T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLUŞUM TÜRÜ DENKLEMLERİN YEREL VE YEREL OLMAYAN YENİ KORUNUM KANUNLARI

Emrullah YAŞAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLUŞUM TÜRÜ DENKLEMLERİN YEREL VE YEREL OLMAYAN YENİ KORUNUM KANUNLARI

Emrullah YAŞAR

Doç.Dr. Sibel YALÇIN
(I. Danışman)
Doç. Dr. Teoman ÖZER
(II. Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLUŞUM TÜRÜ DENKLEMLERİN YEREL VE YEREL OLMAYAN YENİ KORUNUM KANUNLARI

Emrullah YAŞAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 16/10/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.Sibel YALÇIN Prof.Dr.Mehmet ÇAĞLIYAN Prof.Dr.Ahmet CENGİZ
Danışman

Prof. Dr. Kerim KOCA Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

ÖZET

Bu doktora tezinde, oluşum türü denklemlerin yerel ve yerel olmayan korunum kanunları incelenmiştir. Lagrangiana sahip olmayan bu tür denklemlerin her bir simetrisine (Lie nokta, Lie-Backlund ve yerel olmayan simetri) yerel ya da yerel olmayan bir korunum kanunun karşılık geldiği gösterilmiştir. Korunum kanunları kullanılarak potansiyel simetri, simetri indirgemeleri ve değişmez çözümler elde edilmiştir. Bunun yanında keyfi fonksiyonlar ihtiva eden bu tür denklemlerin simetri sınıflandırmaları oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Lie simetrileri, korunum kanunları, oluşum denklemleri.

ABSTRACT

In this doctoral thesis, we study the local and nonlocal conservation laws of evolution type equations. It is demonstrated that there exist local or nonlocal conservation laws for each symmetry (Lie point, Lie-Backlund and nonlocal symmetry) of evolution type equations which have not Lagrangians. We also obtain potential symmetries , symmetry reductions and invariant solutions by utilizing conservation laws. In addition, symmetry classifications were constructed for in question equations which have arbitrary functions.

Key Words: Lie symmetries, conservation laws, evolution equations.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Fiziksel teorileri doğrulayabilmek için göz önüne alınan fiziksel sistemin ölçümünün ve gözleminin yapılması gerekir. Bir fiziksel niceliğin ölçümünü yapabilmek için ise uzay ve zaman ortamında niceliğin korunduğunu bilmek gerekir. Örneğin odanın bir kenarında duran l uzunluğundaki cetvel göz önüne alınsın. Bir Δt zamanında odanın bir kenarından diğer bir kenarına cetvel atılarak hareket ettirilsin. Şayet cetvelin taşınma sonrasında uzunluğu l den farklı ise uzay ve zaman ortamında değiştiği için ölçülemez. Yani fiziksel nicelik olan l korunmaz ve dolayısıyla ölçülebilirlik için kullanışlı olmaz (elbette ki, gerçekte l korunur, bu yalnızca korunum niceliğinin anlamını izah etmek için bir örnektir).

Radyo iletişiminde bilgi, radyo dalgaları biçiminde kodlanmış olarak gönderilir. Şayet gönderilen bilgi alıcı noktasında aynı oluyor ise bilginin bu gönderimi kullanışlıdır. Dolayısıyla radyo dalgalarındaki bilgi bir korunan niceliktir.

Cetvelin hareketi ve radyo dalgalarının gönderimleri birer fiziksel örnektir. Matematikte fiziksel sistemler diferensiyel denklemler cinsinden tasvir edilir. Cetvelin hareketi bir fırlatıcı için hareket denklemi ile tasvir edilirken radyo dalgalarının davranışı yani elektromanyetik dalgalar Maxwell denklemleri aracılığıyla tanımlanır.

Korunum kanunları, diferensiyel denklemlerin incelenmesi ve birçok uygulamada merkezi bir öneme sahiptir. Korunum kanunları, göz önüne alınan fiziksel sistemin temel özelliklerini çıkarmada bir araç olduğu için fiziğin tüm alanlarında önemlidir. Bunun yanında korunum kanunları, kararlılık teorisinin araştırılması, nümerik şemaların çıkarılması ve diferensiyel denklemlerin çözülebilirliği gibi birçok alanda müşahede edilebilir.

Korunum kanunlarının matematiksel esası, kütle, enerji ve momentum gibi bilinen fiziksel kanunların formülasyonundan gelmektedir. Jet problemlerinde korunum niceliği, çözüm sürecinde önemli bir rol oynar ve homojen sınır koşulları ile elde edilemeyen benzerlik çözümündeki bilinmeyen bileşeni (üssü) belirlemede kullanılır. İlk çalışmalarda jetler için korunum kanunları ya fiziksel argümanlardan ya da Prandtl momentum sınır tabaka denkleminin integrasyonu ile oluşturulmuştur. Korunum kanunlarının elde edilmesinde bu metotlar bütünüyle sistematik değildir ve duvar jeti gibi problemlerin uygulanmasında zordur.

Literatürde korunum kanunlarının elde edilmesinde en temel yaklaşım Noether teoremidir (Noether 1918). Bu teorem kısaca Euler-Lagrange diferensiyel denklemleri için Lagrangian ile asosiye olan her bir Noether simetrisine bir formül ile açık olarak belirlenebilecek bir korunum kanununun karşılık geldiğini ifade eder. Dolayısıyla korunum kanunları ve simetri ilkeleri arasında birebir ilişki mevcuttur.

Simetri ilkeleri doğa kanunlarında önemli bir rol oynar. Nasıl ki, doğa kanunları olaylar dizisine yapı ve uyumluluk sağlıyorsa değişmezlik ilkeleri de doğa kanunlarına bir yapı ve uyumluluk sağlar. Aslında doğa kanunlarının anlaşılmasında simetriler olmaksızın ilerleme kaydetmek imkansızdır. Farklı zamanlarda farklı yerlerde deneyleri teşmil etme doğa kanunlarının uzay-zaman ötelemeleri altında değişmezliğine dayanmaktadır.

Simetrinin fizik ve matematikteki önemli bir sonucu, yukarıda da değinildiği gibi, korunum kanunlarının mevcudiyetidir. Her bir global sürekli simetri için (yani bir fiziksel sistemin dönüşümünün her yerde ve tüm zamanlarda aynı surette etki etmesi) bir asosiye zamandan bağımsız nicelik mevcuttur. Bu ilişki 1918 yılına kadar fark edilmedi. Noether 1918 yılında simetri ve korunum kanunlarını ilişkilendiren yukarıda ifade edilen çok önemli teoremi ispatladı.

20. yüzyıla kadar simetri ilkeleri teorik fizikte fazla bir öneme sahip değildi. (Yunanlılar nesnelerin simetrileri ile büyülenmişlerdi ve bunun doğanın yapısından aksettiğine inanmışlardı. Kepler bile simetri kavramını gezegenlerin hareketi üzerinde kullandı. Newton'un simetri ilkeleri ile şekillenen mekanik kanunları, atalet çerçevesi (yani Newtonun birinci hareket kanununun gerçekleştiği koordinat sistemi) ya da

Galilean değişmezliğinin denkliğinde gerçekleşti). Bu durum 19. yüzyılda Lie'nin çalışmalarıyla önemli ölçüde değişti. Lie'nin 1873 yılındaki büyük buluşu simetriyi ön planda tutmaktı. Amacı, dinamik kuralları kısıtlayan doğanın, esas özelliği olarak simetri ilkelerini ilişkilendirmekti. Lie, teorisini diferensiyel denklemler ile verilen farklı modellere uyguladı. Diferensiyel denklemlerin Lie simetri analizi teorisinin esası, bağımsız ve bağımlı değişkenlerin bir dönüşümü altında denklemin değişmezliğine dayanmaktadır. Göz önüne alınan denklemin çözümlerini başka çözümlere resmeden bağımsız ve bağımlı değişkenler uzayı üzerinde bir difeomorfizim kuran bu dönüşüm, nokta dönüşümlerinin bir yerel grubunu oluşturur

Diferensiyel denklemlerin simetri analizi, uygulamalı matematik ve fizik alanlarında eski bir konudur. Teori, temel formunda Lie tarafından 1872-1899 periyodu boyunca geliştirildi ve uygulandı. Günümüze kadar teorinin genişlemeleri ve uygulamaları fizik özellikle de hidrodinamik, mekanik, elektrodinamik, kuantum teorisi, istatiksel mekanik, alan teorisi, atom fiziği gibi alanlarda yapıldı. Bugün simetri analizi bütünüyle algoritmik bir yolla diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmeyi sağlayan ender teorilerden biri haline gelmiştir. Ters saçılım teorisi ve Hirota tekniği gibi diğer çözüm metotları arasında Lie'nin teorisi üstün bir yere sahiptir. Lie'nin grup teorisi herhangi bir diferensiyel denkleme uygulanabilirken diğer teoriler genellikle integre edilebilir denklemlerin çözümleri için yararlıdır. Grup teorisi, sınır değer problemlerinin değişmez çözümlerine yol açan sistematik yöntemlerin geliştirilmesinde kuvvetli bir araçtır. Bu teori lineer operatörlere, süperpozisyon ve lineer çözüm tekniklerinin diğer gereksinimlerine bağlı olmadığından lineer ve lineer olmayan diferensiyel modellere uygulanabilir.

Varyasyonel analizdeki ters problemlere yani diferensiyel denklem sistemlerinin ne zaman bir Lagrangian formülasyonuna sahip olduğuna dair literatürde bazı çalışmalar mevcuttur (Talukdar ve ark 2005). Bununla birlikte, literatürde Lagrangiana sahip olmayan birçok diferensiyel denklem (örneğin yerel ve yerel olmayan skaler oluşum diferensiyel denklemleri) mevcuttur.

Korunum kanunlarını elde etmek için, Lagrangian fonksiyonunun bilinmesine dayanmayan bazı metotlar söz konusudur. En elementer metot *doğrudan* oluşturma metodudur. *Doğrudan* metot bazı iyi bilinen diferensiyel denklemlerin korunum kanunlarını elde etmede başarılı bir şekilde uygulanmıştır (Ibragimov 1994). Korunum kanunlarını elde etmek için diğer metotlar yeni ya da daha az bilinen metotlardır. Steudel tarafından geliştirilen üçüncü yaklaşım, korunum kanununu karakteristik form halinde yazmayı içerir (Steudel 1962). Burada karakteristikler diferensiyel denklemlerin integral çarpanıdır. Bu yaklaşımda korunum kanunlarını tespit etmek için ilgili karakteristiklerin de ayrıca hesaplanması gerekir. Üçüncü metot ile ilişkili olan dördüncü metot varyasyonel türevi içerir. Bu metotta da karakteristikler hesaplanır ve bunlardan asosiye korunum kanunlarına ulaşılır (Olver 1983). Daha sonra Anco ve Bluman da bu yaklaşımı kullanır (Anco ve Bluman 2002). Beşinci yaklaşımda varyasyonel türevler diferensiyel denklemlerin çözüm uzayı üzerinde hesaplanır. Bu yaklaşım ile elde edilen karakteristikler bazen korunum kanunundan ziyade eşlenik simetriye karşılık gelir. Lagrangian formülasyonuna dayanmayan dört metot için bilgisayar cebri paketi geliştirilmiştir (Wolf 2002).

Korunum kanunlarını elde etmek için Kara ve Mahomed tarafından geliştirilen altıncı yaklaşım *doğrudan* metoda bir simetri koşulunun ilave edilmesidir (Kara ve Mahomed 2000). Anco ve Bluman'a atfedilen yedinci yaklaşım, bilinen karakteristikler için korunum kanunlarını bir formül yardımıyla bulmaktır (Anco ve Bluman 2002). Cauchy-Kowalevskaya standart formda ifade edilen kısmi diferensiyel denklemler için yerel korunum kanunları *doğrudan* oluşturma formülüyle hesaplanabilir. Kara ve Mahomed'e atfedilen sekizinci yaklaşım ise kısmi Noether yaklaşımıdır (Kara ve Mahomed 2006). Bu yaklaşım Lagrangiana sahip olan ya da olmayan diferensiyel denklemler için Noether yaklaşımına benzer.

2007 yılında Nail Ibragimov herhangi bir diferensiyel denklem sistemi için temel korunum teoremini ispat etti (Ibragimov 2007a). Akabinde bu yeni teoriyi kullanarak oluşum türü denklemlerin korunum kanunlarının oluşturulması ve yeni açılımlarının yapılması üzerine literatürde yoğun çalışmalar görülmüştür. Bunlardan bazıları şunlardır: Gaz dinamiği denklemlerin yerel ve yerel olmayan korunum kanunlarının elde edilmesi (Ibragimov ve Yaşar 2007b), Burridge-Knopoff modelinin varyasyonel prensiplerinin elde edilmesi ve korunum kanunlarının oluşturulması (Yaşar 2008), tek tabaka sığ su dalga denklemlerin varyasyonel analizi, korunum kanunlarının teşkili ve korunum kanunlarından faydalanarak yerel olmayan simetrilerin oluşturulmasıdır (Yaşar ve Özer 2009). Bunun yanında akışkanlar mekaniğindeki bazı problemler içinde bu yeni teori kullanılmıştır (Ericksonn 2008).

Bu çalışmanın amacı diferensiyel denklemler ile tanımlanan yerel ve yerel olmayan oluşum türü (burada $x=(x^1,...,x^n)$ n bağımsız değişken, $u=(u^1,...,u^m)$ m bağımlı değişken olmak üzere)

$$u_t^\alpha = F^\alpha(x,u,u_{(1)},...,u_{(n)}),\ \alpha=1,...,m$$

denklem sistemlerinin korunum kanunlarını bulmak ve yeni açılımlar yapmaktır. Gereksinim duyulan matematiksel araçlar Lie grup teorisi, varyasyonel prensip ve eşlenik denklem kavramıdır. Bu üç farklı alan takdim edilecek ve temel korunum teoremini ifade etmek için birbirleriyle ilişkilendirilecektir. Tezin birinci bölümünde ön bilgiler sunulmaktadır. Bu ön bilgilerde ayrıntılı olarak Lie gruplarının temel özellikleri, temel operatörler, bu operatörler arasındaki temel bağıntı ve ilişkiler, lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemler için eşlenik denklem tanımı işlenmektedir. Bunların kullanılmasıyla ana korunum teoremi ifade edilmektedir. Tezin ikinci bölümü, oluşum türü denklemler sınıfının temsilci denklemlerinden olan Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin korunum kanunlarının elde edilmesi ve bu korunum kanunlarından yararlanarak ilerleyen dalga çözümlerinin bulunmasına ayrılmıştır.

Üçüncü bölüm keyfi fonksiyon ihtiva eden bir oluşum türü denklemin eşdeğerlik dönüşümlerinin bulunması, grup sınıflandırılmasının yapılması ve korunum kanunlarının bulunmasına ayrılmıştır.

Dördüncü bölümde sığ su dalga denklem sisteminin düzlemsel, eksenel ve dispersiv halleri için Lie grup analizi yapılıp korunum kanunları oluşturuldu. Düzlemsel hal için korunum kanunları yardımıyla potansiyel simetriler oluşturulmuştur.

Beşinci bölüm Fokker-Planck denklemine ayrılmıştır. Bu bölüm söz konusu denklemin Lie grup analizi, korunum kanunlarının elde edilmesi, potansiyel simetrilerin oluşturulması ve potansiyel simetriler aracılığıyla değişmez çözümlerin elde edilmesini detaylı bir şekilde inceler. Bu bölümde ayrıca elde edilen korunum kanunlarından yeni korunum kanunlarının oluşturulması da gösterilmiştir.

Tezin altıncı bölümü yerel olmayan sığ su denklemlerini içerir. Yerel olmayan yapıdaki bu denklemin Lie grup analizi, değişmezlik kriterinin genelleştirilmesine dayanan bir yaklaşımla incelenmiştir. Bulunan Lie nokta simetrileri aracılığıyla denklemin yerel olmayan korunum kanunlarına ulaşılmıştır.

Tezin yedinci bölümünde bulunan sonuçlar incelenmiştir.

1. ÖN BİLGİLER

Bu kısım, Lie gruplarının temel özellikleri, diferensiyel fonksiyonlar uzayı, temel operatörler olan $X, \frac{\delta}{\delta u}, N^i$ ve bu operatörler, arasındaki temel özellikleri içerir. Söz konusu grup ve operatörler diferensiyel denklemlerin korunum kanunları ve simetrilerinin araştırılmasında merkezi bir öneme sahiptirler. Bu kısımda sunulan kavramların birçoğu (Ibragimov 1983,1999) ve (Özer 1999) den uyarlanmıştır.

1.1. Lie Gruplarının Temel Özellikleri

Dönüşüm grupları ile ilgili ilk çalışmalar 19. yüzyılda Sophus Lie tarafından başlatılmıştır (Lie 1891). Lie, adi diferensiyel denklemlerin çözüm tekniklerinin belirlenmesinde dönüşüm gruplarını kullanmıştır. Lie, diferensiyel denklemler için daha önce verilmiş olan özel çözüm yöntemlerinin, diferensiyel denklemin sürekli bir simetri grubu altındaki değişmesine dayalı genel integrasyon yöntemlerinin özel durumları olduğunu göstermiştir. Genel anlamda Lie grupları olarak bilinen dönüşüm grupları fizik, mühendislik ve diğer matematiğe dayalı tüm bilimler üzerinde önemli bir etki yaratmıştır.

Lie, bir adi diferensiyel denklemin bir parametreli dönüşüm grubu altında değişmez kalması halinde diferensiyel denklemin mertebesinin bir derece düşürülebileceğini göstermiştir. Mertebesi bir derece azaltılmış denklemin çözümlerinden orijinal denklemin çözümlerine geçmek mümkün olmaktadır. Bir diferensiyel denklemin çok parametreli simetri gruplarına sahip olması durumunda bu durum mertebenin daha çok azaltılmasına olanak tanınması anlamına gelmekle birlikte, diferensiyel denklemin sahip olduğu dönüşüm grubu çözümlenebilen grup şartlarına sahip olmadığı müddetçe mertebesi düşürülmüş denklemin çözümlerinden orijinal denklemin çözümlerine geçiş mümkün olmayabilir.

Yirminci yüzyılda diferensiyel denklemlerde Lie gruplarının uygulamaları çok sayıda matematikçinin yoğun ilgisini çekmiştir. Ovsiannikov (1982) ve onun okulu, ilgili metotları fiziksel olarak önemli olan geniş bir problemler sınıfına uygulamışlardır. Birçok fiziksel problemlerle ilgilenmiş ve yoğun çalışmalar yapmış diğer matematikçiler Ibragimov(1983), Bluman (1989) ve Olver (1993)' dır.

Bilindiği gibi bir grup, elemanları üzerinde ikili bir işlemin tanımlandığı kümedir. Bu işlem herhangi bir işlem olmayıp dört özelliği gerçekleyen bir işlemdir. Bu θ işlemi gruba ait iki elemanı grubun bir başka elemanı ile eşleştirir. Bu özellik kapalılık özelliği olarak adlandırılır. Bir başka özellik birleşme özelliğidir. a,b,c kümenin herhangi üç elemanı olmak üzere birleşme özelliği gereği

$$\theta(a,\theta(b,c)) = \theta(\theta(a,b),c) \tag{1.1}$$

olması gerekir. Diğer bir özellik bir e özdeşlik elemanının bulunması gereğidir. e özdeşlik elemanı, grubun her a elemanı ile

$$\theta(a,e) = \theta(e,a) = a \tag{1.2}$$

bağıntısını gerçekler. Bir kümenin grup olabilmesi için sağlanması gereken sonuncu özellik her a elemanının bir a^{-1} tersinin bulunması zorluğudur. Herhangi a^{-1},a çifti için

$$\theta(a,a^{-1}) = \theta(a^{-1},a) = e \tag{1.3}$$

olur. Yukarıda ifade edilen dört özelliğin sağlanması sonucu grup kavramı ortaya çıkar. Şimdi grup kavramından hareketle cebrin çok kullanılan bir kavramı olan dönüşüm grubunun tanımı yapılacaktır.

D, n boyutlu bir Öklid uzayının bir bölgesi ve x bu bölge içinde bir nokta olmak üzere

$$\bar{x} = Y(x,\varepsilon) \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşümler kümesi aşağıdaki özellikler sağlanırsa dönüşümler grubu ismini alır. Öncelikle ε parametresinin her bir değeri için dönüşüm Öklid uzayının D bölgesi üzerinde bir homeomorfizm olmalıdır. l , ε parametresinin değişim aralığı olmak üzere bu aralık θ grup işlemine göre bir grup oluşturmalıdır. Öte yandan e,θ grup elemanının özdeşlik elemanı ise

$$Y(x,\varepsilon)=x \tag{1.5}$$

olacaktır ve son olarak

$$\bar{x}=Y(x,\varepsilon),\ \bar{\bar{x}}=Y(\bar{x},\delta) \tag{1.6}$$

ise

$$\bar{\bar{x}}=Y(x,\theta(\varepsilon,\delta)) \tag{1.7}$$

olarak yazılabilmektedir. ε sürekli bir parametre olmak üzere, Y Öklid uzayında x e göre her mertebeden türevlere sahip, l aralığında ε nun analitik bir fonksiyonu ve $\theta(\varepsilon,\delta)$, ε ve δ'nın analitik bir fonksiyonu ise dönüşümler grubuna Lie grubu ismi verilir. Sadece ε şeklinde tek parametrenin bulunması durumunda elde edilen gruba bir parametreli Lie grubu adı verilir.

$\theta(\varepsilon,\delta)$ fonksiyonu uygun bir dönüşüm yardımı ile her zaman

$$\theta(\varepsilon,\delta)=\varepsilon+\delta \tag{1.8}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$Y(x,0)=x \tag{1.9}$$

dır.

$$\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}(x,\varepsilon)\,|_{\varepsilon=0}=\xi(x) \tag{1.10}$$

vektörüne Lie grubunun infinitesimali (sonsuz küçük) denir. Buna karşın

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.11}$$

operatörüne ise Lie grubunun sonsuz küçük üreteci ismi verilir. $F(x)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$XF(x)\,|_{F(x)=0}=0 \tag{1.12}$$

eşitliği sağlanıyorsa $F(x)$ fonksiyonuna Lie grubunun değişmez fonksiyonu ismi verilir.

Bir diferensiyel denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F(x,u,u_1,...,u_k)=0 \tag{1.13}$$

burada x multi-indeks gösteriminde bağımsız değişkenleri, u bağımlı değişkenleri u_i

u nun tüm i. mertebeden türevlerini göstermektedir. Bu durumda diferensiyel denklem $(x,u,u_{(1)},...,u_{(k)})$ ile teşkil edilmiş uzayda bir manifold gösterir.

Bir Lie grubu ve onun (x,u) uzayındaki sonsuz küçük operatörü Lie nokta dönüşümler grubu ya da Lie dönüşümler grubu olarak tanımlanır. Fakat bir Lie nokta dönüşümler grubu aynı zamanda türevleri de içeren bir uzayda etkiyecek biçimde genişletilebilir. Bu genişletmeye uzanım ismi verilir. Lie nokta dönüşümler grubu, uzanım ve onun sonsuz küçük üreteci değme özellikleri korunacak şekilde oluşturulur. Diğer bir deyişle, dönüştürülmüş bağımsız değişkenlere göre dönüştürülmüş bağımlı değişkenlerin türevi, türevin dönüşümüne eşit olur. Eğer bir Lie grubunun sonsuz küçük üretecinin uygun uzanımının bir diferensiyel denklem üzerine uygulanması sıfırı veriyor ise bu durum diferensiyel denklemin Lie grubunu kabul ettiğini ifade eder:

$$X^k F(x,u,u_1,...,u_k)\,|_{F=0} = 0 \tag{1.14}$$

Burada k, diferensiyel denklemin mertebesini göstermektedir. X^k , k. uzanım sembolüdür. Lie grubunun bağımsız ve bağımlı değişkenleri sembolik olarak x,u ile gösterilecek olursa sonsuz küçük üreteci

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{1.15}$$

olarak gösterilir. Sonsuz küçük üretece ait birinci uzanım

$$X^1 = X + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m}\left(D_i\eta^\alpha - \sum_{j=1}^{m} u_j^\alpha D_i\xi^j\right)\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} \tag{1.16}$$

şeklinde olur. Burada,

$$u_j^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j},$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} u_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ii_1 \ldots i_n}},\quad prX^k - pxX^{k-1} = \sum_{i_1 \ldots i_k} \overset{(k)^\alpha}{\eta}_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \ldots i_k}}$$

$$u^\alpha_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial u^\alpha}{(\partial x^1)^{j_1}(\partial x^2)^{j_2}\ldots(\partial x^n)^{j_n}},\quad \overset{(1)^\alpha}{\eta}_i = D_i\eta^\alpha - u_j^\alpha(D_i\xi^j) \tag{1.17}$$

$$\overset{(k)^\alpha}{\eta}_{i_1 \ldots i_k} = D_i \overset{(k-1)^\alpha}{\eta}_{i_1 \ldots i_{k-1}} - u^\alpha_{ji_1 \ldots i_{k-1}}(D_{i_k}\xi^j)$$

olarak ifade edilmektedir.

Pek çok durumda çok parametreli Lie dönüşüm grupları söz konusudur. Bu durumda ε, parametreye eşit sayıda bileşeni olan vektörel bir büyüklük olur. Böyle bir durumda r, parametre sayısına eşit sayıda sonsuz küçük üreteci bileşeni ortaya çıkar. Sonsuz küçük üreteci

$$X^{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} \xi_{\alpha j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \alpha = 1,\dots,r \tag{1.18}$$

yapısında olur.

n. mertebeden bir diferensiyel denklemin bir Lie grubunu kabul etmesi, Lie grubunun sonsuz küçük üretecinin diferensiyel denkleme uygulanmasının diferensiyel denklemin tanımladığı manifold üzerinde sonucun sıfır vermesi anlamına gelir. Bununla birlikte bir diferensiyel denklemin bir Lie grubunu kabul etmesi, Lie grubunun diferensiyel denklemin çözümlerini denklemin başka çözümlerine dönüştürmesi anlamını taşır. Eğer diferensiyel denklemin mertebesi birden büyükse sonsuz küçük üretecinin ilgili diferensiyel denkleme uygulanması sonucu sonsuz küçük üretecinin katsayıları cinsinden çok belirli bir kısmi türevli diferensiyel denklem takımına ulaşılır. Bu denklem takımının çözümleri diferensiyel denklemin kabul ettiği Lie gruplarının tamamını verir. Eğer bir adi diferensiyel denklemin r parametreli bir Lie grubu varsa diferensiyel denklem $(n-r)$. mertebeden bir diferensiyel denkleme indirgenebilir. Eşleşen r parametreli Lie cebri, çözümlenebilir Lie cebri ise ve $(n-r)$. mertebeden diferensiyel denklemin integrali bulunuyorsa bu integralden esas diferensiyel denklemin çözümü r kere ardışık kuadratür ile bulunur. Çözümlenebilen bir Lie cebri bilindiği gibi aşağıdaki özellikleri sağlar. Çözümlenebilen n elemanlı bir Lie cebrinin $(n-1)$ elemanlı bir alt cebri vardır ve bu alt cebrin elemanları ile Lie cebrinin elemanlarının çarpımı yine alt cebir içerisinde kalır. $(n-1)$ elemanlı Lie cebrinin aynı özelliği taşıyan $(n-2)$ elemanlı bir alt cebri vardır. Böylece devam ederek 2 elemanlı bir alt cebre ulaşılabilir.

Sürekli simetri gruplarının avantajı, bir takım hesaplama yöntemleri kullanılarak bulunabilmeleridir. Çoğu diferensiyel denklem sisteminde belirleyici denklemlerin elde edilmesi önem taşır. Tüm bu işlemler sıradan bir takım hesaplamalarıdır ve bu hesaplamalar yapmak için son yirmi yıl içerisinde geliştirilmiş bir takım paket programlar mevcuttur (Champagne 1991).

