

**PARALEL VE HİBRİT MANİPÜLATÖRLERİN İLERİ
KİNEMATİK ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ METOTLAR
GELİŞTİRİLMESİ**

Ercan DÜZGÜN



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PARALEL VE HİBRİT MANİPÜLATÖRLERİN
İLERİ KİNEMATİK ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ METOTLAR
GELİŞTİRİLMESİ**

Ercan DÜZGÜN
0000-0002-6455-9730

Prof. Dr. Osman KOPMAZ
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2023
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Ercan DÜZGÜN tarafından hazırlanan “PARALEL VE HİBRİT MANİPÜLATÖRLERİN İLERİ KİNEMATİK ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ METOTLAR GELİŞTİRİLMESİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof.Dr. Osman KOPMAZ

Başkan	:	Prof. Dr. Osman KOPMAZ 0000-0002-9429-9300 Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı	İmza
Üye	:	Prof. Dr. Recep EREN 0000-0001-9389-0281 Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Tekstil Mühendisliği Anabilim Dalı	İmza
Üye	:	Prof. Dr. Hakan GÖKDAĞ 0000-0003-3070-6365 Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı	İmza
Üye	:	Doç. Dr. Elif ERZAN TOPÇU 0000-0002-6115-3110 Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı	İmza
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Hilal DOĞANAY KATI 0000-0002-2807-8040 Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı	İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
20/03/2023

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

20/03/2023

Ercan DÜZGÜN

TEZ YAYINLANMA FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan “**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**” kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof.Dr. Osman KOPMAZ
21/03/2023

Ercan DÜZGÜN
21/03/2023

ÖZET

Doktora Tezi

PARALEL VE HİBRİT MANİPÜLATÖRLERİN İLERİ KİNEMATİK ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ METOTLAR

Ercan DÜZGÜN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Osman KOPMAZ

Paralel manipülatörler son yıllarda giderek artan kullanım alanı bulmaktadır. Bu manipülatörler esasen kapalı kinematik zinciri içeren hacimsel veya düzlemsel mekanizmalardır. Bu manipülatörlerin ileri ve ters kinematiği seri manipülatörlerle zıt bir karakterdedir. Özellikle ileri kinematik paralel manipülatörlerde karmaşık nonlineer denklemlere sevk etmektedir. Bu zorluğu aşmak için genelde cebirsel çözüm metotlarına başvurulmaktadır. Ancak belirli mimariye sahip paralel manipülatörlerde bu denklemler özel bir form almaktadır. Bu tezde bu özel formdan yararlanılarak analitik-nümerik iki etkin metot geliştirilmiştir. Bunların ilki bazı kökleri manipülatörün hareketli platformunun (diğer bir ifadeyle iş uzvunun-end effector-) muhtemel ve fiziksel olarak mümkün konumlarını verecek olan yüksek dereceli bir polinom vermektedir. Polinomun kökleri nümerik olarak bulunabilmektedir. İkinci metotta iki farklı hata fonksiyonu tanımlanmaktadır. Bunlardan biri Newton-Raphson ve benzeri bir algoritmayla çözülecek olan genel hata fonksiyonu için anlamlı başlangıç şartlarını elde etmekte kullanılmaktadır. Böylece nümerik yöntemin hızlı bir şekilde yakınsaması temin edilmektedir. Her iki metotun kullanımı ikisi hacimsel biri düzlemsel üç farklı manipülatör üzerinde gösterilmiştir.

Bu çalışmada ayrıca Gough-Stewart platformu gibi hacimsel paralel manipülatörlerde ileri kinematik analizde izlenen yoldan farklı olarak sabit platformdan hareketliye doğru geometrik bağıntılar geliştirilmiştir. Klasik yaklaşımda kinematik bağıntılar hareketli platformun sabit platforma göre yönelim matrisinin elemanlarıyla konum vektörünün bileşenlerinin bilinmeyenler olarak yer aldığı denklemler şeklinde elde edilmektedir. Bu nedenle aktüatörlerin sabit platforma bağlantı mafsallarının serbestlik derecesi ancak hız analizi aşamasında önem kazanmaktadır. Buna mukabil bu çalışmada daha ileriye konum analizi aşamasında mafsal türleri göz önüne alınarak kısıt denklemleri ele alınmaktadır.

Hibrit manipülatörler seri ve paralel manipülatörlerin olumlu özelliklerini bir araya getiren mekanik sistemlerdir. Bununla birlikte kinematik bakımdan tamamen ters karakterde olan iki unsurdan oluştuğu için bu tür tasarımların hem ileri hem ters kinematikte yol açacağı muhtemel problemler göz önüne alınarak yapılması gerekir. Bu çerçevede iki farklı tip hibrit manipülatörün ileri kinematiği ele alınmış, konum ve hız analizleri için bir metot geliştirilmiştir. Seri manipülatörlerde ileri kinematik matris

operasyonlarıyla, örneğin Denavit-Hartenberg matrislerini kullanarak nispeten hızlı yapılabildiği hâlde paralel manipülatörlerde bu kolaylık söz konusu değildir. Bu nedenle tezde ele alınan hibrit manipülatörlerin hız analizleri için kinematiğin bilinen bağıntılarına dayanan bir metot geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hibrit manipülatör, Stewart platformu, paralel manipülatör
2023, xiv + 137 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

NEW METHODS FOR FORWARD KINEMATIC SOLUTION OF PARALLEL AND HYBRID MANIPULATORS

Ercan DÜZGÜN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Osman KOPMAZ

Parallel manipulators have been increasingly used in recent years. These manipulators are spatial or planar mechanisms containing a closed kinematic chain. The forward and inverse kinematics of these manipulators are in contrast to serial manipulators. It leads to complex nonlinear equations in forward kinematics of parallel manipulators. In order to overcome this difficulty, algebraic solution methods are generally used. These equations have a special form in parallel manipulators for some certain assembly modes. In this thesis, two effective analytical-numerical methods have been developed by using that special forms. The first method yields a high-order polynomial that some roots of it will give probable and physically possible positions of the manipulator's moving platform (i.e. end effector). The roots of the polynomial can be found numerically. In the second method, two different error functions are defined. One of them is used to obtain meaningful initial conditions for the general error function to be solved by Newton-Raphson and similar algorithms. Thus, rapid convergence of the numerical method is ensured. The use of both methods is demonstrated on one planar and two spatial manipulators.

In this study, geometric relations from fixed platform to mobile platform have been obtained different from the path followed in forward kinematics analysis on spatial parallel manipulators such as the Gough-Stewart platform. In the classical approach, kinematic relations are obtained in the form of equations in which the elements of the orientation matrix of the moving platform relative to the fixed platform and the components of the position vectors are considered as unknowns. For this reason, the degrees of freedom are considered only at the velocity analysis. In this study, the constraint equations take place at the forward position analysis by considering the joint types.

Hybrid manipulators are mechanical systems that combine the positive features of serial and parallel manipulators. However, since it consists of two completely opposite characters in terms of kinematics, such designs should be made by considering the possible problems that will arise in both forward and inverse kinematics. In this context, forward kinematics of two different types of hybrid manipulators are discussed and a method for position and velocity analysis is developed. In serial manipulators, forward

kinematics can be done relatively quickly using matrix operations (such as Denavit-Hartenberg matrices). However, it is not easy for parallel manipulators. For this reason, velocity analysis of the hybrid manipulators that are considered here is done by using classical kinematics methods.

Key words: Hybrid manipulator, Stewart platform, parallel manipulator
2023, xiv + 137 pages.

ÖNSÖZ ve/veya TEŞEKKÜR

Doktora tezimin yürütülmesinde emeği geçen, çalışmalarım süresince her türlü desteği sunan danışman hocam Prof.Dr. Osman Kopmaz'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tez çalışmam sürecinde önerileriyle ve yönlendirmeleriyle katkı sağlayan, Tez İzleme Komitesi üyeleri Prof. Dr. Recep Eren ve Doç.Dr. Elif Erzan Topçu hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Bursa Uludağ Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü Başkanlığı ve yönetimine, hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman sevgi ve destekleri ile bana destek olan sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ercan DÜZGÜN
20/03/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vi
ABSTRACT	viii
ÖNSÖZ ve/veya TEŞEKKÜR	x
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xiii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
2.1. Seri Robotlar ile İlgili Kaynak Araştırması	4
2.2. Paralel Robotlar ile ilgili Kaynak Araştırması	10
2.3. Hibrit Robotlar ile ilgili Kaynak Araştırması.....	16
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	20
3.1. Rijit Cismin Serbestlik Derecesi	21
3.2. Rijit Bir Cismin Konum ve Yönelimi	21
3.3. Koordinat Dönüşümleri, Dönme Matrisleri	24
3.4. Açısal Hız Matrisleri	33
3.5. Jakobiyen	37
3.6. Seri Manipülatörler	39
3.7. Paralel Manipülatörler.....	46
3.8. Bazı Paralel Manipülatörlerde İleri Kinematik İçin İki Yeni Yöntem.....	54
3.8.1. Çöz ve Yerine Koy Metodu (ÇYKM, Solve and Substitute Method)	56
3.8.2. Hata Fonksiyonu Metodu (HFM, Error Function Method)	63
3.9. Hibrit Manipülatörler	64
3.10. Tip 1 Hibrit Manipülatörde İleri Kinematik.....	65
3.10.1. Tip 1 manipülatörde ileri konum analizi.....	68
3.10.2. Tip 1 hibrit manipülatörde ileri hız analizi	77
3.11. Tip 2 Hibrit Manipülatörde İleri Kinematik.....	91
3.11.1. Tip 2 hibrit manipülatörde ileriye hız analizi.....	104
3.11.2. Tip 2 hibrit manipülatörde ivme analizi.....	107
4. SAYISAL UYGULAMALAR	110
4.1. 3-3 Stewart platformu ileri kinematiği (ÇYK metodu).....	109
4.2. 3-3 Stewart platformu ileri kinematiği (HF metodu)	112
4.3. 3-RRR düzlemsel manipülatörün ileri kinematiği (ÇYK metodu)	115
4.4. 3-RRR düzlemsel manipülatörün ileri kinematiği (HF metodu)	117
4.5. Tip 1 hibrit manipülatör için sayısal örnek	119
4.6. Tip 2 hibrit manipülatör için sayısal örnek	123
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	127
KAYNAKLAR	129

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
A,B,C	Stewart platformu alt platform noktaları
P,Q,S	Stewart platformu üst platform noktaları
G_i, H_i, I_i	Paralel manipülatörde rijitlik denklemlerindeki sabit katsayılar
λ, μ, ν	Paralel manipülatörde rijitlik denklemlerindeki bilinmeyen parametreler
ϕ_i	Paralel manipülatörde hareketli uzuv açıları
f_i	Hata fonksiyonu bileşenleri
ϵ	Toplam hata fonksiyonu
G_a	Paralel manipülatör ağırlık merkezi koordinatları
l_i	Paralel manipülatör bacak uzunlukları
\dot{l}_i	Paralel manipülatör bacaklarının çizgisel uzama hızları
φ_i	Paralel manipülatör bacakları ile alt tabla arasındaki açılar
$\dot{\varphi}_i$	Paralel manipülatör bacakları ile alt tabla arasındaki açının açısal hızı
a	Paralel manipülatör alt tabla kenar uzunluğu
b	Paralel manipülatör üst tabla kenar uzunluğu
R	Rotasyon matrisi

Kısaltmalar	Açıklama
SP	Stewart platformu (Gough-Stewart Platformu)
ÇYK	Çöz ve Yerine Koy Metodu (Solve and Substitute Method)
HF	Hata Fonksiyonu Metodu (Error Function Method)

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Rijit cismin yerleşiminin tanımlama yolları.	23
Şekil 3.2. Cisme koordinat takımı bağlayarak konumu ve yönelimi tanımlama.	24
Şekil 3.3. Düzlemde koordinat dönüşümü.	25
Şekil 3.4. \overline{OP} vektörünün dönmesi.	27
Şekil 3.5. Cismin z eksenine etrafında ϕ kadar dönmesi halinde cisme bağlı takımın yeni konumu.	31
Şekil 3.6. Tekil konumlar.	39
Şekil 3.7. Denavit-Hartenberg notasyonu.	41
Şekil 3.8. Denavit-Hartenberg notasyonunda koordinat takımları arasındaki ilişki.	42
Şekil 3.9. Seri manipülatör şematik gösterimi.	44
Şekil 3.10. Farklı tipte Stewart platformları.	50
Şekil 3.11. 3-3 Stewart platformunda eşdeğer bacak uzunluklarının gösterilmesi.	51
Şekil 3.12. 3-RRR tipi düzlemsel paralel manipülatör.	59
Şekil 3.13. Literatürde rastlanan hibrit manipülatörlerden örnekler.	65
Şekil 3.14. Tip 1 hibrit manipülatör.	66
Şekil 3.15. İncelenen hibrit manipülatörün paralel manipülatör geometrisi.	67
Şekil 3.16. Tip 1 hibrit manipülatörün paralel kısmı.	68
Şekil 3.17. Seri manipülatörün G_a noktasının koordinatlarının tayini.	69
Şekil 3.18. $G_a x_a y_a z_a$ 'nın yerleşimi hakkında.	76
Şekil 3.19. Koordinat takımlarının birim vektörleri arasındaki ilişki hakkında.	76
Şekil 3.20. Hibrit manipülatörün \vec{u}_1, \vec{u}_2 ve \vec{u}_3 vektörlerinin tanımlanması.	83
Şekil 3.21. İncelenen hibrit manipülatör.	92
Şekil 3.22. Seri kısımda koordinat takımlarının $+z_0$ tarafından görünüşü.	92
Şekil 3.23. Geriye konum analizinde iki farklı çözüm alternatifi.	93
Şekil 3.24. Sadece yönelimi kontrol eden paralel manipülatör.	94
Şekil 3.25. Paralel manipülatörün köşe koordinatları.	95
Şekil 3.26. DP bacağına φ_1 ve θ_1 kardan açıları.	95
Şekil 3.27. E'de kardan açıları.	98
Şekil 3.28. Paralel manipülatörün F noktası ayrıntısı.	100
Şekil 4.1. Stewart platformu için $\lambda - (q, v)$ grafiği.	112
Şekil 4.2. Stewart platformu için hata fonksiyonu grafiği.	113
Şekil 4.3. Düzlemsel manipülatör için q ve v 'ye karşılık λ varyasyonları.	117
Şekil 4.4. Düzlemsel manipülatör için $\lambda - \epsilon$ grafiği.	117
Şekil 4.5. Tip 1 hibrit manipülatör konum ve oryantasyonu.	121

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 4.1.	3-3 Stewart platformuna ait fiziksel parametreler..... 109
Çizelge 4.2.	3-3 Stewart platformunda kısıt denklemlerindeki katsayılar 109
Çizelge 4.3.	3-3 Stewart platformu için çözüm polinomunun kökleri 110
Çizelge 4.4.	Stewart platformunda fiziksel olarak mümkün olan çözümler 110
Çizelge 4.5.	3-3 Stewart platformu için ileri konum çözümleri..... 113
Çizelge 4.6.	Düzlemsel manipülatörün fiziksel boyutları 114
Çizelge 4.7.	Düzlemsel manipülatörün sabit denklem katsayıları 114
Çizelge 4.8.	Düzlemsel manipülatör için polinomun kökleri..... 115
Çizelge 4.9.	Düzlemsel manipülatörün için λ , μ , ν değerleri 115
Çizelge 4.10.	Düzlemsel manipülatör için λ , μ , ν çözümleri 116
Çizelge 4.11.	Paralel manipülatör kısmı için C_i , D_i , E_i katsayıları (Tip 1) 118
Çizelge 4.12.	Paralel manipülatör kısmı için G_i , H_i , I_i katsayıları (Tip 1)..... 119
Çizelge 4.13.	Paralel manipülatör kısmı için p , q , r , u , v , w değerleri (Tip 1) 119
Çizelge 4.14.	Paralel manipülatör kısmı için A , B , C , D polinomları (Tip 1) 119
Çizelge 4.15.	Polinomun kökleri (Tip 1)..... 120
Çizelge 4.16.	Olası λ , μ , ν değerleri (Tip 1)..... 120
Çizelge 4.17.	Paralel manipülatör kısmı için A_i , B_i , C_i katsayıları (Tip 2)..... 122

1. GİRİŞ

Endüstrileşmenin artmasıyla birlikte otomasyon sistemleri gelişmiş ve robot manipülatörlerin kullanımı yaygınlaşmıştır. İlk endüstriyel robot manipülatör, Unimate robot kolu, George Devol tarafından 1950 yılında icat edilmiştir. Victor Scheinman, Stanford robot kolu olarak bilinen robot manipülatörü, ve PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly veya Programmable Universal Manipulation Arm) robot manipülatörü geliştirmiştir. Fakat endüstriyel robotların, endüstride yoğun şekilde kullanılması 1980'li yılları bulmuştur. 1978 yılında, Yamanashi Üniversitesi'nden Hiroshi Makino tarafından geliştirilen SCARA robot da endüstriyel robot manipülatörler içerisinde önemli ve bilinen robotlardandır. SCARA robotun kinematikteki basitlik, robotun kontrolünü basit ve robotu hızlı kılmıştır. Bundan dolayı, Japonya, 1980'li yıllarda dünyanın en fazla robot üreten ülkesi haline gelmiştir. 1980'li yılların ikinci yarısında algılayıcıların (sensör) endüstriyel robotikte kullanılmasıyla birlikte zor ve karmaşık görevlerin robotlar tarafından yapılmasına olanak sağlamıştır.

Öte yandan, otomasyon sisteminde hız önemli bir faktör olduğu için klasik seri manipülatörlerin yerine paralel manipülatörler de kullanılmaya başlamıştır. Ayrıca, paralel manipülatörler ile yüksek hassasiyet de sağlanabilmektedir. Paralel robot manipülatörlerin en bilinen örneklerinden birisi Delta robottur ve 1992 yılında geliştirilmiştir. Kinematik yapısı sebebiyle Delta robot dakikada 300 al-bırak (pick and place) formunda operasyon hızına çıkabilir.

Paralel robotların en çok tanınanlarından birisi de Gough-Stewart platformudur. Dr. Eric Gough 1954 yılında otomobil tekerleklerini test etmek için bir test düzeneği geliştirmiştir. 1965 yılında D. Stewart tarafından uçuş ve uzaydaki hareketi simüle etmek için bir düzenek tasarlanmıştır. Gough ve Stewart'ın tasarımlarının ikisi de tam anlamıyla bugün bilinen Gough-Stewart platformunu karşılamaz, çünkü iki tasarımdan esinlenilerek yeni bir platform tasarlanmıştır. İki tasarımcıya da ithafen Gough-Stewart platformu denmek âdet olsa da kısaca Stewart platformu olarak anılmaktadır. Günümüzde, Gough-Stewart platformu uçak, tank simülasyonu, araba yarışı oyun simülasyonları, eğlence sektöründe artırılmış gerçeklik uygulamalarında, tıp sektöründe ameliyatlarda vb. kullanılmaktadır. Delta robot iş uzvu dönme (oryantasyon) hareketine izin vermezken Stewart platformu

hem öteleme hem dönme hareketini sağlayabilmektedir. Paralel manipülatörler elbette bunlarla sınırlı değildir. Kinematik yapısının izin verdiği ölçüde çeşitli paralel manipülatörler tasarlanmıştır.

Seri manipülatörler uzuvların birbirine eklenmesiyle oluştuğundan geniş bir çalışma uzayı sağlarken paralel manipülatörlerde daha küçük bir çalışma uzayı söz konusudur. Öte yandan seri manipülatörlerde uzuvların konum hataları iş uzvuna toplanarak aktarıldığından hassasiyetteki hata artar. Buna karşılık paralel manipülatörlerde bu durum söz konusu değildir; yani uzuvların konum hataları birbirine eklenmez. En büyük konum hatası önem arz eder. Bu yüzden, paralel manipülatörler, seri manipülatörlere göre daha hassastır. Ayrıca paralel manipülatörler daha rijit bir yapıya sahiptir.

Seri ve paralel mekanizmaların bir arada kullanılmasıyla hibrit (melez) manipülatörler tasarlanabilmektedir. Hibrit manipülatör tasarımları ile seri ve paralel manipülatörlerin üstün tarafları bir araya getirilebilmektedir. Böylece, hem seri hem de paralel manipülatörden daha üstün nitelikte farklı tipte hibrit mekanizmalar yapılabilmektedir. Bir Stewart platformunun üzerine seri robot eklenerek çalışma uzayı artırılmış bir hibrit manipülatör yapılabilir. Nitekim literatürde bu şekilde yapılmış mekanizmalara rastlanmaktadır. Örneğin denizdeki dalga hareketi ile dalgalanan geminin üzerinde bir vincin ucunu uzayda sabit tutmaya çalışan bir simülasyon uygulaması örnek verilebilir. Tam tersine bir seri robot manipülatörün iş uzvuna oturtulmuş paralel manipülatör de tasarlanabilir. Seri robot ile geniş bir çalışma uzayında gezinme imkanı sağlanırken paralel manipülatör ile de hassas konum ve oryantasyon sağlanabilir. Tıp alanında böyle manipülatörlere rastlanmaktadır.

Paralel manipülatörler son yıllarda giderek artan kullanım alanı bulmaktadır. Bu manipülatörler esasen kapalı kinematik zinciri içeren hacimsel veya düzlemsel mekanizmalardır. Bu manipülatörlerin ileri ve ters kinematiği seri manipülatörlerle zıt bir karakterdedir. Özellikle ileri kinematik paralel manipülatörlerde karmaşık nonlineer denklemlere sevk etmektedir. Bu zorluğu aşmak için genelde cebirsel çözüm metotlarına başvurulmaktadır. Bu metotlar genel 6-6 kurulum formuna uygulanabilir niteliktedir. Ancak belirli mimariye sahip paralel manipülatörlerde bu denklemler özel bir form

almaktadır. Bu tezde söz konusu özel formdan yararlanılarak analitik-nümerik iki etkin metot geliştirilmiştir. Bunların ilki bazı kökleri manipülatörün hareketli platformunun (diğer bir ifadeyle iş uzvunun-end effector-) muhtemel ve fiziksel olarak mümkün konumlarını verecek olan yüksek dereceli bir polinom vermektedir. Polinomun kökleri nümerik olarak bulunabilmektedir. İkinci metotta iki farklı hata fonksiyonu tanımlanmaktadır. Bunlardan biri Newton-Raphson ve benzeri bir algoritmayla çözülecek olan genel hata fonksiyonu için anlamlı başlangıç şartlarını elde etmekte kullanılmaktadır. Böylece nümerik yöntemin hızlı bir şekilde yakınsaması temin edilmektedir. Her iki metotun teorisi ve uygulaması ikisi hacimsel biri düzlemsel üç farklı manipülatör üzerinde açıklanmıştır. Bunlar 3-3 (veya 6-3) Stewart platformu, 3-RCS hacimsel paralel manipülatör ve 3-RRR düzlemsel paralel manipülatördür.

Bu çalışmada ayrıca Gough-Stewart platformu gibi hacimsel paralel manipülatörlerde ileri kinematik analizde izlenen yoldan farklı olarak sabit platformdan hareketliye doğru geometrik bağıntılar geliştirilmiştir. Klasik yaklaşımda kinematik bağıntılar hareketli platformun sabit platforma göre yönelim matrisinin elemanlarıyla konum vektörünün bileşenlerinin bilinmeyenler olarak yer aldığı denklemler şeklinde elde edilmektedir. Bu nedenle aktüatörlerin sabit platforma bağlantı mafsallarının serbestlik derecesi ancak hız analizi aşamasında önem kazanmaktadır. Buna mukabil bu çalışmada daha ileriye konum analizi aşamasında mafsal türleri göz önüne alınarak kısıt denklemleri ele alınmaktadır.

Hibrit manipülatörler seri ve paralel manipülatörlerin olumlu özelliklerini bir araya getiren mekanik sistemlerdir. Bununla birlikte kinematik bakımdan tamamen ters karakterde olan iki unsurdan oluştuğu için bu tür tasarımların hem ileri hem ters kinematikte yol açacağı muhtemel problemler göz önüne alınarak yapılması gerekir. Bu çerçevede tezde iki farklı tip hibrit manipülatörün ileri kinematiği ele alınmış, konum ve hız analizleri için bir metot geliştirilmiştir. Seri manipülatörlerde ileri kinematik matris operasyonlarıyla, örneğin Denavit-Hartenberg matrislerini kullanarak nispeten hızlı yapılabildiği hâlde paralel manipülatörlerde bu kolaylık söz konusu değildir. Bu nedenle tezde ele alınan hibrit manipülatörlerin hız analizleri için kinematiğin bilinen bağıntılarına dayanan bir metot geliştirilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Seri robot manipülatörler veya kısaca seri manipülatörler, endüstride en çok kullanılan robot manipülatör tipidir. Seri manipülatörlerde uzuvlar birbirine seri (ardışık) olarak bağlıdır ve açık kinematik zincir yapısına sahiptir. Genellikle, 6 serbestlik derecesine sahip ve insan kol yapısına benzer olan (antropomorfik) robot manipülatörler kullanılmaktadır.

Paralel robot manipülatörler veya paralel manipülatörler kapalı kinematik zincir yapısına sahiptir, uzuvlar birbirlerine paralel olarak bağlıdır.

Hibrit manipülatörler, seri ve paralel manipülatörün birleşiminden ibaret melez manipülatörlerdir.

Bu tezde paralel ve hibrit manipülatörlerde kinematik problemi ile ilgilenildiğinden aşağıda seri, paralel ve hibrit robot manipülatörler ile ilgili literatürdeki önemli çalışmalardan bahsedilecektir.

2.1. Seri Robotlar ile İlgili Kaynak Araştırması

Seri robot manipülatör kinematiği temelleri detaylı bir şekilde çeşitli kaynaklarda açıklanmıştır (Angeles, 2012; Bottema ve Roth, 1990; McCarthy, 1990).

Denavit-Hartenberg (D-H) gösterimi ilk defa, mekanizmaların kinematiğinde standart bir gösterim elde etmek için önerilmiştir (Denavit ve Hartenberg, 1955). Daha sonra, diğer araştırmacılar da bu gösterimi benimsemiş ve kullanımı yaygınlaşmıştır. Bazı araştırmacılar ise standard D-H gösterimi yerine modifiye D-H gösterimini önermiştir (Craig ve ark., 2005; Khalil ve Dombre, 2002; Yoshikawa, 1990). Açık zincire sahip manipülatörlerin ileri kinematik analizinin Homojen Transformasyon Matrisleri kullanılarak nasıl yapılacağı Paul ve Shimano (1978) tarafından gösterilmiştir. Kapalı zincire sahip manipülatörlerin geri kinematiği ise Pieper (1969) tarafından incelenmiştir.

Robot manipulatörlerde hassasiyet önemli bir konudur ve robot manipulatörlerde kalibrasyon ile ilgili çalışmalara başvurulmuştur. Roth ve ark. (1987) robot kalibrasyonunda modelleme, ölçüm ve düzeltme konularını incelemişlerdir.

İş uzvu (end effector) konumunun ve yönünün doğrudan ölçümü için harici sensörlerin kullanılmasını gerektirmeyen yöntemler önerilmiştir (Edwards ve Galloway, 2016).

Ters kinematiğin çözümü için tekrarlamalı algoritmalara dayalı sayısal yöntemler L. W. Tsai ve Morgan (1985) ve Goldenberg ve ark. (1985) tarafından geliştirilmiştir. Whitney (1969) ilk defa geometrik Jakobiyen kavramını tanıtmıştır. Analitik Jakobiyen kavramı ise Khatib (1987) sunulmuştur. Jakobiyen transpozisine dayanan ters kinematik algoritması, Sciavicco ve Siciliano (1986) tarafından önerilmiştir.

Manocha ve Canny (1994), altı serbestlik dereceli (6R mafsala sahip) bir robot manipulatörün geri kinematiğini çözmek için tek değişkenli bir polinom bulmaya ve köklerini çözmeye dayalı bir matematiksel yöntem geliştirmişlerdir. Çok değişkenliden tek değişkenliye indirgenmiş polinom bir matris determinantı olarak ifade edilebilmektedir ve kökleri bir özdeğer problemine indirgenerek hesaplanabilmektedir. Algoritma, sembolik ön işleme (pre-processing), matris hesaplamaları ve çeşitli diğer sayısal teknikleri içermektedir. Geliştirdikleri yöntemin tüm seri manipulatörlerin ters kinematiklerine uygulanabileceğini ifade etmektedirler.

Köker ve ark. (2004), üç eklemlili bir robotik manipulatör için yapay sinir ağı kullanılarak ters kinematik çözüm sunmuşlardır. Kübik yörünge planlamasını kullanarak robotik manipulatörün iş hacminde birçok başlangıç ve bitiş noktası belirlemişlerdir. Daha sonra gerçek dünya koordinatlarına (x, y, z) göre tüm açılar hesaplanarak sinir ağının eğitim kümesi oluşturulmuştur. Son olarak, ters kinematik problemini çözmek için tasarlanmış bir sinir ağı kullanmışlardır. Tasarlanan yapay sinir ağı verilen (x, y, z) Kartezyen koordinatlarına göre hassas şekilde doğru açıları vermiştir. Yapay sinir ağının ters kinematik probleminde kullanılabileceğini göstermişlerdir.

Aydın ve Kucuk (2006), Euler bilekli (Euler wrist) 6-DOF endüstriyel robot manipulatörlerinin ikili kuarterniyonlar (dual quaternion) kullanarak kapalı form

çözümlerini sunmuşlardır. Seri robot manipülatörleri için ters kinematik probleminin başlıca zorlukları, tekillikler ve nonlineerliktir. Kuarterniyon vektör çiftlerinin, aynı anda döndürme ve ötelemeyi temsil etmek için verimli matematiksel araçlar olduğu da gösterilmiştir.

Alavandar ve Nigam (2008), ANFIS'in (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System) eğitim verilerinden öğrenme yeteneğini kullanarak bir yapay sinir ağı modeli geliştirmişlerdir. Geliştirdikleri yapay sinir ağı modelini, endüstriyel bir robot manipülatörün geri kinematik çözümünü elde etmede kullanmışlardır ve örnek olarak iki ve dört serbestlik dereceli iki robot üzerinde, uygulamalarının etkinliğini göstermişlerdir. ANFIS (Adaptive Neural-Fuzzy Inference Systems, Uyarlamalı Sinirsel Bulanık Çıkarım Sistemi), hibrit öğrenme algoritmasından ötürü daha az sayıda iterasyon adımı ile yakınsar. Bu nedenle eğitilmiş ANFIS, ters kinematiğin hızlı ve kabul edilebilir çözümlerini sağlamak için kullanılabilir. Bu durumun ANFIS'i ters kinematik çözümlerin haritasını çıkarmak için alternatif bir yaklaşım haline getirdiğini ifade etmişlerdir.

Toz ve Küçük (2010), eğitim amaçlı MATLAB grafik kullanıcı arayüzüne (GUI) dayalı dinamik simülasyon için yeni bir robot araç kutusu geliştirmişlerdir. Sundukları araç kutusu, Langrange-Euler ve Newton-Euler formülasyonlarına dayalı olarak endüstriyel robot manipülatör dinamik denklemlerinin etkileşimli gerçek zamanlı simülasyonunu ve görselleştirmesini sağlamaktadır. Geliştirdikleri robot kütüphanesi içerisinde 16 tane endüstriyel robotun modeli bulunmaktadır. Yazılım, etkileşimli olarak bir robotu analiz etmek, ileri ve geri dinamik gibi robot dinamiğinin çevrim dışı programlamasını yapmak ve ayrıca robot dinamiğinin temel ilkelerini çok gerçekçi bir şekilde etkileşimli olarak öğretmek ve simüle etmek için kullanılabilir.

Küçük ve Bingül (2014), 6-DOF (6 serbestlik dereceli) 16 adet endüstriyel robot manipülatör için ters kinematik çözümleri, kapalı form denklemlerinin varlığına dayalı olarak analitik ve sayısal olarak çözmüşlerdir. Kapalı formda çözülemeyen robot manipülatörlerin ters kinematiği için yeni bir sayısal algoritma önermişlerdir. Geliştirdikleri Yeni Ters Kinematik Algoritmasının (NIKA) performansını göstermek için, NIKA'dan elde edilen simülasyon sonuçlarını, iyi bilinen Newton-Raphson

Algoritmasından (NRA) elde edilenlerle karşılaştırmışlardır. Seçilen ilk tahmin açıları Jakobiyen matrisini tekil yaptığında NRA başarısız olurken, NIKA, tekil konfigürasyon için bile iyi ve hızlı yakınsama sağlamaktadır.

Siddique Ahmed Ghias ve ark. (2016), akıllı tahmin yanıt yöntemini kullanarak beş eklemlili bir robot manipülatör için ters kinematik çözümü geliştirmişlerdir. Akıllı tahmin algoritması olarak geriye yayımlı yapay sinir ağı modeli kullanmışlardır.

Ayyıldız ve Çetinkaya (2016), esnek bir üretim sisteminin al ve yerleştir (pick-and-place) işlemleri için dört serbestlik dereceli bir seri robot manipülatörü tasarlamış ve geliştirmişlerdir. Manipülatörün kontrol sürecinin en önemli kısımlarından biri olan ters kinematik denklemlerinin çözümü, genetik algoritma (GA), parçacık sürü optimizasyonu (PSO) algoritması, kuantum parçacık sürüsü optimizasyonu (QPSO) olmak üzere dört farklı optimizasyon algoritması kullanılarak elde edilmiştir. Bu algoritmalar, manipülatörün iş uzvunun hareketi için iki farklı senaryo ile test edilmiştir. Manipülatör iş uzvunu çalışma uzayındaki noktalara başarılı bir şekilde ulaştırmak amacıyla manipülatörün ters kinematiklerini optimizasyon algoritmaları kullanarak çözmüşlerdir. Dört algoritma çözüm süresine, iş uzvunun konum hatasına ve algoritmada kullanılan gerekli popülasyon sayısına göre karşılaştırılmıştır. QPSO'nun geliştirilen manipülatörün ters kinematik çözümü için etkin bir şekilde kullanılabileceğini göstermişlerdir.

Zaplana ve Basanez (2018), fuzûli (redundant) serbestlik derecesine sahip seri manipülatörlerin ters kinematik problemi için kapalı formda çözümler üretmek için yeni bir yöntem geliştirmişlerdir. Literatürde bulunan diğer yöntemlerden farklı olarak, bu çalışmada açıklanan yöntemde, eklem değişkenleri parametrikleştirilmekte veya istenen bir değerde sabitlenerek fuzûli serbestlik derecelerinin verimli kullanımı sağlanmaktadır. Uzuv sayısı azaltılmış manipülatörler için kapalı form yöntemler kullanıldığından, bu çalışmada önerilen prosedür, fazla uzva sahip manipülatörler için tasarlanmış sayısal yöntemlere göre belli avantajlara sahiptir.

Zhao ve ark. (2018), Geleneksel Denavit–Hatenberg yönteminde bitişik eksenlerin paralel veya paralele yakın olduğunda meydana gelen tekillik probleminin kaçınmak

amacıyla kinematik modelleme için vida teorisine dayalı üstel çarpım metodu geliştirmişlerdir. Ters kinematiğin sekiz çözümü elde edilmiş ve önerilen algoritmanın doğruluğu matematiksel olarak ispat edilmiştir.

Dereli ve Köker (2019), yedi serbestlik dereceli bir seri manipülatörün ters kinematik çözümü için kuantum davranışlı bir parçacık sürüsü algoritması kullanmışlar ve sonuçları ateşböceği algoritması (FA), parçacık sürüsü optimizasyonu (PSO) ve yapay arı kolonisi (ABC) gibi diğer sürü teknikleri ile karşılaştırmışlardır. Yapılan testler, QPSO'nun hem konum hatası hem de çözüm süresi açısından diğer algoritmalarından çok daha iyi sonuç verdiğini göstermektedir.

Yılmaz ve ark. (2020), altı eksenli bir seri manipülatörün mekanik yapısını incelemişlerdir. Kartezyen koordinatları ile eklem açıları arasındaki geçişi sağlayan ileri kinematik analizi Denavit-Hartenberg yöntemi kullanılarak yapmışlardır. Eklem değişkenlerinin hızı ile iş uzvunun hızı arasındaki ilişkiyi elde etmek için Jakobiyen matrisi üretmişlerdir. Sistemin Lagrange-Euler hareket denklemlerini çıkarmışlardır. Tasarım aşaması üç boyutlu ortamda gerçekleştirildikten sonra bu veriler MATLAB-Simscape ortamına aktararak fiziksel sistem tabanlı dinamik modeli elde etmişlerdir. Ardından robotun üç boyutlu tasarımını ve seçilen motorların uygunluğunu doğrulamak için ters dinamik problemi çözmüşlerdir. Bu maksatla dinamik modele konum, hız ve ivme değerleri girilerek eklem momentleri elde edilmiştir. Ters dinamikte kullanılan yörüngeler, beşinci dereceden bir polinom fonksiyonu kullanılarak hesaplanmıştır. MATLAB/Simulink simülasyon ortamındaki dinamik modele PID tabanlı denetleyici uygulanmış ve ileri dinamik problemi incelenerek sistem test edilmiştir.

Şegota ve ark. (2020), bir robot manipülatörün eklem torqlarını dolayısıyla kullandığı elektrik enerjisi miktarını düşürmek için evrimsel algoritmalara dayalı optimizasyon yöntemi geliştirmişlerdir. Fakat geliştirdikleri optimizasyon algoritması noktadan noktaya yörünge planlamasında kullanılabilir ve sürekli yörünge planlaması için uygun değildir. Nonlineerlikten dolayı sürtünmeyi ihmal etmişlerdir.

Jin ve ark. (2022), altı serbestlik dereceli seri tip bir endüstriyel robotun kinematiği ve dinamiğinin matematiksel bir modelini oluşturarak modelin doğruluğunu MATLAB yazılım simülasyonunu kullanarak doğrulamışlardır. Hata modeline dayalı olarak her bir parametre hatasının iş uzvu üzerindeki hatasının etki ağırlığını hesaplamak için bir yöntem önermişlerdir. Eklem açılarında çoklu çözüm optimizasyonu yapıldıktan sonra sonuçlar üzerinde doğrusal enterpolasyon, parabolik enterpolasyon, polinom enterpolasyonu uygulanmış ve mukayese edilmiştir. Robotun kinetik özellikleri simüle edilip sonuçlar deneylerle kontrol edilmiştir.

Khanesar ve Branson (2022), endüstriyel robotlar için statik ve sanki statik hızlarda (doğrusal hızlar 5 cm/s'den az) kayan kipli bir bulanık kontrol yaklaşımı geliştirmişlerdir. Manipülatör koordinatlarını kartezyen koordinatlardan eklem açısı uzayına çevirmek için kovaryans sınırlamalı genişletilmiş Kalman filtresi kullanmışlardır. Çevrilen eklem açıları daha sonra kayan kipli bir bulanık denetleyici kullanılarak endüstriyel robot dinamiklerini kontrol etmek için bir referans sinyali olarak alınmıştır. Önerdikleri denetleyicinin kararlılığı ve sağlamlığını uygun bir Lyapunov fonksiyonu kullanılarak kanıtlanmışlardır. Önerdikleri denetleyicinin, bir robot modelinde belirsizliklerin varlığında sistemi yüksek performansla kontrol edebildiğini göstermişlerdir.

Baressi Şegota ve ark. (2022), endüstriyel robot manipülatör dinamiğinin modellenmesi için Newton-Euler ve Lagrange-Euler metotlarının kullanımını incelemişlerdir. Önceden var olan dinamik modelleri kullanarak sentetik veri kümesi oluşturmuşlardır ve ayrıca makine öğrenimi kullanarak endüstriyel bir manipülatörün dinamiğini modellemişlerdir. 20.000 veri noktasından oluşan veri setini oluşturmuşlar ve hiperparametre ayarı için rastgele arama (Random Search) kullanarak manipülatörün her eklemi için bir tane ve toplam tork için bir tane olmak üzere yedi ayrı çok katmanlı algılayıcı yapay sinir ağını oluşturmuşlardır. Geliştirilen model yalnızca kullanılan endüstriyel manipülatör için geçerli olduğundan ve modelleme sürecinin farklı robotlar için tekrarlanması gerekeceğinden, yaklaşımın sınırlı olduğu açıktır. Yine de bu yaklaşımın, geometrik olarak karmaşık manipülatörlerde, özellikle daha yüksek sayıda serbestlik derecesine sahip olanlarda, kesin bir tork değerinin gerekli olmadığı uygulamalarda uygulanabileceğini belirtmişlerdir.

Toquica ve Motta (2022), robot çalışma uzayı içindeki birkaç küçük bölgeden toplanan ölçüm verilerini kullanarak endüstriyel robotları kalibre etmeye yönelik bir yaklaşım sunmuşlardır.

2.2. Paralel Robotlar ile ilgili Kaynak Araştırması

Düzlemsel veya hacimsel paralel manipülatörler, yüksek rijitlikleri, doğrulukları ve yük taşıma kapasiteleri nedeniyle tercih edilmektedir. Ancak, seri manipülatörlerden daha küçük çalışma alanlarına sahiptirler. Stewart platformu (SP) iyi bilinen bir hacimsel manipülatör türüdür. Bu manipülatörler, aktüatörlerle birbirine bağlanmış bir sabit ve bir hareketli platforma sahiptir. Bu manipülatör tipi için 6-6, 6-3, 3-3 vb. gibi çeşitli konfigürasyonlar mevcuttur (Jean-Pierre Merlet, 2006). Bu sayılar, sırasıyla sabit ve hareketli platformlardaki mafsal sayısına atfedilir. Seri manipülatörlerin aksine, paralel manipülatörlerin ileri kinematiği, ters kinematikten daha karmaşıktır. Bu nedenle birçok araştırmacı, diğer paralel manipülatörlerle birlikte SP'nin ileri kinematiğine odaklanmıştır. İleri (direkt) kinematikte, aktüatörlerin kinematik parametrelerinden hareketli platformun kinematik parametrelerine, yani hareketli platformun duruşuna, hızına ve ivmesine geçiş için döngü denklemleri ve rijitlik koşulları kullanılır.

Paralel düzlemsel manipülatörler (PPM), gereksiz serbestlik istenmediği sürece genellikle üç serbestlik derecesine (serbestlik derecesi) sahiptir. İlgili literatürde 3 RPR veya 3 RRR gibi çeşitli tasarım varyantlarına rastlanmaktadır. C.M. Gosselin ve ark., üç serbestlik dereceli düzlemsel manipülatör için yeni bir tasarım önermiştir. Merlet (1996), farklı tipte düzlemsel paralel manipülatörlerin ileri kinematiğini inceledi. Clément M. Gosselin ve Merlet (1994), Sturm teoremini kullanarak düzlemsel paralel manipülatörlerin ileri kinematiği için maksimum sayıda çözüm elde ettiler. Önerilen polinomun altı kökü olmasına rağmen, kalan iki çözüm mümkün olmadığı için yalnızca dört çözümün olduğunu gösterdiler. Hamdoun ve ark. (2015), 3RRR paralel robotun ters kinematik modelini gerçekleştirdi ve çalışma uzayı analizi yaptı. Sayed ve ark. (2020), dört farklı sinir ağı algoritması kullanılarak 3-RRR paralel düzlemsel bir robotun kinematik ve dinamik analizi gerçekleştirmişlerdir.

