nin *ortalama eğrilik vektörü* adı verilir. Eğer H = 0 ise M altmanifolduna *minimal* dir denir. Ayrıca $\|H\|$ ya M nin *ortalama eğriliği* adı verilir (Chen 1973).

M üzerinde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ teğet ve $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_m$ normal vektörleri olacak şekilde, $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_m \}$ M de ortonormal lokal çatı alanları olsun. Böylece ω_i^j koneksiyon formları aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} = \sum \omega_i^j e_j \quad ; \quad \omega_i^j = -\omega_j^i \; ;1 \le i, j \le m \tag{2.1.9}$$

Yukarıdaki (2.1.9) denklemi yardımıyla aşağıdaki yapı denklemleri elde edilir.

Önerme 2.1.3: M $\subset$ IE^m altmanifoldu için

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n} \omega_j^k(e_i)e_k + \sum_{\alpha=n+1}^{m} \omega_j^{\alpha}(e_i)e_{\alpha}\,, \tag{2.1.10}$$

$$D_{e_i} e_\alpha = \sum_{\beta=n+1}^{m} \omega_\alpha^\beta (e_i) e_\beta \, , \tag{2.1.11}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_\alpha = -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^\alpha e_j + \sum_{\beta=n+1}^{m} \omega_\alpha^\beta (e_i) e_\beta \, , \tag{2.1.12}$$

dır (Chen 1973).

Önerme 2.1. 4 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.1: $M \subset IE^m$ altmanifoldu için

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n} h_{ij}^k e_k + \sum_{\alpha=n+1}^{m} h_{ij}^\alpha e_\alpha \tag{2.1.13}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_\alpha = -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^\alpha e_j + \sum_{\beta=n+1}^{m} h_{i\alpha}^\beta e_\beta \tag{2.1.14}$$

dır.

M üzerinde teğet ve normal vektörler sırasıyla $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ve $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_{n+d}$ olmak üzere, $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_{n+d} \}$ M nin ortonormal lokal çatısı olsun. Vektör değerli bir V fonksiyonu üzerinde Δ Laplas operatörü,

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \left[\widetilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V - \widetilde{\nabla}_{e_i} \widetilde{\nabla}_{e_i} V \right] \tag{2.1.15}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\Delta H = 0$ şartını sağlıyorsa M ye *harmonik ortalama eğriliklidir* denir.

Tanım 2.1.11: M, N nin bir altmanifoldu olsun. böylece N nin *eğrilik tensörü* $\tilde{R}$ olmak üzere $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{2.1.16}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca M nin eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$\widetilde{R}(X,Y;Z,W) = R(X,Y;Z,W) + \langle h(X,Z), h(Y,W) \rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z) \rangle \tag{2.1.17}$$

dir. Bu denklem *Gauss denklemi* olarak adlandırılır. Bununla beraber

$\widetilde{R}(X,Y)Z$ nin normal bileşeni,

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) \tag{2.1.18}$$

olup buna *Codazzi denklemi* adı verilir.

3. BİHARMONİK VE BİMİNİMAL EĞRİLER

3.0. Giriş

Biharmonik fonksiyonların elastik ve hidrodinamikler için önemli rolü vardır. 1964'te Eels ve Sampson Riemann manifoldları arasında biharmonik fonksiyon ve harmonik dönüşümleri genelleyen biharmonik dönüşüm fikrini üretmişlerdir (Eels ve Sampson, 1964).

3.1: Euler-Lagrange Denklemi

(M, g) ve *(N,* $\tilde{g}$*)* sırasıyla n ve m–boyutlu Riemann manifoldları ve ϕ*: (M, g)* $\rightarrow$ *(N,* $\tilde{g}$*)* bir türevlenebilir dönüşümü olsun.

Eğer ϕ dönüşümü

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\phi)|^2\, dv \qquad (3.1.1)$$

bienerji fonksiyonunun tüm değişimleri için bir kritik nokta oluyorsa ϕ ye *biharmonik dönüşüm* adı verilir. Burada

$$\tau(\phi) = iz(\nabla d\phi) \qquad (3.1.2)$$

tensiyon (tension) alanıdır.

Eğer ϕ dönüşümü

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |d(\phi)|^2\, dv \qquad (3.1.3)$$

Drichlet enerji fonksiyonunun için bir kritik nokta oluyorsa ϕ ye *harmonik dönüşüm* adı verilir (Loubeau ve Montaldo, 2007).

Tanım 3.1.1: *(M, g)* ve *(N,* $\tilde{g}$*)* sırasıyla n ve m–boyutlu Riemann manifoldları ve ϕ*: (M, g)* $\rightarrow$ *(N,* $\tilde{g}$*)* dönüşümü bir imersiyon (m < n) olsun. ϕ *nin değişimi*

$$\phi_t : (-\varepsilon, \varepsilon)\times M \rightarrow N,\ \phi_t = \phi \qquad (3.1.4)$$

olmak üzere

$$V = \left.\frac{d\phi_t}{dt}\right|_{t=0} \tag{3.1.5}$$

vektör alanı $\phi(M)$ ye normal olacak şekilde tanımlansın. Eğer ϕ_t dönüşümü E_2 nin bir kritik noktası ise; yani

$$\left.\frac{E_2(\phi_t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{3.1.6}$$

ise ϕ ye *biharmonik imersiyon* adı verilir (Loubeau ve Montaldo, 2007).
Gerilme (bitension) alanı ile oluşturulan Euler-Lagrange operatörü (Jiang 1986)

$$\mathrm{J}(\tau(\phi)) = \tau_2(\phi) = -\Delta^{\phi}\tau(\phi) - \mathrm{iz}\,\widetilde{\mathrm{R}}\big(d\phi, \tau(\phi)\big)d\phi \tag{3.1.7}$$

dir. Burada J sembolü ϕ nin Jakobi operatörüdür.
Bununla birlikte

$$\tau_2(\phi) = 0 \tag{3.1.8}$$

eşitliği *biharmonik imersiyon* denklemi olarak adlandırılır (Loubeau ve Montaldo, 2007).

Önerme 3.1.1: *(M, g)* ve *(N, $\widetilde{g}$)* sırasıyla n ve m–boyutlu Riemann manifoldları ve *ϕ: (M, g) $\rightarrow$ (N, $\widetilde{g}$)* dönüşümü bir imersiyon (m < n) olsun. ϕ nin ortalama eğrilik vektör alanı *H* olmak üzere

$$\tau(\phi) = iz(\nabla d\phi) = H \tag{3.1.9}$$

ve

$$\tau_2(\phi) = -\Delta^{\phi} H - \mathrm{iz}\,\widetilde{\mathrm{R}}\big(d\phi, H\big)d\phi \tag{3.1.10}$$

dır (Loubeau ve Montaldo, 2007). Burada $\tilde{\mathrm{R}}$ *, N* nin *eğrilik tensörü* olup $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için (2.1.17) de tanımlanmıştır..

Açıklama 3.1.1:
Eğer $\tau_2(\phi)$ nin normal bileşeni

$$\tau_2(\phi)^{\perp} = 0 \tag{3.1.11}$$

ise ϕ ye biminimal imersiyon adı verilir. Böylece (3.1.10) denklemi yardımıyla ϕ nin biminimal olması için gerek ve yerer şart

$$\left(\Delta^{\phi} H + iz\widetilde{R}(d\phi, H)d\phi\right)^{\perp} = 0 \qquad (3.1.12)$$

olmasıdır (Loubeau ve Montaldo, 2007). Bu nedenle her bir biharmonik imersiyon biminimaldir. Burada $\perp$ normal bileşeni belirtir. .

Tanım 3.1.2: *(M, g)* ve *(N, $\widetilde{g}$)* sırasıyla n ve m–boyutlu Riemann manifoldları ve ϕ*: (M, g)* $\rightarrow$ *(N, $\widetilde{g}$)* bir türevlenebilir dönüşümü olsun. Eğer ϕ dönüşümü

$$E_{2,\lambda}(\phi) = \frac{1}{2}\int_M \left|\tau(\phi)\right|^2 dv + \frac{1}{2}\int_M \left|d(\phi)\right|^2 dv \qquad (3.1.13)$$

şeklinde tanımlanan λ-bienerji fonksiyonunun tüm değişimleri için bir kritik nokta oluyorsa ϕ ye λ-*biharmonik dönüşüm* adı verilir. Böylece

$$\tau_{2,\lambda}(\phi) = \tau_2(\phi) + 2\lambda\, \tau(\phi) = 0 \qquad (3.1.14)$$

eşitliği λ-*biharmonik imersiyon* denklemi olarak adlandırılır. Eğer

$$\tau_{2,\lambda}(\phi)^{\perp} = \tau_2(\phi)^{\perp} + 2\lambda\, \tau(\phi)^{\perp} = 0 \qquad (3.1.15)$$

ise ϕ ye λ-*biminimal imersiyon* adı verilir. Yani bu denklem λ-*biminimal imersiyon* için Euler-Lagrange denklemidir. Burada $\perp$ normal bileşeni belirtir (Loubeau ve Montaldo, 2007).

Önerme 3.1.2: *(M, g)* ve *(N, $\widetilde{g}$)* sırasıyla n ve m–boyutlu Riemann manifoldları ve ϕ*: (M, g)* $\rightarrow$ *(N, $\widetilde{g}$)* dönüşümü bir imersiyon (m < n) olsun. ϕ nin ortalama eğrilik vektör alanı *H* olmak üzere ϕ nin λ-*biharmonik* olması için gerek ve yerer şart

$$-\Delta^{\phi} H - \mathrm{iz}\,\widetilde{\mathrm{R}}\left(d\phi, H\right)d\phi + 2\lambda\, H = 0 \qquad (3.1.16)$$

olmasıdır (Loubeau ve Montaldo, 2007)

İspat. (3.1.9) ve (3.1.10) eşitlikleri (3.1.14) de yerine yazılırsa (3.1.16) elde edilir.

3.2 Riemann manifoldu üzerindeki Biminimal Eğriler

Tanım 3.2.1: (M^m, g) Riemann manifoldu üzerinde regüler bir γ:I$\subset$ IR $\rightarrow$ (M,g) eğrisi verilisin. Bu taktirde γ eğrisinin Frenet çatısı $\{F_i\}_{i=1,\dots,m-1}$ olmak üzere bu çatı $\{\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\gamma(\frac{\partial}{\partial t})\}_{i=1,\dots,m-1}$ m- linin bir dikleştirilmesidir. Yani;

$$F_1 = d\gamma(\frac{\partial}{\partial t}) \tag{3.2.1}$$

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}} F_1 = k_1 F_2 \tag{3.2.2}$$

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}} F_i = k_{i-1} F_{i-1} + k_i F_{i+1} \quad i = 2 \dots m-1 \tag{3.2.3}$$

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}} F_m = -k_{m-1} F_{m-1}. \tag{3.2.4}$$

dir. Burada $\{k_1 = k > 0,\ k_2 = \tau,\ k_3, \dots,\ k_{m-1}\}$ γ'nın eğrilikleri olup F_1 = T = γ' dır (Loubeau ve Montaldo, 2007).

