

STASYONER OLMAYAN ORTAMLARDA STOKASTİK GAUSS-SEIDEL ALGORİTMASI

Osman Hilmi Koçal , Ph.D.

ÖZET

Adaptif filtrelerde kullanılan kontrol algoritmaları , dayandıkları matematiksel taban bakımından ardışıl ve gradyent tabanlı olmak üzere iki ana sınıfta incelenebilirler. Stasyonier ortamlarda her iki sınıftaki algoritmaların ,yakınsama hızı ve işlem karmaşıklığı kriterleri açısından birbirlerine göre üstünlük ve sakıncaları vardır. Ancak stasyonier olmayan ortamlarda gradyent tabanlı algoritmalar istenen yakınsama hızı ve izleme özelliklerini sağlayamamaktadırlar. Bu çalışmada ,yakın zamanda geliştirilmiş ve uluslararası literatürde yer bulmuş , yeni bir yöntem olan stokastik Gauss-Seidel (SGS) algoritmasının stasyonier olmayan ortamlardaki perfonmansı incelenmiştir. Algoritmanın stasyonier olmayan ortamlarda çalışabilir hale getirilmesi için gerekli değişiklikler yapılmıştır. Ardışıl enküçük kareler (RLS) ve SGS algoritmaları , ikinci dereceden lineer *zamanla değişen* bir sistemim transfer fonksiyonu parametrelerinin izlenmesi için kullanılmış ve deneysel sonuçlar karşılaştırılmıştır.

ABSTRACT

Control algorithms, which used in adaptive filters can be classified into two main groups as recursive and gradient based algorithms , from the point of view of the mathematical basis that it depends on. In stationary environments, the algorithms in different groups have convergence rate and computationally complexity advantages on each other. On the other hand , the gradient-based algorithms can not satisfied desirable tracking performance in non-stationary environments. In this paper , a new method , stochastic Gauss-Seidel algorithm (SGS) which produced recently, analyzed in non-stationary environments. Necessary formulation is produced for SGS algorithm. Recursive least squares (RLS) and SGS algorithms are used for tracking of transfer function parameters of a second order *time-varying* linear system and experimental results are compared.

Index terms : adaptive filters , adaptive algorithms.

1. GİRİŞ

Adaptif filtreleme teknikleri sinyal işleme , haberleşme ve kontrol alanlarında geniş bir uygulama alanına sahiptirler [1],[2]. Zamanla değişmeyen sistemlerle ilgili adaptif filtreleme uygulamalarında stasyoner kontrol algoritmaları istenen hız ve izleme performanslarını yerine getirebilmektedirler. Ancak parametreleri zamanla değişen transfer fonksiyonuna sahip sistemler için adaptif algoritmalarından yüksek bir izleme hızı istenir. Haberleşmede kanal dengeleme probleminde kanal parametrelerinin zamanla değişmesi, sinyal işlemede ilgilenilen sinyalin istatistiksel özelliklerinin zamanla değişimi , kontrolde sürtünme katsayısı eylemsizlik momenti gibi parametrelerin zamanla değişmesi sonucu sistem transfer fonksiyonunun zamanla değişir hale gelmesi, adaptif algoritmaların stasyoner olmayan durumlarda çalıştırılmasını zorunlu kılar.

Yeni geliştirilmiş bir yöntem olan stokastik Gauss-Seidel algoritmasının stasyoner ortamlardaki formülasyon, yakınsama, hızı ve işlem karmaşıklığı incelemeleri çeşitli çalışmalarda yapılmıştır [1],[2]. Filtre giriş sinyali $u(n)$, giriş sinyalinin ayrık zamandaki ötelenmiş değerlerinden oluşan giriş vektörü $\mathbf{u}(n)$, filtre çıkış sinyalinin izlemesi istenen sinyal $d(n)$, filtre katsayı vektörü \mathbf{w} giriş vektörünün özilişki matrisi \mathbf{R} ve giriş vektörü ile istenen sinyal $d(n)$ arasındaki çapraz-ilişki vektörü \mathbf{p} olmak üzere SGS algoritması aşağıdaki matris ve skaler eşitlikleri ile tanımlanmıştır [1],[2].