Stewart platformuyla ilgili ayrıntılı literatür için, Dasgupta ve Mruthyunjaya (2000)'nin çalışmasına başvurabilir. K. M. Lee ve Shah (1988) doğrusal aktüatörlerin döner eklemlerle sabit plakaya bağlandığı 3-dof hacimsel paralel bir platform üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmadan ilham alan Nanua ve ark. (1990) 6-3 ve 3-3 Stewart platformları için bir çözüm prosedürü geliştirdi. J.-P. Merlet (1991a) üçgen şekilli hareketli bir platforma sahip 6-dof Stewart platformunun onaltıncı derece bir polinom ile çözülebileceğini gösterdi. Başka bir makalede J.-P. Merlet (1991b), paralel manipülatörlerin minimum dereceli ve tekil konfigürasyonlarının çözüm polinomunu belirlemek için sembolik hesaplama kullanmıştır. Rouillier (1995), çözüm polinomunun gerçek köklerini saymak için bir yöntem önerdi. Wampler (1996) Soma koordinatlarını kullanarak genel bir Stewart platformunun ileri kinematikini de inceledi.

Hem hacimsel hem de düzlemsel paralel manipülatörler için ileri kinematik analiz, kinematik kısıt denklemlerine dayanan bir dizi doğrusal olmayan denkleme yol açar. Bu denklemler uygun dönüşümlerle cebirsel denklemlere dönüştürülebilir. Araştırmacılar bu denklemleri Bezout yöntemi (Sommese ve Wampler, 2005; Der-Ming, 1999), Gröbner bazları yöntemi (Mourrain, 1993; Husty, 1996; Innocenti, 2001), aralık analizi yöntemi (J.-P. Merlet, 2004; Didrit ve ark., 1998) gibi farklı yöntemler kullanarak çözmeye çalışmışlardır. Cebirsel eleme/eliminasyon yöntemi (Huang ve ark., 2010) ve Newton-Raphson yöntemi (Der-Ming, 1999; Xie ve ark., 2021) gibi sayısal yöntemler veya konformal geometrik cebir yöntemlerini kullanma (G. Zhu ve ark., 2021), belli başlı farklı çözüm yöntemleridir. Ancak, bazı özel durumlarda, bu denklem seti daha basit tekniklerle çözülebilir (Nanua ve ark., 1990).

Innocenti ve Parenti-Castelli (1990), Stewart platform mekanizmasının ileri konum analizini, kapalı formda elde etmişlerdir. Platformun onaltıncı dereceden bir polinoma dönüştürülebildiğini göstermişlerdir.

Genel bir altı serbestlik dereceli paralel manipülatörün bağlantı uzunluklarının ölçümü, platformunun gerçek benzersiz duruşunu belirlemek için yeterli değildir. Bu yüzden, Tancredi ve Merlet (1994), dört ekstra sensör eklemenin genel olarak bir ve tek çözüme yol açtığı gösterilmiştir. Bu çözümün analitik bir formunu türetmişler ve ardından

sağlamlığını sensör hatalarına göre incelemiştir, manipülatör için hata haritalarını çıkarmışlardır.

Dasgupta ve Mruthyunjaya (1996), genel bir 6-6 Stewart platformunun ileri kinematikini ele alarak çözüm için yeni ve verimli bir algoritma sunmuşlardır. Sunulan algoritma, temel olarak, genel bir 6-6 Stewart platformunun tüm gerçek montaj konfigürasyonlarını tamamen geometrik unsurlar ile aramaya dayalıdır. Algoritma, temel olarak, üç bacağın doğru uzunluklarına ve diğer üç bacak uzunluğundan doğruluğu varsayılan üç parametreye dayalı olarak geçici konfigürasyonları tahmin etmeyle ilgilidir. Arama çok hassas ise, hesaplama maliyeti çok yüksek olur ve çok sayıda aramayı tahmin etme olasılığı vardır. Öte yandan, arama çok kabaysa ve tolerans yakınsa, tahmin edilmeyen bazı çözümlerin tamamen atlanması olasılığı vardır.

Wampler (1996), geliştirilmiş Stewart platformu için, altı bacak uzunluğu verildiğinde problemin genel olarak en fazla 40 tekil olmayan çözümü olabileceğini sayısal olarak ispat etmiştir.

Dietmaier (1996), iki gövdenin her birindeki altı bağlantı noktasının bir merkez noktasına göre simetrik olarak düzenlendiği özel bir simetrik Stewart-Gough platformu türünü analiz etmiştir. Simetrik olarak eşit aktüatör uzunlukları ile karakterize edilen bu platformların özel bir alt grubu için, ileri kinematik probleminin oldukça kolay bir şekilde çözülebileceği ve bu tür platformların 24'e kadar konfigürasyona sahip olabileceğini göstermiştir.

Dunlop ve Jones (1997), üç serbestlik dereceli paralel mekanizmanın ileri ve ters kinematikini kapalı formda üretmişlerdir. Çalışmalarındaki mekanizma, döner mafsallar aracılığıyla bir tabana üç kol ile bağlıdır. Diğer üç kol da pasif döner mafsallar aracılığıyla bir üst platforma bağlıdır. 3-DOF'li paralel mekanizmasının ileri ve ters kinematikini elde etmişlerdir. İleri kinematik denklemler, 16 olası platform konumunu vermektedir, bunların tümü fiziksel olarak gerçekleşmez. Yani köklerin çoğu karmaşık eşlenik çiftlerden oluşur. Ters kinematik denklemlerin her bir kol için iki olası pozisyon verdiğini göstermişlerdir, bu da ters kinematik problemin sekiz olası çözümü olduğunu gösterir.

Dasgupta ve Mruthyunjaya (1998), en genel mimariye sahip Stewart platform manipülatörü için Newton-Euler yaklaşımıyla ters dinamik bir formülasyon sunmuşlardır. Belirli bir yörüngeyi izlerken bacaklardaki aktüatör kuvvetlerini hesaplayan bir algoritma geliştirilmişlerdir. Bir bacağa ait tüm bilinmeyenler, diğerleri elenerek bir bilinmeyen cinsinden ifade edilmiştir. Son olarak, altı bacak için bu altı bilinmeyen, platformun dinamik denklemlerinden çözülmüş ve aktüatör kuvvetleri hesaplanmıştır. Sonuçlar, bacak ataletinin dikkate alınmasının, Stewart platform manipülatörünün dinamiği için oldukça önemli olduğunu göstermektedir, çünkü genellikle aktüatörlerde talep edilen kuvvetlerin %20-50'sine katkıda bulunduğu bulunmuştur.

Der-Ming (1999), Stewart platform mekanizmasının ileri kinematik analizini sunmuşlardır. Çözümlerin hızlı ve verimli bir şekilde elde edilebilmesi için geleneksel kapalı form formülasyon yerine Newton–Raphson yöntemini temel alan basit bir metod önermişlerdir.

Liu ve ark. (2000), Kane denkleminde dayanan Stewart platformunun ileri dinamik denklemlerini farklı bir metodla elde edip modellemişlerdir. Bu yöntemde, Stewart platform manipülatörünün her bir ayağı bağımsız alt yapı olarak ele alınmıştır. Geleneksel Newton-Euler yöntemi ve Lagrange formülasyonu ile karşılaştırıldığında, bu çalışmadaki önerilen modelleme sürecinin daha basit ve sistematik olduğunu ve nihai dinamik denklemlere ulaşmanın basit olduğunu göstermişlerdir.

Yurt ve Ozkol (2001), çalışmalarında 6-3 tipi Stewart platformunun kinematiği, dinamiği ve kontrolünü incelemişlerdir. İlk olarak, ele alınan mekanizmanın dinamik modeli verilmiştir. İkinci olarak hassas bir konumlandırma ve iyi bir dinamik performans modeli elde edecek bir kontrol algoritması geliştirmişler ve algoritmalarını çeşitli başlangıç değerleri ile test etmişlerdir. Kontrol algoritmalarında PD (orantı+türev) etkili kontrol algoritması kullanmışlardır. Geliştirdikleri bu PD algoritmasının %1'den daha az konumlandırma hatasıyla çalıştığını göstermişlerdir.

Harib ve Srinivasan (2003), ters kinematik, konum, hız ve ivme kinematiği için kapalı form çözümleri sunmuşlardır. Bu çözümlerin bir parçası olarak, mekanizmanın ters Jakobiyen matrisi ve bunun zamana göre türevi türetilmiştir. Genel haldeki Stewart Platformlarının ileri kinematik problemi için Newton Raphson yöntemine dayalı sayısal yinelemeli bir çözümü kullanmışlardır. Gerçek çözüme yeterince yakın bir ilk tahminin mevcut olması koşuluyla, birkaç iterasyondan sonra kabul edilebilir bir çözüme ulaşabileceğini göstermişlerdir. Güç verilmeyen pasif eklemlerin açısal hızları ve ivmeleri için kinematik analizleri sunulmuştur.

J. P. Merlet (2004), Gough tipi bir paralel robot ele alıp ileri kinematiği çözmeye, yani verilen ortak koordinatlar için platformun tüm olası pozlarını belirlemeye izin veren aralık analizine dayalı verimli bir algoritma sunmuştur. Bu yöntemin avantajı tüm çözümleri, önceden seçilmiş bir doğrulukla hesaplanabilecekleri ve tekil konfigürasyonların algılanabileceği şekilde sağlanmasıdır.

Bai ve ark. (2006), hareket denklemlerini oluşturmak ve çok gövdeli sistemler için Lagrangian yöntemiyle uyarlanabilir bir PID kontrol yasası tasarlamak için yeni bir yaklaşım sunmuşlardır. En genel Stewart Platformu için kapsamlı hareket denklemleri geliştirmişlerdir.

Mahmoodi ve ark. (2008), Stewart platformunun ters dinamik problemini çözmek için yeni bir Newton-Euler yöntemi sunmuşlardır. Geliştirdikleri yöntem, gereksiz matris manipülasyonlarını elimine etmektedir. Modellerinin doğruluğunu MATLAB ve SIMULINK ortamında simülasyonlarla doğrulanmış ve sonuçları literatürdeki başka çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırmışlardır. Geliştirdikleri yöntemin, önceki yöntemlere kıyasla üç kat daha hızlı olduğunu kanıtlamışlardır.

Vossoughi ve ark. (2010), paralel mekanizmaların (PM'ler) çalışma alanı tespiti için optimizasyona dayalı bir algoritma önermişlerdir. Önerdikleri algoritmada, nokta nokta arama ile birlikte optimizasyon yaklaşımının uygulanması sayesinde, nokta nokta aranan uzayın boyutunu (ve dolayısıyla harcanan zamanı) önemli ölçüde azaltılmışlardır. Optimizasyon tekniği olarak Parçacık Sürüsü Optimizasyonu kullanmışlardır. Bu

algoritma, hem düzlemsel hem de hacimsel paralel manipülatörlerin çalışma alanının bulunmasında ve oryantasyonu sabit tutularak çalışma uzayının bulunmasında uygulanabilmektedir.

K. Li ve Wen (2011), 6 serbestlik derecesine sahip 6-RSS paralel robotun tam dinamik modelini oluşturmuşlardır. Ters kinematik için kapalı form denklemleri ve eklem uzayından görev uzayına hız ve ivme dönüşümlerini vermişlerdir. Newton-Euler yöntemine dayalı olarak bir zincirdeki kuvvet ve momentin denge denklemlerini elde etmişler ve 6-RSS paralel mekanizmasının rijit cisim dinamiği modelini sunmuşlardır.

Bangjun ve ark. (2012), Stewart platformlarının dinamik performansını artırmak için Evrimsel Çok Amaçlı Optimizasyon (Evolutionary Multi-objective Optimization, EMO) tabanlı optimizasyon algoritması geliştirmişlerdir.

Fichter (2016) genel Stewart platformunun kinematik denklemlerini türetmiş, dinamik denklemleri formüle etmiş (hidrolik silindir kütleleri ihmal edilmiş ve eklemler sürtünmesiz kabul edilmiştir) ve birkaç tekil konfigürasyonu sıralayarak tekillik koşulunu incelemiştir.

Azar ve ark. (2017), paralel robot manipülatörleri için farklı kontrol tasarım yaklaşımlarını, literatürdeki iki farklı kontrol stratejisi sınıfı ile sunmuşlardır. Çalışmalarında, modelden bağımsız kontrol ve dinamik kontrol stratejileri kullanmışlardır.

Chen ve ark. (2020), Gough-Stewart paralel robotunun kapalı döngü kontrolünü gerçekleştirmişlerdir. Bu robotun kontrolü için kayan kipli kontrolcü (sliding mode controller) ve süper bükümlü kontrolcü (super twisting controller) kullanmışlardır. Simülasyon sonuçları ile dinamik modelin geçerliliğini ve iki kontrolörün kararlılığını kanıtlamışlardır. Bu iki denetleyiciyi karşılaştırarak, süper bükümlü denetleyicinin özellikle peg-in-hole işleminde kullanılan kayan kipli denetleyiciden daha iyi olduğunu göstermişlerdir.

Yang ve ark. (2022), genel Stewart platformunun gerçek zamanlı ileri kinematiği için, eklemler arasında dikeylik, paralellik ve kesişme gibi hiçbir geometrik kısıtlamanın varsayılmadığı bir geometrik algoritma önermişlerdir.

Stewart-Gough platformunun ileri kinematiği, altı serbestlik derecesinde yüksek hassasiyetli konumlandırma ve algılama için hayati önem taşır. Yin ve ark. (2022), ileri kinematiğin çözümünü, ters kinematik hesaplama ile giriş uzunluk vektörlerine karşılık gelen en iyi konumu aramaya çalışmışlardır. Yakınsama hızını iyileştirmek ve yerel yakınsamanın üstesinden gelmek için parçacık sürüsü optimizasyonunu (PSO) kullanmışlardır. Önerdikleri SA-PSO (Simulated Annealing Particle Swarm Optimization) algoritması yalnızca yakınsama hızını artırmakla kalmamış aynı zamanda güvenilirliği ve başarı oranını da artırmıştır. Algoritma parametrelerinin optimizasyonundan sonra, rastgele platform bacak uzunluğu vektör seçimi ile SA-PSO'nun başarı oranı sürekli olarak %99,9'un üzerindeyken, PSO'nun sonuçları %93 ile %100 arasındadır. Geleneksel Newton-Raphson yöntemiyle karşılaştırıldığında, SA-PSO yönteminin başarı oranının daha yüksek ve daha az zaman aldığını göstermişlerdir. Altı serbestlik dereceli bir platformda fiziksel bir deney gerçekleştirip verilen algoritmanın güvenilir ve doğru olduğunu ispat etmişlerdir.

Son zamanlarda paralel manipülatörlerin ileri kinematiği ile ilgili yayınlanan makaleler, makine öğreniminin kullanımı (Chauhan ve Vundavilli, 2022), ileri kinematik problemini uygun bir ters kinematik analizine dönüştürmek (Yin ve ark., 2022) veya yeni analitik/analitik-sayısal birleşik yöntemler önermek üzerine odaklanmıştır. H. Zhu ve ark. (2022) Stewart platformunun ileri kinematiği için bir sinir ağının ağırlıklandırma faktörünü optimize ederek iyileştirme gibi konulara odaklanmaktadır.

2.3. Hibrit Robotlar ile ilgili Kaynak Araştırması

Tsai ve Joshi (2002), bir konum mekanizması ve bir yönlendirme mekanizması içeren yeni tip bir hibrit manipülatör geliştirmişlerdir. Daha sonra bu konum mekanizmalarının ters kinematiğini ve Jakobiyen matrisi türetmişler.

Tanev (2006), paralel-seri tipte hibrit manipülatörün çalışma uzayının belirlemesi için yeni bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu algoritma, hibrit manipülatör için ters kinematik problemin elde edilen kapalı form çözümüne dayanmaktadır.

Mohammadipanah ve Zohoor (2009), sekiz serbestlik derecesine sahip bir hibrit robot manipülatörünün kinematik ve dinamik analizini yapmışlardır. Ele aldıkları hibrit robot manipülatör, bir seri mekanizma tarafından takip edilen paralel bir robottan oluşmaktadır. Paralel mekanizma üç öteleme serbestlik derecesine sahipken seri mekanizmanın beş serbestlik derecesi vardır. Tanıtılan manipülatör, geniş bir çalışma uzayına sahiptir. İleri kinematik çözümler kapalı formda açıklanmıştır. Teorik sonuçlar sayısal bir örnekle doğrulanmıştır. Robotun ters dinamik analizi, yinelemeli Newton-Euler ve Lagrange dinamik formülasyon yöntemleri kullanılarak sunulmuştur. Çok adımlı bir ark kaynağı işlemi gerçekleştirmek için tanıtılan manipülatörün harekete geçirme enerjisini azaltma konusunda oldukça yetenekli olduğunu göstermişlerdir.

Rahmani ve Ghanbari (2014), iki adet üst üste konulmuş Stewart platformunun paralel yapısına sahip bir seri-paralel manipülatörün kinematik analizini sunmuşlardır. Hibrit manipülatörün kinematik modelini çıkarmışlardır. Denklemlerdeki nonlineerlikten dolayı, çözüm için dalgacık sinir ağını (Wavelet Network-WNN) uygulamışlardır. Ayrıca sinir ağı sonuçlarını, kapalı form çözüm (CFS) ile karşılaştırarak önerilen WNN'nin yüksek doğruluk performansını göstermişlerdir.

Lu ve Dai (2016), lineer aktif ayaklara sahip üç veya daha fazla paralel manipülatörün birbirine seri olarak bağlandığı hibrit manipülatörün kinematikini ve dinamiğini incelemişlerdir. Hareketli uzuvların hızları ile giriş hızları arasındaki matematiksel ilişkiyi çıkarmışlardır. Hibrit manipülatörün yer değiştirmesi, hızı ve ivmesi ve ardından tüm hareketli uzuvların atalet kuvveti ve yerçekimi sabit koordinat sistemine dönüştürülmüştür. 3SPR + 3SPR + 3RPS tipi manipülatörün kinematik ve dinamik aktif/kısıtlı kuvvetlerini çözmüş ve doğrulamışlardır.

Küçük ve Güngör (2016), tıbbi ameliyatlarda kullanılmak üzere bir hibrit manipülatör geliştirmişlerdir. Bu hibrit manipülatörün ilk kısmı üç serbestlik dereceli olan SCARA

tipi seri robot iken, bu seri robotun ucuna Stewart platformu benzeri bir manipülatör eklenmiştir. Geliştirdikleri hibrit manipülatörde, iş uzvu arzu edilen konumuna seri robot kısmıyla ulaşılırken yönelim/oryantasyonu ise paralel manipülatör ile ayarlanmaktadır. Çalışmalarında, bu yeni tipteki hibrit manipülatörün geri kinematığını çözmüşlerdir.

Yeshmukhametov ve ark. (2017), seri, paralel ve hibrit manipülatörlerin birbirine göre avantaj/dezavantaj ve karşılıklı karşılaştırmalarını vermişlerdir. Robotun çalışma uzayı açısından, hibrit manipülatörlerin üstünlüğünü göstermişlerdir.

Zhonglin Wang ve ark. (2017), 2-URR-RRU tipi paralel manipülatörün dinamik denklemlerini Newton-Euler metotuyla çıkarmışlardır. Vida teorisine dayalı analiz gerçekleştirmişlerdir. Kuvvet performansına dayalı optimizasyon gerçekleştirmişlerdir.

Zhang ve ark. (2018), beş serbestlik derecesine sahip seri-paralel hibrit manipülatörü (2R1T 2UPU/SP tipinde) incelemişlerdir. İnceledikleri hibrit manipülatörün konum, hız ve ivme analizinin ardından ters dinamik modelini sanal işler (virtual work) prensibini kullanılarak çıkarmışlardır. Çalışma uzayını, MATLAB ve CAD programlarını kullanarak görselleştirmişlerdir. MATLAB ve ADAMS yazılımı aracılığıyla ters kinematik ve dinamik modeller için sayısal benzetimleri yapıp sonuçların kinematik ve dinamik modeller ile doğruluğunu göstermişlerdir.

Xu ve ark. (2020), beş serbestlik derecesine sahip (2R1T paralel mekanizması R(2RPR)R/SP) bir hibrit manipülatör geliştirmişlerdir. Çalışma uzayı ve hareket/kuvvet iletiminin performansı gibi indeksler göz önüne alarak, manipülatörün paralel kısmının ana boyutlarını optimize etmişlerdir. Mekanizmanın ters kinematığına dayanan bir çalışma uzayı arama yöntemi önermişlerdir.

Y. Li ve ark. (2020), altı serbestlik dereceli, insan koluna benzer bir geometriye sahip seri-paralel hibrit manipülatör tasarlamışlardır. İnsansı kolun kinematığında Denavit-Hartenberg (DH) yöntemini kullanmışlardır, dinamik denklemleri ise hem Lagrange hem de sanal iş (virtual work) yöntemleri ile çıkarmışlardır. Dinamik performans değerlendirme indeksi ve kuvvet haritalama performans değerlendirme indeksi

geliştirmişlerdir. Robotun maksimum hızda veya minimum enerji tüketecek tarzda hareketini sağlayacak bir genetik algoritma geliştirmişlerdir.

Zesheng Wang ve ark. (2021), insan kolunun hareket özelliklerinden esinlenerek yedi serbestlik dereceli bir seri-paralel hibrit insansı robotik kol geliştirmişlerdir. Çalışmalarında, daha hızlı tepki, daha düşük enerji ve daha yüksek satibilite ile noktadan noktaya bir görevi yürütmek için çok amaçlı yörünge planlama optimizasyonu yapmışlardır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu çalışmada belirli tasarıma sahip düzlemsel ve hacimsel paralel manipülatörlerde ileri kinematik için iki farklı metot geliştirilmiş ve bunun yanı sıra iki farklı tipte hibrit (hybrid=melez) manipülatörün ileri kinematik çözümü mevcut literatürden farklı bir şekilde çıkarılmıştır. Esasen hibrit manipülatörler seri ve paralel manipülatörlerin kombinasyonu olduğundan çalışmada bütünlüğü sağlamak amacıyla seri ve paralel manipülatörlerle ilgili temel kavram ve tanımlar gerek duyulduğu ölçüde gözden geçirilecektir. Bu maksatla önce rijit bir cismin serbestlik derecesi, konumu (position) ve yönelimi (orientation) konusu incelenecektir. Bilhassa seri ve paralel manipülatörlerde düz (direct/forward=ileri) ve ters (inverse/backward=geri) kinematik bağıntıları verilecektir. Paralel manipülatörlerin incelenmesi sırasında bu tez çerçevesinde ileri kinematik için geliştirilen iki özgün yöntem sunulacaktır. Son olarak hibrit manipülatörlerde bu konular ele alınarak farklı yapıda iki hibrit manipülatör için düz kinematik bağıntılarının çıkarılışı açıklanacaktır. Bu bölümde daima kartezyen koordinat takımları esas alınacaktır.

3.1. Rijit Cismin Serbestlik Derecesi

Hareketlerinde herhangi bir kısıtlama olmayan rijit bir cismin üç boyutlu uzayda altı serbestlik derecesine sahip olduğu yukarıda ifade edilmişti. Buradaki serbestlik derecesinden kasıt *geometrik serbestlik derecesidir*. Rijit cismin bir de kinematik derecesi vardır. Bu serbestlikler ise rijit cismin çakışık (collinear) ve aynı düzlemde (co-planar) olmayan üç eksen boyunca keyfi miktarda ötelenmesine ve keyfi miktarda dönebilmesine karşılık gelir. Bu nedenle kinematik serbestlik derecesine bazen *cismin sonsuz küçük yer değiştirmelerine ait serbestlik derecesi* de denmektedir. Diğer cisimlerle irtibatının şekline bağlı olarak bir cismin kinematik serbestlik derecesi ile geometrik serbestlik derecesini ifade eden sayılar aynı olabilir veya olmayabilir. Bu durum sistemin *holonom* veya *holonom olmayan* (non-holonom) şeklinde sınıflandırılmasına yol açar. Holonom olmayan hallerde geometrik serbestlik derecesi kinematik serbestlik derecesinden büyüktür. Holonom olmayan sistemlerde kısıt denklemleri kolayca integre edilerek fuzulî (redundant) koordinatlar esas (principal) koordinatlar cinsinden ifade edilemez. Böyle durumlarda *hareket denklemlerinin tanımlayıcı (descriptive) formuyla* yola devam edilir.

Fuzulî koordinatlar kolayca yok edilemediğinden hareket denklemleri *durum uzayı (state space) formuna* getirilemez. Holonom mekanik sistem bir başlangıç konfigürasyonundan ardışık konfigürasyonlardan geçerek nihâi durumuna getirildikten sonra tekrar ilk durumuna döndürülmek istense daha önce geçtiği konfigürasyonlardan geçerek ilk hâline döner. Holonom olmayan sistemde böyle bir mecburiyet yoktur. Holonom olma ve olmama hususu özellikle yürüyen robotlar için önem arz eder.

Bir mekanik yapıda (mekanizma, makine, manipülatörde vs. gibi) genel olarak bir takım uzuvlardan hareket verilir ve diğer bazı uzuvlardan da hareket alınır veya bazı uzuvlar belli konumlara getirilerek diğer uzuvların belli konumlara gelmesi sağlanır. Konumlanması kontrolümüzde olan uzuvların; yani tahrik uzuvlarının (driving links) veya başka bir ifadeyle mekanik yapıdaki uzuvların konuşlanmasını tanımlayan parametrelerden (koordinatlardan) kontrol edebildiklerimizin sayısı o mekanik yapının serbestlik derecesidir. Esasen bu sayı genel halde tahrik motorları sayısı ile uzunluk ve açı gibi bazı değerlerin ayarlama imkânları sayısının toplamıdır (örneğin bir uzvun boyu değiştirilebilir ve bilahare bu boy sabit tutulur). Bu imkânlar yoksa serbestlik derecesi genel olarak tahrik uzuvları sayısına eşittir.

3.2. Rijit Bir Cismin Konum ve Yönelimi

Rijit bir cismin uzaydaki yerleşimi aşağıdaki şekillerde tanımlanabilir:

-*Cismin üç noktasının verilmesi.* Noktalar A,B ve C olsun. Normalde üç nokta için üçer koordinattan dokuz koordinat verilmesi gerekir. Ancak AB, BC ve CA mesafelerinin korunması gerektiğinde aşağıdaki bağıntılar geçerlidir (Şekil 3.1a):

$$\begin{aligned}
 \|\overrightarrow{AB}\| &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = l_{AB}^2 \\
 \|\overrightarrow{BC}\| &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = l_{BC}^2 \\
 \|\overrightarrow{CA}\| &= (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = l_{CA}^2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(3.1) denkleminde dokuz koordinatörün hepsinin keyfi verilemeyeceği, bunların ancak koordinat sayıları – kısıt sayısı = 9-3=6 adedinin keyfi seçileceği anlaşılır. Neticede rijit bir cismin geometrik serbestlik derecesinin altı olduğu görülmektedir.

-Cismin iki noktası ile bu iki noktayı bağlayan eksen etrafındaki sonlu dönme açısının verilmesi. Noktalar A ve B, dönme açısı φ olsun. Burada bir adet rijitlik şartı vardır:

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = l_{AB}^2 \quad (3.2)$$

İki nokta altı koordinat demektir. Ancak bu koordinatlardan beşi keyfi verilebilir. Ayrıca φ açısı keyfidir. Neticede cismin serbestlik derecesi yine altı olur (Şekil 3.1b). Cismin iki noktasının koordinatlarını vermek yerine bir noktasının mesela A noktasının koordinatları ve bu noktadan geçen dönme eksenini tarif eden

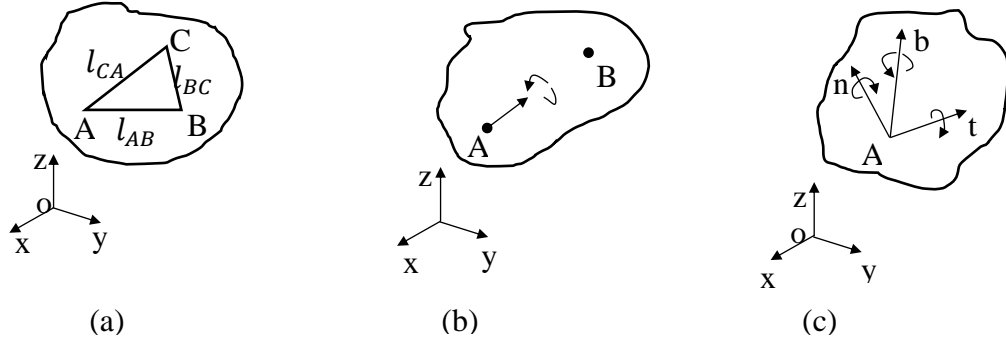
$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad (3.3)$$

şeklinde bir birim vektör verilerek de dönme eksenini tanımlanabilir. Ancak

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \quad (3.4)$$

olduğundan bu üç bileşenden ikisi keyfi seçilebilir, üçüncüsünü (3.4) bağıntısı tayin eder. Dolayısıyla dönme eksenini tek biçimde (unique) tanımlanmış olur. Bilahare cismin bu eksen etrafında dönme açısı verilerek cismin konum ve yönelimi tanımlanmış olur. Neticede yine altı sayının verilmesi söz konusudur. İleride görüleceği üzere bu tarz yönelim tanımlamada dönme eksenini temsil eden birim vektörün bileşenleri Euler parametrelerini teşkil eder.

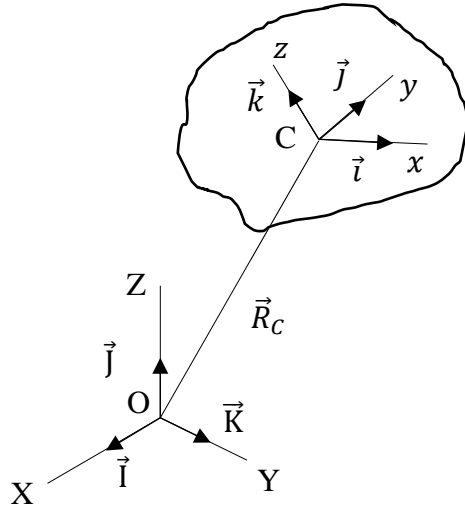
-Cismin bir noktasının ve bu noktadan geçen ve hem çakışık hem de aynı düzlemde olmayan üç eksen etrafında dönme açılarının verilmesi. Bu durumda keyfi bir noktanın üç koordinatı ile üç dönme açısı toplam altı büyüklük söz konusu olup rijit cismin serbestlik derecesinin altı olduğu bir kez daha anlaşılır (Şekil 3.1c).



Şekil 3.1. Rijit cismin yerleşiminin tanımlama yolları.

Bu altı parametrenin üçü cismin konumunu (yani cismin bir noktasının uzaydaki yerini) belirlemek içindir. Diğer üçü ise cismin yöneliminin tanımlanmasında kullanılır. Buraya kadar açıktan ifade edilmemekle beraber cismin konum ve yönelimini tanımlayan koordinatların sayısal değerlerinin kullanılan koordinat takımına bağlı olarak değişeceği açıktır. Başka bir ifadeyle cismin yerleşimi invaryanttır (değişmezdir); ancak bu yerleşimi temsil eden parametrelerin (koordinatlarının) sayısal değerleri kullanılan koordinat takımına göre farklı olacaktır.

Diğer bir yöntem cisme bir koordinat takımı bağlamak ve bu koordinat takımının eksenlerine ait birim vektörlerinin referans takıma göre bileşenlerini vermek suretiyle olur (Şekil 3.2). Cisme bağlı bu koordinat takımının orijini olarak dinamik problemlerinde kolaylık sağlaması nedeniyle çoğu kez cismin kütle merkezi seçilir. Ancak böyle bir mecburiyet elbette yoktur.



Şekil 3.2. Cisme koordinat takımı bağlayarak konumu ve yönelimi tanımlama.

Şekil 3.2’de görüldüğü üzere \vec{R}_C vektörü cismin konumunu tanımlar. \vec{i} , \vec{j} , ve \vec{k} vektörleri ortonormal olduklarından aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

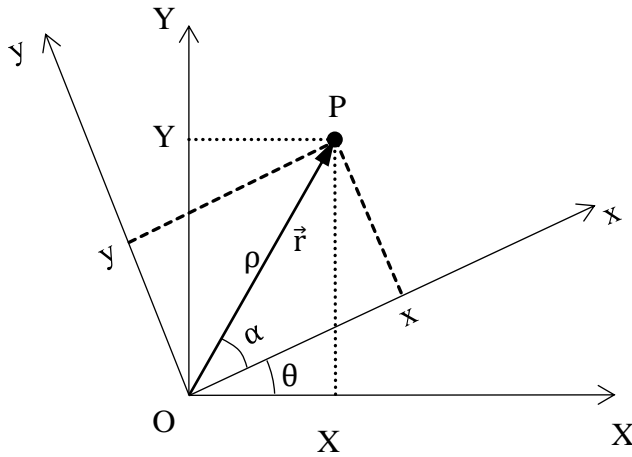
$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1, & \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1, & \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0, & \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0, & \vec{k} \cdot \vec{i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Üç birim vektör dokuz bileşeni haizdir; ancak (3.5) kısıtlarından ötürü bunların üçü serbest seçilebilir. Buradan yine yönelimin tamamlanması için üç parametrenin yeterli olduğu anlaşılmaktadır.

3.3. Koordinat Dönüşümleri, Dönme Matrisleri

Manipülatorler nesnelere belli hareketler yaptırmak veya konumlandırmak için kullanılırlar. Bu hareket veya konumlandırma sabit bir cisme göre tanımlanmış olabilir. Bu cisme genelde gözlem çerçevesi (observation frame) denir. Tanımlamanın matematik diline dökülmesi için bu çerçeveye bir koordinat takımı bağlanır. Bu koordinat takımına farklı adlar verilmekle beraber robotikte ve bilgisayar destekli yazılımlarda genellikle global koordinat takımı (veya dünya koordinatları) denir. Referans cisminin dışındaki hareketli cisimlere bağlanan takımlara da lokal koordinat takımları adı verilmektedir. Örneğin seri manipülatorlerde ardışık eklenmiş cisimler (manipülator uzuvları

(=links)) söz konusudur. İş uzvundan (uç efektörü = end effector) itibaren her cismin bir önceki cisme göre konum ve yönelimi tanımlanarak iş uzvunun global koordinatlardaki (dünya koordinatlarındaki) konum ve yönelimi tanımlanmış olur. Bu işlemler koordinat dönüşümlerini oluşturur. Bu alt bölümde koordinat dönüşümleri ele alınacaktır. Bir koordinat takımı diğerine göre en genel halde ötelenmiş ve dönmüş halde bulunur. Koordinat takımları arasındaki dönüşümle kastedilen şey bu takımlardan herhangi birinde bileşenleri verilen bir vektörün diğer takımdaki bileşenlerinin bulunmasıdır. (Not: Nokta dönüşümleri ve vektör dönüşümleri ayrımı mevcuttur. Burada nokta dönüşümleri ele alınacaktır). Konuya açıklık kazandırmak amacıyla Şekil 3.3’deki gibi düzlemsel hale ait örneği inceleyelim. Bir OXYZ takımında $\vec{OP} = \vec{r}$ yer vektörüne sahip P noktasını ele alalım. Bu takımında P’nin koordinatları (X,Y) olsun.



Şekil 3.3. Düzlemde koordinat dönüşümü.

Şimdi orijinleri ortak ikinci bir koordinat takımında aynı noktanın yer vektörünün bileşenlerini; başka bir ifadeyle P’nin koordinatlarını bulalım. Bu koordinatları (x,y) ile gösterelim. Aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$\vec{OP} = \vec{r} = X\vec{I} + Y\vec{J} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (3.6)$$

x ve y koordinatları X ve Y cinsinden bulunacaksa (3.6)’da x ve y sırasıyla yalnız bırakılmalıdır. \vec{i} ve \vec{j} ortonormal olduklarından aşağıdaki ifadeler kolayca yazılır:

$$\begin{aligned}x &= (\vec{I} \cdot \vec{i})X + (\vec{J} \cdot \vec{i})Y \\y &= (\vec{I} \cdot \vec{j})X + (\vec{J} \cdot \vec{j})Y\end{aligned}\tag{3.7}$$

(3.7) denklemleri matris formunda şöyle ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{I} \cdot \vec{i} & \vec{J} \cdot \vec{i} \\ \vec{I} \cdot \vec{j} & \vec{J} \cdot \vec{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\tag{3.8}$$

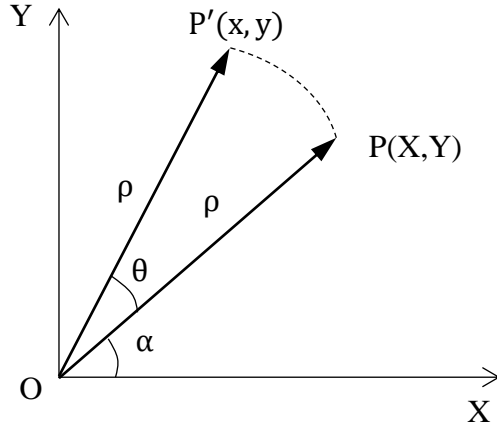
(3.8)'in sağ tarafındaki 2x2 matrisin sütunları \vec{I} ve \vec{J} vektörlerinin Oxyz takımındaki bileşenlerinden başka bir şey değildir. Şu halde (3.8) ifadesi

$$\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = [I_{2 \times 1} \quad J_{2 \times 1}]_{2 \times 2} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\tag{3.9}$$

şeklinde yazılabilir. \vec{I} ve \vec{J} 'nin Oxyz'deki bileşenleri hesaplanırsa

$$T = \begin{bmatrix} \vec{I} \cdot \vec{i} & \vec{J} \cdot \vec{i} \\ \vec{I} \cdot \vec{j} & \vec{J} \cdot \vec{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}\tag{3.10}$$

bulunur. Bu matris OXYZ takımından Oxyz takımına koordinat transformasyonunu tarif eder. Şimdi OXYZ koordinat takımının sabit kaldığını ancak \vec{OP} vektörünün θ kadar döndüğünü tasavvur edelim. Dönmeden sonra P , P' konumuna gelsin. P' 'nin koordinatları, P 'nin önceki koordinatları cinsinden bulalım (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. \overrightarrow{OP} vektörünün dönmesi.

ρ vektörün şiddeti ve α da dönmeden önce X eksenine yaptığı açı olmak üzere aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\alpha + \theta) = \rho \cos \alpha \cos \theta - \rho \sin \alpha \sin \theta \\ y &= \rho \sin(\alpha + \theta) = \rho \cos \alpha \sin \theta + \rho \sin \alpha \cos \theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\rho \cos \alpha = X$ ve $\rho \sin \alpha = Y$ olduğundan (3.11) şöyle yazılabilir

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta X - \sin \theta Y \\ y &= \sin \theta X + \cos \theta Y \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.12) matris formunda şöyle olur:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Burada

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

matrisi \overrightarrow{OP} vektörünün dönmesini temsil eder. Buna rijit cisim dönme (rotasyon) matrisi veya kısaca dönme matrisi diyeceğiz. (3.10) ve (3.14) mukayese edilirse

$$R = T^T$$

olduğu anlaşılır. R'nin bazı özellikleri vardır:

$$\begin{aligned} R^{-1} &= R^T \\ \det R &= 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dolayısıyla

$$T = R^{-1}$$

olduğu anlaşılır. Aslında bunun yorumu kolaydır. Dönen vektörün ait olduğu cisme bağlı koordinat takımındaki bileşenleri değişmez; ancak dönme esnasında sabit takım izafi olarak $-\theta$ kadar dönmüş olur. Neticede (3.12)'de θ yerine $-\theta$ konduğunda (3.14) bağıntısı elde olunur. Buradan R (ve dolayısıyla T) matrislerinin farklı anlamlar yüklenebileceği anlaşılır. Buna göre R matrisinin bir vektörün referans takımına göre Z eksenini etrafında θ kadar dönmesini temsil ettiği gibi sabit bir vektörün referans takımına göre $-\theta$ kadar dönmüş koordinat takımındaki bileşenlerini veren koordinat dönüşümünü de temsil ettiği anlaşılır. R dönmeyle alakalı olduğundan bir cismin yönelimini temsil eden bir matris olarak da düşünülebilir. Zira kinematiğin Euler'e izafe edilen meşhur bir teoremine göre bir cisim referans takımının (veya kendine bağlı koordinat takımının) eksenleri etrafında keyfi bir sırada sonlu miktarlarda döndürülerek istenen yönelime getirilebilir (Cismin kendine bağlı eksenler etrafında döndürülmesi aslında uzayda sabit ama dik olması gerekmeyen üç farklı eksen etrafında dönmesine tekabül eder). Gerek seri, gerekse paralel manipülatörlerde iş uzvunun konum ve yöneliminin daima global koordinat takımına izafe edilmesi gerektiğinden genelde (3.9) bağıntısının tersi kullanılır. Buna göre

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

olur. (3.16) bağıntısı orijinleri ortak ve z ile Z eksenleri çakışık iki koordinat takımı için geçerlidir. Bunu üç boyuta teşmil edersek

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

yazılabilir. Burada sağdaki 3x3 matris cismin yönelim matrisidir ve Z eksenini etrafında $+\theta$ kadar dönmeyi temsil etmektedir. Cisme bağlı koordinat takımının orijini ile global takımın orijini farklı iseler o zaman (3.17) bağıntısına cisme bağlı takımın orijinine ait yer vektörü de eklenmelidir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

olacaktır. (3.18) bağıntısını aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & X_0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Buradaki 4x1 vektörlere ve 4x4 matrise *genişletilmiş (augmented) vektör ve matrisler* denir. Bu vektörler ve matris yardımıyla koordinat takımının birbirine olan mesafesi ve yönelimi tek bir matrisle gösterilmiş olur. Bu durumda örneğin bir seri manipülatörde iş uzvuna (end effector) ait bir vektörün global koordinatlardaki bileşenleri (3.18) gibi bir çarpma ve bir toplama yerine tek bir çarpma işlemiyle bulunmuş olur. Böylece homojen bir koordinat transformasyonu elde edilir. Getirdiği kolaylığa karşılık bu matrislerin mahzuru gereksiz çarpma işlemlerine yol açmasıdır.

