

BİR KAYMALI YATAĞIN ELASTOHİDRODİNAMİK İNCELENMESİNDE SONLUFARKLARA DAYANAN BİLGİSAYAR PROGRAMI

Emin GÜLLÜ*
Osman KOPMAZ**
Saim DİNÇ***

ÖZET

Elastohidrodinamik (EHD) yağlama teorisi, kaymalı yatakların performans karakteristiklerini, yatak elemanlarının —mil ve burç— elastik deformasyonlarını da gözönüne alarak inceler. Bu yazıda bir EHD yatak analizinde elastisite ve hidrodinamikten bazı temel bağıntıların nasıl koordine edildiği açıklanmakta daha sonra karmaşık kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu farklara dayalı çözüm prosedürü ve bununla ilgili Fortran dilinde bir program verilmektedir.

ABSTRACT

In this study performance characteristics of journal bearings are investigated, including the shaft deformation. To determine the pressure distribution and oil film thickness Reynolds' differential equation is solved with Reynolds type of boundary conditions while constitutive equations, usable for linear elastic materials, are utilized to determine the deformations.

When shaft deformation is considered together with liner deformation, bearing performance is observed to be innegligibly important. Therefore it can be concluded that elasticities of bearing materials must be taken into account during design.

GİRİŞ

Yatak hesabında yatak malzemesinin rijit kabul edilmesi hesaplarda mühim bir kolaylık getirir. Ancak şurası açıktır ki mil ve burçta oluşan deformasyonların ihmalinde teşekkül eden filmin geometrisi hakkında edindiğimiz bilgi gerçeğe uygun değildir. Bilindiği gibi rijidlik kabulü halinde filmin enkesit biçimi yatak bo-

* Dr. Müh.; Uludağ Üniv. Mühendislik Fakültesi Makina Bölümü, Bursa.

** Yük. Müh.; Uludağ Üniv. Mühendislik Fakültesi Makina Bölümü, Bursa.

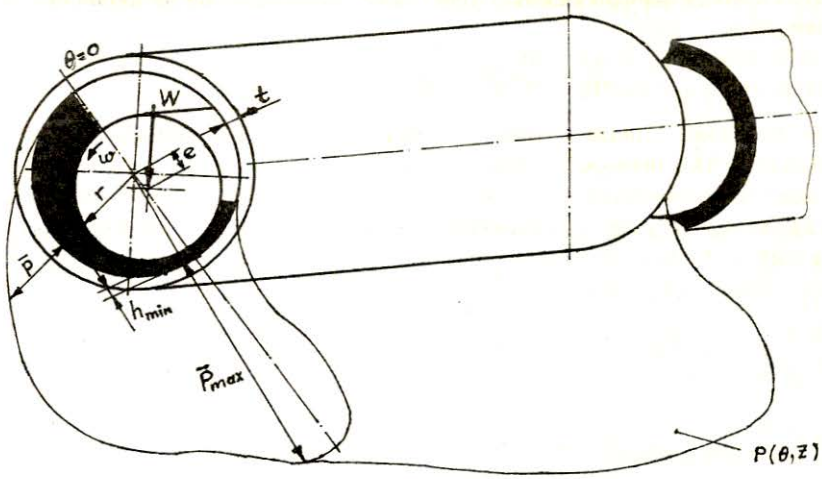
*** Yard. Doç. Dr.; İ.T.Ü. Makina Fakültesi, İstanbul.

yunca aynı kalmaktadır. Halbuki EHD inceleme gösteriyor ki genelde film geometrisi r, θ, z değişkenlerinin fonksiyonu olmaktadır.

