



**T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAREKETLİ YÜKLERE MARUZ MESNETLİ EĞRİSEL KİRİŞLERİN  
DİNAMİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ**

**Murat REİS**

**DOKTORA TEZİ  
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**BURSA-2009**



**T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAREKETLİ YÜKLERE MARUZ MESNETLİ EĞRİSEL KİRİŞLERİN  
DİNAMİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ**

**Murat REİS**

**Prof. Dr. Yaşar PALA  
(Danışman)**

**DOKTORA TEZİ  
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**BURSA-2009**

T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAREKETLİ YÜKLERE MARUZ MESNETLİ EĞRİSEL KİRİŞLERİN DİNAMİK  
DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Murat REİS

DOKTORA TEZİ  
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez 16.12.2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yaşar PALA      Prof. Dr. Vedat KARADAĞ      Doç. Dr. Kadir ÇAVDAR  
Danışman

Doç. Dr. İlhan TAPAN

Yrd. Doç. Dr. Gültekin KARADERE

## ÖZET

Bu çalışmada, hareketli yüklerin etkisi altındaki kirişlerin dinamik davranışları incelenmektedir. Analizlerde Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmaktadır. Farklı tip ve şartlardaki kirişlerin serbest titreşimleri tespit edilmiş ardından dikey kolonlarla desteklenen düz kirişlerin, eğrisel kirişlerin ve çatlak ihtiva eden kirişlerin hareketli yüklerin etkisi altındaki titreşimleri tespit edilmiştir. Dikey kolonlardaki tepki kuvvetleri kiriş üzerine yayılı birer kuvvet olarak ifade edilerek, sınır şartları ve süreklilik şartlarının kullanımından kaçınılmıştır. Bu yöntemle ne kadar çok sayıda kolon mevcut olursa olsun çözüm bölgesi parçalanmadığı ve ekstra sınır şartları tanımlanmadığı için çözüme oldukça basit işlemlerle ulaşılmıştır. Eğri kirişlerde ve yüksek hızla hareket eden sistemlerde atalet etkisinin yanında merkezci ve Coriolis ivme etkilerinin de göz ardı edilmemesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Burada elde edilen en önemli sonuçlardan birisi de hareketli kütlenin hızının kirişin dinamik davranışı üzerinde oldukça etkili olduğudur. Hareketli yükün etkisindeki kirişin cevabı Duhamel integrali ile verilmektedir. Diferansiyel denklemin sağ tarafındaki merkezci ve Coriolis ivme terimlerinden kaynaklanan gayri-lineer terimler yarı iteratif bir yaklaşımla çözülmüştür. Sonuç kısmında hareketi etkileyen değişkenlerin pek çok değeri için sayısal örnekler sunulmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Hareketli yük, kiriş, eğrisel, çatlak, titreşim, dinamik, Coriolis, merkezci.

**ABSTRACT**

This study is devoted to the investigation of dynamic analysis of the beams under moving load. The analysis is based on Euler-Bernoulli beam theory. First Eigen functions of the various types of beams have been obtained than the dynamic response of supported, curved and cracked beams under moving loads have been investigated. Each vertical support is modeled as a linear spring and a linear damper. The present method utilizes the concept of distributed moving load, spring force and damping force, and avoids the use of matching conditions. Expressing these forces in terms of the unknown function of the problem highly simplifies obtaining an exact solution. An important property of Dirac delta distribution function is utilized in order to reach the exact solution. A solution method similar to the method of successive approximation has been used. This study is devoted to the investigation of the effects of inertial, centripetal and Coriolis forces on the dynamic response of a simply supported beam with a single crack under moving mass load. As in the case of beams without a crack, it is shown that these forces must be considered in the analysis. The inertial, centripetal and Coriolis forces are appreciably affected by the mass and the velocity of the moving load. The response of the system is obtained in terms of Duhamel integral. The differential equation which involves a non-linearity on its right hand side is solved via an iterative procedure. The method has been exemplified for the special values of the variables.

**Key Words:** Moving Load, beam, curved, crack, vibration, dynamic, Coriolis, centripetal.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ ONAY SAYFASI .....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
SİMGELER DİZİNİ .....	x
GİRİŞ .....	1
<b>1. KAYNAK ÖZETLERİ .....</b>	<b>4</b>
1.1. Düz Kirişler .....	4
1.2. Çatlak İhtiva Eden Kirişler .....	14
<b>2. MATERYAL VE YÖNTEM .....</b>	<b>17</b>
2.1. Temel Kavramlar ve Kabuller .....	17
2.1.1. Cismin yapısı ile ilgili kabuller .....	17
2.1.2. Şekil değiştirmenin kinematikinde yapılan basitleştirme ve kabuller .....	18
2.1.3. Euler – Bernoulli kiriş teorisi .....	21
2.1.3.1. Elastik eğri .....	21
2.1.3.2. Hareket denklemi .....	23
2.1.4. Sınır şartları .....	27
2.1.4.1. Sabit destek .....	27
2.1.4.2. Serbest uç .....	28
2.1.4.3. Basit mesnet .....	29
2.1.4.4. Elastik çöken basit mesnet .....	30
2.1.4.5. Elastik dönen basit mesnet .....	31
2.1.4.6. Viskoz sönümlü çöken mesnet .....	32
2.1.4.7. Viskoz sönümlü dönen basit mesnet .....	32
2.1.5. Yardımcı fonksiyonlar .....	34
2.1.5.1. Delta fonksiyonu ve uygulamaları .....	34
2.1.5.2. Konvolüsyon integrali .....	36
2.1.5.3. Fourier serileri .....	41
2.1.6. Kirişe etkiyen kuvvetlerin Fourier açılımları .....	44

2.2. Kirişlerin Serbest Titreşimleri . . . . .	52
2.2.1. Basit mesnetli kirişin serbest titreşimi . . . . .	56
2.2.2. Ankastre mesnetli kirişin serbest titreşimi . . . . .	61
2.2.3. Konsol kirişin serbest titreşimi . . . . .	67
2.2.4. Elastik mesnetli kirişin serbest titreşimi . . . . .	73
2.3. Çatlak İhtiva Eden Kirişlerin Serbest Titreşimi . . . . .	80
2.3.1. Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin serbest titreşimi . . . . .	83
2.3.2. Çatlak ihtiva eden konsol kirişin serbest titreşimi . . . . .	94
2.3.3. Çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kirişin öz fonksiyonları . . . . .	103
2.4. Hareketli Kuvvetin Etkisi Altındaki Kirişlerin Titreşimleri . . . . .	111
2.4.1. Hareketli bir kuvvetin etkisi altındaki destek ayağı ihtiva eden kirişin titreşimi . . . . .	111
2.4.2. Hareketli kuvvetin etkisi altındaki eğrisel kirişin titreşimi . . . . .	121
2.4.3. Hareketli kuvvetin etkisi altındaki, çatlak ihtiva eden kirişin titreşimi . . . . .	126
2.5. Hareketli Kütlenin Etkisi Altındaki Kirişlerin Titreşimleri . . . . .	133
2.5.1. Hareketli bir kütlenin etkisi altındaki destek ayağı ihtiva eden kirişin titreşimi . . . . .	134
2.5.2. Hareketli kütlenin etkisi altındaki eğrisel kirişin titreşimi . . . . .	139
2.5.3. Hareketli kütlenin etkisi altındaki, çatlak ihtiva eden kirişlerin titreşimi . . . . .	147
<b>3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA . . . . .</b>	<b>154</b>
3.1. Hareketli Yüklerin Etkisi Altındaki Destek İhtiva Eden Kirişlerin Titreşimi . . . . .	155
3.2. Hareketli Yükün Tesiri Altındaki Eğrisel Kirişlerin Titreşimi . . . . .	165
3.3. Hareketli Yüklerin Etkisi Altındaki Çatlak İhtiva Eden Kirişlerin Titreşimleri . . . . .	175
SONUÇ . . . . .	184
KAYNAKLAR . . . . .	190
EKLER . . . . .	195
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	224
TEŞEKKÜR . . . . .	225

**ÇİZELGELER DİZİNİ**

Sayfa

Çizelge 2.2.1	Her iki ucu basit mesnetli kirişin özdeğerleri . . . . .	60
Çizelge 2.2.2	Her iki ucu ankastre mesnetli kirişin özdeğerleri. . . . .	66
Çizelge 2.2.3	Her iki ucu ankastre mesnetli kirişin özfonksiyon katsayıları, ( $A_n, B_n, C_n, D_n$ ). . . . .	66
Çizelge 2.2.4	Konsol kirişin özdeğerleri. . . . .	72
Çizelge 2.2.5	Konsol kirişin özfonksiyon katsayıları ( $A_n, B_n, C_n, D_n$ ). . . . .	72
Çizelge 2.2.6	Elastik mesnetli kirişin farklı yay rijitlikleri için ilk dört özdeğeri ( $L = 1m, H = B = 0.01m$ ) . . . . .	78
Çizelge 2.2.7	Elastik mesnetli kirişin farklı yay rijitlikleri için özfonksiyon katsayıları ( $A_n, B_n, C_n, D_n$ ). ( $L = 1m, H = B = 0.01m$ ). . . . .	79
Çizelge 2.3.1	Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin farklı çatlak derinlik oranları için ilk dört özdeğeri ( $\ell_1 = L_1 / L = 0.4$ ) . . . . .	91
Çizelge 2.3.2	Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin farklı çatlak konumları için ilk dört özdeğeri ( $\gamma = 0.5$ ) . . . . .	91
Çizelge 2.3.3	Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin özfonksiyon katsayıları ( $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ ), ( $\ell_1 = L_1 / L = 0.4$ ) . . . . .	92
Çizelge 2.3.4	Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin özfonksiyon katsayıları ( $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ ), ( $\gamma = 0.50$ ). . . . .	93
Çizelge 2.3.5	Çatlak ihtiva eden konsol kirişin farklı çatlak derinlik oranları için ilk dört özdeğeri ( $\ell_1 = L_1 / L = 0.4$ ). . . . .	100
Çizelge 2.3.6	Çatlak ihtiva eden konsol kirişin farklı çatlak konumları için ilk dört özdeğeri ( $\gamma = 0.5$ ). . . . .	100
Çizelge 2.3.7	Çatlak ihtiva eden konsol kirişin özfonksiyon katsayıları ( $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ ). ( $\ell_1 = L_1 / L = 0.4$ ). . . . .	101
Çizelge 2.3.8	Çatlak ihtiva eden konsol kirişin özfonksiyon katsayıları ( $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ ), ( $\gamma = 0.50$ ) . . . . .	102
Çizelge 2.3.9	Çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kirişin farklı yay rijitlikleri için ilk dört özdeğeri. ( $\ell_1 = L_1 / L = 0.25, \gamma = 0.5$ ). . . . .	109
Çizelge 2.3.10	Çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kirişin farklı yay rijitlikleri için özfonksiyon katsayıları ( $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ ) ( $\ell_1 = L_1 / L = 0.25, \gamma = 0.5$ ) . . . . .	110



**ŞEKİLLER DİZİNİ**

Sayfa

Şekil 2.1.1	Elastik eğri. ....	21
Şekil 2.1.2	Kirişin eksene dik hareketi. ....	23
Şekil 2.1.3	Kiriş elemanının serbest cisim diyagramı. ....	24
Şekil 2.1.4	Sabit destek (Ankastre mafsalsal). ....	27
Şekil 2.1.5	Serbest uç. ....	28
Şekil 2.1.6	F kuvveti ve M momentinin tesiri altındaki serbest uç. ....	28
Şekil 2.1.7	$\bar{M}$ kütlesi taşıyan serbest uç. ....	29
Şekil 2.1.8	Basit mafsalsal (Pim bağlantısı). ....	30
Şekil 2.1.9	Elastik çöken basit mesnet. ....	31
Şekil 2.1.10	Elastik dönen basit mesnet. ....	31
Şekil 2.1.11	Viskoz sönümlü çöken basit mesnet. ....	32
Şekil 2.1.12	Viskoz sönümlü dönen basit mesnet. ....	33
Şekil 2.1.13	Hareketli kütlelerin etkisi altındaki kiriş. ....	35
Şekil 2.1.14	Köprü ayaklarındaki tepki kuvvetleri $[F_k = ky(x,t), F_c = c\dot{y}(x,t)]$ ....	36
Şekil 2.1.15	Kirişe etkiyen muhtelif periyodik yük fonksiyonları a.) Fourier sin açılımı (Tek fonksiyon) b.) Fourier cos açılımı (Çift fonksiyon). ....	45
Şekil 2.1.16	Hareketli yükün Fourier sin açılımı, $N = 4$ terim için ( $L = 10m$ , $M = 100kg$ , $v=10m/s$ ) a.) $t = 0.4sn$ b.) $t = 0.7sn$ ....	48
Şekil 2.1.17	Hareketli yükün Fourier cos açılımı, $N = 4$ terim için ( $L = 10m$ , $M = 100kg$ , $v=10m/s$ ) a.) $t = 0.25sn$ b.) $t = 0.6sn$ ....	49
Şekil 2.2.1	Her iki ucu basit mesnetli kiriş. ....	56
Şekil 2.2.2	Her iki ucu basit mesnetli kirişin özdeğerleri. ....	60
Şekil 2.2.3	Her iki ucu ankastre mesnetli kiriş. ....	61
Şekil 2.2.4	Her iki ucu ankastre mesnetli kirişin özdeğerleri. ....	65
Şekil 2.2.5	Konsol kiriş. ....	67
Şekil 2.2.6	Konsol kirişin özdeğerleri a.) $L = 1m$ b.) $L = 5m$ c.) $L = 10m$ ....	71
Şekil 2.2.7	Elastik mesnetli kiriş. ....	73
Şekil 2.2.8	Elastik mesnetli kirişin ilk dört özdeğeri; a.) $L = 1m, H = 0.01m$ b.) $L = 5m, H = 0.1m$ c.) $L = 10m, H = 0.2m$ ....	77
Şekil 2.3.1	Tek taraflı açık çatlak ihtiva eden kiriş. ....	80
Şekil 2.3.2	Çift taraflı açık çatlak ihtiva eden kiriş. ....	80
Şekil 2.3.3	$x = L_1$ konumunda açık çatlak ihtiva eden basit mesnetli kiriş. ....	83

Şekil 2.3.4	$x = L_1$ konumunda açık çatlak ihtiva eden konsol kiriş. . . . .	94
Şekil 2.3.5	$x = L_1$ konumunda tek taraflı açık çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kiriş . . . . .	103
Şekil 2.3.6	Çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kirişin ilk dört özdeğeri; $(\ell_1 = L_1 / L = 0.25, \gamma = 0.5)$ . . . . .	109
Şekil 2.4.1	Hareketli bir kuvvetin etkisi altındaki destek ayağı ihtiva eden kiriş. .	112
Şekil 2.4.2	Hareketli kuvvetin etkisi altındaki eğrisel kiriş . . . . .	121
Şekil 2.4.3	Hareketli kuvvetin etkisi altındaki çatlak ihtiva eden basit mesnetli kiriş. . . . .	126
Şekil 2.5.1	Hareketli bir kütlein etkisi altındaki destek ayağı ihtiva eden kiriş . .	135
Şekil 2.5.2	Hareketli kütlein etkisi altındaki eğrisel kiriş. . . . .	140
Şekil 2.5.3	Sabit hızlı $M$ kütleinin etkisi altındaki çatlak ihtiva eden basit mesnetli kiriş. . . . .	147
Şekil 3.1.1	Destek ihtiva etmeyen kirişin orta nokta yer değiştirmesinin zamanla değişimi, $c = 0, L=10$ m, $b=h=0.1$ m, $F = 70 \times 9.81$ N, $E=2.07 \times 10^5$ N/m <sup>2</sup> . . . . .	155
Şekil 3.1.2	Boyutsuz hareketli kütle pozisyonunun farklı değerleri için boyutsuz kiriş şekilleri, $v = 1$ m/s, $(t = 0.2-0.4-0.6-0.8-1)$ , $(k_i = 10^5$ N/m, $c_i = 10^4$ Ns/m). a.) Destek ihtiva etmeyen kiriş. b.) Orta noktadan tek bir ayakla desteklenen kiriş, $x_D = 0.5L$ c.) İki noktadan desteklenen kiriş, $x_{D1} = 0.3L, x_{D2} = 0.7L$ . d.) Eşit aralıklarla üç farklı noktadan ayakla desteklenen kiriş, $x_{D1} = 0.25L, x_{D2} = 0.5L$ ve $x_{D3} = 0.75L$ . . . . .	160
Şekil 3.1.3	Kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonu ile değişimi. . . . .	162
Şekil 3.1.4	Tek bir ayakla desteklenen kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonu ile değişimi, a.) $0 < x_D < 0.5L$ , b.) $0.5L < x_D < L$ . . . . .	163
Şekil 3.2.1	Dışbükey, düz ve içbükey kiriş. . . . .	166
Şekil 3.2.2	Hareketli kütlein farklı hızları için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimi. a.) $v = 5$ m/s b.) $v = 10$ m/s c.) $v = 20$ m/s. . . . .	169
Şekil 3.2.3	Hareketli yükün farklı kütleleri için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimi. a.) $M = 25$ kg b.) $M = 50$ kg c.) $M = 100$ kg d.) $M = 200$ kg e.) $M = 500$ kg. . . . .	172
Şekil 3.2.4	Hareketli yükün farklı kütleleri için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimi $(A_0 = 0.1, \text{Dışbükey})$ ; a.) $v = 5$ m/s b.) $v = 10$ m/s c.) $v = 20$ m/s . . .	174
Şekil 3.3.1	Farklı çatlak derinliği oranları $(\gamma)$ için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimleri $(L_0=10$ m, $v=5$ m/s, $M=1000$ kg). . . . .	176

Şekil 3.3.2	Farklı çatlak konumları ( $L_0$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $\gamma = 0.5$ , $v = 5\text{m/s}$ , $M = 1000\text{kg}$ ) . . . . .	177
Şekil 3.3.3	Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $L_0 = 10\text{m}$ , $\gamma = 0.5$ , $v = 5\text{m/s}$ ), a.) $M = 100\text{kg}$ , b.) $M = 500\text{kg}$ , c.) $M = 1000\text{kg}$ . . . . .	179
Şekil 3.3.4	Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $L_0 = 10\text{m}$ , $\gamma = 0.5$ , $v = 10\text{m/s}$ ), a.) $M = 100\text{kg}$ , b.) $M = 500\text{kg}$ , c.) $M = 1000\text{kg}$ . . . . .	180
Şekil 3.3.4	Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $L_0 = 10\text{m}$ , $\gamma = 0.5$ , $v = 20\text{m/s}$ ), a.) $M = 100\text{kg}$ , b.) $M = 500\text{kg}$ , c.) $M = 1000\text{kg}$ . . . . .	181
Şekil 3.3.6	Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $L_0 = 10\text{m}$ , $\gamma = 0.5$ , $v = 50\text{m/s}$ ), a.) $M = 100\text{kg}$ , b.) $M = 500\text{kg}$ , c.) $M = 1000\text{kg}$ . . . . .	182
Şekil 3.3.7	Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $L_0 = 10\text{m}$ , $\gamma = 0.5$ , $v = 100\text{m/s}$ ), a.) $M = 100\text{kg}$ , b.) $M = 500\text{kg}$ , c.) $M = 1000\text{kg}$ . . . . .	183

## SİMGELER DİZİNİ

$a_M$	- Hareketli kütlelerin ivmesi;
$a_0, a_n, b_n$	- Fourier katsayıları;
$A, B, C, D$	- Kirişin özfonksiyon katsayıları;
$A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$	- Çatlak ihtiva eden kirişin özfonksiyon katsayıları;
$B$	- Kiriş kesitinin genişliği;
$c$	- Kirişin kendi sönüm katsayısı;
$c_i$	- Mesnetlerin sönüm sabitleri;
$D$	- Çatlak derinliği;
$E$	- Elastisite modülü;
$g$	- Yerçekimi ivmesi ( $9.81 \text{ m/s}^2$ );
$H$	- Kiriş kesitinin yüksekliği;
$I$	- Kiriş kesitinin alan atalet momenti;
$k_i$	- Elastik mesnetlerin yay sabitleri;
$L$	- Kiriş uzunluğu;
$L_i$	- i. çatlağın konumu;
$m$	- Kirişin birim uzunluğunun kütlesi;
$M$	- Hareketli yükün kütlesi;
$N$	- Fourier serisindeki özfonksiyon adedi;
$N$	- Eksenel Kuvvet;
$n, k$	- Özfonksiyon numaraları ( $1, 2, 3, \dots$ );
$\mathbf{P}$	- Dış kuvvet vektörü;
$q_n(t)$	- Genelleştirilmiş koordinatlar;
$\mathbf{r}$	- Yer değiştirme vektörü;
$r_1, r_2$	- Karakteristik denklemin kökleri;
$t$	- Zaman;
$\bar{t}$	- Hareketli yükün normalleştirilmiş konumu;
$T_{4 \times 4}$	- Dönüşüm (Transfer) matrisi;
$x$	- Yatay koordinat;
$\omega_n$	- Kirişin doğal frekansları;
$v$	- Hareketli yükün hızı;
$y_0$	- Kirişin başlangıç eğriliği;
$y_{\max}$	- Kirişin orta noktasının maksimum statik yerdeğiştirmesi;
$y, y_1, y_2$	- Düşey yerdeğiştirmeler;
$\bar{y}$	- Normalleştirilmiş orta nokta yerdeğiştirmesi.
$\delta(x)$	- Dirac-delta fonksiyonu;
$\delta_0$	- Kirişin başlangıç eğriliğinin genliği;
$\rho$	- Eğrilik yarıçapı;
$\gamma$	- Çatlak derinliğinin oranı;
$\theta_i$	- i. çatlak kesitinin esnekliği;
$\phi_n(x)$	- Öz fonksiyonlar;
$\lambda$	- Özdeğerler;
$\eta_i$	- i. destek ayağının konumunun kiriş boyuna oranı;
$\zeta$	- Sönüm oranı;
$\nu$	- Poisson Oranı;

## GİRİŞ

Köprüler, demir yolları ve pek çok taşıyıcı sistem, tatbik noktası zamanla değişen yüklerin etkisi altındadır. Mekanikte bu tür yükler genellikle hareketli yük olarak adlandırılır. Hareketli yükün şiddeti sabit yada değişken olabilir. Her iki durumda da hareketli yük, dinamik bir yüküdür ve dinamik yüklerin etkisi altında çalışan yapıların bakım maliyetleri yüksek buna karşılık işletme ömürleri düşüktür. Özellikle hareketli yüklerin etkisi altında çalışan demir yolu ve kara yolu köprüleri gibi son derece yüksek maliyetli yapılarda bakım giderlerini azaltacak ve işletme ömrünü yükseltecek tedbirlerin alınması, köprü araç etkileşiminin bilinmesi ve köprünün dinamik davranışının tespit edilmesi ile mümkündür. Bunun yanında krenler, rulmanlı yataklar, kayar uzuv içeren mekanizmalar, hidrolik ve pnömatik elemanlar gibi daha pek çok mühendislik sistemi hareketli yüklerin etkisi altında çalışmaktadır.