Bir referans koordinat takımına göre herhangi yönde olan bir başka koordinat takımı iki şekilde tanımlanabilir. Bunlardan birisi \vec{i}, \vec{j} ve \vec{k} vektörlerinin (3.4) kısıtlarını göz önünde tutarak bileşenleriyle tanımlanmasıdır. Öte yandan bir koordinat takımının yönelimi sabit takım eksenleri etrafında sırasıyla α, β ve γ sonlu dönmeleri yapılarak da

belirlenebilir. Sabit X, Y ve Z eksenleri etrafında sırasıyla α, β ve γ dönmelerini tarif eden matrisler aşağıdaki gibidir:

$$\underline{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\underline{R}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\underline{R}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

X, Y ve Z eksenleri etrafında sırasıyla dönmeler yapılırsa neticede genel dönme matrisi şöyle bulunur:

$$\underline{R} = \underline{R}_{z,\gamma} \underline{R}_{y,\beta} \underline{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & sas\beta c\gamma - cas\gamma & cas\beta c\gamma + sas\gamma \\ c\beta s\gamma & sas\beta s\gamma + cac\gamma & cas\beta s\gamma - sac\gamma \\ -s\beta & sac\beta & cac\beta \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Burada s ve c kısaltmaları açılırların sinüs ve kosinüsüne tekabül etmektedir. Öte yandan biliyoruz ki, bir koordinat takımının referans takıma göre yönelimi daha önce açıklanan sebeplerden ötürü

$$\underline{R} = [\underline{l} \quad \underline{j} \quad \underline{k}] \quad (3.24)$$

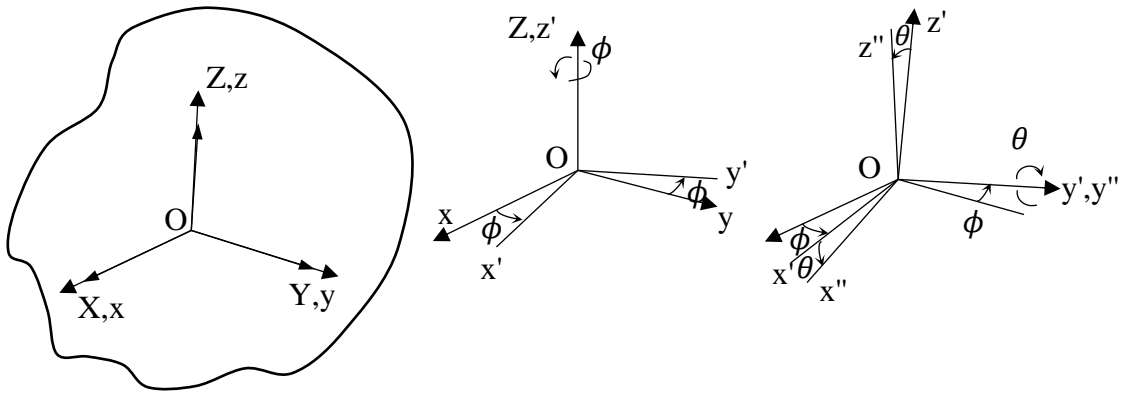
matrisiyle verilecektir. Burada $\underline{l}, \underline{j}$ ve \underline{k} , söz konusu koordinat takımının taban (base) vektörlerinin referans takımının taban vektörleri cinsinden bileşenlerini içeren sütun matrislerdir (veya sütun vektörlerdir). Buna göre (3.23) matrisinin her bir sütununun elemanlarının kareleri toplam 1 olmak zorundadır. Bu durumda önceden $\underline{l}, \underline{j}$ ve \underline{k} vektörlerini (3.4) kısıtları altında öngördükten sonra başlangıçta eksenleri sabit takıminkilerle çakışık iken bu koordinat takımını referans takımına göre aynı yönelime getirmek için sırasıyla X, Y ve Z eksenleri etrafında döndürmemiz gereken α, β ve γ

açıları cisme bağlı taban vektörlerinin bileşenleri cinsinden bulmak mümkündür. Buna göre

$$\begin{aligned}
 \vec{i} \cdot \vec{I} &= \cos \beta \cos \gamma, \vec{i} \cdot \vec{J} = \cos \beta \sin \gamma, \vec{i} \cdot \vec{K} = -\sin \beta \\
 \vec{j} \cdot \vec{I} &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma, \vec{j} \cdot \vec{J} = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma, \\
 \vec{k} \cdot \vec{I} &= \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma, \vec{k} \cdot \vec{J} = \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma, \\
 \vec{k} \cdot \vec{K} &= \cos \alpha \cos \beta, \vec{j} \cdot \vec{K} = \sin \alpha \cos \beta
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

bağıntıları mevcut demektir.

Bazı durumlarda cismin yönelimini cisme bağlı bir koordinat takımının eksenleri etrafındaki sonlu dönmelerle tanımlamak gerekebilir. Bu durumda dönme açlarına Euler açıları denir. Cisme bağlı takımda $zy'z''$ veya $z'x'z''$ veya $z'y'x''$ gibi muhtelif dönme sıralamaları tanımlanabilir. Cisme bağlı koordinat takımında aynı eksen etrafında iki defa dönme yapılabilir. Cisme bağlı koordinat takımına göre aynı arka arkaya olmamak şartıyla aynı bir eksen etrafında döndürme global koordinatlarda farklı iki eksen etrafında döndürmeye karşılık gelir (Bir cismi istenilen yönelime getirmek için aynı düzlemde olmayan ve de çakışık olmayan üç farklı sabit eksen etrafında sırayla döndürmenin yeterli olacağı önceden söylenmişti).



Şekil 3.5. Cismin z eksenini etrafında ϕ , y eksenini etrafında θ kadar dönmesi halinde cisme bağlı takımın yeni konumu.

Cismi kendine bağı koordinat takımının eksenleri etrafında döndürerek istenen bir yönelime getirmek istediğimizde arka arkaya olmamak üzere aynı eksen etrafında döndürmek de mümkün olduğundan on iki varyant ortaya çıkar. Bunların bir kısmı aynı eksen etrafında iki kez döndürmeyi de kapsayan ve Euler'e uzanan varyantlardır. Ancak burada x-y-z sıralı varyant ele alınacaktır. Kabul edelim ki, başlangıçta sabit takım OXYZ ile cisme bağı Oxyz takımının eksenleri çakışık olsun. Şekil 3.5'de cismin z eksen etrafında ϕ kadar dönmesi hâlinde Oxyz'nin yeni durumu gösterilmektedir. Bu yeni durumda birim vektörler öncekileri cinsinden şöyle olmaktadır:

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} \\ \vec{j}' &= -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \\ \vec{k}' &= \vec{k}\end{aligned}\tag{3.26}$$

Şimdi cisim yeni y' eksen etrafında θ kadar döndürülsün. Yeni birim vektörler öncekiler cinsinden şöyle olur:

$$\begin{aligned}\vec{i}'' &= \cos \theta \vec{i}' - \sin \theta \vec{k}' \\ \vec{j}'' &= \vec{j}' \\ \vec{k}'' &= \sin \theta \vec{i}' + \cos \theta \vec{k}'\end{aligned}\tag{3.27}$$

Nihayet z'' etrafında bu kez ψ kadar dönme yapıldığında yeni birim vektörler öncekiler cinsinden şöyle ifade olunur:

$$\begin{aligned}\vec{i}''' &= \cos \psi \vec{i}'' - \sin \psi \vec{j}'' \\ \vec{j}''' &= -\sin \psi \vec{i}'' - \cos \psi \vec{j}'' \\ \vec{k}''' &= \vec{k}''\end{aligned}\tag{3.28}$$

Cisme bağı vektörlerin bu nihai ifadeleri sabit takımın birim vektörleri cinsinden ifade edilip her bir vektörün bileşenleri sütun vektörler olarak yan yana dizildiğinde cismin dönme matrisi, yani cisme ait bir vektörün bu dönmeleri neticesinde sabit takımdaki bileşenlerini bulmaya yarayacak matris elde edilmiş olur. Bu matris aşağıdaki gibidir:

$$R = \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Bu matris (3.23)'deki sabit eksenler etrafında dönmeyi temsil eden matrisle kıyaslanırsa sabit ve cisme bağlı eksenler etrafında aynı sırada döndürmeler yapılsa bile neticenin ne kadar farklı olduğu kolayca anlaşılacaktır.

3.4. Açısal Hız Matrisleri

Manipülatorlerin dinamiği incelenirken genelde bilgisayarları kullanmak kaçınılmaz olur. Bu durumda matris notasyonunun kullanılması işlemlerin otomatikleştirilmesinde büyük yarar sağlar. Bu çerçevede açısal hızların da matrislerle temsiline ihtiyaç duyulur. Bu altbölümde dönme açılarının zamanla değişim hızlarından hareketle açısal hız vektörlerinin ve matrislerinin bulunması konusunu ele alacağız. Bilindiği gibi vektörler genelde satır veya sütun matrislerle gösterilir. Ancak vektörel çarpımın matrislerle temsili söz konusu olduğunda çarpımda önce gelen vektörün 3x3 bir matrisle gösterilmesi gerekir. Çarpımda ikinci sıradaki vektör yine bir sütun matrisle ifade edilmelidir. Dolayısıyla açısal hız vektörü yerine göre bir sütun vektör, yerine göre bir 3x3 antisimetrik matris şeklinde tanımlanmalıdır. Mesela açısal momentumun hesabında açısal hız vektörü bir sütun matrisle gösterildiği halde sabit bir eksen etrafında dönen bir cismin bir noktasının çizgisel hızı hesaplanırken 3x3 bir matrisle gösterilmelidir (Tensör hesabında bu konu biraz farklı ele alınır). Burada iki farklı yaklaşımla dönme açılarının hızlarından sabit takıma göre açısal hız vektörünün bileşenlerinin nasıl elde edileceği gösterilecektir.

Önce cisme bağlı eksenleri etrafında dönen cismin açısal hızının tayini ele alınacaktır. Kabul edelim ki, cismimiz kendine bağlı koordinat takımının eksenleri etrafında Euler varyantına göre yani $z - y' - z''$ sırasına riayetle ϕ , θ ve ψ kadar döndürülmüş olsun. Cismin sonsuz küçük dönme vektörü şöyle olur:

$$d\vec{\Omega} = d\phi\vec{k} + d\theta\vec{j}' + d\psi\vec{k}'' \quad (3.30)$$

Burada (3.30)'daki birim vektörlerin cismin ilk durumundaki birim vektörler cinsinden ifadeleri bulunur ve bu denklemden yerine konursa cismin açısal hızı cime bağlı birim vektörler cinsinden elde edilmiş olur. (3.26) ve (3.27)'den \vec{k}'' aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\vec{k}'' &= \sin \psi \vec{i}' + \cos \psi \vec{k}' = \sin \psi (\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}) + \cos \psi \vec{k} \\ &= \sin \psi \cos \phi \vec{i} + \sin \psi \sin \phi \vec{j} + \cos \psi \vec{k}\end{aligned}\quad (3.31)$$

Öte yandan \vec{j}' ise şöyle bulunur:

$$\vec{j}' = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}\quad (3.32)$$

(3.31) ve (3.32), (3.30)'da kullanılır ve ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}d\vec{\Omega} &= (-\sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\psi)\vec{i} + (\cos \phi d\theta + \sin \theta \sin \phi d\psi)\vec{j} \\ &+ (d\phi + \cos \theta d\psi)\vec{k}\end{aligned}\quad (3.33)$$

bulunur. (3.33)'ün dt 'ye bölünmesiyle açısal hıza geçilir:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} &= (-\sin \phi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \phi \dot{\psi})\vec{i} + (\cos \phi \dot{\theta} + \sin \theta \sin \phi \dot{\psi})\vec{j} \\ &+ (\dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi})\vec{k}\end{aligned}\quad (3.34)$$

Diğer bir ifadeyle cisim kendine bağlı koordinat takımının sırasıyla $z - y'z''$ eksenleri etrafında $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ ve $\dot{\psi}$ açısal hızlarıyla döndürülüyorsa cismin açısal hızının sabit takımın eksenleri üzerindeki bileşenleri (3.34) bağıntısıyla bulunur. Unutulmaması gereken husus açısal hızın tanıma dayalı bir büyüklük olduğudur. Lineer yer değiştirmelerin sonsuz küçük olanı da sonlu olanı da vektör özelliğini haizdir; yani sıranın değiştirilmesi sonucu etkilemez. Buna mukabil açısal yer değiştirmelerde dönme sıralarının değişimi cismin yönelimini değiştirir ve bu nedenle vektör değildirler. Ancak sonsuz küçük dönmeler vektör gibi davranırlar. Bu nedenle yukarıda açısal hızın bulunuşunda sonsuz küçük dönme vektöründen yola çıkılmıştır. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus

bulunan açısal hız bileşenlerinin integre edilebilir olup olmadığıdır. Özellikle moment denkleminin integralinde bu hız bileşenlerinin dt zaman aralığında integrali cismin x, y ve z eksenleri etrafındaki dönmeleri vermez. Buna karşılık $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ hızları (Euler frekansları da denir) integre edilebilir büyüklüklerdir. Dolayısıyla hareket denkleminde esas değişkenler olarak bunlar alınmalıdır.

Öte yandan cismin sabit bir OXYZ takımının sırayla X, Y ve Z eksenleri etrafında α, β ve γ kadar döndürülmesi halinde açısal hızın bulunmasını ele alalım. Burada ikinci bir yol takip edilecektir. Lokal koordinatlardan global koordinatlara dönüşüm aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

$$\underline{X} = \underline{R}\underline{x} \quad (3.35)$$

(3.35)'ün iki tarafının zamana göre türevini alalım.

$$\dot{\underline{X}} = \dot{\underline{R}}\underline{x} + \underline{R}\dot{\underline{x}} \quad (3.36)$$

Cisim rijitse $\dot{\underline{x}} = \underline{0}$ olacaktır. Bu durumda (3.36) ifadesi şöyle olur:

$$\dot{\underline{X}} = \dot{\underline{R}}\underline{x} \quad (3.37)$$

(3.35)'den \underline{x} çekilirse

$$\underline{x} = \underline{R}^{-1}\underline{X} = \underline{R}^T\underline{X} \quad (3.38)$$

bulunur. \underline{R} 'nin ortogonal olduğu ve (3.13) bağıntısı hatırlansın.(3.38),(3.37)'de yerine konursa

$$\dot{\underline{X}} = \dot{\underline{R}}\underline{R}^T\underline{X} \quad (3.39)$$

bulunur. Demek ki açısal hız,

$$\vec{\omega} = \dot{R}R^T \quad (3.40)$$

matrisine eşit olmalıdır. $\vec{\omega}$ açısal hız matrisinin anti-simetrik olacağına dikkat edilsin. Zira (3.40) bağıntısı $\dot{\vec{X}} = \vec{\omega} \times \vec{X}$ bağıntısına karşılık gelmektedir ve bilindiği gibi matrislerle temsil edilen vektörel çarpımda soldaki vektör 3x3 anti-simetrik bir matris olarak tanımlanmak zorundadır. (3.23)'ün zamana göre türevi alınırsa, \dot{R} matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \dot{R}(1,1) &= (-s\beta c\gamma)\dot{\beta} + (-c\beta s\gamma)\dot{\gamma} \\ \dot{R}(1,2) &= (cas\beta c\gamma + sas\gamma)\dot{\alpha} + (sac\beta c\gamma)\dot{\beta} + (-sas\beta s\gamma - cac\gamma)\dot{\gamma} \\ \dot{R}(1,3) &= (-sas\beta c\gamma + cas\gamma)\dot{\alpha} + (cac\beta c\gamma)\dot{\beta} + (-cas\beta s\gamma + sac\gamma)\dot{\gamma} \\ \dot{R}(2,1) &= (-s\beta s\gamma)\dot{\beta} + (c\beta c\gamma)\dot{\gamma} \\ \dot{R}(2,2) &= (cas\beta s\gamma - sac\gamma)\dot{\alpha} + (sac\beta s\gamma)\dot{\beta} + (sas\beta c\gamma - cas\gamma)\dot{\gamma} \\ \dot{R}(2,3) &= (-sas\beta s\gamma - cac\gamma)\dot{\alpha} + (cac\beta s\gamma)\dot{\beta} + (cas\beta c\gamma + sas\gamma)\dot{\gamma} \\ \dot{R}(3,1) &= (-c\beta)\dot{\beta} \\ \dot{R}(3,2) &= (cac\beta)\dot{\alpha} + (-sas\beta)\dot{\beta} \\ \dot{R}(3,3) &= (-sac\beta)\dot{\alpha} + (-cas\beta)\dot{\beta} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Bu matris, (3.23) ile verilen matrisin transpozuyla sağdan çarpılınca açısal hız matrisi şu şekilde elde edilir.

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \beta \dot{\alpha} - \dot{\gamma} & \cos \beta \sin \gamma \dot{\alpha} + \cos \gamma \dot{\beta} \\ -\sin \beta \dot{\alpha} + \dot{\gamma} & 0 & -\cos \beta \cos \gamma \dot{\alpha} + \sin \gamma \dot{\beta} \\ -\cos \beta \sin \gamma \dot{\alpha} - \cos \gamma \dot{\beta} & \cos \beta \cos \gamma \dot{\alpha} + \sin \gamma \dot{\beta} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Açısal hızın sabit takımda vektör formundaki ifadesi ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= (\cos \beta \cos \gamma \dot{\alpha} - \sin \gamma \dot{\beta})\vec{I} + (\cos \beta \sin \gamma \dot{\alpha} + \cos \gamma \dot{\beta})\vec{J} \\ &+ (\dot{\gamma} - \sin \beta \dot{\gamma})\vec{K} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Seri manipulatörlerde ardışık bağlı birden fazla uzuv olduğundan her bir uzvun bir öncekine göre yerleşimini tanımlayarak nihayetinde global koordinatlara indirgeme yapılması daha pratik olur. Bu husus sonraki alt bölümlerde ele alınacaktır.

3.5. Jakobiyen

Girdi (input) koordinatlarındaki sonsuz küçük değişimlere karşılık çıktı (output) koordinatlarındaki sonsuz küçük değişimler arasındaki ilişki önemlidir. Bu sonsuz küçük değişimler arasındaki ilişki aslında aktüatör hızları ile iş uzvunun çizgisel ve açısal hızları arasındaki ilişkiye özdeştir. Örnek olarak döner mafsalları olan altı serbestlik dereceli bir seri robotun hız girdi parametreleri mafsallardaki tahrik motorlarının hızlarıdır. Bunlar değiştirilerek iş organındaki nesnenin çizgisel ve açısal hızları belirlenir. Bu hızlar $\dot{\theta}_i$ $i = 1, 2, \dots, 6$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_x(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6) \\
 v_y &= v_y(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6) \\
 v_z &= v_z(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6) \\
 \omega_x &= \omega_x(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6) \\
 \omega_y &= \omega_y(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6) \\
 \omega_z &= \omega_z(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

ifadeleri yazılabilir. (3.44) bağıntıları kısaca aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Burada J iki alt matrisin birleşimi olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

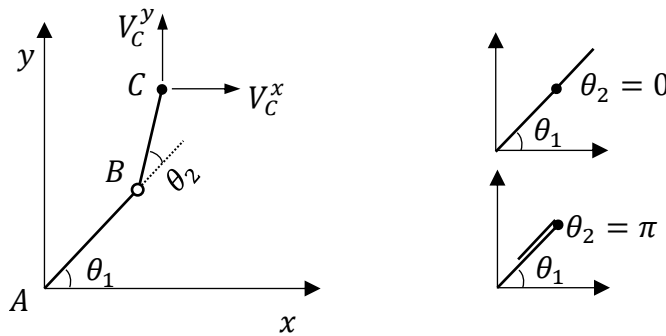
$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Burada J_v iş uzvunun bir noktasının (mesela ağırlık merkezinin) çizgisel hızını, J_ω ise açısal hızını mafsal (tahrik) hızlarına bağlayan 3×6 'lık matrislerdir. Bu Jakobiyene geometrik Jakobiye denir. Yönelim açıları ve hızları kontrol edilecekse Analitik Jakobiye kullanılmalıdır.

Bazı hallerde fuzûli serbestlik dereceli manipülatörler de kullanılır. Fazla serbestlik derecesi ilâve maliyet getirmekle beraber, manipülatörün çalışma esnekliğinin artmasına ve mesela enerji sarfiyatı açısından optimal yörüngelemeye imkân verdiği için tercih edilir. Bu durumda Jakobiye artık kare matris olmaktan çıkar. İş organının belli bir konuma getirilmesi problemimizin birden çok cevabı olur. Burada matrisler teorisine başvurmak gerekir. Fuzûli serbestlik derecesi olmayan hallerde de Jakobiyenin determinantının sıfır olduğu konumlarda çözüm belirsizleşir, yani iş organının hızı tanımlansa dahi $\det J = 0$ olan konumlarda bu hızı sağlayacak mafsal hızları belirsizleşir. Buna basit bir misâl olarak iki serbestlik dereceli düzlemsel manipülatörü verebiliriz. Bu manipülatöre ait Jakobiye şöyledir.

$$J = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 - \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Burada $\det J = \sin \theta_2$ olup $\theta_2 = 0$ ve $\theta_2 = \pi$ için mafsal hızları $\dot{\theta}_1$ ve $\dot{\theta}_2$ hesaplanamaz (yegâne=unique) hale gelir.



Şekil 3.6. Tekil konumlar ($\theta_2 = 0$ ve $\theta_2 = \pi$ konumları).

C noktasının lineer hız bileşenleri ile mafsal hızları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} V_x &= [-\sin \theta_1 - \sin(\theta_1 + \theta_2)]\dot{\theta}_1 - \sin(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ V_y &= [\cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]\dot{\theta}_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

şeklinde olup $\theta_2 = 0$ olması halinde

(3.48) denklemi şu hale gelir:

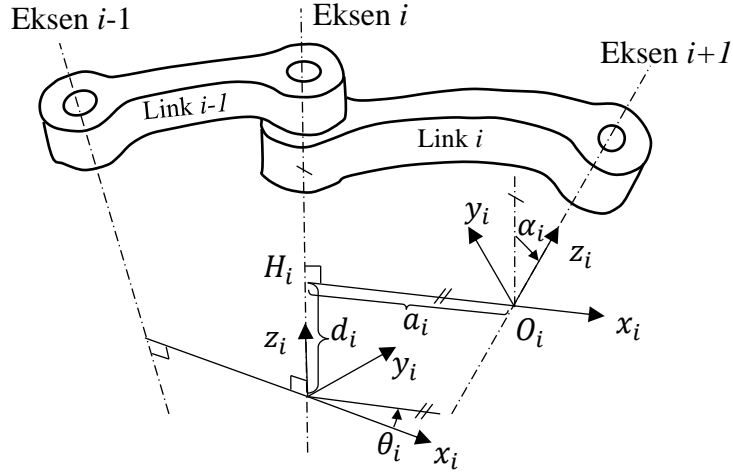
$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \sin \theta_1 \\ 2 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{bmatrix} (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (3.49)$$

(3.49) bağıntısı incelendiğinde $\dot{\theta}_1$ ve $\dot{\theta}_2$ için tek (unique) çözüm takımı olmadığı anlaşılmaktadır. Buradan çıkan diğer bir sonuç tekil noktalar civarında mafsal hızlarının oldukça büyük değerler alacağıdır. Buraya kadar anlatılanlar gelen alt bölümlerde daha ayrıntılı ele alınacaktır.

3.6. Seri Manipülatörler

Adlandırmadan da anlaşılacağı üzere bu tür manipülatörlerde uzuvlar art arda bağlanmış olup açık kinematik zincir oluştururlar. Seri manipülatörlerin üstün taraflarından biri çalışma uzaylarının büyüklüğüdür. İleri kinematik analiz kolaydır, ancak pratikte daha ziyade iş organının konum ve yönelimi ön görüldüğünden ihtiyaç duyulan ters kinematik analiz paralel manipülatörlere göre daha zordur. Seri manipülatörlerde geometrik analiz her bir uzvun bir önceki uzva göre iyi tanımlanmış koordinat takımları ilişitirildikten sonra bu bölümün geri kısmında açıklanacağı üzere ardışık transformasyon matrislerini çarpmak suretiyle her bir uzvun global koordinat takımına göre konumu ve yönelimi tayin edilerek yapılır. Kinematik analizde de uygulanan bağıl hızlardan hareketle her bir uzvun yere göre açısal ve çizgisel hızları tanımlanır. Seri olsun, olmasın, çok uzuvlu bir mekanizmada uzuvlara koordinat takımı bağlamada standart bir yol yoktur. Burada bir keyfilik vardır. Örnek olarak cisme bağlı koordinat takımının merkezini cismin ağırlık merkezine yerleştirmek mümkündür. Bu koordinat takımı asal koordinat takımı olarak da

seçilebilir. Bu durumda atalet tensörü çok sade hale gelir. Önceki kısımda bahsedildiği üzere zincir yapılarda her cismin koordinat eksenlerini bir önceki cisme göre tanımlamak her bir koordinat takımını global takıma (yere) göre tanımlamaktan daha kolaydır. Herhangi bir koordinat takımından sabit koordinat takımına dönüşüm matrisi (3.19) bağıntısından hemen görüleceği gibi koordinat takımının yere göre yönelimini veren rotasyon matrisiyle orijinin yere göre yer vektörünün birleşiminden oluştuğu anlaşılmaktadır. Uzuvlara koordinat takımı bağlamada yaygın metotlardan biri de Denavit-Hartenberg (bundan böyle D-H şeklinde kısaltılacaktır) uzlaşımıdır. Bu uzlaşım dönüşüm matrisinin elemanlarını, özellikle yönelimi tarif eden elemanları daha az sayıda parametreye bağlı ifade edebilmek amacıyla koordinat eksenlerinin belirlenmesine iki kısıt getirmektedir. Mafsalların bir serbestlik dereceli olması kabulüyle z ekseni daima bağıl harekete ait dönme ekseni (döner mafsalda) veya öteleme ekseni (kayar mafsalda) olarak seçilecektir. Ayrıca bir uzvun koordinat eksenleri belirlendiğinde müteakip uzvun x ekseni ardışık bu iki uzvun z eksenleri arasındaki ortak dikme doğrultusunda alınacaktır.



Şekil 3.7. Denavit-Hartenberg notasyonu.

Şekil 3.7'deki sembollerin anlamları şöyledir:

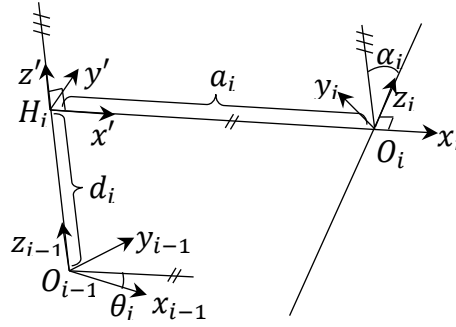
a_i : ortak dikmenin uzunluğu

d_i : O_{i-1} orijini ile H_i noktası arasındaki mesafe

α_i : i . mafsal ekseni ile z_i ekseni arasında sağ el kuralıyla ölçülen açı (Ardışık iki mafsal ekseni arasındaki bir tür burulma açısı)

θ_i : x_{i-1} eksenini ile $H_i O_i$ ortak dikmesi arasında z_{i-1} etrafında sağ el kuralına göre ölçülen açı.

a_i ve α_i sabit konstrüktif yani tasarıma bağlı parametreleridir. a_i bir anlamda uzuv uzunluğunu temsil eder ve α_i de ardışık iki mafsalsal eksen arasındaki burulma (twist) açısıdır. Kayar mafsalsal halinde d_i ve döner mafsalsal halinde θ_i parametreleri hareket esnasında değişirler. Manipülatörlerde genelde iki tür mafsalsal yaygındır. İki ardışık uzvun birbirine göre bir eksen etrafında döndüğü döner mafsalsal (revolute joint) ve yine bir uzvun diğerine göre belli bir eksende ötelendiği kayar mafsalsal (prismatic joint). Döner mafsalsalda θ_i açısı mafsalsal deplasmanını temsil eden değişken olup d_i sabittir. Buna karşılık kayar mafsalsalda θ_i sabit, ancak d_i değişkendir. Şimdi bu tanımlara dayanarak bir D-H matrisinin nasıl elde edileceği gösterilecektir. Bu çıkarım için Şekil 3.8 referans alınacaktır.



Şekil 3.8. Denavit-Hartenberg notasyonunda koordinat takımları arasındaki ilişki.

Şekil 3.8’de $O_i - x_i y_i z_i$ ve $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ koordinat takımları sırasıyla i ’nci ve $(i + 1)$ ’nci mafsalsal eksenlerini z_i ve z_{i-1} eksenini kabul eden takımlardır. Ayrıca $H_i - x' y' z'$ ara koordinat takımı tanımlayalım. i ’nci takımdan ara takıma koordinat dönüşümü şöyle tanımlanır:

$$\underline{x}' = T_i^{ara} \underline{x}^0 \quad (3.50)$$

Burada T_i^{ara} şöyle bir matristir:

$$T_i^{ara} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

α_i dönmesi x_i eksenini etrafında yapıldığından matrisin ilk sütunu $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ formundadır. Öte yandan ara takımdan $(i - 1)$ 'nci takıma dönüşüm aşağıdaki gibidir:

$$x^{i-1} = T_{ara}^{i-1} x^i \quad (3.52)$$

Burada T_{ara}^{i-1} ise şöyledir:

$$T_{ara}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

θ_i dönmesi z_{i-1} etrafında olduğundan burada da z ordinatına ait sütun vektör $[0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ formunda olur. Öte yandan

$$x^{i-1} = T_i^{i-1} x^i \quad (3.54)$$

olup, (3.52) ve (3.54)'den yararlanılarak

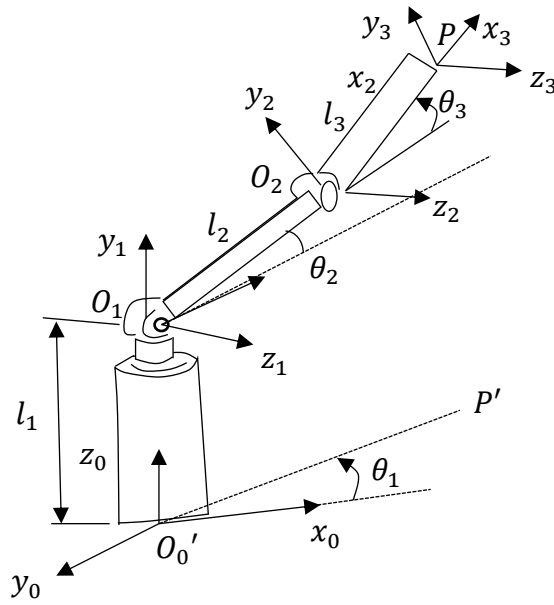
$$x^{i-1} = T_{ara}^{i-1} T_i^{ara} x^i \quad (3.55)$$

yazılabilir. Buradan T_i^{i-1} dönüşüm matrisi

$$T_i^{i-1} = T_{ara}^{i-1} T_i^{ara} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

şeklinde elde edilir. Böylece i 'nci uzvun $(i - 1)$ 'nci uzva göre konum ve yönelimini tanımlayan dönüşüm matrisi, yani D-H matrisi sadece dört parametreye bağlı olarak tanımlanmış olmaktadır. Dikkat edilirse matrisin sol üst kısmını oluşturan 3×3 'lük dönme

matrisi sadece θ_i ve α_i gibi iki parametreyle belirlenmiş olmaktadır. Genel halden yola çıkılıyorsa, üç parametre kullanılacaktı. Buna karşılık cisme bağlı koordinat takımının x ve z eksenlerinin seçiminde keyfilik yoktur. Öte yandan D-H koordinat takımı konvansiyonunda sabit uzva ve iş organına bağlanan koordinat takımlarında bir keyfilik söz konusudur. Bununla beraber D-H notasyonunun temel kavramlarına göre bu koordinat takımları belirlenebilir. D-H matrislerinin uygulamasının anlaşılması için bir örnek verelim. Şekil 3.9'daki manipülatör göz önüne alınsın.



Şekil 3.9. Seri manipülatör şematik gösterimi.

Burada D-H matrislerinin oluşturulmasında kullanılacak veriler şunlardır:

T_0^1 matrisi için:

$$a_1 = 0$$

$$d_1 = l_1$$

$$\alpha_1 = \pi/2$$

T_1^2 matrisi için:

$$a_2 = l_2$$

$$d_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 0$$

T_2^3 matrisi için:

$$a_3 = l_3$$

$$d_3 = 0$$

$$\alpha_3 = 0$$

Bu değerler sırasıyla (3.53)'te kullanılırsa D-H matrisleri şöyle bulunur:

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_3 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Şekil 3.9 dikkatlice incelendiğinde P noktasının koordinatlarının

$$\begin{aligned} x_0^P &= \overline{OP}' \cos \theta_1 = (l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) \cos \theta_1 \\ y_0^P &= \overline{OP}' \sin \theta_1 = (l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) \sin \theta_1 \\ z_0^P &= l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (3.60)$$

olduğu anlaşılır. $O_3 - x_3 y_3 z_3$ takımında P 'nin koordinatları $(0,0,0)$ olduğundan aşağıdaki bağıntı geçerli olmalıdır:

$$\begin{bmatrix} x_0^P \\ y_0^P \\ z_0^P \end{bmatrix} = T_0^1 T_1^2 T_2^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Gerçekten de (3.61) bağıntısı (3.60)'dan başkası değildir. (3.57) ila (3.59) matrislerini şöyle tanımlayalım:

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & {}^0r_{O_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} R_1^2 & {}^1r_{O_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} R_2^3 & {}^2r_{O_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Bu durumda $T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3$ çarpımı şöyle olacaktır:

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} R_0^1 R_1^2 R_2^3 & R_0^1 R_1^2 {}^2r_{O_3} + R_0^1 {}^1r_{O_2} + {}^0r_{O_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.65)$$

Açıktır ki, T_0^3 'ün üst 3×3 'lük kısmı $O_3 - x_3 y_3 z_3$ takımının $O_0 - x_0 y_0 z_0$ takımına göre yönelimini vermektedir. T_0^3 'ün dördüncü sütununun 3×1 'lik kısmı ise O_3 orijininin $O_0 - x_0 y_0 z_0$ takımına göre bileşenlerini vermektedir. Neticede $O_3 - x_3 y_3 z_3$ takımında 3r yer vektörüyle verilen bir noktanın $O_0 - x_0 y_0 z_0$ koordinat takımındaki bileşenleri

$${}^0r = T_0^3 {}^3r = R_0^1 R_1^2 R_2^3 {}^3r + R_0^1 R_1^2 {}^2r_{O_3} + R_0^1 {}^1r_{O_2} + {}^0r_{O_1} \quad (3.66)$$

olarak bulunacaktır. Burada ${}^j r_{O_i}$ vektörü O_i orijininin j takımındaki bileşenlerini vermektedir.

Seri robotlarda diğer bir kavram da çözümlenebilirliktir (solvability). Altı serbestlik dereceli bir seri manipülatör göz önüne alalım. Bunun kinematik analizinde iş uzvunun konum ve yönelimi verildiğinde (ters kinematik) mafsallık koordinatlarının bulunması gerekir. Bu ise altı bilinmeyen ihtiva eden altı denklemin çözülmesini gerektirir. Her bir denklemde altı bilinmeyen hepsinin gözükmesi istenmeyen bir husustur; zira bütün denklemler aynı anda (simültane) çözülmek zorundadır. Ancak bazı tasarımlarda bu denklemlerin ilk üçünde sadece üç bilinmeyen, kalan üçünde de altı bilinmeyen yer alır.

Bu durumda önce üç bilinmeyenli üç denklem çözülür ve buradan bulunan sonuçlar diğer üç denklemde yerine konarak yine üç bilinmeyenli üç denklem elde edilmiş olur. 2RP3R formundaki Stanford robot kolunda ve keza 6R Puma robot kolunda bu durum söz konusudur.

3.7. Paralel Manipülatörler

Paralel manipülatörler kapalı kinematik zincire sahip mekanizmalardır. Bu tür manipülatörlerde seri manipülatörlere göre hassasiyet, rijitlik ve nispeten yüksek hızlarda çalışma kabiliyeti ilgiyi artıran unsurlar arasındadır. Seri ve paralel ayrımı topolojik bir kavramdır. Paralel manipülatörler en az iki veya daha fazla kapalı kinematik zincir ihtiva ederler. Genel olarak bu tür manipülatörlerde bir taban (alt, sabit) platformu bir de iş uzvu platformu (üst, hareketli) bulunur. Bu platformları bağlayan bacaklar aslında seri zincirlerdir. Bu nedenle paralel manipülatörler kayan platform manipülatörler olarak da adlandırılmaktadır. İş uzvuna etkiyen kuvvet bacaklara bağlı aktüatörlere dağıtıldığından bu manipülatörler daha fazla yük taşımaya müsaittirler. Bu manipülatörler uçak ve kara taşıtı simülasyonları, ayarlanabilir mafsalla taşıyıcı çerçeveler, madencilik, parça işleme merkezleri gibi farklı alanlarda kullanılmaktadır. Bu tür manipülatörlerin belki de ilk uygulaması 1960'lerde Gough ve Whitehall'ün tasarladıkları universal lastik test cihazı olarak sahneye çıktı. Uzunca bir aradan sonra Stewart uçak simülatörü olarak bir makine geliştirdi ve onun adıyla tanındı. Ancak ilk tasarımcılara hürmeten Gough-Stewart platformu olarak da literatürde anılmaktadır. Şimdiye kadar yüzden fazla tasarım önerilmiştir. Paralel manipülatörler düzlemsel, hacimsel, nadiren de küresel olmaktadır. Paralel manipülatörlerde ters konum analizi seri olanlara göre kolaydır. Buna karşılık ileri konum analizi zordur. Kısacası konum analizinde seri manipülatörlere zıt bir durum söz konusudur. Simetrik manipülatörlerde konum analizi nispeten kolaylaşır. Bir paralel manipülatörde bacakların sayısı mekanizmanın serbestlik derecesine eşitse, bacaklardaki mafsalların sayı ve tipleri hepsinde aynı ise ve aktif mafsalların (aktüatörle irtibatlı mafsallar) sayı ve konumu aynı ise paralel manipülatörün simetrik olduğundan bahsedilir, aksi halde asimetriktir denir.

Aktüatör hızları ile hareketli platformun lineer ve açısal hızları arasındaki ilişkiyi sağlayan Jakobiyenin tanımlanması çok sayıda kapalı çevrim olduğundan seri manipülatörlere göre daha zordur. Şekil 9’da pratikte rastlanan bazı paralel manipülatörler görülmektedir. Manipülatörlerde sınır tekilliği ve dahili tekillik söz konusudur. Sınır tekilliği çalışma uzayının sınırlarının ötesinde oluşur. Seri manipülatörlerde bu erişilebilirlik anlamına gelir. Dahili tekillik ise çalışma bölgesi içinde mevcut tekilliklerdir. Buralarda manipülatör kontrolü ciddi bir problem yaşar. C. Gosselin ve ark. (1990) bu nedenle Jakobiye, birisi ileri kinematik ikincisi ise geri kinematik ile ilgili olan iki ayrı matrise ayırmayı teklif etmişlerdir. Hangi matriste tekillik varsa tekillik öyle adlandırılmalıdır; örneğin ileri kinematik tekilliği veya geri kinematik tekilliği gibi. Ancak aynı anda her iki Jakobiyende de tekillikler olabilir. Jakobiyenin çıkarılması için başvurulacak en basit yollardan birisi hız çevrim denklemlerinin yazılmasıdır. Kapalı zincirleri olan bir mekanizmada her mafsallık bağımsız kontrol edilemez. Bazı mafsallar (mekanizmanın serbestlik derecesi kadar sayıda) aktüatörle donatılırlar. Bunlara aktif mafsallar, diğerlerine pasif mafsallar demek adet olmuştur. Bir paralel manipülatörde aktüatör parametreleri ile (hidrolik silindirlerin boyları, döner motorlar varsa dönme açıları) hareketli platformun pozisyon parametreleri arasında bağıntılar mevcuttur. Bunlar genelde bacak sayısı kadardır. Bu ilişki

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{q}) = \underline{0} \quad (3.67)$$

şeklinde ifade olunabilir. $\underline{f}(\underline{x}, \underline{q})$ aslında $n \times 1$ bir vektör olup, elemanları genelde rijitlik şartları veya başka bir ifadeyle kısıt denklemleridir. Bu ifade zamana göre türetilirse

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}} = \underline{0} \quad (3.68)$$

yazılabilir. (3.68)’i şöyle yazmak mümkündür:

$$\underline{J}_x \dot{\underline{x}} = \underline{J}_q \dot{\underline{q}} \quad (3.69)$$

Burada

$$\begin{aligned} \underline{J}_x &= \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \\ \underline{J}_q &= \frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \end{aligned} \quad (3.70)$$

olarak tanımlanmıştır. Neticede ileri kinematik için

$$\dot{\underline{x}} = {}^d \underline{J} \dot{\underline{q}} \quad (3.71)$$

ve ters kinematik için

$$\dot{\underline{q}} = {}^t \underline{J} \dot{\underline{x}} \quad (3.72)$$

yazılabilir. Burada ${}^d \underline{J}$ düz veya ileri kinematiğe ait Jakobiyen olup

$${}^d \underline{J} = \underline{J}_x^{-1} \underline{J}_q \quad (3.73)$$

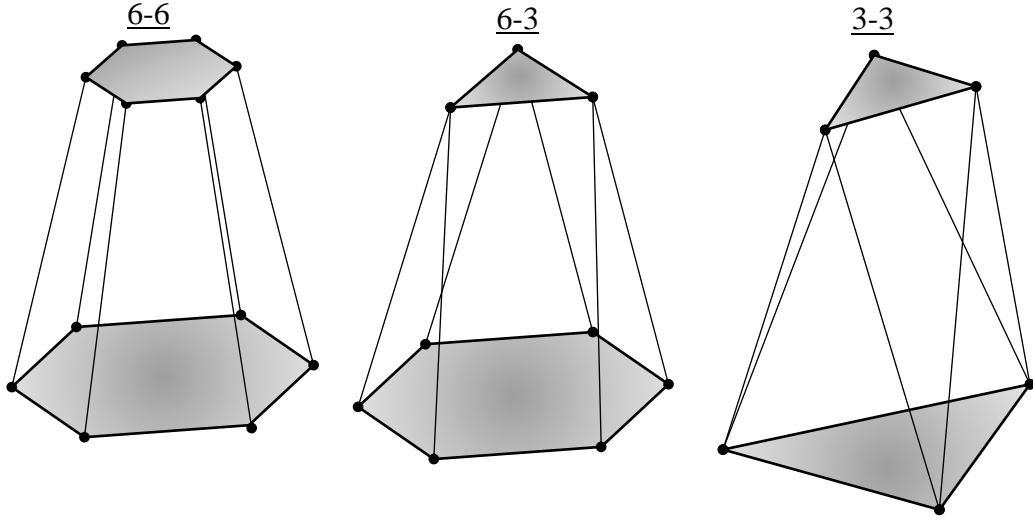
ile tanımlanır. Benzer tarzda ${}^t \underline{J}$ ise ters kinematiğe ait Jakobiyen olup

$${}^t \underline{J} = \underline{J}_q^{-1} \underline{J}_x \quad (3.74)$$

olacağı açıktır. Dolayısıyla \underline{J}_x , \underline{J}_q veya her ikisi de tekilse manipülatör tekil konfigürasyonda demektir. Tekil durumlarda aktüatörler hızlara sahip olsalar da üst platform sabit kalabilir. Bu durum ters kinematik tekilligidir. Öte yandan aktüatörler kiltilense de üst platformun çok küçük hareket yapabileceği tekillikler olabilir. İlk hal \underline{J}_q 'nin, ikinci hal ise \underline{J}_x 'in tekilligine tekabül eder. İkinci hal enteresan biçimde üst platformun ekstra serbestlik derecesi kazandığını gösterir.