1.2. Lie-Bäcklund Operatörü

$x=(x^1,...,x^n)$ n bağımsız değişken, $u=(u^1,...,u^m)$ m bağımlı değişken ve $u_{(1)}=\{u_i^\alpha\}, u_{(2)}=\{u_{ij}^\alpha\},...$ sırasıyla, birinci, ikinci, ... mertebe kısmi türevler olsun. Burada $u_i^\alpha=\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, u_{ij}^\alpha=\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}$ dur. x^i ye göre total türev

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+u_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+u_{ij}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}+...,\ i=1,...,n \tag{1.19}$$

ile gösterilmek üzere, $u_i^\alpha=D_i(u^\alpha)$, $u_{ij}^\alpha=D_jD_i(u^\alpha),...$ 'dır. u^α değişkenleri aynı zamanda diferensiyel değişkenler olarak bilinir. $x, u, u_{(1)}, u_{(2)},..$ sonlu sayıdaki değişkenlerinin $f(x,u,u_{(1)},...)$ fonksiyonu, tüm argümanlarına göre yerel olarak yakınsak bir Taylor serisine açılabiliyorsa yani yerel olarak analitikse *diferensiyel fonksiyon* olarak adlandırılır. Diferensiyel fonksiyonda görünen en yüksek mertebe türev bu fonksiyonun mertebesi olarak adlandırılır. Tüm sonlu mertebeli diferensiyel fonksiyonların cümlesi A ile gösterilir. Bu cümle, alışılmış toplama işlemine göre bir vektör uzaydır ve şayet çarpma işlemi fonksiyonların alışılmış çarpma işlemi ile tanımlanırsa değişmeli cebir olur. A uzayı total türev altında kapalıdır. Yani şayet $f\in A$ ise $D_i(f)\in A$' dır.

ξ^i, η^α sonlu sayıda $x, u, u_{(1)}, u_{(2)},...$ değişkenlerine bağımlı olan diferensiyel fonksiyonlar olsun.

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\zeta_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}+\zeta_{i_1i_2}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2}^\alpha}+..., \tag{1.20}$$

birinci mertebe lineer diferensiyel operatörüne Lie-Bäcklund operatörü denir. Burada,

$$\zeta_i^\alpha=D_i(\eta^\alpha-\xi^j u_j^\alpha)+\xi^j u_{ij}^\alpha,$$

$$\zeta_{i_1i_2}^\alpha=D_{i_1}D_{i_2}(\eta^\alpha-\xi^j u_j^\alpha)+\xi^j u_{ji_1i_2}^\alpha,.. \tag{1.21}$$

dir. (1.20) Lie-Bäcklund operatörü sıklıkla

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + ..., \qquad (1.22)$$

kısaltılmış formunda yazılır. Burada X operatörü için (1.21) ile verilen uzanım anlaşılır.

(1.20) operatörü şeklen bir sonsuz toplamdır fakat herhangi bir diferensiyel fonksiyon üzerine etki ettiğinde kesilir. Dolaysıyla Lie-Bäcklund operatörlerinin etkisi A uzay üzerinde iyi tanımlıdır. Herhangi iki Lie-Bäcklund operatörünün

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1$$

kamütatörü olan

$$X_\nu = \xi_\nu^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_\nu^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + ... \; (\nu = 1,2),$$

$$[X_1, X_2] = (X_1(\xi_2^i) - X_2(\xi_1^i))\frac{\partial}{\partial x^i} + (X_1(\eta_2^\alpha) - X_2(\eta_1^\alpha))\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + ... \qquad (1.23)$$

ile verilen Lie-Bäcklund operatörü ile özdeştir. Burada noktalar ile gösterilen terimler (1.21) denklemleri ile uyumlu olan $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ve $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ katsayılarının uzatılmasıyla elde edilir.

Tüm Lie-Bäcklund operatörlerinin cümlesi (1.23) kamütatörüne göre sonsuz boyutlu Lie cebridir. Lie-Bäcklund cebiri olarak adlandırılır ve L_B ile gösterilir. L_B cebiri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $D_i \in L_B$ dir. Diğer bir ifadeyle (1.19) total türevi Lie-Bäcklund operatörüdür. Ayrıca herhangi bir $\xi_*^i \in A$ için

$$X_* = \xi_*^i D_i \in L_B \qquad (1.24)$$

dir.

ii) L_* (1.24) formundaki tüm Lie-Bäcklund operatörlerinin cümlesi olsun. Bu takdirde L_*, L_B 'nin bir idealidir, yani herhangi bir $X \in L_B$ için $[X, X_*] \in L_*$ dir. Gerçekten

$$[X, X_*] = (X(\xi_*^i) - X_*(\xi^i))D_i \in L_*.$$

iii) ii). deki özellikle uyumlu olarak şayet $X_1 - X_2 \in L_*$ ise $X_1, X_2 \in L_B$ operatörlerine denk operatörler denir. Yani $X \sim \widetilde{X}$ dır. Burada

$$\widetilde{X} = X - \xi^i D_i = (\eta^\alpha - \xi^i u^\alpha{}_i)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + ... \qquad (1.25)$$

$$X = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + ..., \ \eta^\alpha \in A \qquad (1.26)$$

formundaki operatörlere kanonik Lie-Bäcklund operatörleri denir. Dolayısıyla iii) özelliği herhangi bir $X \in L_B$ operatörünün kanonik Lie-Bäcklund operatörüne denk olduğu anlamına gelir.

iv) Lie nokta dönüşüm gruplarının üreteçleri, ξ^i ve η^α yalnızca x ve u bağımlı olmak üzere (1.22) operatörüdür. Yani,

$$X = \xi^i (x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha (x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \qquad (1.27)$$

dır.

(1.20) Lie-Bäcklund operatörünün (1.27) nokta dönüşüm grup üretecine denk olması ancak ve ancak koordinatlarının

$$\xi^i = \xi_1^i (x,u) + \xi_*^i, \eta^\alpha = \eta_1^\alpha (x,u) + (\ \xi_2^i (x,u) + \xi_*^i)u_i^\alpha$$

formunda olmasıyla mümkündür. Burada $\xi_*^i \in A$ keyfi diferensiyel fonksiyon ve $\xi_1^i, \xi_2^i, \eta_1^\alpha$, x ve u nun keyfi fonksiyonlarıdır.

Örnek 1.2.1. t, x bağımsız değişkenler olsun. Galilean dönüşüm üreteci ve onun kanonik Lie-Bäcklund formu olan (1.25)

$$X = \frac{\partial}{\partial u} - t\frac{\partial}{\partial x} \sim \widetilde{X} = (1 + tu_x)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots$$

şeklindedir.

Örnek 1.2.2. Homojen olmayan genleşme üreteci ve onun kanonik Lie-Bäcklund temsili (1.25)

$$X = 2u\frac{\partial}{\partial u} - 3t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} \sim \widetilde{X} = (2u + 3tu_t + xu_x)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots$$

şeklindedir.

1.3. Temel Bağıntılar

A 'da Euler-Lagrange operatörü

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha}=\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\sum(-1)^r D_{i_1}...D_{i_r}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1...i_r}}, \qquad \alpha=1,...,m. \tag{1.28}$$

toplamı ile tanımlanır. Burada herhangi bir s için toplamın 1 den n 'ye kadar olan $i_1,...,i_s$ tekrar eden indislerinin üzerinde olduğu farz edilir.

Bir bağımsız değişken x ve bir bağımlı değişken y halinde Euler-Lagrange operatörü

$$\frac{\delta}{\delta y}=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s D_x^s\frac{\partial}{\partial y^{(s)}}=\frac{\partial}{\partial y}-D_x\frac{\partial}{\partial y'}+D_x^2\frac{\partial}{\partial y''}-D_x^3\frac{\partial}{\partial y'''}+... \quad \alpha=1,...,m \tag{1.29}$$

biçimindedir. Burada D_x, x ' e göre total türevi gösterir ve

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+y''\frac{\partial}{\partial y'}+...$$

şeklindedir. $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ herhangi bir (1.20) Lie-Bäcklund operatörü olsun. X operatörü aşağıdaki N^i operatörü ile formal toplam aracılığıyla ilişkilendirilirse

$$N^i=\xi^i+W^\alpha\frac{\delta}{\delta u_i^\alpha}+\sum_{s=1}^{\infty}D_{i_1}...D_{i_s}(W^\alpha)\frac{\delta}{\delta u^\alpha_{ii_1...i_s}}, \tag{1.30}$$

dir. Burada

$$W^\alpha=\eta^\alpha-\xi^j u_j^\alpha,\ \alpha=1,...,m. \tag{1.31}$$

dir. u^α nın türevlerine göre Euler-Lagrange operatörünün u^α nın karşı gelen türevler ile yer değiştirmesinden elde edilir. Örneğin,

$$\frac{\delta}{\delta u_i^\alpha}=\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{j_1}...D_{j_r}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ij_1...j_r}}, \tag{1.32}$$

dir. (1.28) Euler-Lagrange, (1.20) Lie-Bäcklund ve (1.32) asosiye operatörler birbirleriyle aşağıdaki temel bağıntıyla ilişkilendirilir:

$$X+D_i(\xi^i)=W^\alpha\frac{\delta}{\delta u^\alpha}+D_i(N^i) \tag{1.33}$$

1.4. Noether Teoremi

$$\frac{\delta L}{\delta u^{\alpha}} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^{\alpha}} - D_i(\frac{\partial L}{\partial u_i^{\alpha}}) = 0, \ \alpha = 1,...,m \qquad (1.34)$$

Euler-Lagrange denklemleri göz önüne alınsın. Burada $L(x,u,u_{(1)})$ birinci mertebe Lagrangian'dır. Yani o yalnızca $x=(x^1,...,x^n)$ bağımsız değişkenler, $u=(u^1,...,u^m)$ bağımlı değişkenler ve $u_{(1)}=\{u_i^{\alpha}\}$ birinci mertebe türevleri içerir.

Noether teoremi ifade eder ki, şayet $L(x,u,u_{(1)})$ Lagrangianlı varyasyonel integrali,

$$X = \xi^i(x,u,u_{(1)},...)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^{\alpha}(x,u,u_{(1)},...)\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \qquad (1.35)$$

üreteçli G grubu altında değişmez ise bu takdirde $C=(C^1,...,C^n)$ vektör alanı

$$C^i = \xi^i L + (\eta^{\alpha} - \xi^j u_j^{\alpha})\frac{\partial L}{\partial u^{\alpha}}, \ i=1,...,n \qquad (1.36)$$

ile tanımlanıp (1.34) Euler-Lagrange denklemleri için korunum kanunlarını verir. Yani (1.34) ün tüm çözümleri için

$$divC \equiv D_i(C^i)|_{(1.34)} = 0 \qquad (1.37)$$

dır. (1.37) yi sağlayan herhangi bir C^i vektör alanına (1.34) denklemi için korunum vektörü denir.

Uyarı 1.4.1. (1.37) denkleminden açıktır ki, korunum vektörlerinin herhangi bir lineer kombinasyonu yine bir korunum vektörüdür. Ayrıca (1.34) denkleminin çözümleri üzerinde sıfır olan herhangi bir vektör (1.34) denklemi için aşikâr korunum vektörüdür.

Varyasyonel integralin değişmezliği (1.34) Euler-Lagrange denklemlerinin G grubunu kabul ettiğini ima eder. Dolayısıyla Noether teoremini uygulayabilmek için ilk olarak (1.34) denkleminin simetrileri bulunmalıdır. Daha sonra (1.34) varyasyonel integralini değişmez bırakan simetriler seçilmelidir. Bu, varyasyonel integralin değişmezliği için aşağıdaki sonsuz küçük test aracılığıyla yapılır:

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = 0 \tag{1.38}$$

Burada X üreteci $u_{(1)}$ birinci mertebe türevlere göre uzatılmış olup

$$X^1 = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + [D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j)] \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} \tag{1.39}$$

şeklindedir. Şayet (1.38) denklemi sağlanırsa bu takdirde (1.36) vektörü bir korunum kanunu verir.

Euler-Lagrange denklemlerinin değişmezliği için varyasyonel integralin değişmezliği yeterli, fakat gerekli değildir. Gerçekten aşağıdaki Lemma gösterir ki, şayet herhangi bir vektör alanının diverjansı Lagrangiana ilave edilirse Euler-Lagrange denklemi değişmez kalır.

Lemma 1.4.2. Bağımsız değişkenler $x = (x^1,...,x^n)$, bağımlı değişkenler $u = (u^1,\dots,u^m)$ olmak üzere, $f(x,u,...,u_{(s)}) \in A$ fonksiyonunun bir $H = (h^1,...,h^n)$, $h_i \in A$ vektör alanının diverjansı yani

$$f = divH \equiv D_i(h_i),$$

olması için $x, u, u_{(1)},...$ de

$$\frac{\delta f}{\delta u} = 0, \ \alpha = 1,...,m \tag{1.40}$$

denklemlerinin özdeş olarak sağlanmalıdır.

Böylelikle grup parametresine bağımlı olan bir keyfi vektör alanının diverjansı L Lagrangiana eklenebilir ve (1.38) değişmezlik koşulu

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = D_i(B^i) \tag{1.41}$$

diverjans koşulu ile yer değiştirir. Bu takdirde (1.34) Euler-Lagrange denklemleri yine değişmezdir ve $D_i(C^i) = 0$ korunum kanununa sahiptir. Burada (1.36)

$$C^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - B^i \tag{1.42}$$

ile yer değiştirir. (1.33) ve (1.38) denklemlerinden açıktır ki, yüksek mertebeden $L(x,u,u_{(1)},u_{(2)},u_{(3)},...)$ Lagrangianlı $\int L dx$ varyasyonel integrali, (1.35) üreteçli grup altında değişmez ise bu takdirde

$$C^i = N^i(L) \tag{1.43}$$

vektörü karşı gelen Euler-Lagrange denklemleri için korunum kanunu verir. L'nin $u_4,...$ ve yüksek mertebe türevlerine göre türetmelerini göz önüne almazsak (1.38) ve (1.30) dan

$$\begin{aligned} C^i = L\xi^i &+ (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_j\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha}\right) + D_j D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right) - ...\right] \\ &+ D_j(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right) + ...\right] \\ &+ D_j D_k(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha} - ...\right] + ... \end{aligned} \tag{1.44}$$

elde edilir. Burada N^i (1.30) operatörüdür ve $W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha$ (1.31) ile verilir. Birinci mertebe Lagrangian halinde (1.44) denklemleri (1.36) denklemi ile çakışır. İkinci mertebe $L(x,u,u_{(1)},u_{(2)})$ Lagrangian için (1.34) Euler-Lagrange denklemleri ve (1.36) korunum vektörü sırasıyla

$$\frac{\delta L}{\delta u} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) + D_i D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right) = 0, \tag{1.45}$$

$$C^i = L\xi^i + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right)\right] + D_k(W^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha} \tag{1.46}$$

ile verilir. Üçüncü mertebe $L(x,u,u_{(1)},u_{(2)},u_{(3)})$ Lagrangian olması halinde Euler-Lagrange denklemleri

$$\frac{\delta L}{\delta u} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) + D_i D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right) - D_i D_j D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right) = 0 \tag{1.47}$$

olarak yazılır. (1.44) korunum vektörü ise

$$
\begin{aligned}
C^i &= L\xi^i + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_j\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha}\right) + D_j D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)\right] \\
&\quad + D_j(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)\right] \\
&\quad + D_j D_k(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right]
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

olur.

1.5. Temel Tanımlar ve Teoremler

1.5.1. Eşlenik denklemler

Bilindiği gibi, bir $\mathcal{L}$ lineer diferensiyel operatörüne *eşlenik operatör* genellikle bir $\mathcal{L}^*$ lineer operatörü olarak tanımlanır öyle ki,

$$v\mathcal{L}[u] - u\,\mathcal{L}^*[v] = divP(x) \tag{1.49}$$

denklemi tüm u ve v fonksiyonlar için sağlanır. Burada $P(x) = (p^1(x),...,p^{(n)}(x))$ herhangi bir vektör ve $divP = D_i(p^i)$ dir. $\mathcal{L}^*[v] = 0$ denklemine $\mathcal{L}[u] = 0$ denkleminin *eşlenik denklemi* denir. Şayet herhangi bir $u(x)$ fonksiyonu için $\mathcal{L}[u] = \mathcal{L}^*[u]$ oluyorsa $\mathcal{L}$ operatörüne $\mathcal{L}[u] = 0$ denklemine kendi eşleniktir denir. Örneğin şayet $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[u] = a^{ij}(x)D_iD_j(u) + b^i(x)D_i(u) + c(x)u, \tag{1.50}$$

biçiminde ikinci mertebe bir diferensiyel operatör ise (1.49) denklemi aracılığıyla $\mathcal{L}^*$ eşlenik operatörü

$$\mathcal{L}^*[v] = D_iD_j(a^{ij}(x)v) - D_i(b^i(x)v) + c(x)v \tag{1.51}$$

ile verilir.

$$b^i(x) = D_j(a^{ij}), \quad i = 1,...,n \tag{1.52}$$

olması koşuluyla (1.50) kendi eşleniktir.

Eşlenik operatör ve eşlenik denklem tanımları diferensiyel denklem sistemleri için aynıdır. Örneğin ikinci mertebe denklem sistemleri halinde eşlenik operatör, u nun m boyutlu bir vektör fonksiyonu ve (1.50) operatörünün $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ ve $c(x)$

katsayılarının $(m \times m)$ matris farz edilmesiyle elde edilir. Aşağıdaki iki ikinci-mertebe denklem kendi eşlenik sisteme birer örnektir:

$$x^2 u_{xx} + u_{yy} + 2xu_x + w = 0,$$

$$w_{xx} + y^2 w_{yy} + 2yw_y + u = 0.$$

Bilindiği gibi eşlenik denklemlerin tanımlanması için (1.49) denklemi aracılığıyla denklemlerin lineer olması esastır. (Ibragimov 2006) da tanımlanan aşağıdaki eşlenik denklem tanımı lineer ya da lineer olmayan tüm diferensiyel denklem sistemlerine uygulanabilir.

Tanım 1.5.1. s. mertebeden

$$F_\alpha (x,u,...,u_{(s)}) = 0, \ \alpha = 1,...,m \tag{1.53}$$

kısmi diferensiyel denklem sistemi göz önüne alınsın. Burada $x = (x^1,...,x^n)$ n bağımsız değişken ve $u = (u^1,...,u^m)$, $u = u(x)$ m bağımlı değişken olmak üzere, $F_\alpha (x,u,...,u_{(s)}) \in A$ diferensiyel fonksiyonlardır. Şimdi

$$F_\alpha^* (x,u,v,...,u_{(s)},v_{(s)}) = \frac{\delta (v^\beta F_\beta)}{\delta u^\alpha}, \ \alpha = 1,...,m \tag{1.54}$$

diferensiyel fonksiyonları tanımlansın. Burada $v = (v^1,...,v^m)$, $v = v(x)$ yeni bağımlı değişkenlerdir. (1.53) denklemlerinin eşlenik denklemleri

$$F_\alpha^* (x,u,v,...,u_{(s)},v_{(s)}) = 0, \alpha = 1,...,m \tag{1.55}$$

olarak tanımlanır. Lineer denklemler halinde tanım eşlenik denklemin klasik tanımına denktir.

Tanım 1.5.2. Şayet $v = u$ yazılmasıyla (1.55) eşlenik denklemlerinden elde edilen

$$F_\alpha^* (x,u,u,...,u_{(s)},u_{(s)}) = 0, \alpha = 1,...,m \tag{1.56}$$

sistemi, (1.53) orijinal sistemine özdeş ise (1.53) denklem sistemlerine *kendi eşleniktir* denir.

Uyarı 1.5.3. Tanım (1.5.2), (1.56) eşlenik denklem sisteminin sol yanı ile (1.53) ün çakışacağı anlamına gelmez. Dolayısıyla genel olarak (1.53) kendi eşlenik olsa bile

$F_\alpha^*(x,u,u,...,u_{(s)},u_{(s)}) \neq F_\alpha(x,u,...,u_{(s)})$ olabilir.

Örnek 1.5.4. $u_t - u_{xx} = 0$ ısı denklemi için (1.54) denkleminden

$$F^* = \frac{\delta}{\delta u}\left[v(u_t - u_{xx})\right] = \left(-D_t \frac{\partial}{\partial u_t} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}}\right)\left[v(u_t - u_{xx})\right]$$
$$= -D_t(v) - D_x^2(v)$$

elde edilir. Dolayısıyla ısı denkleminin (1.55) eşlenik denklemi $v_t + v_{xx} = 0$ dır. Açıktır ki, ısı denklemi kendi eşlenik değildir.

Teorem 1.5.5. Herhangi bir s. mertebeden (1.53) diferensiyel denklem sistemi (1.54) eşlenik denklemi ile beraber göz önüne alındığında daima bir Lagrangiana sahiptir. Yani (1.34) Euler-Lagrange denklemleri

$$L = v^\beta F_\beta(x,u,...,u_{(s)}), \tag{1.57}$$

Lagrangianıyla $u = (u^1,...,u^m)$ ve $v = (v^1,...,v^m)$ $2m$ bağımlı değişkenli (1.53)-(1.55) denklem sistemlerini verir.

İspat. (Ibragimov 2006) da verilen ispat açıktır. Gerçekten (1.57) ile verilen L'nin varyasyonu yani

$$\frac{\delta L}{\delta v^\alpha} = F_\alpha(x,u,...,u_{(s)}), \tag{1.58}$$

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = F_\alpha^*(x,u,v...,u_{(s)},v_{(s)}) \tag{1.59}$$

ispatı tamamlar.

Örnek 1.5.6. Teorem (3.2) ye göre $u_t - u_{xx} = 0$ ısı denklemi $L = v(u_t - u_{xx})$ ikinci mertebe Lagrangianı için $v_t + v_{xx} = 0$ eşlenik denklemi ile beraber (1.43) Euler-Lagrange denklemleridir. Lemma 1.4.2 ve $-vu_{xx} = (-vu_x)_x + u_x v_x$ özdeşliği kullanılırsa $L = vu_t + u_x v_x$ birinci mertebe Lagrangianı alınabilir. Her iki Lagrangianın varyasyonel türevleri şu şekildedir:

$$\frac{\delta L}{\delta v} = u_t - u_{xx}, \quad \frac{\delta L}{\delta u} = -(v_t + v_{xx}).$$

Örnek 1.5.6 yı herhangi bir lineer ikinci mertebe

$$\mathcal{L}[u] = a^{ij}(x)u_{ij} + b^i(x)u_i + c(x)u = f(x) \tag{1.60}$$

diferensiyel denklemine genişletelim. (1.57) Lagrangianı

$$L = (a^{ij}(x)u_{ij} + b^i(x)u_i + c(x)u - f(x))v$$

olarak yazılır.

$$L = D_j(va^{ij}u_i) - vu_iD_j(a^{ij}) - a^{ij}u_iv_j + vb^iu_i + cuv - f(x)v$$

formunda da yazılabilir. Lemma 1.4.2 gereği sağ taraftaki ilk terim sıfıra eşittir. Dolayısıyla

$$L = cuv + vb^i(x)u_i - vu_iD_j(a^{ij}) - a^{ij}u_iv_j - f(x)v \tag{1.61}$$

dır. (1.61) diferensiyel fonksiyonu (1.60) denklemi ve $D_iD_j(a^{ij}v) - D_i(b^iv) + cv = 0$ eşlenik denklemi ile beraber göz önüne alındığında bir Lagrangian verir. Yani

$$\frac{\delta L}{\delta v} = cu + b^i(x)u_i - u_iD_j(a^{ij}) + D_j(a^{ij}u_i) - f = a^{ij}u_{ij} + b^iu_i + cu - f$$

ve

$$\frac{\delta L}{\delta u} = cv - D_i(b^iv) + D_i(vD_j(a^{ij}v)) + D_i(a^{ij}v_j) = D_iD_j(a^{ij}v) - D_i(b^iv) + cv.$$

dir. Özellikle şayet $L[u]$ operatörü kendi eşlenik ise bu takdirde (1.60) denklemi

$$L = \frac{1}{2}[c(x)u^2 - a^{ij}(x)u_iu_j]$$

Lagrangianından elde edilir.

Gerçekten (1.61) denkleminin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler (1.52) koşulu gereği birbirlerini yok eder. Şimdi $v = u$ yazılır ve ikiye bölünürse (1.62) Lagrangianına ulaşılır.

Örnek 1.5.7.

$$u_t = u_{xxx} + uu_x \tag{1.63}$$

Korteweg-de Vries denklemi (kısaca KdV) göz önüne alınsın. (1.54) denkleminden $F^*(t,x,u,v,...,u_{(3)},v_{(3)}) = -(v_t - v_{xxx} - uv_x)$ dir. Buradan açıktır ki, KdV denkleminin eşlenik denklemi

$$v_t = v_{xxx} + uv_x \tag{1.64}$$

olup $F^*(t,x,u,u,...,u_{(3)},u_{(3)}) = -F(t,x,u,...,u_{(3)})$ dir. Dolayısıyla KdV denklemi kendi eşleniktir ve Uyarı 1.5.3 e bir örnek teşkil eder. (1.57) denklemini kullanarak KdV denklemi için

$$L = v[u_t - u_{xxx} - uu_x] \tag{1.65}$$

üçüncü mertebe Lagrangianı elde edilir. $-vu_{xxx} = (-vu_{xx})_x + v_x u_{xx}$ olduğu için Lemma 1.4.2 kullanılır ve

$$L = vu_t - vuu_x + v_x u_{xx} \tag{1.66}$$

ikinci mertebe Lagrangianı alınabilir. (1.66), aşağıdaki ikinci mertebe Lagrangiana denktir:

$$L = v_x u_{xx} - uv_t + \frac{1}{2}u^2 v_x$$

(1.65)-(1.67) Lagrangianlarından herhangi biri (1.63) KdV denklemini ve onun (1.64) eşlenik denklemini verir. Gerçekten,

$$\frac{\delta L}{\delta v} = u_t - u_{xxx} - uu_x, \frac{\delta L}{\delta u} = -v_t + v_{xxx} + uv_x$$

dir.

1.5.2. Eşlenik denklemin simetrileri

(1.54) eşlenik denkleminin (1.53) denkleminin tüm Lie ve Lie-Bäcklund simetrilerini kabul ettiği gösterilecektir. Skaler denklemler ile başlanacaktır.

Teorem 1.5.8. $x = (x^1,...,x^n)$ n bağımsız değişkenli ve bir u bağımlı değişkenli

$$F(x,u,u_{(1)},...,u_{(s)}) = 0 \tag{1.68}$$

denklemi göz önüne alınsın. (1.68) denkleminin

$$F_\alpha^*(x,u,v...,u_{(s)},v_{(s)}) \equiv \frac{\delta(vF)}{\delta u} = 0 \tag{1.69}$$

eşlenik denklemi (1.68) denkleminin simetrilerini kabul eder. Şöyle ki, şayet (1.68) denklemi

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \tag{1.70}$$

operatörünü kabul ederse (burada X ya bir nokta dönüşüm grubu üretecidir yani $\xi^i = \xi^i(x,u)$, $\eta = \eta(x,u)$ ya da bir Lie-Bäcklund operatörüdür yani $\xi^i = \xi^i(x,u,u_{(1)},...,u_{(p)})$ ve $\eta = \eta(x,u,u_{(1)},...,u_{(p)})$ dir) bu takdirde (1.69) denklemi, $\eta_* = \eta_*(x,u,u_{(1)},\dots)$ belirli bir fonksiyon olmak üzere

$$Y = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta_* \frac{\partial}{\partial v} \tag{1.71}$$

operatörünü kabul eder.

İspat. (1.70) operatörü (1.68) denkleminin Lie nokta simetrisi olsun. Bu takdirde

$$X(F) = \lambda F \tag{1.72}$$

dir. Burada $\lambda = \lambda(x,u,...)$ dur. (1.72) denkleminde (1.68) denkleminde ihtiva olunan tüm türevlere göre X in uzatılmış olduğu anlaşılır. Ayrıca, (1.68),(1.69) sistemi (1.57) Lagrangianına sahiptir:

$$L = vF \tag{1.73}$$

(1.70) operatörünün η_* bilinmeyen katsayılı (1.71) formunda genişlemesini alır ve (1.38) değişmezlik koşulunun sağlanması gerektiğini göz önüne alırsak

$$Y(L) + LD_i(\xi^i) = 0 \tag{1.74}$$

elde edilir. Yani

$$\begin{aligned} Y(L) + LD_i(\xi^i) &= Y(v)F + vX(F) + vFD_i(\xi^i) = \eta_* F + v\lambda F + vFD_i(\xi^i) \\ &= [\eta_* + v\lambda + vD_i(\xi^i)]F \end{aligned}$$

dir. Dolaysıyla (1.74) koşulu, λ (1.72) denklemi ile tanımlanmak üzere

$$\eta_* = -[\lambda + D_i(\xi^i)]v \tag{1.75}$$

denklemine yol açar. (1.74) denklemi (1.68),(1.69) sisteminin değişmezliğini garanti ettiği için (1.69) eşlenik denkleminin

$$Y = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} - [\lambda + D_i(\xi^i)]v \frac{\partial}{\partial v} \tag{1.76}$$

operatörünü kabul eder. Böylece Lie nokta simetrileri için teorem ispatlanır.