Hareketli yük deyimi oldukça genel bir anlamda kullanılmaktadır. Yük hem kütle hem de kuvveti kapsamaktadır. Hareketli kuvvet ile anlatılmak istenen; şiddeti sabit ya da değişken olmakla birlikte kiriş ile etkileşime girmeyen yalnızca tatbik noktası değişen kuvvettir. Oysaki hareketli kütle otomobil, kamyon yada bir tren gibi kütleli bir etkiyi ifade etmektedir. Bu durumda hareketli kütle kiriş ile etkileşim içerisindedir ve aralarındaki tepki kuvvetini bu etkileşim belirler.

Hareketli bir kuvvet yada hareketli bir kütlenin etkisi altındaki bir mekanik sistemin dinamik davranışını önceden kestirmek oldukça güçtür. Bu yükler özellikle yüksek hızlarda mekanik yapıda şiddetli titreşimlere ve dinamik gerilmelere sebep olabilirler. Mekanik deneyimleri, hareketli yüklerin mekanik sistemler üzerine iki şekilde etki edeceğini göstermektedir. Bu yükler mekanik yapı üzerinde çarpma etkisi oluşturabilir ya da yapı deforme olmaya zaman bulamadan hareketli yük sistemi terk edebilir. Bu iki durum birbirinin tam tersi sonuçlar doğurmaktadır. Bu çalışmada bu tür yüklerin etkisi altındaki kirişlerin dinamik davranışları incelenmektedir.

Pek çok durumda, özellikle aracın kütlesinin köprünün kütlelerine oranının düşük olduğu durumlarda aracın atalet etkileri ihmal edilebilmektedir. Böylece kirişin hareketini idare eden çok daha basit bir matematik model oluşturulabilmektedir. Bunun en tipik örneği tekil bir kuvvetin tesiri altındaki kiriş problemidir. Bu modelde kiriş ile hareketli kütle arasındaki etkileşim ihmal edilmekte ve yalnızca kirişin hareketi ile ilgilenilmektedir.

Köprü ve kirişlerin hareketi incelenirken genellikle düz kirişler ideal doğru kabul edilmektedir. Oysaki gerçekte hiçbir kiriş tamamen düz bir doğru değildir. Örneğin; köprüler, bazen yapım hatası olarak, bazen de kirişin eğilme direncini artırmak için bilinçli bir şekilde hafif eğrisel yapılmaktadır. Bununla birlikte kiriş tamamen düz olsa bile zamanla mutlaka bir miktar çökme yapacaktır. Statik halde böylesi hafif bir eğriliğin etkisi oldukça küçüktür ve genellikle ihmal edilmektedir. Ancak hareketli bir yükün tesiri altındaki kirişlerde eğriliğin belirgin bir etkisinin varlığı bilinmektedir. Bu etki literatürde az sayıdaki çalışmalarla ve bu doktora tezi ile doğrulanmıştır.

Dinamik yüklerin etkisi altında çalışan sistemlerde malzeme yorulması ve bu yorulmaya bağlı olarak çatlak oluşumu sık görülen bir durumdur. Kirişlerde oluşacak böylesi bir çatlağın kirişe ve üzerinde taşıdığı hareketli yüke etkisi özellikle deneysel araştırmalarla çokça incelenmiştir. Ancak bu konudaki analitik çalışmalar bir kısım hata ve eksiklikler içermektedir. Bu doktora çalışması ile hareketli yüklerin etkisi altındaki farklı şartlara haiz çatlak ihtiva eden veya etmeyen kirişlerin dinamik davranışlarının tespiti için daha gerçekçi analitik bir model oluşturulması hedeflenmektedir. Buna ek olarak literatürdeki bir kısım eksik ve hatalarında giderilmesi amaçlanmaktadır. Bu yöntemlerin formülasyonu, mümkün olduğunca genel bir formda verilmeye özen gösterilmiştir. Böylece genel kullanıma açık daha kullanışlı yöntemlerin ortaya konulması amaçlanmıştır.

Çalışmada hareketli yüklerin etkisi altındaki kirişlerin dinamik davranışları üç ana başlıkta incelenmektedir. İlk kısımda bu alanda daha önce yapılan çalışmaların ana hatları ile özetlendiği Kaynak Özetleri kısmı yer almaktadır. Hemen ardından problemin çözümü için yapılan kabullerin ve kullanılan yöntemlerin anlatıldığı, serbest titreşen

kirişlerin öz fonksiyonlarının hesaplandığı ve hareketli yüklerin etkisi altındaki farklı tip ve şartlardaki kirişlerin dinamik davranışının tespiti için geliştirilen yöntemlerin sunulduğu Materyal Metod bölümü yer almaktadır. Bu yöntemin çeşitli uygulamaları Araştırma Sonuçları ve Tartışma kısmında sunulmuştur. Son olarak ta sayısal örneklerin çözümü için yazılan Matlab programları 'Ekler' kısmında verilmiştir.

Hareketli yükler ve köprü ayaklarındaki tepki kuvvetleri Fourier dönüşüm tekniği yardımı ile kiriş üzerindeki yayılı yükler olarak ifade edilebilir. Fourier dönüşüm tekniğinin bu özelliği kullanılarak geliştirilecek olan yöntemle, özellikle birden çok hareketli yük ihtiva eden problemlerde ya da birden fazla ayakla desteklenen köprülerde diğer yöntemlere nazaran oldukça basit işlemler neticesinde sonuca ulaşılabilmektedir. Kirişin çözüm bölgesinde süreklilik şartlarından dolayı bir parçalanmaya sebep olmaması bu basitliğin en önemli sebebidir.

Yöntemin bir uzantısı olarak hafif eğrilikli kirişlere de benzer bir yaklaşım uygulanacaktır. Bunun yanında hafif eğrilikli kirişlerde merkezci ivme ve Coriolis ivmesinin etkisinin artacağı düşünülerek, bu etkilerinde hesaba dâhil edilmektedir. Literatürde hafif eğriliğe sahip hareketli yük taşıyan kirişlerin dinamik davranışı için analitik bir çözüm mevcut değildir.

Üçüncü ve son olarak kirişin çatlak ihtiva etmesi halinde dinamik davranışı incelenmektedir. Kirişin herhangi bir noktasında çatlak ihtiva etmesi kirişin o noktasındaki eğilme rijitliğini lokal olarak azaltmaktadır. Çatlak ihtiva eden bu noktanın eğilme rijitliği, çatlak derinliğinin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilmektedir. Çatlak ihtiva eden köprülerin dinamik davranışı incelenirken, köprü üzerindeki çatlağın bir dönme yayı olarak modellenebileceği kabul edilmektedir. Bu kabul literatürdeki çalışmalara dayanmaktadır. Çalışmada farklı çatlak derinlikleri ve konumları için hareketli kütlelerin Coriolis ve merkezci ivme etkisi de göz önüne alınarak kirişin titreşim cevabı en genel halde elde edilmiştir.

## 1. KAYNAK ÖZETLERİ

Büyük kütlelerin yüksek hızlarda nakledilme ihtiyacı sistemlerin güvenilirliği ve dinamik davranışları üzerinde daha titizlikle durulmasını sağlamıştır. Bu amaçla hareketli yüklerin etkisi altındaki yapıların dinamik davranışları bir yüzyıldan uzun bir süredir incelenmektedir. Özellikle köprü, köprüyol, demir yolu ve kirişlerin titreşimi üzerine pek çok inceleme yapılmıştır ve pek çok yöntem geliştirilmiştir. Özellikle Euler-Bernoulli kiriş teorisi üzerine bina edilmiş hatırı sayılır miktarda çalışma mevcuttur. 19. yüzyılın ortalarından itibaren ilk demiryolu köprülerinin inşasıyla birlikte hareketli yüklerin köprünün güvenilirliğine etkisi sorgulanmaya başlanmıştır. Bu alandaki ilk teorik çalışma, 1849 yılında İngiltere de Chaster demir yolu köprüsünün çökmesinin ardından, Willis (1849) tarafından kirişin kütlelerinin hareketli cismin kütlelerinin yanında çok küçük olduğu kabulü ile yapılmıştır. Bu çalışmada kirişin ataleti ihmal edilerek, araç sabit hızla hareket eden tekil bir kuvvet olarak göz önüne alınmıştır. Willis tarafından bu kabuller altında elde edilen kirişin hareket denklemi, Stokes (1849) tarafından güç serileri kullanılarak çözülmüştür. Bu yöntem belli bir durumun kesin çözümünü vermekle birlikte, köprünün ataletini ihmal ediyor olması hasebiyle oldukça kısıtlı bir kullanıma sahiptir. Bununla birlikte Willis ve Stokes tarafından atılan bu adım köprü mühendisliğine büyük bir katkı sağlamıştır. Zimmermann (1896) da hemen hemen aynı kabullerle benzer çalışmalar yapmıştır.

### 1.1. Düz Kirişler

Sabit hız ve genliğe sahip bir kuvvetin tesiri altındaki prizmatik bir çubuğun hareketi Krylov (1905) ve Inglis (1934) tarafından incelenmiştir. Krylov özel olarak üzerinde hareketli tekil kuvvet taşıyan döner mafsallı düz bir kirişi incelemiş ve bu çalışmada kirişin kütlelerinin hareketli cismin kütlelerine nazaran çok büyük olduğunu kabul etmiştir. Aynı problem Timoshenko (1911), Lowan (1935) ve Bondar (1954) tarafından öz fonksiyonlar, Green fonksiyonları ve integral denklemler yöntemleri ile çözülmüştür.



Timoshenko (1922) köprü üzerinde sabit hızla hareket eden aracı hareketli sabit bir kuvvet olarak kabul etmiştir. Aracın ataletini ihmal ederek basit mesnetli bir kiriş olarak ele aldığı köprünün hareketini incelemiştir. Benzer bir çalışmada Timoshenko, (1927) kirişin kendi sönümünü ihmal ederek, hareketli kuvvetin kritik hızını veren bir ifade elde etmiş ve kirişin gerilme dağılımlarını tespit etmiştir. Ayre ve ark. (1950) hareketli kuvvetin etkisi altındaki iki açıklıklı bir kirişin dinamik davranışını incelemiştir. Bu çalışmada kirişin her iki ucunun basit mesnetli olduğu ve ortasından rijid bir ayakla desteklendiği kabul edilmiştir.

1950 lerden sonra daha gerçekçi kiriş – yük etkileşim modelleri oluşturulmaya başlanmıştır. Wen (1960) iki akslı hareketli taşıtın etkisi altındaki köprünün dinamik davranışını incelemiştir. Bu incelemede köprünün kütlelerinin düzgün yayılı olduğu kabul edilmiş ve aracın her iki aksı basit kütle – yay modeli olarak modellenmiştir. Wen çalışmasında hareketli yükün etkisi altındaki kirişin dinamik yer değiştirmesi ile hareketli yükün aynı konumlarındaki statik yerdeğişmeler arasında bir yaklaşım ortaya koymuştur. Kirişin kendi sönümü ilk olarak Velozzi (1967) tarafından ele alınmıştır. Velozzi hareketli yüklerin etkisi altındaki sönümlü kirişlerin titreşimleri üzeriye çalışmalar yürütmüştür.

Geleneksel olarak hemen hemen tüm araştırmalar kirişin dinamik davranışı üzerine yoğunlaşmış, buna karşılık aracın hareketi üzerinde pek durulmamıştır. Hatta pek çok çalışmada araç hareketli sabit bir kuvvet olarak tahayyül edilmiştir. Bunun ana nedeni yalnızca hareketli yükün tesiri altındaki kirişin risk altında görülmesidir. Bir diğer neden de aracın hareketinin incelenmesinin çözüme getireceği zorluktur. Bu kabul kirişin kütlelerinin hareketli kütleyle nazaran çok büyük olduğu durumlarda önemli bir hata oluşturmayabilir. Ancak yüksek hızlı trenlerin kullanımı ile birlikte araçlar için çok yüksek hızların söz konusu olmaya başlaması, araç güvenliği ve konforu açısından hareketli kütlelerin dinamik davranışını önemli kılmaya başlamıştır. Aracın dinamik davranışının önemli olduğu yada büyük kütlelerdeki araçları taşıyan sistemlerde aracın, hareketli bir kuvvet olarak kabulü ciddi hatalar doğurabilir. Bu durumda aracın atalet etkilerinin de göz önüne alınması gerekmektedir.

Hareketli kütle ve kütle taşıyan kiriş arasındaki ilişki, hareketli sabit kuvvetten farklı olarak lineer olmayan ve etkileşimli bir dinamik problemdir. Hareketli yük bir kuvvet değil de bir kütle olarak düşünüldüğünde kiriş üzerine iki farklı şekilde etki etmektedir. İlki ağırlık etkisidir ki yer çekiminden dolayı ortaya çıkar. Kütle ve yerçekimi ivmesi değişmedikçe bu etkinin şiddeti sabittir. İkinci etki ise atalet etkisidir. Atalet etkisi hareketli kütle için düşey doğrultudaki ivmesi ile birlikte değişir. Yalnızca ağırlık kuvveti göz önüne alındığında diferansiyel denklem çok daha basit işlemlerle çözülebilir. Ancak atalet kuvvetleri, Coriolis ve merkezci ivme bileşenleri diferansiyel denklemi gayri-lineer yaptığından çözümü oldukça zorlaştırmakta ve pek çok defa diferansiyel denklemin analitik çözümü mümkün olmamaktadır. Denklemlerin gayri – lineer olması bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin bu kuvvetlerin tanımları içerisinde yer almasındandır. Bu gayri-lineer diferansiyel denklemler sayısal yöntemlerle çözülebilmektedir.

Kirişin ve hareketli kütle için atalet etkileri ilk olarak Jeffcott (1929) tarafından ardıl yaklaşımlar yöntemi ( Picard yöntemi ) kullanılarak ele alınmıştır. Stanisic ve Hardin (1969) çok sayıdaki hareketli kütle için etkisi altındaki basit mesnetli kirişin hareketini Fourier seri açılımı yardımıyla incelemiştir. Böylece ilk defa atalet etkilerinin göz önüne alındığı çalışmalar yapılmıştır. Hareketli kütle problemi Ting ve ark. (1974), Sadiku ve Leipholz (1987) tarafından Green fonksiyonları kullanılarak incelenmiştir. Tek bir hareketli kütle taşıyan basit bir kiriş hali için kesin ve kapalı form çözüm ilk defa Stanisic (1985) tarafından kirişin öz fonksiyonları yardımıyla bulunmuştur.

Demir yollarının kullanımındaki artışa paralel olarak demir yollarının dinamik davranışlarının tespitine yönelik çalışmalarda yine bu dönemlerde hız kazanmıştır. Özellikle hareketli yüklerin etkisi altındaki sonsuz uzunluklu kirişlerin, hareketli yüklerin ve hareketli yük katarlarının etkisi altındaki köprülerin dinamik davranışları integral dönüşüm teknikleri ile çokça incelenmiştir. Laplace - Coursan ve Fourier integral dönüşüm teknikleri en yaygın kullanılan iki yöntemdir (Fryba 1972). Ancak bu yöntem çok uzun olmayan ve ekstra sınır şartlarına sahip kirişler için uygun bir çözüm yöntemi değildir. Fryba (1973) bu yöntemleri kullanarak çok sayıdaki hareketli yükün etkisi altındaki basit mesnetli kirişin titreşimini incelemiştir. Fryba (1972) hareketli

yüklerin tesiri altındaki yapıların titreşimlerini oldukça kapsamlı bir kitapta incelemiştir. Bugünde pek çok çalışmaya ışık tutan bu kitapta, hareketli yüklerin etkisi altındaki tek boyutlu katıların yanında, iki ve üç boyutlu katıların titreşimleri de verilmektedir.

Esmailzadeh ve Ghorashi (1992) hareketli noktasal bir kütle taşıyan sonlu uzunluktaki bir kirişin hareket denklemini adi diferansiyel denklemlerin çözümüne indirgeyen bir yöntem ortaya koymuştur. Esmailzadeh ve Ghorashi (1995) aynı problemi hareketli yükün  $\varepsilon$  genişliğindeki bir kısımda kiriş üzerine yayılı olduğunu kabul ederek incelemiştir. Bu çalışma daha kolay ve çok sayıdaki sınır şartını sağlayan bir çözüm yöntemi ortaya koyma adına önemli bir gelişmedir.

Gürgöze (1997) kirişteki titreşimin genliğini azaltmak için, kiriş boyunca sönümleyiciler ve yaylar yerleştirerek, bu sönümleyicilerin etkisi altında kirişin serbest titreşimini incelemiştir. Gürgöze (1998) serbest ucu  $M$  kütlesi taşıyan ve tek noktadan viskoz damper ihtiva eden bir konsol kirişin özdeğerlerini hesap etmiştir. Zorlanmış titreşim cevabını bulmamış olmasına rağmen kirişin, bu öz fonksiyonlar kullanılarak hareketli yükün etkisi altındaki dinamik davranışının tespiti çok zor değildir. Bu çalışmadan hareketle herhangi bir noktadan ayakla güçlendirilmiş hareketli yükün tesiri altındaki bir kirişin dinamik davranışı tespit edilebilir.

Öz ve ark. (1998) hafif eğriliğe sahip kirişin lineer olmayan titreşimlerini incelemiştir. Kirişte böylesi hafif bir eğrilik kirişi burkmaya zorlayan bir kuvvet tarafından oluşturulabilir, ancak burada bahsedilen kirişin kendisinde var olan herhangi bir tesir tarafından meydana getirilmemiş olan bir eğriliktir. Çalışmada kirişin her iki ucundan basit mesnetli olduğu ve elastik temeller üzerinde durduğu kabul edilerek, kirişin hareketini idare eden integro – diferansiyel denklem pertürbasyon yöntemi ile çözülmüştür.

