T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERNOULLI SAYILARI, POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Müge ÇAPKIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERNOULLI SAYILARI, POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Müge ÇAPKIN

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERNOULLI SAYILARI, POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Müge ÇAPKIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez ..../...../200... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL ....
Danışman

....

ÖZET

Bu tezde Bernoulli sayıları ve polinomları tanımlanmış ve çeşitli özellikleri ele alınarak, kullanım alanları gösterilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın diğer bölümlerine temel oluşturacak kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde Bernoulli sayıları ve polinomları tanımlanmış ve bunları hesaplamaya yarayan bağıntılar ele alınmıştır. Ayrıca Bernoulli sayıları ve polinomlarının bazı özellikleri ile bu sayılar ve polinomlar arasındaki ilişki gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde Bernoulli sayıları ve polinomlarının özellikleri verilmeye devam edilmiş, bu sayıların ve polinomların kullanım alanları, benzeri sayılarla olan ilişkileri ve bu sayılar yardımıyla bazı fonksiyonların seri açılımları ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise Bernoulli sayıları ve polinomlarının özel birer halleri olan genelleştirilmiş Bernoulli sayıları ve genelleştirilmiş Bernoulli polinomları tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

ABSTRACT

In this thesis, Bernoulli numbers and polynomials are defined and several properties and usage areas are given.

The thesis consists of four chapters. In the first chapter, the preliminary notions which are to be used in later chapters are given.

In the second chapter Bernoulli numbers and polynomials are defined and relations to calculate them are considered. Also some properties of Bernoulli numbers and polynomials and the relations between these numbers and polynomials are given.

In the third chapter some further properties of Bernoulli numbers and polynomials are given and some usage areas of them, relations with similar numbers, and series expansion of some functions by means of these numbers are studied.

In the fourth and final chapter, generalised Bernoulli numbers and polynomials which are just some special cases of classical Bernoulli numbers and polynomials are defined and some properties are given.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Bernoulli sayıları Avrupa'da ilk olarak İsveçli matematikçi Jacob Bernoulli'nin (1654-1705) meşhur bilimsel çalışması Ars Conjectandi'nin 97. sayfasında, ardışık tamsayıların kuvvetlerinin toplamını çalışırken görüldü. Bernoulli kuvvet toplamlarını hesaplamak için saatlerce uğraşmak yerine, birkaç dakikada (8 dakikadan az)

$$1^{10}+2^{10}+3^{10}+\ldots+1000^{10}=91{,}409{,}924{,}241{,}424{,}241{,}424{,}241{,}924{,}242{,}500$$

gibi bir toplamı hesapladı, (http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_numbers, 2009).

Japonya'da, belki Avrupa'dan daha önce, Bernoulli sayıları bağımsız olarak Seki Takakazu tarafından keşfedildi. 2000 yıl önce Yunanlı matematikçi Pythagoras

$$1+2+3+....+n$$

üçgen sayılarını belirtti. Arşimet

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(8n+1)(2n+1)$$

olduğunu keşfetti. Daha sonra 5. yy. da Hintli matematikçi Aryabhata,

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

olduğunu ileri sürdü. 500 yıla kalmadan Arap matematikçi Al-Khwarizm,

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

olduğunu gösterdi, (Lin 2004).

Johann Faulhaber (1580-1635), 1615'te yayımlanan Mysterium Arithmeticum adlı eserinde 1 den n e kadar olan pozitif tam sayıların 17. kuvvetine kadar toplamı veren bir formül buldu,

(http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/bernoulli.html, 2009).

Bernoulli sayıları tanjant, hiperbolik tanjant, kotanjant, hiperbolik kotanjant fonksiyonlarının Taylor seri açılımlarında, Euler Mac-Laurin formülünde ve Riemann zeta fonksiyonunun belli değerleri için ifadelerde görülür. Ayrıca Fermat'ın son teoreminde de bu sayılarla karşılaşılır. Kummer, eğer bir p asalı Bernoulli sayılarının hiçbirinin paydasını bölmüyorsa, o p asalının özel olduğunu fark etti. Bu tarz asallara şu an "regular" denmektedir. Kummer ayrıca, bir p asalı regular ise Fermat'ın son teoreminin geçerli olduğunu yani $x^p + y^p = z^p$ nin aşikar olmayan çözümünün olmadığını gösterdi, (Sandifer, 2005).

Bernoulli B_{10} a kadar olan Bernoulli sayılarını hesapladıktan sonra Euler B_{30} a kadar olanları hesapladı. 1 yy. sonra J. C. Adams B_{124} e kadar olan tüm Bernoulli sayılarını bulan bir hesaplama yaptı. 1996'da Simon Plouffe ve Greg J. Fee yaklaşık 800 000 basamaklı olan B_{200000} sayısını hesapladılar.

Euler, Bernoulli sayılarıyla Basel probleminin çözümünde,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

olduğunu gösterirken karşılaştı ancak o zaman bunların Bernoulli sayıları olduğunu anlamadı, (Sandifer 2005).

19. yy. da Charles Babbage, Akıllı Motoru (Analytical Engine) dizayn ettiğinde makineden umduğu çok önemli bir performans da Bernoulli Sayılarının hesaplanmasıydı, (Sandifer, 2005).

Ada Byron'ın 1942'de Akıllı Motor (Analytical Engine) notlarında Bernoulli sayıları ile üretilen bir bilgisayar algoritması vardı. Yayınlanan ilk bilgisayar programının konusu olması da Bernoulli sayılarını ayrıcalıklı kılan bir durumdur, (http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_numbers, 2009).

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan teoremler, tanımlar ve bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 1.1: $f: S \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ fonksiyonu ve bir $z_0 \in \mathbf{C}$ noktası verilsin. Eğer z_0 noktasının belli bir komşuluğundaki her noktada f diferensiyellenebilirse, f ye z_0 *noktasında analitiktir* denir.

Teorem 1.1: f, $z_0 \in \mathbf{C}$ noktasında analitik bir fonksiyon ise, f nin z_0 ın belli bir komşuluğundaki z noktalarında

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

biçiminde Taylor seri açılımına sahiptir, (Başkan 2001).

Örnek 1: $f(z) = e^z$ fonksiyonu her noktada, özel olarak $z_0 = 0$ noktasında analitik olduğundan bu noktanın belli bir komşuluğunda kuvvet serisi ile ifade edilebilir:

$$a_0 = f(z_0)$$

$$= f(0) = e^0 = 1,$$

$$a_1 = \frac{f'(z_0)}{1!}$$

$$= \frac{f'(0)}{1!} = \frac{e^0}{1} = 1, \ldots$$

ve

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$$

olduğundan $f(z) = e^z$ fonksiyonunun

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1.1}$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

şeklinde Taylor seri açılımı vardır.

Tanım 1.2: $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$, $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$ iki kuvvet serisi olmak üzere bu serilerin çarpımları

$$C_n(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{t^k}{k!} b_{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

şeklindedir. Bu çarpıma *Cauchy çarpımı* denir.

Tanım 1.3: $s > 1$ için

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Riemann zeta fonksiyonu* denir, (Conway 1986).

Tanım 1.4 : Riemann zeta fonksiyonunun genelleştirilmesi olarak düşünülebilen *Hurwitz zeta fonksiyonu,*

$$\varsigma(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

şeklinde tanımlanır, (Conway 1986).

$a = 1$ alınırsa $\varsigma(s,1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots = \varsigma(s)$ olduğu görülür.

Tanım 1.5 : $f(x), (-L,L)$ de tanımlı ve $2L$ periyotlu bir fonksiyon, yani $f(x+2L) = f(x)$ olsun. $n = 0,1,2,3,...$ için

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

ve

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

olmak üzere, $f(x)$ in *Fourier seri açılımı*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tek fonksiyonların Fourier seri açılımlarında sadece sin terimleri, çiftlerin açılımında ise sadece cos terimleri bulunur. O halde katsayılar;

$$f(x) \text{ tekse } a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

ve

$$f(x) \text{ çiftse } b_n = 0, a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

şeklindedir, (Spiegel 1974).

2. BERNOULLI SAYILARI VE POLİNOMLARI

2.1. Giriş

$S_p(n)$ ile 1 den $(n-1)$ e kadar olan sayıların p. kuvvetlerinin toplamı gösterilmek üzere,

$$S_0(n) = n-1,$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4},$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30},$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{n^2(2n^2-2n-1)(n-1)^2}{12}, \ldots$$

yazılabilir.

Jacob Bernoulli deneysel olarak ($\sum$ ya da faktöryel sembollerini kullanmadan) $S_p(n)$ polinomlarının

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1}n^{p+1} - \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{12}n^{p-1} + 0.n^{p-2} + \ldots$$

formunda olduğunu buldu. Bu açılımda görülen p den bağımsız 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$, 0, … sayıları *Bernoulli sayılarıdır* ve k. Bernoulli sayısı B_k şeklinde gösterilir. Buna göre $S_p(n)$ düzenlenirse,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = S_p(n)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{k!} \frac{p!}{(p+1-k)!} n^{p+1-k}$$

elde edilir. Pay ve payda $(p+1)!$ ile çarpılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = S_p(n)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{k!} \frac{p!}{(p+1-k)!} n^{p+1-k} \tag{2.1}$$

$$= \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}$$

$$= \frac{B_0}{0!} \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{B_1}{1!} n^p + \frac{B_2}{2!} p n^{p-1} + \frac{B_3}{3!} p(p-1) n^{p-2} + \ldots + \frac{B_p}{1!} n$$

bulunur. Buna göre ilk birkaç Bernoulli sayısı,

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ \ldots$$

şeklindedir.

Bernoulli sayıları üreteç fonksiyonu yardımıyla da tanımlanabilir.

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

fonksiyonuna *Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu* denir.

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!},\ |t| < 2\pi \tag{2.2}$$

dir. Bu açılımdaki B_n katsayılarına *Bernoulli sayıları* denir.

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = B_0 + B_1 t + B_2 \frac{t^2}{2!} + B_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

açılımında $t \to 0$ iken sol taraf $\lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{e^t} = 1$ ve sağ taraf B_0 olacağından,

$$B_0 = 1 \tag{2.3}$$

dir, (http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/bernoulli.html, 2009). Diğer Bernoulli sayılarını hesaplamak için indirgeme formülüne ihtiyaç duyulur.