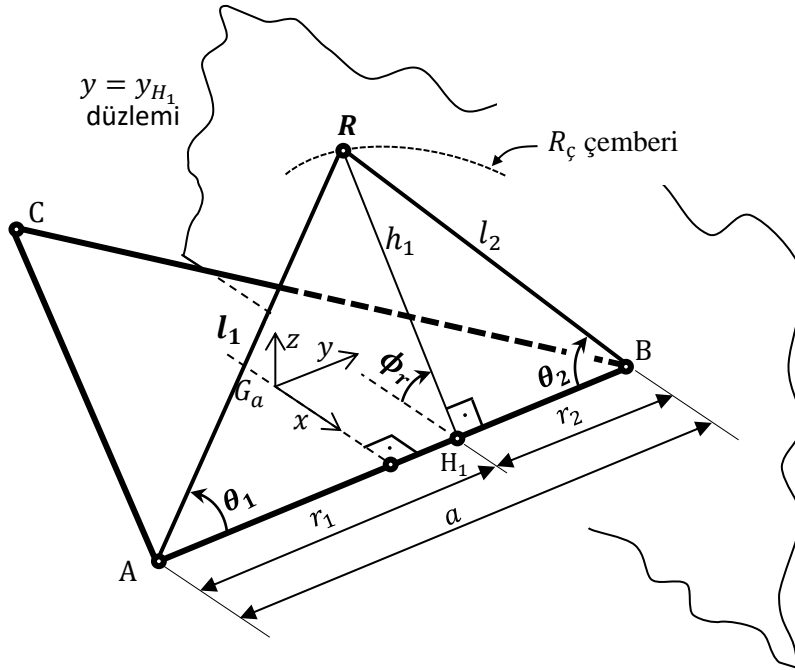
Paralel manipülatörlerde üzerinde en çok çalışılan manipülatörlerden birisi delta robot, diğeri ise Gough-Stewart platformudur. Bazen kısaca Stewart platformu diye de anılan

Gough-Stewart platformu genel olarak altı serbestlik dereceli bir manipülatördür. Böyle bir yapıda ileri kinematik daha önce de bahsedildiği gibi zorluklar içermektedir. Genel olarak 40'nci dereceden bir polinomun köklerini bulma problemine indirgenen ileri kinematik problemi belirli şartlar altında 16'nci dereceden veya 14'ncü dereceden polinomların köklerini bulma problemine evrilebilmektedir. Bir paralel platformda aşağıda daha ayrıntılı açıklanacağı üzere gerek ileri gerekse geri kinematikte rijitlik şartları yazılarak işe başlanır. Bu denklemler genel olarak nonlineerdir ve altı bilinmeyen içerirler. Bunların çözümünde farklı matematik yöntemlere başvurulmuştur. Bunlardan birisi mevcut denklemlerle yeni yapay denklemler elde etmektir. Şöyle ki, bu denklemler takımı homojen olmalıdır ve mevcut ile oluşturulan yeni yapay bilinmeyenlerin katsayıları daima tek bir bilinmeyen cinsinden olmalıdır. Bu durumda homojen bir denklem takımının sıfırdan farklı çözümünün olması katsayı matrisinin determinantının sıfır olması gerektiğinden determinant sıfıra eşitlenir ve bir polinom elde edilir. Bu polinomun reel kökleri pratik olarak mümkün platform konfigürasyonlarını verecektir. Manipülatörün uzayına bağlı olarak bazen elde edilen negatif reel kökler de dikkate alınmaz. Bu denklemlerdeki yapay değişkenler nonlinear terimler olabilir. Bu yaklaşıma Bezout metodu da denmektedir. Diğer bir yaklaşım ise Gröbner bazları metodudur. Burada da elde edilen kısıt denklemlerindeki değişkenlerden bu değişkenlerle ilişkili yeni değişkenlere geçmek ve bu suretle nonlinear denklemleri Gauss-eliminasyon metodundakine benzeyen biçimde son denklemlerde sadece bir, sondan bir öncekinde sadece iki vs. olacak tarzda nonlinear denklem takımına geçmektir. Denklemlerin nonlinear olması hasebiyle bu çözüm prosedürü tabiatıyla lineer haldekinden daha zordur. Burada ileri kinematikte karşılaşılan zorlukları ve aynı zamanda Bezout metodunu açıklamak amacıyla Nanua ve ark. (1990) tarafından 3-3 ve 6-3 formunda Stewart platformu için geliştirilen çözüm metoduna değinilecektir. Burada 3-3 ve 6-3 kombinasyonları Şekil 3.10'da gösterilmiştir.

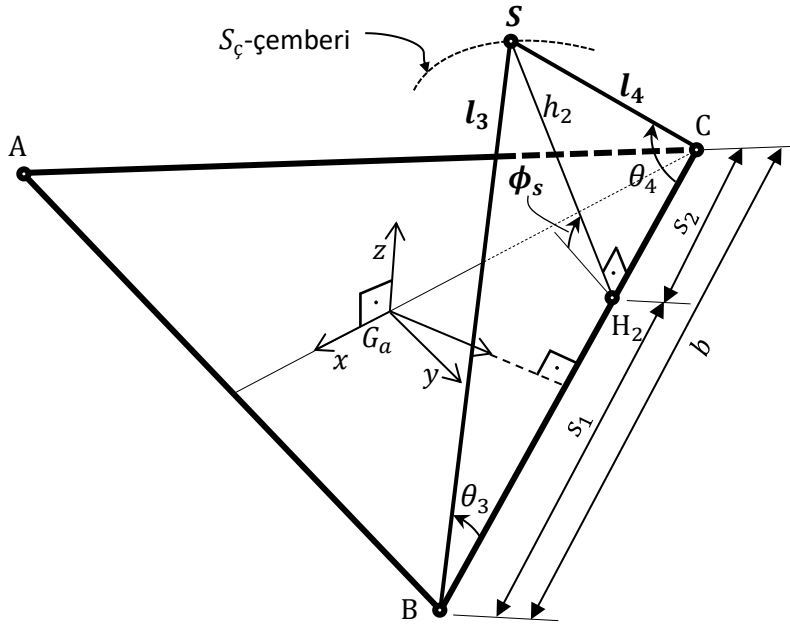


Şekil 3.10. Farklı tipte Stewart platformları.

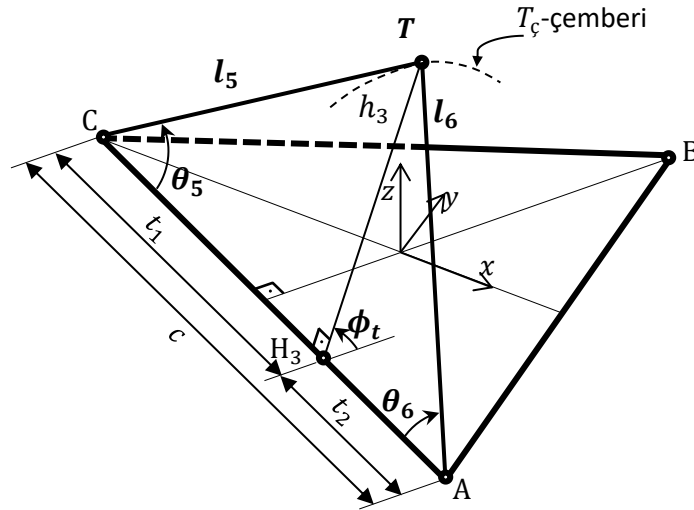
Tabiatıyla pratikte bacakların bu şekilde tek bir noktada birleştirilmesi fiziken mümkün olmamakla beraber mesafeler çok yakınsa hata kabul edilebilir. Gerek 3-3 gerekse 6-3 kombinasyonunda üst platformda birleşen bacaklar bir üçgen oluştururlar ve alt platformda bunları bağlayan kenar etrafında dönmeye müsait tek bir uzuv gibi davranırlar. Bu suretle bu iki bacağın konumu tek bir açıyla tanımlanacaktır (Şekil 3.11).



Şekil 3.11.a. 3-3 Stewart platformunda eşdeğer bacak uzunluklarının gösterilmesi.



Şekil 3.11.b. 3-3 Stewart platformunda eşdeğer bacak uzunluklarının gösterilmesi.



Şekil 3.11.c. 3-3 Stewart platformunda eşdeğer bacak uzunluklarının gösterilmesi.

Neticede böyle üç adet ikili bacak grubu oluşur. Bunların alt platform düzlemiyle yaptıkları açılar ϕ_r , ϕ_s ve ϕ_t olurlar. Neticede şu bağıntılar yazılır:

$$r_1 = \frac{a^2 + L_1^2 - L_2^2}{2a} \quad a = r_1 + r_2 \quad (3.75)$$

$$t_1 = \frac{c^2 + L_4^2 - L_3^2}{2c} \quad c = t_1 + t_2 \quad (3.76)$$

$$s_1 = \frac{b^2 + L_6^2 - L_5^2}{2b} \quad b = s_1 + s_2 \quad (3.77)$$

$$m_r = (L_1^2 - r_1^2)^{1/2} \quad (3.78)$$

$$m_s = (L_6^2 - s_1^2)^{1/2} \quad (3.79)$$

$$m_t = (L_4^2 - t_1^2)^{1/2} \quad (3.80)$$

a uzunlukları kenarı eşdeğer bacak O_r , b uzunlukları kenarındaki O_s ve c uzunlukları kenarındaki eşdeğer bacak başlangıcı da O_t olsun. Buna göre O_r, O_t ve O_s 'nin yer vektörleri şöyle olur:

$$\vec{P}_{O_r} = \vec{P}_{A_1} + r_1 \frac{(\vec{P}_{A_2} - \vec{P}_{A_1})}{\|\vec{P}_{A_2} - \vec{P}_{A_1}\|} \quad (3.81)$$

$$\vec{P}_{O_s} = \vec{P}_{B_1} + s_1 \frac{(\vec{P}_{B_2} - \vec{P}_{B_1})}{\|\vec{P}_{B_2} - \vec{P}_{B_1}\|} \quad (3.82)$$

$$\vec{P}_{O_t} = \vec{P}_{C_1} + t_1 \frac{(\vec{P}_{C_2} - \vec{P}_{C_1})}{\|\vec{P}_{C_2} - \vec{P}_{C_1}\|} \quad (3.83)$$

Bundan sonraki adım eşdeğer bacakların doğrultusundaki \vec{w}_r, \vec{w}_s ve \vec{w}_t birim vektörlerini tanımlamak ve bilahare üst platformdaki R, S ve T noktalarının yer vektörlerini aşağıdaki gibi yazmaktır:

$$\vec{P}_r = \vec{P}_{O_r} + m_r \vec{w}_r \quad (3.84)$$

$$\vec{P}_s = \vec{P}_{O_s} + m_s \vec{w}_s \quad (3.85)$$

$$\vec{P}_t = \vec{P}_{O_t} + m_t \vec{w}_t \quad (3.86)$$

Nihayet rijitlik şartları yazılabilir:

$$\|\vec{P}_r - \vec{P}_s\|^2 = b_1^2 \quad (3.87)$$

$$\|\vec{P}_s - \vec{P}_t\|^2 = b_2^2 \quad (3.88)$$

$$\|\vec{P}_t - \vec{P}_r\|^2 = b_3^2 \quad (3.89)$$

Bu son üç denklem ϕ_r, ϕ_s ve ϕ_t açılarının sinüs ve kosinüslerini ve çapraz çarpımlarını barındırır. Bu aşamada yarım açı tanjant formüllerine müracaat edilir.

$$x_i = \tan \frac{\phi_i}{2} \quad i = r, s, t \quad (3.90)$$

olmak üzere

$$\cos \phi_i = \frac{1 - x_i^2}{1 + x_i^2} \quad (3.91)$$

$$\sin \phi_i = \frac{2x_i}{1 + x_i^2} \quad (3.92)$$

bağıntılarından yararlanılarak (3.87) ilâ (3.89) denklemleri yeniden düzenlenirse:

$$(G_1 x_r^2 + G_2) x_s^2 + (G_3 x_r) x_s + (G_4 x_r^2 + G_5) = 0 \quad (3.93)$$

$$(H_1 x_t^2 + H_4) x_s^2 + (H_3 x_t) x_s + (H_2 x_t^2 + H_5) = 0 \quad (3.94)$$

$$(I_1 x_r^2 + I_4) x_t^2 + (I_3 x_r) x_t + (I_2 x_r^2 + I_5) = 0 \quad (3.95)$$

denklemleri elde olunur. Burada G_i, H_i ve I_i katsayıları manipülatöre ait uygunluk ve açılarının fonksiyonu olup bilinen sayılardır. x_s , (3.94) ve (3.95)'den yok edilirse aşağıdaki denklem elde olunur:

$$\begin{vmatrix} G_1 x_r^2 + G_2 & G_4 x_r^2 + G_5 \\ H_1 x_t^2 + H_4 & H_2 x_t^2 + H_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_3 x_t & G_3 x_r \\ H_1 x_t^2 + H_4 & G_1 x_r^2 + G_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.96)$$

Bu denklemin açılımı basitleştirmeden sonra

$$J_1 x_t^4 + J_2 x_t^3 + J_3 x_t^2 + J_4 x_t + J_5 = 0 \quad (3.97)$$

olur. J_i katsayıları G_i ve H_i katsayılarıyla x_r 'nin kuvvetlerinin fonksiyonudur. Öte yandan (3.95) şöyle yazılabilir:

$$M_1 x_t^2 + M_2 x_t + M_3 = 0 \quad (3.98)$$

(3.97) ve (3.98)'den x_t yok edilirse aşağıdaki ifadeye varılır:

$$\begin{vmatrix} J_2 M_1 - J_1 M_2 & J_3 M_1 - J_1 M_3 & J_4 M_1 & J_5 M_1 \\ J_3 M_1 - J_1 M_3 & J_3 M_2 - J_2 M_3 + J_4 M_1 & J_4 M_2 + J_5 M_1 & J_5 M_2 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 \\ 0 & M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.99)$$

(3.99)'un açılımı x_r cinsinden 16'ncı dereceden bir polinom verecektir. Bu polinomun onaltı kökü bulunur. $0^\circ \leq x_r \leq 360^\circ$ olduğundan kısıt denklemlerinden (3.91) ve (3.92) kullanılarak x_s ve x_t bulunur. Ters kinematik daha kolaydır. Zira bu durumda üst platforma ait koordinat takımının sabit alt platformdaki koordinat takımına göre yönelimi ve orijinin yer vektörü tanımlanmıştır. Üst platforma bağlı takımında P, S ve T noktalarının yer vektörleri sabit vektörler olduğundan bunların sabit takımına göre koordinatları hemen bulunur. Bu durumda A, B ve C noktalarının koordinatları da belli olduğundan uzuv uzunluklarını 3-3 veya 6-3 kombinasyonlarında hemen bulmak mümkün olur. 6-6 kombinasyonunda da durum aynıdır. Burada da altı adet üst, altı adet alt bağlantı noktası olup bacak uzunlukları hesaplanabilir.

3.8. Bazı Paralel Manipülâtorlerde İleri Kinematik İçin İki Yeni Yöntem

Stewart platformunun belli kurulum formları (3-3 ve 6-3 tipi) ve ayrıca tamamen döner mafsallar içeren düzlemsel manipülâtörün (3-RRR) ileri konum analizi için bu tez çalışmasında geliştirilen pratik ve ileri analitik tekniklere ihtiyaç duymayan iki farklı çözüm yöntemi aşağıda sunulacaktır.

3-3 ve 6-3 Stewart platformları ile 3-RRR düzlemsel paralel manipülâtörlerin ileri kinematiği için kısıt denklemlerinin özel yapısından yararlanarak pratik bir analitik metod geliştirilmiştir. Bu bilahare 3.8.1. Çöz ve Yerine Koy metodu (ÇYK metodu, Solve and

Substitute method) başlıklı bölümde anlatılacaktır. Yine bu denklemleri özel yapısından hareketle uygun bir hata fonksiyonu tanımlanarak ileri kinematik çözüm Newton-Raphson metoduyla hesaplandığı diğer bir metod da 3.8.2. Hata fonksiyonu metodu (HF metodu, error function method) kısmında aktarılacaktır.

3.8.1. Çöz ve Yerine Koy Metodu (ÇYKM, Solve and Substitute Method)

Bu bölümde 3-3 ve 6-3 Stewart platformları ile 3-RRR düzlemsel paralel manipülatörün ileri kinematik analizinde kullanılmak üzere geliştirdiğimiz metotlardan biri sunulacaktır. Burada önce, metodun 3-3 Stewart platformuna uygulanması gösterilecek, daha sonra da 3-RRR paralel manipülatöre ait denklemler çıkarılarak bu metodun bu mekanizmada da tatbik edilebileceği gösterilecektir.

Stewart platformuna ait çözülmesi gerekli denklemlerin çıkarılışı yukarıda verilmişti. ((3.93) ila (3.95) denklemlerine bakınız). Bu denklemlerden üçüncüsü değiştirildikten sonra denklem takımı aşağıdaki hali alır:

$$(G_1\lambda^2 + G_2)\mu^2 + (G_3\lambda)\mu + (G_4\lambda^2 + G_5) = 0 \quad (3.100)$$

$$(H_1\mu^2 + H_2)v^2 + (H_3\mu)v + (H_4\mu^2 + H_5) = 0 \quad (3.101)$$

$$(I_1\lambda^2 + I_4)v^2 + (I_3\lambda)v + (I_2\lambda^2 + I_5) = 0 \quad (3.102)$$

Bu denklemlerde, λ, μ, v değişkenleri

$$\begin{aligned} \lambda &= \tan \frac{\phi_1}{2} \\ \mu &= \tan \frac{\phi_2}{2} \\ v &= \tan \frac{\phi_3}{2} \end{aligned} \quad (3.103)$$

olarak tanımlanmıştır. ÇYK Metodu'nda (3.100) ve (3.102) denklemleri μ ve v cinsinden katsayıları λ parametresine bağlı ikinci dereceden denklemler olarak telakki edilir. Bu durumda (3.100) denkleminin kökleri

$$\mu_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{q}}{r}$$

ve (3.102) denkleminin kökleri ise

$$v_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{v}}{w}$$

şeklinde bulunur. Burada;

$$\begin{aligned} p &= -G_3\lambda \\ q &= (G_3\lambda)^2 - 4(G_1\lambda^2 + G_2)(G_4\lambda^2 + G_5) \\ r &= 2(G_1\lambda^2 + G_2) \\ u &= -I_3\lambda \\ v &= (I_3\lambda)^2 - 4(I_1\lambda^2 + I_4)(I_2\lambda^2 + I_5) \\ w &= 2(I_1\lambda^2 + I_4) \end{aligned} \tag{3.104}$$

olarak tanımlanmıştır. (3.101) denkleminde, μ yerine $\mu_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{q}}{r}$ ve v yerine $v_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{v}}{w}$ konur ve ardından denklemin iki tarafı w^2r^2 ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} &H_1p^2u^2 + H_2r^2u^2 + H_4p^2w^2 + H_5r^2w^2 + H_1qv + H_1qu^2 + H_1p^2v \\ &+ H_2r^2v + H_4qw^2 + 2H_1pv\sqrt{q} + 2H_1qu\sqrt{v} + 2H_1u^2p\sqrt{q} \\ &+ 2H_4w^2p\sqrt{q} + 2H_1p^2u\sqrt{v} + 2H_2r^2u\sqrt{v} + 4H_1pu\sqrt{vq} \\ &+ H_3rw\sqrt{qv} + H_3pruw + H_3prw\sqrt{v} + H_3ruw\sqrt{q} = 0 \end{aligned} \tag{3.105}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem,

$$\begin{aligned} A &= H_1p^2u^2 + H_2r^2u^2 + H_4p^2w^2 + H_5r^2w^2 + H_1qv + H_1qu^2 + H_1p^2v + H_2r^2v \\ &+ H_4qw^2 + H_3pruw \\ B &= 2H_1pv + 2H_1pu^2 + 2H_4pw^2 + H_3ruw \\ C &= 2H_1qu + 2H_1p^2u + 2H_2r^2u + H_3prw \\ D &= 4H_1pu + H_3rw \end{aligned}$$

tanımları yapılmak suretiyle

$$A + B\sqrt{q} + C\sqrt{v} + D\sqrt{qv} = 0 \quad (3.106)$$

formunda yazılabilir. (3.106) denklemi

$$A + D\sqrt{qv} = -(B\sqrt{q} + C\sqrt{v}) \quad (3.107)$$

şeklinde parçalanır ve bu yeni denklemin iki tarafının karesi alınırsa

$$2(AD - BC)\sqrt{qv} = -A^2 - D^2qv + B^2q + C^2v \quad (3.108)$$

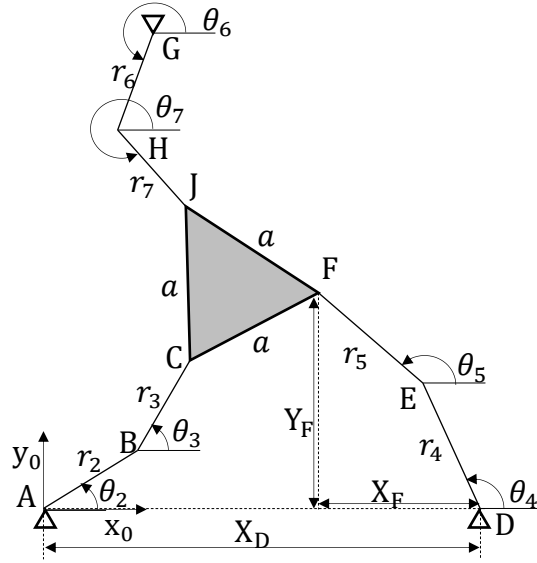
bulunur. Bu denklemin tekrar karesi alınırsa;

$$\begin{aligned} & B^4q^2 - 2A^2B^2q - (2A^2D^2 + 2B^2C^2 - 8ABCD)qv - 2B^2D^2q^2v \\ & - 2C^2D^2qv^2 - 2A^2C^2v + C^4v^2 + D^4v^2 + D^4q^2v^2 + A^4 \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.109)$$

ifadesi elde olunur. Bu polinom 32'nci dereceden ve sadece λ değişkenine bağlı bir polinomdur ve λ 'nın sadece çift kuvvetlerini içermektedir. Dolayısıyla örneğin $\beta = \lambda^2$ dönüşümü yapılmak suretiyle 16'ncı dereceden polinoma dönüştürmek mümkündür. Buradan katlı köklerin mevcudiyeti anlaşılır. Bu polinomun kökleri bulunur. Bu köklerden pozitif reel olanlar seçilir. $\mu_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{q}}{r}$ ve $\nu_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{v}}{w}$ bağıntılarında söz konusu λ değerleri yerine konup $(\mu_1, \nu_1), (\mu_1, \nu_2), (\mu_2, \nu_1), (\mu_2, \nu_2)$ olmak üzere her bir λ için dört farklı μ, ν kombinasyonu bulunur. Pozitif ve reel λ, μ, ν setleri (3.101) denkleminde yerine konarak denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir ve denklemi 0 yapan değer kümeleri (yani λ, μ, ν üçlüleri) alınır. (3.103) bağıntıları tersine kullanılarak $\phi_1 = 2 \tan^{-1} \lambda$, $\phi_2 = 2 \tan^{-1} \mu$, $\phi_3 = 2 \tan^{-1} \nu$ 'den ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 açıları bulunmuş ve böylece ileri kinematik problemi çözülmüş olur.

Şimdi 3-RRR düzlemsel manipülatörün denklemlerinin çıkarılması gösterilecektir.

İlgili manipülatörün genel görünümü, boyutları ve parametreleri Şekil 3.12’de verilmiştir.



Şekil 3.12. 3-RRR tipi düzlemsel paralel manipülatör.

Şekil 3.12’de θ_2, θ_4 ve θ_6 aktif eklem açıları olarak adlandırılır çünkü bu mafsallara motor bağlıdır ve manipülatörün konumlarını tanımlayan koordinatlarıdır. θ_3, θ_5 ve θ_7 pasif eklem açılarıdır. Bu manipülatör için yapılan matematiksel işlemler, ÇYK metodu bölümünde anlatılmıştı. 3-RRR tipi düzlemsel paralel manipülatör için kinematik kısıt denklemlerinin nasıl türetileceği burada detaylıca ele alınacaktır. Şekil 3.12’deki düzlemsel manipülatörün C ve F noktalarının koordinatları aşağıdaki gibi kolayca yazılır:

$$\begin{aligned}
 X_C &= r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 \\
 Y_C &= r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 \\
 X_F &= r_4 \cos \theta_4 + r_5 \cos \theta_5 + X_D \\
 Y_F &= r_4 \sin \theta_4 + r_5 \sin \theta_5
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

C ve F arasındaki mesafe:

$$(X_F - X_C)^2 + (Y_F - Y_C)^2 = \|\overrightarrow{CF}\|^2 \tag{3.111}$$

(3.111) şu şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned} \|\vec{CF}\|^2 - a^2 &= A_1 \cos \theta_3 + B_1 \sin \theta_3 + C_1 \cos \theta_5 + D_1 \sin \theta_5 \\ &+ E_1 \cos \theta_3 \cos \theta_5 + E_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5 + F_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

buradaki sabit katsayılar:

$$\begin{aligned} A_1 &= (2r_2r_3 \cos \theta_2 - 2r_3X_D - 2r_3r_4 \cos \theta_4) \\ B_1 &= (2r_2r_3 \sin \theta_2 - 2r_3r_4 \sin \theta_4) \\ C_1 &= (2r_4r_5 \cos \theta_4 + 2r_5X_D - 2r_2r_5 \cos \theta_2) \\ D_1 &= (2r_4r_5 \sin \theta_4 - 2r_2r_5 \sin \theta_2) \\ E_1 &= -2r_3r_5 \\ F_1 &= r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + X_D^2 - a^2 - 2r_2X_D \cos \theta_2 \\ &+ 2r_4X_D \cos \theta_4 - 2r_2r_4 \cos(\theta_4 - \theta_2) \end{aligned} \quad (3.113)$$

Benzer şekilde, J ve C'nin koordinatları:

$$\begin{aligned} X_J &= r_6 \cos \theta_6 + r_7 \cos \theta_7 + X_G \\ Y_J &= r_6 \sin \theta_6 + r_7 \sin \theta_7 + Y_G \\ X_C &= r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 \\ Y_C &= r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (3.114)$$

J ve C arasındaki mesafe:

$$(X_C - X_J)^2 + (Y_C - Y_J)^2 = \|\vec{JC}\|^2 \quad (3.115)$$

(3.115) şu şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned} \|\vec{JC}\|^2 - a^2 &= A_2 \cos \theta_3 + B_2 \sin \theta_3 + C_2 \cos \theta_7 + D_2 \sin \theta_7 \\ &+ E_2 \cos \theta_3 \cos \theta_7 + E_2 \sin \theta_3 \sin \theta_7 + F_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

Buradaki sabit katsayılar ise:

$$\begin{aligned}
A_2 &= (2r_2r_3 \cos \theta_2 - 2r_3X_G - 2r_3r_6 \cos \theta_6) \\
B_2 &= (2r_2r_3 \sin \theta_3 - 2r_3r_4Y_G - 2r_3r_6 \sin \theta_6) \\
C_2 &= (-2r_2r_7 \cos \theta_2 + 2r_7X_G + 2r_6r_7 \cos \theta_6) \\
D_2 &= (-2r_2r_7 \sin \theta_2 + 2r_7Y_G + 2r_6r_7 \sin \theta_6) \\
E_2 &= -2r_3r_7 \\
F_2 &= r_2^2 + r_3^2 + r_6^2 + r_7^2 + X_G^2 + Y_G^2 \\
&\quad - r_2r_6 \cos(\theta_6 - \theta_2) - 2r_2X_G \cos \theta_2 \\
&\quad + 2r_6X_G \cos \theta_6 - 2r_2Y_G \sin \theta_2 \\
&\quad + 2r_6Y_G \sin \theta_6 - a^2
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Son olarak, J ve F arasındaki mesafe:

$$(X_J - X_F)^2 + (Y_J - Y_F)^2 = \|\vec{JF}\|^2 \tag{3.118}$$

Denklemlerde verilen J ve F noktalarının koordinatlarını kullanarak aşağıdaki denklem bulunur:

$$\begin{aligned}
\|\vec{JF}\|^2 - a^2 &= A_3 \cos \theta_5 + B_3 \sin \theta_5 + C_3 \cos \theta_7 + D_3 \sin \theta_7 \\
&\quad + E_3 \cos \theta_5 \cos \theta_7 + E_3 \sin \theta_3 \sin \theta_7 + F_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Buradaki sabit katsayılar;

$$\begin{aligned}
A_3 &= (2r_4r_5 \cos \theta_5 - 2r_5X_{G/D} - 2r_5r_6 \cos \theta_6) \\
B_3 &= (2r_4r_5 \sin \theta_4 - 2r_5Y_G - 2r_5r_6 \sin \theta_6) \\
C_3 &= (2r_6r_7 \cos \theta_6 + 2r_7X_{G/D} + 2r_4r_7 \cos \theta_4) \\
D_3 &= (2r_6r_7 \sin \theta_6 + 2r_7Y_G - 2r_4r_7 \sin \theta_4) \\
E_3 &= -2r_5r_7 \\
F_3 &= r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2 + X_{G/D}^2 + Y_G^2 \\
&\quad -2r_4X_{G/D} \cos(\theta_4) + 2r_6X_{G/D} \cos \theta_6 \\
&\quad -2r_4Y_G \sin \theta_4 + 2r_6Y_G \sin \theta_6 \\
&\quad -2r_4r_6 \cos(\theta_4 - \theta_2)
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Şimdi aşağıdaki değişkenleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
\tan \frac{\theta_3}{2} &:= \lambda \\
\tan \frac{\theta_5}{2} &:= \mu \\
\tan \frac{\theta_7}{2} &:= \nu
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Denklemlerdeki sinüs ve kosinüs terimleri ise (3.112), (3.116) ve (3.119) denkleminde verilen yeni değişkenlere yazılır. aşağıdaki denklemler bulunur:

$$(P_1\lambda^2 + P_2\lambda + P_3)\mu^2 + (Q_1\lambda^2 + Q_2\lambda + Q_3)\mu + (S_1\lambda^2 + S_2\lambda + S_3) = 0 \tag{3.122}$$

$$(K_1\lambda^2 + K_2\lambda + K_3)\nu^2 + (L_1\lambda^2 + L_2\lambda + L_3)\nu + (M_1\lambda^2 + M_2\lambda + M_3) = 0 \tag{3.123}$$

$$(U_1\mu^2 + U_2\mu + U_3)\nu^2 + (V_1\mu^2 + V_2\mu + V_3)\nu + (W_1\mu^2 + W_2\mu + W_3) = 0 \tag{3.124}$$

Buradaki sabit katsayılar şunlardır:

$$\begin{aligned}
P_1 &= -A_1 - C_1 + E_1 + F_1 \\
P_2 &= 2B_1 \\
P_3 &= A_1 - C_1 - E_1 + F_1 \\
Q_1 &= 2D_1 \\
Q_2 &= 4E_1 \\
Q_3 &= 2D_1 \\
S_1 &= -A_1 + C_1 - E_1 + F_1 \\
S_2 &= 2B_1 \\
S_3 &= A_1 + C_1 + E_1 + F_1
\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= -A_2 - C_2 + E_2 + F_2 \\
K_2 &= 2B_2 \\
K_3 &= A_2 - C_2 - E_2 + F_2 \\
L_1 &= 2D_2 \\
L_2 &= 4E_2 \\
L_3 &= 2D_2 \\
M_1 &= -A_2 + C_2 - E_2 + F_2 \\
M_2 &= 2B_2 \\
M_3 &= A_2 + C_2 + E_2 + F_2
\end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= -A_3 - C_3 + E_3 + F_3 \\
U_2 &= 2B_3 \\
U_3 &= A_3 - C_3 - E_3 + F_3 \\
V_1 &= 2D_3 \\
V_2 &= 4E_3 \\
V_3 &= 2D_3 \\
W_1 &= -A_3 + C_3 - E_3 + F_3 \\
W_2 &= 2B_3 \\
W_3 &= A_3 + C_3 + E_3 + F_3
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Görüldüğü gibi 3-RRR düzlemsel manipülatör için denklemler, ÇYK metodunun uygulanabileceği formdadır. Bu denklemlerde, Stewart platformundaki süreç aynen uygulanır.

3.8.2. Hata Fonksiyonu Metodu (HFM, Error Function Method)

Hata fonksiyonu metodunda,

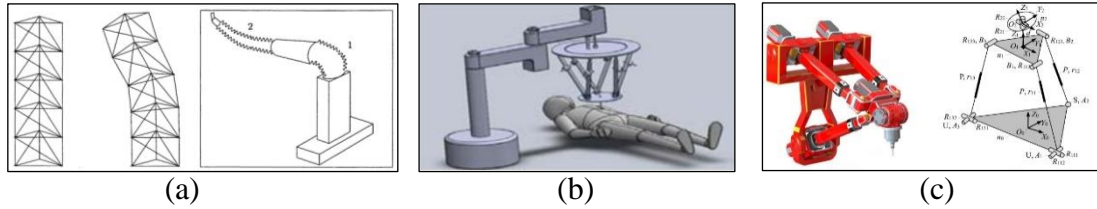
$$\epsilon = f_2^2 \quad (3.128)$$

şeklinde bir hata fonksiyonu tanımlamaktayız. Burada f_2 ifadesi (3.101) denkleminin sol tarafına eşittir. Esasen $\epsilon = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$ formunda bir hata fonksiyonu da tanımlanabilirdi. Burada f_1 ve f_3 sırasıyla (3.100) ve (3.102) denklemlerinin sol taraflarıdır. Ancak, geliştirdiğimiz bu metotta, μ ve ν değerleri, λ 'ya bağlı olarak ifade edildiğinden f_1 ve f_3 fonksiyonları, diskriminantların pozitif reel sayı olmasına dikkat etmek şartıyla her λ değeri için kendiliğinden sağlanacak; yani $f_1 = 0$ ve $f_3 = 0$ olacaktır. Dolayısıyla sadece $f_2 = 0$ veya (3.128) ifadesini minimum yapan λ değerlerini araştırmak yeterli olacaktır. λ 'nın alabileceği değerler aralığı, $q = (G_3\lambda)^2 - 4(G_1\lambda^2 + G_2)(G_4\lambda^2 + G_5)$ ve $v = (I_3\lambda)^2 - 4(I_1\lambda^2 + I_4)(I_2\lambda^2 + I_5)$ diskriminantlarının pozitif reel sayı veya en az sıfır olması şartıyla tayin edilir. Başka bir ifadeyle $q > 0$ ve $v > 0$ olmalıdır. Bu nedenle bu iki koşulu aynı anda sağlayan aralıkta tüm kısıtları aynı anda sıfır yapacak λ değerleri aranır. Bu amaçla $\lambda_{alt} < \lambda < \lambda_{üst}$ aralığında belli aralıklarla λ değerleri için $\mu_{1,2}$ ve $\nu_{1,2}$ değer setleri bulunur ve λ 'ya karşılık gelen μ ve ν değerleri ikinci denklemde yerine konarak $\epsilon = f_2^2$ bulunabilir. Burada $\epsilon = f_2^2$ fonksiyonunun minimum değerleri tespit edilir. Bu değerler daha sonra $\epsilon' = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$ şeklinde tanımlanan yeni bir hata fonksiyonunun köklerini uygun bir nonlineer denklem çözücüsüyle (mesela Newton-Raphson metodu gibi) bulmak istediğimizde başlangıç şartı olarak kullanılır. Böylelikle rastgele başlangıç şartı atanmasından ve buna bağlı olarak denklem çözücünün yanlış bir çözüme yakınsaması veya ıraksamasından sakınılmış olur. Bu ise hesaplama zamanında önemli bir tasarruf sağlamaktadır

3.9. Hibrit Manipulatörler

Bu manipulatörler seri ve paralel manipulatörlerin bir kombinasyonudur. Literatürde birbirine seri bağlanmış paralel manipulatörlerden oluşan hibrit manipulatörlere rastlandığı gibi (Şekil 3.13.a), bir seri manipulatörün, mesela bir robot kolun son uzwuna eklenmiş paralel manipulatörler içeren (Şekil 3.13.b) veya bunun tersi formda hibrit mimariler de vardır. Nitekim imalat sanayiinde paralel bir manipulatörün hareketli platformuna eklenmiş seri manipulatörlerden ibaret hibrit ekipmanlar da mevcuttur (Şekil 3.13.c).

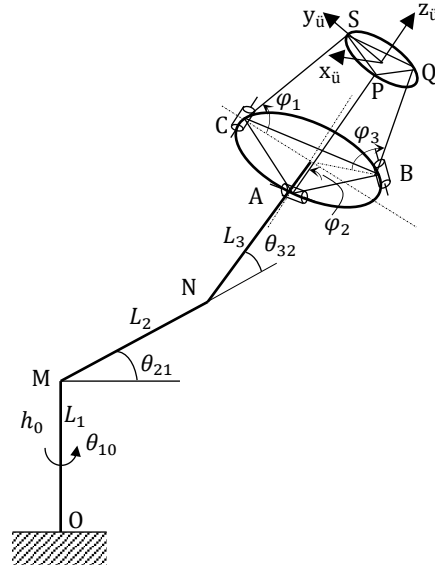
Hibrit manipulatörler seri ve paralel robotların oumlu taraflarını bir araya getirirler. Ancak bu manipulatörlerde seri ve paralel ayrılan bölümlerde değinildiği gibi zıt karakterde iki kinematiğin birleşimi söz konusudur. Seri manipulatörlerde geriye, paralelde ise ileriye konum analizi güçlükler arzeder. Mamafih hız analizinde bu problem ortadan kalkar. Zira hız bağıntıları lineerdir. Hibrit manipulatörlerin belli alanlarda kullanımının giderek yaygınlaşması bunların kinematiğini araştırmaya açık bir alan haline getirmektedir. Bu tür manipulatörlerde iş uzvunun (end effector) lineer ve açısız hız bileşenleri ile tahrik unsurlarının (elektrik motorları, hidrolik silindirler vs.) hızları arasındaki ilişki daha girift hale gelmektedir. Bu nedenle Jakobiyenin teşkili biraz daha zahmetli olacaktır. Ne var ki, manipulatörün yapısına bağlı olarak kinematiğin temel bağıntılarından hareketle iş uzvunun hız bileşenleri tahrik unsurlarının hızları ile ilişkilendirilebilir ve buradan hareketle Jakobiyen oluşturulabilir.



Bu alt bölümde iki farklı hibrit manipülatör modeli ele alınarak ileri kinematikleri incelenecektir. Bu manipülatörler metin içinde Tip 1 ve Tip 2 olarak adlandırılacaktır. Bu manipülatörlerin serbestlik dereceleri altı olarak ön görülmüştür. Bu serbestlik derecelerinin seri ve paralel kısımlar arasında eşit olarak paylaşıldığı kabul edilecektir. İncelenecek manipülatörlerde önce seri, sonra paralel kısım gelmektedir ve her iki manipülatör üçer serbestlik derecesine sahiptir. Esasen serbestlik derecelerinin bu şekilde dağıtılmasına yönelik fiziki bir zorunluluk yoktur. İleride görüleceği üzere Tip 2 manipülatörlerde konumlama serbestlik dereceleri seri, yönelim serbestlik dereceleri ise paralel manipülatörlere tahsis edilmiştir.

3.10. Tip 1 Hibrit Manipülatörde İleri Kinematik

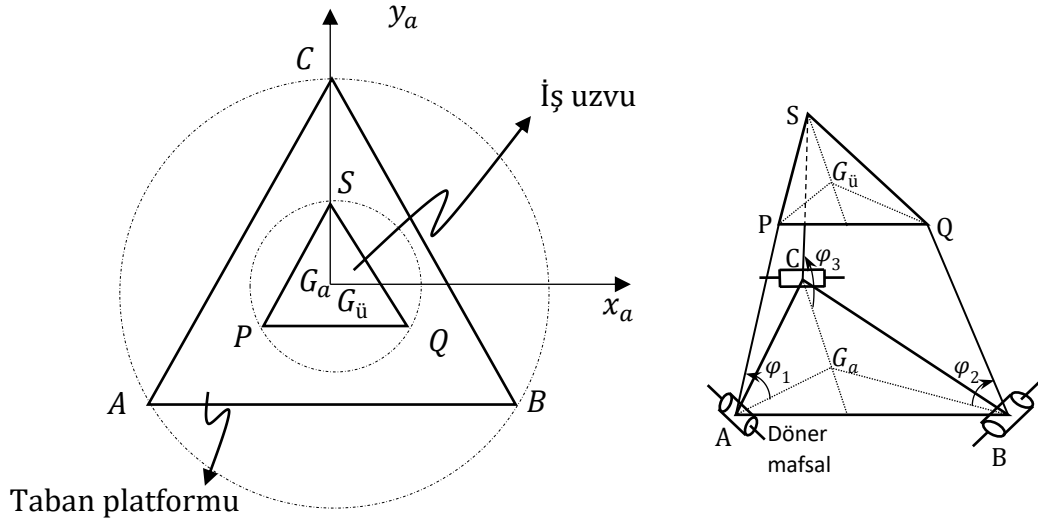
Bu manipülatörün kinematik şeması Şekil 3.14’de verilmiştir.



Şekil 3.14. Tip 1 hibrit manipülatör

Bu manipülatörde seri kısım üç uzuvdan ibarettir. 1 uzvu, 0 indisi ile gösterilen yere (gövdeye) göre düşey bir eksenle dönebilmektedir. 2 ve 3 uzuvları ise yatay eksenler etrafında dönmektedirler. Uzuv uzunlukları L_1, L_2 ve L_3 ile gösterilecektir. Seri manipülatörde üç döner mafsallı olup, dönme açıları sırasıyla θ_{10}, θ_{21} ve θ_{32} 'dir. Paralel manipülatörün tabanı 3 uzvuna monte edilmiş dairesel bir tabladır ve bu dairenin merkezi 3 uzvunun Denavit-Hartenberg notasyonuna göre tanımlanmış x_3 eksenindedir.

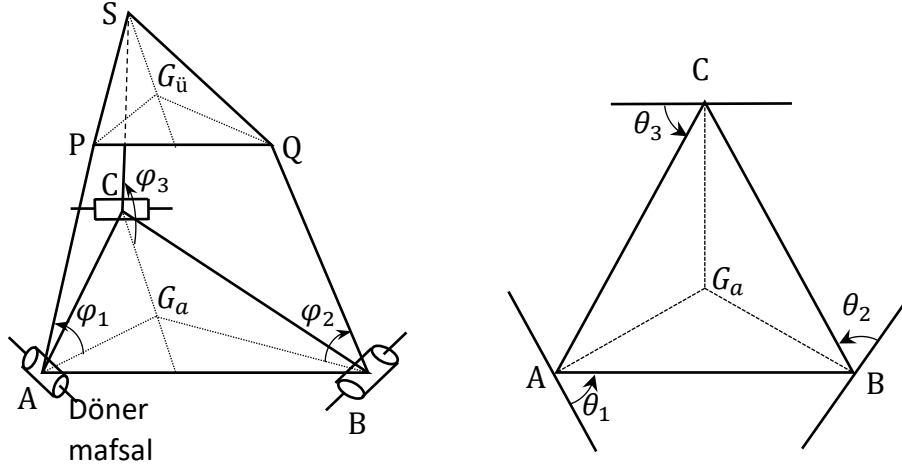
Paralel manipülatörlerin diğer platformu iş uzvudur. (Bu manipülatörler bağımsız incelenseydi taban platformu alt veya sabit platform (bottom veya fixed platform), iş uzvu da üst veya hareketli (upper veya moving platform) olarak adlandırılacaktı). İş uzvu da dairesel bir tabla olup taban tablasına paralel olduğunda bunun da merkezi x_3 eksenindedir. Üç serbestlik dereceli olması öngörülen bu manipülatör üç aktüatörle tahrik edilecektir. Bunlar lineer motorlar veya hidrolik silindirler olabilir. Bu ikili uzuv grupları literatürde rastlandığı gibi bacak olarak adlandırılacaktır. Üç bacağın her iki platformdaki bağlantı noktaları ağırlık merkezleri ilgili dairesel tablanın merkeziyle çakışık olan eşkenar üçgenlerin köşelerinde yer almaktadır. Şekil 3.15’de paralel manipülatörün iş uzvu tarafından bakıştaki görüntüsü verilmiştir. Bacaklar tabana döner mafsalla bağlanmıştır. Bacakların iki uzvu ise birbirlerine silindirik mafsallarla irtibatlandırılmıştır. Buna göre paralel manipülatörün serbestlik derecesi Kutzback formülünden bulunur.