Şimdi farz edilsin ki, (1.70) simetrisi bir Lie-Bäcklund operatörüdür. Bu takdirde (1.72) denklemi

$$X(F) = \lambda_0 F + \lambda_1^i D_i(F) + \lambda_2^{ij} D_i D_j(F) + \lambda_3^{ijk} D_i D_j D_k(F) + ..., \tag{1.77}$$

ile yer değiştirir. Burada $\lambda_2^{ij} = \lambda_2^{ji}$ dir . Böylece (1.71) operatörü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
Y(L) + LD_i(\xi^i) &= Y(v)F + vX(F) + vFD_i(\xi^i) \\
&= [\eta_* + v\lambda_0 + vD_i(\xi^i)]F + v\lambda_1^i D_i(F) + v\lambda_2^{ij} D_i D_j(F) + v\lambda_3^{ijk} D_i D_j D_k(F) + \ldots
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi

$$
\begin{aligned}
v\lambda_1^i D_i(F) &= D_i(v\lambda_1^i F) - FD_i(v\lambda_1^i), \\
v\lambda_2^{ij} D_i D_j(F) &= D_i[v\lambda_2^{ij} D_i D_j(F) - FD_j(v\lambda_2^{ij})] + FD_i D_j(v\lambda_2^{ij}), \\
v\lambda_3^{ijk} D_i D_j D_k(F) &= D_i[\ldots] - FD_i D_j D_k(v\lambda_3^{ijk}),
\end{aligned}
$$

bağıntıları kullanılarak

$$
\begin{aligned}
Y(L) + LD_i(\xi^i) = D_i[v\lambda_i F &+ v\lambda_2^{ij} D_j(F) - FD_j(v\lambda_2^{ij}) + \ldots] \\
&+ [\eta_* + v\lambda_0 + vD_i(\xi^i) - D_i(v\lambda_1^i) + D_i D_j(v\lambda_2^{ij}) \\
&- D_i D_j D_k(v\lambda_3^{ijk}) + \ldots]F
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\eta_* = -[\lambda + D_i(\xi^i)]v + D_i(v\lambda_1^i) - D_i D_j(v\lambda_2^{ij}) + D_i D_j D_k(v\lambda_3^{ijk}) - \ldots \tag{1.78}$$

konumu yapılmak suretiyle teoremin ispat tamamlanmış olur ve

$$B^i = -v\lambda_1^i F - v\lambda_2^{ij} D_j(F) + FD_j(v\lambda_2^{ij}) - \ldots \tag{1.79}$$

olmak üzere (1.41) deki

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = D_i(B^i) \tag{1.80}$$

bağıntısına ulaşılır.

Şimdi eşlenik denklemlerin simetrileri hakkındaki aynı ifadeyi m bağımlı değişkenli m denklem sistemi için ispatlayalım. Kısalığın hatırına teoremin ispatı yalnızca Lie nokta simetrileri için yapılır. İspat, Teorem 1.5.8 de yapıldığı gibi Lie-Bäcklund simetrilerine genişletilebilir.

Teorem 1.5.9. $x = (x^1, \ldots, x^n)$ n bağımsız değişkenli ve $u = (u^1, \ldots, u^m)$ m bağımlı değişkenli, m denklemden oluşan

$$F_\alpha(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m \tag{1.81}$$

sistemi göz önüne alınsın. Eşlenik denklem sistemi olan

$$F_\alpha^*(x,u,v...,u_{(s)},v_{(s)}) \equiv \frac{\delta(v^\beta F_\beta)}{\delta u^\alpha} = 0, \ \alpha = 1,...,m \tag{1.82}$$

(1.81) sisteminin simetrilerini kabul eder. Yani şayet (1.81) sistemi

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{1.83}$$

üreteçli nokta dönüşümü grubunu kabul ederse bu takdirde (1.82) eşlenik denklem sistemi

$$Y = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \eta_* \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \tag{1.84}$$

formülüyle uygun olarak seçilen $\eta_*^\alpha = \eta_*^\alpha(x,u,v,...)$ katsayılarıyla v^α değişkenine genişletilen (1.83) operatörünü kabul eder.

İspat. (1.72) değişmezlik koşulu

$$X(F_\alpha) = \lambda_\alpha^\beta F_\beta, \ \alpha = 1,...,m \tag{1.85}$$

ile yer değiştirir. Burada X in (1.81) denkleminde ihtiva olunan tüm türevlere genişletildiği anlaşılır. Bilinmektedir ki, (1.81),(1.82) sistemi

$$L = v^\alpha F_\alpha \tag{1.86}$$

Lagrangianına sahiptir. (1.83) operatörünün η_*^α belirsiz katsayılı (1.84) formundaki genişlemesi alınsın ve (1.38)

$$Y(L) + LD_i(\xi^i) = 0 \tag{1.87}$$

değişmezlik koşulunun sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} Y(L) + LD_i(\xi^i) &= Y(v^\alpha)F_\alpha + v^\alpha X(F_\alpha) + v^\alpha F_\alpha D_i(\xi^i) \\ &= \eta_*^\alpha F_\alpha + \lambda_\alpha^\beta v^\alpha F_\beta + v^\alpha F_\alpha D_i(\xi^i) \\ &= [\eta_*^\alpha + \lambda_\alpha^\beta + v^\alpha D_i(\xi^i)]F_\alpha \end{aligned}$$

dır. Böylece (1.87) koşulu, λ_α^β (1.85) denklemleri ile tanımlanıyor olmak üzere

$$\eta_*^\alpha = -[\lambda_\alpha^\beta v^\beta + v^\alpha D_i(\xi^i)], \ \ \alpha = 1,...,m \tag{1.88}$$

'e yol açar. (1.87) denklemi (1.81),(1.82) sisteminin değişmezliğini garanti ettiği için (1.82) eşlenik sistemi

$$Y = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} - [\lambda_\alpha^\beta v^\beta + v^\alpha D_i(\xi^i)]\frac{\partial}{\partial v^\alpha} \tag{1.89}$$

operatörünü kabul eder. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 1.5.10. Teorem 1.5.8 ve Teorem 1.5.9 yerel olmayan simetriler için de geçerlidir.

1.5.3. Temel korunum teoremi

Teorem 1.5.11.

$$F_\alpha(x,u,u_{(1)},...,u_{(s)})=0, \quad \alpha=1,...,m \tag{1.90}$$

diferensiyel denklemlerinin her bir Lie nokta, Lie Backlund ve yerel olmayan

$$X=\xi^i(x,u,u_{(1)},...)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha(x,u,u_{(1)},...)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{1.91}$$

simetrisi (1.90) ve (1.82) eşlenik denklemlerinden oluşan diferensiyel denklem sistemi için bir korunum kanunu verir.

İspat. İfadeyi ispatlamak için, (1.91) simetrisi ile ilişkili korunum vektörünü hesaplamada bir yöntem sunulur. Yöntem, skaler denklemler için Teorem 1.5.8, sistemler için ise Teorem 1.5.9' dan açıktır. (1.90), bir bağımlı değişkenli skaler denklem olsun. Bu takdirde (1.91) simetrisi (1.70) formuna sahiptir. Karşı gelen C^i korunum vektörü (1.42) denkleminin (1.73) Lagrangianına ve şayet (1.70), Lie nokta simetrisi ise (1.75) ile, Lie-Bäcklund simetrisi ise (1.78) ile verilen η_* katsayılı (1.71) operatörüne uygulanması ile elde edilir. Son durumda (1.90) denkleminin çözümleri üzerinde (1.79) ile tanımlanan B^i vektörü sıfır olduğu için $D^i(B^i)$ terimi ihmal edilebilir (Uyarı 1.4.1).

$m>1$ olmak üzere (1.90) bir sistem ve (1.83) bir nokta simetrisi olsun. C^i korunum vektörü (1.42) denkleminin (1.86) Lagrangianına ve (1.89) operatörüne uygulanmasıyla elde edilir. Uyarı 1.5.10' un göz önüne alınmasıyla ispat tamamlanır.

1.6. Yerel Olmayan Denklemlerin Lie Grup Analizi

İntegro-diferensiyel denklemlerin (kısaca, İDD) simetri gruplarını araştırmak için literatürde bir kaç yaklaşım mevcuttur. Bu yaklaşımlar *doğrudan* ve *doğrudan olmayan* metotlar olmak üzere iki ana sınıfa ayrılır. *Doğrudan olmayan* metotta İDD sistemi momentler metodu ya da sınır diferensiyel denklemler metodu ile diferensiyel denklemler sistemine dönüştürülür. Momentler metodunda, sonsuz diferensiyel denklemler sistemine geçiş momentler aracılığıyla yapılır. Denklemin Lie simetri gruplarının araştırılması moment sistemindeki her bir denkleme klasik Lie metodunun uygulanmasıyla yapılır.

Doğrudan yaklaşımda klasik grup üretecinin kullanılmasından ziyade kanonik grup temsili uygulanır. Etkili ve basit olan diğer bir yaklaşım İDD' nin çözüm formunun kabul edilebilir bir grubunun cümlesini bulmaktır. Bu araştırma alanının temsilcileri: (Meleshko 1988), (Ibragimov 2002), (Aksenov 1989, Samarov 1989), (Fushchich 1993), (Bobylev 1996), (Taranov 1976), (Roberts 1985) , (Zawitowski 2001), (Özer 2003, 2005, 2007, 2008) 'dir. Aksenov ve Samarov (1989), sözde diferensiyel Schrödinger denkleminin Lie nokta simetrilerini ve tam çözümlerini inceledi. Meleshko (1988), Volterra türü integro-diferensiyel denklem formundaki vizkoelastizite denkleme karşılık gelen bir boyutlu elastoplastik ortamın simetri grup özelliklerini araştırdı. Roberts (1985) ve Zawitovski (2001) özel türdeki integro-diferensiyel denklemlerin simetri grupları için klasik Lie grup metodunun değişmesine dayanan *doğrudan* metodu kullanarak bir boyutlu Vlasov-Maxwell denkleminin Lie nokta simetrilerini inceledi. Akhiev ve Özer (2003, 2005) yerel olmayan belirleyici denklemleri (overdetermined partial differential equations), (determining equations) çözmek için yerel olmayan değişkenler ve yerel olmayan integro-diferensiyel operatörler ihtiva eden modifiye edilmiş sonsuz küçük üretece dayanan bir yaklaşımla, çarpışmasız Boltzmann gaz denkleminin simetri gruplarını analiz etti.

Bu kısımda oluşum türü yerel olmayan denklemlerin simetri gruplarını analiz etmek için oluşumsal vektör alanını (Lie-Bäcklund türü operatör) kullanmaya dayanmayan *doğrudan* metodun genel özellikleri sunulacaktır. Belirli integralle verilen bir fonksiyonun değişmezlik kriterinin tanımını verdikten sonra İDD için değişmezlik kriterinin genel kavramı ve yerel olmayan yapıdaki denklemleri çözmek için bir yaklaşım sunulacaktır.

Diferensiyel denklemlerin simetri gruplarının araştırılması son yıllarda yoğunluk arz etmesine rağmen İDD denklemlerin simetri grup analizi literatürde oldukça nadirdir. Diğer bir ifadeyle, yalnızca birkaç yazar İDD için (1.14) değişmezlik kriterinin modifikasyonu problemini ele aldı. İntegral terim ihtiva eden denklemlerin yerel olmayan formundan dolayı simetri analizinde bazı engeller mevcuttur, (mesela İDD' nin çatı kavramı) dolaysıyla klasik simetri grup analizi İDD' nin simetri analizinde kullanılamaz. Bu yüzden diferensiyel denklemlerin klasik Lie grup analizinin İDD' nin simetri grup analizi için değiştirilmesi gerekmektedir.

Bundan sonra, ilk olarak belirli integral ile verilen bir fonksiyon için değişmezlik kriterinin tanımını, İDD için değişmezlik kriterinin tanımını ve yerel olmayan denklemler için genel çözüm kavramını takdim edeceğiz. Bu amaç için $x=(x_1,...,x_n)$, R^n 'nin bir noktası olsun.

$$\widetilde{x}=e^{\varepsilon v}(x)=x+\varepsilon\xi(x)+O(\varepsilon^2) \tag{1.92}$$

dönüşümü alınsın. Bu dönüşümün sonsuz küçük üreteci

$$v=\sum_{k=1}^{n}\xi_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{1.93}$$

dir. Burada $\xi_k(x)=(\xi_1(x),...,\xi_n(x))$ sonsuz küçük fonksiyonlardır. Aynı zamanda sırasıyla R^q ve R^{n-q} bölgeleri üzerinde tanımlanan ($1\le q\le n$ olmak üzere,) $x_{(q)}=(x_1,...,x_q)$ ve $x_{(n-q)}=(x_{q+1},...,x_n)$ noktaları göz önüne alınsın. Bu takdirde $x\in\mathrm{R}^n$ noktası $x=(x_{(q)},x_{(n-q)})$ olarak yazılabilir.

$$\xi_{(q)}(x)=(\xi_1(x),...,\xi_q(x)),\ \xi_{(n-q)}(x)=(\xi_{q+1}(x),...,\xi_n(x)) \tag{1.94}$$

gösterimi kullanılarak

$$\xi(x)=(\xi_{(q)}(x),...,\xi_{(n-q)}(x)) \tag{1.95}$$

yazılabilir. Ayrıca grup dönüşümleri

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_{(q)}&=x_{(q)}+\varepsilon\xi_{(q)}(x_{(q)},x_{(n-q)})+O(\varepsilon^2),\\ \widetilde{x}_{(n-q)}&=x_{(n-q)}+\varepsilon\xi_{(n-q)}(x_{(q)},x_{(n-q)})+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{1.96}$$

formunda yeniden düzenlenebilir. Burada $\widetilde{x}_{(q)}=(x_1,\ldots,x_q)$ ve $\widetilde{x}_{(n-q)}=(x_{q+1},\ldots,x_n)$ 'dir. Şimdi,

$$\vartheta(x) = F(x) + \int_S f(x)\, dx_q \tag{1.97}$$

ile verilen fonksiyon göz önüne alınsın. Burada $F(x)$ ve $f(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlar ve $S \subset \mathrm{R}^q$ ile verilen bir bölgedir. (1.97) formundaki bir fonksiyon için değişmezlik kriterinin genel tanımını vermek için (1.97) fonksiyonu

$$\vartheta(x) = F\left(x_{(q)}, x_{(n-q)}\right) + \int_S f(s_{(q)}, x_{(n-q)})\, ds_q, \tag{1.98}$$

formunda yeniden yazılsın. (1.98)'de $s_{(q)} = (s_1, ..., s_q)$ integrasyon argümanıdır.

Şayet

$$F(x_{(q)}, x_{(n-q)}) + \int_S f(s_{(q)}, x_{(n-q)}) ds_{(q)} = F(\widetilde{x}_{(q)}, \widetilde{x}_{(n-q)}) + \int_{\widetilde{S}} f(\widetilde{s}_{(q)}, \widetilde{x}_{(n-q)}) d\widetilde{s}_q \tag{1.99}$$

ise φ fonksiyonu (1.92) grup dönüşümü altında değişmezdir denir. Burada $\widetilde{S} \in \mathrm{R}^q, S$ den (1.92) grup dönüşümü ile elde edilen bir bölge, $(\widetilde{x}_{(q)}, \widetilde{x}_{(n-q)})$ ve $(\widetilde{s}_{(q)}, \widetilde{x}_{(n-q)})$ ise sırasıyla $(x_{(q)}, x_{(n-q)})$ ve $(s_{(q)}, x_{(n-q)})$ den elde edilen noktalardır. $(s_{(q)}, x_{(n-q)})$ ve $(\widetilde{s}_{(q)}, \widetilde{x}_{(n-q)})$ vektör argümanları da birbirleriyle

$$\begin{aligned} \widetilde{s}_{(q)} &= s_{(q)} + \varepsilon \xi_{(q)}(s_{(q)}, s_{(n-q)}) + O(\varepsilon^2), \\ \widetilde{x}_{(n-q)} &= x_{(n-q)} + \varepsilon \xi_{(n-q)}(x_{(q)}, x_{(n-q)}) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{1.100}$$

bağıntılarıyla ilintilidir.

(1.97) formundaki bir fonksiyon için değişmezlik kriteri

$$v_n F(x_{(q)}, x_{(n-q)}) + \int \left(v_n + \sum D_{x_k} \xi_k(x) \right) f(x_{(q)}, x_{(n-q)}) dx_{(q)} = 0 \tag{1.101}$$

ile verilebilir. Burada v_n, v vektör alanının n. uzanımıdır. Bu takdirde söylenebilir ki (1.97) fonksiyonu ancak ve ancak (1.101) koşulu sağlanıyorsa (1.100) grup dönüşümü altında değişmezdir.

Şimdi genel formdaki İDD' nin değişmezlik kriterinin genel bir teorik tanımını sunalım. Bu amaç için

$$F(x,u,u_{(1)},...,u_m)+\int_X f\big(x,s_{(q)},u(s_{(q)},x_{n-q},u_1(s_{(q)},x_{n-q}),...,\\ u_m(s_{(q)},x_{n-q})\big)ds_{(q)}=0, \tag{1.102}$$

ile verilen integro-diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $s_{(q)}=(s_1,...,s_q)$, $x_{(q)}=(x_1,...,x_q)$, $x_{(n-q)}=(x_{q+1},...,x_n)$ bağımsız değişkenler, u bir bağımlı değişken ve $u_m(s_{(q)},x_{(n-q)})$ u nun m. mertebe türevi ve $u(s_{(q)},x_{(n-q)})$ x ve $(s_{(q)},x_{(n-q)})$ vektör argümanlarına göre elemanlardır. (1.102) denklemi için sonsuz küçük üreteç v olmak üzere (kanonik olmayan)

$$\tilde{x}_i = e^{\varepsilon V_m}(x_i) = x_i+\varepsilon\xi_i(x,u)+O(\varepsilon^2),\\ \tilde{u} = e^{\varepsilon V_m}(u) = u+\varepsilon\eta(x,u)+O(\varepsilon^2),\ \ i=1,\dots,n. \tag{1.103}$$

nokta grubu ve

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}_i}=e^{\varepsilon V_m}(\frac{\partial u}{\partial x_i})=\frac{\partial u}{\partial x_i}+\varepsilon\eta^{(1)}(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_i})+O(\varepsilon^2)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}_{i1}\partial\tilde{x}_{i2}...\partial\tilde{x}_{im}}=e^{\varepsilon V_m}(\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_m}})=\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_m}}\\ +\varepsilon\eta^{(m)}(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},...,\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_m}})+O(\varepsilon^2)$$

(1.103) grubunun bağımsız değişkenler jet uzayına (m. mertebe) uzanımı göz önüne alınsın. Burada V_m uzatılmış grubun sonsuz küçük üreteci olup

$$V_m=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}+\sum_{i=1}^{n}\eta_i^{(1)}(x,u,u_{(1)})\frac{\partial}{\partial(\partial u)}+...\\ +\sum_{i=1}^{n}\eta_{i_1...i_m}^{(m)}(x,u,u_m)\frac{\partial}{\partial(\partial_{i_{1...m}}u)},$$

formunda tanımlanır. Burada

$$\eta^{(0)}(x,u)=\eta(x,u),$$
$$\eta_j^{(1)}=D_j\eta^{(0)}(x,u)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}D_j\xi_k(x,u),$$

$$\begin{aligned}\eta^{(2)}_{j_1 j_2} &= D_{j_1}\eta^{(1)}(x,u,u_1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_{j_1}\partial x_k} D_{j_2}\xi_k(x,u),\\ &\vdots \\ \eta^{(2)}_{j_1 j_2 \cdots j_m} &= D_{j_1\cdots j_{m-1}}\eta^{(m-1)}(x,u,u_1,\ldots,u_{m-1}) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\ldots\partial x_k} D_{jm}\xi_k(x,u).\end{aligned} \tag{1.104}$$

dir. (1.104) de V tanımı gereği jet uzaydaki bağımsız değişkenler üzerinde Lie grup dönüşümleri kullanılabilir.

$$\begin{aligned}(x,u) &\Leftrightarrow (\widetilde{x},\widetilde{u})\\ ((s_{(q)},x_{(n-q)}),u(s_{(q)},x_{(n-q)})) &\Leftrightarrow ((\widetilde{s}_{(q)},\widetilde{x}_{(n-q)}).\end{aligned} \tag{1.105}$$

Bu takdirde

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_{(q)} &= x_{(q)} + \varepsilon\xi_{(q)}(x_{(q)},u(x_{(q)},u(x_{(q)}))\ + O(\varepsilon^2),\\ \widetilde{x}_{(n-q)} &= x_{(n-q)} + \varepsilon\xi_{(n-q)}(s_{(q)},x_{(n-q)},u(s_{(q)},x_{(n-q)}))\ + O(\varepsilon^2),\\ \widetilde{u}(\widetilde{s}_{(q)},\widetilde{x}(n-q)) &= u(s_{(q)},x_{(n-q)}) + \varepsilon\xi(s_{(q)},x_{(n-q)},u(s_{(q)},x_{(n-q)}))\ + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{1.106}$$

ve

$$\widetilde{s}_{(q)} = s_{(q)} + \varepsilon\xi_{(q)}(s_{(q)},x_{(n-q)},u(s_{(q)},x_{(n-q)}))\ + O(\varepsilon^2) \tag{1.107}$$

grup dönüşümleri göz önüne alınsın.

Şayet (1.102) denklemi (1.103) nokta dönüşümleri grubu altında değişmez kalan

$$F(\widetilde{x},\widetilde{u},\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_m) + \int_{\widetilde{x}} f(\widetilde{x},\widetilde{s}_{(q)},\widetilde{u}(\widetilde{s}_q,\widetilde{x}_{n-q}),\widetilde{u}_1(\widetilde{s}_{(q)},\widetilde{x}_{n-q}),\ldots,\widetilde{u}_m(\widetilde{s}_{(q)},\widetilde{x}_{n-q})d\widetilde{s}_{(q)} = 0 \tag{1.108}$$

formuna dönüşürse bu takdirde bu gruba (1.102) denkleminin nokta simetri grubu denir. Burada $\widetilde{x}$ (1.103) dönüşümü altında x in resmidir. Bu takdirde $\widetilde{s}_{(q)}$ dönüşümü için

$$\widetilde{s}_{(q)} = s_{(q)} + \varepsilon\xi_{(q)}(s_{(q)},x_{(n-q)},u(s_{(q)},x_{(n-q)})),\ s_{(q)} \in X,\ \widetilde{s}_q \in \widetilde{X} \tag{1.109}$$

Jakobiyen ;

$$\frac{D(\widetilde{s}_1,\ldots\widetilde{s}_q)}{D(s_1,\ldots s_q)} = \left(1+\varepsilon\sum_{j=1}^{q} D_j\xi_j(x,u)\right) + O(\varepsilon^2) \tag{1.110}$$

olarak hesaplanabilir.

$$T(u)=\int_X f\left(x,s_{(q)},u(s_{(q)},x_{n-q}),u_1(s_{(q)},x_{n-q}),...,u_m(s_{(q)},x_{n-q})\right)ds_{(q)} \quad (1.111)$$

ile tanımlanan yeni bir yerel olmayan değişkeninin takdim edilmesiyle $\widetilde{T}(\widetilde{u})$ dönüşmüş formu (1.106)-(1.108) ve (1.110) nin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(\widetilde{u}) &= \int_{\widetilde{X}} f(\tilde{x},\tilde{s}_{(\tilde{q})},\tilde{u}(\tilde{s}_{(\tilde{q})},\tilde{x}_{n-q}),\tilde{u}_1(\tilde{s}_{(q)},\tilde{x}_{n-q}),\ldots,\tilde{u}_m(\tilde{s}_{(q)},\tilde{x}_{n-q}))d\widetilde{s}_{(q)}\\ &= \int_{\widetilde{X}} f(\tilde{x},\tilde{s}_{(\tilde{q})},\tilde{u}(\tilde{s}_{(\tilde{q})},\tilde{x}_{n-q}),\tilde{u}_1(\tilde{s}_{(q)},\tilde{x}_{n-q}),\ldots,\tilde{u}_m(\tilde{s}_{(q)},\tilde{x}_{n-q}))\\ &\quad\times\left(1+\varepsilon\sum_{j=1}^{q} D_j\xi_j(s_{(q)},x_{(n-q)},u(s_{(q)},x_{(n-q)}))\right)ds_{(q)}\end{aligned} \quad (1.112)$$

olarak yazılabilir. Bu takdirde $\widetilde{u}$ fonksiyonunu u fonksiyonuna, $\widetilde{x}$ değişkenini x' e, $\widetilde{x}_{(n-q)}$ yu $x_{(n-q)}$ ya ve $\widetilde{u}(\widetilde{s}_{(q)},\widetilde{x}_{(n-q)})$ yu $u(s_{(q)},x_{(n-q)})$ ya dönüştüren Lie grup dönüşümleri elde edilebilir. Taylor seri açılımının kullanılmasıyla (1.112) integrandının birinci çarpanı

$$\begin{aligned}&f(\tilde{x},\tilde{s}_{(\tilde{q})},\tilde{u}(\tilde{s}_{(\tilde{q})},\tilde{x}_{(n-q)}),\tilde{u}_1(\tilde{s}_{(q)},\tilde{x}_{(n-q)}),\ldots,\tilde{u}_m(\tilde{s}_{(q)},\tilde{x}_{(n-q)}))\\ &= f(x,s_{(q)},u(s_{(q)},x_{(n-q)}),u_1(s_{(q)},x_{(n-q)}),\ldots,u_m(s_{(q)},x_{(n-q)}))\\ &\quad+\varepsilon(V_m f)(x,s_{(q)})+O(a^2),\end{aligned} \quad (1.113)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}V_m &= \sum_{k=1}^{n}\xi_k(x,u(x))\frac{\partial}{\partial x_u}+\sum_{k=1}^{q}\xi_k(x,u(x))\Big|_{x_{(q)}=s_{(q)}}\frac{\partial}{\partial s_k}\\ &\quad+\eta(x,u(x))\Big|_{x_{(q)}=s_{(q)}}\frac{\partial}{\partial\left(u(x)\big|_{x_{(q)}=s_{(q)}}\right)}\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\eta_k^{(1)}(x,u(x),u_1(x))\Big|_{x_{(q)}=s_{(q)}}\frac{\partial}{\partial\left(\left(\partial_{x_k}u(x)\right)\Big|_{x_{(q)}=s_{(q)}}\right)}\\ &\quad+\ldots+\sum_{i_{1\ldots m}}\eta_{i_{1\ldots m}}^{(m)}(x,u(x),...,u_m(x))\Big|_{x_{(q)}=s_{(q)}}\frac{\partial}{\partial\left(\left(\partial_{x_{i_1}}\ldots\partial_{x_{i_m}}u(x)\right)\Big|_{x_{(q)}=s_{(q)}}\right)}\end{aligned} \quad (1.114)$$

olup (1.109), (1.111) ve (1.112) ifadelerinin kullanılmasıyla

$$\widetilde{T}(\widetilde{u})(\widetilde{x})=T(u)(x)+aP_T(u)(x)+O(a^2) \quad (1.115)$$

elde edilebilir. Burada P_T genellikle lineer olmayan operatör olup

$$P_T(u)(x)=\int_{\Omega}\left[V_m+\sum_{k=1}^{q}D_k\xi_k\left(s_{(q)},x_{(n-q)},u\left(s_{(q)},x_{(n-q)}\right)\right)\right]fds_{(q)} \qquad (1.116)$$

ile verilir. Böylece F ve f fonksiyonları için değişmezlik koşulu

$$\begin{aligned} v_m F(x,u,u_1,u_2,...,u_m)+\int_X\left[V_m+\sum_{k=1}^{q}D_k\xi_k(x,u)\Big|_{x_{(q)}=s_{(q)}}\right] \\ \times f\left(x,s_{(q)},u(s_{(q)},x_{(n-q)}),u_1(s_{(q)},x_{(n-q)}),u_2(s_{(q)},x_{(n-q)}),...,\right. \\ u_m(s_{(q)},x_{(n-q)})ds_{(q)}=0 \end{aligned} \qquad (1.117)$$

olarak yazılabilir. Burada u, (1.102) denkleminin bir keyfi çözümüdür. (1.117) ifadesi matematiksel fizikte ortaya çıkan tüm İDD' nin simetri grup analizi için değişmezlik kriterinin genel formudur. (1.117) grup teorisindeki klasik sonsuz küçük üretece dayanarak elde edilmiştir. Doğrudan olmayan yaklaşımda İDD için değişmezlik kriteri Lie-Bäcklund türü üreteç ile verilir (Ibragimov 2002). Bu halde, yerel olmayan belirleyici denklemlerin çözümünü bulmak için genel olarak varyasyonel türev kavram kullanılır. Bu kısımda ayrıca (1.117) değişmezlik kriterinin kullanılmasıyla yerel olmayan integro-diferensiyel denklemleri çözmek için önemli bir yaklaşım takdim edilecektir. Sonuç olarak yerel olmayan değişken ve integro-diferensiyel operatör ihtiva eden modifiye edilmiş sonsuz küçük üreteç

$$v_m=V_m+P_T(u)\frac{\partial}{\partial(T(u))}, \qquad (1.118)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca (1.103) ve (1.115) ifadelerinin (1.108) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} &F[x+\varepsilon\xi(x,u)+O(\varepsilon^2),u+\varepsilon\eta(x,u)+O(\varepsilon^2), \\ &u_1+\varepsilon\eta^{(1)}(x,u,u_{(1)})+O(\varepsilon^2),...,u_m+\varepsilon\eta^{(m)}(x,u,u_{(1)},...u_{(m)})+O(\varepsilon^2), \\ &T(u)(x)+\varepsilon P_T(u)(x)+O(\varepsilon^2)]=0, \end{aligned} \qquad (1.119)$$

buluruz. Burada $\eta^{(k)}$, k ve $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ ile verilen tüm $\eta^{(k)}_{i_1...i_k}$ katsayılarının cümlesidir. Bu takdirde (1.119) Taylor seri açılımı gereği (1.81) belirleyici denklemi olarak adlandırılan

$$\overset{T}{V}_m F(x,u,u_1,...,u_m,T(u)(x))=0 \qquad (1.120)$$

denklemi elde edilir. Aynı zamanda ispatlanabilir ki, sonlu sayıda yerel olmayan terime sahip olan denklemlerin belirleyici denklemi (1.120) ye benzer bir forma sahiptir (Akhiev ve Özer 2005) .

