

**HAREKTLİ YÜKLERE MARUZ AYAKLI KİRİŞLERİN  
TİTREŞİMİNİN İNCELENMESİ**

**Emre GEMİCİ**



T.C.  
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HAREKETLİ YÜKLERE MARUZ AYAKLI KİRİŞLERİN TİTREŞİMİNİN  
İNCELENMESİ**

Emre Gemici  
0000-0003-1382-7499

Prof. Dr. Yaşar PALA  
(Danışman)  
0000-0003-0358-1958

YÜKSEK LİSANS  
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2023  
**Her Hakkı Saklıdır**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### HAREKETLİ YÜKLERE MARUZ AYAKLI KİRİŞLERİN TİTREŞİMİNİN İNCELENMESİ

**Emre GEMİCİ**

Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Maline mühendisliği Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Yaşar PALA

Bu çalışmada, bir kirişin hareketli bir yük ve moment altındaki titreşimi incelenmiştir. Destek ayakları içeren basit mesnetli bir kiriş Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre modellenmiştir. Destek ayakları doğrusal bir yay ve doğrusal bir damperden oluştuğu varsayılarak modellenmiştir. Hareketli yük, hareketli moment, yay kuvveti ve damper kuvveti Dirac delta fonksiyonu kullanılarak hareket denkleminde dâhil edilmiştir. Klasik yöntemler ile bu problemin kesin çözümünü elde etmek oldukça uzun ve karmaşıktır. Her bir ayak için kiriş, ayaklar arası parçalara bölünerek ele alınmalıdır. Bu parçaların her biri, sınır şartları destek ayak noktalarında olacak şekilde ayrı koordinat eksenlerinde çözümlenmelidir. Ayak sayısı arttıkça çözüm daha da zorlaşacaktır. Mevcut çalışmaya konu yöntemle ayak sayısından bağımsız olarak, kirişi parçalara ayırmadan tüm kiriş boyunca tek bir koordinat ekseninde çözüm elde etmek mümkündür. Dirac delta fonksiyonu seri açılımlarına dönüştürülerek seri açılımı halinde kesin çözüme elde edilmiştir. Çözüm, basit bir bilgisayar programı yazarak hesaplanabilir. Bu çözümle kirişin farklı ayak sayıları; farklı konumlarındaki ayaklar; farklı hareketli yük, hareketli moment ve eksenel yük gibi çeşitli durumlardaki dinamik davranışı incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Hareketli yük, hareketli moment, basit mesnetli kiriş, destek ayakları

## **ABSTRACT**

MSc Thesis

### **VIBRATION ANALYSIS OF BEAMS WITH INTERMEDIATE SUPPORTS UNDER MOVING LOADS**

**Emre GEMICI**

Bursa Uludag University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mechanical Engineering

**Supervisor:** Prof. Dr. Yasar PALA

In this study, transverse vibration of a beam under moving load and moving moment is investigated. A simply supported beam with intermediate vertical supports modeled according to Euler-Bernoulli beam theory. Supports are modeled as linear spring and linear damper. Force, moment, spring and damper components are expressed using Dirac delta function in equation of motion. Obtaining exact solution for this problem with classical methods are quite lengthy and complicated. Beam must be divided into spans between each support. Each span must be solved separately with different set of coordinates having same boundary conditions on support points. As the number of support increases, solution becomes more complicated. However, the present method can be used to solve the problem for the whole beam length without having to separate into various spans regardless of number of supports. Dirac delta functions are converted to series expansions which allows us to get exact solution in form of series expansion. This solution than can be easily calculated by a computer. Dynamic responses of several cases such as various number of supports; different support points; various moving load, moving moment and axial load combinations are examined.

**Key words:** Moving load, moving moment, beam, intermediate supports

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yol gösteren ve her konuda destek olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Yaşar PALA'ya teőekkürlerimi sunarım.

Çalıőmalarım boyunca bana sabır ve anlayıő gösteren, her zaman bana destek olan sevgili eőim Hilal GEMİCİ'ye teşekkür ederim.

Emre GEMİCİ  
12/01/2023

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	6
3.1 Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi Ve Kabuller.....	6
3.2 Hareket Denklemi.....	8
3.3 Basit Mesnetli Kirişin Serbest Titreşimi.....	11
3.3.1 Sınır şartları.....	13
3.3.2 Başlangıç şartları.....	14
3.4 Eksenel Kuvvete Maruz Kirişin Titreşimi.....	15
3.5 Hareketli Yüklere Maruz Ayaklı Kirişin Titreşimi.....	17
3.5.1 Hareketli yükün seri açılımı.....	18
3.5.2 Hareketli momentin seri açılımı.....	20
3.5.3 Ara ayakların seri açılımı.....	22
3.5.4 Hareket denklemi ve çözümü.....	24
4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	34
4.1 Sayısal Örnekler.....	34
4.1.1 Hareketli yük ve moment altında kirişin zamana bağlı şekilleri.....	35
4.1.2 Farklı büyüklüklerdeki hareketli yüklerin karşılaştırılması.....	38
4.1.3 Farklı büyüklüklerdeki hareketli momentlerin karşılaştırılması.....	41
4.1.4 Farklı hızlardaki hareketli yüklerin karşılaştırılması.....	43
4.1.5 Hareketli ve eksenel yük altındaki kiriş.....	45
4.1.6 Destek ayakları içeren hareketli yük altındaki kiriş.....	46
4.1.7 Çok aralıklı kirişler.....	49
4.2 Sonlu Eleman Analizi ile Karşılaştırma.....	50
4.2.1 Hareketli yük analizi.....	50
4.2.1 Hareketli moment analizi.....	52
5. SONUÇ.....	54
KAYNAKLAR.....	56
EKLER.....	58
EK 1 MATLAB Kodları.....	58
EK 1.1 Diferansiyel denklem özel çözümün sabitlerini bulan program.....	58
EK 1.2 Diferansiyel denklem homojen çözümün sabitlerini bulan program.....	58
EK 1.3 Kirişin zamana bağlı yer değiştirmelerini gösteren program.....	59
EK 1.4 Kirişin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesini gösteren program.....	61

## SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$R$	Kirişin eğrilik yarıçapı
$M$	Kiriş üzerinde etkiyen moment
$E$	Elastisite modülü
$I$	Kirişin alan atalet momenti
$f$	Kiriş üzerinde etkiyen kuvvetler
$u$	Düşey eksen
$x$	Yatay eksen
$L$	Kirişin boyu
$t$	Zaman
$T$	Kiriş elemanı üzerinde etkiyen düşey kuvvet
$\rho$	Kirişin öz kütlesi
$A$	Kirişin kesit alanı
$A_n, B_n$	$t$ 'ye bağlı serbest titreşim çözüm denklemleri sabitleri
$\lambda_n$	Kirişin doğal frekansları
$C_n, S$	$x$ 'e bağlı serbest titreşim çözüm denklemleri sabitleri
$\omega_n$	Kirişin öz değerleri
$P$	Kiriş üzerinde etkiyen eksenel kuvvet
$\theta$	Kiriş elemanı üzerinde etkiyen eksenel kuvvetin açısı
$F_0$	Hareketli yükün büyüklüğü
$M_0$	Hareketli yükün büyüklüğü
$v_0$	Hareketli yükün yataydaki hızı
$v_1$	Hareketli momentin yataydaki hızı
$s_3$	Yay özelliğine sahip ayağın yataydaki konumu
$s_4$	Damper özelliğine sahip ayağın yataydaki konumu
$\delta(x)$	Dirac delta fonksiyonu
$k$	Ayağın yay sabiti
$c$	Ayağın sönümleme katsayısı
$a_n, b_n$	Adi diferansiyel denklem sabitleri
$B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}, B_{4n}$	Özel çözüm denklemleri sabitleri
$r_{1n}, r_{2n}$	Karakteristik denklem kökleri
$\Delta_n$	İkinci derece denklemin diskriminantı
$A_{1n}, A_{2n}$	Pozitif diskriminant için çözüm denklemleri sabitleri
$\hat{A}_{1n}, \hat{A}_{2n}$	Sıfır diskriminant için çözüm denklemleri sabitleri
$\tilde{A}_{1n}, \tilde{A}_{2n}$	Negatif diskriminant için çözüm denklemleri sabitleri
$\alpha_n, \beta_n$	Karmaşık kök sabitleri
$n$	Toplam indisi

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 1.1.	Bir köprü vinç üzerinde hareketli moment oluşturan yapı..... 1
Şekil 3.1.	Kiriş eğriliği ..... 7
Şekil 3.2.	Eğilme altındaki kiriş ..... 8
Şekil 3.3.	Sonsuz küçük bir elemanın serbest cisim diyagramı ..... 9
Şekil 3.4.	Basit mesnetli kirişin şematik gösterimi ..... 11
Şekil 3.5.	Eksenel yük altında sonsuz küçük bir elemanın serbest cisim diyagramı ..... 16
Şekil 3.6.	Hareketli yük ve momente maruz basit mesnetli ayaklı kiriş ..... 17
Şekil 3.7.	Kiriş üzerinde moment oluşturan iki kaçık kuvvet ..... 20
Şekil 4.1.	Hareketli yük altındaki kiriş a) Şematik gösterim b) Zamana bağlı şekilleri, $F_0 = 20.000$ N, $v_0 = 10$ m/s ..... 35
Şekil 4.2.	Hareketli moment altındaki kiriş. a) Şematik gösterim b) Zamana bağlı şekilleri, $M_0 = 40.000$ N.m ve $v_1 = 10$ m/s. .... 36
Şekil 4.3.	Hem hareketli yük hem moment altındaki kiriş a) Şematik gösterim b) Zamana bağlı şekilleri, $F_0 = 20.000$ N, $M_0 =$ $40.000$ N.m , $v_0 = 10$ m/s ve $v_1 = 10$ m/s. .... 37
Şekil 4.4.	Farklı büyüklükteki ve aynı hızdaki hareketli yük altındaki kirişlerin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi. a) $F_0 =$ $20.000$ N ve $v_0 = 10$ m/s b) $F_0 = 2.000$ N ve $v_0 = 10$ m/s c) $F_0 =$ $200$ N ve $v_0 = 10$ m/s ..... 39
Şekil 4.5.	Boyutsuz orta nokta yer değiştirmesi ..... 40
Şekil 4.6.	Farklı büyüklükteki ve aynı hızdaki hareketli moment altındaki kirişlerin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi. a) $M_0 =$ $40.000$ N.m ve $v_1 = 10$ m/s b) $M_0 = 4.000$ N.m ve $v_1 = 10$ m/s c) $M_0 = 400$ N.m ve $v_1 = 10$ m/s ..... 42
Şekil 4.7.	Farklı hızlardaki ve aynı büyüklükteki hareketli yük altındaki kirişlerin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi. a) $v_0 = 1$ m/s ve $F_0 = 20.000$ N b) $v_0 = 5$ m/s ve $F_0 = 20.000$ N c) $v_0 = 20$ m/s ve $F_0 = 20.000$ N ..... 44
Şekil 4.8.	Hareketli ve eksenel yük altındaki kirişin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi, $F_0 = 20.000$ N, $v_0 = 10$ m/s ve $P =$ $40.000$ N ..... 45
Şekil 4.9.	Hareketli yük altındaki tek bir ayak içeren kiriş a) Şematik gösterimi b) Zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi, $F_0 =$ $20.000$ N, $v_0 = 10$ m/s, $k = 50.000$ N/m, $c = 10.000$ N-s/m ve $s_1 =$ $5$ m ..... 46
Şekil 4.10.	Hareketli yük altındaki iki ayak içeren kiriş a) Şematik gösterimi b) Zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi, $F_0 =$ $20.000$ N, $v_0 = 10$ m/s, $k = 50.000$ N/m, $c = 10.000$ N-s/m, $s_1 =$ $3,5$ m, $s_2 = 6,5$ m ..... 47
Şekil 4.11.	Hareketli yük altındaki üç ayak içeren kiriş a) Şematik gösterimi b) Zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi, $F_0 =$ $20.000$ N, $v_0 = 10$ m/s, $k = 50.000$ N/m, $c = 10.000$ N-s/m, $s_1 =$ $2,5$ m, $s_2 = 5$ m ve $s_3 = 7,5$ m ..... 48
Şekil 4.12.	Hareketli yük altındaki dört aralıklı kiriş ..... 49
Şekil 4.13.	Farklı aralıklardaki kirişler için kuvvet altındaki boyutsuz yer



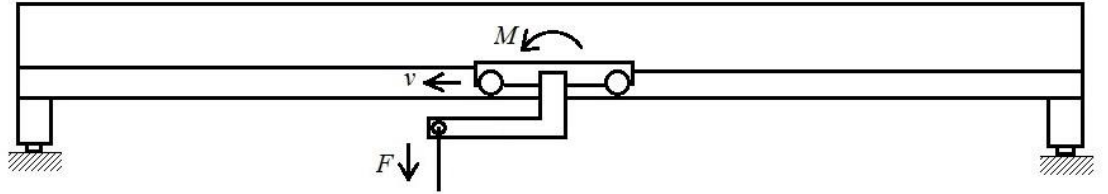
	değiştirme, $v_0 = 17.3 \text{ m/s}$ , $L = 1 \text{ m}$ , $A = 1,146 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ , $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$ , $E = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , $I = 1,045 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ , $k =$ $10^{12}$ , $c = 0$ .....	50
Şekil 4.14.	Ansys süreksiz yapısal (Transient Structural) analiz sistemi.....	51
Şekil 4.15.	0,1 m boyundaki altı yüzlü elemanlar ile örülmüş analiz modeli.	51
Şekil 4.16.	Ansys hareketli kuvvet analizi sonuçları ve mevcut yöntem sonuçları .....	52
Şekil 4.17.	Ansys hareketli moment analizi sonuçları ve mevcut yöntem sonuçları .....	53

## ÇİZELGELER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Çizelge 4.1. Kiriş özellikleri .....	34

## 1. GİRİŞ

Günümüzde birçok alanda hareketli yüklere maruz yapılar kullanılmaktadır. Bu çalışmada hareketli yüklere ve hareketli momentlere maruz basit mesnetli kirişlerin titreşimi incelenecektir. Bir hareketli yükün, yapı üzerinde aynı büyüklükteki statik bir yükten daha fazla yer değiştirme ve gerilmelere neden olduğu bilinmektedir. Bu sebeple yapıların hareketli yüklere karşı davranışının önceden tahmin edilebilmesi önem taşımaktadır. Basit mesnetli kirişler, köprülerin matematiksel olarak modellenmesinde oldukça uygun bir yöntemdir. Çünkü gerçek hayatta da sabit ve kayar mesnetli desteklerin üzerinde asılı bulunan köprü tasarımları mevcuttur. Hareketli bir yük altındaki kiriş modeline üzerinden tren geçen demiryolu köprüleri ve yatay olarak yük taşıyan köprü vinçler (kreyn) örnek olarak gösterilebilir. Hareketli bir moment altındaki kiriş modeline köprü üzerinde fren yapan araç örnek olarak verilebilir. Araçların fren yapması, tekerlerde farklı tepki kuvvetleri oluşturduğu için buldukları zemin üzerinde moment etkisi yaratır. Bir tavan vincinin arabası üzerindeki kaçık bir yük de hareketli moment olarak ele alınabilir (Şekil 1.1).



**Şekil 1.1.** Bir köprü vinç üzerinde hareketli moment oluşturan yapı

Farklı yük ve moment etkisi altında, sistemin verdiği cevaplar irdelenerek farklı büyüklüklerde ve hızlardaki yüklerin etkileri hakkında yorum ve çıkarımlar yapılmıştır.

Çalışmada ayrıca aksenal çekme yükü de hareket denklemlerine katılmıştır. Aksenal yükün de sisteme etkisi incelenmiştir. Aynı anda hareketli yük ve aksenal çekme yüküne ve maruz kirişlere örnek olarak teleferik halatları gösterilebilir.

Köprülerde ara destek ayaklarının da bulunması oldukça yaygın bir durumdur. Çalışmada destek ayakları bulunduran kirişler de incelenmiştir. Farklı sayıda ve konumlardaki

destek ayaklarına sahip sistemin titreşimi incelenmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Destek ayaklarının matematiksel denklemlerde Dirac delta fonksiyonu kullanılarak gösterilmesi çözümde kolaylık sağlamıştır. Bu yöntemle çözüm, kiriş destek ayakları arasında parçalayarak değil kiriş boyunca tek parçada olabildiği için ayak sayısının fazla olması çözümü zorlaştırmamaktadır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Hareketli yüklere maruz kirişler geçmişte birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Geçtiğimiz yüz yılın ortalarından itibaren demir yolu köprülerinin yaygınlaşmasıyla, bu köprülerin hareketli bir yük altındaki titreşimi mühendislerin ilgi alanına girmiştir.

Ayre ve arkadaşları (1950) hareketli bir kuvvete maruz iki aralıklı bir kirişin dinamik cevabını ele almıştır. Bu çalışmada basit mesnetli bir kirişin orta noktasında sabit bir mesnet olduğu kabul edilmiştir. Bu yöntem orta noktadan farklı noktadaki ara mesneti ve birden çok mesnetin olduğu duruma uygulanamamaktadır.

Fryba (1972) hareketli yük problemlerini kitabında kapsamlı olarak ele almıştır. Hareketli yükü Dirac delta fonksiyonu ile ifade etmiştir. İntegral dönüşüm yöntemleriyle, hareketli yüke maruz basit mesnetli kirişlerin hareket denklemini ortaya koymuştur.

Dmitriev (1974), üç aralıklı bir kirişin titreşim problemini ele almıştır. Aralıkların eşit boyda olduğunu ve ara desteklerin sabit mesnet olduğunu kabul etmiştir. Aralıkların ucundaki mesnetleri sınır şartı kabul edip süreklilik denklemini sağlayan formülleri ortaya koyarak çözüm elde etmiştir.

Kameswara (1989) ara elastik destek ayağı içeren iki ucu ankastre kirişleri incelemiştir. Kirişi, destek ayağının iki tarafında iki farklı çözüm bölgesine ayırarak kirişin mod şekil denklemlerini elde etmiştir. Bu yöntemin zor tarafı, destek ayağı sayısının artırılması halinde, çözüm bölgesi sayısının da artacak olmasıdır. Bu durumda çözüm daha karmaşık ve zor bir hale gelecektir.

Lee (1994) birden çok ara nokta sınırları bulunduran hareketli bir yüke maruz kirişin dinamik davranışını incelemiştir. Bu çalışmasında Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanarak birden çok aralıklı kirişin için çözüm elde etmiştir. Ara nokta sınırlarını çok yüksek yay sabitleriyle tanımlamış ve matris formunda hareket denklemlerini formüle etmiştir. Lee bu çalışmasında farklı kuvvetler için boyutsuz yer değiştirme grafiklerinin

aynı olduğunu ve boyutsuz yer değiştirmenin kuvvetten bağımsız olduğunu ortaya koymuştur.

Esmailzadeh ve Ghorashi (1997) dűzgűn olarak kısmi yayılı hareketli kűtlesel yűkler altındaki bir kiriři Timoshenko kiriř teorisine gűre analiz etmiřtir. Hareket denklemlerini elde ederek bunları sonlu farklar yűntemi ile ozműřtir. Numerik örneklerin sonunda Timoshenko kiriřlerinde denkleme katılan dűnel ataletin etkisinin kesme yer deęiřtirmesine kıyasla önemsiz olduğunu ortaya koymuřtur. Ayrıca yayılı yűkűn yayılım alanı geniřledikçe maksimum kiriř yer deęiřtirmesinin azaldığını gűstermiřtir.