SEMBOLLER

c	Radyal açıklık (mm), R-r
C	Bir sabit, $2 + \lambda/\mu$
e	Yatak eksantrikliği (mm), ce
E	Young modülü (N/mm^2)
G	Basınç faktörü, $e^{\alpha P}$
h	Rijid yağ film kalınlığı (mm)
H_r	Birimsiz rijid yağ film kalınlığı, $1 + \epsilon \cos \theta$
H_{min}	Rijid haldeki minimum film kalınlığı, $1 - \epsilon$
H	Deformasyonlu yağ film kalınlığı
l	Yatak genişliği (mm)
\bar{p}	Yağ basıncı (at)
\bar{P}_{max}	Maksimum yağ basıncı (at)
$P_{m, n}$	Basınç genişliği
r	Mil yarıçapı (mm)
R	Burç yarıçapı (mm)
t	Burç kalınlığı (mm)
u, v, w	Yatak deformasyon bileşenleri (mm)
u	Boyutsuz radyal yöndeki deformasyon
w^*	Relaksasyon parametresi
W	Yatak yükü
y	Boyutsuz radyal mesafe, r/a
r, z	Silindirik koordinat takımında mesafe (mm)
α	Piezo-viskoz katsayısı
$\beta_{m, n}$	Faz farkı açısı
e	Eksantriklik oranı, e/c
ϵ_{kl}	Birim şekil değiştirme tansörü
η	Yağın viskozitesi (Ns/m^2)
θ	Silindirik koordinat takımında açılar
λ	Lamé sabiti (N/mm^2)
μ	Lamé sabiti, kayma modülü (N/mm^2) $E/2 (1 + \nu)$
ν	Poisson oranı
$\tau_{k, l}$	Gerilme tansörü (N/mm^2)
$\tau_{kl, k}$	Gerilme tansörünün, k bileşenine göre türevi (N/mm^3)
ω	Sabit burçta muylunun açısal hızı (rad/s)

Şekil 1'de konvansiyonel bir kaymalı yatak enkesidi görülüyor. Bu şekilden burç ve milin ve aynı zamanda gövdenin rijid olduğu kabul edilerek bulunan p yağ basıncı dağılımı ve film biçimi verilmiştir. Bu enkesit rijit bir yataktaki stasyoner yağlama durumunu muayyen geometrik ve işletme şartları altında tamamen temsil eder.

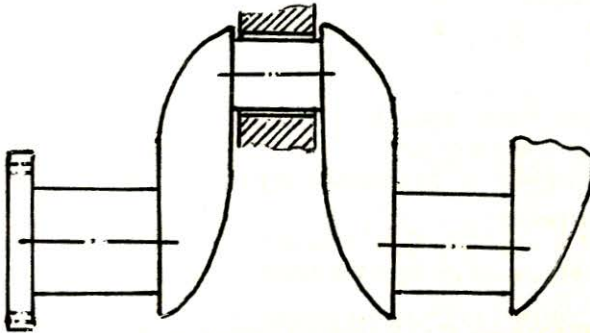


Şekil: 1 – Kaymalı yatakta temel büyüklükler

Bir kaymalı yatağın performansı yani görevini yerine getirebilirliği birçok değişken tarafından belirlenir. Bunlara kısaca performans karakteristikleri denilir. Bu karakteristikler kabaca yatağın geometrisine ve işletme şartlarına aittirler. Örneğin yatak çapı, yatak boyu, burç kalınlığı, yatak malzemesi, kullanılan yağın viskozitesi, minimum film kalınlığı, devir sayısı, yatak yükü gibi.

Bu çalışmada gözönüne alınan yatak Şekil 2'de gösterilmiştir. Burada böyle bir yatağın ele alınışı mildeki eğilmenin hesaba girmemesine yöneliktir. Böylece problemin, analizin esaslarını gözden kaçıracak tarzda karmaşıklaşması önlenmiştir.

Derli toplu ifade etmek gerekirse mil ve burç deformasyonlarının yatak performansının karakteristiklerini nasıl değiştireceği ve bundan pratiğe ait bazı sonuçların bulunması konuyu oluşturmaktadır.