$$\mathbf{w}(n+1) = -\mathbf{R}_D^{-1}(n)(\mathbf{R}_L(n) + \mathbf{R}_U(n))\mathbf{w}(n) + \mathbf{R}_D^{-1}(n)\mathbf{p}(n) \quad (1)$$

$$w_i(n+1) = (p_i(n) - \sum_{j=1}^{i-1} r_{i,j}(n)w_j(n+1) - \sum_{j=i+1}^M r_{j,i}(n)w_j(n)) / r_{0,i}(n) \quad (2)$$

$$r_i(n) = r_i(n-1) + u(n)u(n-i) \quad (3)$$

$$p_i(n) = p_i(n-1) + d(n)u(n-i) \quad (4)$$

(1) eşitliğindeki \mathbf{R}_D , \mathbf{R}_L ve \mathbf{R}_U matrisleri özilişki matrisi \mathbf{R} 'nin sırasıyla, diagonal, alt-üçgen ve üst-üçgen kısımlarından oluşan matrislerdir. (2) eşitliğindeki $r_{i,j}$ özilişki matrisinin

i. satır, j. sütun elemanı ve p_i çapraz-ilişki vektörünün i. elemanıdır. M filtre derecesi olup, r_i ve p_i elemanlarının güncelleştirilmesi (3) ve (4) eşitlikleriyle yapılmaktadır.

2. STASYONER OLMAYAN ORTAMLAR İÇİN YENİ FORMULASYON

Adaptif filtreleme açısından stasyonere olmayan durum ilgilenilen sinyal veya sinyallerin ortalama değeri, varyans gibi istatistiksel parametrelerinin sabit olmayıp, zamanla değişmesi olarak tanımlanmaktadır [3],[4],[5]. Böyle bir durumda, adaptif algoritmaların yapısında bulunan ikinci derece istatistiklerinin de zamanla değişmesi söz konusudur. Ardışıl en küçük kareler (RLS) algoritması için stasyonere olmayan ortamlarda uygulanan güncelleştirme formülleri aşağıda verilmiştir [3].

$$\mathbf{R}(n) = \lambda \mathbf{R}(n-1) + \mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n) \quad , 0 < \lambda < 1 \quad (5)$$

$$\mathbf{p}(n) = \lambda \mathbf{p}(n-1) + \mathbf{u}(n)d(n) \quad , 0 < \lambda < 1 \quad (6)$$

SGS algoritmasında (1) eşitliğinde görünen diagonal, alt-üçgen ve üst-üçgen özilişki matrisleri için de (5) eşitliğindeki gibi bir λ ağırlaştırma katsayısı kullanılarak ardışıl bir yapı elde edilebilir. Bu durumda $\mathbf{R}_D(n)$, $\mathbf{R}_L(n)$ ve $\mathbf{R}_L^T(n)$ için

$$\mathbf{R}_D(n) + \mathbf{R}_L(n) + \mathbf{R}_L^T(n) = \lambda [\mathbf{R}_D(n-1) + \mathbf{R}_L(n-1) + \mathbf{R}_L^T(n-1)] + \mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n) \quad (7)$$

eşitliği yazılabilir. Özilişki matrisini oluşturan özilişki katsayıları da ağırlaştırma katsayısı kullanılarak:

$$r_i(n) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} u(k)u(k-i) \quad (8)$$

$$r_i(n) = \lambda \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^{n-k-1} u(k)u(k-i) + u(n)u(n-i) \quad (9)$$