Şekil 3.15. İncelenen hibrit manipülatörün paralel manipülatör geometrisi.

$$F = 6(n - 1) - 5m_1 - 4m_2 - 3m_3 - 2m_4 - m_5 - \sum f_{id} \quad (3.129)$$

Burada n uzuv sayısı, m_i i serbestlik dereceli mafsalların sayısı, $\sum f_{id}$ özdeş serbestlik derecelerinin sayısıdır. Bu mekanizmada, $n = 8$, $m_1 = 3$, $m_2 = 3$, $m_3 = 3$ ve $\sum f_{id} = 3$ olup bu durumda (3.129) bağıntısı $F = 3$ verir.

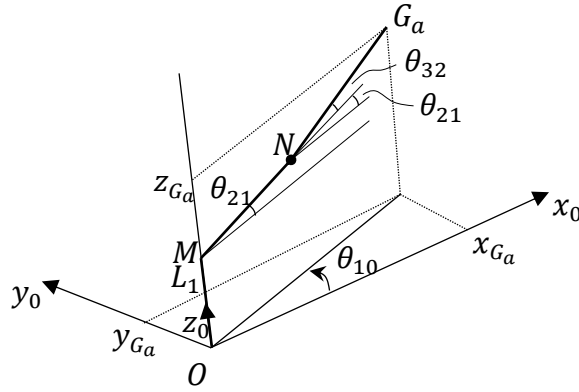


Şekil 3.16. Tip 1 hibrit manipulatörün paralel kısmı.
a) Genel görünüm, b) Döner mafsalların konumları

Kinematik analizlerde kullanılmak üzere orijinleri taban platformunda G_a ağırlık merkezinde, iş uzvunda ise G_u ağırlık merkezinde iki ayrı koordinat takımı platformlara bağlanmıştır. Taban platformuna ait takım $G_a x_a y_a z_a$ iş uzvuna bağlı takım ise $G_u x_u y_u z_u$ ile gösterilecektir. Tabanın x_a eksenine AB kenarına, iş uzvunun x_u eksenine PQ kenarına paralel alınmıştır. Her iki platform paralel olduğunda x_a, x_u ve y_a, y_u eksenleri paralel, z_a ve z_u eksenleri çakışık durumdadır. PQS eşkenar üçgeni ile tanımlanan iş uzvunun, ABC eşkenar üçgeni ile tanımlanan tabana göre yönelimi $G_u x_u y_u z_u$ takımının $G_a x_a y_a z_a$ takımına göre yönelimiyle tanımlanacaktır. ABC eşkenar üçgeninin kenar uzunlukları a , PQS üçgeninki ise b ile gösterilecektir. İş uzvunun $G_a x_a y_a z_a$ takımına göre yönelim açıları φ, θ ve Ψ ile gösterilmektedir. İş uzvunun tabana göre istenen yönelime getirilmesinde merkezi G_u 'de olan ancak eksenleri sabit ve $G_a x_a y_a z_a$ takımının eksenlerine paralel x_a', y_a' ve z_a' etrafında sırasıyla φ, θ ve Ψ kadar döndürüleceği kabul edilecektir. $G_u x_u y_u z_u$ takımının yere bağlı $O x_a y_a z_a$ takımına göre yönelimi de yine merkezi G_u 'de olup sabit takımın eksenlerine daima paralel kalan $G_u x_a' y_a' z_a'$ takımının x_a', y_a' ve z_a' eksenleri etrafında sırasıyla α, β ve γ kadar döndüğü farz edilerek bulunacaktır. Bacak uzunlukları l_1, l_2 ve l_3 ile gösterilecektir.

3.10.1. Tip 1 manipülatörde ileri konum analizi

Bu bölümde $\theta_{10}, \theta_{21}, \theta_{32}, l_1, l_2, l_3$ değerleri verildiğinde iş uzvunun G_u noktasının konumu ile sabit takıma göre yöneliminin ne olduğu tayin edilecektir. Manipülatörün seri kısmında ileri kinematik hayli basit olup taban platformunun G_a merkezinin koordinatları kolayca bulunur. Bunun için Şekil 3.17'den istifade edilebilir.



Şekil 3.17. Seri manipülatörün G_a noktasının koordinatlarının tayini.

Buna göre

$$\begin{aligned}x_{Ga} &= (L_2 \cos \theta_{21} + L_3 \cos \theta_{31}) \cos \theta_{10} \\y_{Ga} &= (L_2 \cos \theta_{21} + L_3 \cos \theta_{31}) \sin \theta_{10} \\z_{Ga} &= L_1 + L_2 \cos \theta_{21} + L_3 \cos \theta_{31}\end{aligned}\quad (3.130)$$

bağıntıları mevcuttur. Burada θ_{31}

$$\theta_{31} = \theta_{21} + \theta_{32}\quad (3.131)$$

olarak tanımlanmıştır. Şimdi problem, iş uzvunun yere göre yönelimini ve G_u noktasının yere göre koordinatlarını bulmaktır. Burada iş uzvunun önce taban plakasına göre yöneliminin nasıl bulunacağı ele alınacaktır. Şekil 3.15 ve Şekil 3.16 yardımıyla aşağıdaki bağıntılar kolayca yazılır:

Şekil 3.15 yardımıyla aşağıdaki bağıntılar kolayca yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G_a P} &= \overrightarrow{G_a A} + \overrightarrow{AP} \\
&= \left(-\frac{a}{2} \vec{i}_a - \frac{a}{2\sqrt{3}} \vec{j}_a \right) \\
&\quad + (l_1 \cos \varphi_1 \cos 30^\circ \vec{i}_a + l_1 \cos \varphi_1 \sin 30^\circ \vec{j}_a + l_1 \sin \varphi_1 \vec{k}_a) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l_1 \cos \varphi_1 - \frac{a}{2} \right) \vec{i}_a + \left(\frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 - \frac{a}{2\sqrt{3}} \right) \vec{j}_a + l_1 \sin \varphi_1 \vec{k}_a
\end{aligned} \tag{3.132}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G_a Q} &= \overrightarrow{G_a B} + \overrightarrow{BQ} \\
&= \left(\frac{a}{2} \vec{i}_a - \frac{a}{2\sqrt{3}} \vec{j}_a \right) \\
&\quad + (-l_2 \cos \varphi_2 \cos 30^\circ \vec{i}_a + l_2 \cos \varphi_2 \sin 30^\circ \vec{j}_a \\
&\quad + l_2 \sin \varphi_2 \vec{k}_a) \\
&= \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} l_2 \cos \varphi_2 \right) \vec{i}_a + \left(\frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - \frac{a}{2\sqrt{3}} \right) \vec{j}_a + l_2 \sin \varphi_2 \vec{k}_a
\end{aligned} \tag{3.133}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G_a S} &= \overrightarrow{G_a C} + \overrightarrow{CS} \\
&= \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \vec{j}_a \right) + (-l_3 \cos \varphi_3 \vec{j}_a + l_3 \sin \varphi_3 \vec{k}_a) \\
&= \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - l_3 \cos \varphi_3 \right) \vec{j}_a + l_3 \sin \varphi_3 \vec{k}_a
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Bu vektörler bulunduktan sonra iş uzvunun bacak bağlantı noktalarını birleştiren vektörler kolayca yazılır. Önce PQ kenarını ele alalım. Açıkta ki,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{G_a Q} - \overrightarrow{G_a P} = \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2} l_2 \cos \varphi_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} l_1 \cos \varphi_1 \right) \vec{i}_a \\
&\quad + \left(\frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 - \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 \right) \vec{j}_a + (l_2 \sin \varphi_2 - l_1 \sin \varphi_1) \vec{k}_a
\end{aligned} \tag{3.135}$$

ifadesi geçerlidir. İş uzvu rijit olduğundan bu vektörün uzunluğunun değişmeyeceğini söylemek aşağıdaki gibi ifade olunur:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} - b^2 &= a^2 + \frac{3}{4}l_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \frac{3}{4}l_1^2 \cos^2 \varphi_1 - \sqrt{3}al_1 \cos \varphi_1 \\
&\quad - \sqrt{3}al_2 \cos \varphi_2 + \frac{3}{2}l_1l_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \frac{l_2^2}{4} \cos^2 \varphi_2 \\
&\quad + \frac{l_1^2}{4} \cos^2 \varphi_1 - \frac{l_1l_2}{2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + l_2^2 \sin^2 \varphi_2 + l_1^2 \sin^2 \varphi_1 \\
&\quad - 2l_1l_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - b^2 \\
&= a^2 - b^2 + l_1^2 + l_2^2 - \sqrt{3}al_1 \cos \varphi_1 - \sqrt{3}al_2 \cos \varphi_2 + l_1l_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\quad - 2l_1l_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.136}$$

Bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
(-C_1 + C_3 - C_4 + C_5)\mu^2 + (C_1 - C_3 - C_4 + C_5)\lambda^2\mu^2 + 4C_2\lambda\mu \\
+ (C_1 + C_3 + C_4 + C_5) + (-C_1 - C_3 + C_4 + C_5)\lambda^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Burada

$$\begin{aligned}
C_1 &= l_1l_2, \\
C_2 &= -2l_1l_2 \\
C_3 &= -\sqrt{3}al_1 \\
C_4 &= -\sqrt{3}al_2, \\
C_5 &= a^2 - b^2 + l_1^2 + l_2^2
\end{aligned} \tag{3.138}$$

olarak tanımlanmıştır. (3.137) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(G_1\lambda^2 + G_2)\mu^2 + G_3\lambda\mu + (G_4\lambda^2 + G_5) = 0 \tag{3.139}$$

Burada aşağıdaki tanımlar yapılmıştır:

$$\begin{aligned}
G_1 &= C_1 - C_3 - C_4 + C_5 \\
G_2 &= -C_1 + C_3 - C_4 + C_5 \\
G_3 &= 4C_2 \\
G_4 &= -C_1 - C_3 + C_4 + C_5 \\
G_5 &= C_1 + C_3 + C_4 + C_5
\end{aligned} \tag{3.140}$$

Benzer şekilde iş uzvunun QS kenarını temsil eden vektör

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QS} &= \overrightarrow{G_a S} - \overrightarrow{G_a Q} \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l_2 \cos \varphi_2 - \frac{a}{2} \right) \vec{i}_a + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a - l_3 \cos \varphi_3 - \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \right) \vec{j}_a \\
&\quad + (l_3 \sin \varphi_3 - l_2 \sin \varphi_2) \vec{k}_a
\end{aligned} \tag{3.141}$$

şeklinde yazılabilir. Bu vektörün de şiddetinin sabit kalması şartı aşağıdaki bağıntıya sevk eder:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QS} \cdot \overrightarrow{QS} - b^2 &= \frac{3}{4} l_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \frac{a^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} a l_2 \cos \varphi_2 + \frac{3}{4} a^2 + l_3^2 \cos^2 \varphi_3 \\
&\quad + \frac{l_2^2}{4} \cos^2 \varphi_2 + l_3^2 \sin^2 \varphi_3 + l_3^2 \sin^2 \varphi_2 - \sqrt{3} a l_3 \cos \varphi_3 \\
&\quad + l_2 l_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} a l_2 \cos \varphi_2 - 2 l_1 l_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \\
&\quad - b^2 = 0 \\
&= a^2 - b^2 + l_2^2 + l_3^2 - \sqrt{3} a l_2 \cos \varphi_2 - \sqrt{3} a l_3 \cos \varphi_3 + l_2 l_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\
&\quad - 2 l_2 l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.142}$$

(3.142) denklemini aşağıdaki forma getirilebilir:

$$\begin{aligned}
(D_1 - D_2 - D_4 + D_5) \mu^2 v^2 + (-D_1 + D_3 - D_4 + D_5) v^2 + 4 D_2 \mu v \\
+ (-D_1 - D_3 + D_4 + D_5) \mu^2 + (D_1 + D_3 + D_4 + D_5) = 0
\end{aligned} \tag{3.143}$$

Burada da

$$\begin{aligned}
D_1 &= l_2 l_3, \\
D_2 &= -2l_2 l_3 \\
D_3 &= -\sqrt{3} a l_2 \\
D_4 &= -\sqrt{3} a l_3, \\
D_5 &= a^2 - b^2 + l_2^2 + l_3^2
\end{aligned} \tag{3.144}$$

tanımlamaları yapılmıştır. (3.144) denklemi şu hâle getirilebilir:

$$(H_1 \mu^2 + H_2) v^2 + H_3 \mu v + (H_4 \mu^2 + H_5) = 0 \tag{3.145}$$

Burada $H_i (i = 1 \dots 5)$ katsayıları şöyle tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
H_1 &= D_1 - D_3 - D_4 + D_5 \\
H_2 &= -D_1 + D_3 - D_4 + D_5 \\
H_3 &= 4D_2 \\
H_4 &= -D_1 - D_3 + D_4 + D_5 \\
H_5 &= D_1 + D_3 + D_4 + D_5
\end{aligned} \tag{3.146}$$

Son olarak iş uzvunun SP kenarına ait vektör şöyle ifade olunur:

$$\begin{aligned}
\overline{SP} &= \overline{G_a P} - \overline{G_a S} \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l_1 \cos \varphi_1 - \frac{a}{2} \right) \vec{i}_a + \left(\frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 + l_3 \cos \varphi_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) \vec{j}_a \\
&\quad + (l_1 \sin \varphi_1 - l_3 \sin \varphi_3) \vec{k}_a
\end{aligned} \tag{3.147}$$

bu kenara ait rijitlik şartı da aşağıdaki denklemi verir:

$$\begin{aligned}
\overline{SP} \cdot \overline{SP} - b^2 &= \frac{3}{4} l_1^2 \cos^2 \varphi_1 + \frac{a^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} a l_1 \cos \varphi_1 + \frac{l_1^2}{4} \cos^2 \varphi_1 + l_3^2 \cos^2 \varphi_3 \\
&+ \frac{3}{4} a^2 + l_1 l_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} a l_1 \cos \varphi_1 - \sqrt{3} a l_3 \cos \varphi_3 \\
&+ l_1^2 \sin^2 \varphi_1 + l_3^2 \sin^2 \varphi_3 - 2 l_1 l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - b^2 = 0 \\
&= a^2 - b^2 + l_1^2 + l_3^2 - \sqrt{3} a l_1 \cos \varphi_1 - \sqrt{3} a l_3 \cos \varphi_3 + l_1 l_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \\
&- 2 l_1 l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Aşağıdaki gibi E_i ($i = 1, \dots, 5$) katsayıları tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
E_1 &= l_1 l_3, \\
E_2 &= -2 l_1 l_3 \\
E_3 &= -\sqrt{3} a l_3 \\
E_4 &= -\sqrt{3} a l_1, \\
E_5 &= a^2 - b^2 + l_1^2 + l_3^2
\end{aligned} \tag{3.149}$$

Bu durumda (3.148) denklemini şu hâle gelir:

$$\begin{aligned}
(E_1 - E_3 - E_4 + E_5) v^2 \lambda^2 + (-E_1 + E_3 - E_4 + E_5) \lambda^2 + 4 E_2 v \lambda \\
+ (-E_1 - E_3 + E_4 + E_5) v^2 + (E_1 + E_3 + E_4 + E_5) = 0
\end{aligned} \tag{3.150}$$

Şimdi I_i ($i = 1, \dots, 5$) sayılarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
I_1 &= E_1 - E_3 - E_4 + E_5 \\
I_2 &= -E_1 + E_3 - E_4 + E_5 \\
I_3 &= 4 E_2 \\
I_4 &= -E_1 - E_3 + E_4 + E_5 \\
I_5 &= E_1 + E_3 + E_4 + E_5
\end{aligned} \tag{3.151}$$

Neticede (3.150) aşağıdaki şekli alır:

$$(I_1 v^2 + I_2) \lambda^2 + I_3 v \lambda + (I_4 v^2 + I_5) = 0 \tag{3.152}$$

(3.139),(3.142) ve (3.152) denklemlerinin yapısı geliştirdiğimiz YK metodunun kullanılmasına imkan vermektedir. Buna hazırlık olarak (3.152) denklemini aşağıdaki forma getirmek uygun olacaktır.

$$(I_1\lambda^2 + I_4)v^2 + I_3\lambda v + (I_2\lambda^2 + I_5) = 0 \quad (3.153)$$

Neticede iş uzvunun taban platformuna göre konum ve yönelimini bulmak için üzülmesi gereken denklem takımı

$$(G_1\lambda^2 + G_2)\mu^2 + G_3\lambda\mu + (G_4\lambda^2 + G_5) = 0 \quad (3.139 \text{ tekrar})$$

$$(H_1\mu^2 + H_2)v^2 + H_3\mu v + (H_4\mu^2 + H_5) = 0 \quad (3.145 \text{ tekrar})$$

$$(I_1\lambda^2 + I_4)v^2 + I_3\lambda v + (I_2\lambda^2 + I_5) = 0 \quad (3.153 \text{ tekrar})$$

olmaktadır. Buradaki λ, μ ve v büyüklükleri (3.103)'e benzer tarzda tanımlanmıştır.

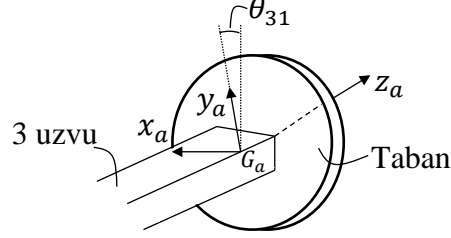
$$\begin{aligned} \lambda &= \tan \frac{\varphi_1}{2} \\ \mu &= \tan \frac{\varphi_2}{2} \\ v &= \tan \frac{\varphi_3}{2} \end{aligned} \quad (3.154)$$

Burada φ_1, φ_2 ve φ_3 taban platformu dönen mafsalla bağlı bacakların bu platformla yaptıkları aıllardır. (şekil 3.16.a.)

(3.154) bağıntılarını tersine kullanarak φ_1, φ_2 ve φ_3 aılları bulunduğunda $\overrightarrow{G_a P}, \overrightarrow{G_a Q}$ ve $\overrightarrow{G_a S}$ vektörleri sayısal olarak hesaplanabilir. Bu durumda P,Q ve S noktalarının $G_a x_a y_a z_a$ takımındaki koordinatları bulunmuş olur. Keza $G_{\ddot{u}}$ noktasının yer vektörü

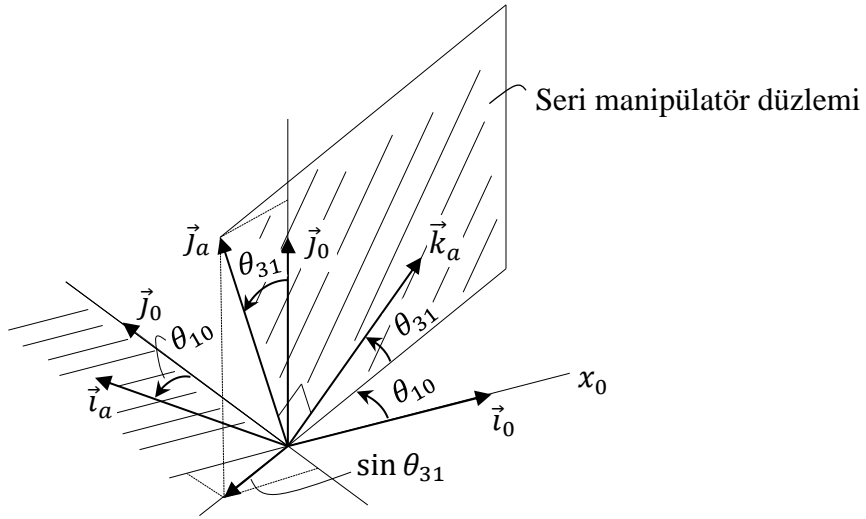
$$\overrightarrow{G_a G_{\ddot{u}}} = \frac{\overrightarrow{G_a P} + \overrightarrow{G_a Q} + \overrightarrow{G_a S}}{3} \quad (3.155)$$

olarak bulunur. Bu vektörün bileşenleri $G_{\ddot{u}}$ noktasının $G_a x_a y_a z_a$ takımındaki bileşenleridir. $G_a x_a y_a z_a$ takımının eksenlerinin sabit takıma göre nasıl tanımlanacağı evvelce belirtilmemiştir. Şekil 3.18’de bu koordinat takımının nasıl yerleştirildiği gösterilmiştir.



Şekil 3.18. $G_a x_a y_a z_a$ ’nın yerleşimi hakkında.

Buna göre x_a eksenini daima yatay kalmaktadır. y_a eksenini ise düşeyle θ_{31} açısı yapmaktadır. z_a ise bu iki eksene dik bir eksen olacaktır. $G_a x_a y_a z_a$ takımının birim vektörleri \vec{i}_a, \vec{j}_a ve \vec{k}_a ’nın $O x_0 y_0 z_0$ sabit takımının birim vektörleri cinsinden ifadesi Şekil 3.19 yardımıyla kolayca bulunur.



Şekil 3.19. $G_a x_a y_a z_a$ ve $O x_0 y_0 z_0$ takımlarının birim vektörleri arasındaki ilişki hakkında.

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_a \\ \vec{j}_a \\ \vec{k}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{10} & \cos \theta_{10} & 0 \\ -\sin \theta_{31} \cos \theta_{10} & -\sin \theta_{31} \sin \theta_{10} & \cos \theta_{31} \\ \cos \theta_{31} \cos \theta_{10} & \cos \theta_{31} \sin \theta_{10} & \sin \theta_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

Buradaki 3x3 matris ${}^a_0R^T$ 'dir, yani $G_a x_a y_a z_a$ 'nın $Oxyz$ takımına göre yönelimi matrisin transpozudur. Bu durumda $\overrightarrow{G_a G_{\ddot{u}}}$ vektörünün $G_a x_a y_a z_a$ takımındaki bileşenleri ${}^a x_{G\ddot{u}}$, ${}^a y_{G\ddot{u}}$, ${}^a z_{G\ddot{u}}$ ile $x_{G\ddot{u}}$, $y_{G\ddot{u}}$, $z_{G\ddot{u}}$ ile gösterdiğimiz sabit takımdaki bileşenleri arasındaki ilişki şöyle olur:

$$\begin{bmatrix} {}^a x_{G\ddot{u}} \\ {}^a y_{G\ddot{u}} \\ {}^a z_{G\ddot{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{10} & -\sin \theta_{31} \cos \theta_{10} & \cos \theta_{31} \cos \theta_{10} \\ \cos \theta_{10} & -\sin \theta_{31} \sin \theta_{10} & \cos \theta_{31} \sin \theta_{10} \\ 0 & \cos \theta_{31} & \sin \theta_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^a x_{G\ddot{u}} \\ {}^a y_{G\ddot{u}} \\ {}^a z_{G\ddot{u}} \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

(3.156)'daki matrisin (3.157)'deki matrisin transpozu olduğu görülmektedir. Bu bileşenlere (3.130) ile verilen bileşenler eklenirse $G_{\ddot{u}}$ 'nün yere göre vektörü tanımlanmış olur. Neticede

$$\begin{aligned} x_{G\ddot{u}} &= {}^0 x_{G_a} + {}^0 x_{G\ddot{u}}^a \\ y_{G\ddot{u}} &= {}^0 y_{G_a} + {}^0 y_{G\ddot{u}}^a \\ z_{G\ddot{u}} &= {}^0 z_{G_a} + {}^0 z_{G\ddot{u}}^a \end{aligned} \quad (3.158)$$

İş uzvunun yönelimini bulmada şöyle bir yol izlenebilir. Bilindiği gibi $G_{\ddot{u}} x_{\ddot{u}} y_{\ddot{u}} z_{\ddot{u}}$ takımının $x_{\ddot{u}}$ eksenini PQ kenarına paraleldir. y_a eksenini ise PQ'nun orta noktası ile S köşesini birleştiren doğru üzerindedir. Bu noktaya H_1 diyelim. Bu durumda her konumda,

$$\begin{aligned} \vec{i}_{\ddot{u}} &= \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \\ \vec{j}_{\ddot{u}} &= \frac{\overrightarrow{H_1 S}}{\|\overrightarrow{H_1 S}\|} = \frac{\overrightarrow{G_a S} - \overrightarrow{G_a H_1}}{\|\overrightarrow{G_a S} - \overrightarrow{G_a H_1}\|} \\ \vec{k}_{\ddot{u}} &= \vec{i}_{\ddot{u}} \times \vec{j}_{\ddot{u}} \end{aligned} \quad (3.159)$$

bağıntıları geçerlidir. Burada $\overrightarrow{G_a H_1}$ vektörü şöyle bulunur:

$$\overrightarrow{G_a H_1} = \overrightarrow{G_a P} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{G_a Q} - \overrightarrow{G_a P}) \quad (3.160)$$

(3.156)'daki vektörler $G_a x_a y_a z_a$ takımına göre tanımlandığından $\vec{l}_{\ddot{u}}, \vec{j}_{\ddot{u}}$ ve $\vec{k}_{\ddot{u}}$ vektörleri $\vec{l}_a, \vec{j}_a, \vec{k}_a$ birim vektörleri cinsinden aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\begin{bmatrix} \vec{l}_{\ddot{u}} \\ \vec{j}_{\ddot{u}} \\ \vec{k}_{\ddot{u}} \end{bmatrix} = [{}^{\ddot{u}}_a R^T] \begin{bmatrix} \vec{l}_a \\ \vec{j}_a \\ \vec{k}_a \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Burada ${}^{\ddot{u}}_a R^T$, $G_{\ddot{u}} x_{\ddot{u}} y_{\ddot{u}} z_{\ddot{u}}$ takımında verilen bir vektörün bileşenlerini $G_a x_a y_a z_a$ 'daki bileşenlere bağlayan matristir. Bu matris $G_{\ddot{u}} x_{\ddot{u}} y_{\ddot{u}} z_{\ddot{u}}$ takımının $G_a x_a y_a z_a$ 'ya göre yönelimini temsil eder. (3.161)'de $G_a x_a y_a z_a$ takımının birim vektörleri yerine (3.156) bağıntısı konursa $G_{\ddot{u}} x_{\ddot{u}} y_{\ddot{u}} z_{\ddot{u}}$ takımının $Oxyz$ takımına göre yönelimi belirlenmiş olur. ${}^{\ddot{u}}_a R$ matrisinin bileşenleri φ, θ, Ψ açılarının sinüs ve kosinüslerini içerir. Neticede,

$$\begin{bmatrix} \vec{l}_{\ddot{u}} \\ \vec{j}_{\ddot{u}} \\ \vec{k}_{\ddot{u}} \end{bmatrix} = {}^{\ddot{u}}_a R^T {}^a_0 R^T \begin{bmatrix} \vec{l} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

yazılabilir. (3.174)'deki 3x3 iki matris çarpımı

$${}^{\ddot{u}}_0 R^T = {}^{\ddot{u}}_a R^T {}^a_0 R^T \quad (3.163)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada ${}^{\ddot{u}}_a R$ $G_{\ddot{u}} x_{\ddot{u}} y_{\ddot{u}} z_{\ddot{u}}$ takımının sabit $Oxyz$ takımına göre yönelim matrisidir ve bunun bileşenleri α, β ve γ açılarının sinüs ve kosinüslerini içerir. Neticede α, β, γ yönelim açılarını $\varphi, \theta, \Psi, \theta_{10}, \theta_{21}, \theta_{32}$ açılarıyla ilişkisi kurulmuş olur. Bu suretle Tip 1 hibrit manipülatörün ileri konum analizi tamamlanmış bulunmaktadır.

3.10.2. Tip 1 hibrit manipülatörde ileri hız analizi

Paralel manipülatörün bacaklarının uzama hızları verildiğinde bacakların dönme açısal hızları kısıt denklemlerinin zamana göre türetilmesi ile bulunan denklemlerden elde edilir. Buna göre (3.109) kısıt denklemini zamana göre türetilirse

$$\frac{d}{dt}(\overline{PQ} \cdot \overline{PQ} - b^2) = 0 \quad (3.164)$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(l_1^2 + l_2^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{3}al_1 \cos \varphi_1 - \sqrt{3}al_2 \cos \varphi_2 \\ + l_1l_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - 2l_1l_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.165)$$

ifadesi elde olunur. Türev işlemleri yapılırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\begin{aligned} 2l_1\dot{l}_1 + 2l_2\dot{l}_2 - \sqrt{3}a \cos \varphi_1 \dot{l}_1 + \sqrt{3}al_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - \sqrt{3}a \cos \varphi_2 \dot{l}_2 \\ + \sqrt{3}al_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + l_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{l}_1 + l_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{l}_2 \\ - l_1l_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 - l_1l_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \\ - 2l_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{l}_1 - 2l_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{l}_2 \\ - 2l_1l_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 - 2l_1l_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.166)$$

(3.166) denkleminde terimler bulunacak olan bacak açısal hızlarının parantezine alınır ve bilinen değerler denklemin sağ tarafına atılır:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}al_1 \sin \varphi_1 - l_1l_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - 2l_1l_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\dot{\varphi}_1 \\ + (\sqrt{3}al_2 \sin \varphi_2 - l_1l_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ - 2l_1l_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ = -(2l_1 - \sqrt{3}a \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ - 2l_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)\dot{l}_1 \\ - (2l_2 - \sqrt{3}a \cos \varphi_2 + l_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ - 2l_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)\dot{l}_2 \end{aligned} \quad (3.167)$$

Benzer şekilde ikinci rijitlik şartı zamana göre türetilir:

$$\frac{d}{dt}(\overline{QS} \cdot \overline{QS} - b^2) = 0 \quad (3.168)$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (l_2^2 + l_3^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{3}al_2 \cos \varphi_2 - \sqrt{3}al_3 \cos \varphi_3 \\ + l_2l_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - 2l_2l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3) = 0 \end{aligned} \quad (3.169)$$

(3.169) denkleminde gerekli türevler alınır, bilinen terimler sağ tarafa atılır ve kalan terimler bacak açısal hızlarının parantezine alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3}al_2 \sin \varphi_2 - l_2l_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - 2l_2l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3)\dot{\varphi}_2 \\ & + (\sqrt{3}al_3 \sin \varphi_3 - l_2l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \\ & - 2l_2l_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\ & = -(2l_2 - \sqrt{3}a \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ & - 2l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3)\dot{l}_2 \\ & - (2l_3 - \sqrt{3}a \cos \varphi_3 + l_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ & - 2l_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3)\dot{l}_3 \end{aligned} \quad (3.170)$$

Son olarak üçüncü rijitlik şartı zamana göre türetilir

$$\frac{d}{dt} (\overline{SP} \cdot \overline{SP} - b^2) = 0 \quad (3.171)$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (l_1^2 + l_3^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{3}al_1 \cos \varphi_1 - \sqrt{3}al_3 \cos \varphi_3 \\ + l_1l_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - 2l_1l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3) = 0 \end{aligned} \quad (3.172)$$

Yukarıdakilerine benzer işlem yapılarak hız analizi için gerekli üçüncü denklem de bulunur.

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{3}al_1 \sin \varphi_1 - l_1l_3 \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - 2l_1l_3 \cos \varphi_1 \sin \varphi_3)\dot{\varphi}_1 \\
& + (\sqrt{3}a l_3 \sin \varphi_3 - l_1l_3 \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 \\
& - 2l_1l_3 \sin \varphi_1 \cos \varphi_3)\dot{\varphi}_3 \\
& = -(2l_1 - \sqrt{3}a \cos \varphi_1 + l_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \\
& - 2l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3)\dot{l}_1 \\
& - (2l_3 - \sqrt{3}a \cos \varphi_3 + l_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \\
& - 2l_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3)\dot{l}_3
\end{aligned} \tag{3.173}$$

Çıkarılan denklemler incelendiğinde bacak açısal hızları cinsinden üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan lineer bir denklem takımının ortaya çıktığı görülmektedir. Bunun çözümünde Gauss eliminasyon , Cramer metodu veya ters matris metodu kullanılabilir. Bu maksatla öncelikle bilinmeyenlere ait katsayı matrisinin elemanları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \sqrt{3}a l_1 \sin \varphi_1 - l_1l_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - 2l_1l_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
A_{12} &= \sqrt{3}a l_2 \sin \varphi_2 - l_1l_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2l_1l_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
A_{13} &= 0 \\
A_{21} &= 0 \\
A_{22} &= \sqrt{3}a l_2 \sin \varphi_2 - l_2l_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - 2l_2l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \\
A_{23} &= \sqrt{3}a l_3 \sin \varphi_3 - l_2l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 - 2l_2l_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\
A_{31} &= \sqrt{3}a l_1 \sin \varphi_1 - l_1l_3 \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - 2l_1l_3 \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 \\
A_{32} &= 0 \\
A_{33} &= \sqrt{3}a l_3 \sin \varphi_3 - l_1l_3 \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 - 2l_1l_3 \sin \varphi_1 \cos \varphi_3
\end{aligned} \tag{3.174}$$

Denklemlerin sağ tarafındaki terimler de matris formunda yazacağımız denklem takımının sağ taraf vektörünü (sabitler vektörünü) oluştururlar. Bu vektörün bileşenleri de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
b(1,1) &= -[(2l_1 - \sqrt{3}a \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - 2l_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)\dot{l}_1 \\
&\quad + (2l_2 - \sqrt{3}a \cos \varphi_2 + l_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\quad - 2l_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)\dot{l}_2] \\
b(2,1) &= -[(2l_2 - \sqrt{3}a \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - 2l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3)\dot{l}_2 \\
&\quad + (2l_3 - \sqrt{3}a \cos \varphi_3 + l_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\
&\quad - 2l_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3)\dot{l}_3] \\
b(3,1) &= -[(2l_1 - \sqrt{3}a \cos \varphi_1 + l_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - 2l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3)\dot{l}_1 \\
&\quad + (2l_3 - \sqrt{3}a \cos \varphi_3 + l_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \\
&\quad - 2l_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3)\dot{l}_3]
\end{aligned} \tag{3.175}$$

Neticede (3.167), (3.170) ve (3.173)'ten ibaret denklem takımını matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$A\dot{\varphi} = \underline{b} \tag{3.176}$$

Burada

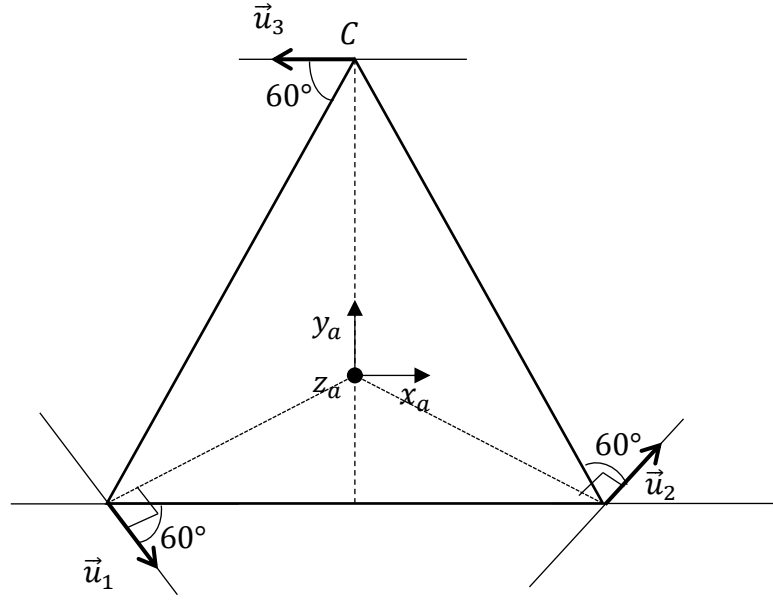
$$\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} \tag{3.177}$$

olup denklem takımının çözümü

$$\dot{\varphi} = A^{-1}\underline{b} \tag{3.178}$$

şeklinde bulunur.

Bacakların açılma hızlarının alt platforma bağlı koordinat takımında vektörel olarak tanımlanması gerekeceğinden alt platformun A,B,C noktalarındaki döner mafsalların eksenine çakışık birim vektörler tanımlanması gerekir. Bu vektörler \vec{u}_1, \vec{u}_2 ve \vec{u}_3 olsun. Bu vektörler matematik pozitif yönde dönme verecek tarzda (φ_i 'leri arttıracak yönde) tanımlanmıştır.



Şekil 3.20. Hibrit manipulatörün \vec{u}_1, \vec{u}_2 ve \vec{u}_3 vektörlerinin tanımlanması.

Buna göre söz konusu birim vektörlerin alt platforma bağlı birim vektörler cinsinden ifadeleri şöyle olur:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \cos 30^\circ \vec{i}_a - \sin 30^\circ \vec{j}_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i}_a - \frac{1}{2} \vec{j}_a \\ \vec{u}_2 &= \cos 30^\circ \vec{i}_a + \sin 30^\circ \vec{j}_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i}_a + \frac{1}{2} \vec{j}_a \\ \vec{u}_3 &= -\vec{i}_a\end{aligned}\tag{3.179}$$

Neticede bacakların herhangi bir anda alt platforma göre bağlı açısal hızları

$$\begin{aligned}{}^a\vec{\omega}_1 &= \dot{\phi}_1 \vec{u}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\phi}_1 \vec{i}_a - \frac{1}{2} \dot{\phi}_1 \vec{j}_a \\ {}^a\vec{\omega}_2 &= \dot{\phi}_2 \vec{u}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\phi}_2 \vec{i}_a + \frac{1}{2} \dot{\phi}_2 \vec{j}_a \\ {}^a\vec{\omega}_3 &= \dot{\phi}_3 \vec{u}_3 = \dot{\phi}_3 \vec{i}_a\end{aligned}\tag{3.180}$$

olur. Burada sol üst köşedeki a sembolü büyüklüklerin alt platforma bağlı koordinat takımında tanımlandığına işaret etmektedir.

Şayet l_1, l_2 ve l_3 uzunlukları sabit tutulsalar idi, P,Q ve S'nin mutlak hızları (yere göre) şöyle bulunurdu:

$$\begin{aligned} {}^0\vec{V}_P^S &= {}^0\vec{V}_A + {}^0\vec{V}_{P/A}^S \\ {}^0\vec{V}_Q^S &= {}^0\vec{V}_B + {}^0\vec{V}_{Q/B}^S \\ {}^0\vec{V}_S^S &= {}^0\vec{V}_C + {}^0\vec{V}_{S/C}^S \end{aligned} \quad (3.181)$$

Burada sol üst köşedeki o sembolü büyüklüklerin yere bağlı sabit takımda tanımlandığını gösterir. (3.181) bağıntısında sağ üstte yer alan “S” sembolü ise sürüklenme (drag) hızı olduğuna işaret etmektedir. Bacakların bağıl hareketi olmazsa alt ve üst platformlar ve bacaklar tek bir uzuv gibi davranırlar ve ortak bir açısal hıza sahip olurlar; bu ise alt platformun mutlak açısal hızına eşittir.

Alt platformun açısal hızı ${}^0\vec{\omega}_a$ şöyle bulunur:

$${}^0\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{32} \quad (3.182)$$

Burada $\vec{\omega}_{10}, \vec{\omega}_{21}, \vec{\omega}_{32}$ seri manipülatördeki uzuvların bir önceki uzva nazaran bağıl hızlarıdır. Sonuçta

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{10} &= \omega_{10}\vec{k}_1 = \omega_{10}\vec{k}_0 \\ \vec{\omega}_{21} &= \omega_{21}\vec{k}_2 = \omega_{21}(\sin\theta_{10}\vec{i}_0 - \cos\theta_{10}\vec{j}_0) \\ &= \omega_{21}\sin\theta_{10}\vec{i}_0 - \omega_{21}\cos\theta_{10}\vec{j}_0 \\ \vec{\omega}_{32} &= \omega_{32}\vec{k}_3 = \omega_{31}(\sin\theta_{10}\vec{i}_0 - \cos\theta_{10}\vec{j}_0) \\ &= \omega_{32}\sin\theta_{10}\vec{i}_0 - \omega_{32}\cos\theta_{10}\vec{j}_0 \end{aligned} \quad (3.183)$$

olmaktadır. Bu büyüklükler kullanılırsa

$${}^0\vec{\omega}_a = (\omega_{21} + \omega_{32}) \cos \theta_{10} \vec{i}_0 - (\omega_{21} + \omega_{32}) \sin \theta_{10} \vec{j}_0 + \omega_{10} \vec{k}_0 \quad (3.184)$$

bulunur. Neticede

$$\begin{aligned} {}^0\vec{V}_{P/A}^S &= {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{AP} \\ {}^0\vec{V}_{Q/B}^S &= {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{BQ} \\ {}^0\vec{V}_{S/C}^S &= {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{CS} \end{aligned} \quad (3.185)$$

olacaktır. Bacak doğrultularını veren vektörlerin alt platforma bağlı koordinat takımındaki bileşenleri şöyledir:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \cos \varphi_1 \cos 30^\circ \vec{i}_a + \cos \varphi_1 \sin 30^\circ \vec{j}_a + \sin \varphi_1 \vec{k}_a \\ \vec{w}_2 &= -\cos \varphi_2 \cos 30^\circ \vec{i}_a + \cos \varphi_2 \sin 30^\circ \vec{j}_a + \sin \varphi_2 \vec{k}_a \\ \vec{w}_3 &= -\cos \varphi_3 \vec{j}_a + \sin \varphi_3 \vec{k}_a \end{aligned} \quad (3.186)$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= l_1 \vec{w}_1 \\ \overline{BQ} &= l_2 \vec{w}_2 \\ \overline{CS} &= l_3 \vec{w}_3 \end{aligned} \quad (3.187)$$

yazılabilir. (3.185) bağıntılarını bulmak için iki yol izlenebilir. ${}^0\vec{\omega}_a$ alt platforma bağlı birim vektörler cinsinden ifade edilir. \vec{w}_i 'ler de aynı takımda ifade olduğundan (3.186) hızları aynı takımda bulunur ve buradan yere bağlı takıma geçilir. İkinci yol, \vec{w}_i vektörlerini de yere bağlı koordinat takımında tanımlayarak (3.186) hızlarını elde etmektir.