Önerme 3.2.1: (M^m, g) Riemann manifoldu üzerinde regüler bir γ:I$\subset$ IR $\rightarrow$ (M,g) eğrisi verilisin, γ nın biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + k_1 g(R(F_1, F_2)F_1, F_2) = 0 \tag{3.2.5}$$

$$(k_1^2 k_2)' + k_1 g(R(F_1, F_2)F_1, F_3) = 0 \tag{3.2.6}$$

$$k_1 k_3 + k_1 g(R(F_1, F_2)F_1, F_4) = 0 \tag{3.2.7}$$

$$k_1 g(R(F_1, F_2)F_1, F_j) = 0, \quad j = 5, \dots, n. \tag{3.2.8}$$

olmasıdır. Burada R (M^m, g) nin tensör eğriliği ve $\{F_i\}_{i=1\dots m}$ γ nın Frenet çatısıdır (Loubeau ve Montaldo, 2007).

İspat: Frenet çatısına bağlı olarak γ nın tensiyon (tension) alanı;

$$\tau(\gamma) = iz\nabla d\gamma = \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} = k_1 F_2 \qquad (3.2.9)$$

ve bitensiyon alanı ise

$$\tau_2(\gamma) = -\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} (\tau(\gamma)) + \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} (\tau(\gamma) - R(d\gamma(\tfrac{d}{dt}), \tau(\gamma))d\gamma(\tfrac{d}{dt}) \qquad (3.2.10)$$

$$= - \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} (k_1 F_2) - R(F_1 k_1 F_2)\, F_1$$

$$= - \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} (k_1' F_2 - k_1^2 F_1 + k_1 k_2 F_3) - k_1 R(F_1, F_2)\, F_1$$

$$= -\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} (k_1' F_2 - k_1^2 F_1 + k_1 k_2 F_3) - k_1 R(F_1, F_2)\, F_1$$

$$= -(k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2)\, F_2 + 3k_1 k_1' F_1 - (k_1' k_2 + k_1 k_2)')\, F_3 - k_1 k_3 F_4 - k_1 R(F_1, F_2)\, F_1$$

dir. Böylece γ nın biminimal olması için gerek ve yeter şart $\tau_2(\gamma)$ nin normal bileşenin sıfıra eşit olmasıdır. Buradan (3.1.12) eşitliği yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Ayrıca

$$C = g(R(F_1, F_2)\, F_1, F_2) \qquad (3.2.11)$$

ve

$$(R(F_1, F_2)\, F_1, F_3) = 0 \qquad (3.2.12)$$

alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1:

i) M yüzeyinin Gauss eğriliği G olmak üzere M üzerindeki γ eğrisinin biminimal olması içi gerek ve yeter şart γ nın eğriliği k nin aşağıdaki adi differensiyel denklemi sağlamasıdır:

$$k'' - k^3 + kG - \lambda k = 0. \quad (\text{bazı } \lambda \in IR) \qquad (3.2.13)$$

ii) 3-boyutlu Riemann manifoldu M^3 ün kesitsel eğriliği C olmak üzere M üzerindeki γ eğrisinin λ-biminimal olması içi gerek ve yeter şart γ eğrisinin eğriliği k ve torsiyonu τ nun aşağıdaki denklem sistemi sağlamasıdır:

$$k'' - k^3 - k\tau^2 + kC - \lambda k = 0, \quad \lambda \in IR \qquad (3.2.14)$$

$$k^2 \tau = \text{sabit}. \qquad (3.2.15)$$

(Loubeau ve Montaldo, 2007).

İspat:

i) γ nın iki boyutlu Frenet çatısı sadece T = F_1 ve N = F_2 den oluşuyorsa (3.2.5) denkleminden γ nın biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$k'' - k^3 + k\, g R(T, N)T, N) = 0 \tag{3.2.16}$$

olmasıdır. Buradan;

$$k'' - k^3 + kG - \lambda k = 0 \tag{3.2.17}$$

bulunur.

ii) M^3 üzerinde bir γ eğrisinin Frenet çatısı T = F_1, N = F_2 ve B = F_3 olmak üzere (3.1.15), (3.2.9) ve (3.2.10) yardımıyla γ nın λ-biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \kappa\, g(R(T, N)T, N) - \lambda\kappa = 0 \tag{3.2.18}$$

$$(k^2\tau)' + k^2 g R(T, N)T, B) = 0 \tag{3.2.19}$$

olmasıdır. Burada $k_1 = \kappa$, $k_2 = \tau$ dır. Ayrıca (R(T,N)T, N) = C ve R(T,N)T, B) = 0 olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

(M^2, g) bir Riemann yüzeyi ve $\gamma: I \to (M^2, g)$ türevlenebilir birim hızlı eğri olsun. Böylece γ boyunca M^2 ye teğet çatı alanı {T,N},

$$\gamma'(s) = T$$

$$\nabla_T T = kgN$$

biçiminde tanımlansın. Burada

$$kg = \|\tau_\gamma\| = \|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\| \tag{3.2.20}$$

γ eğrisinin geodezik eğriliğidir. Bu Frenet vektörlerini kullanarak bienerjinin Euler Lagrange denklemi

$$-\nabla_T^3 - R(T, kgN)T = 3\, kgkg'T - (kg'' - kg^3 - kgG)N = 0 \tag{3.2.21}$$

biçimine dönüşür. Burada

$$G = R(T, N, T, N)$$

M^2 nin Gauss eğriliğidir. Böylece γ nın biharmoik olması için gerek ve yeter koşul

$$kg'' - kg^3 - kgG = 0,$$

$$kgkg' = 0,$$

olmasıdır. Eğer $kg \neq 0$ ise yukarıdaki denklemlerin çözümü

$$kg = \text{sabit} \neq 0, \quad kg^2 = G,$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme3.2.2: $\gamma: I \to (M^2, g)$ türevlenebilir geodezik olmayan bir eğri olsun. Eğer γ biharmonik ise γ boyunca M nin Gauss eğriliği pozitif sabittir ve $kg^2 = G$ dir. Eğer Gauss eğriliği pozitif değilse M üzerindeki biharmonik eğri γ M nin bir geodeziğidir (Loubeau ve Montaldo, 2007).

Tanım3.2.2: $\gamma: I \to (M^2, g)$ eğrisi için

$F(\gamma) = \frac{1}{2}\int_I kg^2 \|\dot{\gamma}\|^2 dt$ büküm enerjisinin bir kritik noktası ise γ ya serbest elastik eğri adı verilir.

Langer ve Singer çalışmalarında serbest büküm enerjisinin aşağıdaki differensiyel denklemin (büküm enerjisi için Euler-Lagrange denklemi) çözümleri olduğunu gösterdiler;

$$2kg'' + kg^3 + kgG = 3kg^3 \neq 0$$

Bu nedenle serbest elastik eğri olup aynı zamanda biharmonik özelliğini sağlayan eğriler geodezikdirler (Langer ve Singer 1984).

Teorem 3.2.1. $M \subset E^3$ yüzeyi $\alpha(u) =$ (f(u), 0, g(u)) düzlemsel eğrisinin z-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen X(u,v) = (f(u)cosv, f(u)sinv,g(u)) parametreli bir dönel yüzey olsun. Bu taktirde M yüzeyinin tüm paralelleri biharmoniktir ancak ve ancak ;

i) f fonksiyonu M üzerinde sabittir, ya da

ii) f(u) = c$\sqrt{u}$ ve

$$g(u) = u\sqrt{\frac{4u-c^2}{4u}} - \frac{c^2}{8}\log(8u - 8u\frac{4u-c^2}{4u} - c^2) + c_1$$

dir. Burada c ve c_1 pozitif sabitlerdir.

İspat. (Caddeo ve ark. 2001).

Örnek 3.2.1 :

f(u) = 3

g(u) = sin(u)

3.3. IE^n de Biminimal Eğriler

$I \subset IR$ açık aralık olmak üzere $\gamma : I \to IE^n$ birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin tensyion ve bitensyion alanları sırasıyla

$$\tau(\gamma) = H \tag{3.3.1}$$

ve

$$\begin{aligned} -\tau_2(\gamma) &= \Delta H \\ &= \Delta^D H - \widetilde{A}\,\mathrm{H} + (\Delta H)^T \\ &= (\Delta H)^{\perp} + (\Delta H)^T \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

dır. Burada H ortalama eğrilik vektör alanı ve $\widetilde{A}$ Simon operatörü olup

$$\widetilde{A}\,\mathrm{H} = <\widetilde{A}_{\mathrm{H}}\mathrm{T}, \mathrm{T}> = <\mathrm{H}, \mathrm{H}>\mathrm{H} = \kappa_1^3 V_2$$

$$\Delta^D H = (\kappa_1'' - \kappa_1\kappa_2^2)V_2 + (\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')\mathrm{V}_3 + (\kappa_1\kappa_3)V_4 \tag{3.3.3}$$

ve

$$(\Delta H)^T = 3\ \kappa_1\kappa_1'\,\mathrm{T} \tag{3.3.4}$$

dir.

Önerme. 3.3.1: $\gamma : I \to IE^n$ birim hızlı bir eğrisinin ikinci temel formu ve ortalama eğrilik vektörleri sırasıyla h ve H olmak üzere

$$\Delta^D H = \overline{\nabla}_{\gamma'}\overline{\nabla}_{\gamma'} h \tag{3.3.5}$$

dır.

İspat. (2.1.6) ve (2.1.15) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir.
Aşağıdaki özel haller incelenecektir;

3.3.1 $\Delta^D H = 0$ Şartını Sağlayan Eğriler

Ülo Lümiste (Lümiste 1986) çalışmasında E^n de $\Delta^D H = 0$ şartını sağlayan eğrilerin bir sınıflandırılmasını vermiştir. Ayrıca (Barraos ve Garay 1995) de M. Barros ve O. J. Garay aynı sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 3.3.1: $I \subset IR$ olmak üzere $\gamma : I \to IE^n$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu taktirde $\Delta^D H = 0$ ise γ eğrisi

i) E^2 de E', $S'(r)$ dir yada,

ii) E^2 de $C'(a)$ cornu spiraldir yada,

iii) E^3 de $S^2(\sqrt{\frac{b}{c}})$ küresi üzerinde

$$k_1(s) = \sqrt{b(s-a)^2 + \frac{c^2}{b}} \ , \quad k_2(s) = \frac{bc}{b^2(s-a)^2 + c^2}$$

Frenet eğrilikleri ile verilen küresel cornu spirali olup

$$\frac{1}{(k_1)^2} + \frac{(\dot{k}_1)^2}{(k_1)^2 k_2^{\,4}} = \frac{b}{c} \tag{3.3.6}$$

şartı sağlanır (Özgür ve Gezgin 2005).