Reis ve arkadařları (2008) birçok noktada ara destek ayaęı içeren hareketli yűk altındaki kiriř için Fourier seri açılımla yardımıyla ozűm geliřtirmiřlerdir. Bu yűntem birden çok ve farklı noktalardaki elastik ve sűnűtleme özellikli ayakları içeren kiriř problemini kolayca ozmektedir. Ancak bu yűntem sadece hareketli yűk için ozűm olup kiriř üzerinde hareketli moment ve eksenel çekme kuvveti olduęu durumları kapsamamaktadır.

Uzzal ve arkadařları (2012) hareketli bir yűk ve hareketli bir kűtle altında Pasternak temeli űzerindeki bir kiriřin dinamik davranıřını incelemiřtir. Fourier dűnűřűmű yűntemi ile ana denklemin analitik ozűmlerini elde etmiřtir. Modal analiz ile kısmi diferansiyel denklemleri seri toplamı halinde adi diferansiyel denklem serilerine dűnűřtűrműřtir. Numerik hesaplama ve karřılařtırmaların sonunda hareketli yűk veya kűtlenin hızı arttıa kiriřin yer deęiřtirme miktarının arttığı tespit edilmiřtir.

Senalp ve arkadařları (2010), Pasternak temeli űzerindeki basit mesnetli bir Euler-Bernoulli sonlu kiriřinin dinamik davranıřını ele almıřtır. Galerkin yűntemi ile hareket denklemlerini ozműřlerdir. Farklı sűnűtleme oranları için yapılan numerik karřılařtırmalarda, sűnűtleme oranı arttıa kiriř yer deęiřtirmesinin azaldığını ortaya koymuřlardır.

Bu iki yűntem (Uzzal ve arkadařları, 2012; Senalp ve arkadařları, 2010) yayılı bir sınır řartı olan Pasternak temeli űzerinde ozűm saęlasa da noktasal tanımlı yayılanma veya sűnűtleme etkisini sahip destek ayakları için ozűm saęlamamaktadır.

Zhang ve Shephard (2012), iki ara destek ayağına sahip sonlu bir Euler-Bernoulli kirişinin, yeni bir şekil fonksiyonu düzenlemesiyle dinamik cevabını elde etmişlerdir. Sonlu elemanlar yöntemiyle kıyaslamış ve yöntemlerini doğrulamışlardır. Ancak bu yöntemle ara destek noktasının önceki ve sonraki aralığı geçişinde eşit bir sınır şartı olarak çözüm elde etmişlerdir. Bu çalışmada da önceki yöntemler gibi kirişi, destek ayakları sınır kabul edilerek üç farklı aralıkta bölüdüğü için ayak sayısının çok olduğu durumlarda çözümü zor olacak bir yöntemdir.

Chawda ve Murugan (2020), birleşik hareketli yük, hareketli moment ve hareketli tork altındaki bir konsol kirişin dinamik cevabını incelemiştir. Laplace dönüşümü yöntemiyle problemin çözümünü elde etmişlerdir. Bu yöntem kirişin ayaklı olduğu ve eksenel çekme yüküne maruz kaldığı durumları çözmektedir.

Zhai ve arkadaşları (2022), ara elastik destek ayaklarına sahip kirişlerin titreşimi için kapalı formdaki kesin çözümlerini elde etmişlerdir. Bu yöntem, keyfi konumlardaki çok sayıdaki destek ayağı problemini, kirişi farklı çözüm aralıklarına bölmeden çözmüştür ancak serbest titreşim cevabı elde edildiği için hareketli yük altındaki çok ayaklı kirişlerin titreşimi problemini çözmekte yeterli değildir.

Önceki çalışmalardan görüldüğü üzere araştırmacıların çoğu, birden çok ve keyfi mesafelerde konumlanmış destek ayakları probleminin çözümünü kesin çözüm olarak ortaya koyamamışlardır. Bu çalışma, hareketli bir yüke, hareketli bir momente ve eksenel çekme yüküne maruz çok ayaklı kirişlerin dinamik davranışına kesin çözüm sunmaktadır. Ayrıca ayak sayısının veya konumlarının değişmesi çözümün zorluğunu etkilememektedir. Bu yönüyle de sunulan yöntemin, literatürde ortaya konan önceki yöntemlere göre oldukça pratik olduğu kabul edilebilir.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1 Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi Ve Kabuller

Hareket denklemi elde edilirken Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmıştır. Timoshenko kiriş teorisi gibi daha gelişmiş kiriş teorileri olsa da, Euler-Bernoulli kiriş teorisi kiriş tasarımında iyi bir sonuç almak için genellikle yeterlidir. Başlıca iki kabulden biri, kiriş kesit düzlemi, kiriş tarafsız eksenine her zaman diktir (Erochko, 2020). Eğer kirişte kaydı değer kayma gerilmeleri mevcut değilse bu kabul doğru bir sonuç verecektir. Eğer kiriş çok derin ve kısa ise kesme gerilmesi eğilme gerilmesine kıyasla büyük olacaktır. Bu durumda Timoshenko kiriş teorisi daha doğru sonuçlar verecektir. İkincisi kabul ise kirişin eğilmesinden kaynaklı açı değişimleri ihmal edilebilecek kadar küçüktür. Bunların dışında Euler-Bernoulli dâhil tüm kiriş teorileri için geçerli olan kabuller şunlardır (Han ve diğerleri, 1999):

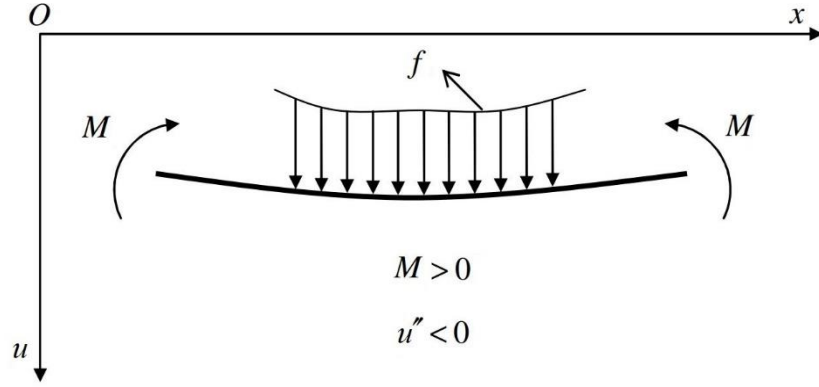
1. Bir boyut (eksenel yön) diğer iki boyuta göre oldukça geniştir.
2. Malzeme lineer elastiktir (Hooke yasasına uygun)
3. Poisson etkisi ihmal edilmiştir.
4. Kesit alanı simetriktir, böylece kirişin nötr ekseni ve ağırlık merkezi ekseni çakışıktır.
5. Nötr eksene dik olan düzlemler, şekil değiştirme sonrasında da dik olarak kalır.
6. Dönüş açısı küçüktür, küçük açı varsayımı uygulanabilir.

Kirişin özellikleriyle ilgili kabuller ise, kirişin düzgün ve homojen olmasıdır. Kiriş, uzunluğu boyunca kesit alanı ve alan atalet momenti sabittir. Kirişin öz kütlesi her noktada aynıdır.

Bir kirişin Şekil 3.1'deki gibi bir kuvvet ve moment altında olduğunu varsayalım. Yatay doğrultudaki yer değiştirmeyi  $x$  ekseni, dikey doğrultudaki yer değiştirmeyi ise  $u$  ekseni olarak kabul edelim. Kirişin eğrilik yarıçapı ile moment arasındaki deneysel bağıntı

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (3.1)$$





**Şekil 3.1.** Kiriş eğriliği

şeklinde verilir. Matematiksel olarak ise  $\rho$  eğrilik yarıçapı ile  $u$  arasındaki ilişki

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{d^2u}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (3.2)$$

bağıntısı ile ifade edilmektedir. Dikey eksen aşağı doğru pozitif olarak kabul edildiği için denklemdaki işaret negatif olacaktır. Buradan yer değiştirme, momente bağlı olarak

$$\frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EI} \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir.  $u'$  terimi, yatay yer değiştirmelerin çok küçük olduğu ve denklemden karesi olarak geçtiği için ihmal edilebilir. Bu durumda moment denklemi

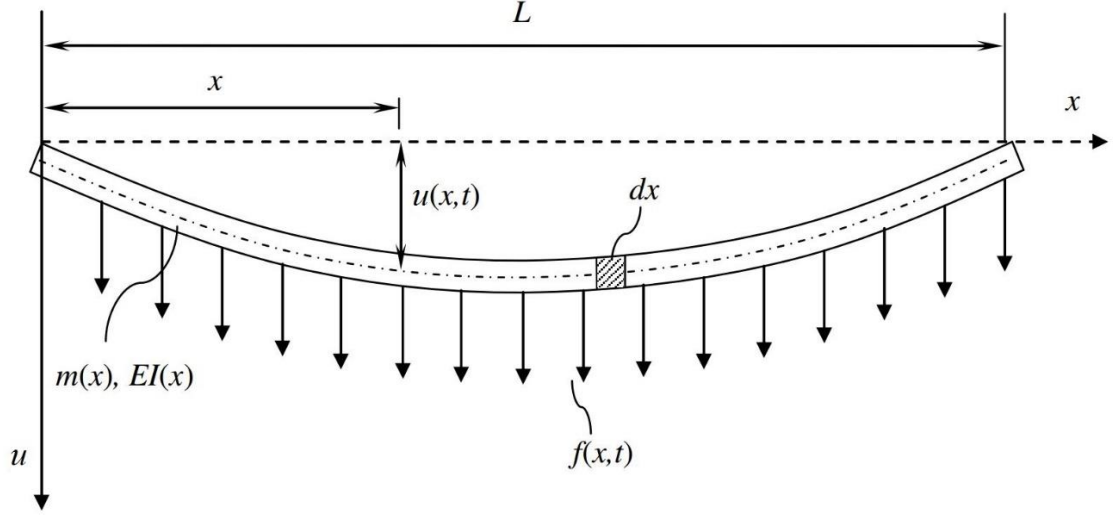
$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3.4)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Moment terimini yalnız bırakırsak

$$M = -EI \frac{d^2u}{dx^2} \quad (3.5)$$

olarak moment denklemini elde etmiş oluruz.

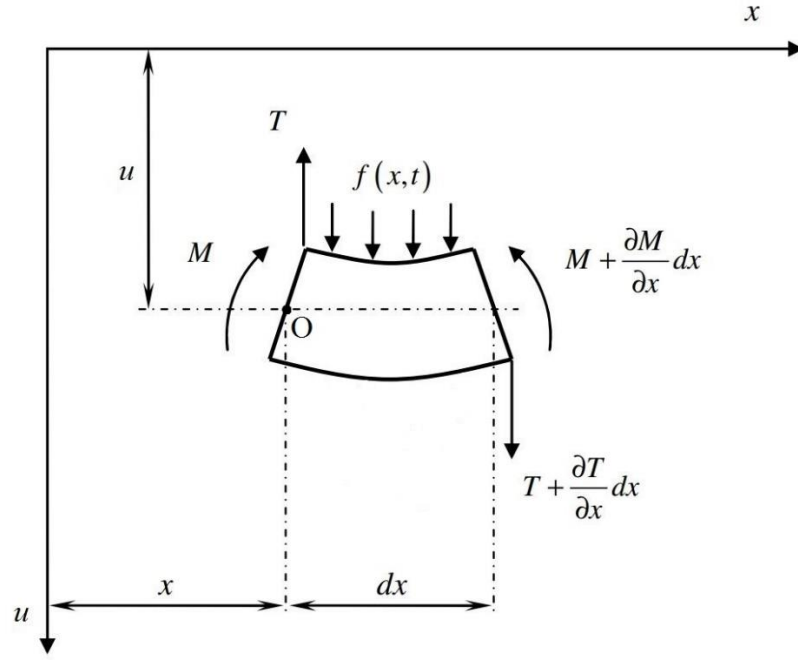
### 3.2 Hareket Denklemi



Şekil 3.2. Eğilme altındaki kiriş

Şekil 3.2’de bir kiriş üzerindeki kuvvet ve moment mevcut iken yer değişirmesi gösterilmektedir. Burada  $f$ ,  $m$  ve  $EI$  sırasıyla kirişin üzerinde etkiyen kuvvet, birim uzunluk başına kirişin kütlesi ve kirişin rijitliğinin  $x$ ’e bağlı fonksiyonlarıdır. Kirişin sönümü ihmal edilmiştir. Kiriş üzerinde  $dx$  boyunda sonsuz küçüklükte bir elemanın kesiti görülmektedir. Bu elemanın üzerindeki kuvvetler Şekil 3.3’te görülmektedir. Bu eleman için  $u$  eksenindeki hareket denklemi şu şekilde yazılır.

$$+\downarrow \sum F = m(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.6)$$



**Şekil 3.3.** Sonsuz küçük bir elemanın serbest cisim diyagramı

Şekildeki kuvvetler Denk. (3.6)'te yerine yazılırsa

$$T(x, t) + \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} dx - T(x, t) + f(x, t) dx = m(x) dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

İfade düzenlenirse

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + f(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. Nötr eksen çizgisinin geçtiği O noktası etrafında atalet kuvvetleri ihmal edilip moment dengesi kurulursa

$$\sum M = 0 \quad (3.9)$$

ve momentler Denk. (3.9)'da yerine yazılırsa

$$M(x, t) - \left[ M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] + \left[ T(x, t) + \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} dx \right] dx + (f(x, t)dx) \frac{dx}{2} = 0 \quad (3.10)$$

$dx$ 'in kendisiyle çarpımı çok küçük olduğundan bu çarpımı içeren terimler ihmal edilebilir. Böylece denklem şu hali alır:

$$-\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + T(x, t) = 0 \quad (3.11)$$

$\partial T(x, t)/\partial x$  ifadesini elde etmek için Denk (3.11)'deki ifadelerin  $x$ 'e göre türevi alınırsa

$$-\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.12)$$

Türetilen  $\partial T(x, t)/\partial x$  ifadesini çekip Denk. (3.8)'de yerine koyduğumuzda kirişin hareket denklemini şu şekilde elde etmiş oluruz

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.13)$$

Denk. (3.5)'teki yer değiştirmeye bağlı moment ifadesi Denk. (3.13) te yerine konulursa

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] + f(x, t) - m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.14)$$

Kiriş boyunca rijitlik  $EI(x)$  ve birim uzunluk başına ağırlık  $m(x)$  sabit olarak alınır ve denklem yeniden düzenlenirse hareket denkleminin alttaki gibi son halini elde etmiş oluruz. Yazım kolaylığı açısından fonksiyon parantezlerini kaldırarak yazarsak

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f \quad (3.15)$$

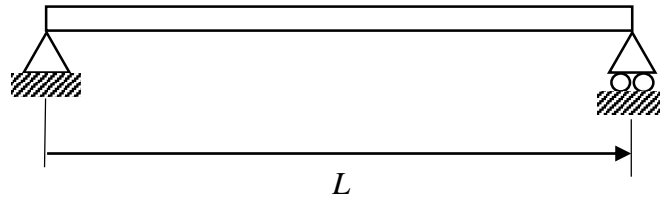
Bu denklem Euler-Bernoulli kiriş teorisine uyan bir kirişin hareket denklemdir. Denklemden birim uzunluk başına düşen ağırlık  $m = \rho A$  olarak yazılmıştır.  $A$  kiriş kesit alanı ve  $\rho$  kirişin öz kütlesidir.  $EI$  rijitlik katsayısı ise kirişin elastisite modülü olan  $E$  ve sayfaya dik olan eksen etrafındaki alan atalet momentidir.

### 3.3 Basit Mesnetli Kirişin Serbest Titreşimi

Basit mesnetli bir kirişin gösterimi Şekil 3.4'te verilmektedir. Denk. (3.15)'te  $f$  kuvvetini denklemden çıkarırsak, kirişin serbest titreşim denklemini elde etmiş oluruz.  $f(x, t) = 0$  olarak alırsak hareket denklemini şu hali alır:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.16)$$

Hareket denklemini  $t$ 'ye göre ikinci dereceden kısmi türev,  $x$ 'e göre dördüncü dereceden kısmi türev içerdiği görülmektedir. Bu nedenle  $u$  için özel bir çözüm elde etmek için iki adet başlangıç şartı ve dört adet sınır şartı gereklidir.



Şekil 3.4. Basit mesnetli kirişin şematik gösterimi

Serbest titreşim çözümü değişkenlerine ayırma yöntemiyle bulunabilir.

$$u(x, t) = X_n(x)T_n(t) \quad (3.17)$$

Denk. (3.17), Denk (3.16)'da yerine konulursa

$$EI \frac{d^4 X_n(x)}{dx^4} T_n(t) + \rho A \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} X_n(x) = 0 \quad (3.18)$$

olarak elde edilir. Yeniden düzenlenerek şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{EI}{X_n(x)} \frac{d^4 X_n(x)}{dx^4} = - \frac{\rho A}{T_n(t)} \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} \quad (3.19)$$

Denklem bir tarafının sadece  $x$ , diğer tarafının sadece  $t$ 'ye bağlı fonksiyonlar olduğu görülmektedir. Çözümün sağlanabilmesi için denklemin her iki tarafı sabit bir sayıya eşit olmalıdır. Bu değeri  $\omega^2$  olarak kabul edilirse ve denklem düzenlenirse

$$\frac{EI}{\rho A X_n(x)} \frac{d^4 X_n(x)}{dx^4} = - \frac{1}{T_n(t)} \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} = \lambda_n^2 \quad (3.20)$$

Böylelikle sadece  $x$  ve sadece  $t$ 'ye bağlı iki diferansiyel denklem halinde yazarak çözüm elde edilebilir.  $\omega_n^4 = \rho A \lambda_n^2 / EI$  olarak tanımlarsak

$$\frac{d^4 X_n(x)}{dx^4} - \omega_n^4 X_n(x) = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} + \lambda_n^2 T_n(t) = 0 \quad (3.22)$$

Denk. (3.22)'in çözümü şu şekilde ifade edilebilir

$$T_n(t) = A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t \quad (3.23)$$

Burada  $\lambda_n$  kirişin doğal frekansları olarak adlandırılır. A ve B başlangıç şartlarından bulunabilen sabitlerdir. Denk. (3.21) çözümünü ise şu şekilde kabul edebiliriz

$$X_n(x) = C_n e^{sx} \quad (3.24)$$

Burada C ve s sabitlerdir.

$$s^4 - \omega_n^4 = 0 \quad (3.25)$$

yardımcı denklemini tanımlanırsa bu denklemin kökleri şu şekilde yazılır.

$$s_{1,2} = \pm\omega_n, \quad s_{3,4} = \pm i\omega_n \quad (3.26)$$

Hareket denkleminin  $x$ 'e bağlı kısmının çözümü ise şu şekilde edilmiş olur

$$X_n(x) = C_{1n}e^{\omega_n x} + C_{2n}e^{-\omega_n x} + C_{3n}e^{i\omega_n x} + C_{4n}e^{-i\omega_n x} \quad (3.27)$$

$C_1, C_2, C_3$  ve  $C_4$  sabitlerdir. Denk. (3.27) şu şekilde de yazılabilir:

$$X_n(x) = C_{1n} \cos(\omega_n x) + C_{2n} \sin(\omega_n x) + C_{3n} \cosh(\omega_n x) + C_{4n} \sinh(\omega_n x) \quad (3.28)$$

### 3.3.1 Sınır şartları

Basit mesnet için sınır şartları şu şekilde verilmektedir:

$$\text{yer de\u0131stirme} = u = 0, \quad \text{e\u011filme momenti} = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.29)$$

Bu şartlar kullanılarak Denk. (3.28)'deki sabitler bulunabilir.

$$X''_n(x) = \omega_n^2 (-C_{1n} \cos \omega_n x - C_{2n} \sin \omega_n x + C_{3n} \cosh \omega_n x + C_{4n} \sinh \omega_n x) \quad (3.30)$$

Denk. (3.29) daki sınır şartlarını sırasıyla  $u(0, t) = u''(0, t) = u(L, t) = u''(L, t) = 0$  olarak uygularsak

$$X_n(0) = C_{1n} \cos \omega_n 0 + C_{2n} \sin \omega_n 0 + C_{3n} \cosh \omega_n 0 + C_{4n} \sinh \omega_n 0 = 0 \quad (3.31a)$$

$$C_{1n} + C_{3n} = 0 \quad (3.31b)$$

$$X''_n(0) = A_n \cos \omega_n x + B_n \sin \omega_n x + C_n \cosh \omega_n x + D_n \sinh \omega_n x = 0 \quad (3.32a)$$

$$-C_{1n} + C_{3n} = 0 \quad (3.32b)$$

Denklemler (3.31b) ve (3.32b)'den  $C_{1n} = C_{3n} = 0$  olarak gelmektedir.

$$X_n(L) = C_{1n} \cos \omega_n L + C_{2n} \sin \omega_n L + C_{3n} \cosh \omega_n L + C_{4n} \sinh \omega_n L = 0 \quad (3.33a)$$

$$C_{2n} \sin \omega_n L + C_{4n} \sinh \omega_n L = 0 \quad (3.33b)$$

$$X''_n(L) = A_n \cos \omega_n L + B_n \sin \omega_n L + C_n \cosh \omega_n L + D_n \sinh \omega_n L = 0 \quad (3.34a)$$

$$\omega_n^2 (-C_{2n} \sin \omega_n L + C_{4n} \sinh \omega_n L) = 0 \quad (3.34b)$$

Denklemler (3.33b) ve (3.34b) kıyaslandığında  $C_{2n} = C_{4n} = 0$  için de eşitliğin sağlandığı görülür ancak bu durumda tüm sabitler sıfır olacağı için çözüm boş olur. Bu halde çözümü sağlayan eşitlikler  $C_{4n} = 0$ ,  $C_{2n} \neq 0$  ve  $\sin \omega_n L = 0$  olarak alınmalıdır. Böylece  $\omega_n$  değeri

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.35)$$

olarak bulunur.  $\omega_n$  değerleri kirişin öz değerleri olarak adlandırılır. Bulunan sonuçlar Denk. (3.28)'de yerine konulduğunda hareket denklemi çözümünün  $x$ 'e bağlı kısmı şu şekilde elde edilir

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.36)$$

Bu ifade de kirişin öz fonksiyonları olarak adlandırılır.