2.2. Bernoulli Sayıları İçin İndirgeme Formülü

(1.1) bağıntısı, Tanım 1.2. ve (2.2) bağıntısından,

$$\frac{t}{e^t-1}e^t = t+\frac{t}{e^t-1},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right) = t+\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{t^k}{k!}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\right) = t+\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}-\frac{B_n}{n!}\right)t^n = t$$

elde edilir. t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa $n>1$ için

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}-\frac{B_n}{n!}=0,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}=\frac{B_n}{n!},$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k \tag{2.4}$$

indirgeme formülü elde edilir. Buradan Bernoulli sayıları hesaplanabilir. Örneğin, $n=2$ için,

$$B_2=\sum_{k=0}^{2} B_k\binom{2}{k} = \binom{2}{0}B_0+\binom{2}{1}B_1+\binom{2}{2}B_2,$$

$$0=1+2B_1,$$

$$-\frac{1}{2}=B_1$$

dir. $n=3$ için,

$$B_3=\sum_{k=0}^{3} B_k\binom{3}{k} = \binom{3}{0}B_0+\binom{3}{1}B_1+\binom{3}{2}B_2+\binom{3}{3}B_3,$$

$$0 = 1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 3B_2,$$

$$\frac{1}{6} = B_2$$

dir. Bu şekilde devam edilerek

$$B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \ \ldots$$

istenilen Bernoulli sayıları hesaplanabilir, (Conway 1986).

2.3. Bernoulli Polinomları

$$f(t,x) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}$$

fonksiyonu yardımıyla Bernoulli polinomları hesaplanabilir. $f(t,x)$ polinomuna *Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu* denir.

$$f(t,x) = f(t)e^{tx} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \ |t| < 2\pi \tag{2.5}$$

seri açılımındaki $B_n(x)$ katsayılarına *Bernoulli polinomları* denir.

2.4. Bernuolli Sayıları İle Bernoulli Polinomları Arasındaki İlişki

(2.5) bağıntısı düzenlenirse Tanım 1.2 den,

$$\frac{t}{e^t - 1}e^{tx} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{t^k}{k!}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}x^{n-k}\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{x^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)t^n$$

dir. t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} B_k \frac{x^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k}$$

ve

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{k} x^{n-k} \tag{2.6}$$

bulunur ki bu Bernoulli sayıları ile polinomları arasındaki ilişkiyi verir, (Conway 1986).

2.5. Bernoulli Polinomlarının Hesaplanması

Bernoulli polinomlarını hesaplamak için (2.6) bağıntısı kullanılırsa,

$n = 0$ için,

$$B_0(x) = \binom{0}{0} B_0 x^o = 1$$

dir. $n = 1$ için,

$$B_1(x) = \binom{1}{0} B_0 x^1 + \binom{1}{1} B_1 x^0,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

dir. $n = 2$ için,

$$B_2(x) = \binom{2}{0} B_0 x^2 + \binom{2}{1} B_1 x^1 + \binom{2}{2} B_2 x^0,$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

dir. Bu şekilde devam edilerek istenilen Bernoulli polinomları hesaplanabilir.

(2.5) bağıntısında $x = 0$ alınırsa,

$$\frac{te^{t0}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(0)\frac{t^n}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(0)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$B_n = B_n(0) \tag{2.7}$$

elde edilir. Bu sonuç (2.6) bağınıtısı kullanılarak da bulunabilir. Bunun için bağıntıda $x = 0$ alınırsa,

$$B_n(0) = \binom{n}{0}B_0 0^n + \binom{n}{1}B_1 0^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}B_n$$

bulunur. Bu eşitliğin geçerli olabilmesi için

$$B_n(0) = B_n$$

olmalıdır.

(2.5) bağıntısında $x = 1$ alınırsa,

$$\frac{te^{t1}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1)\frac{t^n}{n!},$$

$$t + \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1)\frac{t^n}{n!},$$

$$t + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1)\frac{t^n}{n!},$$

$$t = \sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n(1) - B_n\right)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $n > 1$ için

$$B_n(1) - B_n = 0, \text{ yani } B_n(1) = B_n \tag{2.8}$$

dir. $n = 1$ için

$$B_n(1) - B_n = 1$$

dir.

(2.6) özelliğinden

$$B_n(x)=\binom{n}{0}B_0x^n+\binom{n}{1}B_1x^{n-1}+...+\binom{n}{n-1}B_{n-1}x^1+\binom{n}{n}B_nx^0$$

$$=B_0x^n+nB_1x^{n-1}+...+nB_{n-1}x+B_n$$

dir. Türev alınırsa

$$\frac{d}{dx}B_n(x)=\frac{d}{dx}\left[B_0x^n+nB_1x^{n-1}+...+nB_{n-1}x+B_n\right]$$

$$=nB_0x^{n-1}+n(n-1)B_1x^{n-2}+...+nB_{n-1}$$

$$=n[B_0x^{n-1}+(n-1)B_1x^{n-2}+...+B_{n-1}]$$

$$=n\left[\binom{n-1}{0}B_0x^{n-1-0}+\binom{n-1}{1}B_1x^{n-1-1}+...+\binom{n-1}{n-1}B_{n-1}x^{n-1-(n-1)}\right]$$

$$B_n'(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B_kx^{n-1-k}=nB_{n-1}(x) \tag{2.9}$$

özelliği elde edilir, (Conway 1986)

Örnek 2: $\int_a^x B_n(t)dt=\frac{1}{n+1}[B_{n+1}(t)]_a^x=\frac{B_n(x)-B_n(a)}{n+1}$ dir, (Abromowitz ve Stegun 1964).

Örnek 3: $\int_0^1 xB_n(x)dx$ integralini iki farklı yoldan hesaplayarak

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{B_k}{n+2-k}=\frac{B_{n+1}}{n+1}$ olduğunu göstermek için kısmi integrasyon metodu, (2.8) ve (2.9) bağıntılarından yararlanılır. Gerçekten,

$$\int_0^1 xB_n(x)dx=\left[\frac{x}{n+1}B_{n+1}(x)\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(x)dx$$

$$=\frac{1}{n+1}B_{n+1}(1)-\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}\left[B_{n+2}(x)\right]_0^1$$

$$=\frac{B_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(B_{n+2}(1)-B_{n+2}(0)\right)$$

$$= \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

bulunur. (2.6) özelliğinden

$$\int_0^1 xB_n(x)dx = \int_0^1 x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\int_0^1 x^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\left[\frac{x^{n-k+2}}{n-k+2}\right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Bk\frac{1}{n-k+2}$$

bulunur. Böylece;

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{B_k}{n+2-k} = \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

olduğu görülür.

Teorem 2. 1: $n \geq 1$ için

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

dir. Ayrıca $n \geq 2$ için

$$B_n(0) = B_n(1)$$

dir, (Apostol 1976).

İspat: (2.5) denkleminden yararlanılarak,

$$t\frac{e^{(x+1)t}}{e^t-1} - t\frac{e^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B_n(x+1)\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

$$t\frac{e^{tx}e^t - e^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n(x+1) - B_n(x)\right]\frac{t^n}{n!},$$

$$te^{xt} = t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n(x+1) - B_n(x)\right]\frac{t^n}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n(x+1) - B_n(x)\right]\frac{t^n}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n(x+1)-B_n(x)\right]\frac{t^n}{n!},$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{t^n x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n(x+1)-B_n(x)\right]\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$$

elde edilir. Burada $n>1$ için $x=0$ alınırsa,

$$B_n(0)=B_n(1)$$

olduğu görülür. $n=1$ içinse

$$B_1(0)=-\frac{1}{2} \text{ ve } B_1(1)=\frac{1}{2} \text{ olduğundan } B_1(1)\neq B_1(0) \text{ dır.}$$

Conway ve Guy Bernoulli sayılarının şık bir sunumunu verdiler. Buna göre $n\geq 1$ için,

$$(B+1)^{n+1}=B^{n+1} \tag{2.10}$$

olarak yazılırsa, sol taraf binom açılımı olarak hesaplandıktan sonra B^k lar B_k Bernoulli sayıları olarak gösterilirse, Bernoulli sayıları hesaplanabilir. Gerçekten, $n=1$ için,

$$(B+1)^2=B^2,$$

$$B^2+2B^1+1=B^2,$$

$$B_2+2B_1+1=B_2,$$

$$B_1=-\frac{1}{2}$$

dir. $n=2$ için,

$$(B+1)^3=B^3,$$

$$B^3+3B^2+3B^1+1=B^3,$$

$$B_3+3B_2+3B_1+1=B_3,$$

$$B_2=\frac{1}{6}$$

bulunur. Bu şekilde devam ederek diğer Bernoulli sayıları da hesaplanır.

(2.10) bağıntısında $n+1$ yerine n alınırsa, $n=1$ için,

$$B_1 + 1 \neq B_1$$

olduğundan $n > 1$ için

$$(B+1)^n = B^n$$

bulunur. Buradan

$$(B+1)^n - B^n = 0$$

elde edilir. Burada $n = 2, 3, 4, \ldots$ için Bernoulli sayıları ve Pascal üçgeni ile bağlantılı, sonsuz bir denklem sistemi elde edilir. O halde

$$0 = 1B_0 + 2B_1,$$

$$0 = 1B_0 + 3B_1 + 3B_2,$$

$$0 = 1B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3,$$

$$0 = 1B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4, \ldots$$

olur, (Conway ve Guy 1996).

3. BERNOULLI SAYILARI VE POLİNOMLARININ KULLANIM ALANLARI

3.1. Giriş

Tanım 3.1: m bir tamsayı ve $0 \le \theta < 1$ olmak üzere, herhangi bir x reel değişkeni;

$$x = m + \theta$$

biçiminde bir tek şekilde yazılabilir. m *ye* x *in tamsayı kısmı* denir ve $[x]$ ile gösterilir.

Tanım 3.2: x bir reel değişken olmak üzere,

$$\overline{B_n}(x) = B_n(x - [x])$$

şeklinde tanımlanan $\overline{B_n}(x)$ fonksiyonuna *Bernoulli fonksiyonu* denir. Bernoulli fonksiyonu $\overline{B_n}(x+1) = B_n(x+1-[x+1]) = B_n(x+1-[x]-1) = \overline{B_n}(x)$ olduğundan periyodu 1 olan periyodik bir fonksiyondur ve $[0,1]$ aralığında $B_n(x)$ ile çakışır.

$$\overline{B_0}(x) = 1$$

dir

$$\overline{B_1}(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$$

ise x in tamsayı değerlerinde süreksizliklere sahiptir. Sağ ve sol limitleri arasındaki fark 1 birimdir. $n \ge 2$ için $\overline{B_n}(x)$ fonksiyonu süreklidir, (Cartier ve ark. 1992).