Şekil: 2 – Problemden esas alınan kaymalı yatak

REYNOLDS DENKLEMİ VE EHD İNCELEMeye UYARLANMASI

Hidrodinamik teörinin temelini oluşturan Reynolds denklemi silindirik koordinatlarda ve boyutlu formda aşağıdaki gibi verilir.

$$\frac{\partial}{r^2 \partial \theta} (h^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial Z} (h^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial Z}) = 6\eta U \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (1)$$

Bu denklemin çözümü sistemde deformasyon olmadığı halde yağda oluşan basınç dağılımını verir. Sonuçların genelliği açısından aşağıda verilen boyutsuz Reynolds denklemiyle çalışmak uygun olur.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (H_r^3 \frac{\partial P}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial Z} (H_r^3 \frac{\partial P}{\partial Z}) = 6 \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \quad (2)$$

Denklemden görülen yağ film kalınlığı fonksiyonu H, EHD analizde iki terimin toplamı olarak düşünülmelidir:

$$H = H_r + u \quad (3)$$

Burada H, H_r ve u; r, θ ve z'in fonksiyonları olup, u mil ve burcun radyal deformasyonlarının toplamıdır.

BÜNYE DENKLEMLERİNİN KULLANILMASI

(3) üncü denklemden görünen u radyal deformasyonun hesaplanması için elastisite teorisinden bilinen lineer, elastik, sıkışabilir ve izotrop malzemeye ait bünye denklemlerinden (gerilme ve şekil değiştirme bağıntılarından) yararlanılır. Bünye denklemleri tensörel formda

$$\tau_{kl} = \lambda \epsilon_{ii} \delta_{kl} + 2 \mu \epsilon_{kl} \quad (4)$$

k, l = x, y, z

ile verilir. Başka bir ifadeyle genelleştirilmiş Hooke bağıntıları kompakt şekilde (4) bağıntısıyla gösterilir. Burada λ ve μ Lamé sabitleri olup

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (5)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6)$$

dür. (4) üncü bağıntıdaki uzama oranları ve kayma açıları silindirik koordinatlarda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (a)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (b)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{u}{r} \quad (c)$$

(7)

$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \gamma_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (d)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (e)$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (f)$$

olur. u , v ve w yer değiştirme miktarları r , θ ve z in fonksiyonudurlar. İhtiyaç duyulan diğer bir bağıntı grubu da dengenin diferansiyel denklemleridir. Genel halden; gravitasyonel, manyetik ve atalet kuvvetlerinin kabili ihmal olduğu gözönüne alınırsa, denge denklemleri tensörel formda

$$\begin{aligned} \tau_{kl, k} &= 0 \\ k, l &= x, y, z \end{aligned} \quad (8)$$

ile ifade edilir.

(8) diferansiyel denge denklemlerinin silindirik koordinatlarda açık yazılışı řu şekildedir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

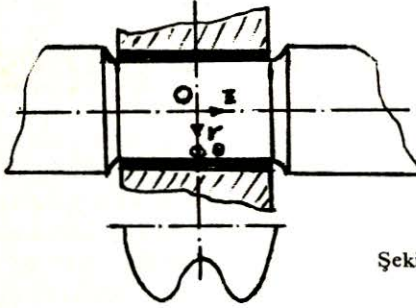
(4) den bulunan gerilme-şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \epsilon_{rr} + \lambda (\epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}) \\ \tau_{\theta\theta} &= (\lambda + 2\mu) \epsilon_{\theta\theta} + \lambda (\epsilon_{rr} + \epsilon_{zz}) \\ \tau_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \epsilon_{zz} + \lambda (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) \\ \tau_{r\theta} &= 2\mu \epsilon_{r\theta} \\ \tau_{rz} &= 2\mu \epsilon_{rz} \\ \tau_{\theta z} &= 2\mu \epsilon_{\theta z} \end{aligned} \quad (10)$$

(7) bağıntıları, (10) bağıntılarında yerine konur ve bunlarda (9) da yerleştirilirse dengenin diferansiyel denklemleri yerdeğiştirmeler cinsinden elde edilir.