3.3. 2 $\nabla^D H + \lambda H = 0$ Şartını Sağlayan Eğriler

B. Kılıç IE^n deki $\nabla^D H + \lambda H = 0$ şartını sağlayan eğrilerin bir sınıflandırmasını vermiştir. (Kılıç, 2004). Bu eğrileri harmonik 1-tipinde eğriler olarak adlandırmıştır.

Teorem 3.3.2: $\gamma : I \subset IR \to IE^n$ yay parametreli gömülmüş eğri olsun. Bu durumda γ harmonik 1-tipindedir ancak ve ancak γ eğrisi

i) bir doğrudur ya da,

ii) $\kappa(s) = b_1 \cos(\sqrt{cs}) + b_2 \sin(\sqrt{cs})$ (ya da ($\kappa(s) = b_1 e^{\sqrt{cs}} + b_2 e^{-\sqrt{cs}}$)) eğriliği ile verilen düzlemsel eğridir ya da,

iii) $k_1(s) = \pm \frac{\sqrt{c}}{(4c_1)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{e^{4s-2c_2}+1}{e^{2s-c_2}}}, \quad k_2(s) = 2\sqrt{\frac{e^{2s-c_2}}{e^{4s-2c_2}+1}}$

eğrilikleri ile verilen bir yüzey eğrisidir (Kılıç, 2002).

3.3. 3 $(\Delta H)^{\perp}=0$ **Şartını Sağlayan Eğriler**

K. Arslan ve A. West (Arslan ve West, 2002) çalışmasında IE^{n} deki AW(k)-tipindeki altmanifoldları ilk defa tanımlamışlardır. Daha sonra IE^{n} deki AW(k)-tipindeki eğriler K. Arslan ve C. Özgür tarafından (1999) yılında incelenmiştir.

Tanım 3.3.1: Bir Frenet eğrisi

i) $\gamma^{iv}(s)^{\perp}=0$ şartını sağlar ise AW(1)-tipindedir,

ii) $\gamma^{iv}(s)^{\perp}$ ile $\gamma^{''}(s)^{\perp}$ vektörleri lineer bağımlı ise AW(2)-tipindedir,

iii) $\gamma^{iv}(s)^{\perp}$ ile $\gamma^{'''}(s)^{\perp}$ vektörleri lineer bağımlı ise AW(3)-tipindedir.

Birim hizlı bir eğrinin Laplası

$$\Delta=-\frac{d^{2}}{ds^{2}}$$

ile hesaplanır. Bu yüzden

$$\Delta H=-\Delta^{2}\gamma=-\frac{d^{4}\gamma}{ds^{4}} \qquad (3.3.7)$$

dir. Bu nedenle $\gamma^{iv}(s)^{\perp}=0$ AW(1)- şartı $(\Delta H)^{\perp}=0$ biminimal şartına denktir (Arslan ve Özgür 1999).

Önerme 3.3.2: γ oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde γ AW(1) – tipindendir $\Leftrightarrow$

$$k_1'''(s)-k_1^{3}(s)-k_1(s)\,k_2^{2}(s)=0,$$

ve

$$k_2(s)=\frac{c}{k_1^{2}(s)},$$

dir.

İspat: ($\Rightarrow$):γ AW(1) – tipinden ise $N_3(s)=0$ dır ve $V_2(s)$, $V_3(s)$ lineer bağımsız olduğundan

$$k_1'''(s)-k_1^{3}(s)-k_1(s)\,k_2^{2}(s)=0,$$

$$2k_1'(s)\,k_2(s) + k_1(s)\,k_2'(s) = 0, \tag{3.3.8}$$

olur. Böylece (3.3.8) denklemini çözersek

$$2k_1'(s)\,k_2(s) = -k_1(s)\,k_2'(s)\,,$$

$$\Rightarrow \frac{2k_1'(s)}{k_1(s)} = -\frac{k_2'(s)}{k_2(s)}\,,$$

$$\Rightarrow k_2(s) = \frac{c}{k_1^2(s)}\,,$$

bulunur.

($\Leftarrow$): $N_3(s) = 0$ olduğunu göstermeliyiz

$$k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)\,k_2^2(s) = 0,$$

olduğundan

$$(k_1''(s) - k_1^3(s) - k_1(s)\,k_2^2(s))\,V_2(s) = 0,$$

olur ve

$$k_2(s) = \frac{c}{k_1^2(s)}\,,$$

ise

$$(2k_1'(s)\,k_2(s) + k_1(s)\,k_2'(s))\,V_3(s) = 0,$$

olur. Buradan $N_3(s) = 0$ bulunur. (Burada $N_3(s) = \gamma^{iv}(s)^{\perp}$ dir.)

Teorem 3.3.3: γ eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu taktirde γ nın AW(3)-tipinden olması için gerek ve yeter koşul

$$2k_1'(s)\,k_2(s) + k_1(s)\,k_2'(s) = 0$$

ve bu denklemin çözümü

$$k_2(s) = \frac{c}{k_1^2(s)}\quad, c\in R$$

olmasıdır.

İspat. (Türkay, 2004)

Örnek 3.3.1: $\gamma: I \rightarrow R^3$

$\gamma(s) = (a\cos s, a\sin s, bs)$, $a > 0$ $b \in R$ ile tanımlı dik dairesel helis için

$k_1(s) = \frac{a}{a^2+b^2}$ $\quad k_2(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$ sabit olduğundan

$2k_1'(s)k_2(s)+ k_1(s)\, k_2'(s) = 0$ eşitliği sağlnır. Böylece dik dairesel helis AW(3) – tipindendir.

Teorem 3.3.4: $\gamma : I \subset IR \rightarrow IE^n$ yay parametreli gömülmüş eğri olsun. Bu durumda γ AW(1)-tipindedir ancak ve ancak γ eğrisi

i) bir düz doğrudur ya da,

ii) $\kappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{s}$ eğriliği ile verilen logaritmik spiraldir ya da,

iii) $k''_1(s) = k^3{}_1(s) + \frac{1}{k^3{}_1(s)}, \quad k_2(s) = \frac{c}{k_1(s)},$

eğrilikleri ile verilen bir uzay eğrisidir (Arslan 1997, Arslan ve Özgür 1999).

Açıklama 3.3.1:. Düzlemsel bir eğrinin parametrik gösterimi (Gray,1993) çalışmasında aşağıdaki şekilde verilir;

$$\gamma(s) = (\int \cos\theta(s)ds + c, \int \sin\theta(s)ds + d)$$

Burada $\theta(s) = \int k(s)ds + \theta_0$ ve c, d, θ_0 integral sabitleridir. Böylece Teorem 3.3.3 ii) deki logaritmik spiralin parametrik gösterimi aşağıdaki gibi olur;

$$\gamma(s) = \frac{s}{3}(cos(\sqrt{2}\log s) + \sqrt{2}\,sin(\sqrt{2}\log s), -\sqrt{2}\,cos(\sqrt{2}\log s) + sin(\sqrt{2}\log s)) .$$

(Loubeau ve Montaldo, Montaldo, 2007).

3.3.4. $(\Delta H)^{\perp} = \lambda H$ Şartını Sağlayan Eğriler

Tanım 3.3.1 den Bir Frenet eğrisi için $\gamma^{iv}(s)^{\perp}$ ile $\gamma''(s)^{\perp}$ vektörleri lineer bağımlı ise bu eğri AW(2)-tipindedir. Böylece (3.3.1) ve (3.3.2) den

$$\tau(\gamma) = H = \gamma''(s)^{\perp}, \tag{3.3.9}$$

$$-\tau_2(\gamma)^{\perp} = (\Delta H)^{\perp},$$

dir. Böylece (3.3.7) eşitliğinden

$$-\tau_2(\gamma)^{\perp} = (\Delta H)^{\perp} = \gamma^{iv}(s)^{\perp} \tag{3.3.10}$$

elde edilir. Sonuç olarak γ eğrinin AW(2) olması için gerek ve yeter koşul $\tau_2(\gamma)^{\perp}$ ile $\tau(\gamma)$ nın lineeer bağımlı olmalarıdır. Böylece (3.1.16) eşitliğinden γ eğrisi λ-biminimal olur. Bu nedenle E^n deki tüm AW(2)-tipindeki eğrilerin bir geometrik yurumu verilmiş olur (Arslan ve Özgür 1999).

4. BİMİNİMAL HİPERYÜZEYLER

4.0 Giriş

Bu bölümde biharmonik hiperyüzeyler incelenmiştir. IE^{n+1} deki hiperyüzeylerin biharmonik olmaları için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

4.1 Biharmonik Hiperyüzeyler

$M \subseteq IE^{n+1}$ n-boyutlu hiperyüzey olsun. ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve IE^{n+1} nin kovaryant türevleri olmak üzere (2.1.1) Gauss denklemi, $\forall$ X, Y $\in \chi(M)$, $\xi \in \chi^{\perp}(M)$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\xi \tag{4.1.1}$$

halini alır. Ayrıca A şekil operatörü olmak üzere (2.1.2) Weingarten denklemi

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X \tag{4.1.2}$$

biçimine indirgenir. Burada

$$g(A_\xi X, Y) = g(h(X, Y), \xi) \tag{4.1.3}$$

dır. M nin ortalama eğrilik vektörü H

$$H = \alpha\xi \tag{4.1.4}$$

biçiminde tanımlı olup

$$\alpha = \frac{1}{n} izA \tag{4.1.5}$$

dır. Burada izA, şekil operatör matrisinin izini ifade etmektedir.

$M \subseteq IE^{n+1}$ n-boyutlu hiperyüzey olmak üzere M üzerinde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1} = \xi\}$ adapte çatısı seçilsin. Böylece $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal teğet vektörler ve ξ da birim normal vektördür. $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n, \omega^{n+1}$ 1-formları sırasıyla $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}$ in dual 1-formları olmak üzere ω_A^B koneksiyon formları

$$\tilde{\nabla}_{e_j} e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_i^j e_j \quad ; \; \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad , 1 \le i, j \le n \tag{4.1.6}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_i} e_\alpha = \omega_i^\alpha e_\alpha \quad , e_\alpha = \xi \, , \alpha = n + 1 \tag{4.1.7}$$

dir.