3.2. Euler - MacLaurin Formülü

f yeterli bir mertebeye kadar sürekli türevlere sahip, sürekli bir fonksiyon olsun. $B_1'(x) = 1$ olduğu göz önüne alınır ve kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 B_1'(x)f(x)dx = [B_1(x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 B_1(x)f'(x)dx$$

$$= [B_1(x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_2'(x)}{2}f'(x)dx$$

$$= [B_1(x)f(x)]_0^1 - \frac{1}{2}\left\{[B_2(x)f'(x)]_0^1 - \int_0^1 B_2(x)f''(x)dx\right\}$$

$$= [B_1(x)f(x)]_0^1 - \frac{1}{2}[B_2(x)f'(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\int_0^1 B_3'(x)f''(x)dx$$

$$= [B_1(x)f(x)]_0^1 - \frac{1}{2}[B_2(x)f'(x)]_0^1 + \frac{1}{6}\left\{[B_3(x)f''(x)]_0^1 - \int_0^1 B_3(x)f'''(x)dx\right\}$$

$$= [B_1(x)f(x)]_0^1 - \frac{1}{2}[B_2(x)f'(x)]_0^1 + \frac{1}{6}[B_3(x)f''(x)]_0^1 - \frac{1}{6}\frac{1}{4}\int_0^1 B_4'(x)f'''(x)dx$$

$$= [B_1(x)f(x)]_0^1 - \frac{1}{2}[B_2(x)f'(x)]_0^1 + \frac{1}{6}[B_3(x)f''(x)]_0^1$$

$$-\frac{1}{24}\left\{[B_4(x)f'''(x)]_0^1 - \int_0^1 B_4(x)f^{(iv)}(x)dx\right\}$$

$$= \ldots$$

bulunur. Bu şekilde devam edilerek,

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{r=1}^{q}(-1)^{r-1}\left[\frac{B_r(x)}{r!}f^{(r-1)}(x)\right]_0^1 + (-1)^q\int_0^1 \frac{B_q(x)}{q!}f^{(q)}(x)dx$$

elde edilir. $B_1(1) = \frac{1}{2}, B_1(0) = -\frac{1}{2}$ olduğundan her iki tarafa $-f(1)$ eklenirse,

$$\int_0^1 f(x)dx - f(1) = -\frac{f(1)}{2} + \frac{f(0)}{2} + \sum_{r=2}^{q}(-1)^{r-1}\left[\frac{B_r(x)}{r!}f^{(r-1)}(x)\right]_0^1$$

$$+(-1)^q\int_0^1 \frac{B_q(x)}{q!}f^{(q)}(x)dx$$

$$= \sum_{r=1}^{q}(-1)^{r-1}\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(1) - f^{(r-1)}(0)\right\} + (-1)^q\int_0^1 \frac{B_q(x)}{q!}f^{(q)}(x)dx$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f(1)=\int_0^1 f(x)dx+\sum_{r=1}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(1)-f^{(r-1)}(0)\right\}+(-1)^{q-1}\int_0^1\frac{B_q(x)}{q!}f^{(q)}(x)dx$$

elde edilir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu yerine $f(n-1+x)$ alınırsa

$$f(n)=\int_0^1 f(n-1+x)dx+\sum_{r=1}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(n)-f^{(r-1)}(n-1)\right\}$$

$$+(-1)^{q-1}\int_0^1\frac{B_q(x)}{q!}f^{(q)}(n-1+x)dx$$

elde edilir. a ve b tamsayılar olmak üzere, $a+1$ den b ye toplam alınırsa

$$\sum_{n=a+1}^{b}f(n)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{r=1}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)\right\}+R_q \tag{3.1}$$

bulunur. Burada kalan terim

$$R_q=(-1)^{q-1}\sum_{n=a+1}^{b}\int_0^1\frac{B_q(x)}{q!}f^{(q)}(n-1+x)dx$$

$$R_q=\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_a^b B_q(x-[x])f^{(q)}(x)dx \tag{3.2}$$

dir. (3.1) ile birlikte (3.2) formülüne Euler-MacLaurin formülü denir, (Rademacher 1973).

Teorem 3. 1: f, $(2k)$. türevi sürekli reel bir fonksiyon ve

$$S_k=\int_1^n f(t)dt+\frac{1}{2}\left(f(1)+f(n)\right)+\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(f^{(2i-1)}(n)-f^{(2i-1)}(1)\right)$$

olsun. Bu takdirde

$$R_k=\int_1^n f^{(2k)}(t)\frac{B_{2k}(t-[t])}{(2k)!}dt$$

hata terimi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)=S_k-R_k$$

dir, (Bruijn).

İspat: Öncelikle g, $[0,1]$ aralığında $(2k)$. türevi sürekli herhangi bir fonksiyon olsun.

$$\frac{1}{2}\left(g(0)+g(1)\right)-\int_0^1 g(t)dt=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)-\int_0^1 g^{(2k)}(t)\frac{B_{2k}(t)}{(2k)!}dt$$

olduğu kabul edilsin. Tümevarım yöntemi uygulanırsa, $k=1$ için

$$\frac{B_2}{2!}\left(g'(1)-g'(0)\right)-\int_0^1 g''(t)\frac{B_2(t)}{2!}dt$$

$$=\frac{B_2}{2!}\left(g'(1)-g'(0)\right)-\frac{1}{2!}\left\{\left[B_2(t)g'(t)\right]_0^1-2\int_0^1 g'(t)B_1(t)dt\right\}$$

$$=\frac{B_2}{2!}\left(g'(1)-g'(0)\right)-\frac{1}{2!}\left[B_2(1)g'(1)-B_2(0)g'(0)\right]+\int_0^1 g'(t)B_1(t)dt$$

$$=\frac{B_2}{2!}\left(g'(1)-g'(0)\right)-\frac{B_2}{2!}\left(g'(1)-g'(0)\right)+\int_0^1 g'(t)B_1(t)dt$$

$$=\left[B_1(t)g(t)\right]_0^1-\int_0^1 g(t)B_0(t)dt=B_1(1)g(1)-B_1(0)g(0)-\int_0^1 g(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[g(1)+g(0)\right]-\int_0^1 g(t)dt$$

olduğundan kabul doğru olur. k için doğru olsun. Yani,

$$\frac{1}{2}\left(g(0)+g(1)\right)-\int_0^1 g(t)dt=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)-\int_0^1 g^{(2k)}(t)\frac{B_{2k}(t)}{(2k)!}dt$$

doğru olsun. $k+1$ için

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)-\int_0^1 g^{(2k+2)}(t)\frac{B_{2k+2}(t)}{(2k+2)!}dt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)+\frac{B_{2k+2}}{2k+2}\left(g^{(2k+1)}(1)-g^{(2k+1)}(0)\right)$$

$$-\int_0^1 g^{(2k+2)}(t)\frac{B_{2k+2}(t)}{(2k+2)!}dt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)+\frac{B_{2k+2}}{2k+2}\left(g^{(2k+1)}(1)-g^{(2k+1)}(0)\right)$$

$$-\frac{1}{(2k+2)!}\left\{\left[B_{2k+2}(t)g^{(2k+1)}(t)\right]_0^1-(2k+2)\int_0^1 B_{2k+1}(t)g^{(2k+1)}(t)dt\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)+\frac{B_{2k+2}}{2k+2}\left(g^{(2k+1)}(1)-g^{(2k+1)}(0)\right)$$

$$-\frac{1}{(2k+2)!}\left[B_{2k+2}(1)g^{(2k+1)}(1)-B_{2k+2}(0)g^{(2k+1)}(0)\right]$$

$$+\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 B_{2k+1}(t)g^{(2k+1)}(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)+\frac{B_{2k+2}}{2k+2}\left(g^{(2k+1)}(1)-g^{(2k+1)}(0)\right)$$

$$-\frac{B_{2k+2}}{2k+2}\left(g^{(2k+1)}(1)-g^{(2k+1)}(0)\right)+\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 B_{2k+1}(t)g^{(2k+1)}(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)+\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 B_{2k+1}(t)g^{(2k+1)}(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)$$

$$+\frac{1}{(2k+1)!}\left\{\left[B_{2k+1}(t)g^{(2k)}(t)\right]_0^1-(2k+1)\int_0^1 B_{2k}(t)g^{(2k)}(t)dt\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)+\frac{1}{(2k+1)!}\left[B_{2k+1}(1)g^{(2k)}(1)-B_{2k+1}(0)g^{(2k)}(0)\right]$$

$$-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 B_{2k}(t)g^{(2k)}(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)+\frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!}\left[g^{(2k)}(1)-g^{(2k)}(0)\right]$$

$$-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 B_{2k}(t)g^{(2k)}(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(g^{(2i-1)}(1)-g^{(2i-1)}(0)\right)-\frac{1}{(2k)!}\int_0^1 B_{2k}(t)g^{(2k)}(t)dt$$

olduğundan doğru olur. Şimdi

$$g(x)=f(x+1),g(x)=f(x+2),...,g(x)=f(x+n-1)$$

alınırsa,

$$\frac{1}{2}\left(f(1)+f(2)\right)-\int_0^1 f(t+1)dt=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[f^{(2i-1)}(2)-f^{(2i-1)}(1)\right]$$

$$-\int_0^1 f^{(2k)}(t+1)\frac{B_{2k}(t)}{(2k)!}dt$$

$$\frac{1}{2}\big(f(2)+f(3)\big)-\int_0^1 f(t+2)dt=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[f^{(2i-1)}(3)-f^{(2i-1)}(2)\right]$$

$$-\int_0^1 f^{(2k)}(t+2)\frac{B_{2k}(t)}{(2k)!}dt$$

$$\frac{1}{2}\big(f(3)+f(4)\big)-\int_0^1 f(t+3)dt=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[f^{(2i-1)}(4)-f^{(2i-1)}(3)\right]$$

$$-\int_0^1 f^{(2k)}(t+3)\frac{B_{2k}(t)}{(2k)!}dt$$

...

$$\frac{1}{2}\big(f(n-1)+f(n)\big)-\int_0^1 f(t+n-1)dt=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[f^{(2i-1)}(n)-f^{(2i-1)}(n-1)\right]$$

$$-\int_0^1 f^{(2k)}(t+n-1)\frac{B_{2k}(t)}{(2k)!}dt$$

bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+....+\frac{1}{2}f(n)-\int_1^n f(t)dt=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[f^{(2i-1)}(n)-f^{(2i-1)}(1)\right]$$

$$-\int_1^n f^{(2k)}(t)\frac{B_{2k}(t-[t])}{(2k)!}$$

olur. Düzenlenirse

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)=\int_1^n f(t)dt+\frac{1}{2}\big(f(1)+f(n)\big)+\sum_{i=1}^{k}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[f^{(2i-1)}(n)-f^{(2i-1)}(1)\right]$$

$$-\int_1^n f^{(2k)}(t)\frac{B_{2k}(t-[t])}{(2k)!}$$

elde edilir. Yani,

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)=S_k-R_k$$

dir.