2. BBM (BENJAMİN-BONA-MAHONY) DENKLEMİNİN KORUNUM KANUNLARI VE İLERLEYEN DALGA ÇÖZÜMLERİ

Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi olarak da bilinen düzgünleştirilmiş uzun dalga denklemi

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{2.1}$$

ilk olarak Benjamin, Bona ve Mahony (Benjamin, Bona, Mahony, 1972) tarafından sığ su dalgaları için Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin düzgünleştirilmiş bir versiyonu olarak ele alındı. Orijinal olarak BBM denkleminin elde edilmesi ve nümerik olarak çözülmesi gelgit dalgaları bağlamında Peregrine (1966) tarafındandır. Bazı teorik araştırmalarda BBM denklemi uzun dalgalar için bir model olarak önceliklidir ve *düzgünleştirilmiş* kelimesi varlık, teklik ve kararlılık bakış açısından dolayı kullanılmaktadır. BBM ya da düzgünleştirilmiş uzun dalga denkleminin yalnızca 3 tane aşikar olmayan korunum kanuna sahip olduğu Olver (Olver, 1993) tarafından gösterilmiştir. Bu sonucu formal varyasyonel analizdeki yeni bir Euler tipi operatör teorisi geliştirerek ispatlamıştır. Bunun yanında denklemin üç parametreli Lie gruplarına sahip olduğu ve Painleve özelliğine sahip olmadığı bilinmektedir (Rollins 1991). Duzhin'in çalışmasında denklemin Benjamin, Bona ve Mahony tarafından bulunan korunum kanunları hariç korunum kanunlarına sahip olmadığı gösterilmiştir (Duzhin 1984).

Bu bölümde (2.1) denkleminin başka korunum kanunlarına sahip olduğu gösterilmeye çalışılacaktır. Lagrangian formülasyonunu kabul etmemesine rağmen (2.1) in korunum kanunlarından fiziksel olarak önemli özelliklere sahip olan ilerleyen dalga çözümü elde edilecektir.

2.1. BBM Denkleminin Lie Grup Analizi

Bu kısımda BBM denklemini değişmez bırakan en genel Lie dönüşüm grubu verilmiştir. (2.1) denklemi için ε bir grup parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{x}(x,t,u;\varepsilon) \\ \tilde{t} &= \tilde{t}(x,t,u;\varepsilon) \\ \tilde{u} &= \tilde{u}(x,t,u;\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde x,t bağımsız değişkenleri ve u bağımlı değişkenini içeren bir Lie dönüşüm grubu ele alınmaktadır. ξ,τ,η grup değişkenlerinin sonsuz küçükleri olmak üzere ele alınan BBM denkleminin sonsuz küçük üreteci

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.3}$$

şeklindedir. Dolayısıyla BBM denklemine karşılık gelen tek parametreli Lie dönüşüm grubu

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= e^{\varepsilon X}(x) = x + \varepsilon\xi(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{t} &= e^{\varepsilon X}(t) = t + \varepsilon\tau(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{u} &= e^{\varepsilon X}(u) = u + \varepsilon\eta(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde alınır. Bu diferensiyel denklemin verilen Lie dönüşüm grubunu kabul etmesi için bu Lie grubuna ait sonsuz küçük üretecinin üçüncü uzanımı diferensiyel denkleme uygulandığı zaman diferensiyel denklemin tanımladığı manifold üzerinde sıfır çıkması gerekir. (2.3) üreteci için uzanım katsayıları

$$\begin{aligned} \zeta^{t} &= \eta_t + \eta_u u_t - u_x(\xi_t + \xi_u u_t) - u_t(\tau_t + \tau_u u_t) \\ \zeta^{x} &= \eta_x + \eta_u u_x - u_x(\xi_x + \xi_u u_x) - u_t(\tau_x + \tau_u u_x) \\ \zeta^{xx} &= \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_{xx}\eta_u + (u_x)^2\eta_{uu} - 2u_{xx}\xi_x - u_x\xi_{xx} - 2(u_x)^2\xi_{xu} \\ &\quad - 3u_x u_{xx}\xi_u - (u_x)^3\xi_{uu} - 2u_{xt}\tau_x - u_t\tau_{xx} - 2u_x u_t\tau_{xu} \\ \zeta^{xxt} &= D_t(\zeta^{xx}) - u_{xxx}D_t(\xi) - u_{txx}D_t(\tau) \end{aligned} \tag{2.5}$$

olmak üzere sistemin üçüncü uzanımı;

$$X^3 = X + \zeta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta^{xxt} \frac{\partial}{\partial u_{xxt}} \tag{2.6}$$

şeklindedir ve (2.1) denklemine uygulandığında;

$$X^3 (u_t + u_x + uu_x - u_{xxt}) |_{u_t = -u_x - uu_x + u_{xxt}} = 0 \tag{2.7}$$

olur. Buradan

$$\zeta^t + \zeta^x + \eta u_x + u\zeta^x - \zeta^{xxt} = 0 \tag{2.8}$$

elde edilir ve (2.5) de ifade edildiği şekilde $\zeta^t, \zeta^x, \zeta^{xxt}$ değerleri (2.8) denkleminde yerine konulduğu takdirde (2.1) denkleminin belirleyici denklemlerine ulaşılır. Belirleyici denklemlerin elde edilebilmesi için elde edilen son denklem sistemindeki u nun tüm türevlerinin katsayılarının sıfıra eşit olması gerekir. Dolaysıyla elde edilen denklem sistemindeki tüm katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen belirleyici denklemler aşağıdaki şekildedir:

$$-(u_t u_{xx} + 2u_x u_{xt})\tau_u - (u_x)^2 u_t \tau_{uu}$$

$$\eta - \xi_t + \tau_t + u\tau_t - \xi_x - u\xi_x + \tau_x + 2u\tau_x + u^2\tau_x - 2\eta_{xtu} + \eta_{xxu} + u\eta_{xxu} + \xi_{xxt} - \tau_{xxt}$$

$$-u\tau_{xxt} = 0,$$

$$3\xi_u = 0,$$

$$2\xi_u - \tau_u - u\tau_u - 2\eta_{xuu} + 2\tau_{xtu} + \xi_{xxu} - 2\tau_{xxu} - 2u\tau_{xxu} = 0,$$

$$-\xi_u - u\xi_u = 0,$$

$$2\tau_u = 0,$$

$$\tau_u + \tau_{xxu} = 0,$$

$$-2\eta_{uuu} + 2\tau_{tu} + 4\xi_{xu} - 4\tau_{xu} - 4u\tau_{xu} = 0,$$

$$\eta_{uu} + u\eta_{uu} + 3\xi_{tu} - \tau_{tu} - u\tau_{tu} - 2\xi_{xu} - 2u\xi_{xu} = 0,$$

$$-\eta_{uu} + \tau_{tu} + 2\xi_{xu} = 0,$$

$$3\xi_{uuu} - 4\tau_{uu} - 4u\tau_{uu} = 0,$$

$$-3\xi_{uu} - 3u\xi_{uu} + \tau_{uu} + 2u\tau_{uu} + u^2\tau_{uu} = 0,$$

$$3\xi_{uu} - 2\tau_{uu} - 2u\tau_{uu} = 0,$$

$$\tau_{uu} = 0,$$

$$\eta_{uuu} + u\eta_{uuu} + \xi_{tuu} - \tau_{tuu} - 2\xi_{xuu} - \eta u\xi_{xuu} + 2\tau_{xuu} + 4u\tau_{xuu} + 2u^2\tau_{xuu} = 0,$$

$$-\eta_{uuu} + \tau_{tuu} + 2\xi_{xxu} - 4\tau_{xuu} - 4u\tau_{xuu} = 0,$$

$$-\xi_{uuu} - u\xi_{uuu} + \tau_{uuu} + 2u\tau_{uuu} + u^2\tau_{uuu} = 0,$$

$$\xi_{uuu} - 2\tau_{uuu} - 2u\tau_{uuu} = 0,$$

$$\tau_{uuu} = 0,$$

$$\eta_t + \eta_x + u\eta_x - \eta_{xxt} = 0,$$

$$\xi_t = 0,$$

$$-\eta_{tu} + 2\xi_{xt} = 0,$$

$$-\eta_{tuu} + 2\eta_{xuu} + 2u\eta_{xuu} + 2\xi_{xtu} - 2\tau_{xtu} - 2u\tau_{xtu} - \xi_{xxu} - u\xi_{xxu}$$

$$+\tau_{xxu} + 2u\tau_{xxu} + u^2\tau_{xxu} = 0,$$

$$2\xi_x - \tau_x - u\tau_x - \eta_{xxu} + \tau_{xxu} = 0,$$

$$2\tau_x = 0,$$

$$-2\eta_{xu} + 2\tau_{xt} + \xi_{xx} = 0,$$

$$2\tau_{xu} = 0,$$

$$\tau_{xuu} = 0,$$

$$\tau_{xx} = 0. \tag{2.9}$$

(2.8) denkleminden elde ettiğimiz tüm belirleyici denklemler bir denklem sistemi oluşturur. Bu belirleyici denklemlerden oluşan denklem sisteminin çözümü, (2.1) denklemi ile ifade edilen lineer olamayan kısmi türevli diferensiyel denklem sistemini, değişmez bırakacak Lie dönüşüm grubunu verir.

Bu denklem sisteminin çözümü için uygulanacak yöntemlerden biri seri çözüm yöntemidir (Cantwell 2002). Bu yöntemde; sonsuz küçükler ξ,τ,η bağımlı ve bağımsız değişkenlerin kuvvetleri şeklinde yazılarak önceden elde edilmiş belirleyici denklemlerde yerine konur ve bu şekilde bir çözüm aranır. Dolayısıyla BBM denkleminin kabul ettiği Lie gruplarının elde edilebilmesi için (2.9) belirleyici denklemleri kullanılarak seri çözüm yöntemi uygulandığı takdirde aşağıdaki şekilde sonuçlar elde edilir.

İlk olarak ele alınan BBM denkleminin kabul ettiği Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçüklerinin, bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin birinci dereceden kuvvetleri şeklinde yazıldığı düşünülsün:

$$\xi = a_0 + a_{10}x + a_{11}t + a_{12}u$$

$$\tau = b_0 + b_{10}x + b_{11}t + b_{12}u$$

$$\eta = c_0 + c_{10}x + c_{11}t + c_{12}u \qquad (2.10)$$

(2.10) ifadeleri (2.9) belirleyici denklemlerinde yerine konulduğunda (sonsuz küçüklerin 1. dereceden kuvvetleri cinsinden seriye açılması halinde) aşağıdaki üç parametreli Lie dönüşüm grupları elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_0, \\ \tau &= \alpha_1 - \alpha_2 t, \\ \eta &= \alpha_2 + \alpha_2 u \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Burada $\alpha_0 = a_0,\ b_0 = \alpha_1, b_{11} = -\alpha_2,\ c_0 = c_{12} = \alpha_2$ olup diğer katsayılar sıfıra eşittir. Burada elde edilen simetri grupları, BBM denklemi ile ilgili yapılan Lie simetri analizi çalışmalarında elde edilen simetri gruplarıdır (Ibragimov, 1994). İlginçtir ki, sonsuz küçüklerin bağımlı ve bağımsız değişkenlere göre 2.,3.,.. dereceden kuvvetleri cinsinden seriye açılması halinde yine (2.11) sonucu elde edilir.

Sonuç olarak burada yapılan tüm işlemlerden, söz konusu kısmi diferensiyel denklem sistemi için sonsuz küçükler bağımlı ve bağımsız değişkenlerin kuvvetleri şeklinde yazılarak seri çözüm uygulandığı takdirde, sonsuz küçüklerin değişkenlerinin kuvvetlerinin arttırılmasıyla elde edilen her bir açılımdan yeni bir parametre ve dolayısıyla yeni bir Lie dönüşüm grubu elde edilemez. (2.11) sonsuz küçüklerine karşılık gelen sonsuz küçük üreteçler

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = (u+1)\frac{\partial}{\partial u} - t\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.12}$$

dır.

2.2. BBM Denkleminin Korunum Kanunları

Oluşum türü denklemler sınıfının bir temsilcisi olarak göz önüne alabileceğimiz BBM denklemi klasik Lagrangiana sahip değildir. Elbette ki, onun klasik Lagrangiana sahip olmaması Lagrangian formülasyonunun mutlak anlamda kullanılamayacağı anlamına gelmez. Literatürde son yıllarda bu türde çalışmalara sıklıkla rastlanabilir (Talukdar ve ark 2005). Yapılan şey, $u = v_x$ Casimir potansiyelinin tanımlanması suretiyle denklemin mertebesinin büyütülmesi ve yeni denklemin Lagrangianının araştırılmasıdır. İncelemelerimizde müşahede ettik ki, bu yaklaşım oldukça uzun ve karışık hesaplamaların yapılmasını gerektirmektedir.

BBM denklemi Euler-Lagrange denklem sınıfına sokabilmek için onun eşlenik denklemini tanımlamamız gerekir. BBM denklemi ve onun eşlenik denkleminden oluşan sistem, Euler-Lagrange denklem sınıfından olacağı birinci bölümde gösterilmişti. Gerçekten $v(x,t)$ yeni bir değişken olmak üzere (eşlenik değişken) (1.57) yani

$$L = vF \tag{2.13}$$

kullanılarak

$$L = (u_t + u_x + uu_x - u_{xxt})v \tag{2.14}$$

formal Lagrangianını oluşturalım. Bu formal Lagrangian Lemma 1.4.2 ve $-vu_{xxt} = D_t(-vu_{xx}) + v_t u_{xx}$ bağıntısının göz önüne alınmasıyla aşağıdaki ikinci mertebe formal Lagrangian ile yer değiştirebilir.

$$L = vu_t + vu_x + vuu_x + v_t u_{xx} \tag{2.15}$$

(2.1) denkleminin eşlenik denklemi, bu formal Lagrangian aracılığıyla, (1.54) den yani

$$F^* = \frac{\delta L}{\delta u} \tag{2.16}$$

bağıntısından hesaplanabilir. Burada varyasyonel türev $\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D_i\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) + D_i D_j\left(\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\right) + \ldots$ dir. Hesaplamalar neticesinde

$$F^* = v_t + v_x + uv_x - v_{xxt} = 0 \tag{2.17}$$

eşlenik denklemine ulaşılır. Şayet eşlenik denklemde $v = u$ yazılıp orijinal denkleme ulaşılıyorsa denklem kendi eşleniktir ve yerel korunum kanunları elde edilir. Aksi takdirde, yerel olmayan korunum kanunlarına ulaşılır. Dikkat edilirse, (2.17) denkleminde $v = u$ yazıldığında (2.1) denklemine ulaşılır. Dolayısıyla (2.1) denklemi kendi eşleniktir.

Orijinal denklem F yani (2.1) ve eşlenik denklem F^* , (2.17) birlikte Euler-Lagrange tipi denklem olurlar. Gerçekten

$$\frac{\delta L}{\delta u} = F^* = v_t + v_x + uv_x - v_{xxt} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta v} = F = u_t + u_x + uu_x - u_{xxt}. \tag{2.18}$$

dir. Birinci. bölümdeki Teorem 1.6.1 göz önüne alındığında eşlenik denklem olan (2.17) orijinal denklemin simetrisi olan

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \tag{2.19}$$

üretecini kabul eder. Burada eşlenik denklemin üreteci (1.71) yani

$$Y = X + \eta^* \frac{\partial}{\partial v}. \tag{2.20}$$

biçimindedir. Burada $\eta^* = -[\lambda + D_i(\xi^i)]v$ olup BBM denklemi için örneğin X_3 simetrisi göz önüne alındığında

$$X_3(u_t + u_x + uu_x - u_{xxt})|_{u_t = -u_x - uu_x + u_{xxt}} = 2(u_t + u_x + uu_x - u_{xxt})$$

olduğundan $\lambda = 2$ dir. $\eta = u + 1,\ \tau = -t,\ \xi = 0$ dan $\eta^* = -v$ dir. Yani (2.20) X_3 simetrisi için

$$Y=(u+1)\frac{\partial}{\partial u}-t\frac{\partial}{\partial t}-v\frac{\partial}{\partial v} \tag{2.21}$$

formundadır. Bunun yanında (2.12) deki Lie nokta simetrilerinin tümü

$$X(L)+LD_i(\xi^i)=0 \tag{2.22}$$

değişmezlik koşulunu sağlar. Dolayısıyla (2.12) deki tüm simetriler Noether simetrisidir.

Bir simetri ile asosiye olan (2.1) ve (2.17) denklem sisteminin korunum vektörleri (1.46) denkleminden dolayı (ikinci mertebe Lagrangiana karşılık gelen korunum vektörleri) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$C^1=\xi L+W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x}-D_x(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}})\right]+D_x(W)\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right), \tag{2.23}$$

$$C^2=\tau L+W\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right). \tag{2.24}$$

Burada $W^\alpha=\eta^\alpha-\xi^j u_j^\alpha$ dır. Şimdi (2.12) deki her bir Lie nokta simetrisine karşılık gelen korunum kanunlarını tek tek araştıralım:

1. Durum. Öncelikle BBM denklemi tarafından kabul edilen $X_1=\frac{\partial}{\partial t}$ zaman öteleme üretecini göz önüne alalım. X_1 operatörü $D_t(C_1^1)+D_x(C_1^2)=0$ korunum kanununa neden olur. Burada $C=(C_1^1,C_1^2)$ korunum vektörü (2.23)-(2.24) ile verilir ve

$$C_1^1=vu_x+vuu_x,C_1^2=-vu_t-vuu_t+u_tv_{xt}-v_tu_{xt}. \tag{2.25}$$

bileşenlerine sahiptir. BBM denklemi kendi eşlenik olduğu için $v=u$ yazılırsa

$$C_1^1=uu_x+u^2u_x=D_x(\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}), \tag{2.26}$$

$$C_1^2=-D_t(\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}) \tag{2.27}$$

korunum vektörleri elde edilir. Bu korunum vektörleri (1.37) korunum kanunu özdeşliğinde yerine yazılırsa $(C_1^1,C_1^2)=(0,0)$ aşikâr (sıfır) korunum vektörleri elde edilir.

2. Durum. $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ uzay ötelemesi operatörü $D_t(C_2^1) + D_x(C_2^2) = 0$ korunum kanununa yol açar. Burada $C = (\, C_2^1, C_2^2)$ korunum vektörü (2.23)-(2.24) ile verilir ve

$$C_2^1 = -vu_x - v_x u_{xx}, C_2^2 = vu_t + u_x v_{xt}. \tag{2.28}$$

bileşenlerine sahiptir. BBM denklemi kendi eşlenik olduğu için yine $v = u$ yazılırsa

$$C_2^1 = -uu_x - u_x u_{xx} = -D_x\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u_x^2}{2}\right) \tag{2.29}$$

$$C_2^2 = uu_t + u_x u_{xt} = D_t\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u_x^2}{2}\right) \tag{2.30}$$

korunum vektörlerine ulaşılır. Bu korunum vektörleri (1.37) korunum kanunu özdeşliğinde yerine yazılırsa $(\,C_1^1, C_1^2) = (0,0)$ aşikar (sıfır) korunum vektörleri elde edilir.

3. Durum. Şimdi benzer hesaplamaları $X_3 = (u+1)\frac{\partial}{\partial u} - t\frac{\partial}{\partial t}$ ölçekleme simetrisi için yapalım. Bu operatör için $W^u = (u+1) + tu_t$ ve $W^v = tv_t$ dir. (2.23)-(2.24) den

$$\begin{aligned} C_3^1 &= -tL + (u+1+tu_t)v + tv_t u_{xx} \\ &= -tvu_x - tvuu_x + uv + v, \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} C_3^2 &= (u+1+tu_t)[v + vu - D_x(v_t)] + v_t D_x(u+1+tu_t) \\ &= uv + vu^2 - uv_{xt} + v + uv - v_{xt} + tvu_t + tvuu_t - tu_t v_{xt} + v_t u_x + tv_t u_{xt} \end{aligned} \tag{2.32}$$

elde edilir. Önceki durumlarda yapıldığı gibi $v = u$ yazılır,

$$-uu_{xxt} = D_t(-uu_{xx}) + u_t u_{xx} \tag{2.33}$$

olduğu göz önüne alınır ve (1.37) de C_3^1 deki $D_x(...)$ formundaki terimlerin C_3^2 e taşınması suretiyle basitleştirmeler yapılırsa

$$C_3^1 = u^2 + u, \quad C_3^2 = \frac{3}{2}u^2 + \frac{2}{3}u^3 - uu_{xt} + u - u_{xt} + u_t u_x \tag{2.33}$$

korunum vektörleri elde edilir. (2.33) literatürde mevcut olmayan yeni bir korunum kanunudur.

2.3. BBM Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümleri

Eğer X simetrisi ve C korunum vektörleri

$$X(C^i)+C^iD_j(\xi^j)-C^jD_j(\xi^i)=0,\ i=1,2 \tag{2.34}$$

denklemini sağlarsa, X ve C birbiriyle asosiyedir denir (Kara ve Mahomed, 2000). (1.37) korunum kanunu, yeni bir bağımlı v potansiyel değişkenin tanımlanmasıyla, (2.1) ‘e karşılık gelen

$$v_x = C^1, v_t = -C^2 \tag{2.35}$$

potansiyel sistemini verir (iki bağımsız değişken olması hali için).

$(u, u+\frac{u^2}{2}-u_{xt})$ korunum vektörü $G = c\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}$ simetri üretici ile asosiyedir (c, dalga hızı) öyle ki, (2.1) denkleminin potansiyel formu,

$$v_x = u,\ v_t = u_{tx}-\frac{u^2}{2}-u \tag{2.36}$$

olup, sistem $G^v = c\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial v}$ simetrisini kabul eder ve (2.36) denklemi (burada, G^v nin değişmezleri, $y = x-ct,\ \alpha = u,\ \beta = v-t$)

$$\alpha = \beta', \tag{2.37}$$

$$c\alpha''+\frac{\alpha^2}{2}+\alpha-c\alpha+1=0. \tag{2.38}$$

sistemine dönüşür. (2.38), α' türevini ihtiva etmediği için $\alpha' = p$ yazarsak

$$p\frac{dp}{d\alpha}+\frac{\alpha^2}{2c}+\frac{(1-c)}{c}\alpha+\frac{1}{c}=0, \tag{2.39}$$

elde edilir. (2.39) çözülürse, $p = \pm\sqrt{-\frac{2\alpha}{c}-\frac{\alpha^3}{3c}+\frac{(c-1)}{c}\alpha^2+a_1}$ elde edilir. p değeri $\alpha' = p$ de yerine yazılırsa

$$\pm\int^{\alpha=u}\frac{d\alpha}{\sqrt{-\frac{2\alpha}{c}-\frac{\alpha^3}{3c}+\frac{(c-1)}{c}\alpha^2+a_1}} = x-ct. \tag{2.40}$$

kapalı çözüm formu elde edilir.

BBM denkleminin G ile indirgenmesi ilerleyen dalga çözümlerine yol açar. $y = x-ct$ ve $w = u$ değişmezleri kullanılırsa (2.1) denklemi

$$-cw' + w' + ww' + cw''' = 0 \tag{2.41}$$

biçiminde olup bir sefer integrasyondan sonra

$$-cw + w + \frac{w^2}{2} + cw'' = 0. \tag{2.42}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem için Lagrangian tespit edilebilir. Bu Lagrangian

$$L = c\frac{w^2}{2} - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{6} + \frac{c}{2}w'^2 \tag{2.43}$$

biçimindedir. (2.42) denkleminin çözümü iki ayrı yolla yapılmaya çalışılsın:

1. yol. (2.42) denkleminin ∂_y simetrisine sahip olması $\alpha = w$ ve $\beta = w'$ değişmezlerine yol açar öyle ki, $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{w''}{w'}$ ve (2.42) den

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{\beta}\left(\alpha - \frac{\alpha}{c} - \frac{\alpha^2}{2c}\right) \tag{2.44}$$

elde edilir. Bunun çözümü,

$$\beta(\alpha) = \pm\sqrt{\alpha^2(1 - \frac{1}{c} - \frac{\alpha}{3c}) + 2a_{2_\pm}} \tag{2.45}$$

$$x - ct = \pm\int^u \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2(1 - \frac{1}{c} - \frac{\alpha}{3c} + 2a_{2_\pm})}}$$

dır. İntegral ters tanjant fonksiyonu cinsinden hesaplanırsa (Şayet sabit sıfır olarak alınırsa,)

$$x - ct = \frac{2\alpha\sqrt{-3c + \alpha + 3}\,\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-3c+\alpha+3}}{\sqrt{3}\sqrt{c-1}}\right)}{\sqrt{c-1}\sqrt{-\frac{\alpha^2(-3c+\alpha+3)}{c}}} \tag{2.46}$$

kapalı (implicit) çözüm formu elde edilir.

$\partial_x + (u+1)\partial_u - t\partial_t$ simetrisi de $y = te^x$ ve $w(y) = (u+1)t$ değişmezlerine yol açar. Buradan

$$-w + yw' + ww'y - w'''y^3 = 0 \tag{2.47}$$

olup benzerlik çözümü elde edilebilir (Bunun çözümü ayrı bir şekilde incelenebilir).

2.yol. Fonksiyonelin değişmezliği, $G = \xi\partial_y + \eta\,\partial_w$ Noether simetrisine yol açar.