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \\
& - (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} (\lambda + 3\mu) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} (\lambda + \mu) + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0 \\
& \mu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} (\lambda + 2\mu) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \mu \frac{v}{r^2} \quad (11) \\
& + (\lambda + 3\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + (\lambda + \mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z} = 0 \\
& (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} (\lambda + \mu) + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} = 0
\end{aligned}$$

Şekil 3'de, Şekil 2'de ele alınan yataktaki mümkün basınç dağılımı gösterilmektedir. Muylunun yatak boyunca sehimi olmadığı kabul edilmektedir.



Şekil: 3 - Kaymalı yataklarda z yönünde mümkün olan basınç dağılımı

Silindirik koordinat takımı Şekil 3'deki gibi yerleştirilirse P basınç dağılımı, rejim halinde yatağın orta enkesatine göre simetri arzeden bir yüzeyle belirlenecektir. Bu özellik, sınır şartlarını ve önerilecek basınç ve deformasyon fonksiyonlarının seçiminde önem taşır. Söz konusu simetri gözönüne alınarak basınç dağılımı çift değişkenli bir Fourier serisi olarak ele alınır:

$$p = \sum \sum P_{m,n} \cdot \cos \frac{2m \pi z}{l} \cdot \cos (n\theta + \beta_{m,n}) \quad (12)$$

Dikkat edilirse P deki orta enkeside göre simetri z değişkeninin sadece cos'lü terimlerle gözükmesinde anlaşılmaktadır. Açısal koordinata göre bir simetri genelde olmayacağından θ değişkeni faz farkı açısı $\beta_{m,n}$ 'le beraber ifade edilmiştir.

Reynolds denklemindeki basınç dağılımının

$$p = \cos \frac{kz}{a} \cdot \cos n\theta \quad (13)$$

formunda olduğunu düşünelim. Buna mukabil mil veya burcun her üç doğrultuda

deformasyonları için

$$\begin{aligned}
 u &= a u(r) \cos \frac{kz}{a} \cdot \cos n\theta \\
 v &= a n v(r) \cos \frac{kz}{a} \cdot \cos n\theta \\
 w &= a k w(r) \sin \frac{kz}{a} \cdot \cos n\theta
 \end{aligned} \tag{14}$$

teklif olunabilir. Bunlar (7) ve (4) bağıntılarıyla birlikte aşağıdaki diferansiyel denklemleri verirler.

$$\begin{aligned}
 C \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{C}{y} \frac{du}{dy} - (n^2 + k^2 y^2 + C) \frac{u}{y^2} + \frac{n}{y} (C-1) \frac{dv}{dy} \\
 - (C-1) \frac{n}{y^2} v + k^2 (C-1) \frac{dw}{dy} = 0 \\
 \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dv}{dy} - \frac{v}{y^2} (n + n^2 C + k^2 y^2) - \frac{1}{y} (C-1) \frac{du}{dy} \\
 - \frac{C}{y^2} (C+1) - \frac{k^2}{y} (C-1) w = 0 \\
 \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dw}{dy} - \left(\frac{n^2}{y^2} + ck^2 \right) w - (C-1) \frac{du}{dy} - \frac{u}{y} (C-1) \\
 - \frac{v}{y^2} n^2 (C-1) = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

(15) denklemleri şu sınır şartları kullanılarak çözülebilir.

Burç için:

$$\begin{aligned}
 r = a' \text{ da} \quad \begin{aligned} \tau_{rr} &= -p \\ \tau_{r\theta} &= 0 \\ \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \tag{a} \\
 r = b' \text{ de} \quad u = v = w = 0 \tag{b} \\
 z = 0 \text{ ve} \quad w = 0 \\
 z = \pm 1/2' \text{ de} \quad \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= 0 \\ \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \tag{c}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Mil için:

$$r = 0' \text{ da} \quad u = v = w = \text{sonlu} \tag{17}$$

(16) (a) ve (b) şartları mil için de geçerlidir.