$$r_i(n) = \lambda r_i(n-1) + x(n)x(n-i) \quad (10)$$

şeklinde ardışıl olarak elde edilebilir. Benzer şekilde çapraz ilişki katsayıları da ağırlaştırma işlemi uygulanarak

$$p_i(n) = \lambda p_i(n-1) + d(n)u(n-i) \quad (11)$$

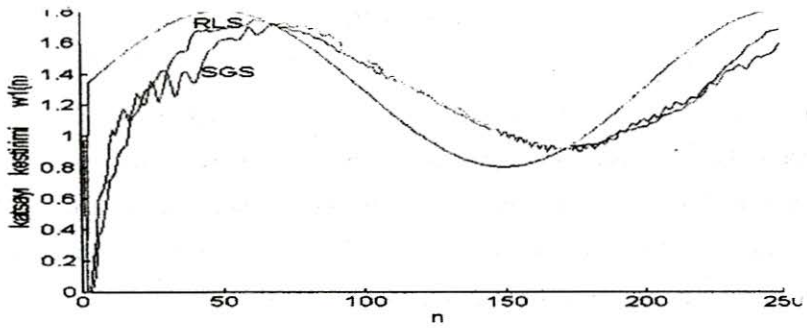
eşitliğindeki gibi ardışıl olarak hesaplanabilir. SGS algoritmasını stasyoner olmayan ortamlarda işletmek için yapılması gereken (3) ve (4) eşitlikleriyle verilmiş olan örnek özilişki ve çapraz ilişki katsayıları yerine (10) ve (11) eşitlikleriyle ardışıl hesaplanabilen ağırlaştırılmış değerlerinin kullanılmasıdır.

3. STASYONER OLMAYAN ORTAM SIMULASYONU

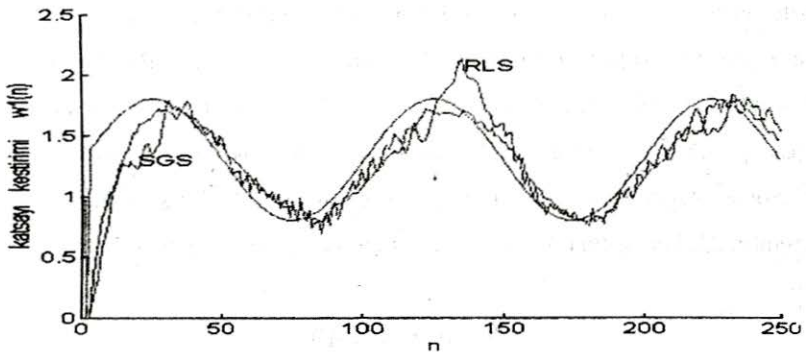
Bu bölümde , stasyoner olmayan ortamda RLS ve SGS algoritmaları kullanılarak elde edilen $w_1(n)$ ve $w_2(n)$ katsayılarının kestirimleri karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Stasyoner olmayan ortamı elde etmek için katsayıları zamanla değişen ikinci dereceden, geri-beslemeli bir sistem kullanılmıştır. Sistemin fark denklemi aşağıda verilmiştir.