### 3.3.2 Başlangıç şartları

Denklemler (3.23) ve (3.36)'de bulunan  $x$  ve  $t$ 'ye bağlı denklemler Denk. (3.17)'da yerine konulursa



$$u(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) \quad (3.37)$$

olarak genel çözüm elde edilir.  $C_n$  terimini  $A_n$  ve  $B_n$  ile çarparak  $A_n C_n = \bar{A}_n$ ,  $B_n C_n = \bar{B}_n$  olarak ifade edersek hareket denkleminin çözümü

$$u(x, t) = X_n(x)T_n(t) = (\bar{A}_n \cos \lambda_n t + \bar{B}_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.38)$$

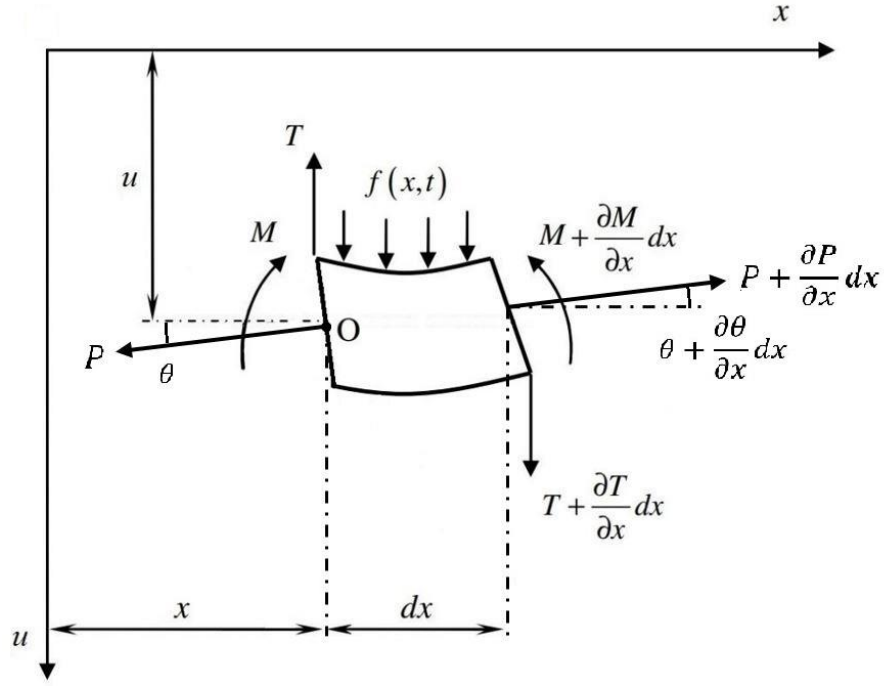
şeklinde son halini alır.  $\bar{A}_n$  ve  $\bar{B}_n$  sabitleri başlangıç şartlarını uygulayarak bulunabilir. Başlangıç şartları genellikle kirişin  $t = 0$  anındaki yer değiştirme ve hızı olarak belirlenir ve şu şekilde gösterilir:

$$u(x, 0) = X(x)T_n(0) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = X(x)\dot{T}_n(0)$$

### 3.4 Eksenel Kuvvete Maruz Kirişin Titreşimi

Eksenel kuvvete maruz kirişlerin titreşim problemi; halatların, gergi tellerinin ve türbin bıçaklarının incelenmesinde uygulanır. Her ne kadar halat titreşim problemi gergin sicim modeliyle incelenebilir olsa da günümüze kadar birçok halat, hafif rüzgârların neden olduğu eğilmeden dolayı zaman içinde yorulmaya bağlı olarak hasar görmüştür. Bu yüzden halatların yorulma dayanımları konusundaki çalışmalarda eğilmeler de dikkate alınmalıdır. Türbin bıçaklarında ise yüksek hızlardaki akışkanların neden olduğu yanal yükler ve merkezkaç kuvvetinin neden olduğu eksenel yüklerin birleşimi, türbin bıçaklarının hasar almasına neden olmaktadır (Rao, 2017).



**Şekil 3.5.** Eksenel yük altında sonsuz küçük bir elemanın serbest cisim diyagramı

$P$  eksenel yüküne maruz kirişin hareket denklemini elde edebilmek için Şekil 3.5'teki gibi sonsuz küçüklükteki bir elemanı ele alalım. Düşey eksendeki hareket denklemini yazılırsa

$$\begin{aligned}
 T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T + f(x,t)dx - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \sin \left( \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) + P \sin \theta \\
 = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

ve O noktasına göre dönele hareket denklemini yazılırsa

$$M + \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} - \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = 0 \tag{3.41}$$

denklemleri elde edilir. Küçük yer değiştirmeler için

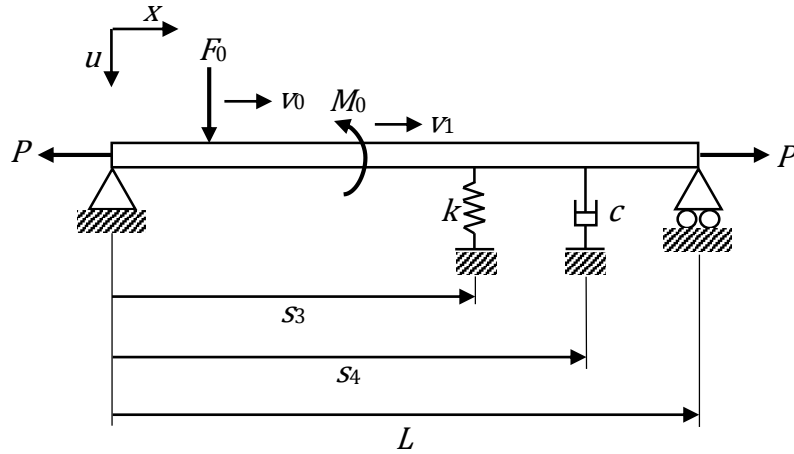
$$\sin \left( \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) \cong \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.42}$$

olarak kabul edilebilir. Denk. (3.15)'te yapıldığı gibi denklemler (3.40), (3.41) ve (3.42) birleştirilirse ve  $dx$ 'in karesini içeren terimler ihmal edilirse, hareket denklemi tek bir denklemle şu şekilde ifade edilir

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f \quad (3.43)$$

### 3.5 Hareketli Yüklere Maruz Ayaklı Kirişin Titreşimi

Hareketli yüklere maruz kirişler, genellikle köprü ve vinç dinamiğinde uygulama alanı bulur. Kiriş üzerinde aynı anda birden çok hareketli yük etki ediyor olabilir. Bu yükler noktasal yük oldukları için Dirac delta fonksiyonu kullanılarak ifade edilecektir. Ayaklar ise genellikle yay ve damper özelliği gösteren elemanlardır. Ayakların da kiriş üzerinde noktasal etki ettiği kabul edilerek Dirac delta fonksiyonu ile gösterileceklerdir. Denklem ifadelerinde kolaylık sağlaması için Şekil 3.6'teki gibi farklı konumdaki iki ayak denkleme katılacaktır ve biri doğrusal yay, diğeri doğrusal damper olarak kabul edilecektir.



**Şekil 3.6** Hareketli yük ve momente maruz basit mesnetli ayaklı kiriş

Hareketli yükler ve ayaklar Fourier seri açılımı şeklinde gösterilecektir. Bu şekilde ayaklar yayılı yük olarak ifade edilecekleri için çözüm bölgesi tüm kiriş boyu olacaktır. Hareketli yüklerin hızları sabit olarak kabul edilecektir.  $F_0$  hareketli yükünün sabit  $v_0$  hızı

ile ve  $M_0$  hareketli momentinin sabit  $v_l$  hızı ile ilerledikleri varsayılacaktır. Doğrusal yay olarak modellenen bir ayak  $s_3$  noktasında ve doğrusal damper olarak modellenen ikinci ayak  $s_4$  noktasında konumlanmış olsun. Sırasıyla  $k$  yay sabiti ve  $c$  sönümleme sabiti olarak gösterilecektir.

Önceki bölümlerde [bkz. Denk. (3.37)] basit mesnetli kirişin öz fonksiyonları  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  olarak bulunmuştu. Öz değerleri ise  $\frac{n\pi}{L} = \omega_n$  olarak tanımlanmıştı. Kirişlerin yük altındaki titreşim çözümünde mod süperpozisyonu ilkesiyle elde dileyebilir. Bu ilke kullanılarak hareket denkleminin çözümü

$$u(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\omega_n x) \quad (3.44)$$

şeklinde ifade edilir.

### 3.5.1 Hareketli yükün seri açılımı

Sabit bir  $v_0$  hızı ile kiriş üzerinde hareket eden sabit büyüklükteki  $F_0$  yükü, Dirac delta fonksiyonu ile şu şekilde ifade edilebilir.

$$f = F_0\delta(x - v_0 t) \quad (3.45)$$

Bu ifade, Fourier sinüs serisi halinde yayılı yük olarak ifade edilirse hareket denklemini çözümünde kullanılabilir. Bir fonksiyonun Fourier seri açılımı şu şekilde tanımlıdır:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.46)$$

Sabitler şu formüllerle bulunur:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (3.47)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.48)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.49)$$

Böylece  $-L$  ve  $L$  aralığında periyodik bir fonksiyon olarak seri açılımı elde edilmiş olur. Tek periyodik fonksiyonların Fourier seri açılımında kosinüs içeren terimler 0 olur. Bu nedenle kuvvet fonksiyonunun tek periyodik fonksiyon olduğu varsayılırsa seri açılımı

$$F_0 \delta(x - v_0 t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.50)$$

şeklinde yazılır ve Denk. (3.49)'dan  $b_n$  sabiti

$$b_n = \frac{2F_0}{L} \int_0^L \delta(x - v_0 t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.51)$$

olarak bulunur. Formülde  $-L$  ve  $L$  olan integrasyon aralığını problemdeki  $0-L$  aralığında uygulamak için ifade 2 ile çarpılmıştır. Dirac delta fonksiyonunun

$$\int_0^L \delta(x - a) f(x) dx = f(a) \quad (3.52)$$

bağıntısına sahip olduğu bilinmektedir (Kreyszig, 2020). Bu bağıntı kullanılarak  $b_n$  sabiti

$$b_n = \frac{2F_0}{L} \sin\left(\frac{n\pi v_0 t}{L}\right) \quad (3.53)$$

olarak bulunur. Bu ifade Denk. (3.50)'de yerine konulursa kuvvet fonksiyonunun Fourier seri açılımı şu şekilde elde edilmiş olur:

$$F_0 \delta(x - v_0 t) = \frac{2F_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi v_0 t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.54)$$

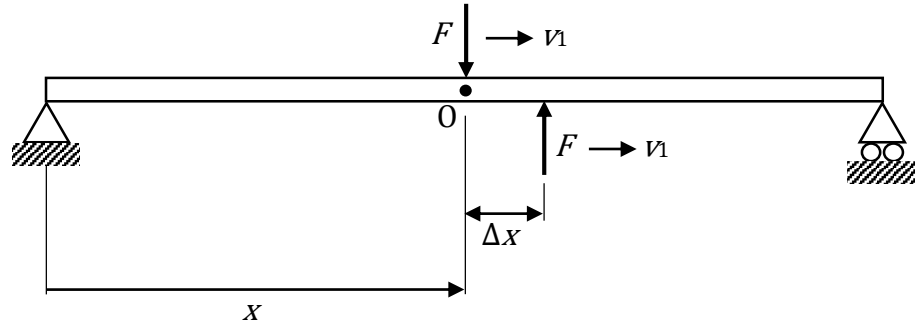
Denk. (3.35)'te  $(n\pi)/L$  ifadesi  $\omega_n$  sembolü ile gösterilmişti. Bu durumda kuvvet fonksiyonunun son hali

$$F_0 \delta(x - v_0 t) = \frac{2F_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_n v_0 t) \sin(\omega_n x) \quad (3.55)$$

şeklini almış olur.

### 3.5.2 Hareketli momentin seri açılımı

Bir kiriş üzerindeki hareketli momentin, Şekil 3.7'deki gibi ters yönde etkiyen sabit büyüklükteki iki kuvvet tarafından oluşturulduğu varsayalım. Kuvvetler  $F$  ile gösterilsin ve kuvvetlerin birbirinden  $\Delta x$  mesafesinde uzakta oldukları varsayalım.



**Şekil 3.7.** Kiriş üzerinde moment oluşturan kuvvet çifti

Orta nokta üzerine etkiyen moment şu şekilde yazılabilir:

$$M_0 = F\Delta x \quad (3.56)$$

Hareket denklemine ise bu hareketli kuvvetler şu şekilde eklenir:

$$f = F\delta(x-v_1t + \Delta x) - F\delta(x - v_1t) \quad (3.57)$$

Denk. (3.56)'dan  $F$  çekilip Denk. (3.57)'da yerine konulursa

$$f = M_0 \frac{[\delta(x-v_1t + \Delta x) - \delta(x - v_1t)]}{\Delta x} \quad (3.58)$$

denklemini elde edilir. Dirac delta fonksiyonunun bir özelliği şu şekildedir

$$\delta'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\delta(x+h) - \delta(x)]}{h} \quad (3.59)$$

Buradan hareketle  $\Delta x \rightarrow 0$  olduğu durumda Denk. (3.58) şu hali alır

$$f = M_0 \delta'(x - v_1t) \quad (3.60)$$

Fourier seri açılımını ise

$$M_0 \delta'(x - v_1t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.61)$$

şeklinde ifade edilir.  $b_n$  sabitini bulmak için

$$b_n = \frac{2M_0}{L} \int_0^L \delta'(x - v_1t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.62)$$

denklemini çözülmelidir. Dirac delta fonksiyonunun şu özelliği bilinmektedir:

$$\int_0^L \delta^{(n)}(x - a) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(a) \quad (3.63)$$

Bu bağıntıyı kullanarak  $b_n$  sabiti

$$b_n = -\frac{2M_0}{L} \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi v_1 t}{L}\right) \quad (3.64)$$

olarak bulunur. Sabit, Denk. (3.46)'da yerine konulursa hareketli momentin seri açılımı şu şekilde elde edilmiş olur:

$$M_0 \delta'(x - v_0 t) = -\frac{2M_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \cos(\omega_n v_1 t) \sin(\omega_n x) \quad (3.65)$$

### 3.5.3 Yay ve damper kuvvetlerinin seri açılımı

Ara destek ayakları, ayaklı köprü modellerinde kendine uygulama alanı bulur. Ayaklar genellikle yay ve damperden oluşan elemanlar olarak modellenir. Bu çalışmada da ayakların doğrusal bir yay ve doğrusal bir damperden oluştuğu kabul edilmiştir. Ayakların hareket denkleminin seri açılımı yani yayılı yük olarak eklenmesi, birçok ayağa sahip olsa da kirişin çözüm bölgesini parçalamadan, kiriş boyunca tek çözüm bölgesinde kolayca çözümünü mümkün kılmaktadır. Ancak hareket denklemlerinin kısa ve basit görünmesi için denklemlere biri sadece yay, diğeri sadece damper davranışı gösteren iki farklı noktada ayak ilave edilecektir (bkz. Şekil 3.6).

Yay kuvvetinin Dirac delta fonksiyonu ile gösterimi

$$f_k = ku\delta(x - s_3) \quad (3.66)$$

şeklindedir. Denk (3.44)'te verilen  $u = T_n(t)\sin(\omega_n x)$  çözüm ifadesi Denk. (3.66)'de yerine konulursa yay kuvvetinin gösterimi

$$f_k = kT_n(t)\sin(\omega_n x)\delta(x - s_3) \quad (3.67)$$

halini alır. Seri açılımı ise



$$kT_n(t)\sin(\omega_n x)\delta(x - s_3) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.68)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda  $b_n$  sabiti

$$b_n = \frac{2k}{L} \int_0^L T_n(t)\sin(\omega_n x)\delta(x - s_3) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.69)$$

denklemleriyle ifade edilir. Buradan katsayılar

$$b_n = \frac{2k}{L} T_n(t)\sin(\omega_n s_3) \sin\left(\frac{n\pi s_3}{L}\right) = \frac{2k}{L} T_n(t)\sin^2(\omega_n s_3) \quad (3.70)$$

olarak hesaplanır. Böylece yay kuvvetinin seri açılımı

$$kT_n(t)\sin(\omega_n x)\delta(x - s_3) = \frac{2k}{L} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin^2(\omega_n s_3) \sin(\omega_n x) \quad (3.71)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde damper kuvvetinin Dirac delta fonksiyonu ile gösterimi

$$f_c = c \frac{\partial u}{\partial t} \delta(x - s_3) = c\dot{T}_n(t)\delta(x - s_4) \quad (3.72)$$

şeklinindedir. Denk (3.44)'te verilen çözüm ifadesi Denk. (3.72)' de yerine konulursa damper kuvvetinin gösterimi

$$f_c = c\dot{T}_n(t)\sin(\omega_n x)\delta(x - s_4) \quad (3.73)$$

halini alır. Seri açılımı ise

$$\dot{T}_n(t)\sin(\omega_n x)\delta(x - s_4) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.74)$$

şeklinde ifade edilir ve  $b_n$  sabiti

$$b_n = \frac{2c}{L} \int_0^L \dot{T}_n(t)\sin(\omega_n x)\delta(x - s_4) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.75)$$

formülüyle elde edilir. Buradan

$$b_n = \frac{2c}{L} \dot{T}_n(t)\sin(\omega_n s_4) \sin\left(\frac{n\pi s_4}{L}\right) = \frac{2c}{L} \dot{T}_n(t)\sin^2(\omega_n s_4) \quad (3.76)$$

olarak bulunur. Böylece damper kuvvetinin seri açılımı

$$kT_n(t)\sin(\omega_n x)\delta(x - s_3) = \frac{2c}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(t)\sin^2(\omega_n s_4) \sin(\omega_n x) \quad (3.77)$$

olarak elde edilir.