Genelde (13), (12) basınç dağılımının bir harmoniğini temsil eder. Bu basınç dağılımından doğan deformasyon u ise, basınç genliğinin P_{mn} olması halinde

deformasyon P_{mn} u olacaktır. Bu durumda mil ve burç üzerindeki radyal deformasyon

$$u = \sum \sum P_{m,n} \cdot u(r) \cdot \cos \frac{2 m \pi z}{l} \cdot \cos (n\theta + \beta_{m,n}) \quad (18)$$

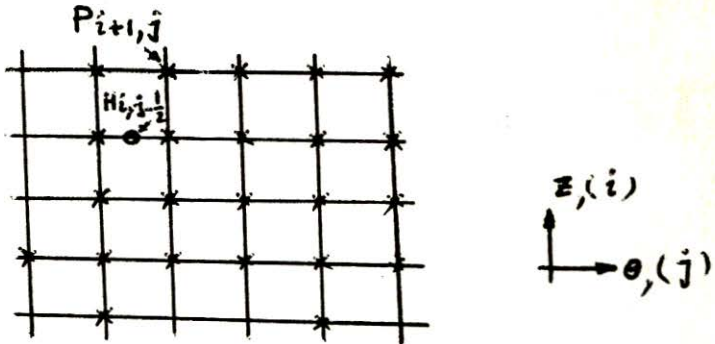
serisiyle ifade edilebilir. Mil ve burç için ayrı ayrı iki u serisi kullanılır ve bulunan bu radyal deformasyonlar

$$u = u_{\text{mil}} + u_{\text{burç}} \quad (19)$$

şeklinde toplanır ve (3) de yerine konur. Bu suretle düzeltilmiş H bulunur ve bu değerlerle (2) ye tekrar dönülür, yeniden p dağılımı hesaplanır ve bu işlem muayyen hata sınırına erişilinceye kadar tekrarlanır, yani iteratif bir çözüm metodu söz konusudur.

Nümerik Çözüm

(2) Reynolds boyutsuz denklemi, türevler merkez sonlu farklar cinsinden ifade edilerek bir sonlu fark denklemine dönüştürülür. Bu sonlu fark denklemi θ ve z üzerine yayılı bir ağı düğüm noktalarında çözülür (Şekil: 4). İteratif işlemin çabuk yakınsaması için kaba ve ince olmak üzere iki ağ kullanılır. Kaba ağda bulunan değerlerle ince ağda çözüme geçilir. Bulunan basınç dağılımından yukarıdaki gibi hesaplanan u lar ile elastik yatak elemanları halindeki H bulunur ve işlem tekrarlanır, yani belirli bir H_r değişiminde yatak elemanları rijit addedilerek p bulunur, bu p den doğan u lar, H_r ye eklenir. Bu düzeltilmiş $H = H_r + u$ değeri ile yeni p dağılımı bulunur ve bu şekilde devam edilir.