Değişmezlik $G^{(1)}L + L\frac{d\xi}{dy} = \frac{df}{dy}$ ile verilir. Burada $G^{(1)} = \xi\partial_y + \eta\,\partial_w + \zeta^1\partial_{w'}$ dir. (1.80) diverjans kriterinden,

$$(\eta_y + w'\eta_w - w'\xi_y - w'^2\xi_w)cw' + (cw - w - \tfrac{w^2}{2})\eta$$

$$+(c\tfrac{w^2}{2} - \tfrac{w^2}{2} - \tfrac{w^3}{6} + \tfrac{c}{2}w'^2)\left(\xi_y + w'\xi_w\right) = f_y + w'f_w \qquad (2.48)$$

elde edilir. Buradan türevin katsayılarının sıfıra eşitlenmesinden

$$w'^3 \;:\; -\tfrac{c}{2}\xi_w = 0,$$

$$w'^2 \;:\; c\eta_w - \tfrac{c}{2}\xi_y = 0$$

$$w' \;:\; c\eta_y + \tfrac{c}{2}w^2\xi_w - \tfrac{w^2}{2}\xi_w - \tfrac{w^3}{6}\xi_w - f_w = 0 \qquad (2.49)$$

$$\text{Sbt:}\;\; c\eta w - \eta w - \eta\tfrac{w^2}{2} + \tfrac{c}{2}w^2\xi_y - \tfrac{w^2}{2}\xi_y - \tfrac{w^3}{6}\xi_y - f_y = 0$$

belirleyici denklemine ulaşılır. Hesaplamalar bize $G = \partial_y$ Noether simetrisini verir. (2.23)-(2.24) korunum kanunu formülünde yerine yazılırsa

$$I = \frac{cw^2}{2} - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{6} - \frac{c}{2}w'^2 \qquad (2.50)$$

ilk integrali elde edilir. Öyle ki, (2.47) nin bir çözümü

$$dy = \frac{\sqrt{3}c\,dw}{\sqrt{3cw^2 - 3w^2 - w^3 - k_1}} \qquad (2.51)$$

olarak verilir. Burada k_1 bir sabittir. Böylelikle $k_1 = 0$ alınırsa

$$u(x,t) = (3c-3)\left[1 - \tanh^2\left(-\frac{\sqrt{c-1}}{2c}(x-ct)\right)\right]. \qquad (2.52)$$

ilerleyen dalga çözümü elde edilir.

3. KEYFİ FONKSİYON İHTİVA EDEN OLUŞUM TÜRÜ DENKLEMLERİN EŞDEĞERLİK DÖNÜŞÜMLERİ, GRUP SINIFLANDIRMASI VE KORUNUM KANUNLARI

Bu bölümde, ikinci mertebeden, u ya bağımlı keyfi bir $f(u)$ fonksiyonu ihtiva eden oluşum türü denklemler sınıfı ele alınacaktır. Bu denklem lineer olmayan ısı difüzyonu, biyofizik (moleküler CB özelliklerinin hesaplanmasında sinir yayılım modeli olarak) v.s gibi alanlarda modellenir. Bu denklemin eşdeğerlik dönüşümleri elde edilecektir. Bu suretle f fonksiyonunun yapısına göre sınıflandırma yapılacak ve her bir sınıfın denklemine karşılık korunum kanunun elde edilebileceği gösterilecektir.

Ele alınacak olan kısmi türevli denklem

$$u_t = u_{xx} + F(u) \tag{3.1}$$

dir. (3.1) de $F(u) = 0$ olarak seçilirse

$$u_t = u_{xx} \tag{3.2}$$

klasik ısı denklemine ulaşılır. k bir sabit olmak üzere $F(u) = u(k-u)(u-1)$ şeklinde ise

$$u_t = u_{xx} + u(k-u)(u-1) \tag{3.3}$$

Huxley denklemine ulaşılır. Şayet $F(u) = -u^3 + u$ olarak alınırsa aşağıdaki lineer olmayan parabolik kısmi diferensiyel denklemine ulaşılır.

$$u_t = u_{xx} - u^3 + u \tag{3.4}$$

Bu denklem Cahn-Allen denklemi olup matematiksel biyoloji, kuantum mekaniği ve plazma fiziğinde kullanılır. Literatürde göz önüne alınıp incelenen bu denklemlerin her biri önemli fiziksel özelliklere sahiptir. Bu bölümün amacı (3.1) genel modeli için eşdeğerlik üreteçlerinin Lie üreteç cebirlerini bulmak ve kullanmaktır.

3.1. Temel Lie Cebiri

(3.1) denklemi için değişmezlik koşulu

$$X^2[u_t - u_{xx} - F(u)] = 0 \tag{3.5}$$

dır. Burada X^2,

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.6}$$

üretecinin

$$\zeta_0 = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi), \tag{3.7}$$

$$\zeta_1 = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi), \tag{3.8}$$

$$\zeta_2 = D_x(\zeta_1) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi), \tag{3.9}$$

uzanım katsayıları ile belirlenen

$$X^2 = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \zeta_0\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{3.10}$$

ikinci uzanımıdır. Burada D_t ve D_x sırasıyla t ve x e göre total türevi göstermektedir. (3.6) ve (3.10) un (3.1) de yerine yazılmasıyla (3.1) denklemi tarafından kabul edilen tüm (3.6) üreteçleri için belirleyici denklemler elde edilir. Keyfi $f(u)$ fonksiyonu hali için belirleyici denklemlerden $\tau = c_1$, $\xi = c_2$, $\eta = 0$ ($c_1, c_2 =$ sabit) elde edilir. Dolayısıyla $f(u)$ keyfi elemanlı (3.1), yalnızca

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{3.11}$$

üreteçleri ile gerilen iki boyutlu L_2 Lie cebrini kabul eder. L_2 Lie cebrine (3.1) denklemi için temel Lie cebri denir. Temel Lie cebri bazı özel hallerde genişleyebilir.

Örneğin (3.1) denkleminde $F(u) = 0$ ise oluşan ısı denklemi

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = f(x,t)\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = -x\frac{\partial}{\partial x} - 2t\frac{\partial}{\partial t},\ X_5 = -u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_6 = 2ut\frac{\partial}{\partial u} + ux^2\frac{\partial}{\partial u} - 4xt\frac{\partial}{\partial x} - 4t^2\frac{\partial}{\partial t},\ X_7 = ux\frac{\partial}{\partial u} - 2t\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.12}$$

sonsuz boyutlu Lie cebrini kabul eder. Burada $f(x,t)$, $-f_{xx} + f_t = 0$ ısı denkleminin çözümüdür. Dolayısıyla bu durumda simetri cebri L_2 nin (3.11) bazına, 5 tane (bunlardan biri sonsuz boyutlu) ilave üretecin eklenmesiyle temel L_2 cebrinin bir genişlemesi elde edilir. Tüm olası $f(u)$ fonksiyonlarının tanımlanması ve böylelikle (3.1) denkleminin L_2 cebrinin bir genişlemesini kabul etmesi bir grup sınıflandırma problemidir. Simetriler için grup sınıflandırmasına alışılmış yaklaşım belirleyici denklemlerden keyfi fonksiyonların tahmin edilmesidir. Bununla birlikte (3.1) ve diğer bir çok denklem için belirleyici denklemlerin tam grup sınıflandırmasının yapılması oldukça zordur. Akhatov, Gazizov ve Ibragimov (1989) bu problemi aşmak için bir metot önerdiler. Ön grup sınıflandırması olarak adlandırılan bu metodun uygulanması eşdeğerlik grubun sonlu boyutlu L_ε Lie cebri tarafından üretilmesi hali için yapıldı (Ibragimov ve ark. 1991). Ön grup sınıflandırma metodu, sonsuz boyutlu eşdeğerlik cebrinin bazı sonlu boyutlu Lie alt cebrinin seçilmesi suretiyle sonsuz boyutlu eşdeğerlik grubu hali için kullanıldı. Metodun esası tüm aşikâr olmayan L_ε alt cebirlerinin sınıflandırılmasıdır. Böylelikle ön grup sınıflandırma metodunun uygulanması söz konusu diferensiyel denklem için eşdeğerlik grubunun L_ε Lie cebrinin bulunmasını gerektirir.

3.2. Eşdeğerlik Dönüşümleri

Eşdeğerlik dönüşümü (3.1) formundaki herhangi bir denklemi aynı forma dönüştüren t, x, u değişkenlerinin dejenere olmayan bir dönüşümüdür. Tüm eşdeğerlik dönüşümlerinin cümlesi ε eşdeğerlik grubunu oluşturur. Ovsiannikov (1982) tarafından geliştirilen, Lie' nin sonsuz küçük metodunun kullanılmasını sağlayan ε grubunun ε_c sürekli alt grupları bulunacaktır. Şimdi,

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu\frac{\partial}{\partial F} \tag{3.13}$$

formunda ε_c eşdeğer dönüşüm üreteci bulmaya çalışılsın. Burada

$$\tau = \tau(t, x, u),\ \xi = \xi(t, x, u),\ \eta = \eta(t, x, u),\ \mu = \mu(t, x, u, F) \tag{3.14}$$

dır. (3.13) üreteci aşağıdaki genişletilmiş sistem ile yazılan (3.1) denkleminin değişmezlik koşuluyla belirlenir.

$$u_t - u_{xx} - F(u) = 0,\ F_t = 0,\ F_x = 0 \tag{3.15}$$

Burada u ve F diferensiyel değişkenler olarak göz önüne alınır. Yani u, (x,t) uzayı üzerinde ve F genişletilmiş (t,x,u) uzayı üzerindedir. (3.13) operatörünün τ, ξ, η koordinatları (t,x,u) nun fonksiyonları iken μ ise (t,x,u,F) in bir fonksiyonudur. (3.15) sisteminin değişmezlik koşulu aşağıdaki belirleyici sistem ile verilir:

$$\widetilde{Y}(u_t - u_{xx} - F(u)) = 0,\ \widetilde{Y}(F_t) = 0,\ \widetilde{Y}(F_x) = 0 \tag{3.16}$$

Burada $\widetilde{Y}$, (3.13) operatörünün aşağıdaki uzanımıdır:

$$\widetilde{Y} = Y + \zeta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + w^t \frac{\partial}{\partial F_t} + w^x \frac{\partial}{\partial F_x} \tag{3.17}$$

ζ^t, ζ^{xx} katsayıları (3.7)-(3.9) da verilir ve (3.1) in diğer katsayıları uzanım metodunun (t,x,u) bağımsız değişkenli F diferensiyel değişkenine uygulanmasıyla elde edilir. Yani

$$\zeta^t = \eta_t + u_t\eta_u - u_x\xi_t - u_x u_t \xi_u - u_t\tau_t - (u_t)^2\tau_u,$$

$$\begin{aligned}\zeta^{xx} &= \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_{xx}\eta_u + (u_x)^2\eta_{uu} - 2u_{xx}\xi_x - u_x\xi_{xx} - 2(u_x)^2\xi_{xu} - 3u_x u_{xx}\xi_u \\ &- (u_x)^3\xi_{uu} - 2u_{xt}\tau_x - u_t\tau_{xx} - 2u_x u_t\tau_{xu} - (u_t u_{xx} + 2u_x u_{xt})\tau_u - (u_x)^2 u_t\tau_{uu}\end{aligned} \tag{3.18}$$

ve

$$w^t = \tilde{D}_t(\mu) - F_u\,\tilde{D}_t(\eta),\ w^x = \tilde{D}_x(\mu) - F_u\,\tilde{D}_x(\eta) \tag{3.19}$$

dir. Burada total türevler

$$\tilde{D}_t = \tfrac{\partial}{\partial t},\ \tilde{D}_x = \tfrac{\partial}{\partial x} \tag{3.20}$$

şeklindedir. Değişmezlik koşulu uygulanırsa;

$$\zeta^t - \zeta^{xx} - \mu\,|_{u_t = u_{xx} + F(u)} = 0 \tag{3.21}$$

ve (3.19) un göz önüne alınmasıyla

$$w^t = 0,\ w^x = 0 \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.20) $\tilde{D}_t$, $\tilde{D}_x$ operatörleri (3.22) de yerine yazılırsa,

$$w^t = \mu_t - F_u\eta_t \Rightarrow \mu_t = 0, \eta_t = 0,\ w^x = \mu_x - F_u\eta_x \Rightarrow \mu_x = 0, \eta_x = 0. \tag{3.23}$$

elde edilir. Böylece keyfi F fonksiyonu için (3.23) den

$$\mu = \mu(u,F), \eta = \eta(u) \tag{3.24}$$

elde edilir. Ayrıca (3.21) denkleminden,

$$\begin{aligned}&(u_{xx}+F)\eta_u - u_x\xi_t - u_x(u_{xx}+F)\xi_u - (u_{xx}+F)\tau_t - u_{xx}\eta_u - (u_x)^2\eta_{uu} + 2u_{xx}\xi_x \\ &+ u_x\xi_{xx} + 2(u_x)^2\xi_{xu} + 3u_xu_{xx}\xi_u + (u_x)^3\xi_{uu} - \mu = 0\end{aligned} \tag{3.25}$$

belirleyici denklemine ulaşılır. (3.25) den (3.24)' ünde göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}(u_x)^3 &: \xi_{uu} = 0, \\ (u_x)^2 &: -\eta_{uu} + 2\xi_{xu} = 0, \\ u_x &: -\xi_t - F\xi_u + \xi_{xx} = 0, \\ u_xu_{xx} &: -\xi_u + 3\xi_u = 0,\end{aligned} \tag{3.26}$$

belirleyici denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerin çözümünden

$$\xi = c_3x + c_4, \tau = 2c_3t + c_5, \eta = c_1 + c_2u, \mu = (c_2 - 2c_3)F \tag{3.27}$$

elde edilir. Burada $c_1,...c_5$ sabit katsayılardır. Böylece (3.1) denklem sınıfı aşağıdaki operatörler ile gerilen beş boyutlu L_ε eşdeğerlik cebrine sahiptir:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u}, Y_2 = u\frac{\partial}{\partial u} + F\frac{\partial}{\partial F},\ Y_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - 2F\frac{\partial}{\partial F}, Y_4 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_5 = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{3.28}$$

Sonuç olarak, (3.28) operatörleri (3.1) denklemi için beş parametreli sürekli eşdeğerlik dönüşüm grupları üretir.

3.3. İzdüşümler ve Korunum Kanunları

Burada eşdeğerlik üreteçlerinin izdüşümleri hakkındaki teorem kullanılacaktır. Bağımsız, bağımlı değişkenler ve keyfi elemanlar sırasıyla $x = (t, x), u = u, f = F$ ile gösterilsin. Aşağıdaki (x, u) bağımsız ve bağımlı değişkenlerine kısıtlanmış olan (3.13) eşdeğerlik üretecinin $X = pr_{(x,u)}(Y)$ ve keyfi elemanları ihtiva edecek şekilde kısıtlanan $Z = pr_{(u,f)}(Y)$ izdüşümü göz önüne alınsın:

$$X = pr_{(x,u)}(Y) = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.29}$$

$$Z = pr_{(u,f)}(Y) = \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu\frac{\partial}{\partial F} \tag{3.30}$$

$Y \in L_\varepsilon$ eşdeğerlik üreteci (3.28) operatörlerinin

$$Y = K_1Y_1 + K_2Y_2 + K_3Y_3 + K_4Y_4 + K_5Y_5 \tag{3.31}$$

ya da

$$Y = (2K_3t + K_5)\tfrac{\partial}{\partial t} + (xK_3 + K_4)\tfrac{\partial}{\partial x} + (K_1 + uK_2)\tfrac{\partial}{\partial u} + (K_2 - 2K_3)F\tfrac{\partial}{\partial F} \tag{3.32}$$

lineer kombinasyonudur. Y nin (3.29) ve (3.30) üzerindeki izdüşümü sırasıyla

$$X = (2K_3t + K_5)\tfrac{\partial}{\partial t} + (xK_3 + K_4)\tfrac{\partial}{\partial x} + (K_1 + uK_2)\tfrac{\partial}{\partial u} \tag{3.33}$$

ve

$$Z = (K_1 + uK_2)\tfrac{\partial}{\partial u} + (K_2 - 2K_3)F\tfrac{\partial}{\partial F} \tag{3.34}$$

olarak yazılır. İzdüşümler üzerindeki teoremin uygulaması (3.1) denklemi için aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Teorem 3.1. (3.33) X operatörünün

$$F = G(u) \tag{3.35}$$

keyfi fonksiyonlu (3.1) denklemi tarafından kabul edilmesi ancak ve ancak K_i sabitlerinin seçilmesiyle mümkündür öyle ki, (3.34) ile verilen Z operatörü (3.35) denklemi tarafından kabul edilir. Özellikle $X \in L_p$ dir ancak ve ancak Z

$$Z = pr_{(u,f)}(Y) = 0 \tag{3.36}$$

dır.

Örnek 3.2. (3.36) denklemi temel cebri bulmak için basit bir yol verir. Gerçekten, (3.34) operatörünün katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$(K_1 + uK_2)\tfrac{\partial}{\partial u} + (K_2 - 2K_3)F\tfrac{\partial}{\partial F} = 0 \Rightarrow K_1 + uK_2 = 0, K_2 - 2K_3 = 0; K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 = 0 \tag{3.37}$$

elde edilir. Sonuç olarak $Y = K_4Y_4 + K_5Y_5$ dir ve dolayısıyla

$$X = K_4Y_4 + K_5Y \tag{3.38}$$

bulunur. Y_4, Y_5 (3.11) den

$$\begin{aligned} X_1 &= pr_{(x,u)}(Y_4) = \partial_x = Y_4 \\ X_2 &= pr_{(x,u)}(Y_5) = \partial_t = Y_5. \end{aligned} \tag{3.39}$$

operatörleri ile çakıştığı için temel Lie cebri (3.11) operatörleri tarafından gerilir.

Örnek 3.3. $Y_1 + Y_3$ eşdeğerlik üreteci göz önüne alınsın. Onun (3.34) izdüşümü

$$Z = pr_{(u,f)}(Y) = \tfrac{\partial}{\partial u} - 2F\tfrac{\partial}{\partial F} \tag{3.40}$$

dir. (3.35) denklemi için değişmezlik koşulundan

$$Z(F-G(u))|_{F=G(u)} = -2G(u) - G^{'}(u) = 0 \tag{3.41}$$

$G(u) = \frac{G^{'}(u)}{2} \Rightarrow \quad F = Ce^{-2u}$ elde edilir. Burada C bir sabittir. Dolayısıyla, (3.1) denklemi

$$u_t - u_{xx} - Ce^{-2u} = 0 \tag{3.42}$$

şeklinde olur ve (3.42), X_1, X_2 üreteçlerine ilaveten

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u} \tag{3.43}$$

üretecini kabul eder.

Şimdi, (3.43) üretecine karşılık gelen korunum vektörleri oluşturulsun. (3.43) operatörünün sonsuz küçükleri $\tau = 2t,\ \xi = x,\ \eta = 1$ ve formal Lagrangianı $L = v\,(u_t - u_{xx} - e^{-2u})$ (C=1 seçilirse) olup temel korunum teoreminden elde edilen

$$C^t = \tau L + W(\frac{\partial L}{\partial u_t}) \tag{3.44}$$

$$C^x = \xi L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \tag{3.45}$$

bağıntılarında yerine yazılırsa

$$C^t = -2tvu_{xx} - 2tve^{-2u} - xvu_x$$

$$C^x = xvu_t - xve^{-2u} + v_x - 2tv_x u_t - xv_x u_x + 2tvu_{tx} + vu_x$$

yerel olmayan korunum kanunları elde edilir. Burada v ,(3.1) denkleminin

$$v_t + v_{xx} = 2ve^{-2u} \tag{3.46}$$

eşlenik denkleminin bir çözümüdür.

4. SIĞ SU DALGA DENKLEMLERİNİN KORUNUM KANUNLARI VE POTANSİYEL SİMETRİLERİ

Bu bölümde düzlemsel akış, eksenel akış ve dispersiv dalga durumları için bir tabakalı sığ su dalga sistemlerinin korunum kanunları ve simetrileri arasındaki ilişki ele alınmıştır. Lie nokta ve Lie-Bäcklund simetrileri araştırıldıktan sonra yerel ve yerel olmayan korunum kanunları elde edilir. Yerel olmayan korunum kanunları sığ su dalga sistemlerinin eşlenik denklemleri tarafından tanımlanan yerel olmayan değişkenler içerir. Bu bölümde, özellikle düzlemsel akış hali için sonsuz yerel korunum kanunu ve potansiyel simetri elde edilir.

4.1. Sığ Su Dalga Sistemleri

Son yıllarda sığ su dalga sistemleri konusu çok büyük bir ilgi çekmektedir. Örneğin Akyıldız (1987), bu denklemlerin çözümleri, korunum kanunları ve Backlund dönüşümlerini elde etmek için hodograf metodunu kullanır. Şahin (2007) , maddesiz yer çekimi akımlarını inceleyip Lie grup teorisi kullanılarak benzerlik çözümlerini elde etti. Boyut analizinin genelleştirilmiş hali olan Lie grup teorisi problemin çözümü için bir temel yaklaşım olarak ele alındı.

Özer ve Antar (2008) iki tabakalı sığ su dalga sistemlerinin Lie grup teorisini kullanarak simetri grup özelliklerini ve genel benzerlik formlarını elde etti. Onlar ayrıca Lie grup teorisinin, değişken akışlı sığ su dalga sistemleri için kendi benzer çözümlerin araştırılmasında literatürde şimdiye kadar kullanılan boyut analizinin genelleştirilmesi olduğunu göstermişlerdir.

4.2. Yönetici Denklemler

Daha düşük yoğunluktaki bir ρ_a akışkanına giren ρ yoğunluktaki bir akımın düzlemsel ve eksenel hareketleri göz önüne alınacaktır. Akımlardaki akışkan, başlangıçta tanımlanmış oranlarda takdim edilir ve yatay sınır boyunca akar. Üstelik iki akışkan arasındaki yoğunluk farkı ve yerçekimine bağlı olarak kaldırma kuvveti tarafından sürülür. Akışkanlar sıkıştırılamaz olarak alınmalıdır, daha hafif akışkanın derinliği akımın kalınlığından çok daha büyük alınmalı ve iki akışkan arasındaki karışım ihmal edilmelidir. Esas olarak başlangıçtan sonraki zaman aralığında akımın davranışı göz önüne alınır. Dolayısıyla farz edilir ki, akımın uzunluğu (ya da eksenel akışta yarıçapı) onun kalınlığından çok daha büyüktür. Bu takdirde şayet viskoz etkileri önemsiz ise akımın hareketi Boussinesq yaklaşımı olarak adlandırılan

$$\begin{aligned} h_t + uh_x + hu_x + n\frac{uh}{x} &= 0, \\ u_t + uu_x + g' h_x &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

sığ su denklemleri ile adlandırılır. Burada $h(x,t)$ akımın kalınlığı, $u(x,t)$ akımdaki derinlik ortalamalı yatay akışkan hızı ve $g' = g(\rho - \rho_a)/\rho_a$ yerçekimine bağımlı indirgenmiş ivmedir (Grundy ve Rottman 1986). Bu çalışmada basitlik olması açısından $g' = 1$ farz edilir. x bağımsız değişkeni düzlemsel akışta yatay koordinatı eksenel akışta radyal koordinatı ve t başlangıçta akıştan sonraki zamanı ölçer. n parametresi düzlemsel akış için 0 ve eksenel akış için 1 dir.

Çalışmada ayrıca (1+1) boyutlu dispersiv uzun dalga veya sığ su dalga sistemleri de incelenir. Sığ su dalga teorisinde uzun dalga geniş bir ilgiye mazhardır. Wu ve Zhang (1996) düzgün derinlikli sığ su üzerinde yatay doğrultuda ilerleyen lineer olmayan dispersiv uzun yerçekimi dalgaları için

$$\begin{aligned} h_t + uh_x + hu_x + \frac{1}{3}u_{xxx} &= 0, \\ u_t + uu_x + h_x &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

model denklemini elde etti. Burada h suyun yüksekliği, u suyun yüzey hızıdır.

4.3. Yönetici Denklemlerin Simetri Grup Analizi

4.3.1. Düzlemsel Akış Hali

Düzlemsel geometri hali için şayet viskoz etkileri önemsiz ise düzlem akışta akımın hareketi, (4.1) denkleminde $n = 0$ alınması suretiyle

$$\begin{aligned} h_t + uh_x + hu_x &= 0, \\ u_t + uu_x + h_x &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

biçimindedir. $(x,\, t,\, u, h)$ koordinatlarında

$$\begin{aligned} x^* &= x^*(x,t,u,h;\varepsilon), \quad t^* = t^*(x,t,u,h;\varepsilon), \\ u^* &= u^*(x,t,u,h;\varepsilon), \ h^* = h^*(x,t,u,h;\varepsilon), \end{aligned} \tag{4.4}$$

ile verilen bir parametreli Lie grup sonsuz küçük dönüşümleri göz önüne alınsın. Burada ε grup parametresidir. (4.4) grubunun sonsuz küçük üreteci aşağıdaki vektör formunda ifade edilebilir:

$$X = \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta^u \frac{\partial}{\partial u} + \eta^h \frac{\partial}{\partial h} \tag{4.5}$$

burada $\xi^x, \xi^t, \eta^u, \eta^h$ grup değişkenlerinin (bağımsız ve bağımlı değişkenler) sonsuz küçük fonksiyonlarıdır. Bu takdirde karşı gelen bir parametreli Lie grup dönüşümleri

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\xi^x(x,t,u,h) + O(\varepsilon^2), \ t^* = t + \varepsilon\xi^t(x,t,u,h) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon\eta^u(x,t,u,h) + O(\varepsilon^2)\,, \ h^* = h + \varepsilon\eta^h(x,t,u,h) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{4.6}$$

biçimindedir. (4.3) denkleminin Lie grup simetrilerini bulmak için detaylı bir inceleme (Şahin 2007) da yapılmıştır. (Cantwell 2002), (Şahin 2007), ve (Özer ve Antar 2008) de vurgulanır ki, verilen denklemlerin belirleyici denklemlerinde sonsuz küçükler kuvvet serileri olarak alınabilir. Bu kısıtlamanın kullanılmasıyla daha çok simetri elde edilebilir. Sıkıcı hesaplamalar yapmaksızın (Şahin 2007) deki sonuçları bir sonraki kısımda kullanmak için burada özetleyeceğiz. Şayet

$$
\begin{aligned}
\xi^x &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}t + a_{13}x^2 + a_{14}t^2 + a_{15}xt + a_{16}x^2t \\
&\quad + a_{17}xt^2 + a_{18}x^2t^2 + a_{19}x^3 + a_{110}x^3t + a_{111}x^3t^2 + \ldots + \\
\xi^t &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}t + a_{23}x^2 + a_{24}t^2 + a_{25}xt + a_{26}x^2t \\
&\quad + a_{27}xt^2 + a_{28}x^2t^2 + a_{29}x^3 + a_{210}x^3t + a_{211}x^3t^2 + \ldots + \\
\eta^u &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}t + a_{33}x^2 + a_{34}t^2 + a_{35}xt + a_{36}x^2t \\
&\quad + a_{37}xt^2 + a_{38}x^2t^2 + a_{39}x^3 + a_{310}x^3t + a_{311}x^3t^2 + \ldots + \\
\eta^h &= a_{40} + a_{41}x + a_{42}t + a_{43}x^2 + a_{44}t^2 + a_{45}xt + a_{46}x^2t \\
&\quad + a_{47}xt^2 + a_{48}x^2t^2 + a_{49}x^3 + a_{410}x^3t + a_{411}x^3t^2 + \ldots +
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

kuvvet serisi formu belirleyici denklemlerde kullanılırsa, bu takdirde x, t, u ve h değişkenlerinin kuvvet serilerinden oluşan denklemler elde edilir ve çeşitli kuvvetlerin her bir katsayılarının sıfıra eşitlenmesi suretiyle kuvvet serisi formlarının sabit katsayıları hesaplanır. Böylelikle bir tabakalı sığ su denklemlerinin genel Lie dönüşüm grupları elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\xi^x &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}t + a_{13}u + a_{14}h, \\
\xi^t &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}t + a_{23}u + a_{24}h, \\
\eta^u &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}t + a_{33}u + a_{34}h, \\
\eta^h &= a_{40} + a_{41}x + a_{42}t + a_{43}u + a_{44}h.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

birinci mertebe kuvvet serisi formları için basit hesaplamalardan sonra

$$
\begin{aligned}
&\xi^x = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3/2)x + \alpha_4 t,\ \xi^t = \alpha_5 + \alpha_2 t,\ \eta^u = \alpha_4 + \alpha_3 u/2, \\
&\eta^h = \alpha_3 h
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

elde edilir. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ve α_5 keyfi sabitlerdir. Bu durumda karşı gelen üreteçler aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t},\ X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \\
&X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2h\frac{\partial}{\partial h}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

İkinci mertebe kuvvet serileri için aynı yöntem uygulanırsa (4.10) daki simetrilere ilaveten (X_6) simetrisi elde edilir. Yani,

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t},\ X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \\
&X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2h\frac{\partial}{\partial h},\ X_6 = (-h + \frac{u^2}{2})\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

dir. Benzer şekilde üçüncü mertebe kuvvet serileri için işlemler yapılırsa iki tane daha

(X_6, X_7) simetrisi elde edilir. Dolayısıyla elde edilen simetriler

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t},\ X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},\\
&X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2h\frac{\partial}{\partial h},\ X_6 = (-h + \frac{u^2}{2})\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial t},\\
&X_7 = (-ht + \frac{tu^2}{2})\frac{\partial}{\partial x} + (tu - \frac{x}{3})\frac{\partial}{\partial t} - (\frac{2h}{3} + \frac{u^2}{6})\frac{\partial}{\partial u} - \frac{2hu}{3}\frac{\partial}{\partial h},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

biçimindedir. Dördüncü mertebe kuvvet serileri hali için ise üç tane daha ilave simetri elde edilir. Beşinci mertebe kuvvet serileri için dört tane ilave simetri v.s.…

Sonuç 4.1. Bir tabakalı sığ su dalga denklemleri (4.3) düzlemsel akış hali için sonsuz Lie nokta simetrilerine sahiptir.