### 3.5.4 Hareket denklemi ve çözümü

Hareketli bir yüke, hareketli bir momente ve eksenel yüke maruz basit mesnetli ayaklı kirişin (bkz. Şekil. 3.6) hareket denklemi, önceki bölümlerde elde edilen hareket denklemleri (bkz. Denk. (3.43)) kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ = F_0 \delta(x - v_0 t) + M_0 \delta'(x - v_1 t) - ku \delta(x - s_3) - c \frac{\partial u}{\partial t} \delta(x - s_4) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Denk. (3.44) 'te verilen genel çözüm ifadesini ve önceki bölümlerde hesaplanan yük seri açılımları Denk. (3.78)' de yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& EI \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^4 T_n(t) \sin(\omega_n x) + P \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 T_n(t) \sin(\omega_n x) \\
& + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t) \sin(\omega_n x) \\
& = \frac{2F_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_n v_0 t) \sin(\omega_n x) - \frac{2M_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \cos(\omega_n v_1 t) \sin(\omega_n x) \\
& - \frac{2k}{L} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin^2(\omega_n s_3) \sin(\omega_n x) - \frac{2c}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(t) \sin^2(\omega_n s_4) \sin(\omega_n x)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

ifadesi elde edilir. Denklemin her iki tarafındaki  $\sin(\omega_n x)$  teriminin sadeleştirilebildiği görülebilir. Her bir  $n$  için eşitliğin sağlanması gerektiğinden ve ifadelerde kolaylık olması bakımından toplam işaretlerini de kaldırırsak Denk (3.79)

$$\begin{aligned}
& EI \omega_n^4 T_n(t) + P \omega_n^2 T_n(t) + \rho A \ddot{T}_n(t) \\
& = \frac{2F_0}{L} \sin(\omega_n v_0 t) + \frac{2M_0}{L} \omega_n \cos(\omega_n v_1 t) - \frac{2k}{L} T_n(t) \sin^2(\omega_n s_3) \\
& - \frac{2c}{L} \dot{T}_n(t) \sin^2(\omega_n s_4)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

halini alır. Denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \rho A \ddot{T}_n(t) + \frac{2c}{L} \sin^2(\omega_n s_4) \dot{T}_n(t) + \left[ EI \omega_n^4 + P \omega_n^2 + \frac{2k}{L} \sin^2(\omega_n s_3) \right] T_n(t) \\
& = \frac{2F_0}{L} \sin(\omega_n v_0 t) - \frac{2M_0}{L} \omega_n \cos(\omega_n v_1 t)
\end{aligned} \tag{3.81}$$

şeklinde bulunur. Denklem (3.81) daha basit haliyle

$$\ddot{T}_n(t) + a_n \dot{T}_n(t) + b_n T_n(t) = \frac{2F_0}{L} \sin(\omega_n v_0 t) - \frac{2M_0}{L} \omega_n \cos(\omega_n v_1 t) \tag{3.82}$$

$$a_n = \frac{2c}{\rho AL} \sin^2(\omega_n s_4) \tag{3.83}$$

$$b_n = \frac{1}{\rho A} \left[ EI\omega_n^4 + P\omega_n^2 + \frac{2k}{L} \sin^2(\omega_n s_3) \right] \quad (3.84)$$

şeklinde ifade edilebilir. Görüldüğü üzere kısmi türev içeren çözüm denklemi, adi diferansiyel denklem halini aldı. Denk. (3.82) gibi özel kısım içeren diferansiyel denklemlerin çözümü homojen ve özel çözümlerinin toplamı olarak ifade edilir (Kreyszig, 2020).

$$T_n(t) = T_{n_h}(t) + T_{n_0}(t) \quad (3.85)$$

Hareket denkleminde  $t$ 'ye bağlı kısmı ifade ederken kat sayıların hesaplanabilmesi için başlangıç şartlarının uygulanması gerektiği daha önce belirtilmişti. İkinci derece bir diferansiyel denklem söz konusu olduğu için iki başlangıç şartına ihtiyaç vardır. Kirişin  $t = 0$  anında yani hareketli yükün etki etmeye başladığı ilk anda hareketsiz olduğu ve hızının sıfır olduğu kabul edilirse başlangıç şartları

$$u(x, 0) = X(x)T_n(0) = 0 \rightarrow T_n(0) = 0 \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = X(x)\dot{T}_n(0) = 0 \rightarrow \dot{T}_n(0) = 0$$

Özel kısımda bir sinüs ve bir kosinüs terimi bulunduğu için özel çözümü

$$\begin{aligned} T_{n_0}(t) \\ = B_{1_n} \sin(\omega_n \nu_0 t) + B_{2_n} \cos(\omega_n \nu_1 t) + B_{3_n} \sin(\omega_n \nu_1 t) + B_{4_n} \cos(\omega_n \nu_0 t) \end{aligned} \quad (3.87)$$

olarak varsayalım. Bu ifade Denk. (3.82)'de her bir terim için yerine konursa

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{n_0}(t) = & -B_{1_n} \omega_n^2 \nu_0^2 \sin(\omega_n \nu_0 t) \\ & - B_{2_n} \omega_n^2 \nu_0^2 \cos(\omega_n \nu_0 t) - B_{3_n} \omega_n^2 \nu_1^2 \sin(\omega_n \nu_1 t) - B_{4_n} \omega_n^2 \nu_1^2 \cos(\omega_n \nu_1 t) \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned}
a_n \dot{T}_{n\ddot{o}}(t) &= a_n B_{1_n} \omega_n v_0 \cos(\omega_n v_0 t) - a_n B_{2_n} \omega_n v_0 \sin(\omega_n v_0 t) \\
&+ a_n B_{3_n} \omega_n v_1 \cos(\omega_n v_1 t) - a_n B_{4_n} \omega_n v_1 \sin(\omega_n v_1 t)
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
b_n T_{n\ddot{o}}(t) &= b_n B_{1_n} \sin(\omega_n v_0 t) + b_n B_{2_n} \cos(\omega_n v_1 t) + b_n B_{3_n} \sin(\omega_n v_1 t) \\
&+ b_n B_{4_n} \cos(\omega_n v_0 t)
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Aynı olan sinüs ve kosinüs terimlerinin sabitleri Denk. (3.82)'deki eşitliğin sağ tarafındaki aynı sinüs ve kosinüs terimlerinin sabitleri ile eşleştirilirse

$$-B_{1_n} \omega_n^2 v_0^2 - a_n B_{2_n} \omega_n v_0 + b_n B_{1_n} = \frac{2F_0}{\rho AL} \tag{3.91}$$

$$-B_{2_n} \omega_n^2 v_0^2 + a_n B_{1_n} \omega_n v_0 + b_n B_{2_n} = 0 \tag{3.92}$$

$$-B_{3_n} \omega_n^2 v_1^2 - a_n B_{4_n} \omega_n v_1 + b_n B_{3_n} = 0 \tag{3.93}$$

$$-B_{4_n} \omega_n^2 v_1^2 + a_n B_{3_n} \omega_n v_1 + b_n B_{4_n} = -\frac{2M_0 \omega_n}{\rho AL} \tag{3.94}$$

olarak bulunur. Denklemler (3.91), (3.92), (3.93) ve (3.94) sırasıyla  $\sin(\omega_n v_0 t)$ ,  $\cos(\omega_n v_1 t)$ ,  $\sin(\omega_n v_1 t)$  ve  $\cos(\omega_n v_0 t)$  terimlerinin sabitlerinin eşitlenmiş halidir. Bu dört bilinmeyenli 4 lineer denklem sistemi çözüldüğünde  $B_{1_n}$ ,  $B_{2_n}$ ,  $B_{3_n}$  ve  $B_{4_n}$  sabitleri sırasıyla şu şekilde bulunur:

$$B_{1_n} = \frac{2F_0(-\omega_n^2 v_0^2 + b_n)}{\rho AL(a_n^2 \omega_n^2 v_0^2 + b_n^2 - 2b_n \omega_n^2 v_0^2 + \omega_n^4 v_0^4)} \tag{3.95}$$

$$B_{2_n} = -\frac{2F_0 a_n \omega_n v_0}{\rho AL(a_n^2 \omega_n^2 v_0^2 + b_n^2 - 2b_n \omega_n^2 v_0^2 + \omega_n^4 v_0^4)} \tag{3.96}$$

$$B_{3_n} = -\frac{2M_0 a_n \omega_n^2 v_1}{\rho AL(a_n^2 \omega_n^2 v_1^2 + b_n^2 - 2b_n \omega_n^2 v_1^2 + \omega_n^4 v_1^4)} \tag{3.97}$$

$$B_{4n} = -\frac{2M_0\omega_n(-\omega_n^2v_1^2 + b_n)}{\rho AL(a_n^2\omega_n^2v_1^2 + b_n^2 - 2b_n\omega_n^2v_1^2 + \omega_n^4v_1^4)} \quad (3.98)$$

Böylece denklemin özel kısmı çözülmüş olur.

Homojen kısmın çözümü ikinci derece adi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemiyle aynıdır. Homojen kısım

$$\ddot{T}_n(t) + a_n\dot{T}_n(t) + b_nT_n(t) = 0 \quad (3.99)$$

olarak ifade edilebilir. Çözüm  $T_n(t) = e^{r_n t}$  olarak kabul edilerek Denk. (3.99)'da yerine konulursa

$$e^{r_n t}(r_n^2 + a_n r_n + b_n) = 0 \quad (3.100)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için parantez içindeki kısım 0'a eşit olmalıdır. Aynı zamanda bu kısım karakteristik denklem olarak adlandırılır. Karakteristik denklemin kökleri  $r_{1n}$  ve  $r_{2n}$  olarak gösterilsin. Bu kökler

$$r_{1n}, r_{2n} = \frac{-a_n \pm \sqrt{a_n^2 - 4b_n}}{2} = \frac{-a_n \pm \sqrt{\Delta_n}}{2} \quad (3.101)$$

formülüyle hesaplanır.  $\sqrt{a_n^2 - 4b_n} = \sqrt{\Delta_n}$  ifadesinde  $\Delta_n$ 'nin pozitif, sıfır veya negatif olması durumuna göre üç farklı çözüm ifadesi vardır:

a) Eğer  $\Delta_n > 0$  ise, iki farklı reel  $r_{1n}$  ve  $r_{2n}$  kökü vardır. Bu durumda çözüm

$$T_{nh}(t) = A_{1n}e^{r_{1n}t} + A_{2n}e^{r_{2n}t} \quad (3.102)$$

olarak verilir.  $A_n$  sabitleri başlangıç şartlarından hesaplanacaktır.  $T_n(t)$  ifadesinin tam hali yazılırsa

$$\begin{aligned} T_n(t) = & A_{1n}e^{r_{1n}t} + A_{2n}e^{r_{2n}t} + B_{1n}\sin(\omega_n\nu_0t) + B_{2n}\cos(\omega_n\nu_0t) \\ & + B_{3n}\sin(\omega_n\nu_1t) + B_{4n}\cos(\omega_n\nu_1t) \end{aligned} \quad (3.103)$$

denklemleri elde edilir. Denk (3.103)'ün birinci mertebeye türevi ise

$$\begin{aligned} \dot{T}_n(t) = & A_{1n}r_{1n}e^{r_{1n}t} + A_{2n}r_{2n}e^{r_{2n}t} + B_{1n}\omega_n\nu_0\cos(\omega_n\nu_0t) \\ & - B_{2n}\omega_n\nu_0\sin(\omega_n\nu_0t) + B_{3n}\omega_n\nu_1\cos(\omega_n\nu_1t) - B_{4n}\omega_n\nu_1\sin(\omega_n\nu_1t) \end{aligned} \quad (3.104)$$

şeklinde dir. Başlangıç şartları  $T_n(0) = \dot{T}_n(0) = 0$ , Denklemler (3.103) ve (3.104)'te uygulanırsa

$$T_n(0) = A_{1n} + A_{2n} + B_{2n} + B_{4n} = 0 \quad (3.105)$$

$$\dot{T}_n(0) = A_{1n}r_{1n} + A_{2n}r_{2n} + B_{1n}\omega_n\nu_0 + B_{3n}\omega_n\nu_1 = 0 \quad (3.106)$$

denklemleri elde edilir. İki bilinmeyenli iki denklemden sabitler şu şekilde bulunur

$$A_{1n} = \frac{(B_{2n} + B_{4n})r_{2n} - B_{1n}\omega_n\nu_0 - B_{3n}\omega_n\nu_1}{r_{1n} - r_{2n}} \quad (3.107)$$

$$A_{2n} = -\frac{(B_{2n} + B_{4n})r_{1n} - B_{1n}\omega_n\nu_0 - B_{3n}\omega_n\nu_1}{r_{1n} - r_{2n}} \quad (3.108)$$

b) Eğer  $\Delta_n = 0$  ise, denklemin tek bir  $r_{1n}$  kökü vardır. Bu durumda çözüm

$$T_{n_n}(t) = \hat{A}_{1n} t e^{r_{1n}t} + \hat{A}_{2n} e^{r_{1n}t} \quad (3.109)$$

olarak verilir. Diğer çözümlerin sabitleriyle karışmaması için bu çözümde sabitler  $\hat{A}$  sembolü ile gösterilmiştir. Bu ifadeyi kullanarak  $T_n(t)$  ifadesi

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \hat{A}_{1n} t e^{r_{1n}t} + \hat{A}_{2n} e^{r_{1n}t} + B_{1n} \sin(\omega_n \nu_0 t) + B_{2n} \cos(\omega_n \nu_0 t) \\ &+ B_{3n} \sin(\omega_n \nu_1 t) + B_{4n} \cos(\omega_n \nu_1 t) \end{aligned} \quad (3.110)$$

şeklinde yazılır. Birinci türevi ise

$$\begin{aligned} \dot{T}_n(t) &= \hat{A}_{1n} e^{r_{1n}t} + \hat{A}_{1n} r_{1n} t e^{r_{1n}t} + \hat{A}_{2n} r_{1n} e^{r_{1n}t} + B_{1n} \omega_n \nu_0 \cos(\omega_n \nu_0 t) \\ &- B_{2n} \omega_n \nu_0 \sin(\omega_n \nu_0 t) + B_{3n} \omega_n \nu_1 \cos(\omega_n \nu_1 t) - B_{4n} \omega_n \nu_1 \sin(\omega_n \nu_1 t) \end{aligned} \quad (3.111)$$

halini alır. Başlangıç şartlarını uygulayarak

$$T_n(0) = \hat{A}_{2n} + B_{2n} + B_{4n} = 0 \quad (3.112)$$

$$\dot{T}_n(0) = \hat{A}_{1n} + \hat{A}_{2n} r_{1n} + B_{1n} \omega_n \nu_0 + B_{3n} \omega_n \nu_1 = 0 \quad (3.113)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden de sabitler şu şekilde bulunmuş olur:

$$\hat{A}_{1n} = (B_{2n} + B_{4n})r_1 - B_{1n} \omega_n \nu_0 - B_{3n} \omega_n \nu_1 \quad (3.114)$$

$$\hat{A}_{2n} = -B_{2n} - B_{4n} \quad (3.115)$$



c) Eğer  $\Delta_n < 0$  ise, denklemin iki karmaşık kökü vardır. Bu kökler

$$\begin{aligned} r_{1n} &= \alpha_n + \beta_n i \\ r_{2n} &= \alpha_n - \beta_n i \end{aligned} \quad (3.116)$$

olarak verilir. Bu ifadede sabitler

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{-a_n}{2} \\ \beta_n &= \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} \end{aligned} \quad (3.117)$$

bağıntısıyla elde edilir. Denklemin çözümü ise

$$T_{nh}(t) = \tilde{A}_{1n} e^{\alpha_n t} \cos \beta_n t + \tilde{A}_{2n} e^{\alpha_n t} \sin \beta_n t \quad (3.118)$$

şeklinde verilir. Böylece  $T_n(t)$ 'nin tam ifadesi şu şekilde elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \tilde{A}_{1n} \alpha_n e^{\alpha_n t} \cos \beta_n t - \tilde{A}_{1n} e^{\alpha_n t} \beta_n \sin \beta_n t + \tilde{A}_{2n} \alpha e^{\alpha_n t} \sin \beta_n t \\ &+ \tilde{A}_{2n} e^{\alpha_n t} \beta_n \cos \beta_n t + B_{1n} \omega_n \nu_0 \cos(\omega_n \nu_0 t) - B_{2n} \omega_n \nu_0 \sin(\omega_n \nu_0 t) \\ &+ B_{3n} \omega_n \nu_1 \cos(\omega_n \nu_1 t) - B_{4n} \omega_n \nu_1 \sin(\omega_n \nu_1 t) \end{aligned} \quad (3.119)$$

Birinci derece türevi ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \dot{T}_n(t) &= \tilde{A}_{1n} \alpha_n e^{\alpha_n t} \cos \beta_n t - \tilde{A}_{1n} e^{\alpha_n t} \beta_n \sin \beta_n t + \tilde{A}_{2n} \alpha e^{\alpha_n t} \sin \beta_n t \\ &+ \tilde{A}_{2n} e^{\alpha_n t} \beta_n \cos \beta_n t + B_{1n} \omega_n \nu_0 \cos(\omega_n \nu_0 t) - B_{2n} \omega_n \nu_0 \sin(\omega_n \nu_0 t) \\ &+ B_{3n} \omega_n \nu_1 \cos(\omega_n \nu_1 t) - B_{4n} \omega_n \nu_1 \sin(\omega_n \nu_1 t) \end{aligned} \quad (3.120)$$

Sabitleri bulabilmek için başlangıç şartları Denklemler (3.119) ve (3.120)'de yerine konursa

$$T_n(0) = \tilde{A}_{1n} + B_{2n} + B_{4n} = 0 \quad (3.121)$$

$$\dot{T}_n(0) = \tilde{A}_1\alpha + \tilde{A}_2\beta_n + B_{1n}\omega_n\nu_0 t + B_3\omega_n\nu_1 = 0 \quad (3.122)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler çözülerek sabitler şu şekilde bulunur:

$$\tilde{A}_{1n} = -B_{2n} - B_{4n} \quad (3.123)$$

$$\tilde{A}_{2n} = \frac{(B_{2n} + B_{4n})\alpha_n - B_{1n}\omega_n\nu_0 - B_{3n}\omega_n\nu_1}{\beta_n} \quad (3.124)$$

Böylece genel çözümün  $t$ 'ye bağlı kısmı olan  $T_n(t)$  tamamıyla elde edilmiş olur. Böylece hareket denkleminin genel çözümü olan  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\omega_n x)$  de tamamen bulunmuş olur. Bu yolla hareket denklemi için analitik çözüm elde edilmiş olur. Birkaç terim toplamı kabul edilebilir doğrulukta sonuçlar almak için yeterlidir. Bilgisayar programıyla ilk birkaç terim toplamı kolaylıkla bulunabilir. Bu yöntemle kesin çözüm elde edilmesinin yanı sıra birden fazla ayağın denkleme katılması da oldukça basittir ve çözüme herhangi bir ilave zorluk getirmez. Denklemler (3.83) ve (3.84)'e tekrar göz atılırsa, bu denklemlere fazladan ayak ilave etmenin basit toplama işlemi ile ifade edilebileceği görülür. Böylelikle  $a_n$  sabiti şu şekilde yazılabilir:

$$a_n = \frac{2}{\rho AL} [c_1 \sin^2(\omega_n s_{c_1}) + c_2 \sin^2(\omega_n s_{c_2}) + c_3 \sin^2(\omega_n s_{c_3}) + \dots] \quad (3.125)$$

Burada  $c_1, c_2, c_3, \dots$  damper özelliği içeren ayakların sönümlenme katsayısı ve  $s_{c_1}, s_{c_2}, s_{c_3}, \dots$  ayakların bulunduğu konumlardır. Benzer şekilde  $b_n$  sabiti

$$b_n = \frac{1}{\rho A} \left[ EI\omega_n^4 + P\omega_n^2 + \frac{2k_1}{L} \sin^2(\omega_n s_{k_1}) + \frac{2k_2}{L} \sin^2(\omega_n s_{k_2}) + \frac{2k_3}{L} \sin^2(\omega_n s_{k_3}) + \dots \right] \quad (3.126)$$

şeklinde yazılabilir. Burada da  $k_1, k_2, k_3, \dots$  yay özelliği içeren ayakların yay sabiti ve  $s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}, \dots$  ayakların bulunduğu konumlardır.