Şu andan itibaren g yerine <,> kullanılacaktır.

Önerme 4. 1.1: Şekil operatörü A nın özdeğerleri yardımıyla (2.1.5) Codazzi denkleminden aşağıdaki iyi bilinen özdeşlikler elde edilir.

$$(\lambda_i - \lambda_j)\,\omega_i^j(e_i) = (\lambda_j - \lambda_i)\,\omega_j^i(e_i) = e_j(\lambda_i) \qquad ; i \neq j \tag{4.1.8}$$

$$(\lambda_j - \lambda_k)\,\omega_j^k(e_i) = (\lambda_i - \lambda_k)\,\omega_i^k(e_j) \qquad ; i \neq j \neq k \tag{4.1.9}$$

Burada λ_i ler asli eğrilikler ve

$$e_j(\lambda_i) = \widetilde{\nabla}_{e_j}(\lambda_i) = \nabla_{e_j}(\lambda_i) \tag{4.1.10}$$

dır (Turkay, 2004)**.**

İspat: M hiperyüzeyinin $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal teğet vektörleri ve ξ birim normal vektörü için $A_\xi e_i = \lambda_i e_i$ eşitliği ve (2.1.5) Codazzi denklemi yardımıyla $i \neq j$ için

$$(\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_i, e_i) = (\overline{\nabla}_{e_i} h)(e_j, e_i) \tag{4.1.11}$$

yazılabilir. (2.1.6) eşitliğinden

$$(\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_i, e_i) = (D_{e_j} h)(e_i, e_i) - 2h(\nabla_{e_j} e_i, e_i)$$

dır. Ayrıca (4.1.3) yardımıyla

$$\begin{aligned} <h(\nabla_{e_j} e_i, e_i), \xi> &= \left\langle A(\nabla_{e_j} e_i), e_i \right\rangle \\ &= \left\langle A(\sum_{k=1}^{n} \omega_i^k(e_j) e_k), e_i \right\rangle \qquad (4.1.12) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k(e_j) \left\langle Ae_k, e_i \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$(\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_i, e_i) = e_j(\lambda_i)\xi$$

dır. Benzer şekilde

$$(\overline{\nabla}_{e_i} h)(e_j, e_i) = (D_{e_i} h)(e_j, e_i) - h(\nabla_{e_i} e_j, e_i) - h(e_j, \nabla_{e_i} e_i)$$

eşitliği için

$$
\begin{aligned}
<h(\nabla_{e_i} e_j, e_i), \xi> &= \left\langle A(\nabla_{e_i} e_j), e_i \right\rangle \\
&= \left\langle A(\sum_{k=1}^{n} \omega_j^k(e_i) e_k), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega_j^k(e_i) \left\langle Ae_k, e_i \right\rangle \\
&= \omega_j^i(e_i)\lambda_i
\end{aligned} \tag{4.1.13}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
<h(e_j, \nabla_{e_i} e_i), \xi> &= \left\langle A(\nabla_{e_i} e_i), e_j \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k(e_i) \left\langle Ae_k, e_j \right\rangle \\
&= \omega_i^j(e_i)\lambda_j
\end{aligned}
$$

olup

$$
(\overline{\nabla}_{e_i} h)(e_j, e_i) = -(\omega_j^i(e_i)\lambda_i + \omega_i^j(e_i)\lambda_j)\xi \tag{4.1.14}
$$

elde edilir. Buradan (4.1.11) eşitliği

$$
e_j(\lambda_i) = -\omega_j^i(e_i)\lambda_i - \omega_i^j(e_i)\lambda_j
$$

$$
e_j(\lambda_i) = (\lambda_j - \lambda_i)\omega_j^i(e_i)
$$

biçimine dönüşür. Böylece (4.1.8) eşitliği elde edilir. Şimdi $i \neq j \neq k$ için Codazzi eşitliği ele alınırsa

$$
(\overline{\nabla}_{e_i} h)(e_j, e_k) = (\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_i, e_k) \tag{4.1.15}
$$

dır. Buradan

$$
(\overline{\nabla}_{e_i} h)(e_j, e_k) = (D_{e_i} h)(e_j, e_k) - h(\nabla_{e_i} e_j, e_k) - h(e_j, \nabla_{e_i} e_k)
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
<h(\nabla_{e_i} e_j, e_k), \xi> &= \left\langle A(\nabla_{e_i} e_j), e_k \right\rangle \\
&= \left\langle A(\sum_{s=1}^{n} \omega_j^s(e_i) e_s), e_k \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \omega_j^s(e_i) \left\langle Ae_s , e_k \right\rangle \tag{4.1.16}$$

$$= \omega_j^k (e_i)\lambda_k$$

ve

$$<h(e_j,\ \nabla_{e_i} e_k),\xi > = \left\langle A(\nabla_{e_i} e_k), e_j \right\rangle$$

$$= \left\langle A(\sum_{s=1}^{n} \omega_k^s (e_i)e_s), e_j \right\rangle \tag{4.1.17}$$

$$<h(e_j,\ \nabla_{e_i} e_i),\xi > = \sum_{s=1}^{n} \omega_k^s (e_i) \left\langle Ae_s , e_j \right\rangle = \omega_k^j (e_i)\lambda_j \tag{4.1.18}$$

yardımıyla

$$(\overline{\nabla}_{e_i} h)(e_j , e_k) = -(\omega_j^k (e_i)\lambda_k + \omega_k^j (e_i)\lambda_j)\xi \tag{4.1.19}$$

elde edilir.Bununla beraber

$$(\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_i , e_k) = (D_{e_j} h)(e_i ,e_k) - h(\nabla_{e_j} e_i ,e_k) - h(e_i,\ \nabla_{e_j} e_k)$$

denkleminden

$$<h(\nabla_{e_j} e_i , e_k),\xi > = \left\langle A(\nabla_{e_j} e_i), e_k \right\rangle$$

$$= \left\langle A(\sum_{s=1}^{n} \omega_i^s (e_j)e_s), e_k \right\rangle$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \omega_i^s (e_j) \left\langle Ae_s , e_k \right\rangle \tag{4.1.20}$$

$$= \omega_i^k (e_j)\lambda_k \ ; \quad A_\xi e_i = \lambda_i e_i$$

ve

$$<h(e_i, \nabla_{e_j} e_k),\ \xi > = \left\langle A(\nabla_{e_j} e_k), e_i \right\rangle$$

$$= \left\langle A(\sum_{s=1}^{n} \omega_k^s (e_j)e_s), e_i \right\rangle \tag{4.1.21}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \omega_k^s (e_j) \left\langle Ae_s , e_i \right\rangle$$

$$= \omega_k^i (e_j)\lambda_i$$

eşitlikleri yardımıyla

$$(\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_i, e_k) = -(\omega_i^k(e_j)\lambda_k + \omega_k^i(e_j)\lambda_i)\ \xi \tag{4.1.22}$$

elde edilir. Buradan (4.1.15) eşitliği

$$-\omega_j^k(e_i)\lambda_k - \omega_k^j(e_i)\lambda_j = -\omega_i^k(e_j)\lambda_k - \omega_k^i(e_j)\lambda_i$$

$$(\lambda_j - \lambda_k)\omega_j^k(e_i) = (\lambda_i - \lambda_k)\omega_i^k(e_j)$$

biçimine dönüşür. Böylece (4.1.9) eşitliği elde edilir. □

Teorem 4. 1.1: $M \subseteq IE^{n+1}$ n-boyutlu hiperyüzey olsun. Bu takdirde

$$\Delta H = (\Delta\alpha + n\alpha\|A\|^2)\xi + \left[\sum_{i=1}^{n} -\alpha A_\xi \nabla_{e_i} e_i + \nabla_{e_i}(A_\xi e_i) + 2e_i(\alpha)A_\xi e_i\right] \tag{4.1.23}$$

dir (Turkay, 2004).

Tanım 4.1.1: $M \subseteq IE^{n+1}$ n-boyutlu hiperyüzeyi $\Delta H = 0$ şartını sağlıyor ise M ye *biharmonik hiperyüzey* adı verilir (Dimitric 1992).

Sonuç 4. 1.1: $M \subseteq IE^{n+1}$ n-boyutlu hiperyüzeyi biharmonik ise

$$\Delta\alpha + n\alpha\|A\|^2 = 0, \tag{4.1.24}$$

ve

$$2A(\text{grad}\alpha) + n\alpha(\text{grad}\alpha) = 0 \tag{4.1.25}$$

dır (Turkay, 2004).

Teorem 4.1.2: $M \subseteq IE^4$ hiperyüzeyi biharmonik ise minimaldir.

İspat: (Defever 1998).

Teorem. 4.1.3: $M \subseteq IE^{n+1}$ hiperyüzeyi en fazla farklı iki asli eğriliğe sahip olsun. Eğer M biharmonik ise minimaldir.

İspat: (Dimitric 1992).

4.2 λ- Biminimal Hiperyüzeyler

$\phi: M^n \to N^{n+1}$ dönüşümü bir izometrik imersiyonu olsun. ϕ nin ikinci temel formu h, $\phi(M) \subset N^{n+1}$ ye birim normal vektör alanı N ve ϕ'nin ortalama eğrilik vektör alanı $\vec{H}$= HN olsun. (H ortalama eğrilik fonksiyonu)

Buna göre Loubeau ve Montaldo aşağıdaki sonuca ulaşmışlardır:

Önerme 4.2.1: $\phi: M^n \to N^{n+1}$ dönüşümü bir izometrik imersiyon ve ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}$= HN olsun. Bu taktirde ϕ'nin λ-biminimal olması için gerek ve yeter şart bazı reel λ değerleri için

$$\Delta H = (|B|^2 - Ricci(N) + \lambda)H \tag{4.2.1}$$

olmasıdır (Loubeau ve Montaldo 2007).