4.3.2. Eksenel Akış Hali

Düzlem geometri hali için şayet viskoz etkileri önemsiz ise akımın eksenel akıştaki hareketi (yani (4.1) de $n = 1$ alınması)

$$\begin{aligned}
h_t + uh_x + hu_x + \frac{uh}{x} &= 0,\\
u_t + uu_x + h_x &= 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

biçimindedir. Düzlem akış halinin simetri analizinde takip edilen yöntem kullanılırsa aşağıdaki Lie nokta üreteçleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2h\frac{\partial}{\partial h},\\
&X_4 = -xt\frac{\partial}{\partial x} - \frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{tu}{2} - \frac{x}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u} + ht\frac{\partial}{\partial h}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Sonuç 4.2. Eksenel hal için Lie nokta simetri üreteçlerinin sayısı sonsuz küçüklerin dördüncü kuvvet seri açılımlarından sonra aynı kalır.

4.3.3. Dispersiv sığ su dalga sistemleri

Literatürde Wu-Zhang denklemleri olarak ta bilinen dispersiv uzun dalga ya da sığ su dalga sistemleri

$$\begin{aligned} h_t + uh_x + hu_x + \frac{1}{3}u_{xxx} &= 0, \\ u_t + uu_x + h_x &= 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

dir. (4.15) denklemleri t zaman ve x-ekseninin ötelemesi altında değişmezdir. (4.15) aynı zamanda Galilean dönüşüm ve ölçekleme dönüşümleri altında değişmezdir. Bu dönüşümler aşağıdaki dört Lie nokta üretecini verir:

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\; X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\; X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \\ &X_4 = -\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} - t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{2}\frac{\partial}{\partial u} + h\frac{\partial}{\partial h}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Sonuç 4.3. Uzun dalga denklemleri için Lie nokta simetri üreteçlerinin sayısı sonsuz küçüklerin kuvvet serilerinin dördüncü mertebe açılımından sonra aynı kalır.

4.4. Yönetici Denklemlerin Lie-Bäcklund Simetrileri

Bu alt kısımda düzlemsel ve eksenel halleri için sığ su dalga sistemlerinin Lie-Bäcklund simetrileri araştırılacaktır. Dispersiv uzun dalga sistemleri için de benzer şekilde hesaplanabilir. İlk olarak sığ su dalga sitemlerinin

$$\begin{aligned} X = {}& \xi^x(x,t,u,h,u_x,u_t,h_x,h_t)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x,t,u,h,u_x,u_t,{}_{h_x},h_t)\frac{\partial}{\partial t} \\ &+\eta^u(x,t,u,h,u_x,u_t,h_x,h_t)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^h(x,t,u,h,u_x,u_t,h_x,h_t)\frac{\partial}{\partial h} \end{aligned} \tag{4.17}$$

birinci mertebe Lie-Bäcklund simetrileri hesaplansın. Lie nokta simetrisi halindeki yöntemin aynısı kullanılırsa sonsuz küçüklerin birinci mertebe kuvvet serilerinin çözümü için

$$\xi^x = 0, \xi^t = 0, \eta^u = u_x,\; \eta^h = h_x \tag{4.18}$$

elde edilir. Karşı gelen üreteç

$$X = u_x\frac{\partial}{\partial u} + h_x\frac{\partial}{\partial h}. \tag{4.19}$$

şeklindedir. Benzer şekilde sonsuz küçüklerin ikinci mertebe kuvvet serileri için üç tane ilave simetriye sahip olunur. Yani

$$
\begin{aligned}
X_1 &= u_x \frac{\partial}{\partial u} + h_x \frac{\partial}{\partial h},\ X_2 = (-u + xu_x)\frac{\partial}{\partial u} + (-2h + xh_x)\frac{\partial}{\partial h} \\
X_3 &= (-1 + tu_x)\frac{\partial}{\partial u} + th_x \frac{\partial}{\partial h},\ X_4 = (h_x + uu_x)\frac{\partial}{\partial u} + (uh_x + hu_x)\frac{\partial}{\partial h}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

dir. İncelemelerde üçüncü mertebe kuvvet serisi hali için (4.3) denkleminin 8 tane Lie-Bäcklund simetrisine, dördüncü mertebe kuvvet serisi açılımında 16 tane v.s…

Sonuç 4.4.Düzlemsel akış için bir tabakalı sığ su dalga denklemleri birinci mertebe sonsuz Lie-Bäcklund simetrisine sahiptir. Eksenel akış halinde, yani (5.13) denklemi için yalnızca aşağıdaki Lie-Bäcklund simetrisi mevcuttur:

$$
X = (-u + xu_x)\frac{\partial}{\partial u} + (-2h + xh_x)\frac{\partial}{\partial h} \tag{4.21}
$$

4.5. Korunum Kanunları

4.5.1 Düzlemsel akış için korunum kanunlarının elde edilmesi

(4.3) denklemi için (1.57) Lagrangianı

$$
L = v(h_t + uh_x + hu_x) + w(u_t + uu_x + h_x) \tag{4.22}
$$

olarak yazılır. Burada v ve w eşlenik değişkenlerdir. Bu Lagrangian kullanılarak

$$
\frac{\delta L}{\delta u} = -(w_t + uw_x + hv_x),\ \frac{\delta L}{\delta v} = h_t + uh_x + hu_x \tag{4.23}
$$

ve

$$
\frac{\delta L}{\delta h} = -(w_x + v_t + uv_x),\ \frac{\delta L}{\delta w} = u_t + uu_x + h_x \tag{4.24}
$$

elde edilir. (4.23)-(4.24) denklemlerinden açıktır ki, (4.22) Lagrangianı için Euler-Lagrange denklemleri (4.3) düzlemsel akış denklemleri ve yeni v, w bağımlı değişkenleri için

$$
\begin{aligned}
w_t + uw_x + hv_x &= 0, \\
w_x + v_t + uv_x &= 0
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

eşlenik denklemlerini verir. (4.25) de $w = h,\ v = u$ yazılırsa bu durumda bir tabakalı sığ su dalga denklemlerinin düzlemsel akış hali olan

$$h_t + hu_x + h_x u = 0,$$
$$u_t + h_x + uu_x = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla düzlemsel akış için bir tabakalı sığ su dalga denklemleri kendi eşleniktir. Şimdi, örneğin (4.10) da bulunan X_4 simetrisi tarafından elde edilen korunum kanunları bulunmaya çalışılsın. $\xi^1 = t,\ \xi^2 = 0,\ \eta^1 = 1,\ \eta^2 = 0,\ v = u,\ w = h$ olmak üzere (1.44) formülünün $X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}$ Galilean simetriye ve (4.22) Lagrangianına uygulanmasıyla, (1.37) korunum kanununun aşağıdaki korunum vektörleri elde edilir:

$$\begin{aligned} C_4^1 &= v\left(tF_1 + (1 - tu_x)\frac{\partial F_1}{\partial u_x} - th_x\frac{\partial F_1}{\partial h_x} \right) + w\left(tF_2 - th_x\frac{\partial F_2}{\partial h_x} + (1 - tu_x)\frac{\partial F_2}{\partial u_x} \right) \\ &= 2uh + t(uh_t + hu_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4^2 &= v\left((1 - tu_x)\frac{\partial F_1}{\partial u_t} - th_x\frac{\partial F_1}{\partial h_t} \right) + w\left(-th_x\frac{\partial F_2}{\partial h_t} + (1 - tu_x)\frac{\partial F_2}{\partial u_t} \right) \\ &= -tuh_x - thu_x + h \end{aligned}$$

Yani,

$$\begin{aligned} C_4^1 &= 2uh + t(uh_t + hu_t), \\ C_4^2 &= -tuh_x - thu_x + h. \end{aligned} \tag{4.26}$$

dir. Şayet bu nicelikler $D_i(C^i) = 0$ de yerine yazılır ve bazı basitleştirmeler yapılırsa

$$C_4^1 = uh,\ C_4^2 = h \tag{4.27}$$

elde edilir.

Benzer bir şekilde, (1.44) formülü $\xi^1 = x,\ \xi^2 = t,\ \eta^1 = 0,\ \eta^2 = 0$ olmak üzere (4.10) daki $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial x}$ genleşme simetrisine ve (4.22) Lagrangianına uygulanırsa korunum kanununun

$$\begin{aligned} C_3^1 &= v\left(xF_1 - (tu_t + xu_x)\frac{\partial F_1}{\partial u_x} - (th_t + xh_x)\frac{\partial F_1}{\partial h_x} \right) \\ &\quad + w\left(xF_2 - (tu_t + xu_x)\frac{\partial F_2}{\partial u_x} - (th_t + xh_x)\frac{\partial F_2}{\partial h_x} \right) \\ &= xuh_t - 2thuu_t - tu^2h_t + xhu_t - thh_t, \end{aligned} \tag{4.28}$$

akısı elde edilir. Ayrıca, X_3 operatörü korunum kanununun

$$
\begin{aligned}
C_3^2 &= v\left(tF_1 - (tu_t + xu_x)\frac{\partial F_1}{\partial u_t} - (th_t + xh_x)\frac{\partial F_1}{\partial h_t}\right) \\
&\quad + w\left(tF_2 - (tu_t + xu_x)\frac{\partial F_2}{\partial u_t} - (th_t + xh_x)\frac{\partial F_2}{\partial h_t}\right) \\
&= tu^2 h_x + 2thuu_x - xuh_x - xhu_x + thh_x
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

yoğunluğunu verir. Şayet bu nicelikler $D_i(C^i) = 0$ korunum kanunu bağıntısında yazılır ve bazı basitleştirmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
C_3^1 &= hu^2 - thh_t, \\
C_3^2 &= thh_x + uh.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

elde edilir. Özetle yukarıdaki yöntem uygulanarak her bir simetri için korunum vektörleri kolaylıkla oluşturulabilir. Örneğin X_5 operatörüne karşılık

$$
\begin{aligned}
C_5^1 &= u^2 h + \frac{1}{2}h^2, \\
C_5^2 &= uh.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

korunum vektörleri elde edilir. (4.12) deki X_7 operatörüne karşılık da

$$
\begin{aligned}
C_7^1 &= \frac{x}{3}hh_t + \frac{t}{2}hu^2u_t - \frac{t}{2}u^3h_t - th^2u_t - 2tuhh_t - 2tu^2h - 2u^2h - u^3h, \\
C_7^2 &= \frac{1}{2}tu^3h_x - 2tuhu_t - \frac{1}{3}u^2h.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

şeklinde korunum vektörleri elde edilir. Açıktır ki, düzlemsel halin her bir sonsuz küçük simetrisi için aşikar olmayan korunum kanunu oluşturulabilir.

Sonuç 4.5. Yukarıdaki incelemelere göre bir tabakalı sığ su denklemlerinin düzlemsel akış hali için sonsuz aşikar olmayan korunum vektörü mevcuttur.

4.5.2. Eksenel akış için korunum kanunlarının elde edilmesi

Eksenel akış

$$
\begin{aligned}
h_t + uh_x + hu_x + \frac{uh}{x} &= 0, \\
u_t + uu_x + h_x &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

bir tabakalı sığ su denklemlerini göz önüne alalım. (4.33) için

$$L = v(h_t + uh_x + hu_x + \frac{uh}{x}) + w(u_t + uu_x + h_x) \tag{4.34}$$

formal Lagrangianı oluşturulsun. (4.3.2) de, (4.34) denkleminin dört tane Lie nokta üreteci kabul ettiği gösterilmişti. Şimdi eksenel akış hali için eşlenik denklem oluşturulmaya çalışılsın. (1.54) den

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta u} &= \frac{\partial L}{\partial u} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) \\ &= -\left(w_t + hw_x + uw_x - \frac{vh}{x}\right) \end{aligned} \tag{4.35}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta h} &= \frac{\partial L}{\partial h} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial h_t}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial h_x}\right) \\ &= -(v_t + uv_x + w_x - \frac{uv}{x}) \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir. $w = h$, $v = u$ ya da $w = u, v = h$ durumları ayrı ayrı göz önüne alınsın ve yukarıdaki eşlenik denklemlerde yerine yazılsın. Açıktır ki, eksenel akış kendi eşlenik değildir. Dolayısıyla w ve v eşlenik değişkenlerine bağımlı olan yerel olmayan korunum kanunları elde edilir.

Düzlem akış hali için tasvir edilen yöntemin (4.14) deki simetrilere uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} C_1^1 &= -v(hu_t + uh_t) - w(uu_t + h_t), \\ C_1^2 &= -vh_t - wu_t, \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned} C_2^1 &= v(xh_t + uh - thu_t - tuh_t) + w(xu_t - tuu_t - th_t), \\ C_2^2 &= -tvh_t - w(tu_t + xu_x) \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} C_3^1 &= v(xh_t + 4uh) + w(xu_t + u^2 + 2h), \\ C_3^2 &= v(2h - xh_x) + w(u - xu_x + 2h - xh_x) \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$
\begin{aligned}
C_4^1 &= v\left(-xth_t + \frac{tuh}{2} - \frac{xh}{2} + \frac{t^2}{2}(hu_t + uh_t)\right) \\
&+ w\left(-xtu_t + \frac{tu^2}{2} - \frac{xu}{2} + \frac{t^2}{2}uu_t + th + \frac{t^2}{2}h_t\right), \\
C_4^2 &= v\left(th - \frac{t^2}{2}uh_x - \frac{t^2}{2}hu_x - \frac{t^2}{2x}uh + xth_x\right) \\
&+ w\left(xtu_x + \frac{tu}{2} - \frac{x}{2} - \frac{t^2}{2}uu_x - \frac{t^2}{2}h_x\right)
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

korunum kanunları elde edilir. Birinci bölümde denklem sistemleri için ifade edilen yerel olmayan korunum teoremi (Teorem (1.5.9)) aynı zamanda Lie-Bäcklund simetrileri için de geçerlidir. Örneğin kısım 5.4 de, eksenel akış için birinci mertebeden $X = (-u + xu_x)\frac{\partial}{\partial u} + (-2h + xh_x)\frac{\partial}{\partial h}$ Lie-Bäcklund simetrisi elde edildi. (1.44) formülünün kullanılmasıyla birinci mertebe Lie-Bäcklund simetrisine karşılık gelen

$$
\begin{aligned}
C^1 &= v\left(-3uh + xhu_x + xuh_x\right) + w\left(-u^2 + xuu_x - 2h + xh_x\right), \\
C^2 &= v\left(-2h + xh_x\right) + w\left(-u + xu_x\right).
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

korunum vektörü elde edilir.

4.5.3. Dispersiv sığ su dalga sistemleri

Şimdi (1+1) boyutlu

$$
\begin{aligned}
h_t + uh_x + hu_x + \frac{1}{3}u_{xxx} &= 0, \\
u_t + uu_x + h_x &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

dispersiv sığ su dalga sistemleri göz önüne alınsın. Yukarıdakine benzer yöntemlerin uygulanmasıyla formal Lagrangian ve eşlenik denklemler sırasıyla

$$
L = v(h_t + uh_x + hu_x + \frac{1}{3}u_{xxx}) + w(u_t + uu_x + h_x), \tag{4.43}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta w} &\equiv -(w_t + hv_x + uw_x + \frac{1}{3}v_{xxx}) = 0, \\
\frac{\delta L}{\delta h} &\equiv -(v_t + uv_x + w_x) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

biçimindedir. (4.44) de $w = h,\ v = u$ olarak seçilirse bu takdirde

$$F_1^* \equiv -(h_t + hu_x + uh_x + \frac{1}{3}u_{xxx}) = 0,$$
$$F_2^* \equiv -(u_t + uu_x + h_x) = 0 \tag{4.45}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.42) denklemi kendi eşleniktir. (4.42) denkleminin (4.16) simetrilerine (1.44) formülü uygulanırsa sırasıyla

$$C_1^1 = uh_t + hu_t,$$
$$C_2^1 = -hu_x - uh_x, \tag{4.46}$$

$$C_2^1 = -D_t\left(u^2h + \frac{uu_{xx}}{3} + \frac{h^2}{2} - \frac{u_x^2}{6}\right),$$
$$C_2^2 = D_x\left(u^2h + \frac{h^2}{2}\right) + \frac{u}{3}u_{xxx}, \tag{4.47}$$

$$C_3^1 = tD_t(uh) + 2uh + \frac{u_{xx}}{3} + u^2 + h,$$
$$C_3^2 = h - thu_x + u - tuh_x, \tag{4.48}$$

$$C_4^1 = -\frac{x}{2}L + \left(\frac{u}{2} + \frac{x}{2}u_x + tu_t\right)\left(2uh + \frac{u_{xx}}{3}\right) + \left(h + \frac{x}{2}h_x + th_t\right)\left(u^2 + h\right)$$
$$-\frac{v_x}{3}D_x\left(\frac{u}{2} + \frac{x}{2}u_x + tu_t\right) + \frac{v}{3}D_x^2\left(\frac{u}{2} + \frac{x}{2}u_x + tu_t\right), \tag{4.49}$$
$$C_4^2 = -tL + \left(\frac{u}{2} + \frac{x}{2}u_x + tu_t\right)h + \left(h + \frac{x}{2}h_x + th_t\right)u.$$

korunum vektörleri karşılık gelir.

4.6. Potansiyel Simetrilerin Oluşturulması

Bu kısımda düzlemsel akış için bir tabakalı sığ su dalga sistemlerinin potansiyel simetrileri araştırılır. Eksenel akış ve dispersiv dalga hareketi için potansiyel simetriler de benzer şekilde bulunabilir. Bluman ve ark. (1988) de korunum formunda yazılabilen kısmi diferensiyel denklemler için, yeni simetri sınıfı bulmak için bir metot önerildi. Potansiyel sistemin Lie simetrileri bir potansiyelin yeni bir bilinmeyen fonksiyon olarak takdim edilmesiyle analiz edilir. Bu kısımda sonsuz küçükleri bağımsız, bağımlı ve potansiyel değişkene bağımlı olan potansiyel sistemin Lie nokta dönüşüm gruplarının simetri sınıfları elde edilir. Bu simetriler ne nokta simetrisi, ne de Lie-Bäcklund simetrisidir. Potansiyel simetrilerin mevcudiyeti değişmez çözümlerin oluşumuna neden olur (Khater ve ark. 2002).

(4.3) denkleminin potansiyel simetrilerini bulmak için, örneğin (4.30) daki korunum vektörlerini alıp onları

$$D_x G(x,u,u_{(1)}) - D_t H(x,u,u_{(1)}) = 0 \tag{4.50}$$

yani

$$D_t(thh_x + uh) - D_x(thh_t - hu^2) = 0 \tag{4.51}$$

formunda yazalım. $v(x,t)$ potansiyelinin bir yardımcı fonksiyon olarak göz önüne alınmasıyla

$$v_x = H = thh_x + uh\ ,\ v_t = G = thh_t - hu^2. \tag{4.52}$$

sistemi (4.51) korunum formuyla ilişkilendirilebilir.

$$\begin{aligned} X = {} & \xi^x(x,t,u,h,v)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x,t,u,h,v)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^u(x,t,u,h,v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^h(x,t,u,h,v)\frac{\partial}{\partial h} \\ & + \eta^v(x,t,u,h,v)\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned} \tag{4.53}$$

nokta simetrisinin (4.52) potansiyel sistemi tarafından kabul edildiği farz edilsin. İyi bilinir ki, üreteci karakterize eden homojen lineer sistem

$$X^1(v_x - thh_x - uh) = 0,\quad X^1(v_t - thh_t + h^2) = 0, \tag{4.54}$$

den elde edilip özdeş olarak sağlanmalıdır. Lie nokta simetrilerinin bulunmasında yapıldığı gibi, değişmezlik koşulları ve uzanım formüllerinin kullanılmasıyla, örneğin sonsuz küçüklerin altıncı mertebe kuvvet serisi açılımından

$$\begin{aligned} \xi^x(x,t,u,h,v) &= 2xuh + \frac{2}{5}thu^2 + \frac{2}{5}tu^4 - \frac{6}{5}v, \\ \xi^t(x,t,u,h,v) &= \frac{6}{5}thu + \frac{8}{15}tu^3, \\ \eta^u(x,t,u,h,v) &= \frac{1}{5}hu^2 - \frac{2}{15}u^4, \\ \eta^h(x,t,u,h,v) &= \frac{2}{15}hu^3, \\ \eta^v(x,t,u,h,v) &= xh^2u^2. \end{aligned} \tag{4.55}$$

ya da

$$
\begin{aligned}
\xi^{x}(x,t,u,h,v) &= \frac{7}{5}thu^{2}+\frac{2}{5}tu^{4}-\frac{1}{5}v,\\
\xi^{t}(x,t,u,h,v) &= \frac{1}{5}thu+\frac{8}{15}tu^{3},\\
\eta^{u}(x,t,u,h,v) &= \frac{1}{5}hu^{2}-\frac{2}{15}u^{4},\\
\eta^{h}(x,t,u,h,v) &= \frac{2}{15}hu^{3},\\
\eta^{v}(x,t,u,h,v) &= th^{2}u^{3}.
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

elde edilir. Dikkat edilirse (4.55) ve (4.56) da ξ^{x} v ye bağımlı olduğu için yerel olmayan simetridir.

Potansiyel simetrilerin elde edilmesi göz önüne alınan denklem sistemlerinin çözümlerinin elde edilmesinde oldukça önemlidir. Beşinci bölümde korunumsuz Fokker-Planck denkleminin potansiyel simetrileri aracılığıyla değişmez çözümleri elde edilir.

5. KORUNUMSUZ FOKKER-PLANCK DENKLEMİNİN DEĞİŞMEZ ÇÖZÜMLERİ VE KORUNUM KANUNLARI

Bu bölümde bir parçacığın hız ve konumunun olasılık yoğunluk fonksiyonunun zaman değişimini tasvir eden Kolmogorov denklemi olarak da bilinen bir boyutlu korunumsuz Fokker-Planck (FP) denklemi göz önüne alınmış, korunum kanunları üretilmiştir. Elde edilen korunum kanunlarının bazıları denklemin Lie nokta üreteçleri ile asosiye edilmiştir. Fokker-Planck denklemi oluşum türünde olduğu için Lagrangian formülasyonuna müracaat edilip korunum kanunları oluşturulamaz. Bunun yanında denklemin potansiyel simetrileri oluşturulmuş ve simetrilerden birinin kullanılmasıyla değişmez çözüm elde edilmiştir.

FP denklemi olasılık teorisi (Markov sürecini tasvir etmede FP denklemi ana denklem olarak ifade edilir), lazer fiziği, elektronik gibi farklı alanlarda ortaya çıkan birçok fiziksel olayı modeller. Basitlik olması açısından bir uzay değişkeni hali için, FP denklemi

$$u_t = a(t,x)u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u \tag{5.1}$$

parabolik denklemi biçimindedir. Burada u olasılık yoğunluk fonksiyonu, t ve x sırasıyla zaman ve uzay koordinatları, ve a, b ve c, t ve x in düzgün fonksiyonlarıdır (Gardiner 1985), (Risken 1989). Bu bölümde, (6.1) in korunumsuz yani $a(t,x) = 1,\ b(t,x) = x$ ve $c(t,x) = 0$ hali olan

$$u_{xx} + xu_x - u_t = 0. \tag{5.2}$$

denklemi ele alınacaktır.

İyi bilinir ki, verilen bir sistemin korunum kanunları biliniyorsa ve o korunum kanunları verilen sistemin simetrileri (Lie nokta veya Lie-Bäcklund) ile asosiye olabiliyorsa bu takdirde yeni korunum kanunları elde edilebilir. Bu bilgi ışığı altında yeni korunum kanunlarından başka korunum kanunları oluşturulur. Bunun yanında, korunum kanunlarından biri kullanılarak (5.2) denklemi, korunum formu halinde yazılır ve buradan potansiyel (yerel olmayan) simetriler elde edilir. Potansiyel simetrilerden biri kullanılarak Pucci ve Saccomandi (Pucci ve Saccomandi 1993) tarafından önerilen algoritma yardımıyla değişmez çözüm elde edilir.

5.1. FP denkleminin Lie Grup Analizi

Bir boyutlu, korunumsuz FP denklemi

$$u_{xx} + xu_x - u_t = 0 \tag{5.3}$$

şeklindedir. $(x,\ t,\ u)$ da

$$x^* = x^*(x,t,u,\varepsilon),\ \ t^* = t^*(x,t,u,\varepsilon), u^* = u^*(x,t,u,\varepsilon), \tag{5.4}$$

ile verilen bir parametreli Lie grup sonsuz küçük dönüşümleri göz önüne alınsın. Burada ε grup parametresidir. (5.4) grubunun sonsuz küçük üreteci aşağıdaki vektör formunda ifade edilebilir:

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u} \tag{5.5}$$

Burada ξ, τ, η grup değişkenlerinin sonsuz küçük değişkenleridir (bağımsız ve bağımlı değişkenler). Bu takdirde karşı gelen bir parametreli Lie grup dönüşümleri

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\xi(x,t,u) + O(\varepsilon^2),\ t^* = t + \varepsilon\tau(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon\eta(x,t,u) + O(\varepsilon^2)\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

olur. Lie klasik metodunun (5.3) denklemine uygulanmasıyla yedi parametreli Lie gruplarına neden olan denklem sistemi elde edilir. Bu Lie grubu ile asosiye olan

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = u\frac{\partial}{\partial u},\ X_3 = e^{-t}\frac{\partial}{\partial x},\ X_4 = e^t\frac{\partial}{\partial x} - e^t ux\frac{\partial}{\partial u} \\ X_5 &= -\frac{1}{2}e^{2t}x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}e^{2t}\frac{\partial}{\partial t} + (\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}ux^2)e^{2t}\frac{\partial}{\partial u} \\ X_6 &= \frac{1}{2}e^{-2t}x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}e^{-2t}\frac{\partial}{\partial t},\ X_7 = \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

üreteçleri ile temsil edilebilen Lie cebri elde edilir.

5.2. Korunum Kanunlarının Hesaplanması

(5.3) denkleminin (1.57) formal Lagrangianı

$$L = (u_{xx} + xu_x - u_t)v \tag{5.8}$$

biçimindedir. (5.8) in göz önüne alınmasıyla, (5.3) denkleminin eşlenik denklemi oluşturulabilir. (5.8) denkleminin (1.54) de yerine yazılmasıyla

$$F^* = v_t + v_{xx} - xv_x - v = 0 \tag{5.9}$$

eşlenik denklemi elde edilir. Şimdi (6.3) denkleminin kendi eşlenik özelliği araştırılsın. Şayet (5.9) denkleminde $u = v$ yazılırsa $u_{xx} - xu_x - u + u_t = 0$ denklemi elde edilir. Yani $F \neq F^*$ dır. Dolayısıyla (5.3) denklemi kendi eşlenik değildir. (5.9) denklemi

$$X = \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.10}$$

zaman öteleme simetrisini kabul eder. Bu simetriyi kullanarak, (5.9) eşlenik denkleminin $v = e^{\frac{x^2}{2}}$ değişmez çözümünün elde edilebileceği açıktır.