## 4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Önceki bölümde bu çalışmanın konusu olan kiriş problemi için hareket denklemi elde edildi ve analitik çözüm yolu anlatıldı. İlave destek ayaklarının çözüme basitçe eklenebileceği ve çözüme herhangi bir zorluk getirmeyeceği gösterildi. Bu bölümde, önceki bölümde elde edilen çözüm kullanılarak sayısal örnekler gösterilecektir. Bu örnekler farklı kuvvet değerlerinin etkisi, farklı hareketli yük hızlarının etkisi, eksenel kuvvetin etkisi ve farklı ayak sayılarının dinamik cevaba etkileri gibi karşılaştırmalar şeklinde olacaktır. Ayrıca hareketli yük altındaki kirişin Ansys paket programı kullanılarak sonlu eleman analizi yapılmıştır. Aynı şekilde hareketli moment için de sonlu eleman analizi yapılmıştır. Bulgular ve karşılaştırmalar ilgili alt bölümde verilmiştir.

### 4.1 Sayısal Örnekler

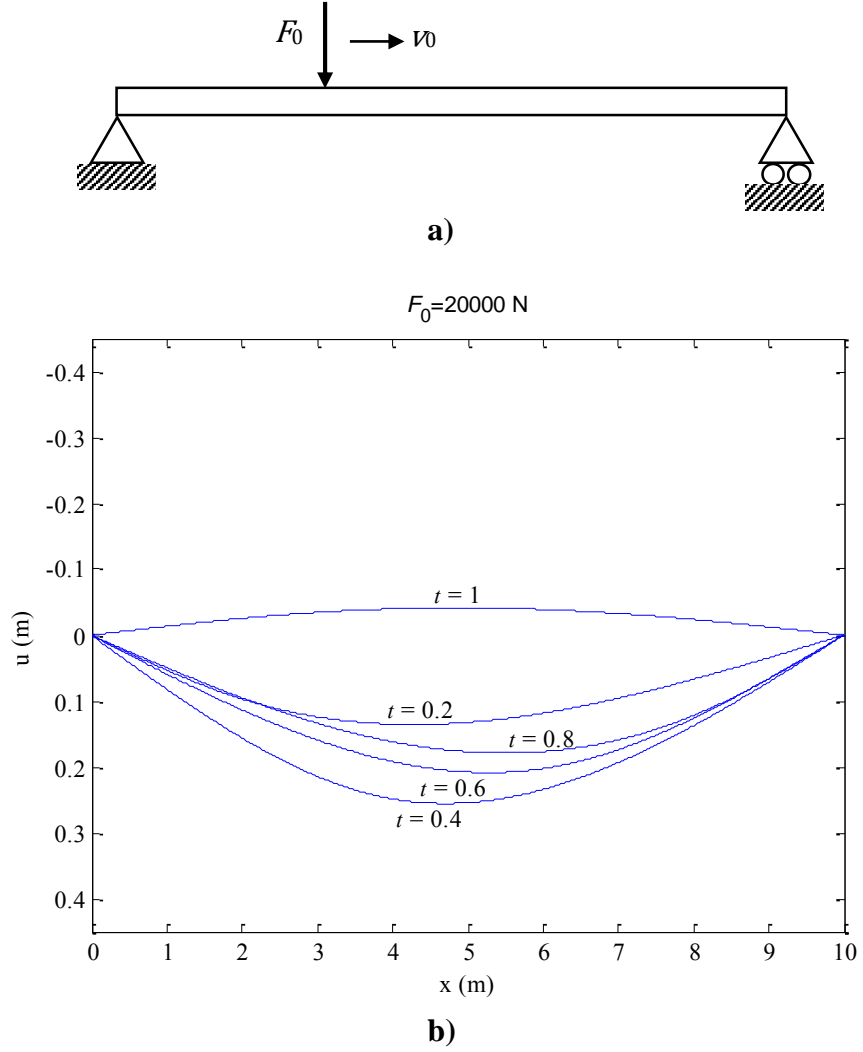
Sayısal örneklerde kullanılacak olan kirişin özellikleri Tablo 4.1’de verilmiştir. Kirişin Hooke yasasına uyan, elastik, öz kütlesi her yerinde aynı, izotrop özelliklerde olduğunun kabul edildiğini tekrar hatırlayalım. Geometrik olarak da kiriş boyunca düzgün, eşit kesit alanı ve alan atalet momentine sahip olduğu kabul edilmektedir.

**Çizelge 4.1.** Kiriş özellikleri

Özellik	Sembol	Değer	Birim
Kirişin genişliği		0,1	m
Kirişin yüksekliği		0,1	m
Kirişin uzunluğu	$L$	10	m
Kesit alanı	$A$	0.01	m <sup>2</sup>
Alan atalet momentini	$I$	8.33E-6	m <sup>4</sup>
Yoğunluk	$\rho$	7800	kg/m <sup>3</sup>
Elastisite modülü	$E$	2.1E+11	N/m <sup>2</sup>

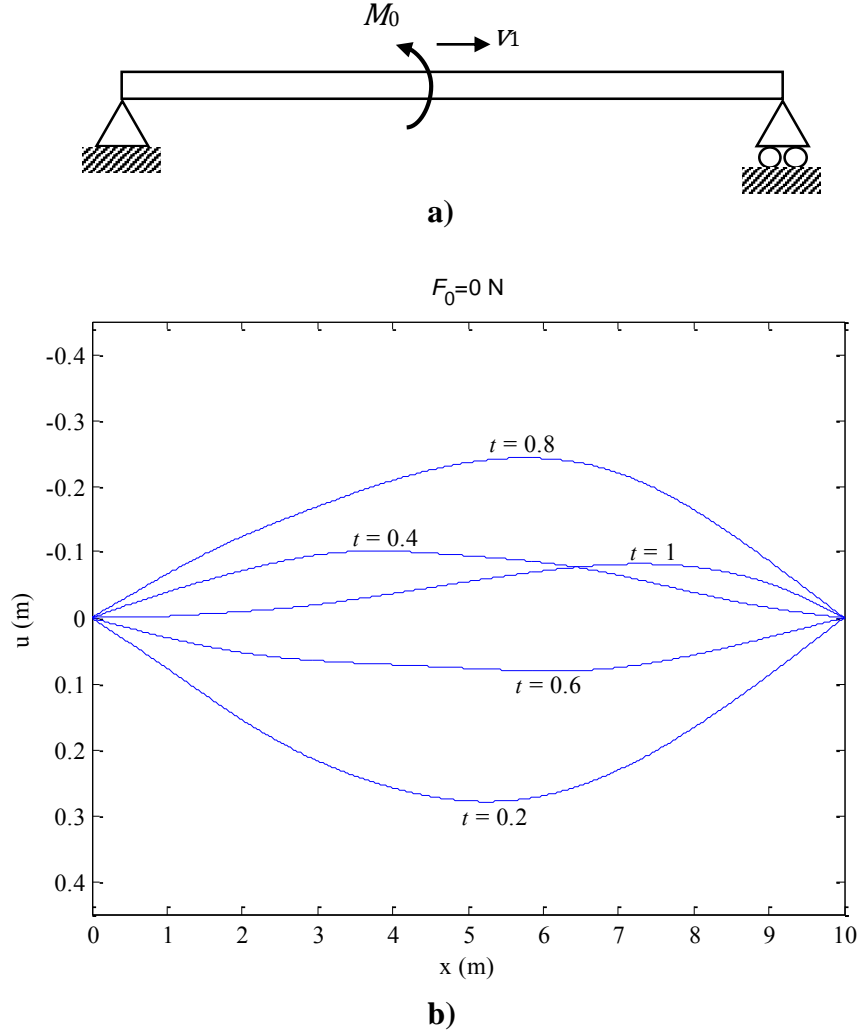
#### 4.1.1 Hareketli yük ve moment altında kirişin zamana bağlı şekilleri

Şekil 4.1'deki gibi yalnız hareketli bir yük altında basit mesnetli kirişin zamana bağlı şekilleri gösterilmiştir.  $F_0 = 20000$  N ve  $v_0 = 10$  m/s olarak alınmıştır.  $n = 20$  terim toplamı hesaplanmıştır.



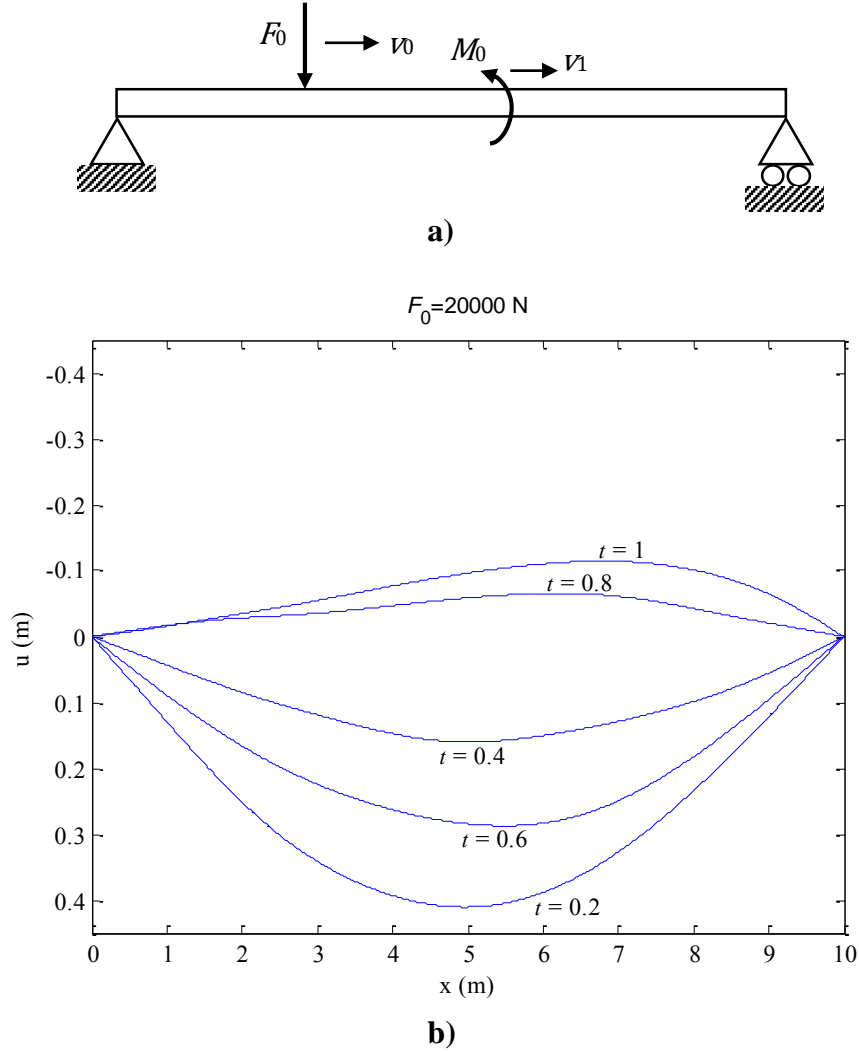
**Şekil 4.1.** Hareketli yük altındaki kiriş **a)** Şematik gösterim **b)** Zamana bağlı şekilleri,  $F_0 = 20.000$  N,  $v_0 = 10$  m/s

Şekil 4.2'deki gibi yalnız hareketli moment altında basit mesnetli kirişin zamana bağlı şekilleri gösterilmiştir.  $n = 20$  terim toplamı hesaplanmıştır.



**Şekil 4.2.** Hareketli moment altındaki kiriş. **a)** Şematik gösterim **b)** Zamana bağlı şekilleri,  $M_0 = 40.000$  N.m ve  $v_1 = 10$  m/s

Hem hareketli yük hem moment altındaki kirişin de zamana bağlı şekilleri Şekil 4.3'te gösterilmiştir.



**Şekil 4.3.** Hem hareketli yük hem moment altındaki kiriş **a)** Şematik gösterim **b)** Zamana bağlı şekilleri,  $F_0= 20.000 \text{ N}$ ,  $M_0= 40.000 \text{ N.m}$ ,  $v_0= 10 \text{ m/s}$  ve  $v_1= 10 \text{ m/s}$

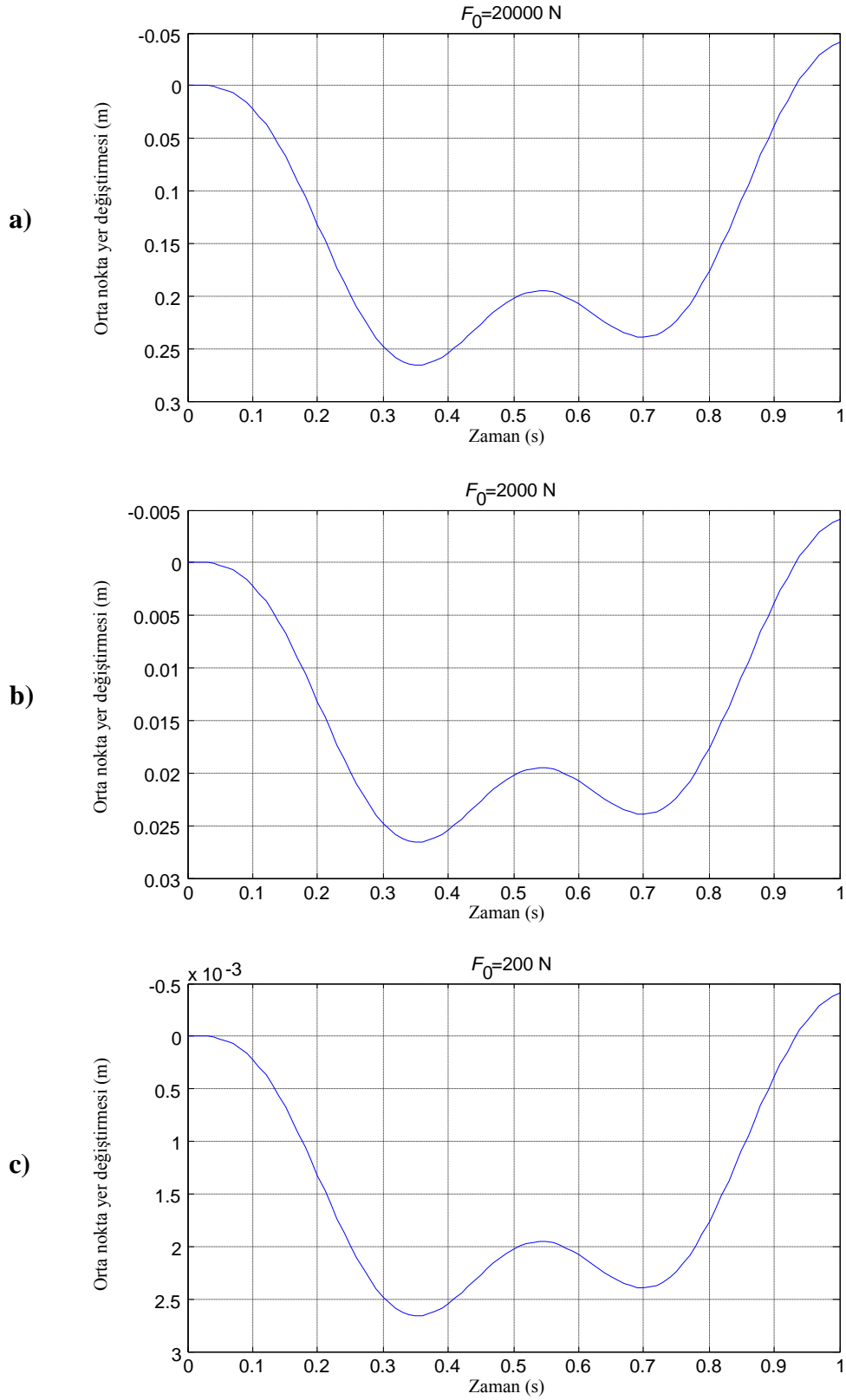
Hem hareketli yük hem hareketli moment altında kirişin yer değiştirmesinin, beklenildiği üzere sadece kuvvet ve ya sadece moment altındaki kirişlerden daha çok yer değiştirmeye maruz kaldığı görülmektedir.

#### 4.1.2 Farklı büyüklüklerdeki hareketli yüklerin karşılaştırılması

Yalnız hareketli bir yük altında basit mesnetli kirişin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi incelenmiştir. Farklı yük büyüklükleri ile titreşim cevabının nasıl değiştiği incelenmiştir.  $n = 20$  terim toplamı hesaplanmıştır.

Sırasıyla  $F_0 = 20.000$  N,  $F_0 = 2.000$  N ve  $F_0 = 200$  N büyüklükteki yüklerin orta nokta yer değiştirmeleri Şekil 4.4'de gösterilmiştir. Hızları  $v_0 = 10$  m/s alınmıştır.





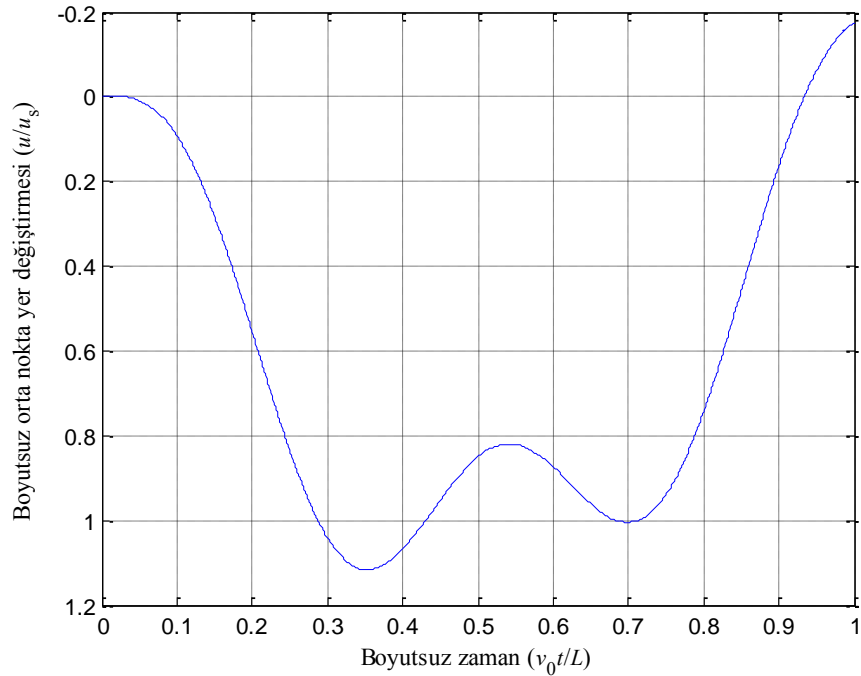
**Şekil 4.4.** Farklı büyüklükteki ve aynı hızdaki hareketli yük altındaki kirişlerin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi. **a)**  $F_0 = 20.000$  N ve  $v_0 = 10$  m/s **b)**  $F_0 = 2.000$  N ve  $v_0 = 10$  m/s **c)**  $F_0 = 200$  N ve  $v_0 = 10$  m/s

Kirişin orta noktasından statik bir uygulandığı zaman maksimum statik yer değiştirme

$$u_s = \frac{FL^3}{48EI} \quad (4.1)$$

formülü ile hesaplanır (Case vd, 1999).  $F_0 = 20000$  için aynı kirişin maksimum orta nokta statik yer değiştirmesi 0,238 m olarak hesaplanır. Şekil 4.4.(a)'da görüldüğü üzere hareketli yük, aynı büyüklükteki statik yükten daha fazla yer değiştirmeye neden olmaktadır.