3.3. Stirling Formülü

Euler-MacLaurin toplam formülünün bir uygulaması olan Stirling formülü çok kullanışlıdır. Stirling formülü için

$$f(x) = \log x$$

fonksiyonuna Euler-MacLaurin formülü uygulanıp, $a = 1$, $b = N$ ve $q = 2m$ alınıp $B_1 = -\frac{1}{2}$ olduğu hatırlanırsa

$$\sum_{n=2}^{N} \log n = \int_1^N \log x dx + \sum_{r=1}^{2m} (-1)^r \frac{B_r}{r!} \left\{ f^{(r-1)}(N) - f^{(r-1)}(1) \right\}$$
$$+ \frac{(-1)^{2m-1}}{(2m)!} \int_1^N B_{2m}(x - [x]) f^{(2m)}(x) dx$$

elde edilir ve bu denklem düzenlenirse,

$$\log N! = \int_1^N \log x dx - \frac{B_1}{1!}\left(f(N) - f(1)\right)$$
$$+ \frac{B_2}{2!}\left(f'(N) - f'(1)\right) + \ldots + (-1)^{2m} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(f^{(2m-1)}(N) - f^{(2m-1)}(1)\right)$$
$$+ \frac{(-1)^{2m-1}}{(2m)!} \int_1^N B_{2m}(x - [x]) f^{(2m)}(x) dx$$

bulunur.

$$f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f'''(x) = 2\frac{1}{x^3},\ \ldots,\ f^{(2m)}(x) = (-1)^{2m-1}(2m-1)!\frac{1}{x^{2m}}$$

olduğundan,

$$\log N! = \int_1^N \log x dx - \left(\frac{-1}{2}\right)\log N + \frac{B_2}{2!}\left(\frac{1}{N} - 1\right) + \frac{B_4}{4!}\left(\frac{2}{N^3} - 2\right) + \ldots$$
$$+ \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{(2m-2)!}{N^{2m-1}} - (2m-2)!\right)$$
$$+ \frac{(-1)^{2m-1}}{(2m)!} \int_1^N B_{2m}(x - [x])(-1)^{2m-1}(2m-1)!x^{-2m} dx$$

bulunur. Düzenlenirse,

$$\log N! = \int_1^N \log x dx - \left(\frac{-1}{2}\right)\log N + \frac{B_2}{2!}\left(\frac{1}{N}-1\right) + \frac{B_4}{4!}2!\left(\frac{1}{N^3}-1\right)+\ldots$$

$$+\frac{B_{2m}}{(2m)!}(2m-2)!\left(\frac{1}{N^{2m-1}}-1\right)$$

$$+\frac{(-1)^{2m-1}}{(2m)!}\int_1^N B_{2m}(x-[x])(-1)^{2m-1}(2m-1)!x^{-2m}dx$$

$$= \int_1^N \log x dx + \frac{1}{2}\log N + \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j)!}(2j-2)!\left(\frac{1}{N^{2j-1}}-1\right) + \int_1^N \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m}x^{-2m}dx$$

olur. İntegral alınırsa,

$$\log N! = \left(N+\frac{1}{2}\right)\log N - N + \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j-1)2j}\left(\frac{1}{N^{2j-1}}-1\right) + \int_1^N \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m}x^{-2m}dx$$

$$= \left(N+\frac{1}{2}\right)\log N - N + \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j-1)2j}\left(\frac{1}{N^{2j-1}}-1\right)$$

$$+\int_1^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m}x^{-2m}dx - \int_N^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m})x^{-2m}dx$$

$$= \left(N+\frac{1}{2}\right)\log N - N + \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j-1)2j}N^{-2j+1} - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j-1)2j}$$

$$+\int_1^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m}x^{-2m}dx - \int_N^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m})x^{-2m}dx \qquad (3.3a)$$

elde edilir. Burada,

$$K_m = \frac{1}{2m}\int_1^\infty B_{2m}(x-[x])x^{-2m}dx - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j-1)2j}$$

ve

$$\Omega_{2m}(N) = \frac{1}{2m}\int_N^\infty B_{2m}(x-[x])x^{-2m}dx$$

denilerek

$$\log N! = \left(N+\frac{1}{2}\right)\log N - N + \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j-1)2j}N^{-2j+1} + K_m - \Omega_{2m}(N),\ m \geq 1 \qquad (3.3b)$$

olur. Burada K_m, N den bağımsızdır ve aslında m den de bağımsızdır.

$$\log N! - \left(N+\frac{1}{2}\right)\log N + N - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{(2j-1)2j}N^{-2j+1} + \Omega_{2m}(N) = K_m$$

dir.

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\log N! - \left(N+\frac{1}{2}\right)\log N + N\right\} = K_m = K$$

limiti vardır ve m ye bağlı değildir.

$\left|B_{2k}(t-[t])\right| \le \left|B_{2k}\right| \le \dfrac{(2k)!}{12(2\pi)^{2k-2}}$ (Rademacher 1973) koşulu geçerli olduğundan,

$\Omega_{2m}(N)$ bu aralık ile tahmin edilen ifade, kalan terim olarak düşünülebilir.

$$\left|\Omega_{2m}(N)\right| = \left|\int_N^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m}x^{-2m}dx\right| \le \int_N^\infty \frac{\left|B_{2m}\right|}{2m}x^{-2m}dx = \frac{\left|B_{2m}\right|}{2m}\int_N^\infty x^{-2m}dx$$

$$= \frac{\left|B_{2m}\right|}{2m}\left[\frac{x^{-2m+1}}{-2m+1}\right]_N^\infty = \frac{\left|B_{2m}\right|}{2m(2m-1)}N^{-2m+1}$$

$$\left|\Omega_{2m}(N)\right| \le \frac{\left|B_{2m}\right|}{2m(2m-1)}N^{-2m+1} \tag{3.4}$$

bulunur. Bu N nin bir fonksiyonudur. Aynı zamanda $\Omega_{2m}(N)$ in üst sınırını gösterir. Artan m ler için (3.4) bağıntısı sıfıra gitmez ve (3.3b) denklemi $m \to \infty$ için ıraksak bir seri belirtir. (3.4) bağıntısı, her bir sabit m için ve artan N ler için asimptotik bir formüldür.

(3.3a) daki toplamın son terimi ve $\Omega_{2m}(N)$ terimi birlikte hata terimi olarak alınırsa

$$R_{2m} = \frac{B_{2m}}{(2m-1)2m}N^{-2m+1} - \Omega_{2m}(N)$$

$$= \frac{1}{2m}\int_N^\infty B_{2m}x^{-2m}dx - \frac{1}{2m}\int_N^\infty B_{2m}(x-[x])x^{-2m}dx$$

$$= -\frac{1}{2m}\int_N^\infty \left(B_{2m}(x-[x]) - B_{2m}\right)x^{-2m}dx$$

bulunur (3.4) teki eşitsizlikten R_{2m} ve B_{2m} nin aynı işarete sahip olduğu görülür. Bundan dolayı,

$$R_{2m} = \vartheta_m \frac{B_{2m}}{(2m-1)2m} N^{-2m+1},\ 0 < \vartheta_m \qquad (3.5)$$

kurulabilir. (3.3a) bağıntısı

$$\log N! = K + \left(N + \frac{1}{2}\right)\log N - N + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}}{(2j-1)2j} + R_{2m} \qquad (3.6)$$

halini alır. Burada $m = m+1$ için

$$\log N! = K + \left(N + \frac{1}{2}\right)\log N - N + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{(2j-1)2j} + R_{2m+2}$$

$$= K + \left(N + \frac{1}{2}\right)\log N - N + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}}{(2j-1)2j} + \frac{B_{2m}}{(2m-1)2m} + R_{2m+2}$$

elde edilir. Buradan

$$R_{2m} = \frac{B_{2m}}{(2m-1)2m} + R_{2m+2}$$

bulunur. (3.5) eşitliğinden,

$$R_{2m+2} = \vartheta_{m+1} \frac{B_{2(m+1)}}{(2m+1)(2m+2)} N^{-2m-1},\ 0 < \vartheta_{m+1}$$

bulunur. B_{2m} ile $B_{2(m+1)}$ zıt işaretli olduklarından R_{2m} ile R_{2m+2} de zıt işaretlidirler.

$$R_{2m} = \frac{B_{2m}}{(2m-1)2m} N^{-2m+1} + R_{2m+2}$$

$$= \frac{B_{2m}}{(2m-1)2m} N^{-2m+1} + \vartheta_{m+1} \frac{B_{2(m+1)}}{(2m+1)(2m+2)} N^{-2m-1}$$

$$= \frac{B_{2m}}{(2m-1)2m} N^{-2m+1} \left\{ 1 - \vartheta_{m+1} \left| \frac{B_{2(m+1)}}{2m} \right| \frac{(2m-1)2m}{(2m+1)(2m+2)} N^{-2} \right\}$$

dir. (3.5) ile bağdaştırılırsa,

$$\vartheta_m = 1 - \vartheta_{m+1} \left| \frac{B_{2(m+1)}}{2m} \right| \frac{(2m-1)2m}{(2m+1)(2m+2)} N^{-2}$$

ile temsil edildiği görülür. O halde $\vartheta_m < 1$ dir ve böylece $0 < \vartheta_m < 1$ olduğu bulunur.

(3.6) açılımı için R_{2m} kalan terimi, ilk ihmal edilen terimin pozitif, ondalık kısmıdır. Bu özellikteki ıraksak serilere *yarı yakınsak seriler* denir.

$m=1, B_2=\frac{1}{6}$ için özel olarak,

$$\log N! = K+\left(N+\frac{1}{2}\right)\log N - N + \frac{\vartheta}{12N},\quad 0<\vartheta<1$$

$$= K+\left(N+\frac{1}{2}\right)\log N - N + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{(2j-1)2j}N^{-2j+1}+R_{2m} \tag{3.7}$$

formüllü *Stirling formülü* olarak adlandırılır, (Rademacher 1973).