(5.9) eşlenik denklemi (5.3) denkleminin (5.7) simetrilerini kabul eder. Gerçekten eşlenik denklem v değişkenine uzatılmış olan X operatörünü

$$Y = X + \eta_* \frac{\partial}{\partial v}, \; \eta_* = -[\lambda + D_i(\xi^i)]v \tag{5.11}$$

ile kabul eder. Burada

$$X(F) = \lambda F \tag{5.12}$$

dır. Bu bir örnekle gösterilmeye çalışılsın. Şayet (5.7) den X_4 operatörü ve onun uzanımı

$$X_4 = e^t \frac{\partial}{\partial x} - e^t ux \frac{\partial}{\partial u}, \; X_4^2 = X_4 + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{5.13}$$

göz önüne alınır ve (1.17) uzanım formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= -xe^t u - xe^t u_t - e^t u_x, \\ \zeta_1 &= -e^t u - xe^t u_x, \\ \zeta_2 &= -2e^t u_x - xe^t u_{xx}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

elde edilir. Dolayısıyla X_4 in uzatılmış vektörü

$$X_4^2 = e^t \frac{\partial}{\partial x} - e^t ux \frac{\partial}{\partial u} - e^t(xu + xu_t + u_x)\frac{\partial}{\partial u_t} - e^t(u + xu_x)\frac{\partial}{\partial u_x} - e^t(2u_x + xu_{xx})\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{5.15}$$

biçimindedir. Burada X_4^2, X_4 ün ikinci uzanımı anlamına gelir. Şayet (5.12) değişmezlik koşulu uygulanırsa,

$$X_4^2(F) = -xe^t(u_{xx} + xu_x - u_t) \tag{5.15}$$

elde edilir, burada λ , $-xe^t$. dir. Dolayısıyla, η_* , $xe^t v$ dir. Böylelikle, X_4 operatörünün v operatörüne olan (5.11) uzanımı

$$Y = e^t \frac{\partial}{\partial x} - e^t ux \frac{\partial}{\partial u} + xe^t v \frac{\partial}{\partial v} \tag{5.16}$$

formuna sahiptir. Şimdi denklemin korunum kanunları oluşturulmaya çalışılsın. (5.7) deki simetrilerden örneğin X_2 seçilsin. (1.44) formülünün $\xi^0 = 0,\ \xi^1 = 0,\ \eta = u$ olmak üzere $X_2 = u\frac{\partial}{\partial u}$ simetrisine ve (5.8) formal Lagrangianına uygulanmasıyla, (1.37) korunum kanununun aşağıdaki korunum vektörleri elde edilir:

$$\begin{aligned} C_2^0 &= u\frac{\partial L}{\partial u_t} = -vu, \\ C_2^1 &= [xv - D_x(v)]u + vD_x(u) = xuv - uv_x + vu_x \end{aligned} \tag{5.17}$$

Uyarı 5.1. (5.7) deki her bir Lie nokta simetrisi ve (6.8) Lagrangianı (1.38) değişmezlik koşulunu sağlar.

Şayet (5.9) eşlenik denklemin çözümlerinden biri olan $v = e^{\frac{x^2}{2}}$ (5.17) de yerine yazılırsa

$$C_2^0 = -e^{\frac{x^2}{2}}u,\ C_2^1 = e^{\frac{x^2}{2}}u_x \tag{5.18}$$

yerel korunum vektörleri elde edilir. Uzun hesaplamalar neticesinde (5.3) ün her bir simetrisine karşılık sırasıyla aşağıdaki korunum vektörlerinin karşılık geldiği görülür:

$$\begin{aligned}
&C_1^0 = vu_t,\ \ C_1^1 = -xvu_t + v_x u_t - vu_{xt}, \\
&C_2^0 = -vu\ ,\ \ C_2^1 = xuv - uv_x + vu_x, \\
&C_3^0 = ve^{-t}u_x,\ C_3^1 = e^{-t}(u_x v_x - vu_t), \\
&C_4^0 = ve^t(u_x + xu),\ C_4^1 = -ve^t(u_x v_x + u_t + x^2 u + u) \\
&\quad C_5^0 = -\frac{e^{2t}}{2}v(u_t + xu_x + u + ux^2), \\
&\quad C_5^1 = \frac{e^{2t}}{2}v\left(3u_x + 2xu_t + xu(3 + x^2) + u_{tx}\right) \\
&\qquad -\frac{e^{2t}}{2}v_x\left(u(x^2 + 1) + xu_x + u_t\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_6^0 &= -\frac{e^{-2t}}{2} v(u_t - xu_x), \\
C_6^1 &= \frac{e^{-2t}}{2} v(u_{tx} - u_x) + \frac{e^{-2t}}{2} v_x (xu_x - u_t), \\
C_7^0 &= -v, \quad C_7^1 = xv - v_x .
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

Açıktır ki, şayet $v = e^{\frac{x^2}{2}}$ çözümü C_7^0 ve C_7^1 de kullanılır ve (1.37) korunum kanunu tanımı hatırlanırsa aşikar korunum kanunları elde edilir. Şimdi, (5.18) den yeni korunum kanunları üretilmeye çalışılsın (5.18) deki C_2^0 ve C_2^1

$$
C^0 = -e^{\frac{x^2}{2}} u, \; C^1 = e^{\frac{x^2}{2}} u_x \tag{5.20}
$$

korunum bileşenlerine sahip olan (5.3) denklemi $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ simetrisi ile (2.34) anlamında asosiyedir. (5.20) nin $X_2 = u\frac{\partial}{\partial u}$ üzerindeki etkisinden

$$
C_*^0 = X(C^0) + C^0 D_x(\xi^1) - C^1 D_x(\xi^0) = -e^{\frac{x^2}{2}} u = C^0 \tag{5.21}
$$

ve

$$
C_*^1 = e^{\frac{x^2}{2}} u = C^1 \tag{5.22}
$$

elde edilir. Dolayısıyla X_2 yeni bir korunum kanunu üretmez. Ayrıca, kanonik Lie-Bäcklund operatörü olan $\widetilde{X}_2$ aşağıda yapılan işlemlerde de görüldüğü gibi yeni bir korunum niceliği vermez:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{X}_2 = u\frac{\partial}{\partial u}, \; \widetilde{X}_2(C^0) = -e^{\frac{x^2}{2}} u = C_*^0, \\
X_2(C^1) = \widetilde{C}_*^1 = C_*^1.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

Fakat örneğin X_3 için (2.34) ün kullanılması suretiyle yeni korunum kanunları elde edilebilir. X_3 ün (5.18) üzerindeki etkisi

$$
\begin{aligned}
C_*^0 &= -xe^{-t+\frac{x^2}{2}} u, \\
C_*^1 &= (xu_x - u)e^{-t+\frac{x^2}{2}} .
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

verir. Yeniden şayet kanonik yaklaşım kullanılırsa

$$
\tilde{X}_3 \; C^0 = \tilde{C}_*^0 = C_*^0, \;\; \tilde{X}_3 \; C^1 = \tilde{C}_*^1 = C_*^1 \tag{5.25}
$$

(5.21)-(5.22) elde edilir . Şimdi FP denkleminin

$$C^0 = -e^{\frac{x^2}{2}}u,\ C^1 = e^{\frac{x^2}{2}}u_x \tag{5.26}$$

korunum kanunları ile asosiye olan nokta simetrileri tespit edilsin. (6.20) üzerindeki simetri koşulları

$$X(C^0) + C^0 D_x(\xi^x) - C^1 D_x(\xi^t) = 0,\ X(C^1) + C^1 D_t(\xi^t) - C^0 D_t(\xi^x) = 0 \tag{5.27}$$

şeklindedir. Burada X

$$X^2 = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \zeta_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_x\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{5.28}$$

biçiminde tanımlı olan uzatılmış üreteçtir. (5.27) nin belirleyici denklemlerinin kullanılması ve birinci mertebe türevli tek terimlilerin ayrılması suretiyle X_1, X_4 ve X_5 simetrilerinin (5.26) ile asosiye olduğu görülür. Dolayısıyla C^0 ve C^1 ile asosiye olan üç simetri mevcuttur. Dikkat edilirse $\{X_1, X_4, X_5\}$ (5.3) denkleminin nokta simetri üreteçlerinin Lie cebrinin bir alt cebrini oluşturur.

5.3. Potansiyel Simetriler ve Değişmez Çözümler

(Bluman ve ark 1988) da korunum kanunu olarak yazılabilen her bir diferensiyel denklem için potansiyel simetri kavramı verildi. Burada göz önüne alınan hal için (1.37) korunum kanununun tanımı

$$D_x G(x,u,u_{(1)}) - D_t H(x,u,u_{(1)}) = 0 \tag{5.29}$$

olarak yazılabilir. Burada D_x ve D_t total türev operatörleridir. $w = w(x,t)$ yardımcı potansiyelinin tanımlanmasıyla (5.29) a denk olan

$$w_t = G,\ w_x = H \tag{5.30}$$

potansiyel sistemini oluşturmak mümkündür. (5.30) un klasik Lie nokta simetrilerini hesaplamak için

$$X = \xi(x,t,u,w)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u,w)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u,w)\frac{\partial}{\partial u} + \varphi(x,t,u,w)\frac{\partial}{\partial w} \tag{5.31}$$

ve onun

$$X^1 = X + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial w_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial w_t} \tag{5.32}$$

birinci uzanımı tanımlanır. Burada

$$\eta^x = D_x\eta - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau,\ \eta^t = D_t\eta - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau,$$
$$\varphi^x = D_x\varphi - w_x D_x\xi - w_t D_x\tau\ ,\ \varphi^t = D_t\varphi - w_x D_t\xi - w_t D_t\tau \tag{5.33}$$

dir.

$$X^1 S = 0$$

bağıntısı göz önüne alınırsa (5.30) denklemi tarafından kabul edilen klasik nokta simetrilerin belirleyici denklemlerine ulaşılır. ξ, τ veya η, w ya bağımlı olmak üzere bu şekilde kabul edilen X sonsuz küçük üreteçli simetriye (5.29) denkleminin potansiyel simetrisi denir. Potansiyel simetriler yerel olmayan simetrilerdir. Şimdi aşağıdaki teoremler verilecektir:

Teorem 5.2. $m > 2$ mertebeli (5.30) denkleminin potansiyel simetri kabul etmesi için gerekli koşullar

$$\frac{\partial G}{\partial u_{0,m-1}} = 0\ ve\ H = H(x,t,u,u_x,u_t) \tag{5.34}$$

olmasıdır.

$m = 2\ için\ H = H(x,t,u,u_x,u_t),$ ve $G = G(x,t,u,u_x,u_t)$ olduğundan gösterilir ki potansiyel simetriler yalnızca akının yoğunluğu en çok u nun birinci mertebe türevine bağımlı ise mevcut olabilir.

Teorem 5.3. (5.30) denklemi, yalnızca şayet aşağıdaki formlardan biri olarak farz edilirse

$$w_x = K_1(x,t,u)u_t + K_2(x,t,u)u_x + K_3(x,t,u), \tag{5.35}$$

potansiyel simetrileri kabul eder . Burada $K_1 \neq 0$ dır aksi takdirde

$$w_x = K(x,t,u,u_x) \tag{5.36}$$

olup bu halde $\tau = \tau(t)$ dir.

Şimdi R, son teoremin şartlarını sağlayan H ve G nin seçimiyle korunum formunda yazılabilen bir kısmi diferensiyel denklem olsun. R nin potansiyel simetrilerinin belirlendiği farz edilsin. Şimdi, indirgeme metotları ile tam çözümleri bulmak için bu simetrilerin nasıl kullanıldığı gösterilecektir.

S için bir nokta simetrisi verildiğinde değişmez yüzey koşulları

$$\begin{aligned} \xi(x,t,u,w)u_x + \tau(x,t,u,w)u_t - \eta(x,t,u,w) = 0, \\ \xi(x,t,u,w)w_x + \tau(x,t,u,w)w_t - \phi(x,t,u,w) = 0. \end{aligned} \tag{5.37}$$

biçimindedir. Asosiye karakteristik sistemin çözümleri $\frac{\partial(s_1,s_2,s_3)}{\partial(u,w)}$ in rankı 2 olmak üzere

$$s_1(x,t,u,w) = c_0,\; s_2(x,t,u,w) = c_1,\; s_3(x,t,u,w) = c_2 \tag{5.38}$$

biçimindeki üç bağımsız integral ile verilir.

(5.37) denkleminin çözümleri (5.38) bir parametreli karakteristik eğri ailesi olarak

$$\begin{aligned} u &= U(x,t,z,h_1(z),h_2(z)), \\ w &= V(x,t,z,h_1(z),h_2(z)), \\ &G(x,t,z,h_1(z),h_2(z)) = 0 \end{aligned} \tag{5.39}$$

elde edilir. $(5.39)_3$ z yi kapalı şekilde ($x\,;t$) nin bir fonksiyonu olarak tanımlar. $(5.39)_1$ (5.37) nin iki denklemi arasında w nın yok edilmesiyle elde edilen ikinci mertebe

$$\eta^*(x,t,u,u_1,u_2) = 0 \tag{5.40}$$

denkleminin çözümlerinin bir ailesidir.

S in değişmez çözümleri (5.39) denklemi ile verilir. Burada $h_i(z)$; $i = 1;2$ S de yerine koymakla elde edilen $\overline{\varphi}$ adi sisteminin çözümleridir. R, S nin diferensiyel bir sonucu olup, S in çözümleri R nin F_E çözümlerini verip

$$\tilde{\eta}(x,t,u,u_1,u_2,\ldots,u_{m-1}) = 0 \tag{5.41}$$

diferensiyel bağıntısını gerçekler. $(5.41),(5.37)_1$ ve

$$\xi H + \tau G - \phi = 0 \tag{5.42}$$

arasında w nın yok edilmesiyle elde edilir. R nin çözümlerinin F_E^* ailesi $(5.39)_1$ ve $(5.39)_3$ ün R de doğrudan yazılmasıyla belirlenebilir. Bu suretle z; h_1; h_2 yi ihtiva eden bir bağıntı, m. mertebeye kadar türev, ve x ya da t ile verilen bir parametre elde edilir. Parametrenin her bir değeri için bağıntının özdeş olarak sıfır olması koyulursa bu

$h_i(z)$ üzerinde $\overline{\overline{\varphi}}$ adi diferensiyel sistemine yol açacaktır. F_E^* , $(5.39)_1$ ile verilir. Burada $h_i(z)$ $\overline{\overline{\varphi}}$ in çözümleridir. Bu takdirde F_E^* (5.41) denklemi için bir çözüm ailesidir. Diğer yandan, (5.41) denklemi yanında F_E, de (5.38) denklemini sağlar, bu takdirde F_E , F_E^* içinde kapsanır.

(5.3) denkleminin potansiyel simetrilerini bulmak için ,(5.3) denklemi aşağıdaki korunum formunda yazılır (burada, örneğin, X_2 simetrisine karşılık gelen C_2^0 ve C_2^1 korunum vektörleri göz önüne alınırsa)

$$D_t(-e^{\frac{x^2}{2}}u) - D_x(-e^{\frac{x^2}{2}}u_x) = 0. \tag{5.43}$$

Bir $w(x;t)$ potansiyeli, yardımcı bilinmeyen fonksiyon olarak göz önüne alınırsa,

$$w_t = -u_x e^{\frac{x^2}{2}},\ w_x = -e^{\frac{x^2}{2}}u \tag{5.44}$$

S potansiyel sistemi (5.43) ile asosiye olabilir. R lineer bir kısmi diferensiyel denklem olduğu için ve S potansiyel sistemi lineer kısmi diferensiyel denklem sistemi olduğu için, ξ ve τ u ve w dan bağımsız olup u ve w da lineerdir. Ayrıca, S sistemi

$$w_x = K(x,t,u,u_x)$$

in bir özel halidir (Bu durumda $\tau = \tau(t)$ dir). Klasik algoritma kullanılırsa, (5.44) denkleminin aşağıdaki simetri üreteçleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = e^t ux\frac{\partial}{\partial u} - e^t\frac{\partial}{\partial x},\\
X_3 &= e^{2t}u(x^2+1)\frac{\partial}{\partial u} - e^{2t}x\frac{\partial}{\partial x} - e^{2t}\frac{\partial}{\partial t},\\
X_4 &= -e^{-t}\frac{\partial}{\partial x} + we^{-t-\frac{x^2}{2}}\frac{\partial}{\partial u} - wxe^{-t}\frac{\partial}{\partial w}\\
X_5 &= -xe^{-2t}\frac{\partial}{\partial x} + e^{-4t}\frac{\partial}{\partial t} + 2e^{-2t}(u + wxe^{-x^2})\frac{\partial}{\partial u} + we^{-2t}(-x^2+1)\frac{\partial}{\partial w}.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

(5.3) denklemi için yukarıdaki simetrilerden yalnızca X_4 ve X_5 potansiyel simetridir. X_4 potansiyel simetrisi için potansiyel sistem

$$w_x = -e^{\frac{x^2}{2}}u,\ w_t = -e^{\frac{x^2}{2}}u_x \tag{5.46}$$

olup değişmez yüzey koşulları ile alakalı karakteristik sistem

$$X = \xi(t,x,u,w)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(t,x,u,w)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(t,x,u,w)\frac{\partial}{\partial u} + \varphi(t,x,u,w)\frac{\partial}{\partial w} \tag{5.47}$$

simetrisi için

$$\begin{aligned} &\xi(t,x,u,w)u_x + \tau(t,x,u,w)u_t - \eta(t,x,u,w) = 0, \\ &\xi(t,x,u,w)w_x + \tau(t,x,u,w)w_t - \varphi(t,x,u,w) = 0 \end{aligned} \tag{5.48}$$

olduğu için (5.48) den

$$- e^{-t}u_x - we^{-t-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

$$- e^{-t}w_x + wxe^{-t} = 0 \tag{5.49}$$

veya

$$u_x + we^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

$$- w_x + xw = 0 \tag{5.50}$$

olup bu kısmi diferensiyel denklem sisteminin çözümü aşağıdaki üç integrali kabul eder:

$$c_0 = t\ ,\ c_1 = we^{-\frac{x^2}{2}}, c_2 = u + wxe^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{5.51}$$

Şayet $c_0 = z$ bir parametre olarak farz edilirse, (5.51) de $c_1 = h_1(z)$, ve $c_2 = h_2(z)$ olup buradan

$$u = h_2(z) - xh_1(z),$$

$$w = h_1(z)e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$z = t \tag{5.52}$$

elde edilir. $(5.52)_1$,

$$\eta^* \equiv u_{xx} = 0, \tag{5.53}$$

ikinci mertebe denkleminin bir çözüm ailesi olup (5.50) deki denklemler arasında w nın yok edilmesiyle elde edilir. Şimdi, F_E^* çözümlerini elde etmek için, $(5.52)_1$, (5.3) de yerine konursa

$$h_2^{'} - xh_1^{'} + xh_1 = 0 \tag{5.54}$$

elde edilir. (5.54) denkleminden,

$$h_2' = 0,$$
$$h_1 - h_1' = 0 \qquad (5.55)$$

biçiminde $\bar{\bar{\varphi}}$ sistemi mevcuttur. Buradan

$$h_1(z) = c_3 e^z,$$
$$h_2(z) = c_4 \qquad (5.56)$$

çözümleri elde edilir. Burada c_3, c_4 birer sabittir. Bu takdirde, F_E^*

$$u = c_4 - x c_3 e^t \qquad (5.57)$$

olur. Ayrıca, $(5.52)_1$, birinci mertebe

$$\tilde{\eta} = x u_x - u = 0$$

denkleminin (5.52) ve (5.42) denklemleri arasında w nın yok edilmesiyle elde edilen çözüm ailesidir. F_E çözümlerini bulmak için , $(5.52)_1$ denklemini (5.46) denkleminde yerine yazarak $\bar{\varphi}$

$$h_2(z) = 0,$$
$$h_1'(z) - h_1(z) = 0 \qquad (5.58)$$

elde edilir. Bu sistemin çözümünden

$$h_1(z) = c_5 e^t,$$
$$h_2(z) = 0. \qquad (5.59)$$

elde edilir. Burada c_5 bir sabittir. Bu takdirde F_E çözüm ailesi

$$u = -c_5 x e^t \qquad (5.60)$$

biçimindedir. Açıktır ki, F_E F_E^* içinde kapsanır.

6. YEREL OLMAYAN SIĞ SU DALGA DENKLEMİNİN KORUNUM KANUNLARI

Yerel olmayan sığ su dalga denklemi

$$u_{xxt} + \alpha u u_t - \beta u_x \partial_x^{-1}(u_t) - u_t - u_x = 0 \tag{6.1}$$

biçimindedir. Burada α ve β keyfi sıfır olmayan sabitler olmak üzere $\partial_x^{-1}(u_t) = \int u_t dx$ olup (6.1) denklemi Boussinesq yaklaşımı olarak adlandırılan klasik sığ su teorisinden elde edilir. Literatürde iki özel hal olan $\alpha = 2\beta$ ve $\alpha = \beta$ durumları için (6.1) denklemi üzerinde bazı çalışmalar yapılmıştır. $\alpha = 2\beta$ hali Ablowitz (1974) $\alpha = \beta$ hali Hirota ve Satsuma (1976) tarafından ele alındı**.** Her iki özel hal de ters saçılım teorisi ile çözülebilir.

Yerel olmayan denklemlerin korunum kanunları için literatürde oldukça az çalışma görülür (Benney 1973). Burada denklemin yerel olmayan yapısı önemlidir ve bu yapıdan dolayı belirleyici denklemleri çözmek mümkün değildir. Bununla birlikte bu problemi çözmek için son yıllarda iki önemli araç zuhur etti. Bunlardan biri yerel olmayan denklemlerin simetrilerini bulmak için değişmezlik kriterinin genelleştirilmesi ve yerel olmayan belirleyici denklemlerin çözümü için yeni bir tekniğin mevcudiyetidir. Diğeri ise denklemin her bir simetrisine aşikâr ya da aşikâr olmayan bir korunum kanunu karşılık getiren yerel olmayan korunum teoremidir. Bu iki yaklaşımı birleştirerek (6.1) denkleminin korunum kanunları oluşturulmaya çalışılacaktır.

6.1. Yerel Olmayan Sığ Su Dalga Denkleminin Lie Grup Analizi

Bu kısımda bir integro-diferensiyel operatör ile ifade edilen

$$F \equiv u_{xxt} + \alpha u u_t - u_t - u_x - \beta u_x T(u) = 0, \quad T(u) = \int u_t dx,\ u = u(x,t) \tag{6.2}$$

yerel olmayan sığ su dalga denkleminin genel Lie nokta gruplarını oluşturmaya çalışacağız. (6.2) denklemini değişmez bırakan en genel Lie dönüşüm gruplarını bulmada, kullanılacak olan metotlar birinci bölümde izah edildi. (6.2) lineer olmayan İDD'yi yalnızca bir tek bağımlı değişken yani u ve iki bağımsız değişken olan t, x e bağımlıdır. (6.2) denklemi $(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxt}, T(u))$ uzay değişkenlerinde verilen yüzey olarak göz önüne alınabilir. Şimdi ε grup parametresine bağımlı olan

$$\bar{t} = \bar{t}(t, x, u; \varepsilon);\ \bar{x} = \bar{x}(t, x, u; \varepsilon);\ \bar{u} = \bar{u}(t, x, u; \varepsilon) \tag{6.3}$$

dönüşüm gruplarını göz önüne alalım. (6.3) e karşılık gelen sonsuz küçük dönüşümler

$$\bar{x} = x + \varepsilon\xi_1 + O(\varepsilon^2),\ \bar{t} = t + \varepsilon\xi_2 + O(\varepsilon^2),\ \bar{u} = u + \varepsilon\eta + O(\varepsilon^2) \tag{6.4}$$

şeklindedir. Burada $\xi_k = \xi_k(t, x, u)$ ve $\eta = \eta(t, x, u)$ dır. (6.1) denklemini değişmez bırakan sonsuz küçük üreteç

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \tag{6.5}$$

ile verilir. Burada ξ_k ve η yalnızca bağımlı ve bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olup, bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre türevlerine bağımlı değildir. Bağımlı değişkenin türevlerinin (6.3) dönüşüm gruplarının tanımlarına dayanarak genişlemeleri

$$\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{t}} = u_{xxt} + \varepsilon\eta_{112}^{(3)} + O(\varepsilon^2),\ \bar{u}_{\bar{t}} = u_t + \varepsilon\eta_2^{(1)} + O(\varepsilon^2),\ \bar{u}_{\bar{x}} = u_x + \varepsilon\eta_1^{(1)} + O(\varepsilon^2) \tag{6.6}$$

olarak yazılabilir. (6.6) dan dolayı (6.5) sonsuz küçük üretecinin üçüncü uzanımı dönüşüm gruplarının genel teorisine dayanarak kolay bir şekilde oluşturabilir. $T(u)$ integro-diferensiyel operatörü ile ilişkili sonsuz küçük grup yerel olmayan denklemler için değişmezlik kriterinin tanımının kullanılmasıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{u}) &= \int_{\bar{D}} \bar{u}_{\bar{t}}\, d\bar{x} = \int_{\bar{D}} (u_t + \varepsilon\eta_2^{(1)} + O(\varepsilon^2))(1 + \varepsilon D_x \xi_1) dx \\ &= T(u) + \varepsilon P_T(u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{6.7}$$

Burada

$$P_T(u) = \int (u_t D_x \xi_1 + \eta_2^{(1)}) dx \tag{6.8}$$

dir. Bu takdirde (6.8) integro-diferensiyel operatör ile ilişkili terim ve $T(u)$ yerel olmayan değişkeni içeren (6.5) üretecinin değiştirilmiş türü (1.117) tanımının kullanılmasıyla

$$\overset{T}{\underset{3}{X}} = X + \eta_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{112}^{(3)} \frac{\partial}{\partial u_{xxt}} + P_T(u) \frac{\partial}{\partial (T(u))} \tag{6.9}$$

şeklinde yazılabilir. (6.9) üreteci (6.1) denkleminin F çatısına uygulanırsa değişmezlik kriterinden aşağıdaki belirleyici denklemlere ulaşılır:

$$\overset{T}{\underset{3}{X}} F = \eta_{112}^{(3)} + \alpha \eta u_t + \alpha u \eta_2^{(1)} - \eta_2^{(1)} - \eta_1^{(1)} - \beta \eta_1^{(1)} T(u) - \beta u_x P_T(u). \tag{6.10}$$

(6.10) da yeni Δ_1 ve Δ_2 değişkenlerinin takdim edilmesiyle , $a_1 = a_1(x,t)$ olmak üzere

$$\overset{T}{\underset{3}{X}} F = \Delta_1 + \Delta_2 = a_1(x,t) F \tag{6.11}$$

ifadesine ulaşılır. Bu takdirde (6.11) denkleminin sol tarafı Δ_1 yerel ve Δ_2 yerel olmayan terimlerin

$$\Delta_1 = \eta_{112}^{(3)} + \alpha \eta u_t + \alpha u \eta_2^{(1)} - \eta_2^{(1)} - \eta_1^{(1)}, \ \Delta_2 = -\beta \eta_1^{(1)} T(u) - \beta u_x P_T(u) \tag{6.12}$$

toplamı olarak yazılabilir. Bu (6.1) denklemi için genel belirleyici denklemler olarak göz önüne alınabilir.