Aynı hızda ve farklı büyüklüklerdeki hareketli yükler altında kiriş yer değiştirme miktarı kuvvetle aynı oranda değişmiştir. Bununla beraber titreşim frekansları aynı kalmıştır. Buradan kirişin frekansının yalnızca hareketli yük hızına bağlı olduğu ve kuvvetten bağımsız olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bu bulgu Lee'nin (1994) çalışmasındaki bulgular ile uyumludur. Boyutsuz orta nokta yer değiştirme grafiği Şekil 4.5'te gösterilmiştir. Boyutsuz zaman  $v_0t/L$  olarak hesaplanırken yer değiştirme  $u/u_s$  olarak verilmiştir.

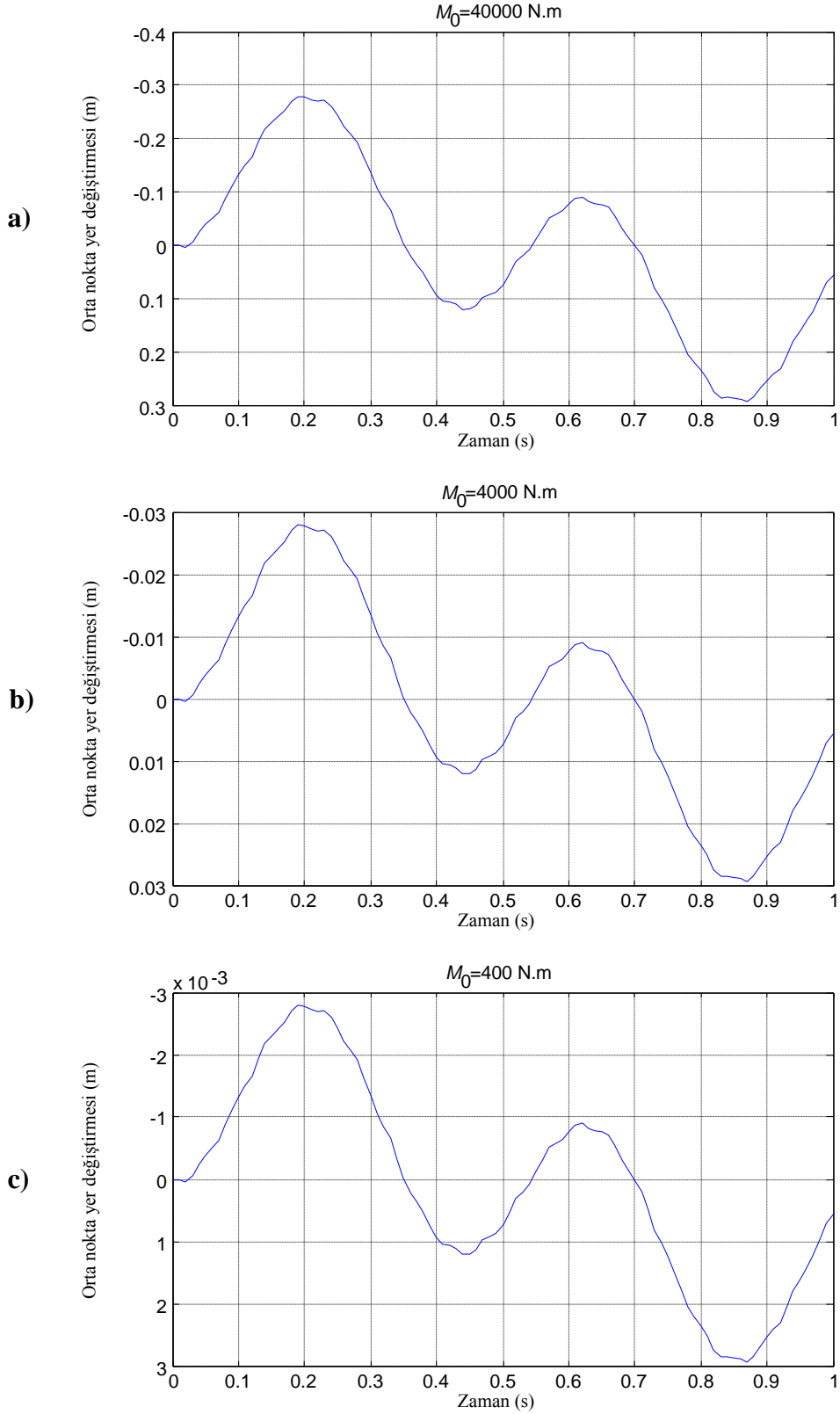


Şekil 4.5. Boyutsuz orta nokta yer değiştirmesi

### 4.1.3 Farklı büyüklüklerdeki hareketli momentlerin karşılaştırılması

Yalnız hareketli bir moment altında basit mesnetli kirişin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi incelenmiştir. Farklı moment büyüklükleri ile titreşim cevabının nasıl değiştiği incelenmiştir.  $n = 20$  terim toplamı hesaplanmıştır.

Sırasıyla  $M_0 = 40000$  N.m,  $M_0 = 4000$  N.m ve  $M_0 = 400$  N.m büyüklükteki yüklerin orta nokta yer değiştirmeleri Şekil 4.6'de gösterilmiştir. Hızları  $v_1 = 10$  m/s alınmıştır.



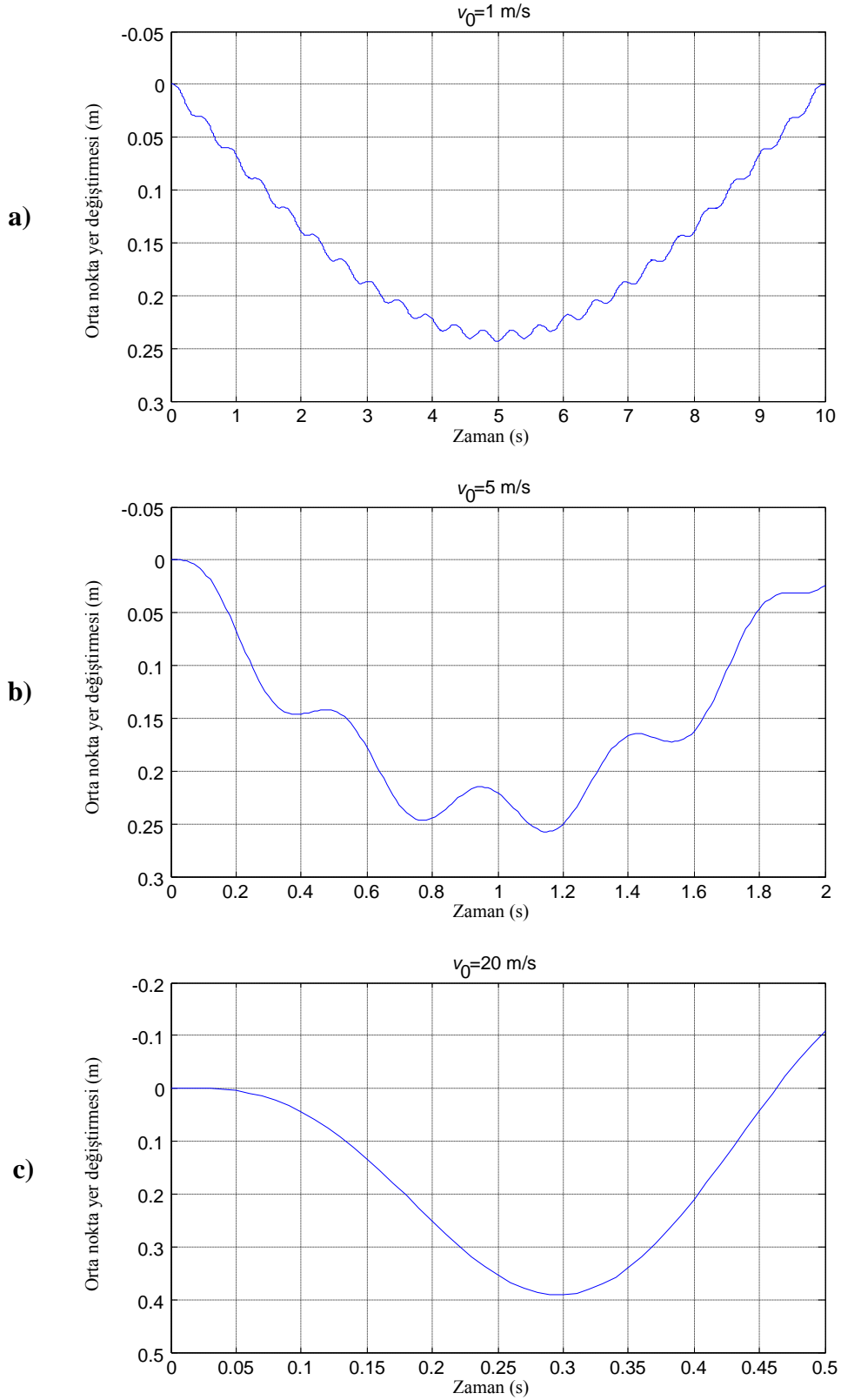
**Şekil 4.6.** Farklı büyüklükteki ve aynı hızdaki hareketli moment altındaki kirişlerin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi. **a)**  $M_0 = 40.000 \text{ N.m}$  ve  $v_1 = 10 \text{ m/s}$  **b)**  $M_0 = 4.000 \text{ N.m}$  ve  $v_1 = 10 \text{ m/s}$  **c)**  $M_0 = 400 \text{ N.m}$  ve  $v_1 = 10 \text{ m/s}$

Aynı hızda ve farklı büyüklüklerdeki hareketli momentler altında kiriş yer değiştirme miktarları moment değişimiyle aynı orandadır. Kirişin titreşim frekansları ise aynı kalmıştır. Buradan kirişin frekansının hareketli moment hızına bağlı olduğu sonucuna ulaşılabilir.

#### **4.1.4 Farklı hızlardaki hareketli yüklerin karşılaştırılması**

Farklı hızlardaki hareketli bir yük altında basit mesnetli kirişin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi incelenmiştir. Farklı yük hızları ile titreşim cevabının nasıl değiştiği incelenmiştir.  $n = 20$  terim toplamı hesaplanmıştır.

Sırasıyla  $v_0 = 1$  m/s,  $v_0 = 10$  m/s ve  $v_0 = 20$  m/s hızlarındaki yüklerin orta nokta yer değiştirmeleri Şekil 4.7’de gösterilmiştir. Yük büyüklüğü  $F_0 = 20000$  N alınmıştır.

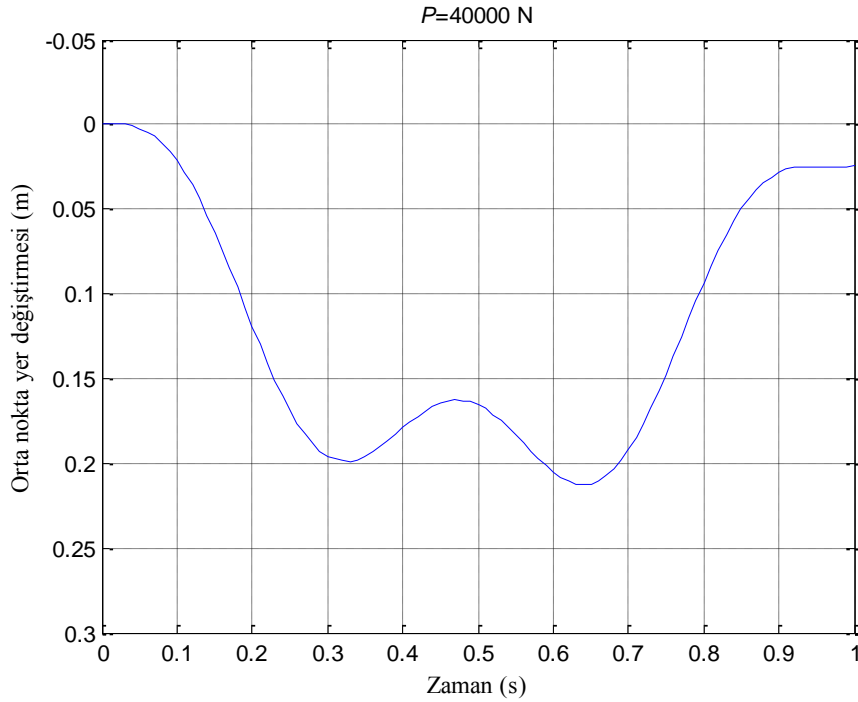


**Şekil 4.7.** Farklı hızlardaki ve aynı büyüklükteki hareketli yük altındaki kirişlerin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi. **a)**  $v_0 = 1$  m/s ve  $F_0 = 20.000$  N **b)**  $v_0 = 5$  m/s ve  $F_0 = 20.000$  N **c)**  $v_0 = 20$  m/s ve  $F_0 = 20.000$  N

Aynı büyüklükte ve farklı hızlardaki hareketli yük altında kirişte yük hızı arttıkça yer değiştirme miktarının da arttığı gözlemlenmiştir. Bunun yanında kirişin titreşim frekansları azalma göstermiştir. Uzzal ve arkadaşları (2012) da çalışmalarında, hareketli yük hızının artması durumunda kirişin maksimum yer değiştirmesinin de arttığını ortaya koymuşlardı. Bu açıdan kıyaslandığında mevcut yöntemin tutarlı olduğunu söylemek mümkündür.

#### 4.1.5 Hareketli ve aksenal yük altındaki kiriş

Hareketli bir yük ve aynı zamanda aksenal çekme yükü altındaki kirişin titreşimi incelenmiştir. Zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi Şekil 4.8’da gösterilmiştir.



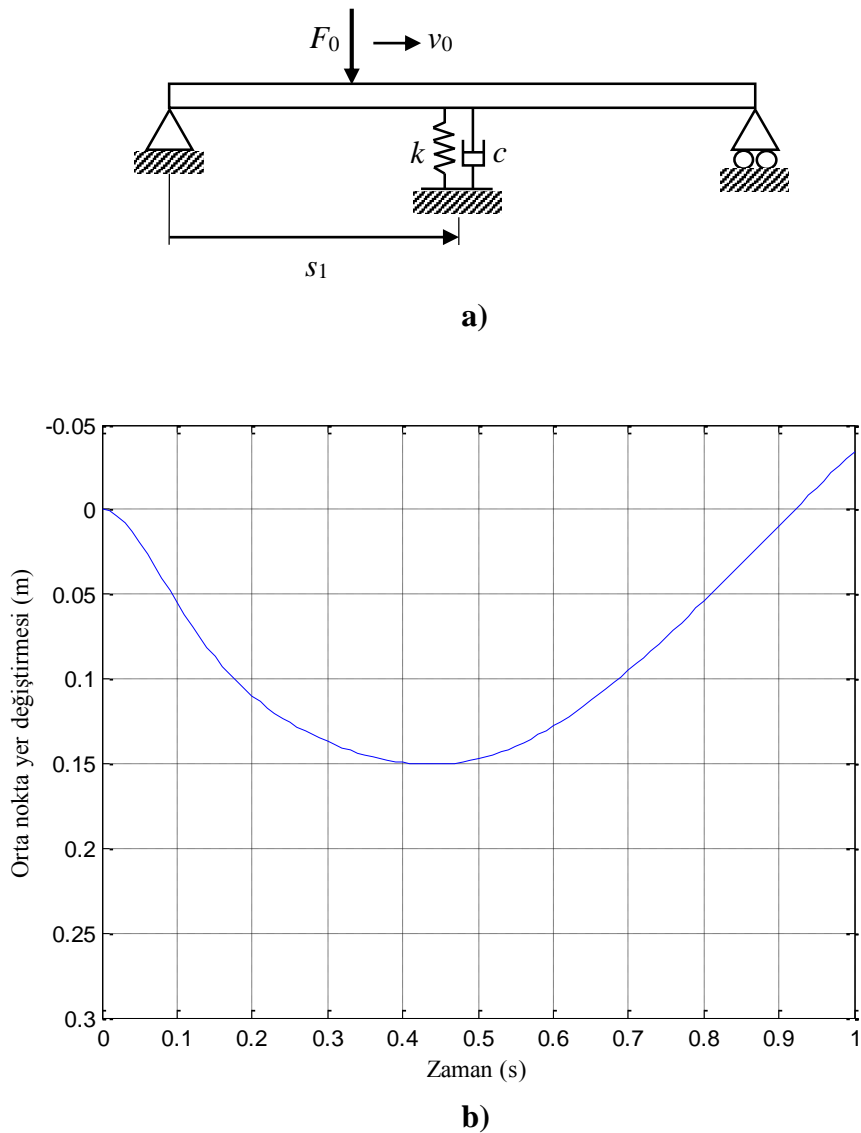
**Şekil 4.8.** Hareketli ve aksenal yük altındaki kirişin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesi,  $F_0 = 20.000$  N,  $v_0 = 10$  m/s ve  $P = 40.000$  N

Sadece hareketli yük altındaki yer değiştirmenin gösterildiği Şekil 4.4.(a) ile kıyaslandığında maksimum yerdeğiştirmenin azaldığı görülmüştür. Bunun yanında titreşim frekansı aynı kalmıştır. Aksenal çekme yükü altındaki kirişin daha az ye

değiştirmesi beklenen bir durum olduğu için yöntemin tutarlılığını göstermesi açısından önemlidir.

#### 4.1.6 Destek ayakları içeren hareketli yük altındaki kiriş

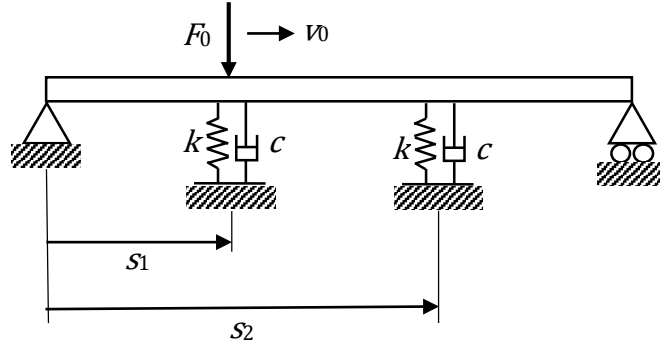
şekil 4.9'da şematik çizimi gösterilen tek bir destek ayağına sahip kirişin orta nokta yer değiştirmesi incelenmiştir. Yay ve damper sabitleri sırasıyla  $k = 50.000$  N/m ve  $c = 10.000$  N-s/m olarak alınmiştir.