$$u(n) = w_1(n)u(n-1) + w_2(n)u(n-2) + v(n) \quad (12)$$

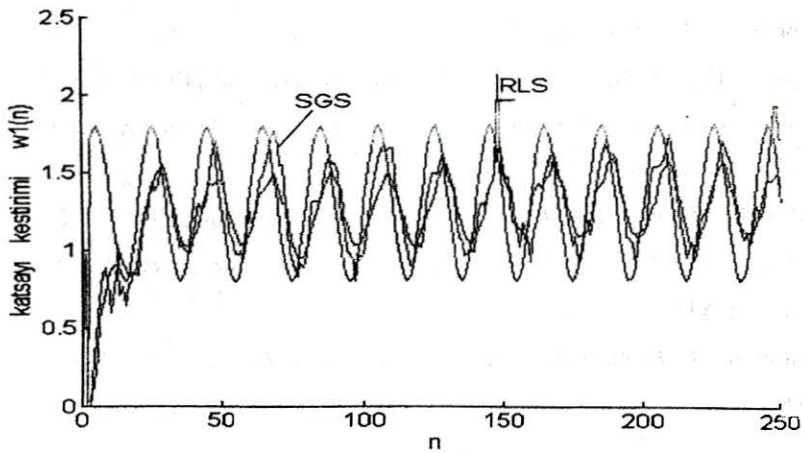
Sistemin girişi $v(n)$, çıkış $u(n)$ olmak üzere, $w(n)$ katsayıları zamanla değiştiği için , $u(n)$ stasyoner olmayan bir sinyaldir. Giriş işareti $v(n)$ olarak ortalaması $m_v = 0$, varyansı $\sigma_v^2 = 0.01$ olan beyaz gürültü kullanılmıştır. Katsayılardan $w_2(n) = -0.975$ değerinde sabit tutularak $w_1(n) = 1.3 + 0.5 \cdot \sin(2\pi f n)$ şeklinde değiştirilmiştir. $f = 0.005$, 0.01 , 0.05 değerleri için sırasıyla şekil 1 , şekil 2 , şekil 3 'deki izleme eğrileri elde edilmiştir. Ağırlaştırma katsayısı λ için , şekil 1,şekil 2 ve şekil 3'de sırasıyla $\lambda = 0.90$, 0.85 ve 0.80 değerleri kullanılmıştır.



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

4. SONUÇ

Bu makalede , stasyonier ortamlarda yakınsama hızı ve işlem karmaşıklığı açısından diğier adaptif algoritmalara göre üstünlükleri olan SGS algoritmasının , stasyonier olmayan ortamlarda da uygulanabilmesi için gerekli düzenlemler yapılmış algoritma için ardışıl bir yapı elde edilmiştir. SGS ve RLS algoritmaları ikinci dereceden zamanla değışien lineer bir sistemin parametrelerini izlemek amacıyla kullanılmıştır. Değışim hızının diğier durumlara göre en yavaş olduğu şekil 1'de SGS ve RLS algoritmalarının değışimi izleme özelliğı yaklaşık olarak birbirinin aynısıdır. Şekil 2'deki daha hızlı değışimin izlenebilmesi için ağırlaştırma faktörü λ bir önceki değışimine göre azaltılmış , RLS için $n=140-150$. adımlar arasında izlemede kötüleşme olduğu gözlenmiştir. Değışim hızının en büyük olduğu şekil 3'te SGS algoritmasının RLS algoritmasına göre fark edilebilir bir üstünlüğü olduğu görülmüştür. Bu durumda RLS için $n=150$ civarında ani bir sıçrama görülmektedir. RLS algoritmasının izleme özelliğinin iyileştirilmesi için ağırlaştırma faktöründeki azaltma kararsızlık noktalarının oluşmasına sebep olmaktadır. Sonuç olarak SGS algoritmasının , sistemin zamanla değışim hızı arttıkça , izleme özelliğı açısından RLS algoritmasına göre daha üstün olduğu söylenebilir.

5. KAYNAKLAR

- [1] Koçal, O.H., "A New Stochastic Algorithm For System Identification"., *Proc. IASTED ,17th Int. Con. on Modelling , Identification and Control , (MIC98)*, Grindelwald , Switzerland , 18-20 February , 1998., vol 1., pp 430-433.
- [2] Koçal, O.H., "A New Approach To Least-Squares Adaptive Filtering"., *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems , (ISCAS98)* , Monterey , California , May 31- June 3 , 1998., vol 5., pp.261-264.
- [3] Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, New Jersey: Prentice-Hall., 1991.
- [4] Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill.,1984.
- [5] Aström,K., Wittenmark,B., *Computer-Controlled Systems.*, 2nd ed., New Jersey: Prentice-Hall., 1990.