İspat: M üzerinde lokal ortonormal $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ çatısında ϕ'nin tensiyon alanı

$$\tau(\phi) = nHN \tag{4.2.2}$$

ve bitensiyon alanı

$$-\tau_2(\phi) = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}^{\phi} \nabla_{e_i}^{\phi} (nHN) + \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^{\phi}(nHN) - R(d\,\phi(e_i), nHN)\, d\,\phi(e_i)$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}[-\nabla_{e_i}(e_i(H)N + H\nabla_{e_i}N - H\tilde{R}(d\,\phi(e_i), N)\, d\,\phi(e_i)] \tag{4.2.3}$$

$$= n(\Delta H)N - 2n\sum_{i=1}^{n} e_i(H)\, \nabla_{e_i}N + n\Delta^{\phi}N - nH\sum_{i=1}^{n} \tilde{R}(d\,\phi(e_i)), N)\, d\,\phi(e_i)$$

Ancak

$$\textit{i)}\ \langle \nabla_{e_i}^{\phi} N, N\rangle = \frac{1}{2} e_i \langle N, N\rangle = 0 \tag{4.2.4}$$

$$\textit{ii)}\ \langle \sum_{i=1}^{n} \tilde{R}\,(d\,\phi(e_i)), N)\, d\,\phi(e_i),\ N\rangle = Ricci(N). \tag{4.2.5}$$

$$\langle \Delta^{\phi} N, N\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} -\nabla_{e_i}^{\phi} \nabla_{e_i}^{\phi} N + \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} N, N\rangle = \langle \nabla_{e_i} N, \nabla_{e_i} N\rangle. \tag{4.2.6}$$

daha sonra eğer aşağıda tanımlanan

$$B = (\langle \nabla_{e_i} e_j , N \rangle)_{i,j=1...n} = -(\langle \nabla_{e_i} N , e_j \rangle)_{i,j=1...n} \quad (4.2.7)$$

bir { e_1,…. ,e_n, N} çatı alanında ϕ'nin ikinci temel formu ise, bu taktirde

$$\| \tilde{\nabla}_{e_i} N \|^2 = \langle \tilde{\nabla}_{e_i} N , \tilde{\nabla}_{e_i} N \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle^2 \quad \forall i=(1, . . n) \quad (4.2.8)$$

olur. Böylece

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} N , \tilde{\nabla}_{e_i} N \rangle = \|B\|^2 \quad (4.2.9)$$

sonuç olarak

$$-\langle \tau_{2,\lambda}(\phi), N \rangle = n(-\Delta H + H\|B\|^2 - HRicci(N) + \lambda H) \quad (4.2.10)$$

bulunur.

Sonuç 4.2.1: sabit c eğrisinde bir izometrik ϕ imersiyonunun

$$\phi : M^n \rightarrow N^{n+1} \quad (4.2.11)$$

λ-bimimal olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta H - H(n^2 H^2 - s + (n-2)c + \lambda) = 0 \quad (4.2.12)$$

olacak şekilde bir λ reel sayısının bulunmasıdır.

Burada H, M^n ortalama eğriliği ve s de skalar eğriliğidir.

Daha fazlası $\phi : M^2 \rightarrow N^3$(c) izometrik imersiyonu bir M^2 yüzeyinden bir N^3(c) uzay formuna tanımlansın. Bu durumda ϕ'nin λ-bimimal olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta H - 2H(2H^2 - G + \frac{\lambda}{2}) = 0 , \lambda \in R \quad (4.2.13)$$

olmasıdır. (Loubeau ve Montaldo 2007)

İspat: M^n nin bir ortonormal çatısı { e_1,…. ,e_n}, asli eğrilikleri { k_1,…. ,k_n} ve ikinci temel formu B olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \|B\|^2 &= k_1^2 + . . . + k_n^2 = n^2 H^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n} k_i k_j \; ; i<j \\ &= n^2 H^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n} K(e_i, e_j) \quad (4.2.14) \\ &= n^2 H^2 - s + n(n-1)c \end{aligned}$$

Burada K(e_i,e_j), M^n üzerinde e_i ve e_j tarafından gerilmiş düzlemin kesitsel eğriliği ve

s = $\sum_{i,j=1}^{n} K(e_i, e_j)$ de M^n nin skalar eğriliğidir.

Ricci(N) = nc olduğundan ϕ dönüşümünün λ-bimimal olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta H = (n^2 H^2 - s + (n-2)c + \lambda)H \tag{4.2.15}$$

olmasıdır. Bazı $\lambda \in R$ için.

5. BİMİNİMAL YÜZEYLER

5.0. Giriş

Bu bölümde Vranceannu yüzeyleri ile tensor çarpım yüzeyleri ele alınmıştır. Bu yüzeylerin biminimal olmaları için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

5.1.Vranceannu Yüzeyleri

Tanım 5.1.1 : E^4 de

$$X(s,t) = (u(s)\cos s \cos t,\ u(s)\cos s \sin t,\ u(s)\sin s \cos t,\ u(s)\sin s \sin t) \qquad (5.1.1)$$

parametrelendirilmesi ile verilen yüzeye Vranceannu yüzeyi adı verilir (Caddeo ve ark., 2005) Biz bu yüzeyleri $V^2 \subseteq E^4$ ile ifade edeceğiz.

Teorem 5.1.1: $V^2 \subseteq E^4$ yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul

$$u(s) = \left(1+\frac{1}{(\tan s)^2}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (5.1.2)$$

olmasıdır (Mihai, 1994).

Tanım 5.1.2: $M \subseteq E^n$ bir yüzey olsun. M nin ortalama eğrilik vektörü H için DH=0 ise M ye paralel ortalama eğrilikli yüzey adı verilir.

Chen 1973 yılında bu yüzeylerin sınıflandırılmasını aşağıdaki teoremde vermiştir.

Teorem 5.1.2:

$M \subseteq E^n$ bir yüzey olsun. Eğer M yüzeyi paralel ortalama eğrilikli ise bu taktirde M aşağıdakilerden biridir;

1) E^n nin minimal yüzeyi,

2) E^n nin küçük hiperküresinin minimal yüzeyi,

3) E^n nin bir S^3 küresinde sabit ortalama eğrilikli bir yüzeyidir

(Chen, 1973).

Son zamanlarda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 5.1.3: $V^2 \subseteq E^4$ Vranceannu yüzeyi paralel ortalama eğrilikli ise

1) V^2 minimaldir ya da ,

2) İki çemberin tensör çarpımı yüzeyidir. Bu yüzey S^3 küresinde yatan sabit eğrilikli bir yüzeydir (Arslan ve ark. 2004).

İspat: $e_1, e_2 \in T_pV^2$ ve $e_3, e_4 \in N_pV^2$ olacak şekilde

$$e_1 = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}X = (-\cos s.\sin t\ ,\ \cos s.\cos t\ ,\ -\sin s.\sin t\ ,\ \sin s.\cos t)$$

$$e_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}X = \frac{1}{A}(B\cos t\ ,\ B\sin t\ ,\ C\cos t\ ,\ C\sin t)$$

$$e_3 = \frac{1}{A}(-C\cos t\ ,\ -C\sin t\ ,\ B\cos t\ ,\ B\sin t)$$

$$e_4 = (-\sin s.\sin t\ ,\ \sin s.\cos t\ ,\ \cos s.\sin t\ ,\ -\cos s.\cos t)$$

dik çatı alanı seçelim. Burada

$$A = \sqrt{u^2 + (u')^2}\ ,\ B = u'\cos s - u\sin s\ ,\ C = u'\sin s + u\cos t \tag{5.1.3}$$

dir.

V^2 nin normal koneksiyonu D, ikinci temel formu h nın katsayıları $h_{i,j}$ ve koneksiyon formları w_α^β olmak üzere E^4 deki yapı denklemleri

$$\tilde{\nabla}_{e_i} e_j = w_j^k(e_i)\, e_k + w_j^\alpha(e_i)\, e_\alpha\ , \qquad 3 \leq \alpha, \beta \leq 4 \tag{5.1.4}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_i} e_\alpha = -h_{i,j} e_j + w_\alpha^\beta(e_i)\, e_\beta\ , \qquad 1 \leq i, j, k \leq 2 \tag{5.1.5}$$

biçimindedir. Böylece (5.1.4), (5.1.5) yardımıyla

$$h_{11}^3 = \frac{1}{A} = \alpha \neq 0, \quad A = \sqrt{u^2 + (u')^2}$$

$$h_{12}^3 = h_{11}^3 = h_{21}^3 = 0$$

$$h_{22}^3 = \frac{2(u')^2 - uu'' + u^2}{u^2 + (u')^{2\ ^3/_2}} = \beta \tag{5.1.6}$$

$$h_{11}^4 = h_{22}^3 = 0\ ,\ h_{12}^4 = h_{21}^4 = -\alpha$$

ve

$$\begin{aligned} w_1^3 &= \alpha w^1 \\ w_2^3 &= \beta w^2 \\ w_1^4 &= -\alpha w^2 \\ w_2^4 &= -\alpha w^1 \\ w_2^1 &= w_4^3 = \alpha k w^1 \,,\ k=\frac{u'}{u} \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

elde edilir. Bununla birlikte (5.1.3) ve (5.1.4) den

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= -\alpha k e_2 + \alpha e_3 \\ \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= \alpha k e_1 - \alpha e_4 \\ \tilde{\nabla}_{e_1} e_3 &= -\alpha e_1 - k\alpha e_4 \\ \tilde{\nabla}_{e_1} e_4 &= \alpha e_2 + k\alpha e_3 \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 &= -\alpha e_4 \\ \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= \beta e_3 \\ \tilde{\nabla}_{e_2} e_3 &= -\beta e_2 \\ \tilde{\nabla}_{e_2} e_4 &= \alpha e_1 \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

bulunur. Böylece teğet ve normal bileşenler sırasıyla

$$\begin{array}{ll} \nabla_{e_1} e_1 = -\alpha k e_2 & -A_{e_3} e_1 = -\alpha e_1 \\ \nabla_{e_1} e_2 = \alpha k e_1 & -A_{e_3} e_2 = -\beta e_2 \\ \nabla_{e_2} e_1 = 0 & -A_{e_4} e_1 = \alpha e_2 \\ \nabla_{e_2} e_2 = 0 & -A_{e_4} e_2 = \alpha e_1 \end{array} \tag{5.1.10}$$

ve

$$\begin{array}{ll} h(e_1, e_1) = \alpha e_3 & D_{e_1} e_3 = -k\alpha e_4 \\ h(e_1, e_2) = -\alpha e_4 & D_{e_2} e_3 = 0 \\ h(e_2, e_2) = \beta e_3 & D_{e_1} e_4 = \alpha k e_3 \end{array} \tag{5.1.11}$$

$$D_{e_2} e_4 = 0$$

bulunur. Buradan V^2 nin ortalama eğrilik vektörü

$$H = \frac{1}{2}(h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2)) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\, e_3 \qquad (5.1.12)$$

dir. Eğer $\lambda = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ alırsak $H = \lambda e_3$ olur.