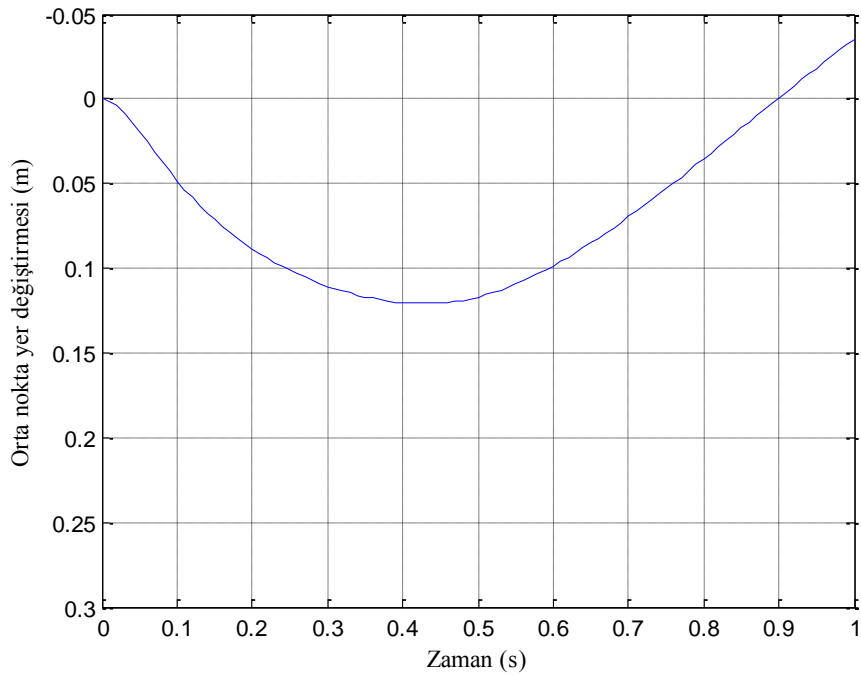
**şekil 4.9.** Hareketli yük altındaki tek bir ayak içeren kiriş **a)** şematik gösterimi **b)** Zamana bağlı orta nokta ye değiştirmesi,  $F_0 = 20.000$  N,  $v_0 = 10$  m/s,  $k = 50.000$  N/m,  $c = 10.000$  N-s/m ve  $s_1 = 5$  m



Şekil 4.10'da iki destek ayağına sahip bir kirişin şematik çizimi ve kirişin orta nokta yer değiştirmesinin zaman bağılı grafiği gösterilmiştir. Yay ve damper sabitleri aynı şekilde  $k = 50000$  N/m ve  $c = 10000$  N-s/m olarak alınmıştır.



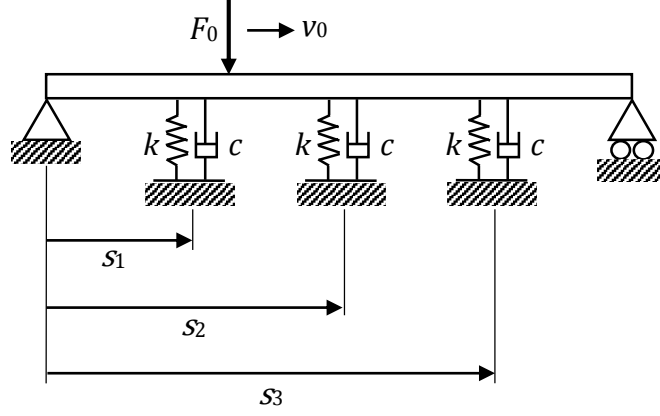
a)



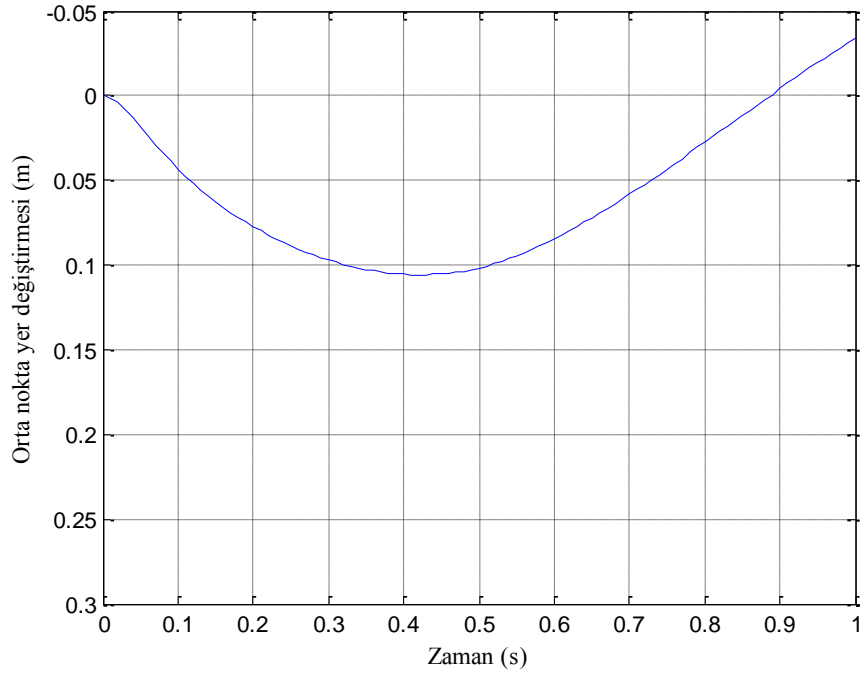
b)

**Şekil 4.10.** Hareketli yük altındaki iki ayak içeren kiriş **a)** Şematik gösterimi **b)** Zamana bağlı orta nokta ye değiştirmesi,  $F_0 = 20.000$  N,  $v_0 = 10$  m/s,  $k = 50.000$  N/m,  $c = 10.000$  N-s/m,  $s_1 = 3,5$  m,  $s_2 = 6,5$  m

Şekil 4.11’de üç destek ayağına sahip kirişin şematik çizimi ve kirişin orta nokta yer değiştirmesinin zaman bağılı grafiği gösterilmiştir.



a)

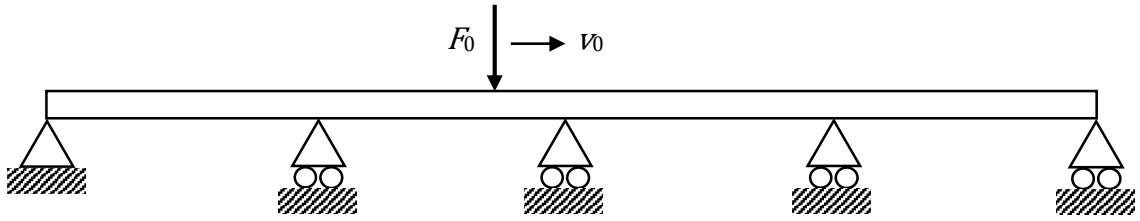


b)

**Şekil 4.11.** Hareketli yük altındaki üç ayak içeren kiriş **a)** Şematik gösterimi **b)** Zamana bağlı orta nokta ye değiştirmesi,  $F_0 = 20.000$  N,  $v_0 = 10$  m/s,  $k = 50.000$  N/m,  $c = 10.000$  N-s/m,  $s_1 = 2,5$  m,  $s_2 = 5$  m ve  $s_3 = 7,5$  m

#### 4.1.7 Çok aralıklı kirişler

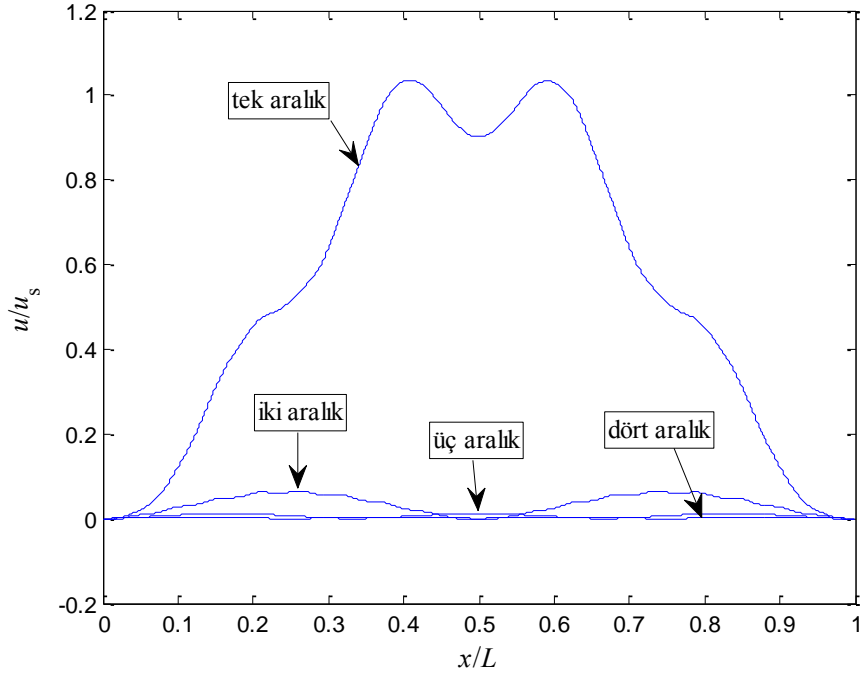
Şekil 4.12’teki gibi ara destek ayaklarının sabit mesnet olarak ele alındığı kiriş modelleri çok aralıklı kiriş olarak adlandırılır. İki ve daha fazla aralıklı kirişlerin dinamik davranışları daha önce birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Çok aralıklı kiriş problemi genellikle kirişi çözüm bölgelerine ayırarak çözülmüştür. Bu durumda her bir çözüm bölgesi için ayrı bir çözüm geçiş noktalarında süreklilik denklemlerinin oluşturulması gerektiği daha önce belirtilmişti. Aralık sayısı arttıkça çözülmesi gereken denklem sayısının artacağı ve çözümün zorlaşacağı anlatılmıştı.



**Şekil 4.12.** Hareketli yük altındaki dört aralıklı kiriş

Birden çok destek ayağı içeren kirişlerde olduğu gibi, çok aralıklı kirişlerin de mevcut yöntemle çözümü aralık sayısı arttığı takdirde de zorlaşmamaktadır. Lee (1994) çalışmasında ara mesnetleri yüksek yay sabiti ile tanımlayarak sabit basit mesnet gibi davranmasını sağlamıştır. Mevcut yöntemle de ara destek ayakları yüksek yay sabiti ile tanımlanarak sabit mesnet gibi davranması sağlanabilir.

Belirtilen referanstaki (Lee, 1994) örnek hesaplamalarda kullanılan kiriş özellikleri ile aynı değerler mevcut yöntem ile kullanılarak farklı aralıklardaki kirişler için sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 4.13’te görüldüğü gibi sonuçlar aynı grafik üzerinde boyutsuz koordinatlarda verilmiştir. Referanstaki sonuçlarla yüksek oranda uyum içinde olduğu gözlemlenmiştir. Yay sabiti  $10^{12}$  N/m olarak alınmıştır. İki, üç ve dört aralıklı kirişlerde aralıklar boyları her bir aralık sayısı için kendi arasında eşittir.



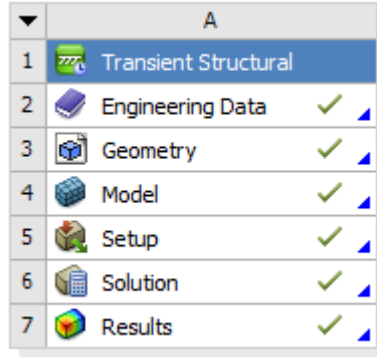
**Şekil 4.13.** Farklı aralıklardaki kirişler için kuvvet altındaki boyutsuz yer değiştirme,  $v_0 = 17.3 \text{ m/s}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $A = 1,146 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $I = 1,045 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ ,  $k = 10^{12}$ ,  $c = 0$

## 4.2 Sonlu Eleman Analizi ile Karşılaştırma

Hareketli yük altındaki ve hareketli moment altındaki basit mesnetli kirişlerin, Ansys programı ile analizi yapılmıştır. Önceki bölümde incelenen kiriş ile aynı geometrik ölçülerde (0,1 m x 0,1 m x 10 m) bir kiriş katı modeli oluşturulmuştur.

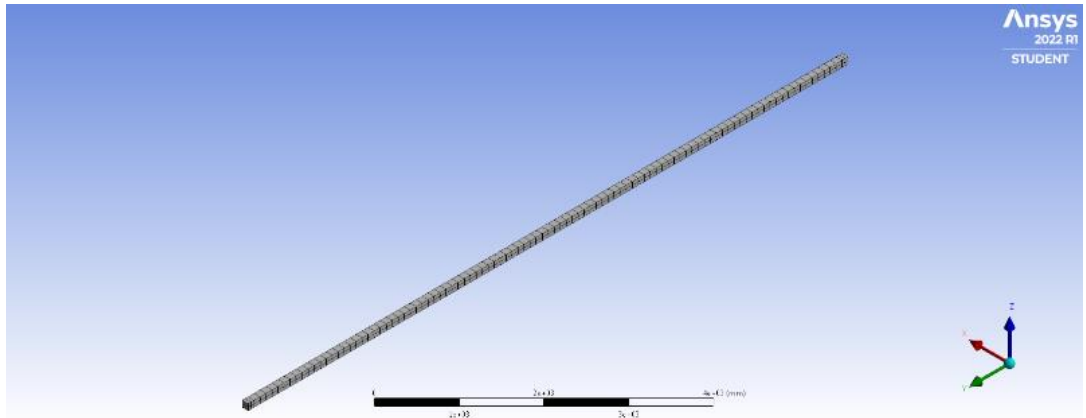
### 4.2.1 Hareketli yük analizi

Oluşturulan model Ansys programında süreksiz yapısal (Transient Structural) analiz sistemine aktarılmıştır (Şekil 4.14).



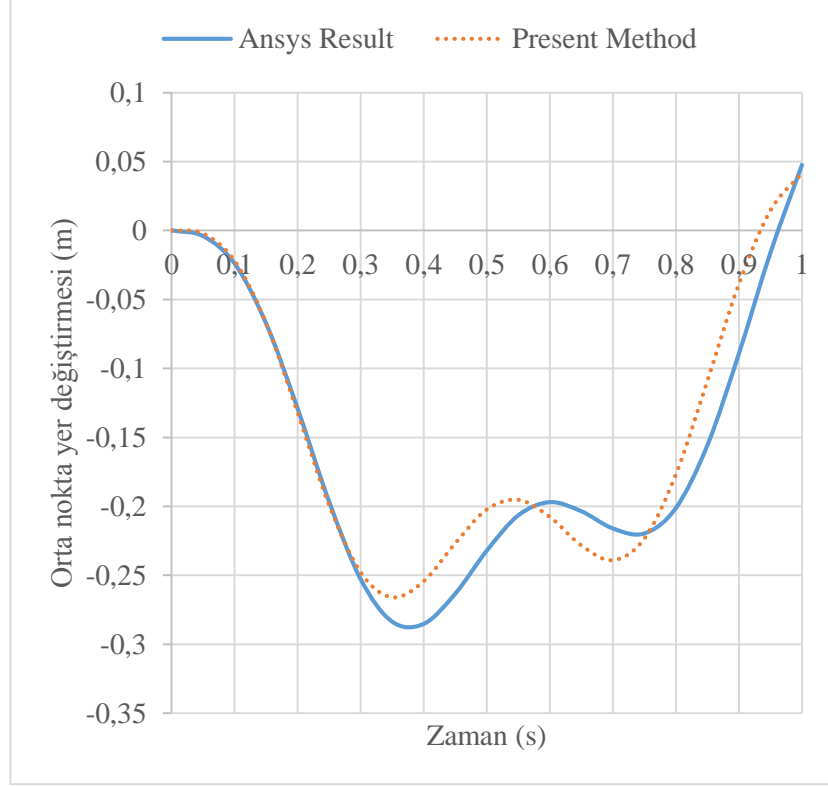
**Şekil 4.14.** Ansys süreksiz yapısal (Transient Structural) analiz sistemi

Malzeme olarak Ansys veri tabanında hazır olarak bulunan yapısal çelik (Structural Steel) seçilmiştir. Model, Şekil 4.15'deki gibi 0,1 m boyundaki altı yüzlü elemanlar (hexahedron) ile örülmüştür.



**Şekil 4.15.** 0,1 m boyundaki altı yüzlü elemanlar ile örülmüş analiz modeli

Modelin mesnet modellemesi için sol tarafındaki alt kenar sabitlenmiştir (Fixed Support). Sağ tarafındaki alt kenara ise, kayar mesneti modellemek için yer değiştirme (Displacement) tanımlanmıştır. X ve Z yönünde sabitlenip Y yönünde serbest bırakılmıştır. Analiz ayarlarında analiz 21 alt adıma (Substeps) bölünmüştür ve her bir adımın bitiş zamanı 0'dan başlatılarak 0,05 s arttırılmıştır. Her bir adımda, modelin başından itibaren 0,5 m aralıklarla ilerletilen 20.000 N kuvvet uygulanmıştır. Bu yöntemle hareketli yük benzeri bir yükleme modeli elde edilmiştir. Sonuçlardan orta nokta yer değiştirme verileri çekilerek Şekil 4.16' de gösterilmiştir ve mevcut yöntemin sonuçları ile kıyaslanmıştır.

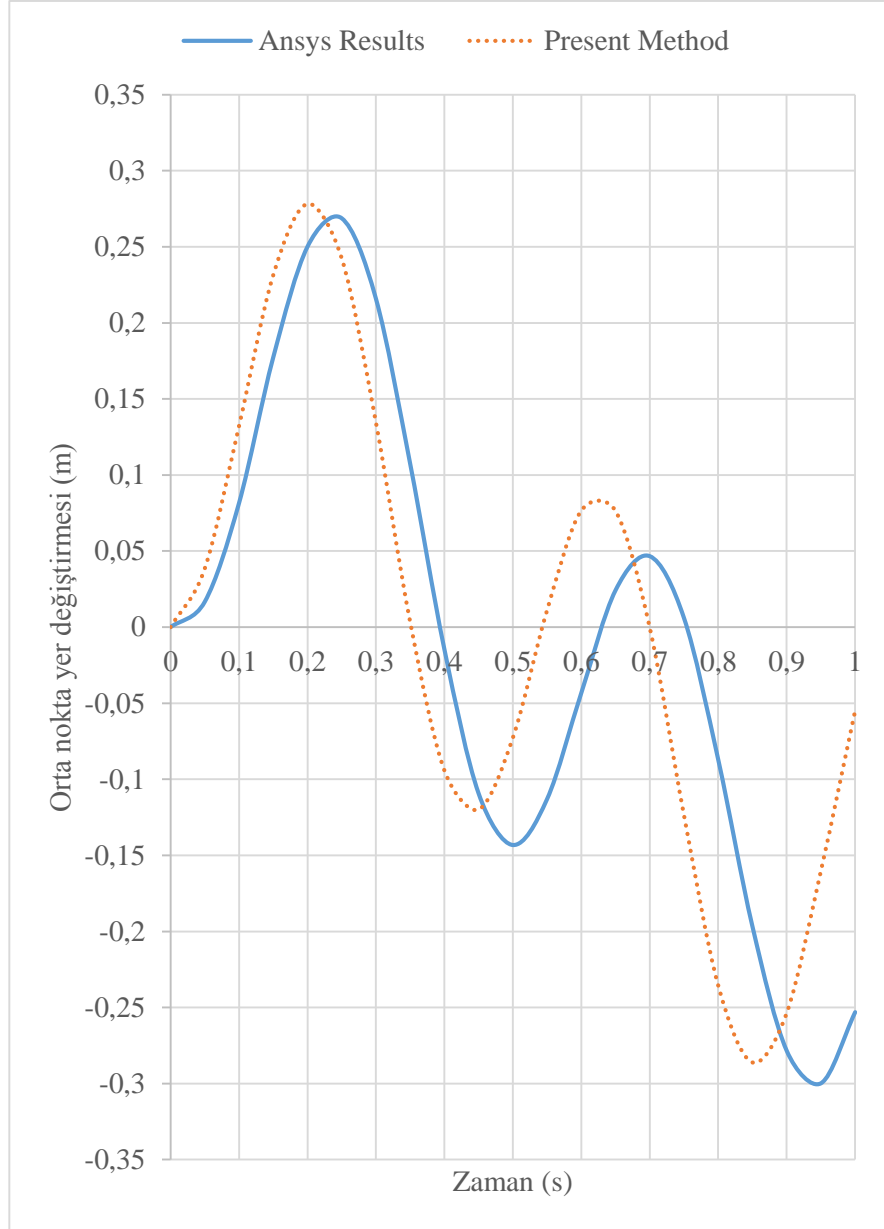


**Şekil 4.16.** Ansys hareketli kuvvet analizi sonuçları ve mevcut yöntem sonuçları

Sonuçların oldukça benzer olduğu görülebilir.