Alt platforma ait koordinat takımının birim vektörleri sabit birim vektörler cinsinden aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\vec{i}_a &= -\sin \theta_{10} \vec{i}_0 + \cos \theta_{10} \vec{j}_0 \\
\vec{j}_a &= -\sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \vec{i}_0 - \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \vec{j}_0 \\
&\quad + \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \vec{k}_0 \\
\vec{k}_a &= \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \vec{i}_0 + \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \vec{j}_0 \\
&\quad + \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \vec{k}_0
\end{aligned} \tag{3.188}$$

Bu durumda \vec{w}_i 'ler şöyle olur:

$$\begin{aligned}
{}^0\vec{w}_1 &= l_1^x \vec{i}_0 + l_1^y \vec{j}_0 + l_1^z \vec{k}_0 \\
{}^0\vec{w}_2 &= l_2^x \vec{i}_0 + l_2^y \vec{j}_0 + l_2^z \vec{k}_0 \\
{}^0\vec{w}_3 &= l_3^x \vec{i}_0 + l_3^y \vec{j}_0 + l_3^z \vec{k}_0
\end{aligned} \tag{3.189}$$

Burada

$$\begin{aligned}
l_1^x &= l_1 \left\{ \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta_{10} - \frac{1}{2} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \right] \cos \varphi_1 \right. \\
&\quad \left. + \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \sin \varphi_1 \right\} \\
l_1^y &= l_1 \left\{ \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_{10} - \frac{1}{2} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \right] \cos \varphi_1 \right. \\
&\quad \left. + \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \sin \varphi_1 \right\} \\
l_1^z &= l_1 \left\{ \frac{1}{2} \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \varphi_1 + \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \varphi_1 \right\} \\
l_2^x &= l_2 \left\{ \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta_{10} - \frac{1}{2} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \right] \cos \varphi_2 \right. \\
&\quad \left. + \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \sin \varphi_2 \right\} \\
l_2^y &= l_2 \left\{ \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_{10} - \frac{1}{2} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \right] \cos \varphi_2 \right. \\
&\quad \left. + \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \sin \varphi_2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.190}$$

$$\begin{aligned}
l_2^z &= l_2 \left\{ \frac{1}{2} \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \right\} \\
l_3^x &= l_3 \{ \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \cos \varphi_3 + \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \sin \varphi_3 \} \\
l_3^y &= l_3 \{ \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \cos \varphi_3 + \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \sin \varphi_3 \} \\
l_3^z &= l_3 \{ -\cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \varphi_3 + \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \varphi_3 \}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Sonuçta (3.186) hızları şöyle bulunur:

$$\begin{aligned}
{}^0V_{P/A}^S &= [-(\omega_{21} + \omega_{32}) \sin \theta_{10} l_1^z - \omega_{10} l_1^y] \vec{i}_0 \\
&\quad + [-(\omega_{21} + \omega_{32}) \cos \theta_{10} l_1^z + \omega_{10} l_1^x] \vec{j}_0 \\
&\quad + [(\omega_{21} + \omega_{32})(\cos \theta_{10} l_1^y - \sin \theta_{10} l_1^x)] \vec{k}_0 \\
{}^0V_{Q/B}^S &= [-(\omega_{21} + \omega_{32}) \sin \theta_{10} l_2^z - \omega_{10} l_2^y] \vec{i}_0 \\
&\quad + [-(\omega_{21} + \omega_{32}) \cos \theta_{10} l_2^z + \omega_{10} l_2^x] \vec{j}_0 \\
&\quad + [(\omega_{21} + \omega_{32})(\cos \theta_{10} l_2^y - \sin \theta_{10} l_2^x)] \vec{k}_0 \\
{}^0V_{S/C}^S &= [-(\omega_{21} + \omega_{32}) \sin \theta_{10} l_3^z - \omega_{10} l_3^y] \vec{i}_0 \\
&\quad + [-(\omega_{21} + \omega_{32}) \cos \theta_{10} l_3^z + \omega_{10} l_3^x] \vec{j}_0 \\
&\quad + [(\omega_{21} + \omega_{32})(\cos \theta_{10} l_3^y - \sin \theta_{10} l_3^x)] \vec{k}_0
\end{aligned} \tag{3.191}$$

Alt platformun A,B ve C noktalarının mutlak hızları ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
{}^0\vec{V}_A &= {}^0\vec{V}_{G_a} + {}^0\vec{V}_{A/G_a} = {}^0\vec{V}_{G_a} + {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a A} \\
{}^0\vec{V}_B &= {}^0\vec{V}_{G_a} + {}^0\vec{V}_{B/G_a} = {}^0\vec{V}_{G_a} + {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a B} \\
{}^0\vec{V}_C &= {}^0\vec{V}_{G_a} + {}^0\vec{V}_{C/G_a} = {}^0\vec{V}_{G_a} + {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a C}
\end{aligned} \tag{3.192}$$

Alt platform koordinat takımına göre $\overline{G_a A}$, $\overline{G_a B}$ ve $\overline{G_a C}$ yer vektörleri şöyledir:

$$\begin{aligned}
\overline{G_a A} &= -\frac{a}{2} \vec{i}_a - \frac{a}{2\sqrt{3}} \vec{j}_a \\
\overline{G_a B} &= \frac{a}{2} \vec{i}_a - \frac{a}{2\sqrt{3}} \vec{j}_a
\end{aligned} \tag{3.193}$$

$$\overline{G_a C} = \frac{a}{\sqrt{3}} \vec{J}_a$$

(3.193) ile verilen vektörlerin sabit takımdaki ifadeleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\overline{G_a A} &= A_x \vec{i}_0 + A_y \vec{j}_0 + A_z \vec{k}_0 \\ \overline{G_a B} &= B_x \vec{i}_0 + B_y \vec{j}_0 + B_z \vec{k}_0 \\ \overline{G_a C} &= C_x \vec{i}_0 + C_y \vec{j}_0 + C_z \vec{k}_0\end{aligned}\tag{3.194}$$

Burada

$$\begin{aligned}A_x &= a \left[\frac{1}{2} \sin \theta_{10} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \right] \\ A_y &= a \left[-\frac{1}{2} \cos \theta_{10} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \right] \\ A_z &= a \left[-\frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \right] \\ B_x &= a \left[-\frac{1}{2} \sin \theta_{10} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \right] \\ B_y &= a \left[\frac{1}{2} \cos \theta_{10} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \right] \\ B_z &= a \left[-\frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \right] \\ C_x &= a \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \cos \theta_{10} \right] \\ C_y &= a \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) \sin \theta_{10} \right] \\ C_z &= a \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\theta_{21} + \theta_{32}) \right]\end{aligned}\tag{3.195}$$

olarak tanımlanmıştır. Buna göre A,B ve C noktalarının alt platform ağırlık merkezi (aynı zamanda alt platform koordinat takımının orijini) G_a 'ya göre bağlı hızları şöyle olur:

$$\begin{aligned}
{}^0\vec{V}_{A/G_a} &= {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a A} = -[(\omega_{21} + \omega_{32}) \sin \theta_{10} A_z + \omega_{10} A_y] \vec{i}_0 \\
&\quad + [\omega_{10} A_x - (\omega_{21} + \omega_{32}) \cos \theta_{10} A_z] \vec{j}_0 \\
&\quad + [(\omega_{21} + \omega_{32})(\cos \theta_{10} A_y + \sin \theta_{10} A_x)] \vec{k}_0 \\
{}^0\vec{V}_{B/G_a} &= {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a B} = -[(\omega_{21} + \omega_{32}) \sin \theta_{10} B_z + \omega_{10} B_y] \vec{i}_0 \\
&\quad + [\omega_{10} B_x - (\omega_{21} + \omega_{31}) \cos \theta_{10} A_z] \vec{j}_0 \\
&\quad + [(\omega_{21} + \omega_{32})(\cos \theta_{10} B_y + \sin \theta_{10} B_x)] \vec{k}_0 \\
{}^0\vec{V}_{C/G_a} &= {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a C} = -[(\omega_{21} + \omega_{31}) \sin \theta_{10} C_z + \omega_{10} C_y] \vec{i}_0 \\
&\quad + [\omega_{10} C_x - (\omega_{21} + \omega_{32}) \cos \theta_{10} C_z] \vec{j}_0 \\
&\quad + [(\omega_{21} + \omega_{32})(\cos \theta_{10} C_y + \sin \theta_{10} C_x)] \vec{k}_0
\end{aligned} \tag{3.196}$$

Öte yandan G_a noktasının yer vektörü sabit takımda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\overline{OG_a} &= [L_2 \cos \theta_{21} + L_3 \cos(\theta_{21} + \theta_{32})] \cos \theta_{10} \vec{i}_0 \\
&\quad + [L_2 \cos \theta_{21} + L_3 \cos(\theta_{21} + \theta_{32})] \sin \theta_{10} \vec{j}_0 \\
&\quad + [L_2 \sin \theta_{21} + L_3 \sin(\theta_{21} + \theta_{32}) + L_1] \vec{k}_0
\end{aligned} \tag{3.197}$$

Burada L_1, L_2 ve L_3 seri manipülatörün uzuv uzunluklarıdır. G_a 'nın mutlak hızı ${}^0\vec{V}_{G_a}$, (3.197)'nin zamana göre türevi alınarak şöyle bulunur:

$$\begin{aligned}
{}^0\vec{V}_{G_a} &= \frac{d(\overline{OG_a})}{dt} \\
&= \{-[L_2 \sin \theta_{21} \omega_{21} \\
&\quad + L_3 \sin(\theta_{21} + \theta_{32})(\omega_{21} + \omega_{32})] \cos \theta_{10} \\
&\quad - [L_2 \cos \theta_{21} + L_3 \cos(\theta_{21} + \theta_{32})] \sin \theta_{10} \omega_{10}\} \vec{i}_0 \\
&\quad + \{-[L_2 \sin \theta_{21} \omega_{21} + L_3 \sin(\theta_{21} + \theta_{32})(\omega_{21} + \omega_{32})] \sin \theta_{10} \\
&\quad \quad + [L_2 \cos \theta_{21} + L_3 \cos(\theta_{21} + \theta_{32})] \cos \theta_{10} \omega_{10}\} \vec{j}_0 \\
&\quad + [L_2 \cos \theta_{21} \omega_{21} + L_3 \cos(\theta_{21} + \theta_{32})(\omega_{21} + \omega_{32})] \vec{k}_0
\end{aligned} \tag{3.198}$$

Böylece (3.196) bağıntılarıyla verilen P,Q ve S noktalarına ait sürüklenme hızları artık hesaplanabilir. Şimdi bu noktaların alt tablaya göre bağıl hızları bulunacaktır. Bu hızları ${}^aV_P^r$, ${}^aV_Q^r$ ve ${}^aV_S^r$ ile gösterelim. Bağıl hızların açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} {}^aV_P^r &= \dot{l}_1 \vec{w}_1 + \dot{\varphi}_1 \vec{u}_1 \times l_1 \vec{w}_1 \\ {}^aV_Q^r &= \dot{l}_2 \vec{w}_2 + \dot{\varphi}_2 \vec{u}_2 \times l_2 \vec{w}_2 \\ {}^aV_S^r &= \dot{l}_3 \vec{w}_3 + \dot{\varphi}_3 \vec{u}_3 \times l_3 \vec{w}_3 \end{aligned} \quad (3.199)$$

Çıkarılan bağıntılar (3.199)'da kullanılırsa bağıl hızlar şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} {}^a\vec{V}_P^r &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi_1 \dot{l}_1 - \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \right) \vec{i}_a \\ &+ \left(\frac{1}{2} \cos \varphi_1 \dot{l}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \right) \vec{j}_a \\ &+ \left(\sin \varphi_1 \dot{l}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \right) \vec{k}_a \\ {}^a\vec{V}_Q^r &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi_2 \dot{l}_2 + \frac{1}{2} l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \right) \vec{i}_a \\ &+ \left(\frac{1}{2} \cos \varphi_2 \dot{l}_2 - \frac{1}{2} l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \right) \vec{j}_a \\ &+ \left(\sin \varphi_2 \dot{l}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \right) \vec{k}_a \\ {}^a\vec{V}_S^r &= \left(-\cos \varphi_3 \dot{l}_3 + l_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 \right) \vec{j}_a \\ &+ \left(\sin \varphi_3 \dot{l}_3 + l_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3 \right) \vec{k}_a \end{aligned} \quad (3.200)$$

Bu aşamada birim vektörler sabit takım birim vektörleri cinsinden yazılarak bağıl hızlar da sabit takıma göre ifade edilmiş olur. Üst platformun P,Q ve S noktalarının mutlak hızları artık şöyle hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} {}^o\vec{V}_P &= {}^o\vec{V}_P^s + {}^o\vec{V}_P^r \\ {}^o\vec{V}_Q &= {}^o\vec{V}_Q^s + {}^o\vec{V}_Q^r \\ {}^o\vec{V}_S &= {}^o\vec{V}_S^s + {}^o\vec{V}_S^r \end{aligned} \quad (3.201)$$

Öte yandan

$${}^o\vec{V}_Q = {}^o\vec{V}_P + {}^o\omega_{\ddot{u}} \overline{xPQ} \quad (3.202)$$

bağıntısı olduğundan üst platformun açısal hızı kolayca bulunur. Üst platformun ağırlık merkezi (aynı zamanda üst platforma bağlı koordinat takımının orjini) $G_{\ddot{u}}$ 'nin hızı aşağıdaki gibi bulunur:

$${}^o\vec{V}_{G_{\ddot{u}}} = \left({}^o\vec{V}_P + {}^o\vec{V}_Q + {}^o\vec{V}_S \right) / 3 \quad (3.203)$$

Böylece iş uzvu olarak üst platformun açısal hızı ve bir noktasının lineer hızı bulunmuş olmaktadır. Öte yandan üst platform açısal hızı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$${}^o\vec{\omega}_{\ddot{u}} = \frac{\vec{V}_{Q/P} \times \vec{V}_{S/P}}{\vec{V}_{Q/P} \cdot \overline{PS}} \quad (3.204)$$

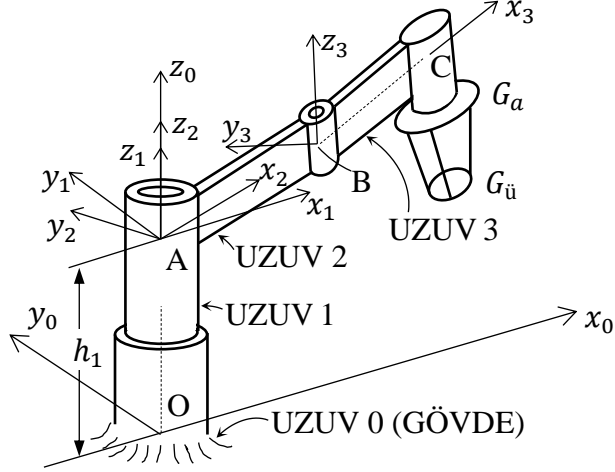
Bu bağıntının geçerliliği şöyle kanıtlanabilir:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{Q/P} \times \vec{V}_{S/P} &= \vec{V}_{Q/P} \times ({}^o\vec{\omega}_{\ddot{u}} \times \overline{PS}) \\ &= (\vec{V}_{Q/P} \cdot \overline{PS}) {}^o\vec{\omega}_{\ddot{u}} - (\vec{V}_{Q/P} \cdot {}^o\vec{\omega}_{\ddot{u}}) \overline{PS} \\ &= (\vec{V}_{Q/P} \cdot \overline{PS}) {}^o\vec{\omega}_{\ddot{u}} \end{aligned} \quad (3.205)$$

Burada $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ özdeşliğinden yararlanılmıştır.

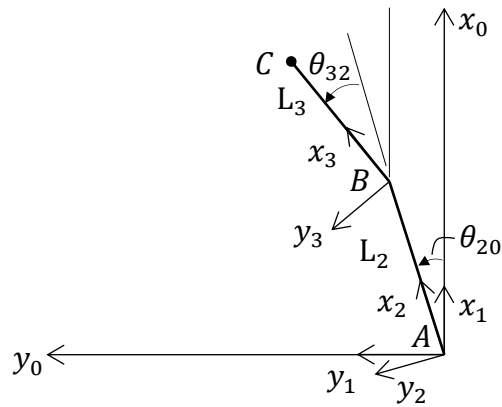
3.11. Tip 2 Hibrit Manipülörde İleri Kinematik

Bu manipülör Şekil 3.21’de gösterilmiştir. Bu manipülörün OABC kısmı seri manipülatördür.



Şekil 3.21. İncelenen hibrit manipülör.

Seri kısım gövde ve 1 numaralı uzuv arasında kayar (prizmatik) mafsıl, 1 ve 2 numaralı uzuvlar ile 2 ve 3 numaralı uzuvlar arasında olmak üzere iki döner (revolute) mafsıl içermektedir. 1 numaralı uzuv sabit uzva (yere) göre düşeyde öteleme yapmakta olup 2 ve 3 numaralı uzuvlar düşey eksenler etrafında dönebilmektedirler. Seri kısmın serbestlik derecesi 3'tür ve bu kısmın çalışma uzayında istenilen bir noktaya erişilebilir.

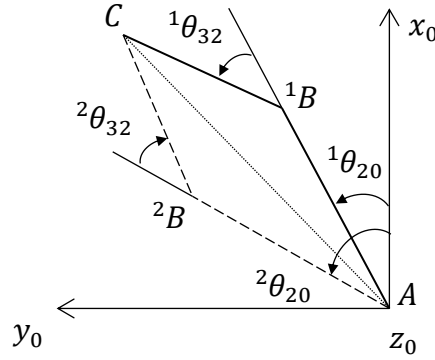


Şekil 3.22. Seri kısımda koordinat takımlarının $+z_0$ tarafından görünüşü.

Şekil 3.21 ve Şekil 3.22 yardımıyla C noktasının koordinatları yere bağlı $Ox_0y_0z_0$ takımında aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}x_C &= L_2 \cos \theta_{20} + L_3 \cos(\theta_{20} + \theta_{32}) \\y_C &= L_2 \sin \theta_{20} + L_3 \sin(\theta_{20} + \theta_{32}) \\z_C &= h_1\end{aligned}\quad (3.206)$$

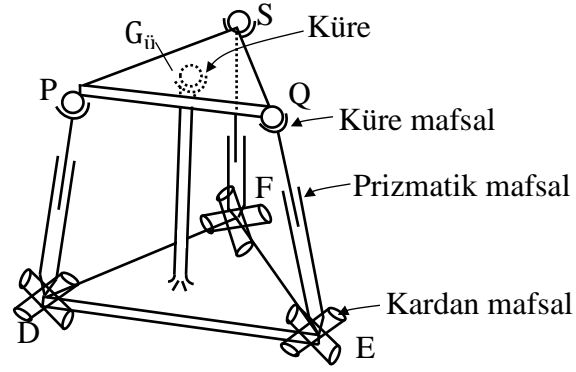
(3.206) denkleminde C'nin koordinatları öngörüldüğünde h_1, θ_{20} ve θ_{32} açıları kolayca bulunur. Tersine h_1, θ_{20} ve θ_{32} açıları verildiğinde C noktasının koordinatları hemen hesaplanır. İlk durum geri kinematik, ikincisi ise ileri kinematik problemdir. İleri kinematikte çözüm tek olduğu halde geri kinematikte iki farklı çözüm alternatifi ortaya çıkar. Bu durum Şekil 3.23'te gösterilmiştir.



Şekil 3.23. Geriye konum analizinde iki farklı çözüm alternatifi.

Seri manipülatörü 3 serbestlik dereceli bir paralel manipülatör takip etmektedir. Bu kısım alt ve üst platform ve bu ikisini bağlayan üç bacaktan meydana gelmektedir.

Bir cismin istenen bir konuma istenen bir yönelimde getirilmesi için en az 6 serbestlik derecesi gereklidir. Ele aldığımız hibrit manipülatörde seri kısım iş uzvunun (burada bu uzuv paralel manipülatörün üst platformu veya buna rijit bağlı operatif cisimdir. Mesela tıbbi bir cihazda operasyon aparatı gibi) istenen konuma gelmesini temin etmektedir. Bu durumda paralel manipülatörün iş uzvunun sadece yönelimini belirlemesi yeterli olacaktır. Bu nedenle paralel manipülatörün yönelimi kontrol amacıyla 3 serbestlik derecesini haiz olması yeterlidir. Bunu sağlamak için üst platformun merkezi sabit tutulmalıdır. Buna uygun bir tasarım Şekil 3.24'de görülmektedir.



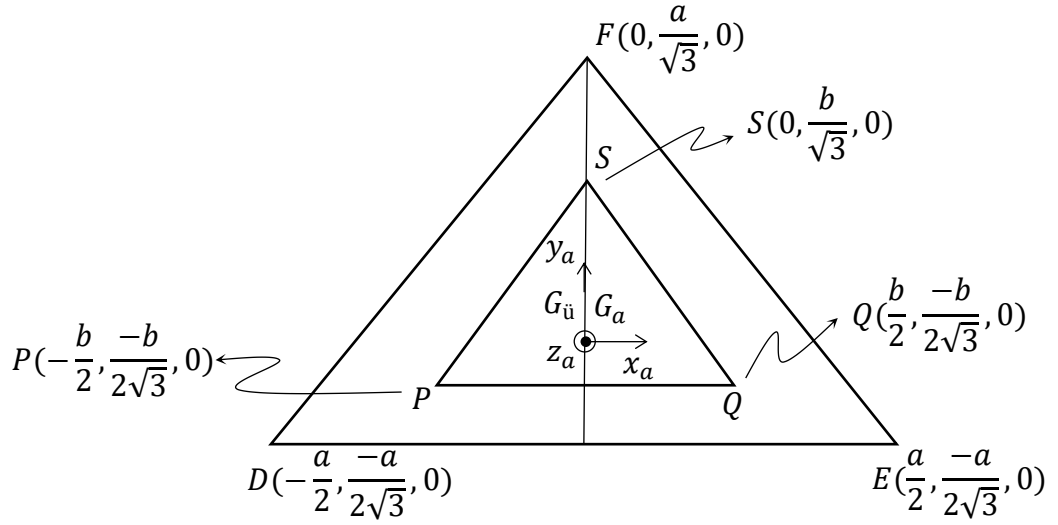
Şekil 3.24. Sadece yönelimi kontrol eden paralel manipülatör.

Tip 2 hibrit manipülatörün paralel kısmında serbestlik derecesi analizi yapılacak olursa, Şekil 3.24'den uzuv sayısı $n = 8$ olduğu görülmektedir. Burada üç aktüatör ve dolayısıyla üç bacak söz konusudur. Bacakların taban platformuyla irtibatı üniversal (kardan) mafsallarıyla, iş uzvuna bağlantısı ise küresel mafsallarla sağlanmıştır. Bacak uzuvları birbirlerine silindirik mafsallarla temastadırlar. Ayrıca iş uzvu ağırlık merkezi noktalarından bir küresel mafsalla taban platformuna bağlanmıştır ve dolayısıyla iş uzvunun ağırlık merkezi tabana göre lineer yerdeğiştirme yapamaz. Neticede mekanizmada iki serbestlik dereceli mafsalların sayısı $m_2 = 6$, üç serbestlik dereceli mafsalları sayısı $m_3 = 4$, özdeş serbestlik derecesi sayısı $\sum f_{id} = 3$, uzuv sayısı $n = 8$ olup Kutzbach formülünde yerine konursa serbestlik derecesi

$$F = 6(n - 1) - 5m_1 - 4m_2 - 3m_3 - 2m_4 - m_5 - \sum f_{id}$$

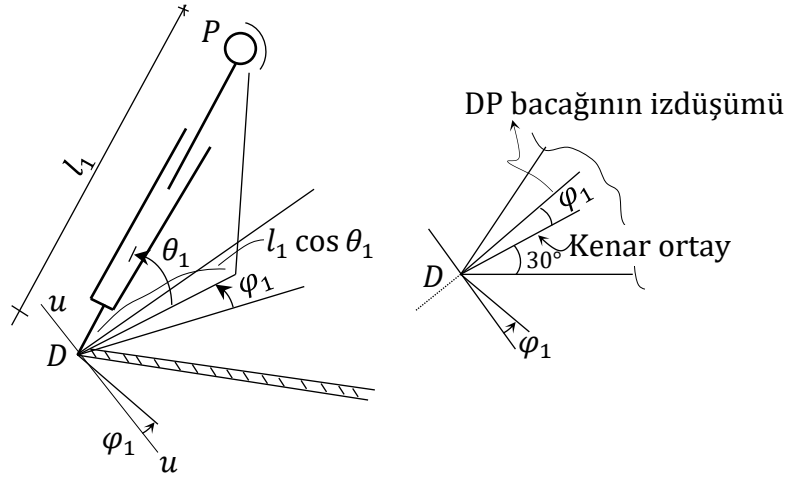
$$F = 6(8 - 1) - 5 \cdot 0 - 4 \cdot 6 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 0 - 3 = 3$$

bulunur. Bu da iş uzvunun yöneliminin tamamen kontrol edilebileceğini göstermektedir. Burada da taban ve iş uzvu bacak bağlantı noktalarının kenarları a ve b olan eşkenar üçgenler oluşturacak tarzda yerleştirildiği kabul edilecektir. Öncekine benzer tarzda taban plakasının ağırlık merkezi $G_a x_a y_a z_a$ ve iş uzvunun ağırlık merkezine de $G_ü x_ü y_ü z_ü$ koordinat takımlarının bağlandığını kabul ediyoruz. İş uzvu tabana paralel iken $+z_a$ tarafından bakışta her iki koordinat takımının x ve y eksenleri paralel, z eksenleri ise çakışık vaziyettedir.



Şekil 3.25. Paralel manipulatörün köşe koordinatları

Üniversal mafsalların durumu iki açıyla tanımlanabilir. Bunları φ_i ve θ_i göstereceğiz ($i = 1,2,3$). Şekil 3.26'da DP bacağı için bu durum açıklanmaya çalışılmıştır.



Şekil 3.26. DP bacağındaki φ_1 ve θ_1 kardan açıları

İş uzvunun $G_{\bar{u}}$ noktası sabit olduğundan bacakların bu uzva bağlantı noktaları olan P, Q ve S yarıçapı $b/\sqrt{3}$ olan bir küre yüzeyi üzerinde olmaktadır. Yani her $G_{\bar{u}}P = G_{\bar{u}}Q =$

$G_{\bar{u}}S = \frac{b}{\sqrt{3}}$ olmalıdır. $\overline{G_a G_{\bar{u}}} = h$ denirse $G_{\bar{u}}$ merkezli $\frac{b}{\sqrt{3}}$ yarıçaplı, $G_{\bar{u}}$ merkezli kürenin denklemi $G_a x_a y_a z_a$ takımında

$$x^2 + y^2 + (z - h)^2 = \frac{b^2}{3} \quad (3.207)$$

şeklinde olacaktır (Sembol kalabalığından kaçınmak için x_a, y_a ve z_a yerine kısaca x, y, z sembolleri kullanılmıştır).

Kardan açısı φ_1 D'den geçen ve bu köşeden geçen kenarortaya dik olan uu' ekseninden itibaren saat ibrelerine ters yönde ölçülecektir. θ_1 ise yataydan itibaren uu' eksenini etrafında matematik pozitif yönde ölçülecektir. Şimdi $\overline{D\bar{P}}$ ve $\overline{G_a\bar{D}}$ vektörleri bulunup toplanarak $\overline{G_a\bar{P}}$ vektörü elde edilmelidir. Bu vektörün bileşenleri $G_a x_a y_a z_a$ takımında P noktasının koordinatları olup, bunlar (3.207) ile verilen küre denklemini sağlamalıdır.

Şekil 3.26 yardımıyla

$$\overline{D\bar{P}} = l_1 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 + \pi/3) \vec{i}_a + l_1 \cos \theta_1 \sin(\varphi_1 + \pi/3) \vec{j}_a + l_1 \sin \theta_1 \vec{k}_a \quad (3.208)$$

ve

$$\overline{G_a\bar{D}} = -\frac{a}{2} \vec{i}_a - \frac{a}{2\sqrt{3}} \vec{j}_a \quad (3.209)$$

olup bunlar toplanırsa

$$\begin{aligned} \overline{G_a\bar{P}} &= \overline{G_a\bar{D}} + \overline{D\bar{P}} \\ &= [l_1 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 + \pi/6) - a/2] \vec{i}_a \\ &\quad + [l_1 \cos \theta_1 \sin(\varphi_1 + \pi/6) - a/2\sqrt{3}] \vec{j}_a + l_1 \sin \theta_1 \vec{k}_a \end{aligned} \quad (3.210)$$

bulunur. Bu vektörün bileşenleri, yani P'nin koordinatları (3.210) ile verilen küre denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned} &[l_1 \cos \theta_1 \cos(\varphi_1 + \pi/6) - a/2]^2 + [l_1 \cos \theta_1 \sin(\varphi_1 + \pi/6) - a/2\sqrt{3}]^2 \\ &\quad + (l_1 \sin \theta_1 - h)^2 = \frac{b^2}{3} \end{aligned} \quad (3.211)$$

olmalıdır. (3.211) ifadesi düzenlenirse

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}al_1 \cos \theta_1 \sin \varphi_1 - 2hl_1 \sin \theta_1 + l_1^2 + h^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{3} = 0 \quad (3.212)$$

bağıntısı elde olunur. Bu bağıntı l_1 verildiğinde φ_1 ve θ_1 açıları arasındaki ilişkiyi vermektedir; yani φ_1 verildiğinde θ_1 bu denklemden bulunacaktır. Burada

$$\begin{aligned} \tan \frac{\varphi_1}{2} &= \lambda_1 \\ \tan \frac{\theta_1}{2} &= \mu_1 \end{aligned} \quad (3.213)$$

tanımlayalım. Bu durumda (3.212)'de

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{1 - \lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2} \\ \sin \theta_1 &= \frac{2\mu_1}{1 + \mu_1^2} \\ \cos \theta_1 &= \frac{1 - \mu_1^2}{1 + \mu_1^2} \end{aligned} \quad (3.214)$$

konular ve denklem düzenlenirse aşağıdaki ifade bulunur:

$$[(C_1 + A_1)\lambda_1^2 + (C_1 - A_1)]\mu_1^2 + 2B_1(1 + \lambda_1^2)\mu_1 + [(C_1 - A_1)\lambda_1^2 + (C_1 + A_1)] = 0 \quad (3.215)$$

Burada

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}al_1 \\ B_1 &= -2hl_1 \\ C_1 &= l_1^2 + h^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{3} \end{aligned} \quad (3.216)$$

olmaktadır. (3.215) denklem katsayıları λ 'ya (dolayısıyla φ_1 'e) bağlı olan μ_1 cinsinden ikinci dereceden bir polinom gibi düşünülebilir. Bu durumda polinom kökleri

$$\mu_{1,2} = \frac{-2B_1(1 + \lambda_1^2) \mp \sqrt{4B_1^2(1 + \lambda_1^2)^2 - 4[(C_1 + A_1)\lambda_1^2 + (C_1 - A_1)][(C_1 - A_1)\lambda_1^2 + (C_1 + A_1)]}}{2[(C_1 + A_1)\lambda_1^2 + (C_1 - A_1)]} \quad (3.217)$$

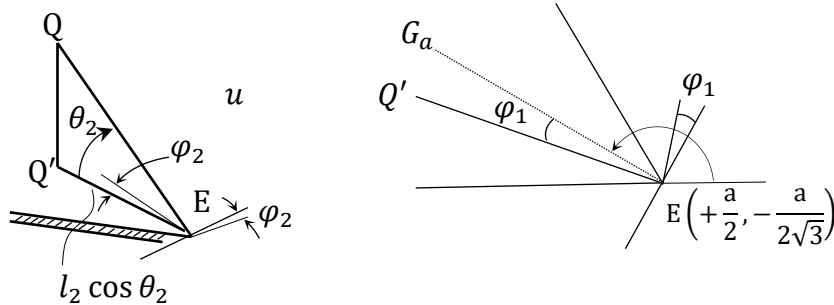
olarak bulunur. Buna göre μ 'nün reel değerler vermesi için karekökün içi pozitif veya sıfır olmalıdır. Ayrıca $\mu_1 \rightarrow \infty$ olmaması için payda da sıfır olmamalıdır. Bu kısıtlar göz önünde tutulduğu takdirde (3.215) bağıntısı ön görülen bir φ_1 açısı için θ_1 açısının ne olacağını bulmaya yarayan bir bağıntıdır. (3.215)'in zamana göre türevi \overline{DP} bacağıının alt platforma göre açısal hızları olan $\dot{\varphi}_1$ ve $\dot{\theta}_1$ arasında da bir bağıntı verir.

$$\begin{aligned} p_1 &= -2B_1(1 + \lambda_1^2) \\ q_1 &= 4B_1^2(1 + \lambda_1^2)^2 - 4[(C_1 + A_1)\lambda_1^2 + (C_1 - A_1)][(C_1 - A_1)\lambda_1^2 + (C_1 + A_1)] \\ r_1 &= 2[(C_1 + A_1)\lambda_1^2 + (C_1 - A_1)] \end{aligned} \quad (3.218)$$

tanımlanırsa (3.217) bağıntısı kısaca

$$\mu_{1,2} = \frac{p_1 \mp \sqrt{q_1}}{r_1} \quad (3.219)$$

olarak ifade edilebilir. Şimdi E'deki kardan açıları için benzer bir bağıntı çıkarılacaktır. Bunun için Şekil 3.27 yardımcı olacaktır.



Şekil 3.27. E'de kardan açıları.

Şekil 3.27'den

$$\overrightarrow{G_a E} = \frac{a}{2} \overrightarrow{i_a} - \frac{a}{2\sqrt{3}} \overrightarrow{j_a} \quad (3.220)$$

ve

$$\overrightarrow{E Q} = l_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + 5\pi/6) \overrightarrow{i_a} + l_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + 5\pi/6) \overrightarrow{j_a} + l_2 \sin \theta_2 \overrightarrow{k_a} \quad (3.221)$$

olarak bulunur ve bu ikisi ((3.220) ve (3.221)) toplanarak $\overrightarrow{G_a Q}$ 'ye geçilir:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G_a Q} &= \overrightarrow{G_a E} + \overrightarrow{E Q} \\ &= \left[l_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + 5\pi/6) + \frac{a}{2} \right] \overrightarrow{i_a} \\ &\quad + \left[l_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + 5\pi/6) - \frac{a}{2\sqrt{3}} \right] \overrightarrow{j_a} + l_2 \sin \theta_2 \overrightarrow{k_a} \end{aligned} \quad (3.222)$$

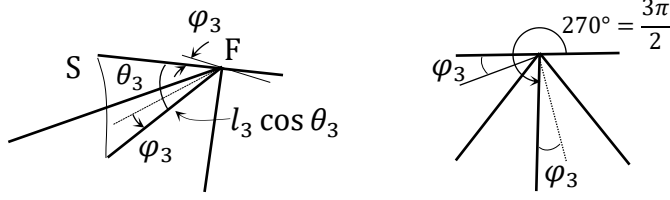
Bu bileşenler yine (3.206)'da yerine konursa

$$\begin{aligned} &\left[l_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 + \pi/3) + a/2 \right]^2 + \left[l_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi_2 + \pi/3) - a/2\sqrt{3} \right]^2 \\ &\quad + (l_2 \sin \theta_2 - h)^2 = \frac{b^2}{3} \end{aligned} \quad (3.223)$$

olmalıdır. (3.223) ifadesi düzenlenirse

$$-\frac{2a}{\sqrt{3}} l_2 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 - 2h l_2 \sin \theta_2 + l_2^2 + h^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{3} = 0 \quad (3.224)$$

bulunur. Benzer şekilde Şekil 3.28'den hareketle aşağıdaki bağıntılar yazılır:



Şekil 3.28. Paralel manipulatörün F noktası ayrıntısı

$$\overrightarrow{G_a F} = \frac{a}{\sqrt{3}} \overrightarrow{J_a} \quad (3.225)$$

$$\overrightarrow{F S} = -l_3 \cos \theta_3 \cos \left(\varphi_3 + \frac{3\pi}{2} \right) \overrightarrow{i_a} - l_3 \cos \theta_3 \sin \left(\varphi_3 + \frac{3\pi}{2} \right) \overrightarrow{j_a} + l_3 \sin \theta_3 \overrightarrow{k_a} \quad (3.226)$$

Bu iki vektör toplanırsa $\overrightarrow{G_a S}$ vektörü bulunur:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G_a S} &= \overrightarrow{G_a F} + \overrightarrow{F S} \\ &= l_3 \cos \theta_3 \cos(\varphi_3 + 3\pi/2) \overrightarrow{i_a} \\ &\quad + \left(l_3 \cos \theta_3 \sin(\varphi_3 + 3\pi/2) + \frac{a}{\sqrt{3}} \right) \overrightarrow{j_a} + l_3 \sin \theta_3 \overrightarrow{k_a} \end{aligned} \quad (3.227)$$

bulunur. Bu vektörün bileşenleri de küre denklemini sağlamalıdır:

$$\begin{aligned} (l_3 \cos \theta_3 \cos(\varphi_3 + 3\pi/2))^2 + (l_3 \cos \theta_3 \sin(\varphi_3 + 3\pi/2) + a/\sqrt{3})^2 \\ + (l_3 \sin \theta_3 - h)^2 = \frac{b^2}{3} \end{aligned} \quad (3.228)$$

(3.227) düzenlenmesiyle aşağıdaki ifade elde olunur:

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} a l_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_3 - 2 h l_3 \sin \theta_3 + l_3^2 + h^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{3} = 0 \quad (3.229)$$

Burada da:

$$\begin{aligned}
\tan \frac{\varphi_2}{2} &= \lambda_2 \\
\tan \frac{\theta_2}{2} &= \mu_2 \\
\sin \varphi_2 &= \frac{2\lambda_2}{1 + \lambda_2^2} \\
\sin \theta_2 &= \frac{1 - \mu_2^2}{1 + \mu_2^2} \\
\cos \theta_2 &= \frac{2\mu_2}{1 + \mu_2^2}
\end{aligned} \tag{3.230}$$

$$\begin{aligned}
\tan \frac{\varphi_3}{2} &= \lambda_3 \\
\tan \frac{\theta_3}{2} &= \mu_3 \\
\sin \varphi_3 &= \frac{2\lambda_3}{1 + \lambda_3^2} \\
\sin \theta_3 &= \frac{2\mu_3}{1 + \mu_3^2} \\
\cos \theta_3 &= \frac{1 - \mu_3^2}{1 + \mu_3^2}
\end{aligned} \tag{3.231}$$

tanımlamaları yapılırsa, (3.215), (3.224) ve (3.217) denklemleri aşağıdaki gibi olurlar:

$$[(C_2 + A_2)\lambda_2^2 + (C_2 - A_2)]\mu_2^2 + 2B_2(1 + \lambda_2^2)\mu_2 + [(C_2 - A_2)\lambda_2^2 + (C_2 + A_2)] = 0 \tag{3.232}$$

Burada

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}al_2 \\
B_2 &= -2hl_2 \\
C_2 &= l_2^2 + h^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{3}
\end{aligned} \tag{3.233}$$

olmaktadır.

Keza (3.229) bağıntısı da şöyle yazılabilir:

$$[(C_3 + A_3)\lambda_3^2 + (C_3 - A_3)]\mu_3^2 + 2B_3(1 + \lambda_3^2)\mu_3 + [(C_3 - A_3)\lambda_3^2 + (C_3 + A_3)] = 0 \quad (3.234)$$

Burada da aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned} A_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}al_3 \\ B_3 &= -2hl_3 \\ C_3 &= l_3^2 + h^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{3} \end{aligned} \quad (3.235)$$

Neticede θ_i ve φ_i ($i = 1,2,3$) açıları arasındaki bağıntılar aynı formda olduğu görülmektedir. Keza burada da

$$\begin{aligned} p_2 &= -2B_2(1 + \lambda_2^2) \\ q_2 &= 4B_2^2(1 + \lambda_2^2)^2 - 4(C_2\lambda_2^2 - 2A_2\lambda_2 + C_2)(2A_2\lambda_2 + C_2\lambda_2^2 + C_2) \\ r_2 &= 2(C_2\lambda_2^2 - 2A_2\lambda_2 + C_2) \end{aligned} \quad (3.236)$$

$$\begin{aligned} p_3 &= -2B_3(1 + \lambda_3^2) \\ q_3 &= 4B_3^2(1 + \lambda_3^2)^2 - 4(C_3\lambda_3^2 - 2A_3\lambda_3 + C_3)(2A_3\lambda_3 + C_3\lambda_3^2 + C_3) \\ r_3 &= 2(C_3\lambda_3^2 - 2A_3\lambda_3 + C_3) \end{aligned} \quad (3.237)$$

tanımlanırsa (3.232) ve (3.234)'ün kökleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mu_{2,1,2} = \frac{p_2 \mp \sqrt{q_2}}{r_2} \quad (3.238)$$

$$\mu_{3,1,2} = \frac{p_3 \mp \sqrt{q_3}}{r_3} \quad (3.239)$$

Her ne kadar θ_i ve φ_i açıları arasındaki ilişki kurulmuş oluyorsa da φ_i açılarının nasıl bulunacağı sorusu cevaplanmalıdır. Elimizde üç adet rijitlik şartı vardır. $\|\overrightarrow{PQ}\| = b$,

$\|\overrightarrow{QS}\| = b$ ve $\|\overrightarrow{SP}\| = b$. Dolayısıyla üç adet φ_i bilinmeyeninin bulunması için bu üç şarttan yararlanılacaktır. Şimdi bu rijitlik şartlarının çıkarılması ele alınacaktır.

$\overrightarrow{G_aP}$, $\overrightarrow{G_aQ}$ ve $\overrightarrow{G_aS}$ vektörleri daha önce (3.210), (3.222) ve (3.227) bağıntılarıyla verilmişti. Dolayısıyla \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{QS} ve \overrightarrow{SP} vektörleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{G_aQ} - \overrightarrow{G_aP} \quad (3.240)$$

$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{G_aS} - \overrightarrow{G_aQ} \quad (3.241)$$

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{G_aP} - \overrightarrow{G_aS} \quad (3.242)$$

Rijitlik şartları

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} - b^2 = 0 \quad (3.243)$$

$$\overrightarrow{QS} \cdot \overrightarrow{QS} - b^2 = 0 \quad (3.244)$$

$$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SP} - b^2 = 0 \quad (3.245)$$

İşlemler yapıldığında sırasıyla aşağıdaki bağıntılar bulunur:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} - b^2 &= l_1^2 + l_2^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{3}al_1 \cos \theta_1 \cos \varphi_1 \\ &\quad - \sqrt{3}al_2 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 + al_1 \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \\ &\quad - al_2 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 + l_1l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ &\quad + l_1l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ &\quad - \sqrt{3}l_1l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \\ &\quad + \sqrt{3}l_1l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2l_1l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.246)$$

$$\begin{aligned}
\overline{QS} \cdot \overline{QS} - b^2 &= l_2^2 + l_3^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{3}al_2 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 \\
&\quad - \sqrt{3}al_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_3 + al_2 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 \\
&\quad - al_3 \cos \theta_3 \sin \varphi_3 + l_2l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\
&\quad + l_2l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \\
&\quad - \sqrt{3}l_2l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 \\
&\quad + \sqrt{3}l_2l_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 - 2l_2l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.247}$$

$$\begin{aligned}
\overline{SP} \cdot \overline{SP} - b^2 &= l_3^2 + l_1^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{3}al_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_3 \\
&\quad - \sqrt{3}al_1 \cos \theta_1 \cos \varphi_1 + al_3 \cos \theta_3 \sin \varphi_3 \\
&\quad - al_1 \cos \theta_1 \sin \varphi_1 + l_3l_1 \cos \theta_3 \cos \theta_1 \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 \\
&\quad + l_3l_1 \cos \theta_3 \cos \theta_1 \sin \varphi_3 \sin \varphi_1 \\
&\quad - \sqrt{3}l_3l_1 \cos \theta_3 \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \\
&\quad + \sqrt{3}l_3l_1 \cos \theta_3 \cos \theta_1 \cos \varphi_3 \sin \varphi_1 - 2l_3l_1 \sin \theta_3 \sin \theta_1 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.248}$$

Bu üç denklemdeki döngüsel yapı dikkat çekicidir. Bu denklemlerdeki homojenliği sağlamak için $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ ve μ_3 cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda \overline{PQ} 'ya ait rijitlik şartı aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
&l_1^2 + l_2^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{3}al_1(1 - \mu_1^2)(1 - \lambda_1^2)(1 + \mu_2^2)(1 + \lambda_2^2) \\
&\quad - \sqrt{3}al_2(1 - \mu_2^2)(1 - \lambda_2^2)(1 + \mu_1^2)(1 + \lambda_1^2) \\
&\quad + 2al_1\lambda_1(1 - \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)(1 + \lambda_2^2) \\
&\quad - 2al_2\lambda_2(1 - \mu_2^2)(1 + \mu_1^2)(1 + \lambda_1^2) \\
&\quad + l_1l_2(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)(1 - 2\sqrt{3}\lambda_1 + 2\sqrt{3}\lambda_2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \\
&\quad + 4\lambda_1\lambda_2 - 2\sqrt{3}\lambda_1^2\lambda_2 + 2\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2) \\
&\quad - 8l_1l_2\mu_1\mu_2(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2) = 0
\end{aligned} \tag{3.249}$$

\overline{QS} 'ye ait rijitlik şartı şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
& l_2^2 + l_3^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{3}al_2(1 - \mu_2^2)(1 - \lambda_2^2)(1 + \mu_3^2)(1 + \lambda_3^2) \\
& \quad - \sqrt{3}al_3(1 - \mu_3^2)(1 - \lambda_3^2)(1 + \mu_2^2)(1 + \lambda_2^2) \\
& \quad + 2al_2\lambda_2(1 - \mu_2^2)(1 + \mu_3^2)(1 + \lambda_3^2) \\
& \quad - 2al_3\lambda_3(1 - \mu_3^2)(1 + \mu_2^2)(1 + \lambda_2^2) \\
& \quad + l_2l_3(1 - \mu_2^2)(1 - \mu_3^2)(1 - 2\sqrt{3}\lambda_2 + 2\sqrt{3}\lambda_3 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) \\
& \quad + 4\lambda_2\lambda_3 - 2\sqrt{3}\lambda_2^2\lambda_3 + 2\sqrt{3}\lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2) \\
& \quad - 8l_2l_3\mu_2\mu_3(1 + \lambda_2^2)(1 + \lambda_3^2) = 0
\end{aligned} \tag{3.250}$$

\overline{SP} 'ye ait rijitlik şartı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
& l_3^2 + l_1^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{3}al_3(1 - \mu_3^2)(1 - \lambda_3^2)(1 + \mu_1^2)(1 + \lambda_1^2) \\
& \quad - \sqrt{3}al_1(1 - \mu_1^2)(1 - \lambda_1^2)(1 + \mu_3^2)(1 + \lambda_3^2) \\
& \quad + 2al_3\lambda_3(1 - \mu_3^2)(1 + \mu_1^2)(1 + \lambda_1^2) \\
& \quad - 2al_1\lambda_1(1 - \mu_1^2)(1 + \mu_3^2)(1 + \lambda_3^2) \\
& \quad + l_3l_1(1 - \mu_3^2)(1 - \mu_1^2)(1 - 2\sqrt{3}\lambda_3 + 2\sqrt{3}\lambda_1 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2) \\
& \quad + 4\lambda_3\lambda_1 - 2\sqrt{3}\lambda_3^2\lambda_1 + 2\sqrt{3}\lambda_3\lambda_1^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2) \\
& \quad - 8l_3l_1\mu_3\mu_1(1 + \lambda_3^2)(1 + \lambda_1^2) = 0
\end{aligned} \tag{3.251}$$

Kardan açılarının birbirlerine bağlayan üç denklem ile rijitlik şartlarını ifade eden bu üç denklem, toplam altı denklem simültane çözülmelidir. Kardan açılarını ilişkilendiren denklemlerde ikişer bilinmeyen olduğu için nümerik çözümde φ_i açıları taranarak (yani λ_i 'ler öngörülerek) θ_i 'ler (yani μ_i 'ler) bulunur ve bu (λ_i, μ_i) değerleri ikinci üç denklemde yerine konarak sıfıra eşit olup olmadıkları kontrol edilebilir.