3.4. Bernoulli Sayılarının Üreteç Fonksiyonu

$$f(x)=e^{tx}$$

fonksiyonuna Euler-MacLaurin formülü uygulanırsa, $a=0,\ b=N$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{N}e^{nt} = \int_0^N e^{xt}dx + \sum_{r=1}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}t^{r-1}\left(e^{Nt}-1\right)+R_q, \tag{3.8}$$

$$R_q = \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^1 B_q(x)t^q\sum_{n=1}^{N}e^{(n-1+x)t}dx \tag{3.9}$$

elde edilir. $\mathrm{Re}(t)\neq 0$ olsun. O halde $\left|e^t\right|\neq 1$ dir.

$$\sum_{n=1}^{N}e^{nt} = e^t+e^{2t}+e^{3t}+\ldots+e^{Nt}$$

$$=e^t\left(1+e^t+e^{2t}+\ldots e^{(N-1)t}\right)=e^t\,\frac{e^{Nt}-1}{e^t-1}$$

$$\int_0^N e^{tx}dx=\frac{1}{t}(e^{Nt}-1)$$

$$\sum_{n=1}^{N}e^{(n-1+x)t}=e^{xt}\,\frac{e^{Nt}-1}{e^t-1}$$

olduğundan, eşitlikler (3.8) ve (3.9) eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$e^t\,\frac{e^{Nt}-1}{e^t-1}=\frac{1}{t}(e^{Nt}-1)+\sum_{r=1}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}t^{r-1}(e^{Nt}-1)+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}t^q\,\frac{e^{Nt}-1}{e^t-1}\int_0^1 B_q(x)e^{tx}dx$$

$$(e^{Nt}-1)\frac{e^t}{e^t-1}=(e^{Nt}-1)\left(\frac{1}{t}+\sum_{r=1}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}t^{r-1}+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\frac{t^q}{e^t-1}\int_0^1 B_q(x)e^{tx}dx\right)$$

$$\frac{e^t}{e^t-1}=\frac{1}{t}+\sum_{r=1}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}t^{r-1}+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\frac{t^q}{e^t-1}\int_0^1 B_q(x)e^{tx}dx \tag{3.10}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{q!}\left|\int_0^1 B_q(x)e^{tx}dx\right|\leq\frac{1}{q!}\int_0^1\left|B_q(x)\right|e^{|t|}dx\leq\frac{e^{|t|}}{12(2\pi)^{q-2}}\quad \text{(Rademacher 1973)}$$

olduğundan $|t|<2\pi$ için $q\to\infty$ iken

$$\frac{1}{q!}\int_0^1 B_q(x)e^t dx\to 0$$

dır. Buna göre, $B_0=1$ olduğu göz önüne alınırsa (3.10) bağıntısından

$$\frac{e^t}{e^t-1}=\frac{1}{t}+\sum_{r=1}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}t^{r-1}$$

$$t\frac{e^t}{e^t-1}=1+\sum_{r=1}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}t^r$$

$$t\frac{e^t}{e^t-1}=\sum_{r=0}^{q}(-1)^r\frac{B_r}{r!}t^r \tag{3.11}$$

elde edilir. Bu seri Bernoulli sayılırının üreteç fonksiyonu olarak düşünülebilir.

$$t\frac{e^t}{e^t-1}-\frac{t}{2}=\frac{t}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{-t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{\frac{-t}{2}}}$$

çift fonksiyon olduğundan $B_1=\frac{-1}{2}$ olmak üzere,

$$B_{2k+1}=0,\ k\geq 1 \tag{3.12}$$

olduğu görülür. Böylece (3.11) eşitliği yeniden düzenlenirse Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$t\frac{e^t}{e^t-1}=\sum_{r=0}^{q}\frac{B_r}{r!}t^r+t$$

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{r=0}^{q}\frac{B_r}{r!}t^r$$

olarak elde edilir, (Rademacher 1973).

3.5. Tanjant ve Kotanjant Katsayıları

$\cot t$ ve $\tan t$ için kuvvet serileri (3.11) özelliğinden kolaylıkla elde edilebilir.

$$\frac{t}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{-t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{\frac{-t}{2}}}=\frac{t}{2}\frac{e^{t}+1}{e^{t}-1}$$

$$=t\frac{e^{t}}{e^{t}-1}-\frac{t}{2}$$

$$=-\frac{t}{2}+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{B_r}{r!}t^{r}$$

$$=-\frac{t}{2}+\left(1+(-1)\frac{-t}{2}+(-1)^{2}\frac{B_2}{2!}t^{2}+(-1)^{3}\frac{B_3}{3!}t^{3}+(-1)^{4}\frac{B_4}{4!}t^{4}+\ldots\right)$$

$$=1+(-1)^{2}\frac{B_2}{2!}t^{2}+(-1)^{3}\frac{B_3}{3!}t^{3}+(-1)^{4}\frac{B_4}{4!}t^{4}+\ldots$$

(3.12) özelliği göz önüne alınır, $t=2ui$ denir ve eşitliğin iki yanı $\frac{1}{u}$ ile çarpılırsa,

$$i\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{e^{iu}-e^{-iu}}=\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iu)^{2k}$$

$$\cot u=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{B_{2k}}{(2k)!}2^{2k}u^{2k-1} \tag{3.13}$$

açılımı elde edilir.

Tanjant açılımı için benzer olarak aşağıdaki eşitlikten yararlanılırsa

$$\frac{t}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}-e^{\frac{-t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{-t}{2}}}=\frac{t}{2}\frac{e^{t}-1}{e^{t}+1}$$

$$=t\frac{e^{t}}{e^{t}+1}-\frac{t}{2}$$

$$=t\frac{e^{t}(e^{t}-1)}{(e^{t}+1)(e^{t}-1)}-\frac{t}{2}$$

$$= t\frac{e^{2t}-e^{t}}{e^{2t}-1}-\frac{t}{2}$$

$$= 2t\frac{e^{2t}}{e^{2t}-1}-t\frac{e^{t}}{e^{t}-1}-\frac{t}{2}$$

bulunur ve (3.11) bağıntısından yararlanılırsa

$$\frac{t}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}-e^{\frac{-t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{-t}{2}}} = -\frac{t}{2}+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{B_r}{r!}(2t)^r-\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{B_r}{r!}t^r$$

$$= -\frac{t}{2}+\left(1-\frac{-2t}{2}+(-1)^2\frac{B_2}{2!}(2t)^2+\ldots\right)-\left(1-\frac{-t}{2}+(-1)^2\frac{B_2}{2!}t^2+\ldots\right)$$

$$= \left((-1)^2\frac{B_2}{2!}(2t)^2+(-1)^3\frac{B_3}{3!}(2t)^3+\ldots\right)-\left((-1)^2\frac{B_2}{2!}t^2+(-1)^3\frac{B_3}{3!}t^3+\ldots\right)$$

$$= (-1)^2\frac{B_2}{2!}(2^2-1)t^2+(-1)^3\frac{B_3}{3!}(2^3-1)t^3+(-1)^4\frac{B_4}{4!}(2^4-1)t^4+\ldots$$

elde edilir. (3.12) özelliği göz önüne alınırsa

$$\frac{t}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}-e^{\frac{-t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{-t}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2^{2k}-1)t^{2k} \tag{3.14}$$

bulunur. $t = 2ui$ denirse ve eşitliğin iki yanı da $\frac{1}{ui^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{i}\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{e^{iu}+e^{-iu}} = \frac{1}{ui^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2^{2k}-1)(2ui)^{2k}$$

$$\tan u = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2^{2k}-1)2^{2k}u^{2k-1} \tag{3.15}$$

açılımı elde edilir. Bu açılımda yer alan

$$T_k = (-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{2k}(2^{2k}-1)2^{2k} \tag{3.16}$$

sayılarına *tanjant katsayıları* denir ve tanjant açılımı, tanjant katsayıları yardımı ile tekrar yazılırsa

$$\tan u = \sum_{k=1}^{\infty}T_k\frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \tag{3.17}$$

elde edilir, (Rademacher 1973).

$\coth u$ ve $\tanh u$ açılımları da benzer işlemlerle elde edilir.

$$\frac{t}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{-t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{\frac{-t}{2}}}=\frac{t}{2}\frac{e^{t}+1}{e^{t}-1}$$

$$=\frac{2t+te^{t}-t}{2(e^{t}-1)}$$

$$=\frac{t}{e^{t}-1}+\frac{t}{2}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_r}{r!}t^r+\frac{t}{2}$$

$$=1-\frac{t}{2}+\frac{B_2}{2!}t^2+\frac{B_3}{3!}t^3+\ldots+\frac{t}{2}$$

dir. (3.12) özelliğinden ve $t=2u$ denirse

$$u\coth u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2u)^{2k}$$

$$\coth u=\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2u)^{2k}$$

$$\coth u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}2(2u)^{2k-1} \tag{3.18}$$

elde edilir. $\tanh u$ açılımı içinse $\tan u$ açılımını elde etmek için izlenen yol uygulanır ve (3.14) bağıntısında $t=2u$ alınırsa

$$u\tanh u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2^{2k}-1)(2u)^{2k}$$

$$\tanh u=\frac{1}{u}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2^{2k}-1)(2u)^{2k}$$

$$\tanh u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}2(4^{k}-1)(2u)^{2k-1} \tag{3.19}$$

açılımına kolaylıkla ulaşılır, (http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0408/0408082v2.pdf, 2009).

Örnek 4: $\log(\sec x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}(1-2^{2n})B_{2n}x^{2n}}{2n(2n)!}$ dir.

$|x| < \frac{\pi}{2}$ için $\log(\sec x) = \int_0^x \tan t dt$ olduğundan ve (3.15) açılımından,

$$\log(\sec x) = \int_0^x \tan t dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}(1-2^{2n})B_{2n}t^{2n-1}}{(2n)!} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}(1-2^{2n})B_{2n}}{(2n)!} \int_0^x t^{2n-1} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}(1-2^{2n})B_{2n}}{(2n)!} \left[\frac{t^{2n}}{2n}\right]_0^x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}(1-2^{2n})B_{2n}x^{2n-1}}{2n(2n)!}$$

olduğu elde edilir.

3.6. Bernoulli Polinomlarının Fourier Açılımları

$\overline{B_q}(t) = B_q(t-[t])$, $q \geq 1$ fonksiyonu $B_q(t+1-[t+1]) = B_q(t+1-[t]-1) = B_q(t-[t])$ olduğundan periyodu 1 olan periyodik bir fonksiyondur.

$$a_n^{(q)} = 2\int_0^1 B_q(x)\cos 2n\pi x dx$$

ve

$$b_n^{(q)} = 2\int_0^1 B_q(x)\sin 2n\pi x dx$$

olmak üzere,

$$\overline{B_q}(t) = \frac{a_0^{(q)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(q)}\cos 2\pi nt + b_n^{(q)}\sin 2\pi nt\right)$$

şeklinde Fourier açılımı vardır.