#### 4.2.1 Hareketli moment analizi

Bu analizde, hareketli yük analizi ile aynı şartlar tanımlanmıştır. Kuvvet yerine moment tanımlanarak analiz yapılmıştır. Moment büyüklüğü önceki bölümde hesaplarda kullanılan moment değeri ile aynı alınmıştır (40.000 N.m). Mevcut yöntem ile bulunan orta nokta yer değiştirmeleri Ansys sonuçları ile karşılaştırılmıştır (Şekil 4.17).



**Şekil 4.17.** Ansys hareketli moment analizi sonuçları ve mevcut yöntem sonuçları

Bu durumda da iki sonuç birbirine oldukça yakındır. Farklılıkların nedeni olarak mevcut yöntemin kullandığı kiriş teorisi ile analiz programının kullandığı teorinin farklı olması gösterilebilir. Mevcut yöntem Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanırken ve önceki bölümlerde bahsedilen kabulleri yaparken analiz programı tüm yönlerde yer değiştirme ve gerilmeleri hesaplamaktadır.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada, hareketli yüklere maruz, düzgün, Euler-Bernoulli teorisine uyan kirişlerin hareket denklemlerini çözmek için bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem, bir araç tarafından geçilen köprülerin dinamik davranışlarının tahmin edilmesinde kullanılabilir. Hareketli bir yüke maruz kirişin maksimum orta nokta yer değiştirmesi, orta noktasından aynı büyüklükte statik bir yüke maruz kirişin maksimum orta nokta yer değiştirmesinden büyüktür. Bu da demektir ki hareketli yük, aynı büyüklükteki statik yüke göre daha fazla yer değiştirmeye ve daha fazla gerilme oluşmasına neden olmaktadır. Bu nedenle statik yüke dayanan bir yapı, aynı büyüklükteki hareketli yük altında hasar görebilir. Bunun sonucu olarak hareketli yüklere maruz kirişlerin tasarımında dinamik davranışları incelenmelidir.

Kirişte hareketli yüklerle beraber eksenel çekme yükünün de bulunduğu durumda, maksimum yer değiştirmenin azaldığı ortaya konmuştur. Bu beklenen bir durum olduğu için yöntemin tutarlı olduğunu gösterir ve eksenel çekme yükü altındaki kirişlerin dinamik davranışını incelerken kullanılabilir.

Mevcut yöntemin getirdiği kolaylıklardan biri de ara ayakların, hareket denklemine kolaylıkla eklenebilmesi ve denklemin numerik değil analitik olarak çözülebilmesidir. Çözüm basit bir bilgisayar programıyla çözülebildiği için ayak sayısı arttıkça çözümün zorluğunun aynı olması, yöntemin sağladığı kolaylıklardan biridir. Çok aralıklı kirişlerde ara desteklerin sabit olması durumunda, ayaklara yüksek yay sabiti verilerek çözüm elde edilebilir.

Bölüm 4.1.6'daki gibi farklı ayak adetlerine sahip kirişlerin kıyaslanması ve ayakların adet ve konumlarının optimize edilmesi gibi çalışmalar da mevcut yöntemle yapılabilir. Önceki bölümde görüldüğü üzere iki ayaklı kiriş, tek ayaklı kirişten kayda değer bir oranda daha az yer değiştirmeye sahiptir (bkz. Şekil 4.9, Şekil 4.10 ve Şekil 4.11). Ancak iki ayaklı kiriş ile üç ayaklı kiriş arasında ciddi bir yer değiştirme farkı yoktur. Bu nedenle verilen örnekler bağlamında, iki ayaklı kirişin üç ayaklı kirişten maliyet anlamında daha efektif olduğu düşünülebilir.



Mevcut yöntemin sonuçları bir analiz programı ile de karşılaştırılmıştır. Ansys paket programı kullanılarak yapılan analizlerde, mevcut yöntemin sonuçları ile oldukça uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Bu çalışmada analiz zaman aralıklarına bölünerek her bir zaman aralığında uygulanan kuvvet kaydırılarak hareketli kuvvet tanımlanmıştır. Normalde analiz programlarında, modeli olan bir cisme bir hız verilerek hareketli kütle kolayca tanımlanabiliyorken kütle içermeyen hareketli bir yük direk olarak tanımlanamamaktadır. Bu yöntem, hareketli yük tanımlanması gereken analizlerde program kullanıcılarına yöntem olarak ışık tutabilir.

## KAYNAKLAR

- Ayre, R. S., Ford, G., & Jacobsen, L. S. (1950). Transverse vibration of a two-span beam under action of a moving constant force. *Journal of Applied Mechanics*, 17(1), 1–12. <https://doi.org/10.1115/1.4010050>
- Cai, C. W., Cheung, Y. K., & Chan, H. C. (1988a). Dynamic response of infinite continuous beams subjected to a moving force—An exact method. *Journal of Sound and Vibration*, 123(3), 461–472. [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(88\)80163-9](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(88)80163-9)
- Case, J. (1999). *Strength of Materials and structures* (4th ed.). Arnold.
- Chawda, D., & Murugan, S. (2020). Dynamic response of a cantilevered beam under combined moving moment, torque and force. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 20(05), 2050065. <https://doi.org/10.1142/s0219455420500650>
- Dirac delta function. (2023, 19 Ocak). In *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac\\_delta\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function)
- Dmitriev, A. S. (1974). Transverse vibrations of a three-span beam under a moving load. *Soviet Applied Mechanics*, 10(11), 1263–1266. <https://doi.org/10.1007/bf00882128>
- Erochko, J. (2020). 5.2 *The bernoulli-euler beam theory*. Learn About Structures. Retrieved January 20, 2023, from <https://learnaboutstructures.com/Bernoulli-Euler-Beam-Theory>
- Esmailzadeh, E., & Ghorashi, M. (1997). Vibration analysis of a Timoshenko beam subjected to a travelling mass. *Journal of Sound and Vibration*, 199(4), 615–628. [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(96\)99992-7](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(96)99992-7)
- Fryba, L. (1972). *Vibration of solids and structures under moving loads*. Noordhoff International Publishing.
- Han, S. M., Benaroya, H., & Wei, T. (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5), 935–988. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2257>
- Kameswara Rao, C. (1989). Frequency analysis of clamped-clamped uniform beams with intermediate elastic support. *Journal of Sound and Vibration*, 133(3), 502–509. [https://doi.org/10.1016/0022-460x\(89\)90615-9](https://doi.org/10.1016/0022-460x(89)90615-9)
- Kreyszig, E. (2020). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). John Wiley & Sons.
- Lee, H. P. (1994). Dynamic response of a beam with intermediate point constraints subject to a moving load. *Journal of Sound and Vibration*, 171(3), 361–368. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1126>

- Luo, J., Zhu, S., & Zhai, W. (2022). Exact closed-form solution for free vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with intermediate elastic supports. *International Journal of Mechanical Sciences*, 213, 106842. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106842>
- Olsson, M. (1991). On the fundamental moving load problem. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2), 299–307. [https://doi.org/10.1016/0022-460x\(91\)90593-9](https://doi.org/10.1016/0022-460x(91)90593-9)
- Rao, S. S. (2007). *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons.
- Rao, S. S. (2017). *Mechanical vibrations in SI units* (6th ed.). Pearson.
- Reis, M., Pala, Y., & Karadere, G. (2008). Dynamic analysis of a bridge supported with many vertical supports under moving load. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*, 3(1), 14–20. <https://doi.org/10.3846/1822-427x.2008.3.14-20>
- Saibel, E., & Lee, W. F. Z. (1952). Vibrations of a continuous beam under a constant moving force. *Journal of the Franklin Institute*, 254(6), 499–516. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(52\)90150-6](https://doi.org/10.1016/0016-0032(52)90150-6)
- Senalp, A. D., Arikoglu, A., Ozkol, I., & Dogan, V. Z. (2010). Dynamic response of a finite length euler-bernoulli beam on linear and nonlinear viscoelastic foundations to a concentrated moving force. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 24(10), 1957–1961. <https://doi.org/10.1007/s12206-010-0704-x>
- Timoshenko, S. P. (1922). X. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(253), 125–131. <https://doi.org/10.1080/14786442208633855>
- Uzzal, R. U. A., Bhat, R. B., & Ahmed, W. (2012). Dynamic response of a beam subjected to moving load and moving mass supported by Pasternak Foundation. *Shock and Vibration*, 19(2), 205–220. <https://doi.org/10.1155/2012/919512>
- Zhang, B., & Shepard, S. (2012). Dynamic responses of supported beams with intermediate supports under moving loads. *Shock and Vibration*, 19(6), 1403–1413. <https://doi.org/10.1155/2012/919512>
- Yang, Y.-B., Yau, J. D., Yao, Z., & Wu, Y. S. (2004). *Vehicle-bridge interaction dynamics: With applications to high-speed railways*. World Scientific.

## EKLER

### EK 1 MATLAB Kodları

#### EK 1.1 Diferansiyel denklem özel çözümün sabitlerini bulan program

```
syms B1 B2 B3 B4 wn v0 v1 an bn F0 M0 rho A L t

denk1 = - B1*wn^2*v0^2 - an*B2*wn*v0 + bn*B1 == 2*F0/(rho*A*L);
denk2 = - B2*wn^2*v0^2 + an*B1*wn*v0 + bn*B2 == 0;
denk3 = - B3*wn^2*v1^2 - an*B4*wn*v1 + bn*B3 == 0;
denk4 = - B4*wn^2*v1^2 + an*B3*wn*v1 + bn*B4 == -2*M0*wn/(rho*A*L);
[A12,B12] = equationsToMatrix([denk1, denk2], [B1, B2]);
[A34,B34] = equationsToMatrix([denk3, denk4], [B3, B4]);
(linsolve(A12,B12))
(linsolve(A34,B34))
```

#### EK 1.2 Diferansiyel denklem homojen çözümün sabitlerini bulan program

```
syms A1 A2 B1 B2 B3 B4 wn t v0 v1 r1 r2 alpha beta

%delta>0

T1 = A1*exp(r1*t) + A2*exp(r2*t) + B1*sin(wn*v0*t) + B2*cos(wn*v0*t)
    + B3*sin(wn*v1*t) + B4*cos(wn*v1*t);
dT1 = diff(T1, t);
denk1 = subs(T1, t, 0);
denk2 = subs(dT1, t, 0);
[a1, a2] = solve(denk1==0, denk2==0, A1, A2)

%delta=0

T1 = (A1*t + A2)*exp(r1*t) + B1*sin(wn*v0*t) + B2*cos(wn*v0*t)
    + B3*sin(wn*v1*t) + B4*cos(wn*v1*t);
dT1 = diff(T1, t);
denk1 = subs(T1, t, 0);
denk2 = subs(dT1, t, 0);
[a1, a2] = solve(denk1==0, denk2==0, A1, A2)

%delta<0

T1 = A1*exp(alpha*t)*cos(beta*t) + A2*exp(alpha*t)*sin(beta*t)
    + B1*sin(wn*v0*t) + B2*cos(wn*v0*t) + B3*sin(wn*v1*t) +
B4*cos(wn*v1*t);
dT1 = diff(T1, t);
denk1 = subs(T1, t, 0);
denk2 = subs(dT1, t, 0);
[a1, a2] = solve(denk1==0, denk2==0, A1, A2)
```

### EK 1.3 Kirişin zamana bağlı yer değiştirmelerini gösteren program

```
%elastisite modülü (N/m^2)
E = 2.1e+11;
%kiriş genişliği (m)
w = ....;
%kiriş yüksekliği (m)
h = ....;

%alan atalet momenti (m^4)
I = w*h^3/12;

%eksenel kuvvet (N)
P = ....;

%kirişin öz kütlesi (kg/m^3)
rho = 7800;

%kesit alanı (m^2)
A = w*h;

%kiriş boyu (m)
L = ....;

%hareketli yükün büyüklüğü (N)
F0 = ....;

%hareketli yükün hızı (m/s)
v0 = ....;

%hareketli momentin büyüklüğü (N-m)
M0 = ....;

%hareketli momentin hızı (m/s)
v1 = ....;

%ayak yay sabiti (N/m)
k = ....;

%elastik ayak konumları (m)
s31 = ....;
s32 = ....;
s33 = ....;

%ayak sönümlenme katsayısı (N-s/m)
c = ....;

%damperli ayak konumları (m)
s41 = ....;
s42 = ....;
s43 = ....;

x = 0:0.01:10;

%toplam indisi
n = 10;
for t = 0:0.2:(L/v0)-Md
```

```

%kiriş başlangıç şartı
u=0;

for i = 1:n

    wn = i*pi/L;

    an = 2*c/(rho*A*L)*sin(wn*s41)^2 + 2*c/(rho*A*L)*sin(wn*s42)^2
        + 2*c/(rho*A*L)*sin(wn*s43)^2;
    bn = 1/(rho*A)*(E*I*wn^4 + P*wn^2 + 2*k/L*sin(wn*s31)^2
        + 2*k/L*sin(wn*s32)^2 + 2*k/L*sin(wn*s33)^2);

    delta = an^2 - 4*bn;
    alpha = -an/2;
    beta = sqrt(abs(delta))/2;

    r1 = (-an+sqrt(delta))/2;
    r2 = (-an-sqrt(delta))/2;

    B1 = (2*F0*(-v0^2*wn^2 + bn))/
        (A*L*rho*(an^2*v0^2*wn^2 + bn^2 - 2*bn*v0^2*wn^2 + v0^4*wn^4));

    B2 = (2*F0*an*v0*wn)/
        (A*L*rho*(an^2*v0^2*wn^2 + bn^2 - 2*bn*v0^2*wn^2 + v0^4*wn^4));

    B3 = (2*M0*an*v1*wn^2)/
        (A*L*rho*(an^2*v1^2*wn^2 + bn^2 - 2*bn*v1^2*wn^2 + v1^4*wn^4));

    B4 = (2*M0*wn*(-v1^2*wn^2 + bn))/
        (A*L*rho*(an^2*v1^2*wn^2 + bn^2 - 2*bn*v1^2*wn^2 + v1^4*wn^4));

    A11 = (B2*r2 + B4*r2 - B1*v0*wn - B3*v1*wn)/(r1 - r2);
    A12 = -(B2*r1 + B4*r1 - B1*v0*wn - B3*v1*wn)/(r1 - r2);

    A21 = B2*r1 + B4*r1 - B1*v0*wn - B3*v1*wn;
    A22 = -B2 - B4;

    A31 = -B2 - B4;
    A32 = (B2*alpha + B4*alpha - B1*v0*wn - B3*v1*wn)/beta;

    Tp = B1*sin(wn*v0*t) + B2*cos(wn*v0*t) + B3*sin(wn*v1*(t+Md))
        + B4*cos(wn*v1*(t+Md));

    if delta > 0

        Th = A11*exp(r1*t) + A12*exp(r2*t);

    elseif delta == 0

        Th = (A21 + A22*t)*exp(r1*t);

    else

        Th = A31*exp(alpha*t).*cos(beta*t)
            + A32*exp(alpha*t).*sin(beta*t);

    end

```

```

Tn = Th + Tp;

u = u + Tn*sin(wn*x);

end

plot(x, u);
hold on

end

xlabel('x (m)');
ylabel('u (m)');
set(gca, 'ydir', 'reverse');

```

#### **EK 1.4 Kirişin zamana bağlı orta nokta yer değiştirmesini gösteren program**

```

%elastisite modülü (N/m^2)
E = 2.1e+11;

%kiriş genişliği (m)
w = ....;
%kiriş yüksekliği (m)
h = ....;

%alan atalet momenti (m^4)
I = w*h^3/12;

%eksenel kuvvet (N)
P = ....;

%kirişin öz kütlesi (kg/m^3)
rho = 7800;

%kesit alanı (m^2)
A = w*h;

%kiriş boyu (m)
L = ....;

%hareketli yükün büyüklüğü (N)
F0 = ....;

%hareketli yükün hızı (m/s)
v0 = ....;

%hareketli momentin büyüklüğü (N-m)
M0 = ....;

%hareketli momentin hızı (m/s)
v1 = ....;

%ayak yay sabiti (N/m)
k = ....;
%elastik ayak konumları (m)
s31 = ....;
s32 = ....;

```

```

s33 = .....;

%ayak sönümlenme katsayısı (N-s/m)
c = .....;

%damperli ayak konumları (m)
s41 = .....;
s42 = .....;
s43 = .....;

x = L/2;
t = 0:0.01:L/v0;

%toplam indisi
n = 20;

%kiriş başlangıç şartı
u=0;

for i = 1:n

    wn = i*pi/L;

    an = 2*c/(rho*A*L)*sin(wn*s41)^2 + 2*c/(rho*A*L)*sin(wn*s42)^2
        + 2*c/(rho*A*L)*sin(wn*s43)^2;
    bn = 1/(rho*A)*(E*I*wn^4+P*wn^2 + 2*k/L*sin(wn*s31)^2
        + 2*k/L*sin(wn*s32)^2 + 2*k/L*sin(wn*s33)^2);

    delta = an^2 - 4*bn;
    alpha = -an/2;
    beta = sqrt(abs(delta))/2;

    r1 = (-an+sqrt(delta))/2;
    r2 = (-an-sqrt(delta))/2;

    B1 = (2*F0*(- v0^2*wn^2 + bn))/
        (A*L*rho*(an^2*v0^2*wn^2 + bn^2 - 2*bn*v0^2*wn^2 + v0^4*wn^4));
    B2 = (2*F0*an*v0*wn)/
        (A*L*rho*(an^2*v0^2*wn^2 + bn^2 - 2*bn*v0^2*wn^2 + v0^4*wn^4));
    B3 = -(2*M0*an*v1*wn^2)/
        (A*L*rho*(an^2*v1^2*wn^2 + bn^2 - 2*bn*v1^2*wn^2 + v1^4*wn^4));
    B4 = -(2*M0*wn*(- v1^2*wn^2 + bn))/
        (A*L*rho*(an^2*v1^2*wn^2 + bn^2 - 2*bn*v1^2*wn^2 + v1^4*wn^4));

    A11 = (B2*r2 + B4*r2 - B1*v0*wn - B3*v1*wn)/(r1 - r2);
    A12 = -(B2*r1 + B4*r1 - B1*v0*wn - B3*v1*wn)/(r1 - r2);

    A21 = B2*r1 + B4*r1 - B1*v0*wn - B3*v1*wn;
    A22 = - B2 - B4;

    A31 = - B2 - B4;
    A32 = (B2*alpha + B4*alpha - B1*v0*wn - B3*v1*wn)/beta;
    Tp = B1*sin(wn*v0*t) + B2*cos(wn*v0*t) + B3*sin(wn*v1*t)
        + B4*cos(wn*v1*t);

```



```

if delta > 0
    Th = A11*exp(r1*t) + A12*exp(r2*t);
elseif delta == 0
    Th = (A21 + A22*t)*exp(r1*t);
else
    Th = A31*exp(alpha*t).*cos(beta*t)
        + A32*exp(alpha*t).*sin(beta*t);
end

Tn = Th + Tp;

u = u + Tn*sin(wn*x);

end

plot(t, u);
xlabel('Zaman (s)');
ylabel('Orta nokta yer değiştirmesi (m)');
grid;
set (gca, 'ydir', 'reverse');

```