(6.1) denkleminin simetri grupları (6.12) belirleyici denkleminin yerel ve yerel olmayan kısımlarının göz önüne alınmasıyla analiz edilecektir. Sistemin yerel kısmı diferensiyel denklemler için klasik Lie grup teorisinin kullanılmasıyla çözülebilir. Bunun için lineer olmayan denklemin Δ_1 yerel kısmı ile ilişkili belirleyici denklem

$$\eta_{112}^{(3)} + \alpha \eta u_t + \alpha u \eta_2^{(1)} - \eta_2^{(1)} - \eta_1^{(1)} = 0 \tag{6.13}$$

olarak yazılır. Şayet (6.13) ifadesi sonsuz küçüklerin uzatılmış bileşenlerinin açık formuna göre ayarlanırsa bu takdirde aşağıdaki sistemi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\alpha\eta - 2\xi_{1_x} + 2u\alpha\xi_{1_x} + \xi_{2_x} + \eta_{xx} - \xi_{2_{xxt}} &= 0, \\
-2\xi_{1_u} + 2u\alpha\xi_{1_u} - \xi_{2_u} + 2\eta_{xuu} - 2\xi_{2_{xtu}} - \xi_{1_{xxu}} &= 0, \\
-2\xi_{1_u} + \eta_{tuu} - 2\xi_{1_{xtu}} &= 0, \\
-\xi_{1_u} &= 0, \\
-\xi_{2_u} + u\alpha\xi_{2_u} - \xi_{2_{xxu}} &= 0, \\
\xi_{2_u} &= 0, \\
\eta_{uu} - \xi_{2_{tu}} - \xi_{1_{xu}} &= 0, \\
\eta_{uuu} - \xi_{2_{tu}} - 2\xi_{1_{xuu}} &= 0, \\
-\eta_t + u\alpha\eta_t - \eta_x + \eta_{xxt} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{1_t} - u\alpha\xi_{1_t} - \xi_{2_t} - \xi_{1_x} + 2\eta_{txu} - \xi_{1_{xxt}} &= 0, \\
\xi_{1_t} &= 0, \\
\eta_{tu} - 2\xi_{1_{xt}} &= 0, \\
\xi_{1_{tu}} &= 0, \\
\xi_{2_x} &= 0, \\
2\eta_{xu} - 2\xi_{2_{xt}} - \xi_{1_{xx}} &= 0, \\
\xi_{2_{xu}} &= 0, \\
\xi_{2_{xx}} &= 0
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Sonuç olarak bu belirleyici denklem sisteminden

$$\xi_1 = \xi_1(x),\ \xi_2 = \xi_2(t)$$

bulunur.

Yerel olmayan denklemi analiz etmek için (6.10) denklemi (6.1) ile verilen orijinal sığ su denklemleriyle beraber göz önüne alınmalı ve çözülmelidir. Bu gösterir ki, (6.1) ve (6.10) denklemlerinin her iki çatısı $(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xxt})$ değişkenlerinin aynı uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmalıdır (Akhiev ve Özer 2005). Böylece beklenebilir ki, Δ_2 nin yerel olmayan terimi bu değişkenler cinsinden ifade edilebilir. P_T yerel olmayan teriminin

$$P_T(u) = b_1(x,t)T(u),\ b_1 = b_1(x,t) \tag{6.15}$$

formunda olduğu farz edilsin. Böylelikle (6.15)

$$P_T(u) = \int (u_t\xi_{1_x} + \eta_t + u_t\eta_u - u_t\xi_t^2)dx = b_1(x,t)\int u_t dx \tag{6.16}$$

formunda yeniden yazılabilir. (6.16) nın varyasyonel ayrılma neticesinde

$$\eta_t = 0,\ \xi_{1_x} + \eta_u - \xi_t^2 = b_1(x,t) \tag{6.17}$$

belirleyici denklem sistemine ulaşılır. Yerel olmayan kısımdan

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= -\beta\eta_1^{(1)}T(u) - \beta u_x P_T(u) = -\beta\eta_1^{(1)}T(u) - \beta u_x b_1(x,t)T(u) \\
&= -\beta(\eta_1^{(1)} + b_1(x,t)u_x)T(u) = 0
\end{aligned} \tag{6.18}$$

ve buradan

$$\eta_1^{(1)} + b_1 u_x = 0 \tag{6.19}$$

elde edilir. (6.19) ‘a karşı gelen belirleyici denklemler

$$\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x^1 + b_1(x,t)u_x = 0,\ \eta_x + (\eta_u - \xi_x^1 + b_1(x,t))u_x = 0$$
$$\eta_x = 0,\ \eta_u - \xi_x^1 + b_1(x,t) = 0. \qquad (6.20)$$

şeklindedir. $\eta_x = 0$ ve $\xi_2 = \xi_2(t)$ değerleri yukarıdaki denklemlerden

$$2\eta_{xu} - 2\xi_{2_{xt}} - \xi_{1_{xx}} = 0$$

de yerine yazılırsa, $-\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2} = 0$ dan $-\frac{\partial\xi_1}{\partial x} = c_1 \Rightarrow \xi_1 = -c_1x + c_2$ elde edilir. Bu değer

$\xi_{1_t} - u\alpha\xi_{1_t} - \xi_{2_t} - \xi_{1_x} + 2\eta_{txu} - \xi_{1_{xxt}} = 0$ de yerine yazılırsa, $\xi_{2_t} + \xi_{1_x} = 0$ dan

$\xi_{2_t} - c_1 = 0 \Rightarrow \xi_2 = c_1t + c_3$ sonucu bulunur.

Bu değerler,

$$\alpha\eta - 2\xi_{1_x} + 2u\alpha\xi_{1_x} + \xi_{2_x} + \eta_{xx} - \xi_{2_{xxt}} = 0 \qquad (6.21)$$

de yerine yazılırsa

$$\eta = \left(2u - \frac{2}{\alpha}\right)c_1 \qquad (6.22)$$

elde edilir. Bu değerler, $\eta_u - \xi_x^1 + b_1(x,t) = 0$ da yerine yazılırsa $b_1(x,t) = -3c_1$ elde edilir. Sonuç olarak,

$c_1 = 1$ diğerleri sıfır ise

$$X_1 = -x\partial_x + t\partial_t + (2u - \tfrac{2}{\alpha})\partial_u \text{ (Ölçekleme simetrisi)} \qquad (6.23)$$

$c_2 = 1$ diğerleri sıfır ise

$$X_2 = \partial_x \text{ (Uzay öteleme simetrisi)} \qquad (6.24)$$

$c_3 = 1$ diğerleri sıfır ise

$$X_3 = \partial_t \quad \text{(Zaman öteleme simetrisi)} \qquad (6.25)$$

simetrisi elde edilir.

6.2. Yerel Olmayan Sığ Su Dalga Denkleminin Korunum Kanunları

Şimdi birinci bölümde verilen yerel olmayan korunum teoremi göz önüne alınsın. (6.1) için eşlenik denklem olan

$$F^*(t,x,u,v,...,v_{txx}) = \frac{\delta\left[(u_{xxt} + \alpha uu_t - u_t - u_x - \beta u_x T(u))v(x,t)\right]}{\delta u} = 0, \qquad (6.26)$$

dan

$$-\alpha uv_t + v_t + v_x + \beta v_x T(u) + \beta vu_t - v_{xxt} = 0,\ v = v(t,x) \tag{6.27}$$

elde edilir. Şimdi (6.21) ve (6.22) eşlenik denklemi bir sistem olarak göz önüne alınsın. Sistem için Lagrangian (1.57) den,

$$L = \left[u_{xxt} + \alpha uu_t - u_t - u_x - \beta u_x T(u)\right] v(x,t) \tag{6.28}$$

biçimindedir. Yani

$$\frac{\delta L}{\delta v} = u_{xxt} + \alpha uu_t - u_t - u_x - \beta u_x T(u),\ \frac{\delta L}{\delta u} = -\alpha uv_t + v_t + v_x + \beta v_x T(u) + \beta vu_t - v_{xxt} = 0$$

(6.29)

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F &= u_{xxt} + \alpha uu_t - u_t - u_x - \beta u_x T(u) = 0 \\ F^* &= -\alpha uv_t + v_t + v_x + \beta v_x T(u) + \beta vu_t - v_{xxt} = 0 \end{aligned} \tag{6.30}$$

denklem sistemi $L = \left[u_{xxt} + \alpha uu_t - u_t - u_x - \beta u_x T(u)\right] v(x,t)$ Lagrangianı altında Euler-Lagrange denklemleri olur.

(6.1) denkleminin (6.23)-(6.25) simetrilerinin (1.38) değişmezlik koşulunu sağladığı gösterilsin. Örneğin X_1 ölçekleme simetri üretecini göz önüne alalım. Bu üretecin üçüncü uzanımı (Lagrangian üçüncü mertebeden olduğu için)

$$X_1^3 = -x\partial_x + t\partial_t + 2(u - \tfrac{1}{\alpha})\partial_u + \zeta_t^u \partial_{u_t} + \zeta_x^u \partial_{u_x} + \zeta_{xx}^u \partial_{u_{xx}} + \zeta_{xxt}^u \partial_{u_{xxt}} + P_T(u)\partial_{T(u)} \tag{6.31}$$

şeklindedir. Burada uzanım katsayıları, (1.17) uzanım formüllerinin kullanılmasıyla

$$\zeta_t^u = u_t,\ \zeta_x^u = 3u_x,\ \zeta_{xx}^u = 4u_{xx},\ \zeta_{xxt}^u = 3u_{xxt} \tag{6.32}$$

elde edilir. Buradan (1.38) değişmezlik koşulu olarak

$$\begin{aligned} X^3(L) + LD_i(\xi^i) &= v\zeta_{xxt}^u + v\zeta_{xxt}^u + 2\alpha u_t(u - \tfrac{1}{\alpha}) + \alpha uv\zeta_t^u - \zeta_t^u - \zeta_x^u - \beta T(u)\zeta_x^u \\ &= 3v(u_{xxt} + \alpha uu_t - u_t - u_x - \beta u_x T(u)) + D_x(-x) + D_t(t) = 0 \end{aligned} \tag{6.33}$$

elde edilir. Yani (1.38) değişmezlik şartı sağlanır.

(6.1) denkleminin (1.37) korunum kanunları oluşturulmaya çalışılsın.

$$X_1 = -x\partial_x + t\partial_t + (2u - \tfrac{2}{\alpha})\partial_u \tag{6.34}$$

üreteci için sonsuz küçükler ve Lie karakteristik fonksiyonları sırasıyla

$$\xi = -x,\ \tau = t,\ \eta = 2(1 - 1/\alpha),\ W^{\alpha} = \eta - \xi u_x - \tau u_t = 2(u - 1/\alpha) + xu_x - tu_t$$

biçimindedir. Bu durumda Teorem 1.5.8 temel korunum teoreminin (1.44) bağıntısı kullanılırsa, akı vektörü,

$$C_1^x = \xi L + W^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} + D_x D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxt}}\right)\right] + D_x(W^\alpha)\left[-D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxt}}\right)\right] + D_x D_t(W^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_{xxt}}$$

den

$$\begin{aligned}C_1^x &= -\alpha x v u u_t + x v u_t - 2vu + \tfrac{2\alpha}{v} + 2uv_{xt} - \tfrac{2}{\alpha} v_{xt} + x u_x v_{xt} + t v u_t - t u_t v_{xt} \\ &+ 3u_x + x u_{xx} - t u_{tx} + 2v u_{xt} - t v u_{ttx} - 2\beta u v T(u) + \tfrac{2}{\alpha}\beta v T(u) \\ &\qquad - x\beta v u_t u_x^2 + t\beta v u_t T(u) + t\beta v u_x u_t^2 \end{aligned} \tag{6.35}$$

şeklindedir. Yoğunluk vektörü ise

$$C_1^t = \tau L + W^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} + D^2{}_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxtt}}\right)\right] + D_x(W)\left[-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxt}}\right)\right] + D^2{}_x(W^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_{xxt}}$$

den

$$\begin{aligned}C_1^t &= -tvu_x - tv\beta u_x T(u) + 2\alpha u^2 v - 4uv + 2uv_{xx} + 2\tfrac{v}{\alpha} - 2\tfrac{v_{xx}}{\alpha} + \alpha x u v u_x - x v u_x + x u_x v_{xx} \\ &\qquad -t u_t v_{xx} - (3u_x + x u_{xx} - t u_{tx}) v_x + 4v u_{xx} + x v u_{xxx}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

biçimindedir. Benzer işlemler aşağıdaki

$$X_3 = -\partial_t,\ \xi^x = 0, \xi^t = 1, \eta = 0,\ W^\alpha = \eta - \xi^x u_x - \xi^t u_t = u_t$$

simetrisi için de yapılırsa

$$C_3^t = 2v u_{txx} + 2\alpha v u u_t - 2v u_t - v u_x + u_t v_{xx} - v_x u_{tx} - \beta v u_x T(u), \tag{6.37}$$

$$C_3^x = -v u_t + u_t v_{xt} - \beta v u_t T(u) - \beta v u_x u_t^2 - v_t u_{xt} + v u_{ttx}. \tag{6.38}$$

korunum kanunları elde edilir. Burada $v(x,t)$ (6.27) eşlenik denkleminin çözümüdür.

7. SONUÇ

Bu doktora tezinde oluşum türü denklemler ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Oluşum türü denklemlerin Lagrangian formülasyonunu kabul etmemesi korunum kanunlarının teşkilinde büyük bir engeldir. Öte yandan ele alınan fiziksel sistemin korunum kanunlarını bilmek o sisteme ait olan bütün özelliklerin çıkarılması için bir anahtardır.

Bilinen en eski yaklaşım korunum kanunu tanımı olan diverjans bağıntısının ele alınan manifold üzerinde sıfır olmasıdır. Bu yaklaşım Lie grup analizine dayanmayıp tamamen hesaplama tekniklerine dönüktür. Her ne kadar son yıllarda bazı yaklaşımların ortaya atılması ve bilgisayar algoritmalarının geliştirilmesi ile yol kat edilmişse de genel bir yaklaşım ortaya atılamadı.

Ibragimov (2007), ele alınan herhangi bir lineer ya da lineer olmayan diferensiyel denklem (ya da sistem) in korunum kanunlarının nasıl bulunabileceğini gösterdi. Geliştirilen bu yeni teori oldukça basit ve anlaşılırdır. Bu yeni teorinin birçok uygulaması yapıldı. Bununla birlikte bu yeni teorinin oluşum türü denklemleri uygulanmasına literatürde rastlanmamaktadır.

Bu anlamda tezin ikinci bölümünde yerel oluşum türü denklemler sınıfından olan BBM denkleminin Lie grup analizi yapılmış ve gösterilmiştir ki, denklemin her bir Lie nokta simetrisine korunum kanunu karşılık gelir. Bunlardan bazıları aşikar (sıfır) korunum vektörü iken, ölçekleme simetrisine karşılık gelen korunum kanunu literatürde ilk kez sunulmuştur. Bunun yanında denklemin korunum kanunlarından hareketle potansiyel sistem ve simetrileri oluşturulmuş ve ilerleyen dalga türünde fiziksel anlama sahip olan bir çözüm elde edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde keyfi fonksiyon ihtiva eden oluşum türü denklemlerin grup sınıflandırması problemi eşdeğerlik dönüşümleri bağlamında ele alındı. Öncelikle Lie'nin klasik teorisi kullanılarak denklemin temel Lie cebri oluşturuldu. Daha sonra eşdeğerlik dönüşüm grubu ve üreteci elde edilerek sınıflandırma problemine karşılık gelen keyfi $f(u)$ fonksiyonlarından birinin eksponensiyel fonksiyon türünde olduğu gösterilmiş ve bu özel hale ilave bir Lie nokta simetrisinin karşılık geldiği vurgulanmıştır. Bundan sonra bu hal için korunum kanunları oluşturulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde yerel olmayan sığ su dalga denklemi göz önüne alınmıştır. Literatürde kısmı diferensiyel denklem (ya da sistem)'ler için bilinen klasik Lie teorisinin aksine yerel olmayan denklemler için genel bir metot yoktur. Üstelik yerel olmayan denklemlerin korunum kanunları için literatürde oldukça az çalışma görülür (Benney 1973). Bunda denklemin yerel olmayan yapısı önemlidir ve bu yapıdan dolayı belirleyici denklemleri çözmek mümkün değildir. Bununla birlikte bu problemi çözmek için son yıllarda iki önemli araç zuhur etti. Bunlardan biri yerel olmayan denklemlerin simetrilerini bulmak için değişmezlik kriterinin genelleştirilmesi ve yerel olmayan belirleyici denklemlerin çözümü için yeni bir tekniğin mevcudiyetidir. Böylelikle denklemin her bir Lie simetrisine bir korunum kanunun karşılık geleceği gösterildi.

Tezin beşinci bölümünde birçok fiziksel olayı modelleyen Fokker-Planck denklemi ele alınmıştır. Denklemin Lie grup analizinden 7 parametreli nokta simetrilerini kabul ettiği görülmüştür. Bu simetrilerin her birine karşılık gelen aşikar olmayan korunum kanunları (X_7 simetrisine karşılık gelen sıfır korunum vektörleri hariç) elde edildi. Bu korunum kanunlarından biri (örneğin X_2 simetrinse karşılık gelen) ile denklemin potansiyel sistemi oluşturuldu ve potansiyel simetrileri elde edildi. Bulunan potansiyel simetrilerden biri aracılığıyla denklemin değişmez çözümü bulundu.

Tezin altıncı bölümünde yerel olmayan sığ su denklemleri göz önüne alındı. Yerel olmayan yapıda olan bu denklemin Lie nokta simetrileri değişmezlik kriterinin genelleştirilmesine dayanan metot ile elde edildi. Denklemin üç parametreli Lie nokta simetrisine sahip olduğu görüldü. Her bir nokta simetrisine karşılık gelen yerel olmayan korunum vektörlerine ulaşıldı.

KAYNAKLAR

NOETHER, E. 1918. Invariante Variations Probleme. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nachrichten. Mathematisch-Physikalische Klasse Heft, 2, 235-257. English transl.: Transport Theory Statist. Phys. 1 (3) (1971) 186-207.

TALUKDAR B. GHOSH H. ve DAS U.. 2005. Inverse Variational Problem and Canonical Structure of Burgers Equations. Journal of Mathematical Physics, 46, 043506.

IBRAGIMOV, N.H. (Ed.). 1994. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. I. CRC, 428 p

STEUDEL, H. 1962. Uber Die Zuordnung Zwischen Invarianzeigenschaften und Erhal-Tungss´latzen'. Zeit Naturforsch, 17A, 129.132.

OLVER, P. J. 1993. Application of Lie Groups to Differential Equations. Springer-Verlag, New York. 514 p.

ANCO, S. C. ve G. W. BLUMAN. 2002. Direct Construction Method for Conservation Laws of Partial Differential Equations, Part II. General Treatment. European Journal of Applied Mathematics, 9, 567-585.

WOLF, T. 2002. A Comparison of Four Approaches to the Calculation of Conservation Laws. European Journal of Applied Mathematics, 13, 129-152.

KARA, A. H. ve F.M. MAHOMED. 2000. Relationship Between Symmetries and Conservation laws Relationship Between Symmetries and Conservation Laws. International Journal of Theoretical Physics, 39, 23-40.

KARA, A.H. ve F.M. MAHOMED. 2006. Noether-Type Symmetries and Conservation Laws Via Partial Lagrangians. Nonlinear Dynamics, 45, 367-383.

IBRAGIMOV, N. H. 2007a. A New Conservation Theorem. J. Math. Anal. Appl., 311-328.

IBRAGIMOV, N.H., E.YAŞAR. 2007b. Non-Local Conservation Laws in Fluid Dynamics. Archives of Alga, 4, 142-150.

YAŞAR, E. 2008. Variational Principles and Conservation Laws to the Burridge-Knopoff Equation. Nonlinear Dynamics, 54, 307-312.

YAŞAR, E., T. OZER. 2009. Conservation Laws for One-Layer Shallow Water Wave Systems. Nonlinear Analysis-B: Real World Applications. (baskıda)

ERICKSONN, M. 2008. Symmetries and Conservation Laws Obtained by Lie Goup Analysis for Certain Physical Systems. M.S. Thesis, Uppsala School of Engineering, p.1-96.

IBRAGIMOV, N. H. 1983. Transformation Groups in Mathematical Physics. Nauka, Moscow. English transl.: Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, Riedel, Dordrecht, 1985. 392 p.

ÖZER, T. 1999. Yerel Olmayan Elastisite Denklemlerinin Simetri Grupları. Doktora Tezi, İstanbul, s.1-109.

IBRAGIMOV, N. H. 1999. Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations. John Wiley Sons, Chichester. 346 p.

LIE, S. 1891 Vorlesungen Ulber Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen. Leipzig.

OVSIANNIKOV, L.V. 1982. Group Analysis of Differential Equations. Academic Press, New York. 416 p.

BLUMAN, G.W. ve S. KUMEI. 1989. Symmetries and Differential Equations. Springer-Verlag, New York. 412 p.

CHAMPAGNE, B., W. HEREMAN, P. WINTERNITZ. 1991. The Computer Calculation of Lie Point Symmetries of Large Systems of Diffrential Equations. Computer physics communications, 66, 319.-340

IBRAGIMOV, N. H. 2006. Integrating Factors, Adjoint Equations and Lagrangians. J. Math. Anal. Appl., 318 (2), 742.757.

MELESHKO, S.V. 1988. Group Properties of Equations of Motions of a Viscoelastic Medium. Model. Mekh. 114.

IBRAGIMOV N.H., V.F. KOVALEV, V.V. PUSTOVALOV. 2002. Symmetries of Integro-Differential Equations: A Survey of Methods Illustrated by the Benney Equations. Nonlinear Dynamics, 28, 135.

AKSENOV A.V., K.L. SAMAROV. 1989. in Modern Group Analysis, Methods and Applications, Elm, Baku

FUSHCHICH, V.I., N.M. SHTELEN, N. I. SENOV. 1993. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BOBYLEV A.V., G.L. CARAFFINI, G.SPIGA. 1996. On Group Invariant Solutions of the Boltzman Equation. J.Math. Phys., 37 (6), 2787.2795.

TARANOV V.B. 1976. Symmetry of the one- dimensional high frequancy motion of collisionless plasma. Zh. Tekh. Fiz. 46, 1271.

ÖZER, T. 2003. Symmetry Group Classification of Two-Dimensional Elastodynamics Problem in Nonlocal Elasticity. Int. J. Engrg. Sci., 41 (18), 2193-2211.

ÖZER T 2005. Symmetry Group Analysis of Benney System and An Application for Shallow Water Equations. Mech. Res. Comm. 32, 241.

ÖZER T. 2007. The Group-Theoretical Analysis of Nonlocal Benney equation, Reports on Mathematical Physics, 60 (1), 13-37.

ÖZER T. 2008. An Application of Symmetry Groups to Nonlocal Continuum Mechanics, Computers & Mathematics with Applications, 55 1923-1942

ROBERTS D. 1985. The General Lıe Group and Similarity Solutions fort the One Dimensional Vlasov-Maxwell Equatios. J. Plasma Phys. 33. 219.

ZAWITOWOSKI, Z.J. 2001. Symmetries of Integro-Differential Equations. Rep. Math. Phys. 48. 269.

AKHIEV, S.S., T. ÖZER. 2003. Proc. National Conference of Mechanics, Turkey 71.

AKHIEV, S.S., T. ÖZER. 2005 Symmetry Groups of the Equations with Nonlocal Structure and an Application for the Collisionless Boltzmann Equation. Int. J. Engng. Sci. 43, 121.

BENJAMIN, T., J. BONA, J. MAHONY. 1972. Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems. Philos. R. Soc. London Ser. A, 272, 47.78.

PEREGRINE, D. 1966. Calculations of the Development of an Undular Bore. J. Fluid Mech.,25, 321.330.

ROLLINS D. 1991. Painlevé Analysis and Lie Group Symmetries of the Regularized Long- Wave Equation, J.Math.Phys.32, 3331

DUZHIN S.V ve T. TSUJISHITA, Conservation Laws of the BBM equation, J.Phys.A: Math.Gen. 1984; 17: 3267-76

CANTWELL, B.J. 2002 Introduction to Symmetry Analysis, Cambridge Texts in Applied Mathematics, p.1-318.

AKHATOV I.S., R.K. GAZIZOV ve N.H. IBRAGIMOV. 1989. Nonlocal Symmetries: Heuristic Approach. Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennie problemy matematiki: Noveishye dostizhenia 34:3–84 [English transl in J Sov Math 1991;55(1):1401–50].

IBRAGIMOV N.H., TORRISSI M, VALENTI A. 1991. Preliminary Group Classification of Equations $v_{tt} = f(x,v_x)\, v_{xx} + g(x,v_x)$. J Math Phys. 32(11):2988–95.

AKYILDIZ Y. 1987. The Shallow Water Equations: Conservation Laws and sympectic Geometry, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 10 557-562

ŞAHİN D.2007. Yerçekimi Akımlarının Lie Grup Analizi Kullanılarak İncelenmesi, Y.L. Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.

ÖZER T., N. ANTAR. 2008. The Similarity Forms and Invariant Solutions of the Two-Layer Shallow-Water Equations, Nonlinear Analysis. Real World Applications 9 791-810.

GRUNDY R.E., J.W. ROTTMAN. 1986. Self-Similar Solutions of the Shallow-Water Equations Representing Gravity Currents with Variable Inflow. Journal of Fluid Mechanics 169 337_351.

WU T.Y., J.E. ZHANG. 1996. On Modelling Nonlinear Long Wave. in: L.P. Cook, V. Roytbhurd, M. Tulin (Eds.), Mathematics is for Solving Problems, SIAM

BLUMAN G.W., G.J. REID, S. KUMEI. 1988. New Classes of Symmetries for Partial Differential Equations. Journal of Mathematical Physics 29. 806-811.

KHATER A.H., M.H.M. MOUSSA, S.F. ABDUL-AZIZ. 2002. Potential Symmetries and Invariant Solutions for the Generalized One-dimensional Fokker-Planck Equation. Physica A 304. 395-408.

GARDINER K.V. 1985. Handbook of Stochastic Methods. Berlin: Springer

RISKEN H. 1989. The Fokker–Planck Equation. Methods of Solution and Applications 2nd edn., Berlin: Springer.

PUCCI, E, G. Saccomandi. Potential Symmetries and Solutions by Reduction of Partial Differential Equations. J.Phys. A, 1993 (26) 681-90.

ABLOWITZ M J., D J KAUP, A C NEWELL ve H SEGUR .1974 . The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems. Stud. AppI. Math. 53 249-315

HIROTA H., ve J SATSUMA. 1976. N-Soliton Solutions of Model Equations for Shallow Water Waves. J, Phys. Soc. Japan 40 611-2

BENNEY D.J. 1973. Some Properties of Long Nonlinear Waves, Studies in Applied Mathematics. L11. 45

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında ve gelişmesinde bana yardımlarını esirgemeyen danışman hocalarım Doç.Dr. Teoman Özer ve Doç.Dr. Sibel Yalçın'a sonsuz şükran borçluyum. 1 yıllık Erasmus değişim programına katılmamı sağlayan Prof.Dr. İsmail Naci Cangül zor günlerimde bana yardım etti. Sonsuz teşekkürler. 1 yıllık İsveç Blekinge Teknoloji Enstitüsündeki çalışmalarımda ondan çok şey öğrendiğim, hayat felsefesi ve çalışma biçiminden çok etkilendiğim asrın büyük matematikçilerinden Prof. Nail Ibragimov'a teşekkür ederim. Bunun yanında bana her zaman desteklerini esirgemeyen aileme şükran borçluyum. Yazım işlemlerinde yardım eden Öğr.Grv.Dr.Atilla Akpınar'a müteşekkirim. Tabi ki, en büyük teşekkürü eşim Elif Yaşar'a borçluyum. Her türlü yardım ve desteğini esirgemeyip benim kahrımı çekti.

ÖZGEÇMİŞ

02.07.1979 yılında Mardin - Savur da doğan Emrullah Yaşar ilkokulu Mithatpaşa ilköğretim okulunda, ortaokul ve liseyi Bursa Erkek Lisesinde tamamladı. 1997 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans eğitimine başladı ve buradan 2001 yılında mezun oldu. 2002 yılının ortalarında uygulamalı matematik bilim dalında Prof. Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN danışmanlığında "Beltrami denklemleri için sınır değer problemleri" isimli yüksek lisans tezine başladı. 2002 yılı başında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne araştırma görevlisi olarak atandı. Yüksek lisans tezini 2004 yılında bitirdikten sonra Doç. Dr. Sibel YALÇIN ve Doç. Dr. Teoman ÖZER danışmanlığında doktoraya başladı. 2006-2007 yılları arasında, Prof. Dr. Nail H. Ibragimov danışmanlığında Erasmus öğrencisi olarak, Blekinge Institute of Technology de bir yıl bulundu. Halen Uludağ Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.