3.11.1. Tip 2 hibrit manipülatörde ileriye hız analizi

Bu manipülatörlerin seri kısmının ileriye hız analizi oldukça basittir. Seri manipülatörlerin 3 numaralı uzvu bazen paralel kısmı taban platformunu taşımaktadır. Dolayısıyla taban platformunun G_a noktasının hızıyla platformun açısız hızı kolayca bulunabilir. Taban platformunun açısız hızı ${}^0\vec{\omega}_a$ yere göre şöyle bulunur:

$${}^0\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_{30} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{32} \quad (3.252)$$

$\omega_{21} = \dot{\theta}_{20}$ ve $\omega_{32} = \dot{\theta}_{32}$ 'dir. G_a noktasının hızı ${}^0\vec{V}_{G_a}$ ise aşağıdaki bağıntıdan bulunur:

$$\begin{aligned} {}^0\vec{V}_{G_a} &= \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} + \vec{V}_{G_a/B} \\ &= \dot{h}_1 \vec{k}_0 + \vec{\omega}_{20} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{30} \times \vec{BG}_a \end{aligned} \quad (3.253)$$

Burada \dot{h}_1 nokta prizmatik mafsallı elemanın düşey hızıdır. Öte yandan

$$\vec{AB} = L_2 \cos \theta_{20} \vec{i}_0 + L_2 \sin \theta_{20} \vec{j}_0 \quad (3.254)$$

$$\vec{BG}_a = L_3 \cos \theta_{30} \vec{i}_0 + L_3 \sin \theta_{30} \vec{j}_0 \quad (3.255)$$

olup $\theta_{30} = \theta_{20} + \theta_{32}$ bağıntısı mevcuttur. Ayrıca

$$\vec{\omega}_{20} = \dot{\theta}_{20} \vec{k}_0 \quad (3.256)$$

$$\vec{\omega}_{32} = \dot{\theta}_{32} \vec{k}_0 \quad (3.257)$$

olduğundan (3.254) ilâ (3.257) bağıntıları (3.253)'de kullanılırsa ${}^0\vec{V}_{G_a}$ hızı şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} {}^0\vec{V}_{G_a} &= -(\omega_{20} L_2 \sin \theta_{20} + \omega_{30} L_3 \sin \theta_{30}) \vec{i}_0 \\ &+ (\omega_{20} L_2 \cos \theta_{20} + \omega_{30} L_3 \cos \theta_{30}) \vec{j}_0 + \dot{h}_1 \vec{k}_0 \end{aligned} \quad (3.258)$$

Konum analizinden l_1, l_2, l_3 bacak uzunlukları verildiğinde φ_i, θ_i ($i = 1, 2, 3$) açılarının nasıl bulunacağı önceki alt bölümde açıklanmıştı. Tip 1 hibrit manipülatörde bacakların taban platformuna göre açısız dönmeleri sabit \vec{u}_i eksenleri etrafında cereyan ediyorken burada biri sabit diğeri değişken iki eksen etrafında dönme yapmaktadırlar. Bacakların taban platformuna göre sabit eksenlerde yaptıkları dönmeye ait açısız hızlar şöyledir:

$${}^a\vec{\omega}_{i,s} = \dot{\varphi}_i \vec{k}_a \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.259)$$

Buna karşılık bacakların etrafında θ_i açısız deplasmanının yaptıkları eksenler değişken olup bunlara ait birim vektörler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \left(\frac{1}{2} \cos \varphi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi_1 \right) \vec{i}_a + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \sin \varphi_1 \right) \vec{j}_a \\
\vec{u}_2 &= \left(\frac{1}{2} \cos \varphi_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi_2 \right) \vec{i}_a + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} \sin \varphi_2 \right) \vec{j}_a \\
\vec{u}_3 &= -\vec{i}_a
\end{aligned} \tag{3.260}$$

Buna göre bacakların bu eksenler etrafındaki açısal hızları şöyle olur:

$${}^a\vec{\omega}_{i,d} = \dot{\theta}_i \vec{u}_i \quad (i = 1,2,3) \tag{3.261}$$

(3.259) ve (3.261) bağıntılarındaki bacak numarasını gösteren i indisinin yanında s ve d indisleri ilgili bacağın taban platformuna haiz sabit ve değişken eksenler etrafındaki açısal hızları olduğuna işaret etmektedir. İş uzvunun P, Q ve S noktalarının lineer hızları aşağıdaki gibi bulunur:

$${}^0\vec{V}_j = {}^0\vec{V}_j^s + {}^0\vec{V}_j^r \quad (j = P, Q, S) \tag{3.262}$$

Burada ${}^0\vec{V}_j^s$ vektörleri Tip 1'in analizindeki notasyona uygun olarak ilgili noktanın bacaklarının sabit olması hâlinde sahip olduğu sürüklenme hızıdır. ${}^0\vec{V}_j^r$ 'ler ise bacakların taban platformuna göre relatif hızlarıdır. Sürüklenme hızları şöyle bulunur:

$$\begin{aligned}
{}^0\vec{V}_P^s &= {}^0\vec{V}_{G_a} + {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a P} \\
{}^0\vec{V}_Q^s &= \vec{V}_{G_a} + {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a Q} \\
{}^0\vec{V}_S^s &= \vec{V}_{G_a} + {}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a S}
\end{aligned} \tag{3.263}$$

(3.262) denklemindeki relatif hızlar ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
{}^0\vec{V}_P^r &= (\dot{\varphi}_1 \vec{k}_a + \dot{\theta}_1 \vec{u}_1) \times \overline{DP} + l_1 \vec{w}_1 \\
{}^0\vec{V}_Q^r &= (\dot{\varphi}_2 \vec{k}_a + \dot{\theta}_2 \vec{u}_2) \times \overline{EQ} + l_2 \vec{w}_2 \\
{}^0\vec{V}_S^r &= (\dot{\varphi}_3 \vec{k}_a + \dot{\theta}_3 \vec{u}_3) \times \overline{FS} + l_3 \vec{w}_3
\end{aligned} \tag{3.264}$$

Burada \vec{w}_1 , \vec{w}_2 ve \vec{w}_3 bacakların mevcut durumdaki doğrultularını gösteren birim vektörlerdir:

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= \overline{DP} / \|\overline{DP}\| \\ \vec{w}_2 &= \overline{EQ} / \|\overline{EQ}\| \\ \vec{w}_3 &= \overline{FS} / \|\overline{FS}\|\end{aligned}\quad (3.265)$$

Bu durumda iş uzvunun üç noktasının lineer hızları bulunmuş olur. Buna göre daha önce (3.203) formülünden ${}^o\vec{V}_{G_{\ddot{u}}}$ kolayca hesaplanır. İş uzvunun açısal hızı ise şöyle hesaplanabilir:

$${}^o\vec{\omega}_{\ddot{u}} = \frac{\vec{V}_{Q/P} \times \vec{V}_{S/P}}{\vec{V}_{Q/P} \cdot \overline{PS}} \quad (3.266)$$

3.11.2. Tip 2 hibrit manipülatörde ivme analizi

Hız analizinde olduğu gibi ivme analizinde de seri ve paralel kısımların ivme analizi birbirlerine bağlıdır, zira seri kısmın 3 numaralı uzvunun terminal noktası paralel kısmın taban platformunun G_a ağırlık merkezidir. Dolayısıyla bu noktanın lineer ivmesi hız analizinde olduğu gibi seri manipülatör tarafından tayin edilmektedir. Keza taban platformunun açısal hızı ve açısal ivmesi robot kolun son uzvunun açısal hız ve açısal ivmesine eşittir. Bu nedenle taban plakasının mutlak (yere göre) açısal ivmesi

$${}^o\vec{\alpha}_a = \vec{\alpha}_{30} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{32} \quad (3.267)$$

olacaktır. Burada

$$\begin{aligned}\alpha_{20} &= \ddot{\theta}_{20} \\ \alpha_{32} &= \ddot{\theta}_{32} \\ \alpha_{30} &= \ddot{\theta}_{20} + \ddot{\theta}_{32}\end{aligned}\quad (3.268)$$

Burada bir hususa dikkat çekmek lazımdır. (3.268)'in son bağıntısı hem \vec{a}_{20} hem de \vec{a}_{32} vektörlerinin eksenlerine paralel olduğu için yazılabilir. G_a noktasının çizgisel ivmesi

$$\begin{aligned} {}^0\vec{a}_{G_a} = & -(\omega_{20}^2 L_2 \cos \theta_{20} + \omega_{30}^2 L_3 \cos \theta_{30} + \alpha_{20} L_2 \sin \theta_{20} + \alpha_{30} L_3 \sin \theta_{30})\vec{i}_0 \\ & + (-\omega_{20}^2 L_2 \sin \theta_{20} - \omega_{30}^2 L_3 \cos \theta_{30} + \alpha_{30} L_3 \cos \theta_{30})\vec{j}_0 \end{aligned} \quad (3.269)$$

Öte yandan P,Q, ve S noktalarının sürüklenme ivmeleri şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned} {}^0\vec{a}_P^S &= {}^0\vec{a}_{G_a} + {}^0\vec{\omega}_a \times ({}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a P}) + {}^0\vec{\alpha}_a \times \overline{G_a P} \\ {}^0\vec{a}_Q^S &= {}^0\vec{a}_{G_a} + {}^0\vec{\omega}_a \times ({}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a Q}) + {}^0\vec{\alpha}_a \times \overline{G_a Q} \\ {}^0\vec{a}_S^S &= {}^0\vec{a}_{G_a} + {}^0\vec{\omega}_a \times ({}^0\vec{\omega}_a \times \overline{G_a S}) + {}^0\vec{\alpha}_a \times \overline{G_a S} \end{aligned} \quad (3.270)$$

P,Q ve S noktalarının relatif ivmeleri ise şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} {}^0\vec{a}_P^r &= \ddot{l}_1 {}^0\vec{w}_1 + \dot{l}_1 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{w}_1) + (-\ddot{\phi}_1 \vec{k}_a) \times (\dot{l}_1 {}^0\vec{w}_1) \\ &+ (-\dot{\phi}_1 \vec{k}_a) \times (\dot{l}_1 {}^0\vec{w}_1) + (-\dot{\phi}_1 \vec{k}_a) \times (l_1 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{w}_1)) \\ &+ (-\ddot{\theta}_1 {}^0\vec{u}_1) \times (l_1 {}^0\vec{w}_1) + (\dot{\theta}_1 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{u}_1)) \times (l_1 {}^0\vec{w}_1) \\ &+ (-\dot{\theta}_1 {}^0\vec{u}_1) \times (\dot{l}_1 {}^0\vec{w}_1) + (\dot{\theta}_1 {}^0\vec{u}_1) \times (l_1 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{w}_1)) \\ \\ {}^0\vec{a}_Q^r &= \ddot{l}_2 {}^0\vec{w}_2 + \dot{l}_2 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{w}_2) + (-\ddot{\phi}_2 \vec{k}_a) \times (\dot{l}_2 {}^0\vec{w}_2) \\ &+ (-\dot{\phi}_2 \vec{k}_a) \times (\dot{l}_2 {}^0\vec{w}_2) + (-\dot{\phi}_2 \vec{k}_a) \times (l_2 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{w}_2)) \\ &+ (-\ddot{\theta}_2 {}^0\vec{u}_2) \times (l_2 {}^0\vec{w}_2) + (\dot{\theta}_2 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{u}_2)) \times (l_2 {}^0\vec{w}_2) \\ &+ (-\dot{\theta}_2 {}^0\vec{u}_2) \times (\dot{l}_2 {}^0\vec{w}_2) + (\dot{\theta}_2 {}^0\vec{u}_2) \times (l_2 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{w}_2)) \\ \\ {}^0\vec{a}_S^r &= \ddot{l}_3 {}^0\vec{w}_3 + \dot{l}_3 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{w}_3) + (-\ddot{\phi}_3 \vec{k}_a) \times (\dot{l}_3 {}^0\vec{w}_3) \\ &+ (-\dot{\phi}_3 \vec{k}_a) \times (\dot{l}_3 {}^0\vec{w}_3) + (-\dot{\phi}_3 \vec{k}_a) \times (l_3 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{w}_3)) \\ &+ (-\ddot{\theta}_3 {}^0\vec{u}_3) \times (l_3 {}^0\vec{w}_3) + (\dot{\theta}_3 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{u}_3)) \times (l_3 {}^0\vec{w}_3) \\ &+ (-\dot{\theta}_3 {}^0\vec{u}_3) \times (\dot{l}_3 {}^0\vec{w}_3) + (\dot{\theta}_3 {}^0\vec{u}_3) \times (l_3 ({}^0\vec{w}_a \times {}^0\vec{w}_3)) \end{aligned} \quad (3.271)$$

Burada sol üst köşedeki o indisi o büyüklüklerin sabit takımında ifade edilmeleri gerektiğini gösterir. Neticede P,Q ve S noktalarının sabit koordinat takımında ölçülen ivmeleri (3.270) ve (3.271) ile verilen ivmelerinin toplamına eşit olur:

$$\begin{aligned} {}^o\vec{a}_P &= {}^o\vec{a}_P^S + {}^o\vec{a}_P^r \\ {}^o\vec{a}_Q &= {}^o\vec{a}_Q^S + {}^o\vec{a}_Q^r \\ {}^o\vec{a}_S &= {}^o\vec{a}_S^S + {}^o\vec{a}_S^r \end{aligned} \quad (3.272)$$

Burada iş uzvunun $G_{\ddot{u}}$ noktasının ivmesi (3.203)'e benzer tarzda

$${}^o\vec{a}_{G_{\ddot{u}}} = \frac{{}^o\vec{a}_P + {}^o\vec{a}_Q + {}^o\vec{a}_S}{3} \quad (3.273)$$

bağıntısından bulunur.

Keza iş uzvunun açılma ivmesi (3.266)'ya benzeyen tarzda hesaplanır.

$${}^o\vec{\alpha}_{\ddot{u}} = \frac{{}^o\vec{a}_{Q/P}^t \times {}^o\vec{a}_{S/P}^t}{{}^o\vec{a}_{Q/P}^t \cdot \vec{PS}} \quad (3.273)$$

Burada ${}^o\vec{a}_{Q/P}^t$ ve ${}^o\vec{a}_{S/P}^t$ sırasıyla Q ve S noktalarının bağıl ivmelerinin teğetsel bileşenleridir. Bu suretle Tip 2 hibrit manipülatörün ileriye kinematik analizi tamamlanmış olmaktadır.

4. SAYISAL UYGULAMALAR

Daha önceki bölümde açıklanmış olan yöntemler ile ilgili sayısal uygulamalar bu bölümde sunulacaktır.

4.1. 3-3 Stewart platformu ileri kinematiği (ÇYK metodu)

Seçilen Stewart (3-3 tipi) platformuna ait fiziksel parametreler Çizelge 4.1’de verilmiştir.

Çizelge 4.1. 3-3 Stewart platformuna ait fiziksel parametreler

$a = 600 \text{ mm}$	$l_3 = 792.13\text{mm}$	$h_1 = 895.68\text{mm}$
$b = 200\text{mm}$	$l_4 = 836.39\text{mm}$	$h_2 = 754.92\text{mm}$
$l_1 = 1030.29\text{mm}$	$l_5 = 713.19\text{mm}$	$h_3 = 712.2\text{mm}$
$l_2 = 900.27\text{mm}$	$l_6 = 908.13\text{mm}$	$h = 519.6\text{mm}$

Bu fiziki parametreler kullanılarak bulunan (3.100) ila (3.102) denklemlerindeki katsayılar Çizelge 4.2’de listelenmiştir.

Çizelge 4.2. 3-3 Stewart platformunda kısıt denklemlerindeki katsayılar

$G_1 = 2543309.32$	$H_1 = 2211400.81$	$I_1 = 3699427.32$
$G_2 = 446541.81$	$H_2 = 1040240.96$	$I_2 = 1167240.32$
$G_3 = -5409318.49$	$H_3 = -4301537.69$	$I_3 = -5103577.62$
$G_4 = 953461.98$	$H_4 = 194392.77$	$I_4 = 675534.86$
$G_5 = 1561353.72$	$H_5 = 1174001.77$	$I_5 = 695136.68$

$\mu_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{q}}{r}$ ve $v_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{v}}{w}$ denklemlerinden,

$$\mu = \frac{54 \times 10^5 \lambda + \sqrt{-9.7 \times 10^{12} \lambda^4 + 1.17 \times 10^{13} \lambda^2 - 2.79 \times 10^{12}}}{5.09 \times 10^6 \lambda^2 + 8.93 \times 10^5}$$

$$v = \frac{5.1 \times 10^6 \lambda + \sqrt{-1.73 \times 10^{13} \lambda^4 + 1.26 \times 10^{13} \lambda^2 - 1.88 \times 10^{12}}}{7.4 \times 10^6 \lambda^2 + 1.35 \times 10^6}$$

elde edilir. Bölüm 3.8.1’de açıklanan yöntemdeki adımlar takip edilerek λ ’ya bağlı

$$f(\lambda) = 7.65 \times 10^9 \lambda^{32} - 9.95 \times 10^9 \lambda^{30} + 1.06 \times 10^9 \lambda^{28} + 2.77 \times 10^9 \lambda^{26} - 5.63 \times 10^8 \lambda^{24} \\ - 3.46 \times 10^8 \lambda^{22} + 7.1 \times 10^7 \lambda^{20} + 2.19 \times 10^7 \lambda^{18} - 5.99 \times 10^6 \lambda^{16} \\ - 9.64 \times 10^5 \lambda^{14} + 3.99 \times 10^5 \lambda^{12} + 8.05 \times 10^4 \lambda^{10} - 2240 \lambda^8 - 1020 \lambda^6 \\ + 67.4 \lambda^4 + 20.7 \lambda^2 + 1$$

polinomu elde edilir. 32’nci dereceden bu polinomun kökleri aşağıdaki Çizelge 4.3’de verilmiştir.

Çizelge 4.3. 3-3 Stewart platformu için çözüm polinomunun kökleri

1-	0.78 + 0.017i	9-	0.002 - 0.4i	17-	$-10^{-39} - 0.4i$	25-	- 0.35 + 0.1i
2-	0.78 - 0.017i	10-	0.002 + 0.4i	18-	$-10^{-39} + 0.4i$	26-	- 0.35 - 0.1i
3-	0.718	11-	0.001 - 0.4i	19-	$-10^{-39} + 0.4i$	27-	- 0.49 + 0.2i
4-	0.660	12-	0.001 + 0.4i	20-	$-10^{-39} - 0.4i$	28-	- 0.49 - 0.2i
5-	0.48 + 0.24i	13-	$7 \times 10^{-46} + 0.41i$	21-	- 0.001 + 0.4i	29-	-0.660
6-	0.48 - 0.24i	14-	$7 \times 10^{-46} - 0.4i$	22-	- 0.001 - 0.4i	30-	-0.718
7-	0.35 - 0.11i	15-	$-2 \times 10^{-39} + 0.4i$	23-	- 0.001 + 0.4i	31-	- 0.78 + 0.017i
8-	0.35 + 0.11i	16-	$-10^{-40} - 0.4i$	24-	- 0.001 - 0.4i	32-	- 0.78 - 0.017i

Çizelge 4.3’deki köklerden sadece pozitif ve reel olanlar alınır. Buna göre, 3 ve 4 nolu kökler pratik anlamı haizdir. Bu iki λ değerine karşılık gelen μ ve ν değerleri $\mu_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{q}}{r}$ ve $\nu_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{v}}{w}$ denklemlerinden hesaplanır. Hangi λ, μ, ν varyantının rijitlik denklemlerinin tamamını sağlayıp sağlamadığını kontrol için kısıt denklemlerinde yerine konur. Bu şartı sağlayan λ, μ, ν değerleri Çizelge 4.4’de verilmiştir.

Çizelge 4.4. Stewart platformunda fiziksel olarak mümkün olan çözümler

1-	$\lambda = 0.71839$	$\mu = 1.3341$	$\nu = 0.74104$
2-	$\lambda = 0.66026$	$\mu = 0.93092$	$\nu = 0.6099$

Daha sonra $\lambda = \tan \frac{\phi_{12}}{2}$, $\mu = \tan \frac{\phi_{34}}{2}$ $v = \tan \frac{\phi_{56}}{2}$ denklemlerinden eşdeğer bacak açıları hesaplanır ve buradan üst platformun yönelim açıları tayin edilir.

4.2. 3-3 Stewart platformu ileri kinematiği (HF metodu)

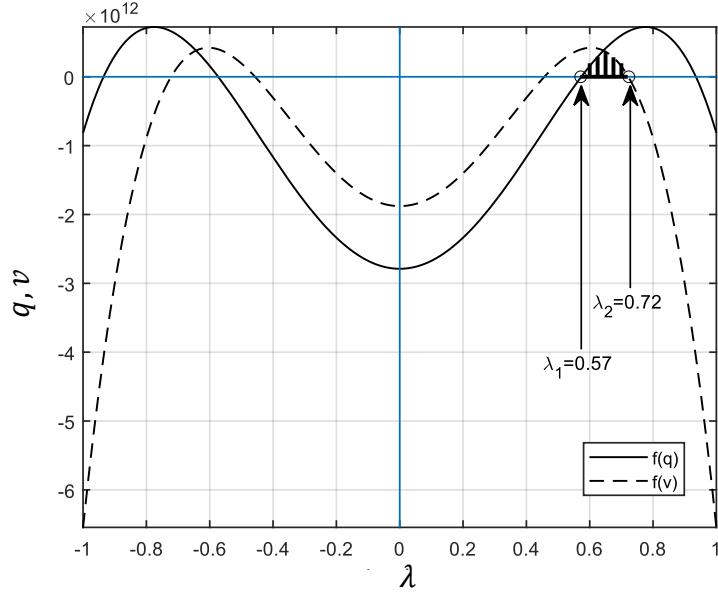
Stewart platformu için hata fonksiyonları;

$$\begin{aligned} f_1 &= (G_1\lambda^2 + G_2)\mu^2 + (G_3\lambda)\mu + (G_4\lambda^2 + G_5) \\ f_2 &= (H_1\mu^2 + H_2)v^2 + (H_3\mu)v + (H_4\mu^2 + H_5) \\ f_3 &= (I_1\lambda^2 + I_4)v^2 + (I_3\lambda)v + (I_2\lambda^2 + I_5) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. q ve v diskriminantlarının açık ifadeleri,

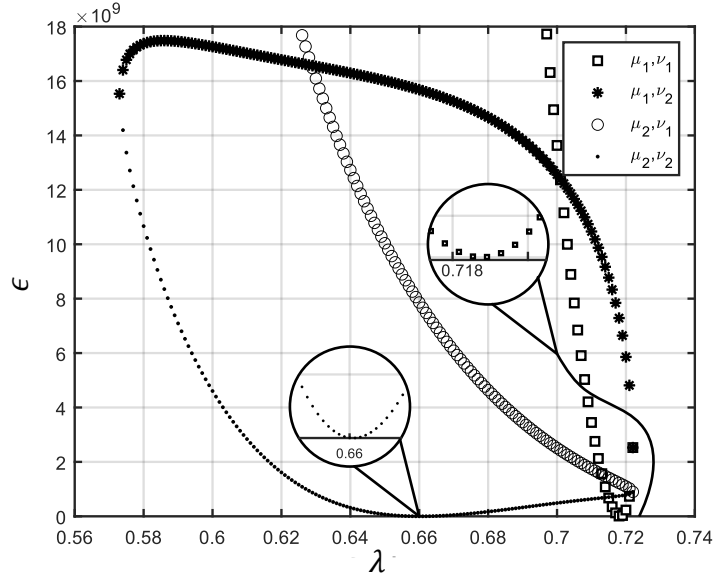
$$\begin{aligned} q &= (G_3\lambda)^2 - 4(G_1\lambda^2 + G_2)(G_4\lambda^2 + G_5) \\ v &= (I_3\lambda)^2 - 4(I_1\lambda^2 + I_4)(I_2\lambda^2 + I_5) \end{aligned}$$

şeklindedir. q ve v 'nin pozitif olduğu λ aralıkları belirlenir. λ 'nın eksi değerler aldığı aralıklar kullanılmaz. Zira bu manipülatörün ters kurulumuna karşılık gelir. Daha sonra her iki diskriminantın aynı anda pozitif olduğu λ aralığı belirlenir. Bu aralık Şekil 4.1'de gösterilen taralı bölgenin tabanını oluşturur.



Şekil 4.1. Stewart platformu için $\lambda - (q, v)$ grafiği.

Şekil 4.1'den görüldüğü gibi q ve v diskriminant değerlerini aynı anda pozitif yapan λ değerleri $0.57 \leq \lambda \leq 0.72$ aralığındadır. Bu aralıkta belli sayıda farklı λ değeri için $\mu_{1,2}$ ve $v_{1,2}$ değerleri, $\mu_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{q}}{r}$ ve $v_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{v}}{w}$ eşitliklerinden bulunur. Her bir λ için 4'er adet μ_i, v_j değerleri hesaplanıp ilgili λ, μ, v değerleri (3.128) ile verilen hata fonksiyonunda yerine konarak elde edilen sayısal değerler λ üzerinde çizdirilir ve Şekil 4.2'deki grafik elde edilir.



Şekil 4.2. Stewart platformu için hata fonksiyonu grafiği.

Şekil 4.2'den görüleceği üzere $\lambda = 0.66$ ve $\lambda = 0.72$ civarında olmak üzere iki yerde hata grafiği minimum yapmaktadır. Bu minimum noktalarındaki λ, μ, ν değerlerini başlangıç değeri kabul ederek kısıt denklemleri Newton-Raphson iterasyonu kullanılarak hassas λ, μ, ν değerleri bulunmuştur. Bu değerler Çizelge 4.5'te verilmiştir.

Çizelge 4.5. 3-3 Stewart platformu için ileri konum çözümleri

1-	$\lambda = 0.660$	$\mu = 0.931$	$\nu = 0.609$
2-	$\lambda = 0.718$	$\mu = 1.334$	$\nu = 0.741$

4.3. 3-RRR düzlemsel manipülatörün ileri kinematığı (ÇYK metodu)

Aşağıdaki fiziksel büyüklüklere sahip örnek bir 3-RRR manipülatör ele alalım:

Çizelge 4.6. Düzlemsel manipülatörün fiziksel boyutları

$a = 30 \text{ mm}$	$X_G = 50 \text{ mm}$	$\theta_2 = 12,16470^\circ$
$r_2 = r_4 = r_6 = 30 \text{ mm}$	$X_D = 100 \text{ mm}$	$\theta_4 = 167,8353^\circ$
$r_3 = r_5 = r_7 = 15 \text{ mm}$	$Y_G = 86.60 \text{ mm}$	$\theta_6 = 287,8353^\circ$

Çizelge 4.7. Düzlemsel manipülatörün sabit denklem katsayıları

$A_1 = -1240.41$	$A_2 = -895.86$	$A_3 = 344.55$
$B_1 = -3.69 \times 10^{-13}$	$B_2 = -1551.67$	$B_3 = -1551.67$
$C_1 = 1240.41$	$C_2 = 895.86$	$C_3 = -344.55$
$D_1 = -3.69 \times 10^{-13}$	$D_2 = 1551.67$	$D_3 = 1551.67$
$E_1 = -450$	$E_2 = -450$	$E_3 = -450$
$F_1 = 1259.59$	$F_2 = 3116.97$	$F_3 = 2357.14$

İlgili adımlar takip edilirse 32'nci dereceden aşağıdaki polinom elde edilir:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & 306.8\lambda^{32} - 2985.2\lambda^{31} + 13625.2\lambda^{30} - 38493.7\lambda^{29} + 73618.6\lambda^{28} \\ & - 93686.7\lambda^{27} + 58287.6\lambda^{26} + 55911.05\lambda^{25} - 216742.8\lambda^{24} \\ & + 332487.6\lambda^{23} - 304685.9\lambda^{22} + 107439.7\lambda^{21} + 174373.6\lambda^{20} \\ & - 390571.6\lambda^{19} + 425937.7\lambda^{18} - 276127.5\lambda^{17} + 40976.04\lambda^{16} \\ & + 152053.9\lambda^{15} - 228415.8\lambda^{14} + 194143.3\lambda^{13} - 106190.6\lambda^{12} \\ & + 23181.7\lambda^{11} + 25090.4\lambda^{10} - 38706.1\lambda^9 + 32255.2\lambda^8 \\ & - 20103.04\lambda^7 + 10088.5\lambda^6 - 4164.1\lambda^5 + 1412.02\lambda^4 - 386.5\lambda^3 \\ & + 82.1\lambda^2 - 12.35\lambda + 1 \end{aligned}$$

Bu polinomun kökleri aşağıdaki şekilde bulunur:

Çizelge 4.8. Düzlemsel manipülatör için polinomun kökleri

$\lambda_1 = 0.58 - 0.57i$	$\lambda_9 = -0.97$	$\lambda_{17} = 0.003 - 0.4i$	$\lambda_{25} = 0.35 - 0.82i$
$\lambda_2 = 0.58 - 0.57i$	$\lambda_{10} = -0.97$	$\lambda_{18} = 0.003 + 0.4i$	$\lambda_{26} = 0.35 + 0.82i$
$\lambda_3 = 0.58 - 0.57i$	$\lambda_{11} = -0.97$	$\lambda_{19} = 0.498$	$\lambda_{27} = 10^{-8} - 1.1i$
$\lambda_4 = 0.58 - 0.57i$	$\lambda_{12} = -0.97$	$\lambda_{20} = -0.08 - 0.53i$	$\lambda_{28} = 10^{-8} + 1.1i$
$\lambda_5 = 0.58 + 0.57i$	$\lambda_{13} = 0.97$	$\lambda_{21} = -0.08 + 0.53i$	$\lambda_{29} = -10^{-8} - 1.1i$
$\lambda_6 = 0.58 + 0.57i$	$\lambda_{14} = 0.97$	$\lambda_{22} = 0.671$	$\lambda_{30} = -10^{-8} + 1.1i$
$\lambda_7 = 0.58 + 0.57i$	$\lambda_{15} = 0.97$	$\lambda_{23} = 0.1 - 0.7i$	$\lambda_{31} = 1.57 - 0.51i$
$\lambda_8 = 0.58 + 0.57i$	$\lambda_{16} = 0.97$	$\lambda_{24} = 0.1 + 0.7i$	$\lambda_{32} = 1.57 + 0.51i$

Çizelge 4.8'den görüldüğü üzere, λ köklerinin 10 tanesi reel sayıdır. Kompleks kökler reddedilir. Katlı kökler vardır. Sonuçta 4 farklı reel kök vardır. Bunlar: $\lambda_1 = -0.97$, $\lambda_2 = 0.97$, $\lambda_3 = 0.498$, $\lambda_4 = 0.67$ 'dir. Her bir λ köküne karşılık gelen μ ve ν değerleri bulunur. λ, μ, ν değerleri Çizelge 4.9'te verilmiştir.

Çizelge 4.9. Düzlemsel manipülatörün için λ, μ, ν değerleri

Sıra	λ	μ	ν
1	-0.97	-2	$-0.53 + 1.08i$
2	-0.97	-2	$-0.53 - 1.08i$
3	-0.97	1.89×10^{16}	$-0.53 + 1.08i$
4	-0.97	1.89×10^{16}	$-0.53 - 1.08i$
5	0.498	-2.75	-1.47
6	0.498	-2.75	-1.87
7	0.498	1.18	-1.47
8	0.498	1.18	-1.87
9	0.671	-4.46	-1.64
10	0.671	-4.46	-2.04
11	0.671	1.49	-1.64
12	0.671	1.49	-2.04
13	0.976	-1.33×10^{16}	$-1.67 + 0.94i$
14	0.976	-1.33×10^{16}	$-1.67 - 0.94i$
15	0.976	3	$-1.67 + 0.94i$
16	0.976	3	$-1.67 - 0.94i$

Çizelge 4.9'dan görüldüğü gibi, onaltı kökün sekiz tanesi (1-4 arası ve 13-16 arası) karmaşık sayıdır, bunlar reddedilir. Köklerden sekizi gerçek sayıdır. Dolayısıyla sekiz olası çözüm vardır. Ancak rijitlik koşullarını sağlayıp sağlamadıkları kontrol edilmelidir. Rijitlik denklemlerinde λ, μ, ν setleri yerine konup kontrol edilirse iki çözümün var olduğu bulunur. Bunlar da Çizelge 4.10'da aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.10. Düzlemsel manipülatör için λ, μ, ν çözümleri

1-	$\lambda = 0.498 (\theta_3 = 53.031^\circ)$	$\mu = 1.18 (\theta_5 = 99.434^\circ)$	$\nu = -1.87 (\theta_7 = 236.21^\circ)$
2-	$\lambda = 0.671 (\theta_3 = 67.776^\circ)$	$\mu = 1.48 (\theta_5 = 112.23^\circ)$	$\nu = -2.04 (\theta_7 = 232.22^\circ)$

4.4. 3-RRR düzlemsel manipülatörün ileri kinematığı (HF metodu)

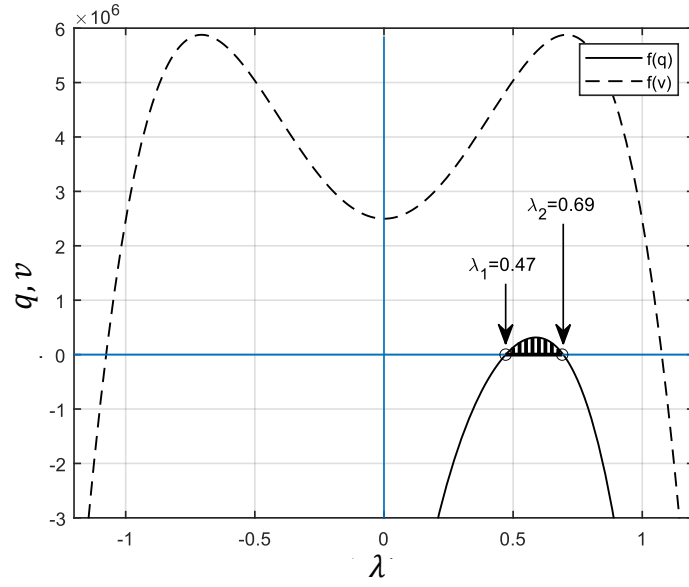
Düzlemsel manipülatör için f_i hata bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (P_1\lambda^2 + P_2\lambda + P_3)\mu^2 + (Q_1\lambda^2 + Q_2\lambda + Q_3)\mu + (S_1\lambda^2 + S_2\lambda + S_3) \\
 f_2 &= (K_1\lambda^2 + K_2\lambda + K_3)v^2 + (L_1\lambda^2 + L_2\lambda + L_3)v + (M_1\lambda^2 + M_2\lambda + M_3) \\
 f_3 &= (U_1\mu^2 + U_2\mu + U_3)v^2 + (V_1\mu^2 + V_2\mu + V_3)v + (W_1\mu^2 + W_2\mu + W_3)
 \end{aligned}$$

İlgili adımlar izlenerek q ve v determinantları şu şekilde bulunabilir:

$$\begin{aligned}
 q &= -1.35 \times 10^7 \lambda^4 + 1.2 \times 10^{-8} \lambda^3 + 1.35 \times 10^7 \lambda^2 - 2.54 \times 10^{-9} \lambda + 2.49 \times 10^6 \\
 v &= -4.75 \times 10^7 \lambda^4 + 8.84 \times 10^7 \lambda^3 - 8.252 \times 10^7 \lambda^2 + 4.39 \times 10^7 \lambda - 9.30 \times 10^6
 \end{aligned}$$

$-1 < \lambda < 1$ aralığı için q ve v diskriminant değerleri hesaplanır. q ve v diskriminant değerleri Şekil 4.3'de verilmiştir.

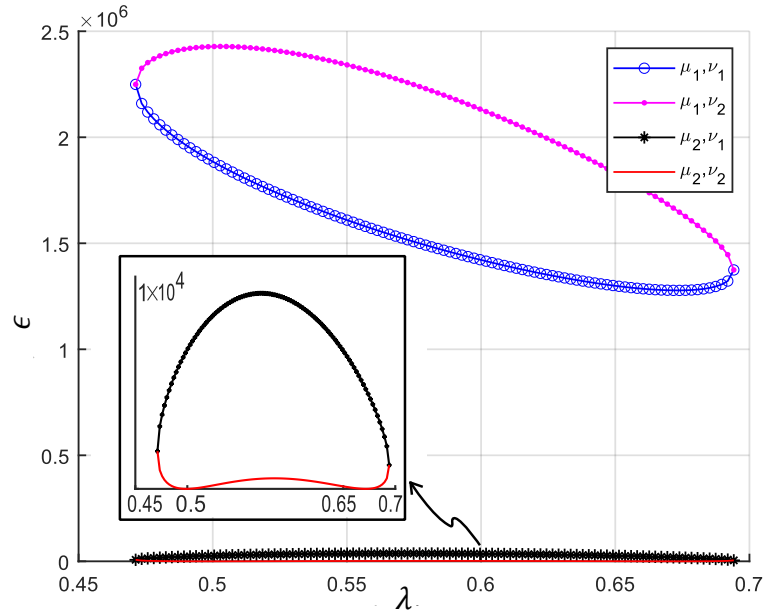


Şekil 4.3. Düzlemsel manipülatör için q ve v 'ye karşılık λ varyasyonları.

Şekil 4.3'den görüldüğü gibi hem q hem de v 'i aynı anda pozitif yapan değer aralığı

$0.47 \leq \lambda \leq 0.69$ 'dır. Bu λ değer aralığında $\mu_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{q}}{r}$ ve $v_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{v}}{w}$ değerleri bulunur.

Dört varyasyon için $\lambda - \epsilon$ hata grafiği çizilirse Şekil 4.4'deki grafik elde edilir.



Şekil 4.4. Düzlemsel manipülatör için $\lambda - \epsilon$ grafiği.

Şekil 4.4'de görüldüğü gibi, hata fonksiyonunun iki minimum değeri vardır. Bu minimum noktalara ait λ, μ, ν değerleri, Newton-Raphson iterasyon programında başlangıç değerleri olarak kullanılır. Sonuçta Çizelge 4.5'teki değerler tekrar bulunmuş olur. Böylece ikinci yöntem ile bulunan değerlerin birinci yöntem ile bulunan değerler ile sağlaması yapılmıştır.

4.5. Tip 1 hibrit manipülatör için sayısal örnek

İlk önce Tip 1 hibrit manipülatörün paralel manipülatör kısmına ait ileri kinematik yapılacaktır.

Taban platformu eşkenar üçgen uzunluğu $a = 0.8m$ seçilmiştir. İş uzvu platformu eşkenar üçgeni kenar uzunluğu $b = a/2$ seçilmiştir. Taban platformu köşe koordinatları

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -0.23 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.23 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4619 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 'dır. Paralel manipülatör bacak uzunlukları}$$

AP bacak uzunluğu 0.5m, BQ bacak uzunluğu 0.3m, CS bacak uzunluğu 0.2m seçilmiş olsun.

(3.138)'deki C_i , (3.144)'deki D_i , (3.149)'deki E_i katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

Çizelge 4.11. Paralel manipülatör kısmı için C_i, D_i, E_i katsayıları (Tip 1)

$C_1 = 0.1500$	$D_1 = 0.060$	$E_1 = 0.100$
$C_2 = -0.3000$	$D_2 = -0.1200$	$E_2 = -0.200$
$C_3 = -0.6928$	$D_3 = -0.4157$	$E_3 = -0.2771$
$C_4 = -0.4157$	$D_4 = -0.2771$	$E_4 = -0.6928$
$C_5 = 0.8200$	$D_5 = 0.6100$	$E_5 = 0.7700$

(3.140)'den G_i , (3.146)'den H_i , (3.151)'den I_i katsayıları hesaplanmıştır ve aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.12. Paralel manipülatör kısmı için G_i, H_i, I_i katsayıları (Tip 1)

$G_1 = 2.0785$	$H_1 = 1.3628$	$I_1 = 1.8399$
$G_2 = 0.3929$	$H_2 = 0.4114$	$I_2 = 1.0857$
$G_3 = -1.2000$	$H_3 = -0.4800$	$I_3 = -0.8000$
$G_4 = 0.9471$	$H_4 = 0.6886$	$I_4 = 0.2543$
$G_5 = -0.1385$	$H_5 = -0.0228$	$I_5 = -0.0999$

$\mu_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{q}}{r}$ ve $v_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{v}}{w}$ denklemlerinde (3.104)'deki p, q, r, u, v, w değerleri hesaplanarak yerine konur.