$n = 0$ olması halinde (2.9) özelliğinden, $q = 1, 2, \ldots$ için

$$a_0^{(q)} = 2\int_0^1 B_q(x)dx$$

$$= \frac{2}{q+1}\int_0^1 B_{q+1}'(x)dx$$

$$= \frac{2}{q+1}\left(B_{q+1}(1) - B_{q+1}(0)\right)$$

$$= 0$$

bulunur. $n > 0$ olduğu incelenirse, kısmi integrasyondan, $q \geq 2$ için

$$a_n^{(q)} = 2\int_0^1 B_q(x)\cos 2n\pi x dx$$

$$= 2\left(\left[B_q(x)\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1 - \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 B_q'(x)\sin 2\pi nx dx\right)$$

$$= -\frac{2}{2\pi n}\int_0^1 qB_{q-1}(x)\sin 2\pi nx dx$$

$$= -\frac{2q}{2\pi n}\int_0^1 B_{q-1}(x)\sin 2\pi nx dx$$

$$a_n^{(q)} = -\frac{q}{2\pi n}b_n^{(q-1)} \tag{3.20}$$

dir. Benzer şekilde $q \geq 2$ için

$$b_n^{(q)} = 2\int_0^1 B_q(x)\sin 2n\pi x dx$$

$$= -2\left[B_q(x)\frac{\cos 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1 + \frac{2}{2\pi n}\int_0^1 B_q'(x)\cos 2\pi nx dx$$

$$= \frac{2}{2\pi n}\int_0^1 qB_{q-1}(x)\cos 2\pi nx dx$$

$$= \frac{2q}{2\pi n}\int_0^1 B_{q-1}(x)\cos 2\pi nx dx$$

$$b_n^{(q)} = \frac{q}{2\pi n}a_n^{(q-1)}, \quad n \geq 1 \tag{3.21}$$

dir. $q=1$ hali için, $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$ olduğu hatırlanırsa,

$$a_n^{(1)}=2\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\cos 2\pi nxdx$$

$$=2\int_0^1 x\cos 2\pi nxdx-\int_0^1\cos 2\pi nxdx$$

$$=2\left(\left[x\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1-\frac{1}{2\pi n}\int_0^1\sin \pi nxdx\right)-\int_0^1\cos 2\pi nxdx$$

$$=2\left(-\frac{1}{2\pi n}\left[-\frac{\cos 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1\right)-\left[\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1$$

$$=0$$

bulunur ve benzer şekilde,

$$b_n^{(1)}=2\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\sin 2\pi nxdx$$

$$=2\int_0^1 x\sin 2\pi nxdx-\int_0^1\sin 2\pi nxdx$$

$$=2\left(\left[-x\frac{\cos 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1-\frac{1}{2\pi n}\int_0^1\cos 2\pi nxdx\right)-\int_0^1\sin 2\pi nxdx$$

$$b_n^{(1)}=2\left(-\frac{1}{2\pi n}\right)-\left[\frac{\cos 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{2\pi n}$$

katsayıları elde edilir. Tümevarımla, $k\geq 1$, $n\geq 0$ için

$$a_n^{(2k-1)}=0\,,\; b_n^{(2k-1)}=(-1)^k\frac{2(2k-1)!}{(2\pi n)^{2k-1}}$$

$$a_n^{(2k)}=(-1)^{k-1}\frac{2(2k)!}{(2\pi n)^{2k}}\,,\; b_n^{(2k)}=0$$

elde edilir. Buradan,

$$\overline{B_{2k-1}}(t)=B_{2k-1}(t-[t])$$

$$= 2(-1)^k (2k-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n t}{(2\pi n)^{2k-1}}, \quad k \geq 1$$

$$\overline{B_{2k-1}}(t) = B_{2k}(t - [t])$$

$$= 2(-1)^{k-1} (2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n t}{(2\pi n)^{2k}}, \quad k \geq 1$$

Fourier açılımları mevcuttur, (Rademacher 1973).

3.7. Bernoulli Sayıları ve Riemann Zeta Fonksiyonu

Leonhard Euler, 1740'ta Riemann zeta fonksiyonunun çift tamsayılardaki değerleri ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişkinin

$$\varsigma(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}|$$

şeklinde olduğunu belirtti.

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z + k\pi} + \frac{1}{z - k\pi} \right) \qquad \text{(Başkan 2001)}$$

$$= \frac{1}{z} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - (k\pi)^2}$$

dir. Eşitlik z ile çarpılırsa,

$$z \cot z = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - (k\pi)^2}$$

$$= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{k\pi}\right)^2}{1 - \left(\frac{z}{k\pi}\right)^2}$$

elde edilir. Bu açılım; $z \neq k\pi, k = 1,2,...$ değerleri için geçerlidir. Eğer z, π yarıçaplı, orjin merkezli çemberin içine kısıtlanırsa sağ tarafta $\left|\frac{z}{k\pi}\right| < 1$'dir. Geometrik seri açılımından $|z| < \pi$ için,

$$z\cot z = 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)^n$$

$$=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}$$

$$=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right)\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}$$

bulunur. Riemann zeta fonksiyonunun tanımından,

$$z\cot z = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\varsigma(2n)\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}$$

elde edilir. (3.13) bağıntısında $u = z$ olarak alınır ve eşitliğin her iki tarafı z ile çarpılırsa,

$$z\cot z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}2^{2n}z^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n B_{2n}}{(2n)!}2^{2n}z^{2n}$$

dır. Buradan $z\cot z$ ler eşitlenirse,

$$1-2\sum_{n=1}^{\infty}\varsigma(2n)\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\varsigma(2n)\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varsigma(2n)\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

$n = 1,2,\ldots$ için z^{2n} lerin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$\varsigma(2n) = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n} \tag{3.22}$$

elde edilir ki bu Riemann zeta fonksiyonu ve Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi verir.

$n = 1,2,3,\ldots$ için ,

$$\varsigma(2) = \frac{(-1)^0 2^1 B_2}{2}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\varsigma(4) = \frac{(-1)^1 2^3 B_4}{24}\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\varsigma(6) = \frac{(-1)^2 2^5 B_6}{6!}\pi^6 = \frac{\pi^6}{945}, \ldots$$

bulunur. Herhangi n doğal sayısı için $\varsigma(2n)$ nin pozitif olduğu görülür. Dolayısıyla, n pozitif için B_{2n} ile $(-1)^{n-1}$ aynı işarete sahiptir. Diğer bir deyişle, B_2 ile başlayan ardışık çift indeksli Bernoulli sayıları alterne işaretlidir. Yani,

$$(-1)^{k-1} B_{2k} > 0 \tag{3.23}$$

dir, (http://www.serc.iisc.ernet.in/~amohanty/SE288/bn.pdf, 2009).

(3.16) tanjant katsayıları (3.23) ten dolayı pozitiftir.

Teorem 3.2: $h \geq 1, h \in Z^+$ olmak üzere;

$$\varsigma(1-h) = -\frac{B_h}{h}$$

dir, (Conway 1986).

İspat: (1.1) ve (2.2) özelliklerinden ve geometrik seri açılımından

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{-t}{1-e^t}$$

$$= -t\sum_{n=0}^{\infty} e^{nt}; \; |t| < 2\pi, \; |e^t| < 1$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} B_h \frac{t^h}{h!} = -t\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(nt)^h}{h!},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} B_h \frac{t^h}{h!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{n^h t^{h+1}}{h!},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} B_h \frac{t^h}{h!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{n^{h-1} t^h}{(h-1)!}$$

ve

$$\sum_{h=0}^{\infty} B_h \frac{t^h}{h!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{h n^{h-1} t^h}{h!}$$

elde edilir. t^h lerin katsayıları kıyaslanırsa,

$$B_h = -h\sum_{n=0}^{\infty} n^{h-1}$$

ve

$$-\frac{B_h}{h} = \varsigma(1-h)$$

elde edilir.

Teorem 3.3: $h \in Z^+$, $h \geq 1$ için

$$\varsigma(1-h,x) = -\frac{B_h(x)}{h}$$

dir, (Conway 1986).

İspat: (1.1) ve (2.2) özelliklerinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{-te^{xt}}{1-e^t}$$

$$= -t\sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+x)t};\ |t| < 2\pi,\ |e^t| < 1$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} B_h(x)\frac{t^h}{h!} = -t\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(n+x)^h t^h}{h!},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} B_h(x)\frac{t^h}{h!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(n+x)^h t^{h+1}}{h!},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} B_h(x)\frac{t^h}{h!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(n+x)^{h-1} t^h}{(h-1)!}$$

ve

$$\sum_{h=0}^{\infty} B_h(x)\frac{t^h}{h!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{h(n+x)^{h-1} t^h}{h!}$$

bulunur. t^h lerin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$B_h(x) = -h\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{h-1},$$

$$-\frac{B_h(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{h-1}$$

$$= \varsigma(1-h,x)$$

elde edilir. $h = h+1$ denirse,

$$-\frac{B_{h+1}(x)}{h+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^h$$
$$= \varsigma(-h, x)$$

bulunur.

3.8. Bernoulli Sayıları ve Benzeri Sayılar

3.8.1. Euler sayıları ile bağlantı

Tanım 3.8.1 : $\sec u = \dfrac{2}{e^{iu}+e^{-iu}}$ fonksiyonun Taylor seri açılımındaki katsayılara Euler sayıları denir ve E_n ile gösterilir. Buna göre,

$$\sec u = \frac{2}{e^{iu}+e^{-iu}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}u^{2n}$$

dir.

Euler sayıları ile Bernouli sayıları arasındaki ilişkiyi göstermek için (2.5) bağıntısında $x = \dfrac{3}{4}$ ve $x = \dfrac{1}{4}$ alınırsa,

$$t\frac{e^{\frac{3}{4}t}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B_n(\frac{3}{4})\frac{t^n}{n!}$$

ve

$$t\frac{e^{\frac{1}{4}t}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B_n(\frac{1}{4})\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Tarafa tarafa çıkarılırsa,

$$t\frac{e^{\frac{3}{4}t}-e^{\frac{1}{4}t}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n\left(\frac{3}{4}\right)-B_n\left(\frac{1}{4}\right)\right]\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{e^{\frac{3}{4}t}-e^{\frac{1}{4}t}}{e^{t}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n\left(\frac{3}{4}\right)-B_n\left(\frac{1}{4}\right)\right]\frac{t^{n-1}}{n!}$$

dir. $B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$, (Carlitz 1968) olduğundan

$$\frac{e^{\frac{3}{4}t}-e^{\frac{1}{4}t}}{e^{t}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n B_n\left(\frac{1}{4}\right)-B_n\left(\frac{1}{4}\right)\right]\frac{t^{n-1}}{n!}$$

bulunur. $n=2k+1$ alınırsa,

$$\frac{e^{\frac{3}{4}t}-e^{\frac{1}{4}t}}{e^{t}-1}=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)t^{2k}$$

dir. Burada $t=4iu$ alınırsa,

$$\frac{e^{3iu}-e^{iu}}{e^{4iu}-1}=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)(4iu)^{2k},$$

$$\frac{e^{3iu}-e^{iu}}{e^{4iu}-1}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^{2k}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)u^{2k} \tag{3.24}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\sec u &= \frac{2}{e^{iu}+e^{-iu}}\\ &=2\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{e^{2iu}-e^{-2iu}}\\ &=2\frac{e^{3iu}-e^{iu}}{e^{4iu}-1}\end{aligned}$$

olduğundan (3.24) düzenlenirse

$$\frac{1}{2}\sec u=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^{2k}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)u^{2k},$$

$$\sec u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)u^{2k}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_k}{(2k)!}u^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)u^{2k}$$

elde edilir. u^{2k} katsayıları kıyaslanırsa,

$$\frac{E_k}{(2k)!}=\frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$E_k = \frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{2k+1} B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right) \tag{3.25}$$

bulunur ki bu Euler ve Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi veren bağıntıdır. Başka bir bağıntı da (3.25) denkleminde (2.6) kullanılarak elde edilebilir:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1-j} B_j \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} 4^j B_j \end{aligned}$$

de Euler ve Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi verir, (Rademacher 1973).