Böylece H nın e_1 ve e_2 yönünde türevi alınırsa

$$\tilde{\nabla}_{e_1} H = \tilde{\nabla}_{e_1} (\lambda e_3) = e_1(\lambda)\, e_3 + \lambda \tilde{\nabla}_{e_1} e_3$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} H = \tilde{\nabla}_{e_2} (\lambda e_3) = e_2(\lambda)\, e_3 + \lambda \tilde{\nabla}_{e_2} e_3$$

elde edilir. Fakat λ fonksiyonu sadece s'ye bağlı olduğundan

$$e_1(\lambda) = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}(\lambda) = 0$$

dır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} H &= \lambda \tilde{\nabla}_{e_1} e_3 \\ &= \lambda(-\alpha e_1 - k\alpha e_4) \\ &= -\alpha\lambda e_1 - \alpha\lambda\, k e_4 \end{aligned} \qquad (5.1.13)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_2} H &= e_2(\lambda)\, e_3 + \lambda(-\beta e_2) \\ &= -\lambda\beta e_2 + e_2(\lambda)\, e_3 \end{aligned} \qquad (5.1.14)$$

bulunur. Böylece

$$\tilde{\nabla}_{e_1} H = -A_H e_1 + D_{e_1} H$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} H = -A_H e_2 + D_2 H$$

olduğundan normal bileşenler için

$$D_{e_1} H = -\alpha\lambda\, k e_4 \qquad (5.1.15)$$

$$D_{e_2} H = e_2(\lambda)\, e_3 \qquad (5.1.16)$$

elde edilir.

Hipotez gereği ortalama eğrilik vektörü H paralel olduğundan

$$\alpha\lambda\, k = 0$$

$e_2(\lambda) = e_1(\lambda) = 0$

dır. Böylece iki durum sözkousudur,

i) $\lambda = 0$ ya da

ii) $k = 0$

dır.

Eğer $\lambda = 0$ ise V^2 minimaldir.

Eğer $k = 0$ ise $k = \frac{u'}{u}$ olduğundan u = sabittir.

Böylece (5.1.1) yaması iki çemberin tensörel çarpımı olup bu yüzey S^3 de yatan minimal bir yüzeydir. □

Teorem 5.1.4: (5.1.1) parametrelendirmesi ile verilen Vranceannu yüzeyi için

$$\Delta H = \left(-2\beta e_2(\lambda) - \lambda e_2(\beta) - \alpha k\beta\lambda\right)e_2 + \left(\alpha k e_2(\lambda) + e_2{}^2(\lambda) - \lambda\beta^2 - \alpha^2\lambda - \alpha^2 k^2\lambda\right)e_3 \tag{5.1.17}$$

dir.

İspat: R^4 deki bir yüzey için

$$\Delta H = \tilde{\nabla}_{e_1}\tilde{\nabla}_{e_1}H + \tilde{\nabla}_{e_2}\tilde{\nabla}_{e_2}H - \tilde{\nabla}_{(\nabla_{e_1}e_1)}H - \tilde{\nabla}_{(\nabla_{e_2}e_2)}H \tag{5.1.18}$$

dır. Ayrıca $H = \lambda e_3$ olduğundan $H = \lambda\, n_1$ dir. Böylece (5.1.10) ve (5.1.11) yardımıyla

$\tilde{\nabla}_{e_1}H = -\alpha\lambda e_1 - \alpha\lambda\, k e_4$; $(e_1(\lambda) = 0)$

$\tilde{\nabla}_{e_2}H = -\lambda\beta e_2 + e_2(\lambda)\, e_3$

elde edilir.

Ayrıca,

$$\tilde{\nabla}_{e_1}\tilde{\nabla}_{e_1}H = -\alpha^2\lambda(1+k)e_3 \tag{5.1.19}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2}\tilde{\nabla}_{e_2}H = \left(-2\beta e_2(\lambda) + \lambda e_2(\beta)\right)e_2 + \left(e_2{}^2(\lambda) - \lambda\beta^2\right)e_3 \tag{5.1.20}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{(\nabla_{e_1}e_1)}H = \alpha\beta\lambda k e_2 - \alpha k e_2(\lambda)e_3 \tag{5.1.21}$$

$$\tilde{\nabla}_{(\nabla_{e_2}e_2)}H = 0 \tag{5.1.22}$$

elde edilir. O halde (5.1.19) - (5.1.22) eşitlikleri (5.1.18) de yerine yazılırsa (5.1.17) eşitliği elde edilir.

Teorem 5.1.4 ün bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 5.1.1. (5.1.1) parametrelendirmesi ile verilen yüzeyin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$-2\beta e_2(\lambda) - \lambda e_2(\beta) - \alpha k\beta\lambda = 0$$

$$\alpha k e_2(\lambda) + e_2{}^2(\lambda) - \lambda\beta^2 - \alpha^2\lambda - \alpha^2 k^2 \lambda = 0$$

olmasıdır.

Önerme 5.1.1: (5.1.1) parametrelendirmesi ile verilen Vranceannu yüzeyi için

$$\begin{aligned} e_2(\lambda) &= \alpha\beta k \\ e_2(\alpha) &= \lambda\beta k - 2k\alpha^2 \\ e_2(\beta) &= \lambda\beta k + 2k\alpha^2 \end{aligned} \qquad (5.1.23)$$

dir. Burada $2\lambda=\alpha+\beta$ dır.

İspat:

e_i, e_j, e_k teğet vektör alanları için

$$(\tilde{\nabla}_{e_i} h)(e_j, e_k) = D_{e_i}\left(h(e_j, e_k)\right) - h(\nabla_{e_i} e_j, e_k) - h(e_j, \nabla_{e_i} e_k) \qquad (5.1.24)$$

olduğundan

$$(\tilde{\nabla}_{e_2} h)(e_2, e_1) = (\tilde{\nabla}_{e_1} h)(e_2, e_2)$$

$$(\tilde{\nabla}_{e_1} h)(e_2, e_1) = (\tilde{\nabla}_{e_2} h)(e_1, e_1)$$

Codazzi denklemleri ve (5.1.2) ile (5.1.3) denklemi yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 5.1.3: $M^2 \subset E^4$ yüzeyi verilsin. Eğer

$$<\Delta H, e_i> = 0, \ \ i = 1, 2 \tag{5.1.25}$$

şartı sağlanırsa $M^2 \subset E^4$ yüzeyine T.C. yüzeyi denir (Öztürk ve Arslan, 2008).

Sonuç 5. 1. 2: (5.1.1) parametrelendirmesi ile verilen Vranceannu yüzeyi T.C. yüzeyi ise bu yüzey iki çemberin tensör çarpımı (ya da $\beta^2 - 2\lambda^2 = 0$) olur.

İspat. (5.1.1) parametrelendirmesi ile verilen Vranceannu yüzeyi T.C. yüzeyi olsun. Böylece (5.1.17) ve (5.1.25) eşitliklerinden

$$2\alpha k(\beta^2 - 2\lambda^2) = 0$$

elde edilir. Böylece $\alpha \neq 0$ olduğundan $(\beta^2 - 2\lambda^2) = 0$ yada k = 0 bulunur. Buradan, k = $\frac{u'}{u}$ olduğundan u = sabittir. Böylece (5.1.1) yaması iki çemberin tensörel çarpımı olup bu yüzey S^3 de yatan minimal bir yüzeydir. □

5.2. Düzlemsel Eğrinin Tensör Çarpımının İmersiyonları

Bu kısımda tensör çarpım imersiyonları ele alınacaktır. Son zamanlarda düzlemsel ve uzay eğrilerinin tensör çarpımları ise R.Yücel tarafınadan çalışılmıştır.(Yücel, 2004)

Düzlemde

c_1: IR$\to$ IE^2 ve c_2 : IR$\to$ IE^2 eğrileri

$$c_1(t) = (\gamma(t), \delta(t)) \tag{5.2.1}$$

$$c_2(s) = (\alpha(s), \beta(s)) \tag{5.2.2}$$

parametrelendirmesi ile verilsin. Bu durumda bunların tensör çarpımları

$$f = c_1 \otimes c_2 : IR^2 \to IE^4$$

$$f(t, s) = (\alpha(s)\gamma(t), \beta(s)\gamma(t), \alpha(s)\delta(t), \beta(s)\delta(t)) \tag{5.2.3}$$

biçiminde tanımlanır (Mihai ve ark. 1995). Buna göre

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (\dot{\gamma}(t)\alpha(s)\ ,\ \dot{\gamma}(t)\beta(s)\ ,\ \dot{\delta}(t)\ \alpha(s)\ ,\ \dot{\delta}(t)\ \beta(s))$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (\dot{\alpha}(s)\gamma(t)\ ,\ \dot{\beta}(s)\ \gamma(t)\ ,\ \dot{\alpha}(s)\delta(t)\ ,\ \dot{\beta}(s)\ \delta(t))$$

dir. Burada $\dot{\alpha}$, α'nın türevidir.

Ayrıca f(t, s) yüzeyinin E^4 den indirgemiş Riemann metriğinin bileşenleri

$$g_{11} = \|c_1'\|^2\|c_2\|^2$$
$$g_{12} = \langle c_1\ ,\ \dot{c}_1\rangle\langle c_2\ ,c_2'\rangle \qquad (5.2.4)$$
$$g_{22} = \|c_1\|^2\|c_2'\|^2$$

dir. Böylece f(t, s) üzerinde bir ortonormal baz $\{\ e_1\ ,\ e_2\ \}$

$$e_1 = \frac{1}{\|c_1'\|\|c_2\|}\frac{\partial f}{\partial t} \qquad (5.2.5)$$

$$e_2 = \frac{1}{\|c_1'\|\|c_2\|\sqrt{\|c_1'\|^2\|c_1\|^2\|c_2'\|^2\|c_2\|^2-\langle c_1,c_1'\rangle^2\langle c_2\ ,c_2'\rangle^2}}\left[\|c_1'\|^2\|c_2\|^2\frac{\partial f}{\partial s} - \langle c_1\ ,\ c_1'\rangle\langle c_2\ ,c_2'\rangle\frac{\partial f}{\partial t}\right]$$

dir.

Bu yüzeyin normal uzayı N_pM nin bir ortonormal bazı ise

$$n_1 = (-\dot{\beta}(s)\ \dot{\delta}(t)\ ,\ \dot{\beta}(s)\ \dot{\gamma}(t),\ \dot{\alpha}(s)\ \dot{\delta}(t)\ ,\ -\dot{\alpha}(s)\ \dot{\gamma}(t)\ ) \qquad (5.2.6)$$

$$n_2 = (-\beta(s)\ \delta(t)\ ,\ \beta(s)\ \gamma(t)\quad \alpha(s)\delta(t)\ ,\ \ -\alpha(s)\ \ \gamma(t)) \qquad (5.2.7)$$

ile oluşturulur.