Wang ve Lin (1998) hareketli kuvvetin etkisi altındaki çok sayıda açıklık ihtiva eden Timoshenko kirişinin titreşimini analitik olarak incelemiştir. Analizlerde kirişin eksenel ve dönme etkilerinin yanında uzama etkileri de göz önüne alınmıştır. Sonuç olarak belli bir uzunluktaki kirişte aralık sayısı arttıkça yada bir başka ifadeyle kirişi

destekleyen ayakların sıklığı arttıkça, kirişin titreşiminin ilk modunun frekansının küçüldüğü görülmüştür. Bu çalışmanın bir diğer önemli sonucu da Timoshenko kirişinde oluşan maksimum yer değiştirmenin Euler – Bernoulli kirişine göre daha büyük olduğudur.

Kwon ve ark. (1998) hareketli yükün etkisi altındaki kirişin titreşimlerinin kontrolü üzerine çalışmalar yürütmüştür. Kwon ve ark. aracı, kütle, süspansiyon ve lastikten ibaret iki serbestlik dereceli bir sistem olarak modellemiş ve kirişin titreşimlerinin kontrolü için kiriş üzerine ek kütle – yay – damperden oluşan titreşim sönümleyici eleman ilave etmiştir. Bu sayede güç kaynağı gerektirmeyen bir sistemle kirişin titreşim kontrolü gerçekleştirilmiştir.

Son yıllarda hareketli yüklerin etkisi altındaki köprülerin titreşim davranışları üzerine hatırı sayılır miktarda çalışma yapılmıştır. Şüphesiz bunda Japonya ve bazı Avrupa ülkelerindeki hızlı tren uygulamalarının rolü oldukça büyüktür. 1970 lerden itibaren bilgisayar teknolojisinin yaygınlaşması ve analiz tekniklerindeki köklü değişimle birlikte, başta sonlu elemanlar yöntemi olmak üzere ayrık çözüm yöntemlerinin geliştirilmiş olması bunun bir diğer nedenidir. Dijital bilgisayarların kullanılmaya başlanması ve yaygınlaşmasıyla birlikte araştırmacılar daha gerçekçi köprü ve araç modelleri oluşturma imkânına kavuşmuştur. Diferansiyel denklemlerin analitik çözümündeki güçlüğün aşılması ile birlikte daha gerçekçi ve tam modeller ortaya konabilmiştir. Öyle ki bu yöntemlerle burulma etkilerinin de dikkate alınabildiği iki hatta üç boyutlu analizler yapılabilmekte ve çok serbestlik dereceli araç modelleri ortaya konabilmektedir. Daha önceleri oldukça genel problemler üzerine araştırmalar yürütülürken bilgisayarların yardımıyla lokal ve oldukça spesifik problemlerde inceleme konusu olmaya başlamıştır. Günümüzde sonlu elemanlar yöntemleri üzerine kurulu oldukça güçlü sayısal yöntemler aracın ve köprünün dinamik davranışının tespitine imkân tanımaktadır.

Cheung ve ark. (1999) karayolu taşıtları ve trenlerin etkisi altındaki çok sayıda açıklık ihtiva eden ve kesiti düzgün olmayan kirişlerin titreşimlerini incelemiştir. Karayolu taşıtları iki serbestlik dereceli bir sistem olarak, trenler ise iki serbestlik

dereceli sistemlerden oluşan bir seriye genişletilerek modellenmiştir. Çalışmada hareket denklemleri matris formunda yazılarak daha açık bir çözüm yöntemi elde edilmiştir. Bu yöntem sonlu elemanlar yöntemlerine kıyasla çok daha az sayıda bilinmeyen ihtiva etmekte ve oldukça hızlı bir şekilde yakınsamaktadır.

Michaltsos ve Kounadis (2000) ilk defa hareketli kütleli etkisi altındaki ince kirişlerin dinamik davranışını Coriolis ve merkezci ivme etkilerini de dahil ederek incelemiştir. Hareketi idare eden gayri – lineer diferansiyel denklemin çözümünde yine Kounadis (1985) tarafından gayri – lineer sınır değer probleminin çözümü için verilen iteratif bir yöntem kullanılmıştır. Michaltsos (2001) bu kez iki akslı hareketli bir taşıtın etkisi altındaki kirişin dinamik davranışını yine Coriolis ve merkezci ivme etkilerini dahil ederek incelemiştir. Çalışmada tüm bunlara ek olarak aracın dönme etkileri de dikkate alınmıştır. Michaltsos (2001) değişken hızla hareket eden bir kütleli etkisi altındaki kirişin dinamik davranışını da incelemiştir.

Sun (2001) hareketli yüklerin etkisi altındaki kirişlerin yer değiştirmelerinin kapalı form çözümünü Green fonksiyonu, konvolüsyon ve rezidü integralleri yardımı ile elde etmiştir. Sayısal örneklerle hareketli kuvvetin kritik hız olarak isimlendirilen belli bir hız değerinde seyrettiğinde kirişte maksimum yer değiştirmelerin oluştuğunu göstermiştir.

Deprem yüklerinin izolasyonu için kiriş mafsallarına elastik çöken mesnetler yerleştirilmektedir. Yau ve ark. (2001) hareketli kuvvetin etkisi altındaki elastik mesnetli böyle bir kirişin dinamik davranışını ve rezonans durumlarını analitik bir yaklaşımla incelemiştir. Bu çalışmada, elastik mesnetlerin yerleştirilmesinin kirişin rezonans durumlarını artırdığı tespit edilmiştir.

Yang ve Wu (2001) hareketli kütleli etkisi altındaki eğrisel kirişin dinamik davranışını incelemiştir. Yang ve Wu hareketli kütle ile kiriş arasındaki tepkiyi ağırlık ve merkezci kuvvet bileşenlerine ayırarak kirişin hareket denkleminde ifade etmiş, ancak kütleli atalet etkisini ve Coriolis kuvvetini göz önüne almamıştır. Song ve Biondini (2002) literatürde hemen hemen herkes tarafından ihmal edilen kiriş

yüzeyindeki düzgünsüzlüğün araç – köprü etkileşimine tesirini sonlu elemanlar yöntemi ile ele almıştır. Song ve Biondini rastgele düzgünsüzlükler ihtiva eden kirişin titreşimini Monte Carlo simülasyon tekniğini kullanarak incelemiştir.

Chen ve ark. (2002) aktif süspansiyon sistemli araç ile köprü arasındaki etkileşimi incelemiştir. Çalışmada iki serbestlik dereceli araç modeli kullanılmış ve köprü basit mesnetli bir kiriş olarak modellenmiştir. Düzgün olmayan yüzey şartlarına sahip bir kiriş ile iki serbestlik dereceli araç modeli arasındaki etkileşim, kuple hareket denklemlerinin çözümü ile belirlenmiştir. Sonuç olarak köprünün maksimum yer değiştirme yaptığı anda, aracın izafi deplasmanının azaldığı gözlenmiştir. Bu da köprünün araç için bir titreşim emici gibi davrandığını göstermektedir. Köprü için risk oluşturan bu durum, aracın süspansiyon sistemi kontrol edilerek giderilebilmektedir.

Esmailzadeh ve Jalili (2003) araç – yolcu – köprü sisteminin titreşimini incelemiştir. Araç, sürücü ve yolcuları ile birlikte sabit hızla hareket eden bir çeyrek araç modeli, kiriş ise basit mesnetli Euler – Bernoulli kirişi olarak modellenmiştir. Farklı araç hızları için sayısal sonuçlar dinamik yer değiştirmenin ve eğilme momentinin maksimum değerlerinin kirişin orta noktası civarında oluştuğunu göstermiştir.

Wang ve ark. (2003), kiriş üzerine ekstra kütle – yay – damper sistemi ekleyerek, hızlı tren yollarındaki titreşimlerin sönümlenmesi üzerine çalışmalar yürütmüştür. Hesaplamalar böylesi bir pasif titreşim emici sistemin oldukça kullanışlı olduğunu ve kirişte aşırı titreşimlere engel olduğunu göstermektedir.

Sonlu uzunluktaki eğrisel kirişlerin serbest yada zoraki titreşimlerini ele alan pek fazla çalışma mevcut değildir. Literatürde daha çok dairesel eğime sahip kirişlerin hareketli yüklerin etkisi altındaki dinamik davranışlarının incelendiği çalışmalar mevcuttur. Wu ve Chiang (2003, 2004) hareketli yükün etkisi altındaki dairesel eğime sahip bir Timoshenko kiriş elemanının hareketini, kirişin uzama ve dönme etkilerini de göz önüne alarak incelemiştir. Wu ve Chiang hareketli bir tekil kuvvetin tesiri altındaki

sonlu uzunluğa sahip dairesel bir yayın titreşimini kirişin dönme etkilerini de göz önüne alarak incelemiştir.

Hareketli yüklerin ve hızlı trenlerin etkisi altındaki köprülerde, titreşim genlikleri, birleşik yada kafes kiriş sistemleri kullanılarak azaltılabilir. Yau (2004) hareketli bir tekil kuvvetin etkisi altındaki böyle bir birleşik kirişin titreşimini incelemiştir. Birleşik kiriş sistemi basit mesnetli bir kiriş ve bu kirişin orta noktasındaki rijid elemanla kiriş mafsallarına bağlı iki kiriş elemanından ibarettir.

Kargarnovin ve Younesian (2004) kirişin belli bir bölgesinde yayılı hareketli periyodik kuvvetin tesiri altındaki elastik temelli kirişin dinamik davranışını incelemiştir. Bu çalışmada Fourier dönüşümü, konvolüsyon integrali ve rezidü teoremi kullanılarak, kiriş boyunca olan yerdeğiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri hesap edilmiştir. Kargarnovin ve ark. (2005) daha sonra visko – elastik temelli kiriş için aynı problemi ele almıştır. Kocatürk ve Şimşek (2004), hareketli periyodik kuvvetlerin etkisi altındaki visko – elastik kirişlerin enine titreşimlerini Euler – Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir. Problemin çözümünde Lagrange denklemleri kullanılmış ve problem kirişin yerdeğiştirmeleri, hareketli periyodik yükün frekansı, çeşitli sönüm oranları ve açıklık sayısı için sayısal olarak incelenmiştir. Bu çalışmada, hareketli yükün hızının, frekansının ve visko – elastik kirişin sönüm oranının kirişin yer değiştirmeleri üzerinde oldukça önemli bir etkisinin olduğunu tespit etmiştir.

Yanmeni Wayou ve ark. (2004) hareketli yükün etkisi altındaki kirişin lineer olmayan dinamik davranışını incelemiştir. Yanmeni Wayou ve ark. hareketli kütlelerin tesiri altındaki bir kirişin dinamik davranışını idare eden diferansiyel denkleme gayri - lineer özellik katan merkezci ve Coriolis ivme etkilerini de göz önünde bulunduran bir formülasyon ortaya koymuştur.

Yang (2004) hızlı tren – köprü başta olmak üzere, araç – köprü etkileşiminin dinamik cevabının tespitine yönelik çalışmalar yürütmüştür. Yang karayolu ve demir yolu köprülerinin dinamik davranışlarının tespitine yönelik oldukça kapsamlı bir çalışma ortaya koymuştur. Yang, bu çalışmanın sonucunda özetle aşağıdaki sonuçlara

ulaşmıştır. Karayolu köprüleri demir yolu köprülerine nazaran daha rastgele yüklerin etkisi altındadır. Zira bir karayolu köprüsü farklı zamanlarda farklı tip ve kütledeki araçların geçişine maruzdur. Demir yolu köprüleri ise vagon sayısı ve kütlesi bir miktar değişmekle birlikte genelde aynı tip yüklerin tesiri altındadır. Bu durum bir avantaj gibi görünmekle birlikte, vagonların aks açıklıklarının sabit olması nedeni ile demir yolu köprüsü üzerine hareketli periyodik bir kuvvetin etki etmesi anlamına gelir. Bu ise köprüde rezonans riski oluşturan oldukça tehlikeli bir durumdur. Rezonans, yol konforunu düşürebildiği gibi, aracın yol güvenliğini zayıflatabilir ve köprüyü tahrip edebilecek kadar büyük yer değiştirmelere de sebebiyet verebilir. Tüm bu problemler Yang tarafından detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Köprünün titreşim frekanslarını köprü üzerine yerleştirilen ölçüm elemanları ile direkt olarak tespit etmek oldukça maliyetli hatta bazı durumlarda olanaksız olabilmektedir. Yang ve ark. (2004) aracın dikey titreşimlerinden hareketle, üzerinde hareket ettiği köprünün titreşim frekanslarının tespitine yönelik çalışmalar yürütmüştür. Çalışmada araç basit bir kütle yay sistemi, köprü ise basit mesnetli bir kiriş olarak modellenmiştir. Bu konu üzerinde daha titizlikle durulması gereken, çalışılmaya değer bir konu olarak görülmektedir. Zira bu yolla köprüde oluşabilecek ve köprünün dinamik davranışına etki edebilecek tahribatların konumunun tespiti de mümkün görülmektedir.

Yağız ve Sakman (2005) hareketli taşıtın etkisi altındaki köprünün titreşim analizini Lagrange formülasyonu kullanarak gerçekleştirmiştir. Diğer çalışmalardan farklı olarak burada, hareketli taşıt yedi serbestlik dereceli tam bir taşıt modeli, köprü ise dört köşesinden basit mesnetli dikdörtgen levha olarak modellenmiştir. Law ve Zhu (2005) yol düzgünlüğü ve aracın fren etkisinin köprünün dinamik davranışına tesirini sayısal simülasyonlar ve laboratuvar testleri ile incelemiştir.

Ouelaa ve ark. (2006) hareketli bir trenin etkisi altındaki demir yolu köprüsünün dinamik davranışının tespiti için vibro – akustik bir model ortaya koymuştur. Burada, kirişin hareketini idare eden kuple diferansiyel denklem Newmark yöntemi kullanılarak iteratif bir yaklaşımla çözülmüştür. Abu – Hilal (2006) hareketli sabit kuvvetin etkisi altındaki birbirine visco – elastik bir tabaka ile bağlı paralel özdeş iki kirişin hareketini



incelemiştir. Burada her iki kirişin yerdeğiştirmeleri analitik olarak hesap edilmiş ve kapalı formda verilmiştir. Bunun yanında hareketli kuvvetin farklı hız değerleri ve visko – elastik tabakanın farklı sönüm ve sertlik değerleri için hesaplamalar yapılmıştır.

Garinci ve Risitano (2008) şiddeti zamanla değişen hareketli yüklerin etkisi altındaki hızlı tren köprülerinin titreşimini incelemiştir. Tren aks açıklıklarının sabit olması hızlı trenin geçişi sırasında kirişin hareketli periyodik yüklerin etkisine maruz kalması anlamına gelmektedir. Garinci ve Risitano bu yüklerin hızı ve frekansının kirişin rezonansına etkisini ele almıştır.

Şimşek ve Kocatürk (2009) hareketli tekil periyodik kuvvetin etkisi altındaki Euler – Bernoulli kirişinin serbest ve zorlanmış titreşimini Lagrange yaklaşımı ile ele almıştır. Burada mesnetlerdeki kısıtlar Lagrange çarpanları ile ifade edilmektedir. Şimşek ve Kocatürk hareketli periyodik yükün hızının ve frekansının kirişin dinamik davranışına etkisini incelemiştir. Sayısal sonuçlar bu etkilerin kirişin dinamik yer değiştirmelerinde oldukça önemli bir rolü olduğunu göstermiştir.

Yau (2009) hareketli taşıtların etkisi altındaki asma köprünün dinamik davranışını incelemiştir. Bu incelemede kirişin toplam dinamik cevabı farazi – statik ve eylemsizlik – atalet cevabı olmak üzere iyi parçaya ayrılmıştır. Bu iki cevabın toplamı kirişin gerçek dinamik cevabını vermektedir.

Samani ve Pellicano (2009) hareketli yüklerin etkisi altındaki kirişlerin titreşimlerinin gayri – lineer dinamik titreşim emiciler yardımıyla azaltılması üzerine çalışmalar yürütmüştür. Bu çalışmaların ana hedefi gayri – lineer titreşim emicilerle lineer titreşim emicilerin performanslarının karşılaştırılmasıdır. Samani ve Pellicano kirişin hareketini idare eden kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denklem takımına indirgeyerek Galerkin – Bubnov yöntemi ve modal açılım yardımı ile çözmüştür.

Literatürdeki bu çalışmaların pek çoğu problemi sayısal ya da yarı sayısal yöntemlerle incelemiş ve büyük bir kısmında hareketli kütle sabit bir kuvvet olarak

kabul edilmiştir. Hareketli kütlelerin de yalnızca atalet etkileri göz önüne alınmış, buna karşılık merkezci ve Coriolis ivme etkileri ihmal edilmiştir. Yalnızca Michaltsos ve Kounadis (2001) ağır kütleli yüklerin etkisi altındaki uzun ve ince köprüler için bu etkileri dikkate alan bir çalışma ortaya koymuştur. Bu doktora çalışmasında da hareketli kütlelerin merkezci ve Coriolis ivmeleri göz önüne alınacaktır. Hareketli yükün hızı ve kütlelerinin farklı değerleri için bu ivme terimlerinin kirişin dinamik davranışı üzerine etkileri gösterilecektir.

## 1.2. Çatlak İhtiva Eden Kirişler

Dinamik yüklerin etkisi altındaki yapılar malzeme yorulması sonucu oluşan mikro çatlakların tehdidi altındadır. Bu çatlaklar zamanla ilerleyerek sistemin dinamik davranışına tesir edebilir. Bu nedenle çatlak ihtiva eden kirişlerin dinamik yüklerin etkisi altındaki davranışları önem arz etmektedir. Son yirmi yılda çatlak ihtiva eden kirişlerin hareketli yüklerin etkisi altındaki davranışlarının incelendiği deneysel ve analitik sayısız çalışma yapılmıştır.

Çatlak, bulunduğu bölgede çatlak derinliğine ve geometrisine bağlı olarak kirişin eğilme direncini lokal olarak değiştirmektedir (Anifantis ve Dimaragonas, 1984). Bunun doğal bir sonucu olarak ta kirişin dinamik davranışı ve kararlılığı değişmektedir. Bazı araştırmacılar çatlağın sistemin dinamik davranışı üzerine etkisini incelerken, bir kısım araştırmacılar da sistemin dinamik davranışını gözlemleyerek yapıda çatlak olup olmadığının ve eğer varsa konumunun tespitine yönelik çalışmalar yürütmüşlerdir.

Ostachowitz ve Krawczuk (1991) serbest titreşen bir konsol kirişteki iki açık çatlağın kirişin eğilme titreşim frekanslarına etkisini veren bir yöntem sunmuştur. Rizos ve Aspragathos (1990) ise problemi tersten ele almış ve kirişin titreşim genliklerini ölçerek, çatlak bölgenin yerinin tespitine yönelik çalışmalar yürütmüştür. Liang ve ark. (1990) yine buna benzer bir problemi sonlu elemanlar yöntemi ile ele almıştır. Parhi ve Behera (1997), Runge – Kutta yöntemini kullanarak hareketli bir yükün etkisi altındaki dairesel bir şaftın üzerindeki çatlağın konumunun tespitine yönelik çalışmalar yapmıştır.

Chondros ve ark. (1998), tek ve çift taraflı açık çatlak ihtiva eden Euler – Bernoulli kirişinin yanal titreşimlerinin tespiti için, kirişin çözüm bölgesinin çatlak tarafından parçalanmadığı sürekli bir model geliştirmiştir. Shifrin ve Ruotolo (1999) da, keyfi sayıda enine açık çatlak ihtiva eden kirişin doğal frekanslarının hesabı için sürekli bir kiriş modeli kullanan yeni bir teknik ortaya koymuştur. Kirişin çatlak tarafından çözüm bölgelerine parçalanmadığı böyle bir yöntemin ana özelliği hesaplamalardaki karmaşık matrislerin boyutunu azaltmasıdır. Böylece alternatif yöntemlere nazaran doğal frekansların hesaplanma süresi oldukça düşmektedir.