Çizelge 4.13. Paralel manipülatör kısmı için p, q, r, u, v, w değerleri (Tip 1)

$p = 1.2\lambda$	$u = 0.8\lambda$
$q = 1.44\lambda^2 - 1.0(8.31\lambda^2 + 1.57)(0.947\lambda^2 - 0.139)$	$v = 0.64\lambda^2 - 1.0(1.09\lambda^2 - 0.0999)(7.36\lambda^2 + 1.02)$
$r = 4.16\lambda^2 + 0.786$	$w = 3.68\lambda^2 + 0.509$

(3.106)'daki A, B, C, D polinomları aşağıda verilmiştir:

Çizelge 4.14. Paralel manipülatör kısmı için A, B, C, D polinomları (Tip 1)

$A = -49.8\lambda^8 - 59.6\lambda^6 + 4.86\lambda^4 + 1.87\lambda^2 + 0.0911$
$B = -9.63\lambda^5 + 7.24\lambda^3 + 0.607\lambda$
$C = -14.6\lambda^5 + 6.96\lambda^3 + 0.651\lambda$
$D = -7.34\lambda^4 + 2.83\lambda^2 - 0.192$

İlgili değerler yerine yazılarak (3.109)'dan

$$\begin{aligned} F = & \lambda^{32} + 45.7\lambda^{30} + 54.3\lambda^{28} + 22.1\lambda^{26} + 0.941\lambda^{24} - 2.08\lambda^{22} - 0.644\lambda^{20} \\ & - 0.0274\lambda^{18} + 0.0234\lambda^{16} + 0.0053\lambda^{14} + 2.97e - 4\lambda^{12} - 4.98e \\ & - 5\lambda^{10} - 9.37x10^{-6}\lambda^8 - 4.88x10^{-7}\lambda^6 + 1.27x10^{-8}\lambda^4 \\ & + 2.28x10^{-9}\lambda^2 + 6.77x10^{-11} \end{aligned}$$

polinomu bulunur. 32'nci dereceden bu polinomun kökleri Çizelge 4.15'te verilmiştir.

Çizelge 4.15. Polinomun kökleri (Tip 1)

$\lambda_1 = 0.49 + 0.031i$	$\lambda_9 = 4.0 \times 10^{-10} - 0.37i$	$\lambda_{17} = -4.2 \times 10^{-45} + 6.7i$	$\lambda_{25} = -1.3 \times 10^{-9} - 0.43i$
$\lambda_2 = 0.49 - 0.031i$	$\lambda_{10} = 4.0 \times 10^{-10} + 0.37i$	$\lambda_{18} = -5.6 \times 10^{-45} - 6.7i$	$\lambda_{26} = -1.3 \times 10^{-9} + 0.43i$
$\lambda_3 = 0.36$	$\lambda_{11} = 4.7 \times 10^{-35} + 0.37i$	$\lambda_{19} = -2.1 \times 10^{-39} + 0.4i$	$\lambda_{27} = -1.3 \times 10^{-9} + 0.43i$
$\lambda_4 = 0.25$	$\lambda_{12} = 4.7 \times 10^{-35} - 0.37i$	$\lambda_{20} = -2.1 \times 10^{-39} - 0.4i$	$\lambda_{28} = -1.3 \times 10^{-9} - 0.43i$
$\lambda_5 = 1.3 \times 10^{-9} - 0.43i$	$\lambda_{13} = 1.8 \times 10^{-36} - 0.44i$	$\lambda_{21} = -1.2 \times 10^{-35} - 0.3i$	$\lambda_{29} = -0.25$
$\lambda_6 = 1.3 \times 10^{-9} + 0.43i$	$\lambda_{14} = 1.8 \times 10^{-36} - 0.44i$	$\lambda_{22} = -1.2 \times 10^{-35} + 0.3i$	$\lambda_{30} = -0.36$
$\lambda_7 = 1.3 \times 10^{-9} - 0.43i$	$\lambda_{15} = -2.6 \times 10^{-46} + 0.4i$	$\lambda_{23} = -4.0 \times 10^{-10} + 0.3i$	$\lambda_{31} = -0.49 + 0.031i$
$\lambda_8 = 1.3 \times 10^{-9} + 0.43i$	$\lambda_{16} = -2.8 \times 10^{-46} - 0.4i$	$\lambda_{24} = -4.0 \times 10^{-10} - 0.3i$	$\lambda_{32} = -0.49 - 0.031i$

Reel ve pozitif olan kökler $\lambda_1 = 0.36$ ve $\lambda_2 = 0.25$ 'tir.

Çizelge 4.16. Olası λ, μ, ν değerleri (Tip 1)

Sıra	λ	μ	ν
1	0.357	0.691	0.377
2	0.357	0.691	0.207
3	0.357	-0.0397	0.377
4	0.357	-0.0397	0.207
5	0.248	0.771	0.673
6	0.248	0.771	-0.133
7	0.248	-0.199	0.673
8	0.248	-0.199	-0.133

Her varyant için rijitlik denklemlerini sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Buna göre, rijitlik şartını sağlayan çözümler $\lambda_1 = 0.248$, $\mu_1 = -0.199$, $\nu_1 = -0.133$ ve $\lambda_2 = 0.357$, $\mu_2 = -0.0397$, $\nu_2 = 0.207$ 'dir.

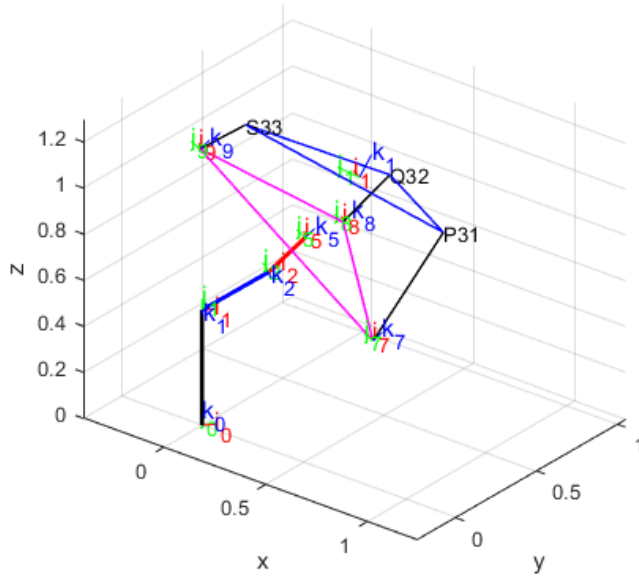
Birinci varyant için φ_i açıları hesaplanıp P,Q,S noktalarının koordinatları

$$P = \begin{bmatrix} 0.217 \\ -0.375 \\ 1.479 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.245 \\ 0.425 \\ 1.287 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} -0.519 \\ 0 \\ 1.191 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Seri manipülatör kısmına ait değişkenler ise şu şekilde seçilmiştir: seri manipülatör uzuv uzunlukları $L_1 = 0.5m$, $L_2 = 0.3m$, $L_3 = 0.2m$. Seri manipülatör açıları uzuv açıları ise $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$, $\theta_3 = 15^\circ$.

Seri manipülatöre ait koordinatlar, seri manipülatör koordinatlarından hesaplanmıştır. Hesaplanan koordinatlar ile hibrit manipülatörün konfigürasyonu çizilmiştir ve Şekil 4.5'de verilmiştir.



Şekil 4.5. Tip 1 hibrit manipülatör konum ve oryantasyonu.

4.6. Tip 2 hibrit manipölatör için sayısal örnek

İkinci tip hibrit manipölatör için sunulacak sayısal örneğe, paralel manipölatör kısmından başlanacaktır.

DP bacak uzunluğu $0.2805m$, EQ bacak uzunluğu $0.3724m$, FS bacak uzunluğu $0.3215m$ seçilmiş olsun. Taban platformu kenar uzunluğu $a = 0.4m$, iş uzvu platformu kenar uzunluğu $b = 0.2m$, iki platform arası uzaklık $h = 0.3m$ seçilmiştir.

(3.216) denklemindeki A_i, B_i, C_i katsayıları Çizelge 4.17’de verilmiştir.

Çizelge 4.17. Paralel manipölatör kısmı için A_i, B_i, C_i katsayıları (Tip 2)

$A_1 = -0.1296$	$A_2 = -0.1720$	$A_3 = -0.1485$
$B_1 = -0.1683$	$B_2 = -0.2234$	$B_3 = -0.1929$
$C_1 = 0.2087$	$C_2 = 0.2687$	$C_3 = 0.2333$

(3.215), (3.232) ve (3.234) ifadelerinden

$$\begin{aligned} & (0.0791\lambda_1^2 + 0.3383)\mu_1^2 - 0.3366(1 + \lambda_1^2)\mu_1 + (0.3383\lambda_1^2 + 0.0791) = 0 \\ & (0.0967\lambda_2^2 + 0.4407)\mu_2^2 - 0.4469(1 + \lambda_2^2)\mu_2 + (0.4407\lambda_2^2 + 0.0967) = 0 \\ & (0.0849\lambda_3^2 + 0.3818)\mu_3^2 - 0.3857(1 + \lambda_3^2)\mu_3 + (0.3818\lambda_3^2 + 0.0849) = 0 \\ & 0.3374 - 0.1944(1 - \mu_1^2)(1 - \lambda_1^2)(1 + \mu_2^2)(1 + \lambda_2^2) \\ & \quad - 0.2580(1 - \mu_2^2)(1 - \lambda_2^2)(1 + \mu_1^2)(1 + \lambda_1^2) \\ & \quad + 0.2244\lambda_1(1 - \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)(1 + \lambda_2^2) \\ & \quad - 0.2979\lambda_2(1 - \mu_2^2)(1 + \mu_1^2)(1 + \lambda_1^2) \\ & \quad + 0.1045(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)(1 - 3.4641\lambda_1 + 3.4641\lambda_2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \\ & \quad + 4\lambda_1\lambda_2 - 3.4641\lambda_1^2\lambda_2 + 3.4641\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2) \\ & \quad - 0.8358\mu_1\mu_2(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.3620 - 0.2580(1 - \mu_2^2)(1 - \lambda_2^2)(1 + \mu_3^2)(1 + \lambda_3^2) \\
& \quad - 0.2227(1 - \mu_3^2)(1 - \lambda_3^2)(1 + \mu_2^2)(1 + \lambda_2^2) \\
& \quad + 0.2979\lambda_2(1 - \mu_2^2)(1 + \mu_3^2)(1 + \lambda_3^2) \\
& \quad - 0.2572\lambda_3(1 - \mu_3^2)(1 + \mu_2^2)(1 + \lambda_2^2) \\
& \quad + 0.1197(1 - \mu_2^2)(1 - \mu_3^2)(1 - 3.4641\lambda_2 + 3.4641\lambda_3 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \\
& \quad + 4\lambda_2\lambda_3 - 3.4641\lambda_2^2\lambda_3 + 2\sqrt{3}\lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2) \\
& \quad - 0.9577\mu_2\mu_3(1 + \lambda_2^2)(1 + \lambda_3^2) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.3020 - 0.2227(1 - \mu_3^2)(1 - \lambda_3^2)(1 + \mu_1^2)(1 + \lambda_1^2) \\
& \quad - 0.1944(1 - \mu_1^2)(1 - \lambda_1^2)(1 + \mu_3^2)(1 + \lambda_3^2) \\
& \quad + 0.2572\lambda_3(1 - \mu_3^2)(1 + \mu_1^2)(1 + \lambda_1^2) \\
& \quad - 0.2244\lambda_1(1 - \mu_1^2)(1 + \mu_3^2)(1 + \lambda_3^2) \\
& \quad + 0.0902(1 - \mu_3^2)(1 - \mu_1^2)(1 - 3.4641\lambda_3 + 3.4641\lambda_1 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \\
& \quad + 4\lambda_3\lambda_1 - 3.4641\lambda_3^2\lambda_1 + 2\sqrt{3}\lambda_3\lambda_1^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2) \\
& \quad - 0.7214\mu_3\mu_1(1 + \lambda_3^2)(1 + \lambda_1^2) = 0
\end{aligned}$$

olmak üzere 6 nonlineer denklem bulunmuştur. Newton-Raphson iterasyon programı hazırlanmıştır. Başlangıç tahmini değerleri girilerek, Newton-Raphson iterasyon programı ile aranan değerler olan $\varphi_1 = -3.0176^\circ$, $\varphi_2 = 3.0176^\circ$, $\varphi_3 = 0.0^\circ$, $\theta_1 = 63.0241$, $\theta_2 = 70.0203^\circ$, $\theta_3 = 68.9483^\circ$ değerlerine yakınsamıştır.

Seri manipülatör kısmına ait uzuv hızları, $h_{20} = 1 \text{ rad/s}$, $h_{32} = 2 \text{ rad/s}$, $h_1 = 0.1 \text{ m/s}$ seçilmiştir. Paralel manipülatör kısmındaki bacak uzama hızları, $\dot{l}_1 = 0.1 \text{ m/s}$, $\dot{l}_2 = 0.1 \text{ m/s}$, $\dot{l}_3 = 0.1 \text{ m/s}$ seçilmiştir. Kardan açıları, açısal hızları ise $\dot{\varphi}_1 = -18.3747 \text{ rad/s}$, $\dot{\varphi}_2 = -17.9417 \text{ rad/s}$, $\dot{\varphi}_3 = -23.0616 \text{ rad/s}$, $\dot{\theta}_1 = -0.9898 \text{ rad/s}$, $\dot{\theta}_2 = 0.6250 \text{ rad/s}$, $\dot{\theta}_3 = 0.1197 \text{ rad/s}$ olarak hesaplanmıştır.

Taban platformunun G_a noktasının lineer hızı ${}^0V_{G_a} = -3.3978\vec{i} + 1.6425\vec{j} + 0.1\vec{k}$ bulunmuştur.

Tabana bağlı koordinat takımında P, Q ve S noktalarının yer vektörleri

$$\overline{G_a P} = -0.0866\vec{i} + -0.0577\vec{j} + 0.25\vec{k}$$

$$\overline{G_a Q} = 0.0866\vec{i} - 0.0577\vec{j} + 0.35\vec{k}$$

$$\overline{G_a S} = 0\vec{i} + 0.1155\vec{j} + 0.30\vec{k}$$

Her bir vektör, rotasyon matrisi ile çarpılarak sabit eksen takımına dönüştürülür. $\overline{G_a P}$, $\overline{G_a Q}$, $\overline{G_a S}$ vektörlerinin sabit takımdaki ifadeleri şu şekilde olur:

$${}^0\overline{G_a P} = 0.0687\vec{i} - 0.0782\vec{j} - 0.25\vec{k}$$

$${}^0\overline{G_a Q} = -0.0986\vec{i} - 0.0334\vec{j} - 0.35\vec{k}$$

$${}^0\overline{G_a S} = 0.0299\vec{i} + 0.1115\vec{j} - 0.3\vec{k}$$

P, Q ve S noktalarının sürüklenme hızları

$$V_{P_{\text{sür}}} = -3.1632\vec{i} + 1.8486\vec{j} + 0.1\vec{k}$$

$$V_{Q_{\text{sür}}} = -3.2977\vec{i} + 1.3467\vec{j} + 0.1\vec{k}$$

$$V_{S_{\text{sür}}} = -3.7324\vec{i} + 1.7321\vec{j} + 0.1\vec{k}$$

P, Q ve S noktalarının sabit takıma göre hızları

$$V_P = -4.9449\vec{i} + 0.3064\vec{j} + 0.1368\vec{k}$$

$$V_Q = -3.9523\vec{i} + 3.5417\vec{j} - 0.0735\vec{k}$$

$$V_S = -1.1602\vec{i} + 1.0429\vec{j} - 0.0072\vec{k}$$

Taban platformunun ağırlık merkezi $G_{\ddot{u}}$ 'nün lineer hızı

$$V_{G_{\ddot{u}}} = -3.3524\vec{i} + 1.6303\vec{j} + 0.0187\vec{k}$$

İş uzvunun açısal hızı

$$\omega_{i\ddot{s} \text{ uzvu}} = -0.5307\vec{i} - 1.1150\vec{j} - 19.655\vec{k}$$

olarak hesaplanmıştır.

Formülle bulunan açısal hızın (iş uzvu) doğruluğunu test etmek için,

$$\begin{aligned} &({}^0\vec{V}_Q - {}^0\vec{V}_P) - ({}^0\vec{\omega}_{i\dot{s}uzvu} \times \overline{PQ}) \\ &({}^0\vec{V}_S - {}^0\vec{V}_P) - ({}^0\vec{\omega}_{i\dot{s}uzvu} \times \overline{PS}) \\ &({}^0\vec{V}_S - {}^0\vec{V}_Q) - ({}^0\vec{\omega}_{i\dot{s}uzvu} \times \overline{QS}) \end{aligned}$$

farkları oluşturulmuş ve pratik olarak sıfır olduğu (MATLAB'te 10^{-15}) görülmüştür.

İş uzvunun ağırlık merkezinin çizgisel ivmesi ve açısal ivmesinin hesabı aşağıda verilecektir. Paralel manipülatör kısmındaki bacaların uzama ivmeleri $\ddot{l}_1 = 0.12 \text{ m/s}^2$, $\ddot{l}_2 = 0.15 \text{ m/s}^2$, $\ddot{l}_3 = 0.13 \text{ m/s}^2$ alınmıştır. Seri robotun ilk uzvuna ait ivme $\ddot{h}_1 = 0.14 \text{ m/s}^2$ olup ikinci ve üçüncü uzvuna ait açısal ivmeler sırasıyla $\alpha_{20} = 0.01 \text{ rad/s}^2$, $\alpha_{32} = 0.02 \text{ rad/s}^2$ seçilmiştir. Bu değerlerle yapılan hesaplar sonucunda P, Q ve S noktalarının yere göre ivmeleri

$$\begin{aligned} a_p &= 0.0279\vec{i} - 2.1767\vec{j} + 0.0343\vec{k} \\ a_Q &= -0.9751\vec{i} - 0.0376\vec{j} - 0.0353\vec{k} \\ a_S &= 1.1727\vec{i} + 1.1891\vec{j} - 0.0163\vec{k} \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. İş uzvunun ağırlık merkezi $G_{\ddot{u}}$ 'nin çizgisel ivmesi hız hesabında yapıldığı şekilde P,Q, ve S noktalarının ivmelerinden aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$a_{G_{\ddot{u}}} = -3.2294\vec{i} - 9.1806\vec{j} + 0.0140\vec{k}$$

Nihayet iş uzvunun açısal ivmesi ise açısal hızın bulunmasında kullanılan formülden yararlanılarak

$$\alpha_{i\dot{s}uzvu} = -19.1152\vec{i} - 39.1052\vec{j} - 718.0276\vec{k}$$

olarak hesaplanmıştır. Bahsedilen formül kullanılırken bağıl hızların yerine bağıl ivmelerin teğetsel bileşenlerinin kullanılması gerektiği unutulmamalıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Paralel manipülatörlerde ileri ve geri kinematik seri manipülatörlere kıyasla tamamen zıt karakterdedir. Diğer bir ifadeyle paralel manipülatörlerde geri kinematik nisbeten kolay olduğu halde, ileri kinematik ciddi matematik problemlerine yol açar. Bu nedenle paralel manipülatörlerin ve özellikle de bunların en bilineni olan Stewart platformunun ileri kinematiği hakkında çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda ortaya çıkan nonlineer denklem takımlarının çözümü için matematik analizin mühim metotlarından faydalanılmıştır. Bu çerçevede mevcut kısıt denklemlerinden katsayıları daima aynı parametreye bağlı olacak tarzda yapay değişkenler içeren yeni bir homojen denklem takımı üreterek trivial olmayan çözüm elde etmek üzere katsayılar matrisinin determinantını sıfıra eşitlemeye dayanan Bezout metodu veya buna benzer yaklaşımlardan yararlanılmıştır. Diğer bir yöntem olarak uygun bir değişken dönüşümü yapmak suretiyle mevcut denklem takımını Gauss eliminasyon metodundakine benzer bir tarzda yeniden yapılandırmaktır. Bu durumda mesela üç denklem varsa bunların birinde sadece tek değişken ikincisinde iki değişken ve üçüncüsünde üç değişken birlikte gözükcektir. Ancak burada tek değişkenin gözüktüğü denklemin dahi nonlineer olduğu unutulmamalıdır. Bu çalışmada Stewart platformunun belirli kurulumlarında (assembly) denklemlerin almış olduğu özel formdan yararlanarak karmaşık matematik yöntemlere müracaat etmeden ileri kinematik problemini çözmeye yarayan iki metod geliştirilmiştir. Bu metot Stewart platformu için sınırlı kullanıma sahip olmakla birlikte 3-RRR düzlemsel manipülatör için genel bir çözüm tekniğidir. Burada verilen ÇYK metodu aynı zamanda söz konusu formdaki nonliner denklemler için bir çözüm tekniğidir ve dolayısıyla bir matematiksel metot olarak da değerlendirilebilir.

Hibrit manipülatörler ileri ve geri kinematik açısından taban tabana zıt farklı iki manipülatör türünü içeren yapılardır. Son zamanlarda gerek imalat sektöründe gerekse tıbbi alanda bu tür manipülatörlere sıkça rastlanmaktadır. Ancak bu konudaki literatür henüz çok zengin değildir ve bu konu detaylı incelemelere açıktır. Bu nedenle çalışmada bu konuya da yer verilmiş olup ön görülen bir hibrit manipülatör tipi için ileri kinematiğin konum ve hız analizlerinin nasıl yapılacağı gösterilmiştir. Hız analizinde vektörel yöntem izlenmiştir. Paralel manipülatör için geliştirilen çözüm metotlarının genelleştirilmesi doğrultusunda çalışmalar sürdürülecektir. Literatürde paralel ve hibrit manipülatörlerde

ileri kinematik için yapay sinir ağları, optimizasyon tekniklerine dayalı metotlar üzerinde çalışmalar zengin değildir. Bu konular da ileride çalışılacak konular arasındadır.

KAYNAKLAR

- Alavandar, S., Nigam, M. J. (2008). Neuro-Fuzzy based Approach for Inverse Kinematics Solution of Industrial Robot Manipulators. *International Journal of Computers Communications*, 3(3):, 224.
- Angeles, J. (2012). *Spatial Kinematic Chains: Analysis, Synthesis, Optimization*, Springer Science & Business Media.
- Aydin, Y., Kucuk, S. (2006). Quaternion Based Inverse Kinematics for Industrial Robot Manipulators with Euler Wrist. *IEEE International Conference on Mechatronics*, 581–586. <https://doi.org/10.1109/ICMECH.2006.252591>
- Ayyıldız, M., Çetinkaya, K. (2016). Comparison of four different heuristic optimization algorithms for the inverse kinematics solution of a real 4-DOF serial robot manipulator. *Neural Computing and Applications*, 4(27):, 825–836. <https://doi.org/10.1007/S00521-015-1898-8>
- Azar, A. T., Zhu, Q., Khamis, A., Zhao, D. (2017). Control design approaches for parallel robot manipulators: A review. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 28(3):, 199–211. <https://doi.org/10.1504/IJMIC.2017.086563>
- Bai, X., Turner, J. D., Junkins, J. L. (2006). Dynamic Analysis and Control of a Stewart Platform Using A Novel Automatic Differentiation Method., *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit* .
- Bangjun, L., Likun, P., Tingtao, M. (2012). Improving Dynamic Performance of Stewart Platforms through Optimal Design Based on Evolutionary Multi-objective Optimization Algorithms, *1st International Conference on Mechanical Engineering and Material Science*, 294–298, <https://doi.org/10.2991/MEMS.2012.78>
- Baressi Šegota, S., Anđelić, N., Lorencin, I., Saga, M., Car, Z. (2020). Path planning optimization of six-degree-of-freedom robotic manipulators using evolutionary algorithms. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 17(2):. https://doi.org/10.1177/1729881420908076/ASSET/IMAGES/LARGE/10.1177_1729881420908076-FIG2.JPEG
- Baressi Šegota, S., Anđelić, N., Šercer, M., Meštrić, H. (2022). Dynamics Modeling of Industrial Robotic Manipulators: A Machine Learning Approach Based on Synthetic Data. *Mathematics*, Vol. 10, Page 1174, 10(7):, 1174. <https://doi.org/10.3390/MATH10071174>
- Bottema, O., Roth, B. (1990). *Theoretical kinematics*, North-Holland Pub. Co.
- Chauhan, D. K. S., Vundavilli, P. R. (2022). Forward Kinematics of the Stewart Parallel Manipulator Using Machine Learning. *International Journal of Computational Methods*. <https://doi.org/10.1142/S0219876221420093>

- Chen, L., Sun, H., Jia, Q., Cao, S., Zhao, W., Yu, T. (2020). A new kind of measuring tooling and closed-loop control for gough-stewart parallel robot. *5th International Conference on Computer and Communication Systems, ICCCS 2020*, 977–984. <https://doi.org/10.1109/ICCCS49078.2020.9118525>
- Craig, J.J. (2005) *Introduction to Robotics Mechanics and Control*. 3rd Edition, Pearson Prentice Hall Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.
- Dasgupta, B., Mruthyunjaya, T. S. (1996). A constructive predictor-corrector algorithm for the direct position kinematics problem for a general 6-6 Stewart platform. *Mechanism and Machine Theory*, 31(6):, 799–811. [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(95\)00106-9](https://doi.org/10.1016/0094-114X(95)00106-9)
- Dasgupta, B., Mruthyunjaya, T. S. (1998). A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 33(8):, 1135–1152. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(97\)00118-3](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(97)00118-3)
- Dasgupta, B., Mruthyunjaya, T. S. (2000). The Stewart platform manipulator: a review. *Mechanism and Machine Theory*, 35(1):, 15–40. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(99\)00006-3](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00006-3)
- Denavit, J., Hartenberg, R. S. (1955). A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *Journal of Applied Mechanics*, 22(2):, 215–221. <https://doi.org/10.1115/1.4011045>
- Der-Ming, K. (1999). Direct displacement analysis of a Stewart platform mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, 34(3):, 453–465. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(98\)00043-3](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(98)00043-3)
- Dereli, S., Köker, R. (2019). A meta-heuristic proposal for inverse kinematics solution of 7-DOF serial robotic manipulator: quantum behaved particle swarm algorithm. *Artificial Intelligence Review*, 53(2):, 949–964. <https://doi.org/10.1007/S10462-019-09683-X>
- Didrit, O., Petitot, M., Walter, E. (1998). Guaranteed solution of direct kinematic problems for general configurations of parallel manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 14(2):, 259–266. <https://doi.org/10.1109/70.681244>
- Dietmaier, P. (1996). Forward Kinematics and Mobility Criteria of One Type of Symmetric Stewart-Gough Platforms. *Recent Advances in Robot Kinematics*, 379–388. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1718-7_38
- Dunlop, G. R., Jones, T. P. (1997). Position analysis of a 3-DOF parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 32(8):, 903–920. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(97\)00011-6](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(97)00011-6)
- Edwards, C. A., Galloway, R. L. (2016). A Single-Point Calibration Technique for a Six Degree-of-Freedom Articulated Arm, *The International journal of robotics research*, 13(3), 189–198. <https://doi.org/10.1177/027836499401300301>

- Feng, Y., Fan, J. C., Tao, B. X., Wang, S. G., Mo, J. Q., Wu, Y. Q., Liang, Q. H., Chen, X. J. (2022). An image-guided hybrid robot system for dental implant surgery. *International journal of computer assisted radiology and surgery*, 17(1):, 15–26. <https://doi.org/10.1007/S11548-021-02484-0>
- Fichter, E. F. (2016). A Stewart Platform- Based Manipulator: General Theory and Practical Construction. *The international journal of robotics research*, 5(2):, 157–182. <https://doi.org/10.1177/027836498600500216>
- Fichter E.F.; McDowell E.D. (1983). Determining the motions of joints on a parallel connection manipulator. *Proceedings of Sixth World Congress on Theory of machines and mechanisms*, 1003–1006.
- Goldenberg, A. A., Benhabib, B., Fenton, R. G. (1985). A Complete Generalized Solution to the Inverse Kinematics of Robots. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 1(1):, 14–20. <https://doi.org/10.1109/JRA.1985.1086995>
- Gosselin, C., and, J. A.-I. (1990). Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE transactions on robotics and automation* 6.3 (1990): 281-290. <https://doi.org/10.1109/70.56660>
- Gosselin, C.M., Lemieux, S., Merlet, J.-P. (1996) A new architecture of planar three-degree-of-freedom parallel manipulator. *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation (C. 4)*, IEEE: , 3738–3743. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1996.509283>
- Gosselin, Clément M., Merlet, J.-P. (1994). The direct kinematics of planar parallel manipulators: Special architectures and number of solutions. *Mechanism and Machine Theory*, 29(8):, 1083–1097. [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(94\)90001](https://doi.org/10.1016/0094-114X(94)90001)
- Hamdoun, O., Baghli, F. Z., Bakkali, L. El (2015). Inverse kinematic Modeling of 3RRR Parallel Robot. *CFM 22ème Congrès Français de Mécanique*. AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc-92400 Courbevoie.
- Harib, K., Srinivasan, K. (2003). Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures. *Robotica*, 21(5):, 541–554. <https://doi.org/10.1017/S0263574703005046>
- Hu, B., Shi, Y., Xu, L., Bai, P. (2020). Reconsideration of terminal constraint/mobility and kinematics of 5-DOF hybrid manipulators formed by one 2R1T PM and one RR SM. *Mechanism and Machine Theory*, 149:, 103837. <https://doi.org/10.1016/J.MECHMACHTHEORY.2020.103837>
- Huang, X., Liao, Q., Wei, S. (2010). Closed-form forward kinematics for a symmetrical 6-6 Stewart platform using algebraic elimination. *Mechanism and Machine Theory*, 45(2):, 327–334. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.09.008>
- Husty, M. L. (1996). An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-Gough platforms. *Mechanism and Machine Theory*, 31(4):, 365–379. [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(95\)00091-C](https://doi.org/10.1016/0094-114X(95)00091-C)

- Innocenti, C. (2001). Forward Kinematics in Polynomial Form of the General Stewart Platform. *Journal of Mechanical Design*, 123(2):, 254–260. <https://doi.org/10.1115/1.1348018>
- Innocenti, C., Parenti-Castelli, V. (1990). Direct position analysis of the Stewart platform mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, 25(6):, 611–621. [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(90\)90004-4](https://doi.org/10.1016/0094-114X(90)90004-4)
- Jin, G., Ma, S., Li, Z. (2022). Dynamic Simulation Modeling of Industrial Robot Kinematics in Industry 4.0. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, <https://doi.org/10.1155/2022/3217360>
- Khalil, W., Dombre, E. (2002). *Modeling identification and control of robots*. CRC Press.
- Khanesar, M. A., Branson, D. (2022). Robust Sliding Mode Fuzzy Control of Industrial Robots Using an Extended Kalman Filter Inverse Kinematic Solver. *Energies*, Vol. 15, Page 1876, 15(5), 1876. <https://doi.org/10.3390/EN15051876>
- Khatib, O. (1987). A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(1):, 43–53. <https://doi.org/10.1109/JRA.1987.1087068>
- Köker, R., Öz, C., Çakar, T., Ekiz, H. (2004). A study of neural network based inverse kinematics solution for a three-joint robot. *Robotics and Autonomous Systems*, 49(3–4), 227–234. <https://doi.org/10.1016/J.ROBOT.2004.09.010>
- Kucuk, S., Bingul, Z. (2004). The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, ICM '04.*, 274–279. <https://doi.org/10.1109/ICMECH.2004.1364451>
- Küçük, S., Güngör, B. D. (2016). Medikal Amaçlar İçin Önerilen Yeni Bir Hibrit Robotun Ters Kinematik Çözümü. *Tıp Teknolojileri Kongresi TIPTEKNO*, Antalya, IEEE, 42–45.
- Küçük, Serdar, Bingül, Z. (2014). Inverse kinematics solutions for industrial robot manipulators with offset wrists. *Applied Mathematical Modelling*, 38(7–8), 1983–1999. <https://doi.org/10.1016/J.APM.2013.10.014>
- Lee, K. M., Shah, D. K. (1988). Kinematic Analysis of a Three-Degrees-of-Freedom In-Parallel Actuated Manipulator. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 4(3):, 354–360. <https://doi.org/10.1109/56.796>
- Li, K., Wen, R. (2011). Closed-form dynamic equations of the 6-RSS parallel mechanism through the Newton-Euler approach. *Proceedings - 3rd International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, ICMTMA 2011*, 1, 712–715. <https://doi.org/10.1109/ICMTMA.2011.180>

- Li, Y., Wang, L., Chen, B., Wang, Z., Sun, P., Zheng, H., Xu, T., Qin, S. (2020). Optimization of dynamic load distribution of a serial-parallel hybrid humanoid arm. *Mechanism and Machine Theory*, 149:, 103792. <https://doi.org/10.1016/J.MECHMACHTHEORY.2020.103792>
- Liu, M. J., Li, C. X., Li, C. N. (2000). Dynamics analysis of the Gough-Stewart platform manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 16(1):, 94–98. <https://doi.org/10.1109/70.833196>
- Lu, Y., Dai, Z. (2016). Dynamics model of redundant hybrid manipulators connected in series by three or more different parallel manipulators with linear active legs. *Mechanism and Machine Theory*, 103:, 222–235.
- Mahmoodi, A., Menhaj, M. B., Sabzehparvar, M. (2008). An efficient method for solution of inverse dynamics of stewart platform. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 81(5):, 398–406. <https://doi.org/10.1108/00022660910983671/FULL/XML>
- Manocha, D., Canny, J. F. (1994). Efficient inverse kinematics for general 6R manipulators. *IEEE transactions on robotics and automation* 10(5), 648-657. <https://doi.org/10.1109/70.326569>
- McCarthy, J. (1990). *Introduction to theoretical kinematics.*, MIT Press, 1990.
- Merlet, J.-P. (1991a). An algorithm for the forward kinematics of general parallel manipulators. *Fifth International Conference on Advanced Robotics 'Robots in Unstructured Environments*, IEEE , 1136–1140 c.2. <https://doi.org/10.1109/ICAR.1991.240403>
- Merlet, J.-P. (1991b). Symbolic computation for the Determination of the Minimal direct kinematics Polynomial and the Singular configurations of parallel manipulators. *Advances in Robot Kinematics: Advances in Robot Kinematics*, Vienna, Springer, 465–475. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-4433-6_52
- Merlet, J. -P. (2004). Solving the Forward Kinematics of a Gough-Type Parallel Manipulator with Interval Analysis. *The International Journal of Robotics Research*, 23(3):, 221–235. <https://doi.org/10.1177/0278364904039806>
- Merlet, J. P. (2004). Solving the forward kinematics of a gough-type parallel manipulator with interval analysis. *International Journal of Robotics Research*, 23(3):, 221–235. <https://doi.org/10.1177/0278364904039806>
- Merlet, Jean-Pierre (2006). *Parallel Robots*, Berlin/Heidelberg, Springer Dordrecht.
- Merlet, Jean Pierre (1996). Direct kinematics of planar parallel manipulators. *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 4:, 3744–3749. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1996.509284>

- Mohammadipanah, H., Zohoor, H. (2009). Design and Analysis of a Novel 8-DOF Hybrid Manipulator. *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, 3(10):, 1158–1164.
- Mourrain, B. (1993). The 40 “generic” positions of a parallel robot. Proceedings of the *International symposium on Symbolic and algebraic computation - ISSAC '93* : New York, USA, : ACM Press: , 173–182. <https://doi.org/10.1145/164081.164120>
- Nanua, P., Waldron, K. J., Murthy, V. (1990). Direct kinematic solution of a Stewart platform. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(4):, 438–444. <https://doi.org/10.1109/70.59354>
- Paul, R. P., Shimano, B. (1978). Kinematic control equations for simple manipulators. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1398–1406. <https://doi.org/10.1109/CDC.1978.268148>
- Pieper, D. (1969). *The kinematics of manipulators under computer control*. Stanford University Press.
- Rahmani, A., Ghanbari, A. (2014). Neural network solutions for forward kinematics analysis of 2-(6UPS) manipulator. *Applied Mechanics and Materials*, 624:, 424–428. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.624.424>
- Roth, Z. S., Mooring, B. W., Ravani, B. (1987). An Overview of Robot Calibration. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(5):, 377–385. <https://doi.org/10.1109/JRA.1987.1087124>
- Rouillier, F. (1995). Real Root Counting for Some Robotics Problems. Computational Kinematics, *Proceedings of the Second Workshop on Computational Kinematics*, Sophia Antipolis, France, September 4–6, Springer Netherlands, https://doi.org/10.1007/978-94-011-0333-6_8
- Sayed, A., Salem, A. A., Hassam, H. (2020). Modeling of Nonlinear 3-RRR Planar Parallel Manipulator: Kinematics and Dynamics Experimental Analysis. *Int. J. Mech. Mechatronics Eng.*, 20:, 175–185.
- Sciavicco, L., Siciliano, B. (1986). Coordinate Transformation: A Solution Algorithm for One Class of Robots. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 16(4):, 550–559. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1986.289258>
- Seguchi, Y., Tanaka, M., Kazuyuki, H. (1991). Criteria-oriented configuration control of adaptive structure and its modular neural network representation. *Joint U. S./Japan Conference on Adaptive Structures*, Maui, HI, 402–421.
- Siddique Ahmed Ghias, A., Dev Anand, M., Jacob Raglend, I., Shamila, F. (2016). Solution for a five link industrial robot manipulator inverse kinematics using intelligent prediction response method. *Indian Journal of Science and Technology*, 9(21):. <https://doi.org/10.17485/IJST/2016/V9I21/90570>

- Sommese, A. J., Wampler, C. W. (2005). *The Numerical Solution of Systems of Polynomials*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Tancredi, L., Merlet, J.-P. (1994). Evaluation of the Errors When Solving the Direct Kinematics of Parallel Manipulators With Extra Sensors. *Advances in Robot Kinematics and Computational Geometry*, 439–448. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8348-0_44
- Tanev, T. (2006). Workspace of a hybrid (parallel-serial) robot manipulator. *Problems Of Engineering Cybernetics And Robotics*, 56.
- Toquica, J. S., Motta, J. M. S. T. (2022). A methodology for industrial robot calibration based on measurement sub-regions. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 119(1–2):, 1199–1216. <https://doi.org/10.1007/S00170-021-08308-4>
- Toz, M., Küçük, S. (2010). Dynamics simulation toolbox for industrial robot manipulators. *Computer Applications in Engineering Education*, 18(2), 319–330. <https://doi.org/10.1002/CAE.20262>
- Tsai, L. W., Morgan, A. P. (1985). Solving the Kinematics of the Most General Six- and Five-Degree-of-Freedom Manipulators by Continuation Methods. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 107(2), 189–200. <https://doi.org/10.1115/1.3258708>
- Tsai, Lung Wen, Joshi, S. (2002). Kinematic Analysis of 3-DOF Position Mechanisms for Use in Hybrid Kinematic Machines. *Journal of Mechanical Design*, 124(2), 245–253. <https://doi.org/10.1115/1.1468860>
- Vossoughi, G., Hassanpour, S., Fazeli, A., Paak, M. (2010). An Optimization-Based Algorithm for Determination of Inclusive and Constant Orientation Workspace of Parallel Mechanisms. *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings, 10(PART A)*, 125–132. <https://doi.org/10.1115/IMECE2009-11148>
- Wampler, C. W. (1996). Forward displacement analysis of general six-in-parallel sps (Stewart) platform manipulators using soma coordinates. *Mechanism and Machine Theory*, 31(3):, 331–337. [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(95\)00068-A](https://doi.org/10.1016/0094-114X(95)00068-A)
- Wang, Zesheng, Li, Y., Sun, P., Luo, Y., Chen, B., Zhu, W. (2021). A multi-objective approach for the trajectory planning of a 7-DOF serial-parallel hybrid humanoid arm. *Mechanism and Machine Theory*, 165:, 104423. <https://doi.org/10.1016/J.MECHMACHTHEORY.2021.104423>
- Wang, Zhonglin, Zhang, N., Chai, X., Li, Q. (2017). Kinematic/dynamic analysis and optimization of a 2-URR-RRU parallel manipulator. *Nonlinear Dynamics*, 88(1):, 503–519. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3256-5>

- Whitney, D. E. (1969). Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses. *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, 10(2):, 47–53. <https://doi.org/10.1109/TMMS.1969.299896>
- Xie, B., Dai, S., Liu, F. (2021). A lie group-based iterative algorithm framework for numerically solving forward kinematics of gough-stewart platform. *Mathematics*, 9(7):. <https://doi.org/10.3390/MATH9070757>
- Xu, Y., Xu, Z., Yang, F., Mei, Y., Yue, Y., Zhou, Y., Yao, J., Zhao, Y. (2020). Design and Analysis of a New 5-DOF Hybrid Serial-Parallel Manipulator. *Mechanisms and Machine Science*, 79:, 301–311. https://doi.org/10.1007/978-981-15-0142-5_30/FIGURES/14
- Yang, F., Tan, X., Wang, Z., Lu, Z., He, T. (2022). A Geometric Approach for Real-Time Forward Kinematics of the General Stewart Platform. *Sensors*, Vol. 22, Page 4829, 22(13), 4829. <https://doi.org/10.3390/S22134829>
- Yeshmukhmetov, A., Kalimoldayev, M., Mamyrbayev, O., Amirgaliev, Y. (2017). Design and kinematics of serial/parallel hybrid robot. *3rd International Conference on Control, Automation and Robotics, ICCAR 2017*, 162–165. <https://doi.org/10.1109/ICCAR.2017.7942679>
- Yilmaz, Z., Yilmaz, O., Bingül, Z. (2020). Design, Analysis and Simulation of a 6-DOF Serial Manipulator. *J. Sci. Eng*, 3(1):, 9–15. <https://doi.org/10.34088/kojose.677184>
- Yin, Z., Qin, R., Liu, Y. (2022). A New Solving Method Based on Simulated Annealing Particle Swarm Optimization for the Forward Kinematic Problem of the Stewart–Gough Platform. *Applied Sciences (Switzerland)*, 12(15):. <https://doi.org/10.3390/APP12157657>
- Yoshikawa, T. (1990). *Foundations of robotics: analysis and control*, MIT Press.
- Yurt, S. N., Özkol, I. (2001). A study on the dynamic analysis and control of 6-3 Stewart platform mechanism. *ELECO Second International Conference on Electrical and Electronics Engineering*.
- Zaplana, I., Basanez, L. (2018). A novel closed-form solution for the inverse kinematics of redundant manipulators through workspace analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 121:, 829–843. <https://doi.org/10.1016/J.MECHMACHTHEORY.2017.12.005>
- Zhang, D., Xu, Y., Yao, J., Zhao, Y. (2018). Design of a novel 5-DOF hybrid serial-parallel manipulator and theoretical analysis of its parallel part. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 53:, 228–239. <https://doi.org/10.1016/J.RCIM.2018.04.004>

- Zhao, R., Shi, Z., Guan, Y., Shao, Z., Zhang, Q., Wang, G. (2018). Inverse kinematic solution of 6R robot manipulators based on screw theory and the Paden–Kahan subproblem. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 15(6):. https://doi.org/10.1177/1729881418818297/ASSET/IMAGES/LARGE/10.1177_1729881418818297-FIG2.JPEG
- Zhu, G., Wei, S., Zhang, Y., Liao, Q. (2021). A novel geometric modeling and calculation method for forward displacement analysis of 6-3 stewart platforms. *Mathematics*, 9(4):, 1–19. <https://doi.org/10.3390/MATH9040442>
- Zhu, H., Xu, W., Yu, B., Ding, F., Cheng, L., Huang, J. (2022). A Novel Hybrid Algorithm for the Forward Kinematics Problem of 6 DOF Based on Neural Networks. *Sensors*, 22(14), <https://doi.org/10.3390/S22145318>