Bu durumda f(t, s) nin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$h(e_1\ ,\ e_1\ ) + h(e_2\ ,e_2) = 0$$

olmasıdır. Burada h, f(t, s) yüzeyinin nin ikinci temel formudur. ya da buna denk olarak

$$\langle\ h(e_1\ ,e_1\ ) + h(e_2\ ,e_2),\ n_i\rangle = 0\ ,\quad i\in\{1, 2\}. \qquad (5.2.8)$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 5.2.1: Öklidyen iki düzlemsel eğrinin tensör çarpımı $c_1\otimes c_2$ nin $\mathbb{E}^4$ te minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart

i) c_1 0'dan (orijinden) geçen bir doğrudur

ii) c_2 0'dan (orijinden) geçen bir doğrudur

iii) c_1 0 merkezli çember ve c_2 0 merkezli ortogonal hiperbol ya da tersi olmasıdır (Mihai ve ark., 1994/1995).□

Y.Teorem 5.2.2: $c_2(s) = (\alpha(s), \beta(s))$ ve $c_1 = (\cos t, \sin t)$ düzlemsel eğrileri verilsin.

$f = c_1 \otimes c_2 : R^2 \to R^4$ tensör çarpımı

$$f(t,s) = (\alpha(s)\cos t, \beta(s)\cos t, \alpha(s)\sin t, \beta(s)\sin t) \tag{5.2.9}$$

parametrelendirmesi ile verilsin.bu taktirde,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{e_1} e_1 &= -a e_2 + b n_1 \\ \overline{\nabla}_{e_1} e_2 &= a e_1 - b n_2 \\ \overline{\nabla}_{e_2} e_1 &= -b n_2 \\ \overline{\nabla}_{e_2} e_2 &= c n_1 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

dir.

Burada

$$a(s) = \frac{\alpha(s)\alpha(s)' + \beta(s)\beta(s)'}{\|c_2(s)\|^2 \|c_2(s)'\|}$$

$$b(s) = \frac{\alpha(s)\beta(s)' - \alpha(s)'\beta(s)}{\|c_2(s)\|^2 \|c_2(s)'\|}$$

$$c(s) = \frac{\alpha(s)'\beta(s)'' - \beta(s)'\alpha(s)''}{\|c_2(s)'\|^2}$$

dir.

İspat: (5.2.9) denkleminin kısmi türevlerinden

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (-\alpha(s)\sin t, -\beta(s)\sin t, \alpha(s)\cos t, \beta(s)\cos t) \tag{5.2.11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (\alpha'(s)\cos t, \beta'(s)\cos t, \alpha'(s)\sin t, \beta'(s)\sin t) \tag{5.2.12}$$

elde edilir. Ayrıca Im(f) nin tanjant ve normal vetörleri sırasıyla

$$e_1 = \frac{1}{\|c_2\|}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\|c_2\|}(-\alpha(s)\sin t, -\beta(s)\sin t, \alpha(s)\cos t, \beta(s)\cos t)$$

$$e_2 = \frac{1}{\|c_2'\|}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\|c_2'\|}(\alpha'(s)\cos t, \beta'(s)\cos t, \alpha'(s)\sin t, \beta'(s)\sin t) \tag{5.2.13}$$

ve

$$n_1 = \frac{1}{\|\dot{c}_2\|}(-\beta'(s)\cos t,\ \alpha'(s)\cos t,\ -\beta'(s)\sin t,\ \alpha'(s)\sin t)$$

$$n_2 = \frac{1}{\|c_2\|}(-\beta(s)\sin t,\ \alpha(s)\sin t,\ \beta(s)\cos t,\ -\alpha(s)\cos t) \qquad (5.2.14)$$

tarafından gerilir. Böylece (5.2.13) da verilen teğet vektör alanlarının yöne göre türevleri alınırsa

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \bar{\nabla}_{\frac{1}{\|c_2\|}\frac{\partial}{\partial t}}\left(\frac{1}{\|c_2\|}\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{\|c_2\|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{\|c_2\|}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\|c_2\|}\right)\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{\|c_2\|}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|^2} e_2 + \frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|^2} n_1$$

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \bar{\nabla}_{\frac{1}{\|c_2\|}\frac{\partial}{\partial t}}\left(\frac{1}{\|\dot{c}_2\|}\frac{\partial f}{\partial s}\right)$$

$$= \frac{1}{\|c_2\|\|\dot{c}_2\|}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}$$

$$= \frac{(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|^2} e_1 + \frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|^2} n_2$$

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_1 = \frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|} n_2$$

ve

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_2 = \frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{\|\dot{c}_2\|^3} n_1$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.2.14) eşitliklerinde verilen normal vektör alanlarının e_1 ve e_2 yönünde türevleri alınırsa ,

$$\bar{\nabla}_{e_1} n_1 = \bar{\nabla}_{\frac{1}{\|c_2\|}\frac{\partial f}{\partial t}} n_1$$

$$= \frac{1}{\|c_2\|\|\dot{c}_2\|}(-\beta'(s)\sin t,\ -\alpha'(s)\sin t,\ -\beta'(s)\cos t,\ -\alpha'(s)\cos t)$$

$$= \frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|} e_1 \quad \frac{(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|} n_2$$

$$\overline{\nabla}_{e_2} n_1 = \overline{\nabla}_{\frac{1}{\|\dot{c}_2\|}\frac{\partial f}{\partial s}} n_1$$

$$= \frac{1}{\|\dot{c}_2\|^2}(-\beta''(s)\cos t,\ \alpha''(s)\cos t,\ -\beta''(s)\sin t,\ \alpha''(s)\sin t) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\|\dot{c}_2\|}\right)\frac{1}{\|\dot{c}_2\|}\frac{\partial f}{\partial s}$$

$$= \frac{1}{\|\dot{c}_2\|}(-\beta''(s)\cos t,\ \alpha''(s)\cos t,\ -\beta''(s)\sin t,\ \alpha''(s)\sin t) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\|\dot{c}_2\|}\right) e_2$$

$$= \frac{\alpha''\beta' - \beta''\alpha'}{\|\dot{c}_2\|^2} e_2$$

$$\overline{\nabla}_{e_1} n_2 = \overline{\nabla}_{\frac{1}{\|c_2\|}\frac{\partial f}{\partial t}} n_2$$

$$= \frac{1}{\|c_2\|^2}(-\beta(s)\cos t,\ \alpha(s)\cos t,\ -\beta(s)\sin t,\ \alpha(s)\sin t)$$

$$= \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|} e_2 + \frac{\alpha\beta' + \alpha'\beta}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|} n_2$$

$$\overline{\nabla}_{e_2} n_2 = \overline{\nabla}_{\frac{1}{\|\dot{c}_2\|}\frac{\partial f}{\partial s}} n_2$$

$$= \frac{1}{\|c_2\|\|\dot{c}_2\|}(-\beta'(s)\sin t, -\alpha'(s)\sin t,\ -\beta'(s)\cos t,\ -\alpha'(s)\cos t) +$$

$$+ \frac{1}{\|\dot{c}_2\|}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\|c_2\|}\right)\|c_2\| n_2$$

$$= \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\|c_2\|^2\|\dot{c}_2\|} e_1$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.1: (5.2.3) parametrelendirmesi ile verilen tensör çarpımı yüzeyi için

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= -a e_2 \\ \nabla_{e_1} e_2 &= a e_1 \\ \nabla_{e_2} e_1 &= 0 \\ \nabla_{e_2} e_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

ve

$$h(e_1, e_1) = bn_1$$
$$h(e_1, e_2) = -bn_2 \qquad (5.2.16)$$
$$h(e_2, e_2) = cn_1$$

dır.

Sonuç 5.2.2: (5.2.3) parametrelendirmesi ile verilen tensör çarpımı yüzeyinin şekil operatörü matrisleri

$$A_{n_1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, A_{n_2} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.2.17)$$

dir. Burada b ve c fonksiyonları

$$\text{b(s)} = \frac{\alpha(s)\beta(s)' - \alpha(s)'\beta(s)}{\|c_2(s)\|^2 \|c_2(s)'\|}$$

$$\text{c(s)} = \frac{\alpha(s)'\beta(s)'' - \beta(s)'\alpha(s)''}{\|c_2(s)'\|^3}$$

dir

Sonuç 5.2.3: (5.2.3) parametrelendirmesi ile verilen tensör çarpımı yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{1}{2}(b + c)n_1 = \lambda n_1 \ .$$

dir. Bu nedenle $b + c = 0$ ise yüzey minimaldir.

Açıklama 5.2.1: Bu tensor çarpım yuzeyinin minimal olması hali I.Mihai ve R.Rosca tarafından ispatlandı. Yazarlar çalışmalarında yüzeyin minimal olması için c_2 nin orijin merkezli hiperbol olması gerektiğini ispatladılar. Gerçekten

$c_2(s) = (\cosh s, \sinh s)$ hiperbol seçildiğinden

$$b(s) = (\frac{\cosh^2 s - \sinh^2 s}{(\cosh^2 s + \sinh^2 s)^2} = -\, c(s)$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{2}(b(s)+c(s)) = 0$ olduğu görülür. Böylece Mihai ve Rosca nın sınıflandırma teoreminin sağlandığı görülür.

Sonuç 5.2.4:

$$e_2(b) = a(c-2b) \tag{5.2.18}$$

dir.

İspat:

e_i, e_j, e_k teğet vektör alanları için

$$(\overline{\nabla}_{e_i} h)(e_j, e_k) = D_{e_i}\left(h(e_j, e_k)\right) - h(\nabla_{e_i} e_j, e_k) - h(e_j, \nabla_{e_i} e_k) \tag{5.2.19}$$

olduğundan

$$(\overline{\nabla}_{e_2} h)(e_2, e_1) = (\overline{\nabla}_{e_1} h)(e_2, e_2)$$

$$(\overline{\nabla}_{e_1} h)(e_2, e_1) = (\overline{\nabla}_{e_2} h)(e_1, e_1)$$

Codazzi denklemleri ve (5.1.2) ile (5.1.3) denklemi yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç5.2.5:

i) $a(s) = 0$, $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$ ise $c_2(s)$ bir çember ve Im(f) tensor çarpım yüzeyi bir Vranceanu yüzeyi olur. Bu yüzey $S^3(1)$ in bir minimal yüzeyidir.

ii) $b(s)$= 0 ise $c_2(s)$ orijinden geçen bir doğrudur. Bu durumda yüzey minimaldir.

iii)$c(s)$ = 0 ise $\alpha(s)$= $f(t)\,\beta(s) + g(s)$ şeklinde bir eğri olur.

Tanım5.2.1: M$\subset E^n$ bir alt manifold olsun. M nin ortalama eğrilik vektörü H için DH = 0 ise M ye paralel ortalama eğrilikli alt manifold adı verilir.