Mahmoud (2001), hareketli yükün etkisi altındaki tek ve çift taraflı açık çatlak ihtiva eden basit mesnetli sönümsüz Euler – Bernoulli kirişindeki gerilme yoğunluğu faktörünün tespiti için bir yaklaşım ortaya koymuştur. Bu yöntem kirişe etkiyen eşlenik yükün tespiti için modal analiz yöntemi kullanılmaktadır. Mahmoud ve Abou Zaid (2002) hareketli kütle etkisi altındaki enine çatlak ihtiva eden basit mesnetli Euler – Bernoulli kirişinde çatlağın kirişin dinamik davranışına etkisini belirlemek için iteratif bir modal analiz yöntemi geliştirmiştir. Mahmoud ve Abou – Zaid çatlak derinliğinin kirişin dinamik davranışına belirgin bir etkisinin varlığını tespit etmiştir. Ayrıca hareketli cismin kütlesi, hızı ve çatlak pozisyonu da kirişin dinamik davranışına etki eden diğer değişkenlerdir.

Lin ve ark. (2002) çok sayıda çatlak ihtiva eden kirişlerin serbest titreşimini yarı analitik yarı sayısal hibrit bir yöntemle incelemiştir. Bu çalışmada da çatlak, kirişin eğilme sertliğini lokal olarak değiştiren kütleli bir dönme yayı olarak ele alınmaktadır. Öz fonksiyonların hesabında transfer matris yöntemi kullanılmıştır. Transfer matris yöntemi kullanılarak, tek bir açık çatlak ihtiva eden basit mesnetli bir kirişin titreşimi direkt veya ters yöntemle yine Lin (2004) tarafından çözülmüştür. Burada çatlak tarafından iki çözüm bölgesine ayrılmış her bir kiriş için Timoshenko kiriş teorisi ve çatlak noktasındaki uygunluk şartları kullanılarak sistemin karakteristik denklemi elde edilmiştir. Bu karakteristik denklem özdeğerlerin, çatlak pozisyonu ve derinliğinin fonksiyonudur. Lin herhangi iki özdeğerin tespit edilmesi halinde bu karakteristik denklem kullanılarak çatlak konumu ve çatlak derinliğini veren bir yöntem geliştirmiştir.

Law ve Zhu (2004) hareketli araç yüklerinin etkisi altındaki hasarlı veya güçlendirilmiş beton köprülerin dinamik davranışını deneysel bir çalışma ile incelemiştir. Burada araç, hareketli bir kütle yada lineer bir süspansiyon sistemi ve elastik tekerlek ihtiva eden dört serbestlik dereceli bir sistem olarak modellenmiştir. Kiriş yine her iki ucundan basit mesnetle sabitlenmiş Euler – Bernoulli kirişidir. Kirişteki hasar açık çatlak modeli ile ifade edilmiştir.

Lin ve Chang (2006) hareketli tekil bir yükün tesiri altındaki konsol kirişin dinamik davranışını veren analitik bir yöntem ortaya koymuştur. Burada çatlak ihtiva eden kiriş sistemi, çatlak tarafından iki çözüm bölgesine ayrılan iki açıklıklı Euler – Bernoulli kirişi olarak modellenmiştir. Transfer matris yöntemi kullanılarak sistemin öz fonksiyonları tespit edilmiştir. Kirişin dinamik cevabı kirişin serbest titreşiminden elde edilen bu öz fonksiyonlar yardımıyla ve modal genişleme teorisi kullanılarak elde edilmiştir. İleriki kısımlarda detayları verilmek üzere bu çalışmanın bazı hatalar ve eksiklikler içerdiği ve yeniden formüle edilmesi gerektiği söylenebilir.

Orhan (2007) çatlak ihtiva eden konsol kirişin serbest ve zoraki titreşimini incelemiştir. Bu yolla kirişteki çatlağın konumunun tespitine yönelik çalışmalar yürütmüştür. Bu çalışmasında kirişin serbest titreşiminin çatlağın konumunun tespitinde daha kullanışlı olduğunu, ancak çatlak derinliğinin hesaplanmasında kirişin zoraki titreşim cevabını kullanmanın daha uygun olacağı tespit edilmiştir. Ariaei ve ark. (2009) hareketli kütlelerin etkisi altındaki açık çatlak ihtiva eden bir kirişin dinamik davranışının tespiti için ayırık eleman tekniği ve sonlu elemanlar yöntemi olarak isimlendirdikleri analitik bir yaklaşım ve bir hesap yöntemi elde etmiştir.

Tüm bu çalışmalara ek olarak bu doktora çalışması, çok farklı şartlardaki kirişlerin hareketli yüklerin etkisi altındaki dinamik davranışlarını tespit edebilen yöntemler sunmaktadır. Hareketli yük sabit bir kuvvet olabileceği gibi bir kütle de olabilir. Bununla birlikte hareketli yükün tesiri altındaki kiriş düz, eğrisel, herhangi bir noktadan ayakla desteklenmiş veya çatlak ihtiva eden bir kiriş olabilir. Tüm bu farklı durumların tamamı için hareket denklemleri elde edilerek çözülmüş ve sayısal örneklerle zenginleştirilmiştir.

## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

### 2.1. Temel Kavramlar ve Kabuller

Kirişler tıpkı kablo, çubuk ve levha gibi kütleleri ve kuvvetleri yayılı olan yapılardır ve bu yapılar sürekli ortam kabulüne göre incelenirler. Sürekli ortamlar, sonsuz sayıda tekil kütlenin birleşmesinden meydana gelmiş gibidir. Dolayısı ile bunların konumlarını tarif etmek için sonsuz sayıda koordinat tarif edilmelidir. Netice olarak, bu tip mekanik sistemler sonsuz sayıda doğal frekansı ve titreşim modunu ihtiva ederler.

Kirişlerin dinamik davranışları, kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir ve bu denklemler aşağıda ifade edilen kabuller ve basitleştirmeler üzerine bina edilerek çözülebilmektedir.

#### 2.1.1. Cismin yapısı ile ilgili kabuller

Hareketli yüklerin etkisi altındaki kirişlerin dinamik davranışlarının incelendiği bu doktora çalışması dahilinde yapılan tüm analizlerde kirişin, elastik, Hooke kanununa uyan, homojen ve izotrop bir cisim olduğu kabul edilmektedir.

**Homojen Cisim :** Cismin özellikleri her noktasında ve her doğrultuda aynı ise bu tür cisimler homojen cisim olarak isimlendirilir. Hareketli yükün tesiri altındaki kirişin homojen olduğu yani kirişin her noktasının mekanik özelliklerinin aynı olduğu kabul edilmektedir.

**İzotrop Cisim :** Herhangi bir cisim her noktasında ve tüm yönlerde aynı karakteri gösteriyorsa, bir başka deyişle, cismin tüm özellikleri her yönde aynıysa bu tür cisimlere izotrop cisim adı verilir.

**Elastik Cisim :** Bir cisim üzerine bir kuvvet uygulandığında, cisim şeklini ve ebatlarını değiştirir. Kuvvet ortadan kalktığında, cisim eski şekil ve ebatlarına geri dönebiliyorsa meydana gelen bu şekil değişikliği elastiktir. Böyle cisimler de elastik cisim olarak isimlendirilmektedir. Ancak cisim eski şeklini almaz ise, plastik şekil değiştirmelerden bahsedilir. Bu halde cisim ilk şekil ve hacmine dönemez. Bu tür cisimler şekil değiştirme durumuna bağlı olarak çok farklı adlandırılır. Elastiklik belli bir değere kadar görülür. Bu değerden sonra plastik şekil değiştirme meydana gelir. Bu sınır değere elastiklik sınırı denir. Ancak genel olarak cisimler, bu iki ideal durumun arasında bulunur; yani dış etkiler geri dönerken, şekil değiştirmelerin bir kısmı geri döner bir kısmı kalır. Buna elasto-plastik cisim denir.

**Hooke Yasası:** Elastiklik sınırı içinde kalmak üzere elastik bir cisme bir kuvvet tesir ettiğinde cismin boyu belli bir miktar uzar veya kısalır. Bu uzama veya kısalma, tesir eden kuvvetle orantılıdır. Bu kaide Hooke Kanunu olarak adlandırılır. Şekil değiştirme kanunu lineer olan bu cisimlere kısaca Hooke Cismi adı verilir (İnan 1967).

### 2.1.2. Şekil değiştirmenin kinematığında yapılan basitleştirme ve kabuller

Kirişlerin hareket denklemleri ifade edilirken; katılma, ayırma, eşdeğerlik ve süperpozisyon ilkelerinden faydalanılmakta ve kiriş için birinci mertebeye teorisi kullanılmaktadır.

**Katılaştırma İlkesi:** Kirişin denge denklemleri, kirişin yük altında şeklini değiştirdiği son durumunda rijid hale geldiği kabul edilerek uygulanılır.

**Ayırma İlkesi:** Kirişin dış etkilere uygunluğunu anlamak için, bir düzlemle herhangi bir yerinden hayali olarak kesilir. Düzlemin ayırdığı kısımlardan sadece bir parçasına denge denklemleri uygulanır. Kirişi iki parçaya ayırıp, bir tarafı atarak kalan kısmın incelenmesine ayırma prensibi adı verilir. Denge denklemleri kirişin bütünü için geçerli ise, her parçası içinde geçerlidir.

**Eşdeğerlik İlkesi:** Elastik bir kirişin küçük bir bölgesine etkiyen dış kuvvetler sistemi, kendi statik eşdeğeri olan, bir başka kuvvetler sistemi ile değiştirilirse, kirişin bu dış kuvvetlerin etkime bölgesinden yeter derecede uzak bölgelerindeki gerilme yayılışları pratik olarak değişmezler. Bu prensibe göre gerilme yayılışları ancak, eşdeğer dış kuvvet sistemlerinin etkidiği bölgede değişecekler fakat bu bölgeden yeter derecede uzak bölgelerdeki değişimleri, eşdeğer kuvvet sistemleri değişse de, pratik bakımdan ihmal edilecek kadar küçük olacaktır (Kayan 1987).

**Birinci Mertebe Teorisi:** Yer ve şekil değiştirmeler kirişin boyutları yanında küçük olduğunda denge denklemleri şekil değiştirmemiş kiriş üzerinde yazılabilir. Bu şekilde yapılan hesaplara birinci mertebe teorisi adı verilir. Şekil değiştirmelerin büyük olduğu sistemlerde; örneğin asma köprülerde birinci mertebe teorisi uygun sonuç vermez. Bu durumda şekil değiştirmeler küçük kabul edilmeyip denge denklemlerinin şekil değiştirmiş cisim üzerinde yazılması gerekir. Bu hesap şekline ikinci mertebe teorisi adı verilir ki, şekil değiştirmeler baştan bilinmediğinden hesaplar daha uzundur. (İnan 1967).

**Lineerlik (Süperpozisyon) İlkesi:** Bir elastik cismin iki farklı şekilde yüklenmesi sırasında bir noktadaki şekil değiştirme  $u_1$  ve  $u_2$  olsun. Bu iki yükün beraber etkimesi halinde lineerlik ilkesi gereği şekil değiştirme  $u_1 + u_2$  olur. Bunun için şekil değiştirmelerin küçük olması ve cismin Hooke cismi olması gerekir.

Süper pozisyon ilkesi adi diferansiyel denklemlerin çözümünde de geçerlidir. Bu ilke çok sayıdaki terimden oluşan gayri-homojen diferansiyel denklemin çözümüne imkan tanımaktadır. Aşağıdaki gibi;

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \quad (2.1.1)$$

ile verilen gayri-homojen denklem göz önüne alınsın. Böyle bir denklemin  $y_0$  özel çözümünü elde etmek için,  $f(x)$  fonksiyonu  $n$  adet  $f_i(x)$   $i=1,2,\dots,n$  fonksiyonun

toplama olarak ifade edilir ve her bir  $f_i(x)$  fonksiyonu için özel çözümleri  $y_{\tilde{o}_i}(x)$  ile bulunur. Süper pozisyon ilkesi gereği

$$y_{\tilde{o}_1} + y_{\tilde{o}_2} + \dots + y_{\tilde{o}_n} \quad (2.1.2)$$

toplama gayri homojen (2.1.1) denkleminin bir özel çözümüdür. (2.1.2) ifadesi türetilerek (2.1.1) de yerine yazılırsa süper pozisyon ilkesinin ispatı kolaylıkla görülür.

$$\begin{aligned} & \left[ y_{\tilde{o}_1} + y_{\tilde{o}_2} + \dots + y_{\tilde{o}_n} \right]'' + P(x) \left[ y_{\tilde{o}_1} + y_{\tilde{o}_2} + \dots + y_{\tilde{o}_n} \right]' + Q(x) \left[ y_{\tilde{o}_1} + y_{\tilde{o}_2} + \dots + y_{\tilde{o}_n} \right] \\ &= \left[ y_{\tilde{o}_1}'' + P(x) y_{\tilde{o}_1}' + Q(x) y_{\tilde{o}_1} \right] + \dots + \left[ y_{\tilde{o}_n}'' + P(x) y_{\tilde{o}_n}' + Q(x) y_{\tilde{o}_n} \right] \\ &= f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

$y_{\tilde{o}_1}, f_1(x)$  için;  $y_{\tilde{o}_2}, f_2(x)$  için; ... ;  $y_{\tilde{o}_n}, f_n(x)$  için çözüm olduğundan, (2.1.3) ifadesi özdeş olarak sağlanır. Şu halde, her bir  $f_i(x)$  e tekabül eden çözümler bulunup toplanarak  $f(x)$  e tekabül eden  $y_{\tilde{o}}$  çözümleri elde edilebilir.

Tıpkı lineer adi diferansiyel denklemler gibi lineer homojen kısmi diferansiyel denklemlerde süper pozisyon ilkesini gerçeklerler.

$u_1$  ve  $u_2$  lineer homojen kısmi diferansiyel denklemin birer çözümü iseler, o takdirde  $c_1$  ve  $c_2$  sabitler olmak üzere herhangi bir

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \quad (2.1.4)$$

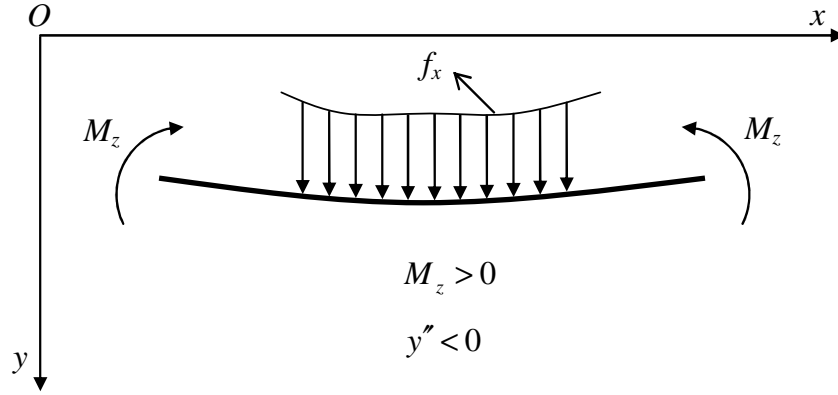
lineer birleşimi de bir çözümdür. İlâveten,  $u_1$  ve  $u_2$  lineer homojen sınır şartlarını sağlıyor ise, o takdirde  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$  de sağlar. Lineerlik ilkesi gayri-lineer kısmi diferansiyel denklemler için geçerli değildir (Pala 2006).



### 2.1.3. Euler – Bernoulli kiriş teorisi

#### 2.1.3.1. Elastik eğri

Kirişlerin eksene dik doğrultudaki titreşim hareketinin diferansiyel denklemi, kirişin elastik eğrisi kullanılarak elde edilir (Şekil 2.1.1). Yer değiştirme vektörünün yatay bileşeni  $x$ , dikey bileşeni  $y$  ile gösterilsin. Kiriş ekseni doğrultusundaki  $x$  yer değiştirmesi, eksene dik doğrultudaki  $y$  yer değiştirmesinin yanında daima bir mertebe küçük olduğundan ihmal edilebilir.



Şekil 2.1.1. Elastik eğri

Elastik eğri probleminde önemli nokta  $y(x)$  çökmeleri ile bunu doğuran  $f_y$  yükleri arasında bir bağıntı kurmaktır. Aranılan bu münasebetin çubuğun uç şartlarından bağımsız olması isteniyorsa, bağıntının türevlerle ifade edilen bir diferansiyel denklem olması gerekir. Bu denkleme eğrilik – moment bağıntısından varılabilir.

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (2.1.5)$$

$\rho_z$  eğriliği ile  $y(x)$  arasındaki bağıntının

$$\frac{1}{\rho_z} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad (2.1.6)$$

olduğu diferansiyel geometriden bilinmektedir. Böylece moment ile eğrilik arasındaki bağıntı

$$\pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (2.1.7)$$

elde edilir. Denklem (2.1.7) deki iki farklı işaret, seçilen koordinat takımının yönüne ve eğilme momenti için kabul edilen işaret prensibine bağlıdır. Bu çalışma kapsamında yapılan tüm hesaplamalarda dikey doğrultu için aşağı yön pozitif alınacaktır. Şu halde (2.1.7) ile verilen eşitlikteki işaretin negatif alınması gerekir.

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (2.1.8)$$

Bu ifade  $y(x)$  fonksiyonuna göre lineer değildir.  $y'$  eğiminin yatık eğrilerde küçük olduğu kabul edilerek bunun karesi birin yanında ihmal edilirse (2.1.8) denklemi aşağıda verildiği şekilde lineerleştirilmiş olur.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (2.1.9)$$

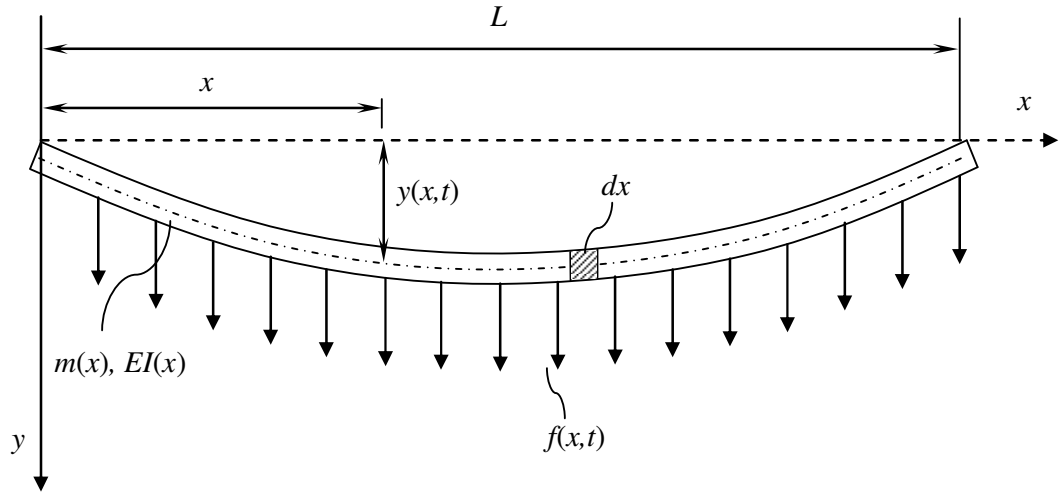
Buradan moment ifadesi,

$$M_z = -EI_z \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) \quad (2.1.10)$$

bulunur.

### 2.1.3.2. Hareket denklemi

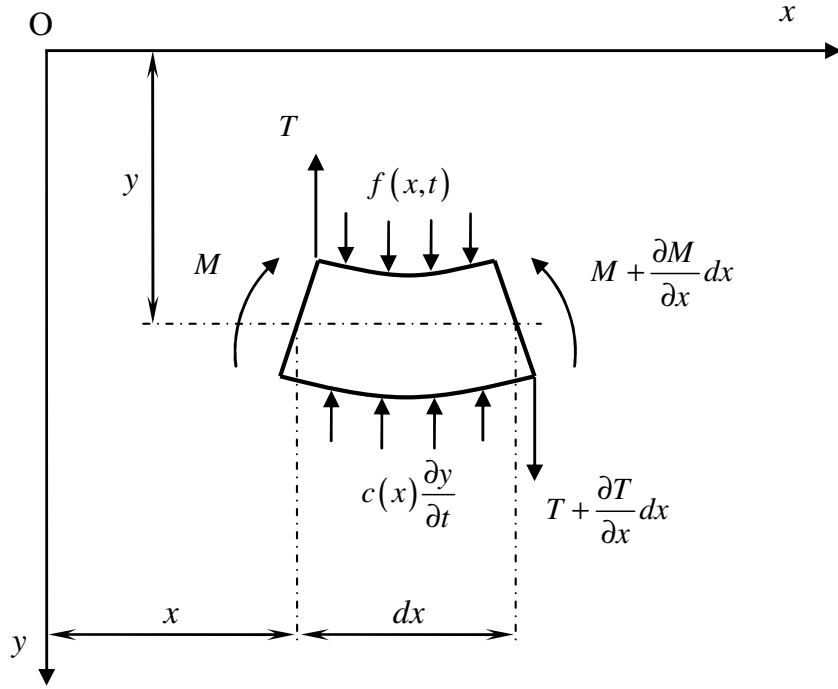
Şekil 2.1.2 de gösterilen sistemde  $y(x,t)$  kirişin eksene dik doğrultudaki yer değiştirmesini,  $f(x,t)$  kirişin üzerine etkiyen dış tesirleri ifade etmektedir. Şekil 2.1.3 de kiriş üzerinde  $dx$  uzunluğundaki bir diferansiyel elemanın serbest cisim diyagramı gösterilmektedir. Burada,  $EI(x)$  kirişin rijitliğini,  $m(x)$  birim uzunluğunun kütesini ve  $c(x)$  kirişin kendi sönümünü ifade etmektedir.