3.8.2. Genocchi sayıları ile bağlantı

Tanım 3.8.2 : $\dfrac{2t}{e^t+1}$ fonksiyonunun seri açılımındaki katsayılara Genocchi sayıları denir ve G_n ile gösterilir. $\dfrac{2t}{e^t+1}$ fonksiyonuna Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonu denir. Buna göre,

$$\frac{2t}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}$$

dir.

(2.2) bağıntısında t yerine $2t$, (2.5) bağıntısında ise t yerine $2t$ ve $x = \dfrac{1}{2}$ alınırsa,

$$\frac{2te^t}{e^{2t}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2^n t^n}{n!}$$

ve

$$\frac{2t}{e^{2t}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{2^n t^n}{n!}$$

bulunur. Bu bağıntılar Genocchi sayıları ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi göstermek için kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t+1} = \frac{2t(e^t-1)}{e^{2t}-1} = \frac{2te^t}{e^{2t}-1} - \frac{2t}{e^{2t}-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2^n t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{2^n t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\right)\frac{2^n t^n}{n!}$$

elde edilir. t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa

$$G_n = 2^n\left(B_n\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\right)$$

bulunur ki bu Genocchi sayıları ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi verir, (Conway 1986).

3.8.3. Stirling küme sayıları ile bağlantı

Tanım 3.8.3 : n elemanlı bir kümeyi m tane boş olmayan alt kümeye bölmenin yollarının sayısına *Stirling küme sayısı* ya da *2. çeşit Stirling sayısı* denir.

Stirling küme sayıları; $S(n,m)$, $S_n^{(m)}$, s_n^m, $S_2(n,m)$ ya da $\left\{ n \atop m \right\}$ gibi çeşitli gösterimlere sahiptir.

Örneğin; $\{1,2,3\}$ kümesi, üç tane alt kümeye $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ olarak tek şekilde ayrılır. İki tane alt kümeye ise $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$ şeklinde olmak üzere 3 biçimde ayrılır. Bir tane alt kümeye ise $\{1,2,3\}$ olarak tek şekilde ayrılır. $\left\{ n \atop m \right\}$ gösterimi kullanılırsa,

$$\left\{ 3 \atop 1 \right\} = 1,\ \left\{ 3 \atop 2 \right\} = 3,\ \left\{ 3 \atop 3 \right\} = 1$$

dir.

n elemanlı bir küme 1 tane ya da n tane alt kümeye tek şekilde ayrılacağından

$$\left\{ n \atop 1 \right\} = \left\{ n \atop n \right\} = 1$$

dir. Özel olarak, δ_{nm} Kronecker delta fonksiyonu olmak üzere,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \delta_{n0}$$

dir. Stirling küme sayıları, $\binom{n}{k}$ binom katsayıları olmak üzere

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

toplam formülü ile hesaplanabilir,

(http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html, 2009).

Bernoulli sayıları ile Stirling küme sayıları arasındaki ilişki de $B_1 = \frac{1}{2}$ için;

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} \frac{k!}{k+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

şeklindedir.

$n = 0, 1, 2, \ldots$ için,

$$B_0 = |\{\varnothing\}| = 1,$$

$$B_1 = (-1)^1 \frac{0!}{1} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} + (-1)^2 \frac{1!}{2} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2},$$

$$B_2 = (-1)^2 \frac{0!}{1} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right\} + (-1)^3 \frac{1!}{2} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + (-1)^4 \frac{2!}{3} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{6},$$

$$B_3 = (-1)^3 \frac{0!}{1} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\} + (-1)^4 \frac{1!}{2} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} + (-1)^5 \frac{2!}{3} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} + (-1)^6 \frac{3!}{4} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} 3 + \frac{6}{4}$$

$$= 0, \ldots$$

elde edilir, (http://www.en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_numbers, 2009).

3.8.4. Eulerian sayıları ile bağlantı

Tanım 3.8.4 : Bir permütasyonda artan dizilerin kümesi bir *permütasyon akışı (permutation run)* olarak adlandırılır. Sıralanmış bir permütasyon tek bir akıştan oluşur. Ters permütasyonu ise 1 er elemanlı n tane akıştan oluşur.

Örneğin; $\{1,2\}$ permütasyonu bir tek $\{1,2\}$ akışına sahiptir. $\{2,1\}$ ise $\{2\}$ ve $\{1\}$ olmak üzere iki akışa sahiptir. $\{2,31\}$ permütasyonu $\{2,3\}$ ve $\{1\}$ şeklinde iki akışa, $\{3,2,1\}$ permütasyonu ise $\{3\}$, $\{2\}$, $\{1\}$ seklinde üç tane akışa sahiptir, (http://mathworld.wolfram.com/PermutationRun.html, 2009).

Tanım 3.8.5 : $p = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ bir permütasyon olsun. Eğer $a_i < a_{i+1}$ ise i bir *permütasyon çıkışı (permutation ascent) dır* denir.

Örneğin; $\{1,2,3,4\}$ permütasyonu $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$ olmak üzere üç tane permütasyon çıkışından oluşur, (http://mathworld.wolfram.com/PermutationAscent.html, 2009).

Tanım 3.8.6 : n elemanlı, k çıkışlı permütasyonların sayısı *Eulerian sayısı* olarak adlandırılır ve $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ ile gösterilir.

1755'te ilk olarak Leonhard Euler tarafından tanıtılmıştır. $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ gösterimi ilk olarak Knuth tarafından kullanılmıştır. Ayrıca Eulerian sayıları permütasyon akışları ile de ilgilidir. n elemanlı, k akışlı bir permütasyonun sayısı $a(n,k)$ ise,

$$a(n,k)=\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$$

dir. Eulerian sayıları,

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j \binom{n+1}{j}(k-j+1)^n \tag{3.26}$$

toplamı ile hesaplanabilir. Eulerian sayıları,

$$\sum_{k=0}^{n}\left\langle {n \atop k} \right\rangle = n!$$

bağıntısını sağlar, (http://mathworld.wolfram.com/EulerianNumber.html, 2009).

Bernoulli sayıları ve Eularian sayıları arasındaki ilişki de

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\langle {n \atop k} \right\rangle = 2^{n+1}(2^{n+1}-1)\frac{B_{n+1}}{n+1} \tag{3.27}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{n}{k}^{-1} = (n+1)B_n \tag{3.28}$$

formülleri ile verilir. İki formül de $B_1=\frac{1}{2}$ alınırsa, $n \geq 0$ için; $B_1=\frac{-1}{2}$ alınırsa sırasıyla $n \geq 1$, $n \geq 2$ için geçerlidir.

(3.27) bağıntısında $n=2$ için,

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\left\langle {2 \atop k} \right\rangle = 2^3(2^3-1)\frac{B_3}{3}$$

yani,

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\left\langle {2 \atop k} \right\rangle = 0$$

olmalıdır. (3.26) denkleminden dolayı,

$$\left\langle {2 \atop 0} \right\rangle = (-1)^0\binom{3}{0}1^2 + (-1)^1\binom{3}{1}0^2$$

$$=1,$$

$$\left\langle {2 \atop 1} \right\rangle = (-1)^0\binom{3}{0}2^2 + (-1)^1\binom{3}{1}1^2 + (-1)^2\binom{3}{2}0^2$$

$$=4-3$$
$$=1,$$

ve

$$\left\langle {2 \atop 2} \right\rangle = (-1)^0\binom{3}{0}3^2 + (-1)^1\binom{3}{1}2^2 + (-1)^2\binom{3}{2}1^2 + (-1)^3\binom{3}{3}0^2$$
$$=9-12+3$$
$$=0$$

dir. Buna göre gerçekten,

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\left\langle {2 \atop k} \right\rangle = (-1)^0\left\langle {2 \atop 0} \right\rangle + (-1)^1\left\langle {2 \atop 1} \right\rangle + (-1)^2\left\langle {2 \atop 2} \right\rangle$$
$$=1+(-1)1+0$$
$$=0$$

dır. (3.28) formülünde $n=2$ için,

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\left\langle {2 \atop k} \right\rangle\binom{2}{k}^{-1} = 3B_2$$

ve

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\left\langle {2 \atop k} \right\rangle\binom{2}{k}^{-1} = 3\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

olmalıdır. Gerçekten,

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\left\langle {2 \atop k} \right\rangle\binom{2}{k}^{-1} = (-1)^0\left\langle {2 \atop 0} \right\rangle\binom{2}{0}^{-1} + (-1)^1\left\langle {2 \atop 1} \right\rangle\binom{2}{1}^{-1} + (-1)^2\left\langle {2 \atop 2} \right\rangle\binom{2}{2}^{-1}$$
$$=1-\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

dir, (http://www.en.wikipedia.org/wiki/Bernolli_numbers, 2009).

3.8.5. Worpitzky sayıları ile bağlantı

Tanım 3.8.7 : İşaretsiz *Worpitzky sayıları,*

$$W_{n,k} = \sum_{v=0}^{k}(-1)^{v+k}(v+1)^n\binom{k}{v}$$

şeklinde tanımlanır. Stirling küme sayıları yardımı ile tanımı da

$$W_{n,k} = k!\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\}$$

şeklindedir. Worpitzky sayıları 1883'te Julius Worpitzky tarafından tanımlanmıştır.

Bernoulli sayıları ve Worpitzky sayıları arasındaki ilişki $B_1 = \frac{1}{2}$ için,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1}$$

şeklindedir. Gerçekten $n = 2$ için,

$$B_2 = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{W_{2,k}}{k+1}$$

olmalıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} W_{2,0} &= 0!\left\{ {3 \atop 1} \right\} \\ &= 1.1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{2,1} &= 1!\left\{ {3 \atop 2} \right\} \\ &= 1.3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} W_{2,2} &= 2!\left\{ {3 \atop 3} \right\} \\ &= 2.1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{W_{2,k}}{k+1} &= (-1)^0 \frac{W_{2,0}}{1} + (-1)^1 \frac{W_{2,1}}{2} + (-1)^2 \frac{W_{2,2}}{3} \\ &= 1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{6} = B_2 \end{aligned}$$

dir. Bernoulli sayılarının Worpitzky gösterimi

$$B_0 = \frac{1}{1},$$

$$B_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{1} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3},$$

$$B_3 = \frac{1}{1} - \frac{7}{2} + \frac{12}{3} - \frac{6}{4},$$

$$B_4 = \frac{1}{1} - \frac{15}{2} + \frac{50}{3} - \frac{60}{4} + \frac{24}{5},$$

$$B_5 = \frac{1}{1} - \frac{31}{2} + \frac{180}{3} - \frac{390}{4} + \frac{360}{5} - \frac{120}{6}, \ldots$$

şeklindedir, (http://www.en.wikipedia.org/wiki/Bernolli_numbers, 2009).