Teorem5.2.3: (5.2.9) parametrelendirmesi ile verilen tensör çarpımı yüzeyi paralel ortalama eğrilikli ise bu aşağıdaki yüzeylerden birisidir;

i) E^n nin miimal yüzeyidir

ii) E^n nin S^3 küresinde yatan sabit eğrilikli bir yüzeydir.

İspat: (5.1.1) parametrelendirmesi ile verilen tensör çarpımı yüzeyi paralel ortalama eğrilikli ise yani DH = 0 ise (5.2.14) denkleminden

$\lambda a = 0$ ve $e_2(\lambda) = 0$

dır. Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur.

1. durum: $\lambda = 0$

2. durum: $a = 0$ ve $e_2(\lambda) = 0$

Bu durumlar irdelendiğinde yüzey $\lambda = 0$ durumunda minimal ve diğer durumda ise sabit ortalama eğriliklidir. İkinci durumda $a = 0$ için

$$\alpha'(s)\beta(s) + \alpha(s)\beta'(s) = 0$$

dır. Yani, c_2 eğrisinin orijinden geçen bir çember olduğunu gösterir. Bu durumda yüzey iki çemberin tensör çarpımı olup S^3 te yatan bir yüzeydir.

Teorem5.2.4: (5.2.9) parametrelendirmesi ile verilen tensör çarpımı yüzeyi için

$$\Delta H = (ac\lambda - \lambda e_2(c) - 2ce_2(\lambda))e_2 + (e_2^2(\lambda) - \lambda(a^2 + b^2 + c^2) - ae_2(\lambda))n_1 \qquad (5.2.20)$$

dir.

İspat: R^4 teki bir yüzey için

$$(\Delta H = \bar{\nabla}_{e_1}\bar{\nabla}_{e_1}H + \bar{\nabla}_{e_2}\tilde{\nabla}_{e_2}H - \bar{\nabla}(\nabla_{e_1}e_1)H - \bar{\nabla}(\nabla_{e_2}e_2)H \qquad (5.2.21)$$

dır. Ayrıca sonuç3 den H = $\lambda\, n_1$ dir. Böylece (5.2.13) ve (5.2.14) yardımıyla

$$\bar{\nabla}_{e_1}H = \lambda\, b e_1 - \lambda\, a n_2 \;;\; (e_1(\lambda) = 0)$$

$$\bar{\nabla}_{e_2}H = -c\lambda e_2 + e_2(\lambda)n_1 \qquad (5.2.22)$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{\nabla}_{e_1}\bar{\nabla}_{e_1}H = -(\lambda e_2(c) + 2ce_2(\lambda))e_2 + (e_2^2(\lambda) - c^2\lambda)n_1 \qquad (5.2.23)$$

dir. Benzer şekilde (5.1.8)den

$$\bar{\nabla}(\nabla_{e_1}e_1)H = ac\lambda e_2 - ae_2(\lambda)n_1$$

$$\bar{\nabla}(\nabla_{e_2}e_2)H = 0 \qquad (5.2.24)$$

elde edilir. O halde (5.2.14) ve (5.2.15)eşitlikleri (5.2.12) de yerine yazılırsa (5.2.11) eşitliği elde edilir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç5.2.6: (5.2.9) parametrelendirmesi ile verilen yüzeyin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} &ac\lambda - \lambda e_2(c) - 2ce_2(\lambda) = 0 \\ &e_2^2(\lambda) - \lambda(a^2 + b^2 + c^2) - ae_2(\lambda) = 0 \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

olmasıdır.

Açıklama5.2.2: (5.2.20) denklem sisteminin aşikar çözümü $\lambda = 0$ dır. Bu da ‘’Chen conjecture’’ ı doğrular. Ayrıca a = 0 ve $\lambda = \text{sabit}$ olması halinde (5.2.20)den $e_2(b) = 0$ bulunur. Yani b sabittir. Bu nedenle (5.2.25) dan $\lambda(b^2 + c^2) = 0$ bulunur. Bu da $\lambda = 0$ olduğunu gösterir. Böylece c_2 eğrsi orijinden geçen bir doğrudur.

Açıklama 5.2.3: c_2 nin hiperbol olması durumunda açıklama (5.2.14)dan $b(s) = -c(s)$ elde edilir. Böylece $\lambda = 0$ dır. Bu durumda (5.2.25) sağlanır.

KAYNAKLAR

Arslan, K., 1993. Isoparametric Submanifolds with Pk-PNS. Ph D. Thesis, Leeds University

Arslan, K., Çelik, Y., 1997, A Note On Geodesic Circles On Riemannian Manifolds, FarEast J.Math. Sci. 5(3), 453-459.

Arslan ve ark., 2000, On Harmonic Curvatures of A Frenet Curve, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1 V.49.pp15-23.

Arslan ve ark., 2000, 2-Semiparallel surafces in space forms I: Two particular cases, Proc. Est.Ac.,49(3), 139-148.

Arslan, K. and West, A., 1996. b. Non Spherical Submanifold with 2-Planar Normal Sections., Bull London. Math. Soc. Vol 28, p. 88-92.

A. Gray, 1993 ,Modern di®erential geometry of curves and surfaces, Crc Press,.G.Y. Jiang , 2-harmonic maps and ¯rst and second variation formulas, Chinese Ann. Math. Ser. A, 7 (1986), 386-401

B. Kılıç and K. Arslan, 2004 On curves and surfaces of AW(k) type, BAÜ. Fen Bil.Enst. Der., 6.1, 52-61

B. Kilic, K. Arslan and G. Ozturk,2008, Tangentially cubic curves in Euclidean spaces, Dif.Geo. - Dyn. Syst., 10

B.Y. Chen,1991, Some open problems and conjecture on submanifolds of finite type ,Schoow J. Math., 17 (1991), 164-188.

Barros, M., Garay. O.J., 1995. On Submanifolds with Harmonic Mean Curvature, Proc Amer.Math.Soc.123, 2545-2549.

C. Özgür, F. Gezgin, 2005, On some curves of AW(k) type, Dif. Geo-Dyn. Syst. 7 , 74-80

Chen, B.Y., 1973. Geometry of Submanifolds, Dekker, New York.

Chen, B.Y., 1983, On the total curvature of immersed manifolds, VI:Submanifols of finite type and their applications, Bull.Inst.Math.Acad.Sinica 11,309-328

Chen, B.Y., 1984, Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific.

Chen, B.Y ve ark.,1990., Finite typecurves, Geometry and Topology of Submanifolds, 2, 76-110.

Chen, B.Y.,Deprez, J., Verheyen, P., 1992, Immersion with geodesics of 2- type, Geometry and Topology of Submanifolds, 4, 87-110.

Chen, B.Y., Ishikawa, S. 1991, Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean space, Memoirs Fac.Sci.Kyushu Univ. Ser.A.Math., 45, no2, 323-347.

Chen, B.Y., Li, S.,1986, Classification of Surfaces with Planar Normal Sections.,J. Geom. Vol 26, p.21-34.

Chen, B.Y. and Verhayen, P., 1984 Submanifolds with Geodesic Normal Sections. Vol 269, p.417-429.

Defever, F.,1998, Hypersurfaces of IE^4 with Harmonic Mean Curvature., Math.Nachr. 196,61-69.

D. Langwitz,1965, Differential and Riemannian Geometry, Academic press

Dimitric, I. 1992, Submanifolds of IE^m with harmonic mean curvature vector, Bull .Inst Math. Acad.Sinica, 20, 53-65.

H. Pottman and M. Hofer,2005, A variational approach to spline curves on Surfaces, Computer Aided Geometric Design, 22 (2005), 693-709

J. Eells, J.H. Sampson, 1964, Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. Math., 86(1964), 109-160

K. Arslan and A. West,1995 Product submanifolds with pointwise 3-planar normal sections, Glas- gow Math. J., 37 (1995), No 1, 73-81

K. Arslan and C. Özgür,1999, Curves of AW(k) type, Geo. and Top. of submanifolds, IX Valan- ciennes/Lyon/Leuven, 1997), 21-26, World Sci. Publishing, River edge, (1999)

Kılıç, B., 2002, Sonlu Tipte Eğriler Ve Yüzeyler, Doktora Tezi, Hacettepe Ünv.

L. Loubeau and S. Montaldo,2007, Biminimal immersions, ArXiv:math.DGl 0405320.

L. Loubeau and S. Montaldo,2007, Biminimal immersions in space forms, ArXiv:math.DGl 0405320

Lümiste, U., 1990, Three dimensional submanifolds with paralel third fundamental form in Euclidean spaces, Tartu Ulikooli Toimetised. Acta et comm. Univ. Tartuensis, no 889, 45-56.

Lümiste, U., 1999, Submanifolds with paralel fundamental form, Handbook of Differantial Geometry, Vol.1, Chapter 7, 86p.

O'Neill, B.1966, Elemantary Differantial Geometry, 1966. Academic Press.

Özgür, C. , 1997, Noktasal k-Düzlemsel Normal Kesitlere Sahip Altmanifoldlar,
Yüksek Lisans Tezi., Kocaeli Ünv.

R. Caddeo, S. Montaldo and D. Piu,2001, Biharmonic curves and surfaces. Ren. d. Mat. serie VII Roma, 21 (2001), 143-157.

R.Yücel,2004, Düzlemsel ve uzay eğrilerinin tensör çarpımı (Bursa, 2004)

Salkowski, 1909, Zur Transformation von Raunkurven, Math. Ann. 66 (1909), 517-557.

Suizu, K., Maeda, S., Adachi, T., 2002, Study of Submanifolds by Curves of Order 2, Mcm. Fac. Sci. Eng. Shimanc Univ. Scrics B: Mathematical Science 35, pp.1-21..

Takahashi, 1986, Minimal immersions into an Euclidean Space, Michigan Math. J. 33, 353-364

U. Lümiste,1986, Small dimensional irreducible submanifolds with parallel third, fundamental form, Tartu A.Ulikooli Toimetised, Acta et comm. uni. Taruensis, 734 , 50-62

..

.

İNDEKS

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana her türlü desteği veren, yardımlarını esirgemeyen ve bu çalışmayı yöneten sayın hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a , öneri ve görüşlerinden faydalandığım değerli hocam Prof.Dr. Cengizhan MURATHAN'a sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Tutak'ta doğdu. İlk öğrenimini Milas Gümüşlük İlköğretim Okulu'nda, ortaöğrenimini Milas Anadolu Lisesi'nde 2001'de tamamladı. 2002 yılında Uludağ Üniversitesi Matematik Bölümüne başlayarak 2006 yılında matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2006 da Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matemati Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.