Şekil 2.1.2. Kirişin eksene dik hareketi

Burada, Euler – Bernoulli kiriş teorisi olarak isimlendirilen birincil kiriş teorisi kullanılacaktır. Bu teoriye göre yer değiştirmelerin çok büyük olmadığı, diferansiyel elemanın dönmeden ötelendiği kabul edilir. Böylece kirişin dönme etkileri ve yatay yer değiştirmeler ihmal edilebilir. Buna göre Şekil 2.1.3 de gösterilen diferansiyel eleman için düşey eksendeki hareket denklemi

$$+\downarrow \sum F_y = m(x)dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.1.11)$$



Şekil 2.1.3. Kiriş elemanın serbest cisim diyagramı

şeklindedir. Kuvvetler yerlerine yazılarak ifade düzenlenirse,

$$T(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dx - T(x,t) - c(x) \frac{\partial y}{\partial t} dx + f(x,t) dx = m(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.1.12)$$

kiriş eksenine dik doğrultudaki hareket denklemi

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - c(x) \frac{\partial y}{\partial t} + f(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L \quad (2.1.13)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $(x, y)$  noktasından geçen eksen etrafındaki moment denklemi de

$$\sum M_{x,y} = 0 \quad (2.1.14)$$

$$M(x,t) - \left[ M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] + \left[ T(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dx \right] dx - \left[ c(x) \frac{\partial y}{\partial t} dx \right] \frac{dx}{2} + (f(x,t) dx) \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.1.15)$$

ifadesine eşittir. (2.1.15) ile verilen moment denkleminde ikincil terimler ihmal edilerek moment ve kesme kuvveti arasındaki

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - T(x,t) = 0, \quad 0 < x < L \quad (2.1.16)$$

bağıntısına ulaşılır. (2.1.16) ile elde edilen moment denklemini  $x$  e göre türetilirse

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L \quad (2.1.17)$$

elde edilir. Burada  $\partial T(x,t)/\partial x$  ifadesi denklem (2.1.13) den çekilerek denklem (2.1.17) de yerine yazıldığında kirişin hareket denklemini aşağıdaki şekle dönüştür.

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial y}{\partial t} + f(x,t) = 0, \quad 0 < x < L \quad (2.1.18)$$

Euler – Bernoulli kiriş teoremi gereği eğilme momenti denklem (2.1.10) da verilmişti. Eğilme momenti denklem (2.1.18) de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial y}{\partial t} + f(x,t) = 0, \quad 0 < x < L \quad (2.1.19)$$

ve düzenlenirse aşağıdaki nihai şeklini alır.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial y}{\partial t} = f(x,t), \quad 0 < x < L \quad (2.1.20)$$

Burada, kirişin  $EI(x)$  rijitliği,  $c(x)$  sönüm oranı ve  $m(x)$  birim uzunluğunun kütlesi kiriş eksenini boyunca sabit ise; (2.1.20) ifadesi

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t), \quad 0 < x < L \quad (2.1.21)$$

şeklinde daha basit bir formda yazılabilir. Bu, Euler – Bernoulli kiriş teorisi olarak bilinir. Kirişi  $x$  eksenini doğrultusunda bir boyutlu cisim gibi düşünürsek,  $y(x,t)$  eğrisi kirişteki çökmeyi tanımlar. Yayılı yük yani basıncın bir ifadesi olarak belirtilen  $f(x,t)$  ise,  $x$ ,  $t$  ve diğer değişkenlerin bir fonksiyonudur.  $E$  elastiklik katsayısıdır.  $I$  ise kirişin  $z$  eksenini etrafında eğilmeye zorlanan kirişin alan atalet momentidir.  $EI$  çarpımı ise kirişin eğilmeye olan direncinin ifadesidir. Bu kiriş kabulüne göre kiriş, bir boyutlu cisim olarak tanımlıdır. Kiriş düzgün olmalı ve yayılı yükler düzlem içinde bulunmalı ve burulma olmamalıdır. Bu tez çalışması dahilinde yapılacak tüm hesaplamalarda hareket denkleminin bu formu kullanılacak ve bazı durumlarda kirişin kendi sönümü ihmal edilecektir.

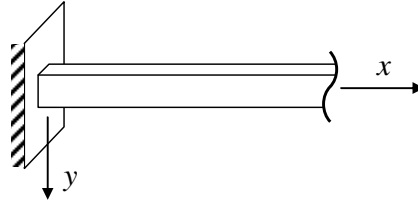
Kirişin hareket denkleminin çözümünde esas zorluk, sınır şartlarına uygun bir çözüm bulmaktır. Zira pek çok durumda (2.1.21) diferansiyel denklemi için çözüm bulmak oldukça kolaydır. Ancak asıl cevaplanması gereken soru bu çözümlerden hangisinin sınır şartlarının uygun olduğudur. Bu zorluk verilen ve keyfi şekilde yayılı bulunan kiriş sınırlarındaki bu kuvvetler Fourier açılımına tabi tutularak dairesel periyodik fonksiyonların toplamıyla ifade edilerek aşılabilir. Bu konu üzerinde detaylı bilgi ilerleyen bölümlerde verilecektir.

### 2.1.4. Sınır şartları

Euler – Bernoulli kiriş denklemin dördüncü mertebeden bir diferansiyel denklemdir ve integrasyonunda dört adet sabite rastlanır. Bu sabitler kirişin bağlantı şartları kullanılarak tespit edilir. Kirişin her bir ucu için iki adet sınır şartı mevcuttur. Geometrik yada dinamik karakterli sınır şartları olmak üzere iki tür sınır şartından söz edilebilir. Geometrik sınır şartları kiriş denkleminin  $x$  'e göre türev alınarak hesaplanır ve en fazla dört adet geometrik şart mevcuttur. Dinamik şartlar genellikle model destekleri yani onların noktaya etki eden yükleri, momentler ve diğer etkilerden oluşur. Başlıca sınır şartları şu şekilde sıralanabilir;

#### 2.1.4.1. Sabit destek

Geçme bağlantı ve ankastre mesnet olarak ta isimlendirilen bu bağlantı türünde çökme ve dönmeye karşı olan serbestlikler tamamen engellenmiştir (Şekil 2.1.4).



**Şekil 2.1.4.** Sabit destek (Ankastre mafsals).

Hiçbir harekete izin verilmeyen bu bağlantıda şartlar,

$$y|_{x=0} = 0,$$

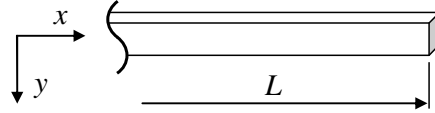
$$\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0$$

(2.1.22)

şeklinde tanımlanır. Bu şartların her ikisi de geometrik karakterdedir.

### 2.1.4.2. Serbest uç

Kirişin serbest ucunda hareketi kısıtlayan herhangi bir etki söz konusu olmadığından uç şartları geometrik karakterde değildir. Uç kesite etkiyen kuvvet yada momentin verilen belirli bir değere eşit olması serbest uç için sınır şartıdır. Kuvvet ile ilgili olan bu şartlar dinamik şartlar olarak isimlendirilir.



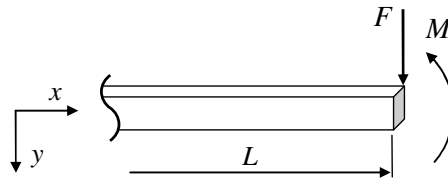
Şekil 2.1.5. Serbest uç.

Serbest uca etkiyen herhangi bir kuvvet yada moment söz konusu değil ise (Şekil 2.1.5) sınır şartları kesme kuvveti ve moment ifadeleri yardımı ile

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad (2.1.23)$$

$$\left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0$$

şeklinde ifade edilir. Eğer serbest uca etkiyen  $F$  kuvveti ve  $M$  momentini söz konusu ise (Şekil 2.1.6) bu durumda şartlar



Şekil 2.1.6.  $F$  kuvveti ve  $M$  momentinin tesiri altındaki serbest uç.

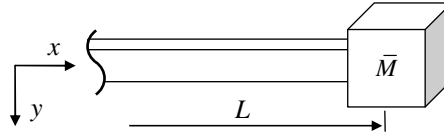


$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = M,$$

(2.1.24)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = F$$

ile verilir.



**Şekil 2.1.7.**  $\bar{M}$  kütlesi taşıyan serbest uç.

Serbest uç  $\bar{M}$  kütlesi taşıyorsa (Şekil 2.1.7), kütle taşıyan uçta kesme kuvveti kütlelerin ataletine eşittir. Buna karşılık uçta dönme hareketine karşı herhangi bir direnç söz konusu değildir.

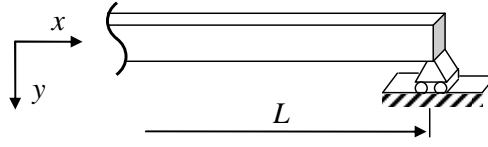
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0,$$

(2.1.25)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = -\bar{M} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=L}$$

### 2.1.4.3. Basit mesnet

Pim bağlantısı olarak ta bilinen, çökmenin engellendiği ancak dönmeye izin veren bağlantı türüdür (Şekil 2.1.8). Şu halde basit mesnette yer değiştirme ve moment sıfırdır. Biri geometrik diğeri dinamik karakterli olan bu şartlar



**Şekil 2.1.8.** Basit mafsalsal ( Pim bağlantısı ).

$$y|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0$$

(2.1.26)

şeklinde ifade edilir.

Bu bağ şekillerinin yanı sıra, çökmeye veya dönmeye karşı elastik özellik gösteren mesnetler için de uç şartları tarif edilebilir. Mesnetler ideal katı olmadığından gerçekte tüm bağlantılar için bu durum geçerlidir. Yani bağlantı uçlarında çökmeler, dönme açıları ile orantılı tepkiler doğmaktadır. Bu tepkiler de daima mesnet hareketine zıt yöndedir.

#### 2.1.4.4. Elastik çöken basit mesnet

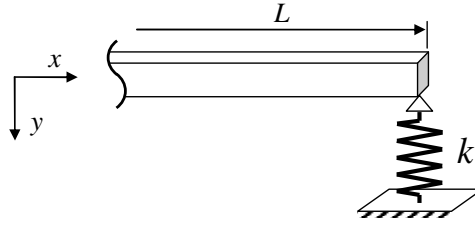
Basit mesnette dönme hareketine izin verdiği için direnç momenti sıfırdır. Ancak mafsalsalın elastik özelliği, harekete zorlandığı doğrultuda ve harekete zıt yönde, çökmelerle orantılı bir tepki kuvvetinin oluşumuna neden olur. Buradaki şartlar;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0,$$

(2.1.27)

$$\mp \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = ky|_{x=0}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki  $k$  sabiti, yayın sertliğini ifade eder (N/m) ve yay katsayısı olarak isimlendirilir (Şekil 2.1.9).



Şekil 2.1.9. Elastik çöken basit mesnet.

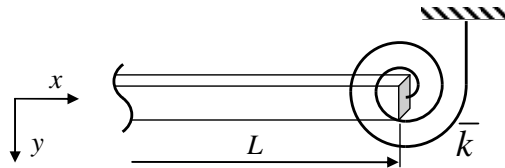
#### 2.1.4.5. Elastik dönen basit mesnet

Burada çökmeye karşı bir direnç söz konusu değildir. Ancak uç dönme açıları ile orantılı bir momentin tesiri altındadır. Şu halde uç noktasındaki şartlar,

$$-EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = \bar{k} \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=L}, \quad (2.1.28)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = 0$$

ile verilir. Buradaki  $\bar{k}$  sabiti, dönme yayının sertliğini ifade eder (Nm). Şekil 2.1.10 da gösterilen sağ uç için negatif olan işaret, sol uç için pozitifdir.



Şekil 2.1.10. Elastik dönen basit mesnet.

### 2.1.4.6. Viskoz sönümlü çöken mesnet

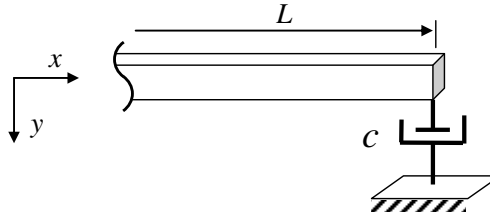
Genelde ihmal edilen ancak tüm bağlantı hallerinde var olan bir diğer etki de viskoz sürtünme etkileridir. Mafsallardaki bu sürtünme etkileri de sınır şartlarında ifade edilebilirler. Örneğin kiriş ucunun bağlı bulunduğu destek elemanının ideal katı olmaması, viskoz sönüm kuvvetleri ile veya pim bağlantılarındaki sürtünmeler de direnç momentleri ile ifade edilebilir. Bu kuvvet ve momentler, çökme ve dönmelerin hızları ile orantılıdır. Şekil 2.1.11 deki gibi serbest uçundan doğrusal bir damper ile bağlı bir kirişin sınır şartları,

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0,$$

(2.1.29)

$$-\left. \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = c \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x=L}$$

ile verilir. Burada  $c$  sabiti, damper elemanın viskoz sönüm katsayısını ifade etmektedir.



Şekil 2.1.11. Viskoz sönümlü çöken basit mesnet.

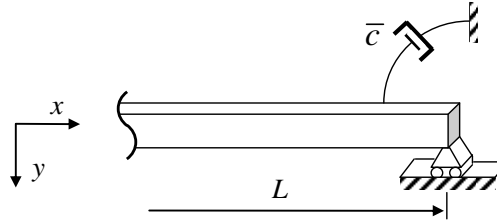
### 2.1.4.7. Viskoz sönümlü dönen basit mesnet

Şekil 2.1.12 de gösterilen sürtünmeli bir pim bağlantısı için de denklem (2.1.29) a benzer bir ifade yazılabilir. Her iki uç için sınır şartları

$$y|_{x=L} = 0,$$

$$\pm EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = \bar{c} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{x=L} \quad (2.1.30)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\bar{c}$  açısal sönüm katsayısı mafsallardaki viskoz sönüm etkisini ifade etmektedir



**Şekil 2.1.12.** Viskoz sönümlü dönen basit mesnet.

Sınır şartları modeldeki yüklerin belirlenmesinde ve özellikle titreşim analizlerinde kullanılır.

## 2.1.5. Yardımcı fonksiyonlar

### 2.1.5.1. Dirac delta fonksiyonu ve uygulamaları

M.P. Dirac tarafından tanımlanan Dirac delta fonksiyonu tek boyutta

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \quad (2.1.31)$$

şeklinde tanımlıdır. Dirac-Delta fonksiyonu basamak (Heaviside) fonksiyonunun türevidir.

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}[H(x)] \quad (2.1.32)$$

Delta fonksiyonunun bazı özellikleri (Chan ve ark., 2003):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (2.1.33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x) \quad (2.1.34)$$

$$\delta(u(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|u'(x_i)|} \quad (2.1.35)$$

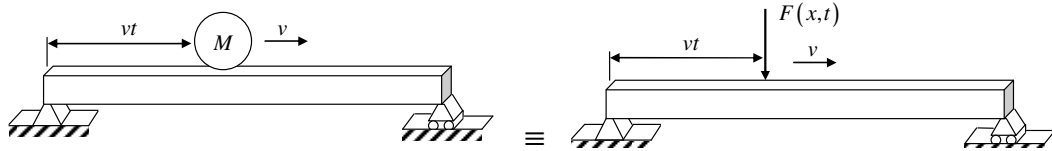
ile verilmektedir. Burada  $x_i$ ,  $u(x)$  fonksiyonunun kökleridir. İlerleyen bölümlerde, delta fonksiyonundan ve delta fonksiyonunun (2.1.33) ve (2.1.34) ile verilen özelliklerinden çokça yararlanılacaktır.

Hareketli kütlenin kiriş ile temas eden bölgesinin genişliği kirişin boyu yanında genellikle ihmal edilebilecek kadar küçüktür. Şekil 2.1.13 de gösterildiği üzere eşdeğerlik ilkesine dayanarak hareketli kütle ile kiriş arasındaki tepki, Dirac delta fonksiyonu yardımı ile tekil bir kuvvet olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} = \delta(x - vt) F(x, t) \quad (2.1.36)$$

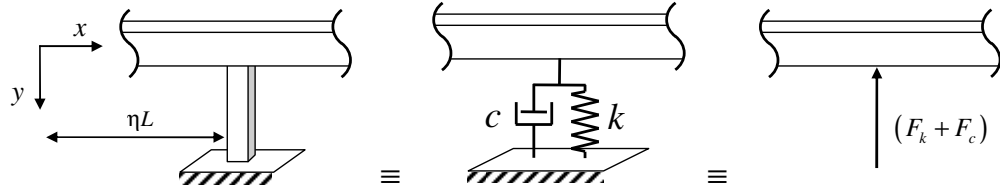
Burada  $F(x, t)$  tepki kuvveti üç farklı şekilde ifade edilebilmektedir.

- Hareketli kütle, şiddeti sabit ve cismin ağırlığına eşit hareketli bir kuvvet olarak ele alınmaktadır.  $[F(x, t) = Mg]$
- Hareketli kütlenin ağırlığının yanında ataleti de dikkate alınmaktadır.  $[F(x, t) = M(g - \ddot{y})]$
- Hareketli kütlenin ağırlığı ve ataleti en genel halde (merkezcil ve Coriolis etkileri de dahil olacak şekilde) hareket denkleminde ifade edilmektedir.  $[F(x, t) = M(g - a_M)]$



**Şekil 2.1.13.** Hareketli kütlenin etkisi altındaki kiriş

Köprü ayaklarındaki yada kirişlerin dayanımını artırmak için kullanılan dikey kolonlardaki tepki kuvvetleri kolonun mekanik özelliklerine göre yay ve sönüm kuvvetleri yada bu ikisinin toplamı olarak ifade edilebilirler (Şekil 2.1.14). Bu kuvvetler de yine delta fonksiyonu yardımıyla hareket denklemlerinde, şiddeti bilinmeyen ancak etki noktası bilinen birer tekil kuvvet olarak gösterilebilirler (Denklem 2.1.37).



Şekil 2.1.14. Köprü ayaklarındaki tepki kuvvetleri.

$$[F_k = ky(x, t), \quad F_c = c\dot{y}(x, t)]$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} = \delta(x - \eta L) [F_k + F_c] \quad (2.1.37)$$

Dirac-Delta fonksiyonunun kullanımı kirişin hareketini idare eden diferansiyel denklemleri oldukça basite indirger. Aksi taktirde kirişe etkiyen her bir tekil yük, kirişi farklı sınır şartına sahip olan bölümlere ayrılacaktır. Oysaki delta fonksiyonu ile çözüm bölgesi parçalara ayrılmadan pek çok problem rahatlıkla çözülebilmektedir.

### 2.1.5.2. Konvolüsyon integrali

Duhamel integrali olarak ta bilinen konvolüsyon integrali, tek serbestlik dereceli sistemin farklı yüklere karşı cevabını bulmada ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan oldukça etkili bir yöntemdir. Bu yöntemle diferansiyel denklemin çözümü integral hesabına indirgenerek elde edilebilmektedir.

Tek serbestlik dereceli bir kütle-damper-yay sistemi için hareket denklemi

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) \quad (2.1.38)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $y$  zamana bağlı olarak kütleinin yer değiştirmesini ifade etmektedir. Kütle ( $m$ ), rijitlik ( $k$ ) ve sönüm oranı ( $c$ ) sistemin belirleyici parametrelerini oluşturmaktadır. Tek serbestlik dereceli sistemler için aşağıdaki tarifler yapılabilir.