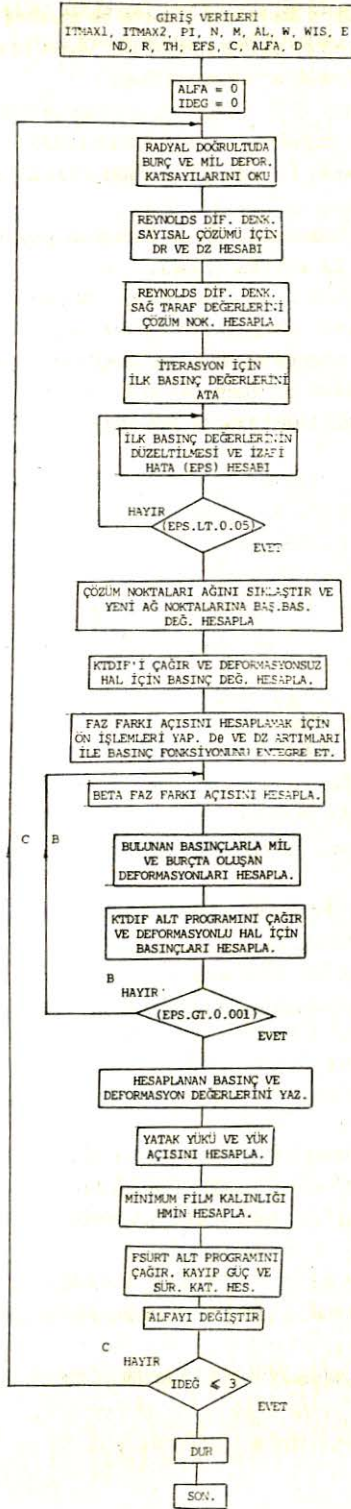


Şekil: 4 - Ağ düzeni

SONUÇLAR

1- Sistem fiziksel olarak incelendiğinde, deformasyonlarla film kalınlığı arttığı için, başta sabit olan eksantrisite de değişecek, mil de merkeze doğru yaklaşacak, dolayısıyla basınç gradyentleri küçülecektir. Bu durum iteratif çözüm yönteminde fiziksel olarak problemin yakınsayacağını göstermektedir. Fakat fiziksel yakınsayan bir model matematiksel iraksayabilir. Bunun için bazı matematik önlem-

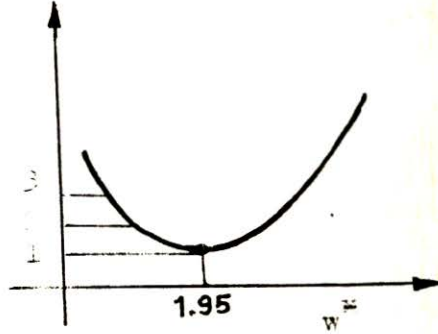
Program Akış Şeması



ler mevcuttur. Bunlardan birisi de aşırı veya düşük relaksasyon parametresi kullanmaktır. w^* relaksasyon parametresi olmak üzere deformasyonların hesabında kullanılacak basınç

$$p_i^k = w^* p_i^k + (1 - w^*) p_i^{k-1} \quad (20)$$

şeklinde hesaplanır. Burada i , bulunulan düğüm noktasını, k ise iterasyon sayısını göstermektedir. Akış diyagramı verilen program için aşırı relaksasyonun yararlı olduğu anlaşılmıştır ve optimum relaksasyon parametresi değeri $w^* = 1,95$ olarak saptanmıştır (Şekil: 5) de w^* değerleriyle program zamanının münasebeti gösterilmektedir.



Şekil: 5 – Rölaksasyon parametresinin optimizasyonu

2- Büyük eksantrisite veya büyük deformasyon değerlerinde düğüm noktalarındaki basınç ve deformasyon değişimleri için tamamen keyfi değerler seçilir ve iterasyon yapılırsa program yakınsamayabilir veya iterasyon sayısı fevkalade fazla olur.

3- Kaba ve ince iki hesap ağı kurulması her zaman tavsiye olunur. Bu suretle yakınsama hızı arttırılmaktadır.

4- Programda müteakip eksantrisite değerleri ve farklı yatak boşlukları için hali hazırda hesaplanmış deformasyon değerlerinin ilk iterasyon adımında kullanıma imkanı mevcuttur.

KAYNAKLAR

1. CAMERON, A.: Principles of Lubrication, Wiley, New York, 1966.
2. JAIN, S.C., SINHASAN, R. and SINGH, D.V.: A Study of EHD Lubrication in a Journal Bearing with piezoviscous Lubricants, Volume 27, 2, pp. 168-176, 1984.
3. O'DONOGHUE, J., BRIGHTON, D.K., HOOKE, C.J.K.: The Effect of Elastic Distortions of Journal Bearing Performance: Journal of Lub. Tech. pp. 409-417, 1967.
4. S. TIMOSHENKO and J.N. GOODIER: Theory of Elasticity, McGraw Hill, 1951.