3.8.6. Bernoulli sayıları için Akiyama-Tanigawa algoritması

S. Akiyama ve Y. Tanigawa, zeta fonksiyonunun katsayılarının, pozitif olmayan değerlerinin çalışılmasında Bernoulli sayılarını hesaplamak için Pascal üçgeninde binom katsayılarının hesaplanmasına benzeyen eğlenceli bir algoritma bulmuşlardır.

Algoritma şu şekildedir:

0. satır $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ ile başlasın.

1. satır $1\left(1-\frac{1}{2}\right)$, $2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$, $3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$, $4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$, ... şeklinde tanımlansın. Böylece $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ dizisi meydana gelir. 2. satır tanımlanırsa;

$1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$, $2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$, $3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$, ... buradan $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{20}, \ldots$ dizisi meydana gelir.

3. satır $1\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)$, $2\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{20}\right)$, ... olduğundan $0, \frac{1}{30}, \ldots$ dizisi oluşur.

Bu şekilde devam edilerek n. satırın m. elemanı $a_{n,m}$ ile gösterilmek üzere $(n+1)$. satır için elemanlar,

$$1(a_{n,0}-a_{n,1}),\ 2(a_{n,1}-a_{n,2}),\ 3(a_{n,2}-a_{n,3}),\ \ldots,\ m(a_{n,m-1}-a_{n,m}),\ (m+1)(a_{n,m}-a_{n,m+1}),\ \ldots$$

şeklinde olduğundan $(n+1)$. satırda m. eleman,

$$a_{n+1,m}=(m+1)(a_{n,m}-a_{n,m+1})$$

dir. Her satırın 0. elemanı olan $a_{n,0}$ lar n. Bernoulli sayısını verir. Bu işlem aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$a_{00}=B_0 \qquad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \ldots$$

$$a_{1,0}=B_1 \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \ldots$$

$$a_{2,0}=B_2 \qquad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{3}{20} \quad \frac{2}{15} \quad \frac{5}{42} \quad \frac{3}{28} \quad \frac{7}{72} \quad \ldots$$

$$a_{3,0}=B_3 \qquad 0 \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{2}{35} \quad \frac{5}{84} \quad \frac{5}{84} \quad \ldots$$

$$a_{4,0}=B_4 \qquad -\frac{1}{30} \quad -\frac{1}{30} \quad -\frac{3}{140} \quad -\frac{1}{105} \quad 0 \quad \ldots$$

$$a_{5,0}=B_5 \qquad 0 \quad -\frac{1}{42} \quad -\frac{1}{28} \quad -\frac{4}{105} \quad \ldots$$

$$a_{6,0}=B_6 \qquad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{40} \quad \ldots$$

$$a_{7,0}=B_7 \qquad 0 \quad \frac{1}{30} \quad \ldots$$

$$a_{8,0}=B_8 \qquad -\frac{1}{30} \quad \ldots$$

...

(Kaneko 2000).

4. BERNOULLI SAYILARI VE POLİNOMLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ

4.1. Giriş

Bu kısımda Bernoulli sayıları ile Bernoulli polinomları pozitif reel sayılara bağlı olan, genelleştirilmiş Bernoulli sayıları ile genelleştirilmiş Bernoulli polinomları denilen sayı ve polinomlara genelleştirilerek, bu sayı ve polinomlar tanımlanarak birbirleriyle olan ilişkileri verilmiştir.

Tanım 4.1 : $a,b>0$ ve $a\neq b$ olsun. *Genelleştirilmiş Bernoulli sayıları* $B_n(a,b)$ ile gösterilir ve

$$\frac{t}{b^t-a^t}=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n(a,b)}{n!}t^n, \qquad |t|<\frac{2\pi}{|\ln b-\ln a|}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.2 : $a,b,c>0$ ve $a\neq b$ olsun. *Genelleştrilmiş Bernoulli polinomları*, n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, $B_n(x;a,b,c)$ ile gösterilir ve

$$\frac{tc^{tx}}{b^t-a^t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x;a,b,c)}{n!}t^n, \qquad |t|<\frac{2\pi}{|\ln b-\ln a|}, \ x\in R$$

şeklinde tanımlanır.

4.2. Genelleştirilmiş Bernoulli Polinomlarının Bazı Özellikleri

$a,b,c>0$, $a\neq b$ olsun. $x\in R$ ve $n\geq 0$ için;

i) $B_n(x;1,e,e) = B_n(x)$

dir. Gerçekten,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x;1,e,e)}{n!}t^n = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!}t^n$$

olduğundan t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa $B_n(x;1,e,e) = B_n(x)$ dir.

ii) $B_n(0;a,b,c) = B_n(a,b)$

dir. Gerçekten,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(0;a,b,c)}{n!}t^n = \frac{tc^{t.0}}{b^t - a^t}$$

$$= \frac{t}{b^t - a^t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(a,b)}{n!}t^n$$

olduğundan t^n lerin katsayıları karşılaştırılınca $B_n(0;a,b,c) = B_n(a,b)$ olduğu görülür.

iii) $B_n(0;1,e,e) = B_n$

dir. Gerçekten,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(0;1,e,e)}{n!}t^n = \frac{te^{t.0}}{e^t - 1^t}$$

$$= \frac{t}{e^t - 1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}t^n$$

eşitliğinde t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa $B_n(0;1,e,e) = B_n$ elde edilir.

iv) $B_n(x;1,e,1) = B_n$

dir. Gerçekten,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x;1,e,1)}{n!}t^n=\frac{1^{t.x}t}{e^t-1^t}$$
$$=\frac{t}{e^t-1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n$$

eşitliğinde t^n lerin katsayıları kıyaslanırsa istenilen elde edilir.

v) $B_n(x;a,b,1)=B_n(a,b)$

dir. Gerçekten,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x;a,b,1)}{n!}t^n=\frac{t1^{tx}}{b^t-a^t}$$
$$=\frac{t}{b^t-a^t}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(a,b)}{n!}t^n$$

eşitliğinde t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen elde edilir.

vi) $B_n(x;a,b,c)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}(\ln c)^{n-k}B_k(a,b)x^{n-k}$

dir. Gerçekten,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x;a,b,c)}{n!}t^n=\frac{tc^{xt}}{b^t-a^t}$$
$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(a,b)}{k!}t^k\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i(\ln c)^i}{i!}t^i\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{(\ln c)^{k-i}}{i!(k-i)!}B_i(a,b)x^{k-i}t^k$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln c)^{n-k}B_k(a,b)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}$$

dir. t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen elde edilir.

vii) $B_n(x+1;a,b,c)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln c)^{n-k}B_k(x;a,b,c)$

dir. Gerçekten,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x+1;a,b,c)}{n!}t^n=\frac{tc^{(x+1)t}}{b^t-a^t}=\frac{tc^{xt}}{b^t-a^t}c^t$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x;a,b,c)}{n!}t^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\ln c)^k}{k!}t^k\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln c)^{n-k}B_k(x;a,b,c)x^{n-k}}{k!(n-k)!}t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln c)^{n-k}B_k(x;a,b,c)\right)\frac{t^n}{n!}$$

olduğundan t^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen elde edilir, (Luo ve ark. 2003).

KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M., I. A. STEGUN. 1964. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publications, New York. p. 804-808.

APOSTOL, T. M. 1976. Introduction to analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York. p. 265-267.

BAŞKAN, T. 2001. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Nobel Yayıncılık. Ankara.

CARLITZ, L. 1968. Bernoulli Numbers. *Fib. Quart.* 6: 71-85.

CARTIER, P., J. B.BOST, H. COHEN, D. ZAGIER, R. GERGONDEY, H. M. STARK, E. REYSSAT. 1992. From Number Theory to Physics. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. p. 5-11.

CONWAY, J. B. 1986. Functions of One Complex Variable. Springer –Verlag, New York. p.330

CONWAY, J. H., R. K. GUY. 1996. The Book of Numbers. Springer-Verlag, New York. p. 107-109.

LUO, Q. M., B. GUO, F. QI, L. DEBHANT. 2003. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 59: 3769-3776.

RADEMACHER, H. 1973. Topics in Analytic Number Theory. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. p. 1-31.

RAMANUJAN, S. 1911. Some Properties of Bernoulli's Numbers. J. Indian Math. Soc. 3: 219-234.

SANDIFER, E. 2005. How Euler Did It. MAA Online.

SPIEGEL, M. R. 1974. Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company. p.21-23.

http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0408/0408082v2.pdf, Erişim Tarihi: 27.07.2009. Konu: On Bernoulli Numbers and Its Properties.

http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_numbers, Erişim Tarihi: 27.07.2009. Konu: Bernoulli Number.

http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/C50/no9.pdf, Erişim Tarihi: 27.07.2009. Konu: Bernoulli Numbers.

http://mathworld.wolfram.com/EulerianNumber.html, Erişim Tarihi:27.07.2009. Konu: Eulerian Number.

http://mathworld.wolfram.com/PermutationAscent.html, Erişim Tarihi:27.07.2009. Konu: Permutation Ascent.

http://mathworld.wolfram.com/PermutationRun.html, Erişim Tarihi: 27.07.2009. Konu: Permutation Run.

http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html, Erişim Tarihi: 27.07.2009. Konu. Striling Number of the Second Kind.

http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/bernoulli.html, Erişim Tarihi: 27.07.2009. Konu: Introduction on Bernoulli's Numbers.

http://www.serc.iisc.ernet.in/~amohanty/SE288/bn.pdf, Erişim Tarihi: 27.07.2009. Konu: Bernoulli Numbers.

ÖZGEÇMİŞ

02.07.1985 yılında Bursa'da doğmuş olan Müge ÇAPKIN, ilk ve orta okulu Bursa Hürriyet İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini ise Bursa Erkek Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2003 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazanmıştır. 2004 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne yatay geçiş yapmış, 2007 yılında bu bölümden mezun olup aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisansa başlamıştır.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca bilgi ve fikirleriyle beni yönlendiren, desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen, anlayışı ve sabrıyla yanımda olduğunu hissettiren, her zaman örnek aldığım değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL' e içtenlikle teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca manevi desteğini, yardımlarını ve sabrını fazlasıyla gördüğüm ve kendisinden çok şey öğrendiğim Öğr. Gör. Dr. Hacer ÖZDEN' e teşekkür ederim.

Tezim boyuca yardımlarını ve desteğini esirgemeyen Arş. Gör. Ömer ZOR' a çok teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemdeki en büyük paya sahip olan, maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen, bana verdikleri sevgi ve güvenle birçok zorluğu aşmama yardımcı olan sevgili annem, babam ve kardeşime sonsuz teşekkürler.

Tüm bunların yanı sıra yurt içi yüksek lisans burs programı ile maddi yönden beni destekleyen TÜBİTAK' a teşekkür ederim.