$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \quad (2.1.39)$$

Burada  $\omega_n$  ve  $\xi$  değerleri sırasıyla sistemin serbest titreşim frekansı ve sistemin sönüm oranıdır. Genellikle sönüm oranı  $0.01 \leq \xi \leq 0.1$  arasında değer almaktadır. Kritik altı sönüm durumunda sistemin serbest titreşim denkleminin cevabı aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir.

$$y(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[ y(0) \cos(\omega_d t) + \frac{y(0) + \xi\omega_n \dot{y}(0)}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad (2.1.40)$$

$y(0)$  ve  $\dot{y}(0)$  sistemin  $t = 0$  anındaki deplasman ve hız durumunu göstermektedir.  $\omega_d$  ve  $\omega_n$  arasında aşağıdaki bağıntı kurulabilir.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.1.41)$$

Duhamel integralinin sayısal analizi yapılarak değişik yüklere karşı, (2.1.38) denkleminin çözümü bulunur.  $f(t)$ , belirli  $t$  anında ve  $dt$  zaman aralığında sisteme etkiyen bir kuvvet olarak ele alınır,  $f(t)dt$  fiziksel açıdan bir “şok yük” olarak tanımlanır. Eğer sisteme etkiyen yük, zaman sürecinde sisteme ardı ardına etkiyen şok yüklerin toplamı olarak düşünülürse, lineer sistemin yüke karşı cevabı, sistemin darbe yüklere karşı koyduğu cevapların toplamından ibaret olacaktır. İdeal bir darbe yükün tanımı için Dirac – delta fonksiyonu kullanılır.  $\tau$  anında sisteme etkiyen şok yükün matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{cases} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\tau}^{\tau+\delta} f(t) dt = 1, & t = \tau \\ f(t) = 0, & t \neq \tau \end{cases} \quad (2.1.42)$$

Newton ‘un ikinci kanunu göz önünde bulundurularak

$$F(t) = ma \quad (2.1.43)$$

yazılabilir. Limit alınarak

$$F(t) = m \frac{d\dot{x}}{dt} \quad (2.1.44)$$

$$m\dot{x} - 0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} F(t) dt = 1 \quad (2.1.45)$$

bulunur. Bir sisteme, şok yükün uygulanması, o sisteme bir başlangıç hızının uygulanması demektir. Sistemin ideal bir şok yüke karşı cevabı  $y(0) = 0$  ve  $\dot{y}(0) = \frac{1}{m}$  varsayımları ile

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t) \quad (2.1.46)$$

bulunur. (2.1.46) bağıntısı sistemin, şok cevap fonksiyonu olarak tanımlanır. Şok yükün  $t = 0$  yerine,  $t = \tau$  anında uygulanması durumunda  $t$  yerine  $\tau - t$  değişken dönüşümü yapılarak sistemin tepkisi  $\tau$  kadar geciktirilir.

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_n(t - \tau)] \quad (2.1.47)$$

Yukarıdaki denklemi kullanarak, sayısız şok yüklere karşı sistemin genel cevabı elde edilir. Böylece Duhamel integralinin formülasyonu şu hale gelir.

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.1.48)$$

**Konvolüsyon Teoremi** : Genel olarak iki fonksiyonun çarpımının Laplace dönüşümü, fonksiyonların Laplace dönüşümlerinin çarpımına eşit olmamaktadır.

Bununla beraber  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının konvolüsyonu adını alan ve  $f * g$  ile gösterilen özel bir çarpım mevcuttur. Bu hakikat konvolüsyon teoremi olarak bilinir.

**TANIM : ‘ Konvolüsyon ’**

$f$  ve  $g$  parçalı sürekli fonksiyonlar olmak üzere  $f$  ve  $g$  nin  $(f * g)$  ile gösterilen konvolüsyonu

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (2.1.49)$$

ile tanımlanır. Rahatlıkla  $(f * g)(t) = (g * f)(t)$  olduğu gösterilebilir.

**Konvolüsyon Teoremi:**  $f * g$  tanımlı olmak üzere

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g] = F(s)G(s) \quad (2.1.50)$$

dir.

**İspat :** Tanım gereği,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left( \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \right) \left( \int_0^{\infty} e^{-sv} g(v) dv \right) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u) g(v) dudv \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

dir.  $u$  yu sabit tutup  $t = u + v$  dönüşümü yaparsak, o takdirde  $dt = dv$  olur ve (2.1.51) ün integrali

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} f(u) g(t-u) dt du \quad (2.1.52)$$

verir. İntegrasyonun sırasını değiştirip

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt du = \int_0^{\infty} \int_0^t du dt \quad (2.1.53)$$

olduğuna dikkat ederek (2.1.52) teki integralin

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-st} f(u) g(t-u) du dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_0^t g(t-u) f(u) du \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} (g * f)(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt \\ &= \mathcal{L} [f * g] \end{aligned} \quad (2.1.54)$$

ye eşit olduğunu gururuz.

**Yardımcı Teorem :**  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ,  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$  ise, o takdirde

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = (f * g)(t) \quad (2.1.55)$$

dir (Pala 2006).

### 2.1.5.3. Fourier serileri

Kirişlerin hareketlerinin tespitinde esas zorluk, sınır şartlarına uygun bir çözüm bulmaktır. Zira hemen her durumda hareketi idare eden diferansiyel denklemleri sağlayan pek çok çözüm mevcuttur. Ancak asıl cevaplanması gereken soru bu çözümlerden hangisinin sınır şartlarına uygun olduğudur. Bu zorluk verilen ve keyfi şekilde yayılı bulunan kiriş sınırlarındaki bu kuvvetler Fourier açılımına tabi tutularak dairesel periyodik fonksiyonların toplamıyla ifade edilerek aşılabılır. Ardından elde edilen serinin her terimine tekabül eden kısmi yüklemeye ait çözümler bulunur. Sonuç olarak ta bu kısmi çözümler üst üste bindirilerek problemin asıl cevabı elde edilir. Fakat her zaman bütün sınır şartlarını tam olarak sağlamak mümkün olmaz. Bu gibi hallerde bazı sınır şartları yaklaşık olarak gerçekleştirilebilir.

Fourier tekniği olarak bilinen bu seri açılımı Joseph Fourier tarafından 1807 tarihinde yine kendisinin elde ettiği ısının katılardaki iletimi ile ilgili bir eşitliği çözmeye çalışırken bulunmuştur. Fourier bu çalışmasında periyodik bir  $f(t)$  fonksiyonunu trigonometrik fonksiyonların toplamı şeklinde ifade etmiştir. Buna göre Fourier serisine açılım şartlarını sağlayan her periyodik fonksiyon sonsuz farklı frekanstaki trigonometrik fonksiyonların (sin, cos) bir lineer birleşimi olarak yazılabilir.

Fourier serisi, sabitlerle çarpılmış sin ve cos lü terimlerin toplamından oluşan bir seridir. Sınır değer problemi olarak tanımlanan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin bu seriler cinsinden çözümü uygulamalı matematiğin en önemli ve güçlü yöntemlerinden biridir. Bu yaklaşım ile sinüzoidal olmayan periyodik sinyaller kompleks üslü sayıların toplamı olarak yazılabilir.

### Periyodiklik ve dik fonksiyonlar

**Periyodiklik:** Periyodik fonksiyon, devirli fonksiyon olarak da bilinir.  $f: A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun.  $\forall x \in A$  için  $f(x) = f(x+T)$  eşitliğini sağlayan bir  $T$  gerçektek sayı varsa,  $f$  fonksiyonuna periyodik fonksiyon,  $T$  gerçektek sayısına da  $f$  fonksiyonunun bir periyodu denir.  $T$  gerçektek sayısının en küçüğüne ise temel periyot denir. Matematikte en

sık karşılaşılan periyodik fonksiyonlar temel periyodu  $2\pi$  olan  $\sin x$  ve  $\cos x$  fonksiyonlarıdır. Mesela

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad (2.1.56)$$

olduğundan,  $\sin x$  fonksiyonu  $T = 2\pi$  temel periyotludur. (2.1.56) eşitliğini arka arkaya kullanarak

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \dots = f(x + nT) \quad (2.1.57)$$

yazabiliriz. Şu halde  $n > 0$  olmak üzere  $nT$  lerin her biri de bir periyot olmaktadır. Mesela  $\sin x$  fonksiyonu halinde  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  ların hepsi  $\sin x$  in periyotlarıdır. Herhangi bir periyodik fonksiyon sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden sonsuz serilere açılabilir.

**Dik Fonksiyon Cümleleri :**  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$  ;  $[a, b]$  aralığında sürekli iki fonksiyon olsunlar. Bu iki fonksiyonun dikliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım :**  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$ ,  $[a, b]$  aralığında diktir ( ortogonaldır ) denir, şayet

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0 \quad (2.1.58)$$

ise.

**Tanım :**  $f_2$  in  $\|f_1\|$  ile gösterilen normu ( şiddeti )

$$\|f_1\| = \left( \int_a^b f_1^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (2.1.59)$$

ile tanımlanır.

**Tanım :** Sonsuz adet  $f_1(x), f_2(x), \dots$  sürekli fonksiyonlar cümlesi  $[a, b]$  aralığında diktirler denir, şayet  $n \neq m$  olmak üzere  $f_n(x)$  ve  $f_m(x)$  aralarında dik iseler. Ayrıca cümle ortonormaldir denir, şayet diklik şartı sağlanıyor ve  $n=1,2,3,\dots$  için  $\|f_n\|=1$  ise.

Kirişin öz fonksiyonları da dik fonksiyonlardır ve dik fonksiyonlar için verilen bu özellikleri sağlarlar. Kirişlerin öz fonksiyonlarının hesabında dik fonksiyonların bu özelliklerinden faydalanılmaktadır.

### Bir fonksiyonun Fourier açılımı

$f(x)$  fonksiyonu  $0 \leq x \leq L$  aralığında tanımlanmış ve  $\int_0^L f(x) dx$  mevcut olsun.

İddiamız  $f(x)$  üzerinde bazı şartların sağlanması halinde fonksiyonun

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \quad (2.1.60)$$

şeklinde bir seriye açılabilir. Burada  $a_n, b_n$  sabitlerine Fourier katsayıları (2.1.60) serisine de  $0 \leq x \leq L$  aralığındaki Fourier serisi adı verilir. Şayet  $f(x)$  fonksiyonu açılımı yapılacak fonksiyon ise, katsayıları aşağıdaki integrallerle hesaplanır (Pala 2006).

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned} \right\} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (2.1.61)$$

ve  $n=0$  için:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx \quad (2.1.62)$$

den ibarettir.  $(1/2)a_0$  sabiti,  $f(x)$  fonksiyonunun  $0 - L$  aralığındaki ortalama değerini göstermektedir.

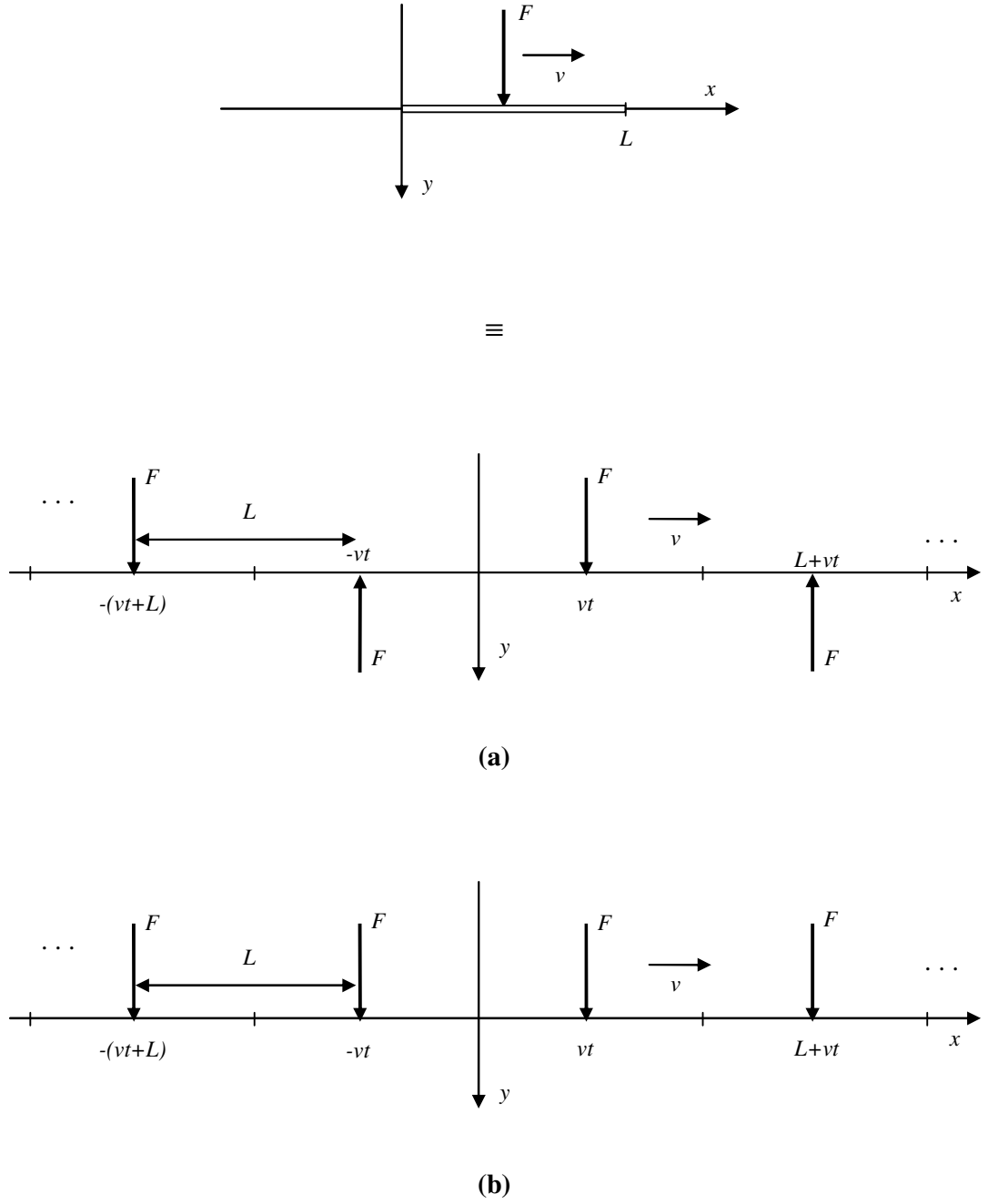
Bir fonksiyonun Fourier serisine açılabilmesi için tek değerli ve parçalı sürekli olması aranan en önemli şartlardır. Parçalı sürekli bir eğri, sonlu sayıdaki sıçrama noktaları hariç sürekli olan, türevlerin mevcut olmayabileceği, ancak tek taraflı limitlerin mevcut ve sonlu olması gerektiği noktalar haricinde sürekli türevlere sahip bir fonksiyondur. Bu halde  $\bar{f}(x)$  ile gösterilen (2.1.64) serisi yakınsak olur ve sürekli noktalarda  $f(x)$  fonksiyonuna eşit değerler verir. Sıçrama noktalarının bulunduğu yerlerde ise, serinin gösterdiği değer, sağ ve sol limitin arasındaki ortalama bir değerden ibarettir.  $L$  periyot uzunluğudur ve daima kiriş uzunluğuna eşit alınması gerekmez, onun katları da alınabilir (Pala 2006).

### 2.1.6. Kirişe etkiyen kuvvetlerin Fourier açılımları

Hareketli yüklerin Dirac – delta fonksiyonu kullanılarak şiddeti bilinmeyen birer hareketli kuvvetle gösterilebileceği ve bu yolla kirişin hareket denkleminde ifade edilebileceği belirtilmişti. Ancak Dirac – delta fonksiyonunun bu hali ile kirişin hareket denkleminin çözümü oldukça zordur. Bu zorluk kirişe etkiyen bu tekil kuvvetler Fourier açılımına tabi tutularak, dairesel periyodik fonksiyonların toplamıyla ifade edilerek aşılabilir. Kirişin  $L$  uzunluğundaki sınırına etkiyen bu yükleri periyodik hale sokabilmek için, bu yükleri Şekil 2.1.15 te gösterildiği gibi bölgesinin dışına devam ettirmek gerekir. Bu devam işi çeşitli tarzlarda yapılır ve her defasında,  $F(x,t)$  fonksiyonları muhtelif tipte Fourier serileri ile temsil edilir.

İlk olarak hareketli kütle ile kiriş arasındaki tepki kuvvetinin Fourier sin ve Fourier cos açılımları aşağıdaki şekilde hesap edilecek, ardından köprü ayaklarındaki yay ve sönüm kuvvetleri yine Fourier sin ve Fourier cos dönüşümüne tabi tutulacaktır.





**Şekil 2.1.15.** Kirişe etkileyen muhtelif periyodik yük fonksiyonları

- a.** Fourier sin açılımı (Tek fonksiyon)
- b.** Fourier cos açılımı (Çift fonksiyon)

Hareketli kütle ile kiriş arasındaki tepki kuvveti

$$F_M(x, t) = \begin{cases} Mg, & x = vt \\ 0, & x \neq vt \end{cases} \quad (2.1.63)$$

ile gösterilir. Dirac – delta fonksiyonu yardımı ile bu kuvvet aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$F_M(x, t) = Mg\delta(x - vt) \quad (2.1.64)$$

Şu halde,  $F_M(x, t)$  fonksiyonunun Fourier sin açılımı

$$F_M(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.1.65)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $a_n$  katsayısı (2.1.65) ile önerilen serinin her iki yanını  $\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$  ile çarpılıp verilen aralıkta integre edilerek hesap edilebilir.

$$\int_0^L F_M(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad (2.1.66)$$

Trigonometrik fonksiyonlar verilen aralıkta ortogonal (dik) olduklarından sağ taraftaki tüm integraller  $n = k$  haricinde sıfırdır. Yalnızca

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2}, \quad (n = k) \quad (2.1.67)$$

dir. Buradan

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.1.68)$$

elde edilir.  $F_M(x,t)$  (2.1.68) de yerine yazılır

$$a_n = \frac{2Mg}{L} \int_0^L \delta(x-vt) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.1.69)$$

ve delta fonksiyonunun (2.1.33) ile verilen özelliği hatırd tutulursa

$$a_n = \frac{2Mg}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}vt\right) \quad (2.1.70)$$

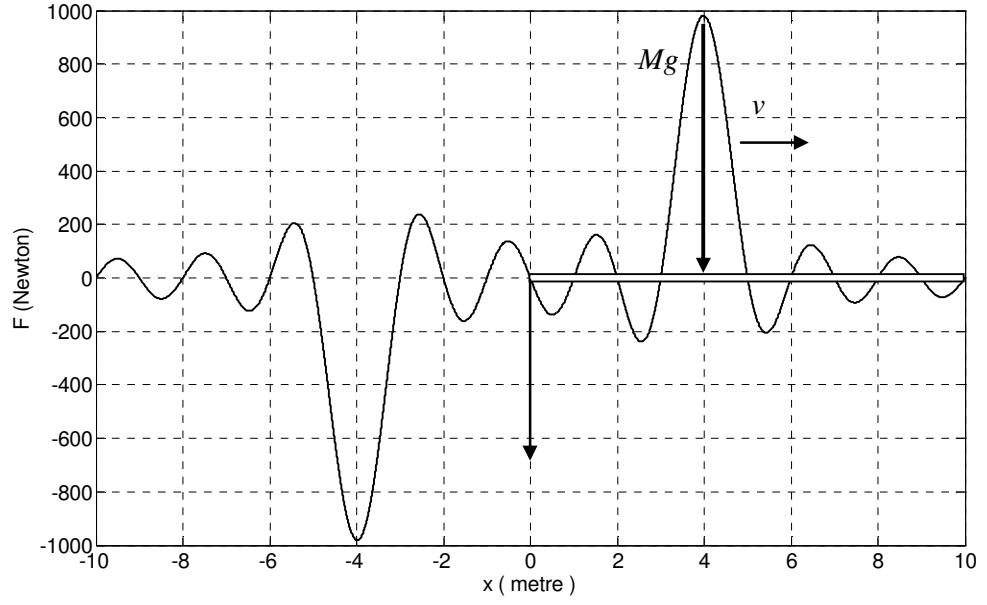
elde edilir. Şu halde, tekil  $F_M(x,t)$  kuvvetinin Fourier sin açılımı

$$F_M(x,t) = \frac{2Mg}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}vt\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.1.71)$$

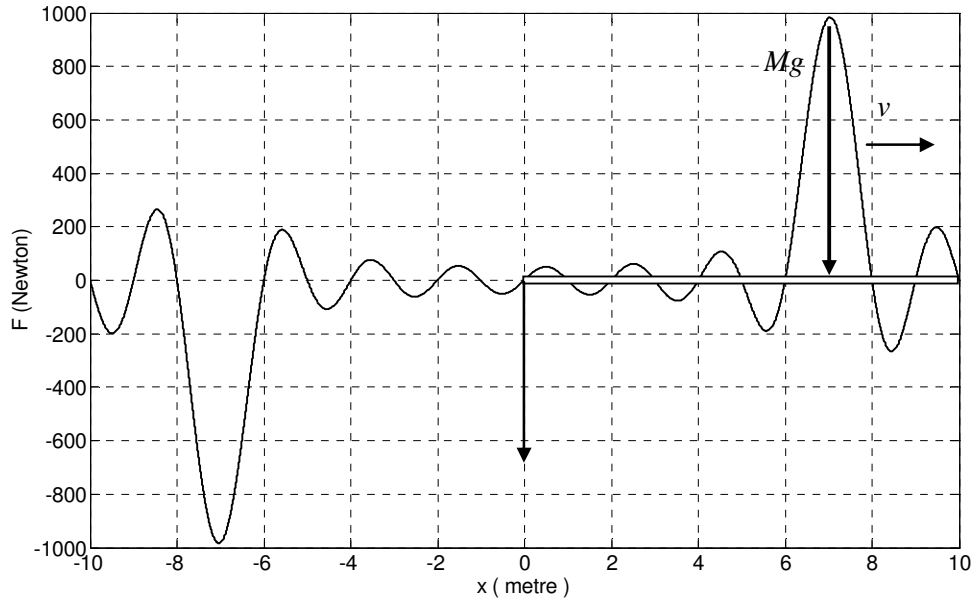
olarak bulunur (Şekil 2.1.16). Benzer işlemler neticesinde aynı kuvvetin Fourier cos açılımı da;

$$F_M(x,t) = \frac{2Mg}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{L}vt\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.1.72)$$

şeklinde hesap edilebilir (Şekil 2.1.17). Toplam sembol içerisindeki terim sayısı ( $n$ ) arttıkça tekil Fourier serisinin hassasiyeti artacak ve tekil kuvvetler daha doğru bir şekilde ifade edilecektir. Ancak terim sayısı ne kadar artsa da Fourier serisinin sıçrama noktası civarında verdiği değerler daima bir miktar hata içerir. Fourier serileri, süreksizlik noktalarında, fonksiyonun sağ ve sol değerlerinin ortalamasına yakınsar ve yakınsama sırasında aşırı salınımlar yapar. Bu olaya *Gibbs olayı* adı verilir. Gibbs olayı süreksizlik noktasında %15 civarında bir hataya sebep olabilir. Bu hatayı önlemek için salınımları bastıran özel yöntemler uygulamak gerekir.



(a)

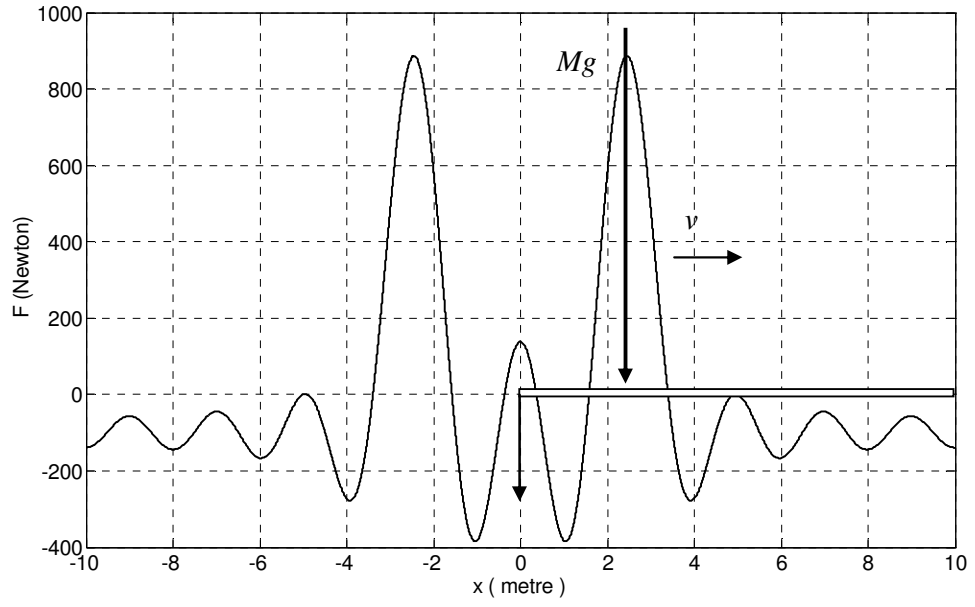


(b)

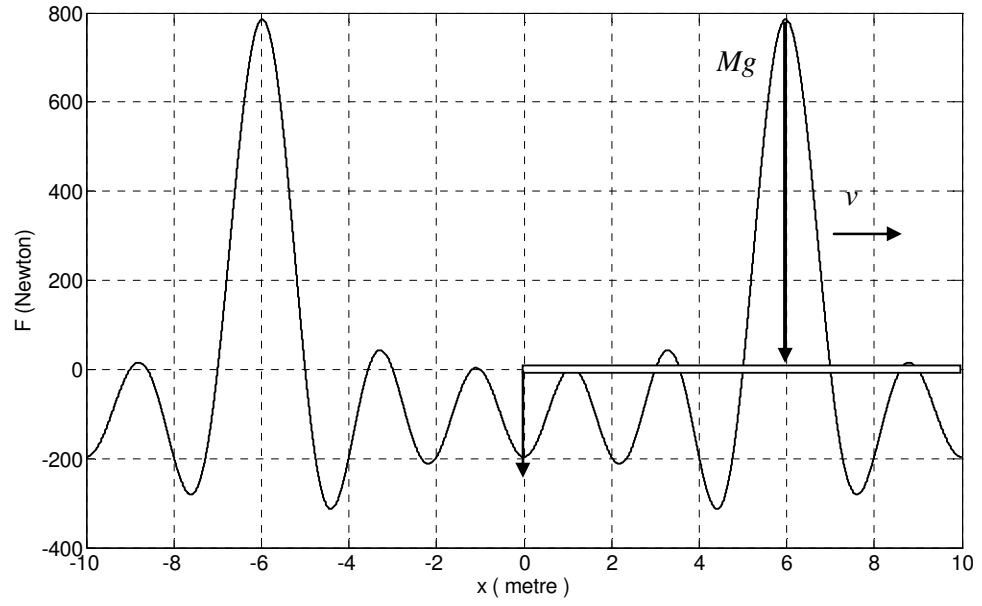
**Şekil 2.1.16.** Hareketli yükün Fourier sin açılımı,  $N = 4$  terim için  
 ( $L = 10$  m,  $M = 100$  kg,  $v = 10$  m/sn)

**a.**  $t = 0.4$  sn

**b.**  $t = 0.7$  sn



(a)



(b)

Şekil 2.1.17. Hareketli yükün Fourier cos açılımı, ( $L = 10m$ ,  $M = 100kg$ ,  $v = 10m/sn$ )

a.  $t = 0.25sn$

b.  $t = 0.6sn$

Kirişi desteklemek için kullanılan düşey kolonlardaki ve köprü ayaklarındaki tepki kuvvetleri de Fourier açılımına tabi tutulabilir. (2.1.37) de ayaklardaki bu kuvvetlerin yay ve sönüm kuvvetlerinin toplamı olarak ifade edilebileceği kabul edilmişti. O halde bu tekil kuvvetler için de yine (2.1.27) ve (2.1.29) dan

$$F_k(x,t) = \begin{cases} ky(x,t), & x = \eta L \\ 0, & x \neq \eta L \end{cases} \quad (2.1.73)$$

$$F_c(x,t) = \begin{cases} c\dot{y}(x,t), & x = \eta L \\ 0, & x \neq \eta L \end{cases} \quad (2.1.74)$$

yazılabilir. Dirac – delta fonksiyonu yardımıyla bu kuvvetler

$$F_k(x,t) = ky(x,t)\delta(x - \eta L) \quad (2.1.75)$$

$$F_c(x,t) = c\dot{y}(x,t)\delta(x - \eta L) \quad (2.1.76)$$

ile ifade edilerek, kiriş deplasmanının  $y(x,t) = q(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  şeklinde ayrık bir çözümünün olduğunu, nedeni daha sonra açıklanmak üzere şimdilik peşinen kabul edilsin.

Yay kuvvetinin Fourier sin açılımı

$$F_k(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.1.77)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,  $a_n$  katsayısı (2.1.77) ile önerilen serinin her iki yanı yine  $\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$  ile çarpılıp verilen aralıkta integre edilirse

$$a_n = \frac{2kq(t)}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}\eta L\right) \quad (2.1.78)$$

bulunur. Şu halde,  $F_k(x,t)$  fonksiyonunun Fourier sin açılımı

$$F_k(x,t) = \frac{2kq(t)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(n\pi\eta) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.1.79)$$

şeklinde elde edilir. Benzer işlemler neticesinde  $F_k(x)$  fonksiyonunun Fourier cos açılımı da, bu kez kiriş deplasmanının  $y(x,t) = q(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  şeklinde ayrık bir çözümünün olduğunu kabul edilerek ;

$$F_k(x,t) = \frac{2kq(t)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(n\pi\eta) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.1.80)$$

şeklinde hesap edilebilir.

Sönüm kuvveti  $F_c(x,t)$  nin Fourier sin ve Fourier cos açılımının da

$$F_c(x,t) = \frac{2c\dot{q}(t)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(n\pi\eta) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.1.81)$$

$$F_k(x,t) = \frac{2c\dot{q}(t)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(n\pi\eta) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.1.82)$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

## 2.2. Kirişlerin Serbest Titreşimleri

Bir cismin yada sistemin denge konumu etrafında yaptığı salınma hareketi titreşim olarak isimlendirilir. Serbest ve zoraki titreşim olmak üzere iki tür titreşimden bahsedilebilir. Genel olarak elastik bir tel, kiriş yada ağırlık kuvveti ve yay kuvveti etki eden bir sistem denge konumundan uzaklaştırıldığında serbest (doğal) titreşim yapar. Bir dış kuvvetin tesiri altında harekete zorlanan sistem ise, zoraki titreşim yapar.

Doğal yada zoraki titreşim yapan sistemlerde hareket, sonsuz süre devam eden (sönümsüz) hareket olabildiği gibi, zamanla yok olan (sönümlü) titreşim hareketi de olabilir. Genel halde her zaman mevcut olan sürtünme kuvvetleri ve sönümleyiciler, titreşen sistemin hareketinin zamanla yok olmasına sebep olurlar. Zoraki titreşim halinde bu iki etkiden dolayı olan kayıplar dış zorlama fonksiyonu tarafından karşılanamıyorsa, sistem sönümlü titreşim yapacaktır. Şayet bu kayıplar karşılanıyorsa, sistem sönümsüz titreşim hareketi yapacaktır. Genel olarak titreşim mekanik sistemlerde istenmeyen bir durum olduğundan titreşimin zamanla sönümlenmesi istenir. Kirişin titreşimini incelemeye başlamadan evvel aşağıdaki terimlerin anlamlarının bilinmesi gerekir;

***Frekans***, birim zaman içindeki salınım sayısıdır.

***Doğal frekans***, Kendi haline terk edilen ve her hangi bir dış tesire maruz olmayan bir sistemin frekansıdır.

***Periyot***, bir tam salınım için geçen süredir.

***Genlik***, titreşen sistemin yapacağı en büyük yer değiştirmedir.

***Sönüm***, hareket esnasında enerji kaybına neden olan malzeme özelliğidir. Sönüm oranı ise sistemdeki gerçek sönümün, kritik sönüme ulaşması için gereken sönüme oranıdır.



**Rezonans**, Periyodik bir kuvvetin etkisi altındaki bir sistem, salınımlar sergiler ve eğer kuvvetin frekansı sistemin doğal frekansına eşit ise, bu salınımların genliği artma eğilimine girer. Sonuç olarak sistem, belli bir genlikten sonra bütünlüğünü veya bulunduğu durumu koruyamaz ve dağılır veya bozunur. Buna rezonans denir

**Özdeğerler**, Serbest titreşen bir sistemin doğal frekanslarıdır.

Üç boyutlu bir cismin titreşimi genellikle  $(x, y, z)$  noktasının  $t$  anındaki yer değiştirme vektörü  $\mathbf{r}(x, y, z)$  ve dış kuvvet  $\mathbf{p}(x, y, z, t)$  arasındaki bir operatörle gösterilir.

$$L[\mathbf{r}(x, y, z, t)] = \mathbf{p}(x, y, z, t) \quad (2.2.1)$$

Burada,  $L$  lineer yada lineer olmayan diferansiyel operatördür. Başlangıç ve sınır şartları kullanılarak yukarıdaki denklem ki bu genellikle bir kısmi diferansiyel denklem ya da bir denklem takımındır, sistemin davranışını tanımlar.

Hareketli yük herhangi bir kuvvet değil de hareketli bir kütle olarak düşünüldüğünde mekanik sistem üzerine gelen etki iki farklı şekilde oluşmaktadır. İlki ağırlık etkisidir ki yer çekiminden dolayı ortaya çıkar, kütle ya da yerçekimi ivmesi değişmedikçe şiddeti sabittir. İkinci etki atalet etkisidir. Atalet etkisi hareketli kütlenin düşey doğrultudaki ivmesi ile birlikte değişir. Yalnızca ağırlık kuvveti göz önüne alındığında diferansiyel denklem çok daha basit işlemlerle çözülebilir. Pek çok defa atalet kuvvetleri, Coriolis ve merkezci ivme bileşenleri diferansiyel denklemi non-lineer yaptığından çözümü oldukça zorlaştırmakta ve pek çok defa diferansiyel denklemin analitik çözümü mümkün olmamaktadır.

Kirişlerin eksene dik doğrultudaki titreşim hareketinin diferansiyel denklemi, Euler – Bernoulli kiriş teoremi kullanılarak ifade edilmektedir. Kiriş serbest titreştiğinde denklem (2.1.36) ile verilen hareket denkleminde sağ taraf sifıra eşit olur.

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L \quad (2.2.2)$$

Hareket denkleminin çözümünün,

$$y(x,t) = \phi_n(x) q_n(t) \quad (2.2.3)$$

şeklinde ayrıştırılabildiği kabul edilir ve önerilen bu çözüm serbest titreşen kirişin hareket denkleminde (2.2.2) yerine yazılırsa

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} [\phi_n(x) q_n(t)] + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\phi_n(x) q_n(t)] = 0 \quad (2.2.4)$$

$$EI \phi_n^{IV}(x) q_n(t) + m \phi_n(x) \ddot{q}_n(t) = 0 \quad (2.2.5)$$

elde edilir. (2.2.5) eşitliğinin her iki yanını  $\phi_n(x) q_n(t)$  çarpımı ile bölünerek

$$EI \frac{\phi_n^{IV}(x) q_n(t)}{\phi_n(x) q_n(t)} + m \frac{\phi_n(x) \ddot{q}_n(t)}{\phi_n(x) q_n(t)} = 0 \quad (2.2.6)$$

$$EI \frac{\phi_n^{IV}(x)}{\phi_n(x)} = -m \frac{\ddot{q}_n(t)}{q_n(t)} \quad (2.2.7)$$

bulunur. (2.2.7) ifadesinde eşitliğin sol tarafının  $x$  in sağ tarafının ise  $t$  nin fonksiyonu olduğu görülmektedir. Bu ancak eşitliğin her iki tarafının da bir sabite eşit olması şartı ile sağlanır, aksi takdirde farklı iki fonksiyonun değişkenlerinin her değeri için birbirine eşit olması söz konusu değildir. Bu sabit değer

$$\frac{\phi_n^{IV}(x)}{\phi_n(x)} = -\frac{m}{EI} \frac{\ddot{q}_n(t)}{q_n(t)} = \lambda_n^4 \quad (2.2.8)$$

şeklinde ifade edilsin. Böylece kısmi diferansiyel denklem sadece konumun ve sadece zamanın fonksiyonu olan iki adi diferansiyel denklem takımına ayrıştırılabilir. Zaman ile ilgili olanı,

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = 0, \quad \omega_n^2 = \frac{\lambda_n^4 EI}{m} \quad (2.2.9)$$

çözümü verir. Karakteristik denklem

$$r^2 + \omega_n^2 = 0, \quad r_{1,2} = \pm \omega_n i \quad (2.2.10)$$

dir. Buradan çözüm

$$q_n(t) = \bar{A} \sin \omega_n t + \bar{B} \cos \omega_n t \quad (2.2.11)$$

olarak bulunur. Denklem (2.2.8) den konum ile ilgili olanı için

$$\phi_n^{IV}(x) - \lambda_n^4 \phi_n(x) = 0 \quad (2.2.12)$$

yazılabilir. Yine buradan karakteristik denklem

$$r^4 - \lambda_n^4 = 0, \quad r_{1,2} = \pm \lambda_n i, \quad r_{3,4} = \pm \lambda_n \quad (2.2.13)$$

şeklinde elde edilir. Böylece, (2.2.12) ifadesinin çözümü de

$$\phi_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x) + C_n \sinh(\lambda_n x) + D_n \cosh(\lambda_n x) \quad (2.2.14)$$

olarak bulunur. (2.2.14) ifadesinin sınır şartlarını sağlayan  $\lambda_n$  değerleri için çözümüne kirişin öz fonksiyonu, bu  $\lambda_n$  değerlerine de kirişin öz değerleri denir. Farklı sınır şartlarına sahip kiriler için öz değerler aşağıdaki gibi hesaplanır.

### 2.2.1. Basit mesnetli kirişin serbest titreşimi

Pim bağlantısı olarak ta bilinen basit mesnetli kirişin, her iki ucunda çökmeler engellenmiştir, ancak dönmelere karşı herhangi bir direnç söz konusu değildir (Şekil 2.2.1). (2.1.30) ifadesinde basit mesnetli bir kirişin her iki ucundaki sınır şartları



Şekil 2.2.1. Her iki ucu basit mesnetli kiriş.

$$x = 0, \quad y(0, t) = 0, \quad y''(0, t) = 0 \quad (2.2.15)$$

$$x = L, \quad y(L, t) = 0 \quad y''(L, t) = 0 \quad (2.2.16)$$

şeklinde tarif edilmiştir. Serbest titreşen bir kiriş için (2.2.3) de önerilen  $y(x, t)$  çözümü kullanılarak bu şartlar

$$\begin{aligned} y(0, t) = \phi_n(0)q_n(t) = 0, \quad \phi_n(0) = 0 \\ y''(0, t) = \phi_n''(0)q_n(t) = 0, \quad \phi_n''(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

$$\begin{aligned} y(L, t) = \phi_n(L)q_n(t) = 0, \quad \phi_n(L) = 0 \\ y''(L, t) = \phi_n''(L)q_n(t) = 0, \quad \phi_n''(L) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

olacak şekilde yeniden düzenlenebilir. (2.2.17) ile verilen sınır şartları ve (2.2.14) de bulunan olan  $\phi_n(x)$  çözümü kullanılarak;

$$\begin{aligned} \phi_n(0) = A_n \sin(\lambda_n 0) + B_n \cos(\lambda_n 0) + C_n \sinh(\lambda_n 0) + D_n \cosh(\lambda_n 0) = 0, \\ B_n + D_n = 0 \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

$$\begin{aligned}\phi_n''(0) &= \lambda_n^2 [-A_n \sin(\lambda_n 0) - B_n \cos(\lambda_n 0) + C_n \sinh(\lambda_n 0) + D_n \cosh(\lambda_n 0)] = 0, \\ &-B_n + D_n = 0\end{aligned}\quad (2.2.20)$$

yazılabilir. Buradan  $B_n = D_n = 0$  olduğu açıkça görülmektedir. Benzer şekilde (2.2.18) ile verilen şartlar ve (2.2.14) çözümü kullanılarak

$$\begin{aligned}\phi_n(L) &= A_n \sin(\lambda_n L) + B_n \cos(\lambda_n L) + C_n \sinh(\lambda_n L) + D_n \cosh(\lambda_n L) = 0 \\ \phi_n''(L) &= \lambda_n^2 [-A_n \sin(\lambda_n L) - B_n \cos(\lambda_n L) + C_n \sinh(\lambda_n L) + D_n \cosh(\lambda_n L)] = 0\end{aligned}\quad (2.2.21)$$

elde edilir. Burada,  $B_n = D_n = 0$  olduğu hatırlanarak

$$\begin{aligned}0 &= A_n \sin(\lambda_n L) + C_n \sinh(\lambda_n L) \\ 0 &= \lambda_n^2 [-A_n \sin(\lambda_n L) + C_n \sinh(\lambda_n L)]\end{aligned}\quad (2.2.22)$$

bulunur. Açıkça görülmektedir ki, (2.2.22) ifadeleri  $A_n = C_n = 0$  olduğunda sağlanır. Ancak, bu halde çözüm boş küme olur. Bunun yanında

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.23)$$

de (2.2.22) ifadelerinin bir çözümüdür ve bu  $\lambda_n$  değerlerine kirişin öz değerleri denir.

Sonuç olarak basit mesnetli bir kirişin öz fonksiyonları

$$\phi_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x) \quad (2.2.24)$$

şeklinde elde edilir. Bu çözüm  $A$  katsayısının tüm değerleri için serbest titreşen basit mesnetli kirişin hareket denklemini ve sınır şartlarını sağlamaktadır. Ancak, burada amacımız bu çözüm fonksiyonları içerisinde şiddeti (normu) bir olanı elde etmektir.

Zira kirişlerin zoraki titreşimi incelenirken özfonksiyonların şiddetinin bire eşit olması hesaplamalardaki karışıklığın önüne geçecektir. Şu halde, kirişin özfonksiyonları  $0-L$  aralığında, dik fonksiyonlar için verilen (2.1.59) ortonormalite şartını sağlamalıdır. Basit mesnetli kirişin (2.2.24) de verilen özfonksiyon kullanılarak

$$\|\phi_n(x)\| = \left( \int_0^L [A_n \sin(\lambda_n x)]^2 dx \right)^{1/2} = 1 \quad (2.2.25)$$

yazılabilir. (2.2.25) integrali alınarak

$$\left[ A_n^2 \left( \frac{L}{2} - \frac{\sin(2\lambda_n x)}{4} \right) - 0 \right]^{1/2} = 1 \quad (2.2.26)$$

elde edilir. Buradan açıkça görülmektedir ki sol tarafın bire eşit olmasının yegâne şartı

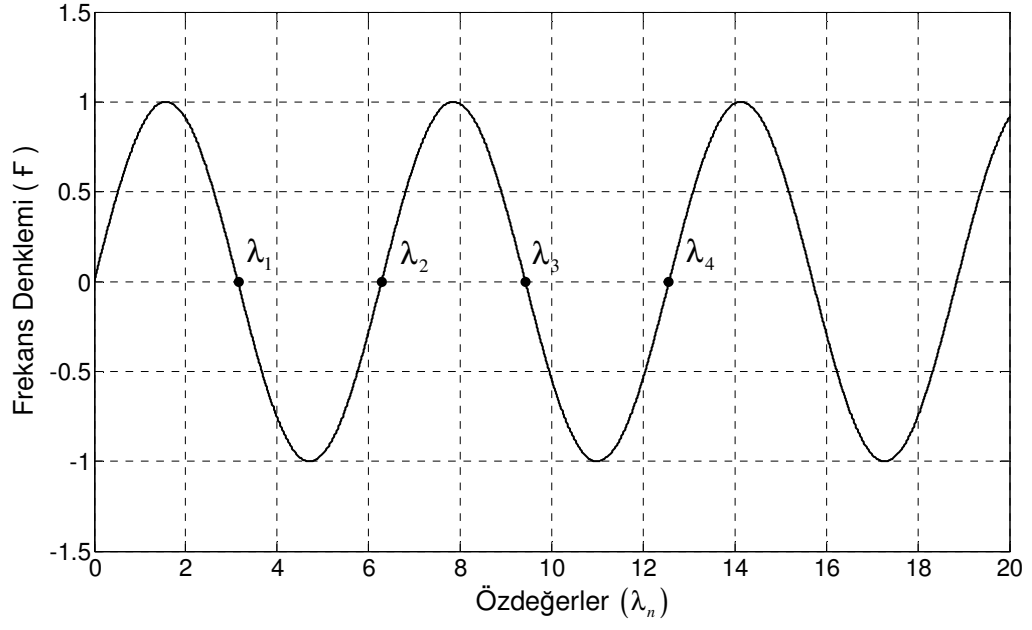
$$A_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (2.2.27)$$

olmasıdır. Böylece  $L$  uzunluğundaki basit mesnetli kirişin öz fonksiyonları

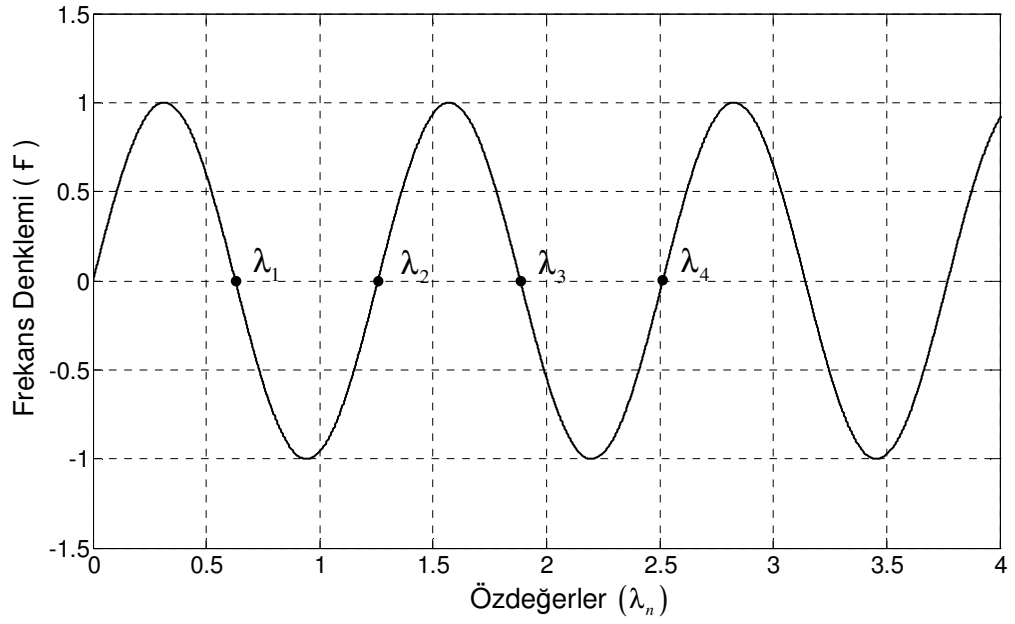
$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.28)$$

şeklinde elde edilir.

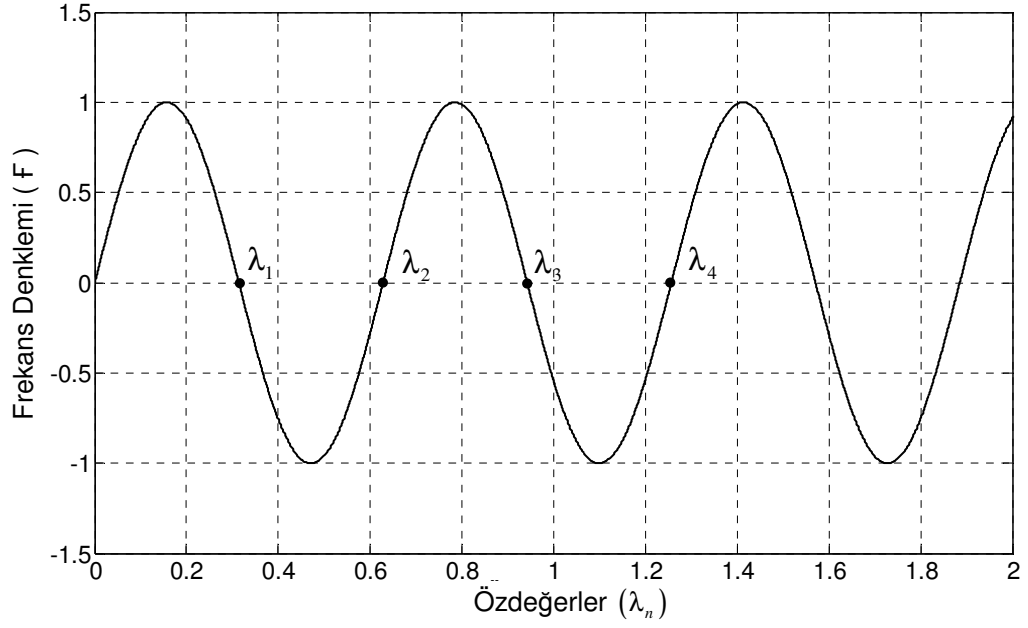
Farklı uzunluktaki kirişler için ilk dört özdeğer Sekil 2.2.2 de ve Çizelge 2.2.1 de gösterilmektedir. Ayrıca basit mesnetli kirişin özdeğerlerini ve özfonksiyon katsayılarını veren Matlab programları da Ek.1.1 de sunulmuştur.



(a)



(b)



(c)

**Şekil 2.2.2.** Her iki ucu basit mesnetli kirişin özdeğerleri.

a)  $L = 1$  m,      b)  $L = 5$  m,      c)  $L = 10$  m

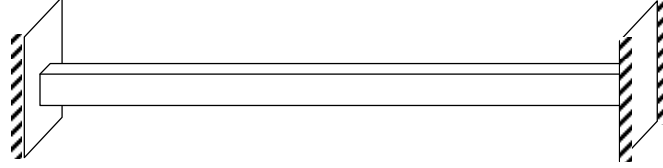
**Çizelge 2.2.1** Her iki ucu basit mesnetli kirişin özdeğerleri.

$L$ (m)	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
1	3.1416	6.2831	9.4247	12.5663
5	0.6283	1.2566	1.8849	2.5132
10	0.31416	0.62831	0.94247	1.2566
$\ell$	$\frac{\pi}{\ell}$	$\frac{2\pi}{\ell}$	$\frac{3\pi}{\ell}$	$\frac{4\pi}{\ell}$



### 2.2.2. Ankastre mesnetli kirişin serbest titreşimi

Ankastre mesnetli kirişte, kirişin her iki ucunda da çökmeler ve dönmeler tamamen engellenmiştir (Şekil 2.2.3). (2.1.26) ifadelerinde ankastre mesnetli bir kirişin her iki ucundaki sınır şartları



Şekil 2.2.3. Her iki ucu ankastre mesnetli kiriş.

$$x = 0, \quad y(0, t) = 0, \quad y'(0, t) = 0 \quad (2.2.29)$$

$$x = L, \quad y(L, t) = 0, \quad y'(L, t) = 0 \quad (2.2.30)$$

ile verilmişti. Serbest titreşen bir kiriş için (2.2.3) ile önerilen  $y(x, t)$  çözüm kullanılarak bu şartlar

$$\begin{aligned} y(0, t) = \phi_n(0)q_n(t) = 0, & \quad \phi_n(0) = 0 \\ y'(0, t) = \phi'_n(0)q_n(t) = 0, & \quad \phi'_n(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

$$\begin{aligned} y(L, t) = \phi_n(L)q_n(t) = 0, & \quad \phi_n(L) = 0 \\ y'(L, t) = \phi'_n(L)q_n(t) = 0, & \quad \phi'_n(L) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. (2.2.31) ile verilen bu sınır şartları ve (2.2.14) de verilmiş olan  $\phi_n(x)$  çözümü kullanılarak;

$$\begin{aligned}\phi_n(0) &= A_n \sin(\lambda_n 0) + B_n \cos(\lambda_n 0) + C_n \sinh(\lambda_n 0) + D_n \cosh(\lambda_n 0) = 0, \\ B_n + D_n &= 0\end{aligned}\quad (2.2.33)$$

$$\begin{aligned}\phi'_n(0) &= \lambda_n [A_n \cos(\lambda_n 0) - B_n \sin(\lambda_n 0) + C_n \cosh(\lambda_n 0) + D_n \sinh(\lambda_n 0)] = 0, \\ A_n + C_n &= 0\end{aligned}\quad (2.2.34)$$

yazılır. Buradan  $C_n = -A_n$  ve  $D_n = -B_n$  olduğu açıkça görülmektedir. Benzer şekilde (2.2.32) ile verilen şartlar ve  $\phi_n(x)$  çözümü kullanılarak

$$\begin{aligned}\phi_n(L) &= A_n \sin(\lambda_n L) + B_n \cos(\lambda_n L) + C_n \sinh(\lambda_n L) + D_n \cosh(\lambda_n L) = 0 \\ \phi'_n(L) &= \lambda_n [A_n \cos(\lambda_n L) - B_n \sin(\lambda_n L) + C_n \cosh(\lambda_n L) + D_n \sinh(\lambda_n L)] = 0\end{aligned}\quad (2.2.35)$$

bulunur. Burada  $C_n$  ve  $D_n$  nin,  $A_n$  ve  $B_n$  cinsinden ifadeleri (2.2.35) de yerine yazılır

$$\begin{aligned}A_n \sin(\lambda_n L) + B_n \cos(\lambda_n L) - A_n \sinh(\lambda_n L) - B_n \cosh(\lambda_n L) &= 0 \\ A_n \cos(\lambda_n L) - B_n \sin(\lambda_n L) - A_n \cosh(\lambda_n L) - B_n \sinh(\lambda_n L) &= 0\end{aligned}\quad (2.2.36)$$

ve düzenlenirse

$$A_n [\sin(\lambda_n L) - \sinh(\lambda_n L)] + B_n [\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L)] = 0 \quad (2.2.37)$$

$$A_n [\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L)] - B_n [\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L)] = 0 \quad (2.2.38)$$

$B$ ,  $C$  ve  $D$  katsayıların  $A$  cinsinden eşiti aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$B_n = \left[ \frac{(\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L))}{(\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L))} \right] A_n \quad (2.2.39)$$

$$C_n = -A_n \quad (2.2.40)$$

$$D_n = \left[ -\frac{(\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L))}{(\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L))} \right] A_n \quad (2.2.41)$$

Denklem (2.2.39) da verilen  $B$ , (2.2.37) de yerine yazılarak

$$A_n [\sin(\lambda_n L) - \sinh(\lambda_n L)] + A_n \frac{[\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L)]}{[\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L)]} [\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L)] = 0 \quad (2.2.42)$$

bulunur. Burada,  $A_n$  ler sadeleştirilerek ifade düzenlendiği takdirde ankastre mesnetli kiriş için

$$F = [\sin(\lambda_n L) - \sinh(\lambda_n L)] [\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L)] + [\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L)]^2 = 0 \quad (2.2.43)$$

ile verilen frekans denklemi ( F ) elde edilmiş olur. Frekans denkleminde  $\lambda$  değerleri elde edilerek, ankastre mesnetli bir kirişin özfonksiyonu

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = A_n \left\{ \sin(\lambda_n x) + \left[ \frac{(\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L))}{(\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L))} \right] \cos(\lambda_n x) \right. \\ \left. - \sinh(\lambda_n x) - \left[ \frac{(\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L))}{(\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L))} \right] \cosh(\lambda_n x) \right\} \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

şeklinde bulunur. Bu çözümde yine  $A_n$  katsayısının tüm değerleri için serbest titreşen ankastre mesnetli kirişin hareket denklemini ve sınır şartlarını sağlamaktadır. Ancak bizim aradığımız bu çözümlerin içerisinde şiddeti bir olan yani  $0-L$  aralığında, dik fonksiyonlar için verilen (2.1.59) ortonormalite şartını sağlayandır. Şu halde,

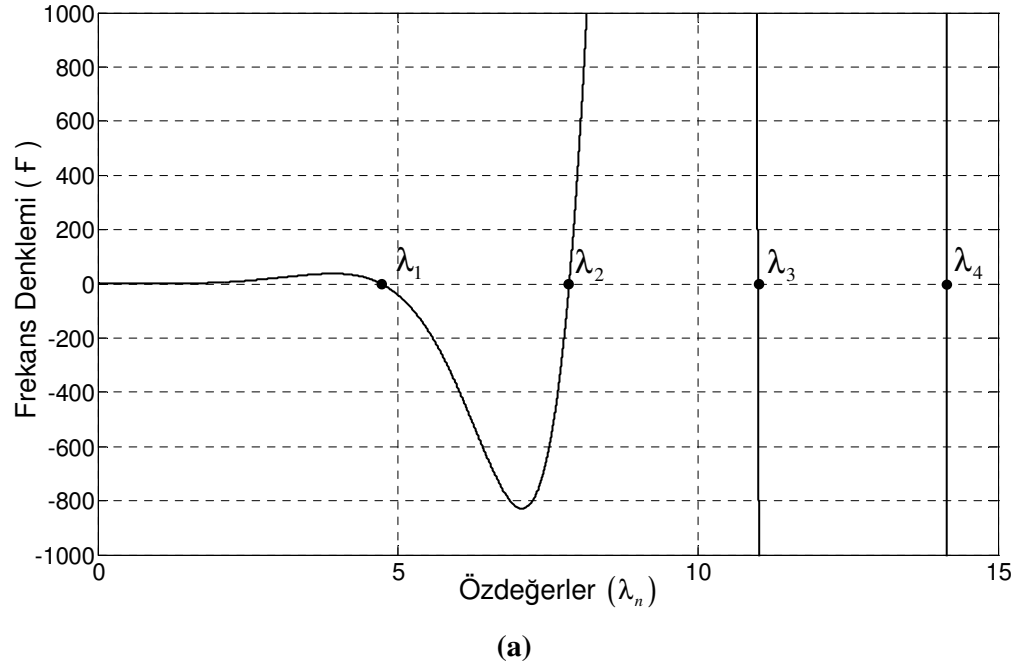
$$\|\phi_n(x)\| = \left( \int_0^L \phi_n^2(x) dx \right)^{1/2} = 1 \quad (2.2.45)$$

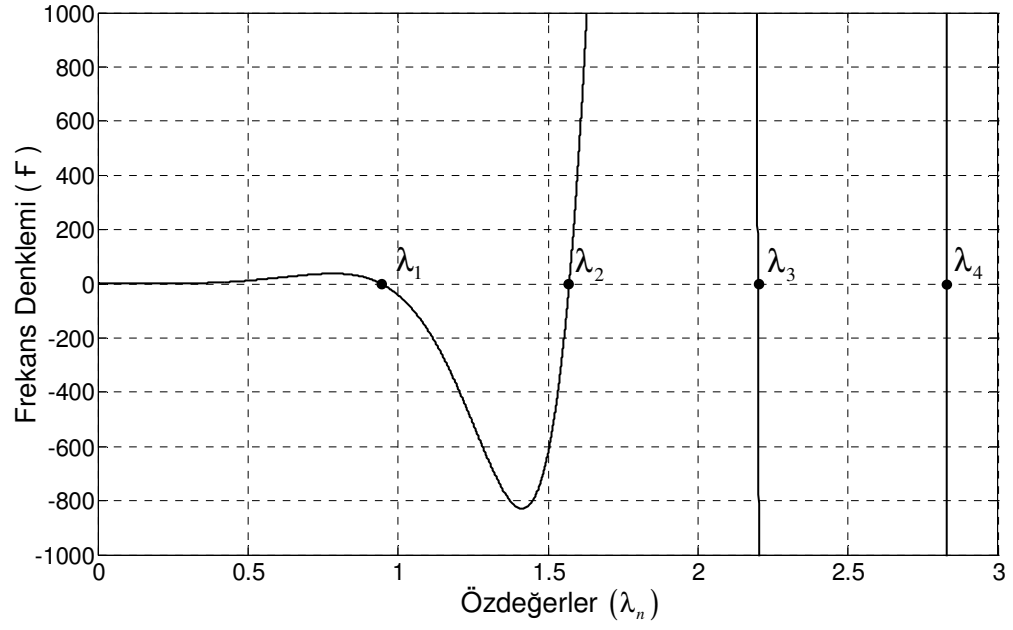
olmalıdır. (2.2.44) ile verilen  $\phi_n(x)$  yerine yazılırsa

$$A_n^2 = \frac{1}{\int_0^L \left\{ \sin(\lambda_n x) + \left[ \frac{\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L)}{\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L)} \right] \cos(\lambda_n x) - \sinh(\lambda_n x) - \left[ \frac{\cos(\lambda_n L) - \cosh(\lambda_n L)}{\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L)} \right] \cosh(\lambda_n x) \right\}^2 dx} \quad (2.2.46)$$

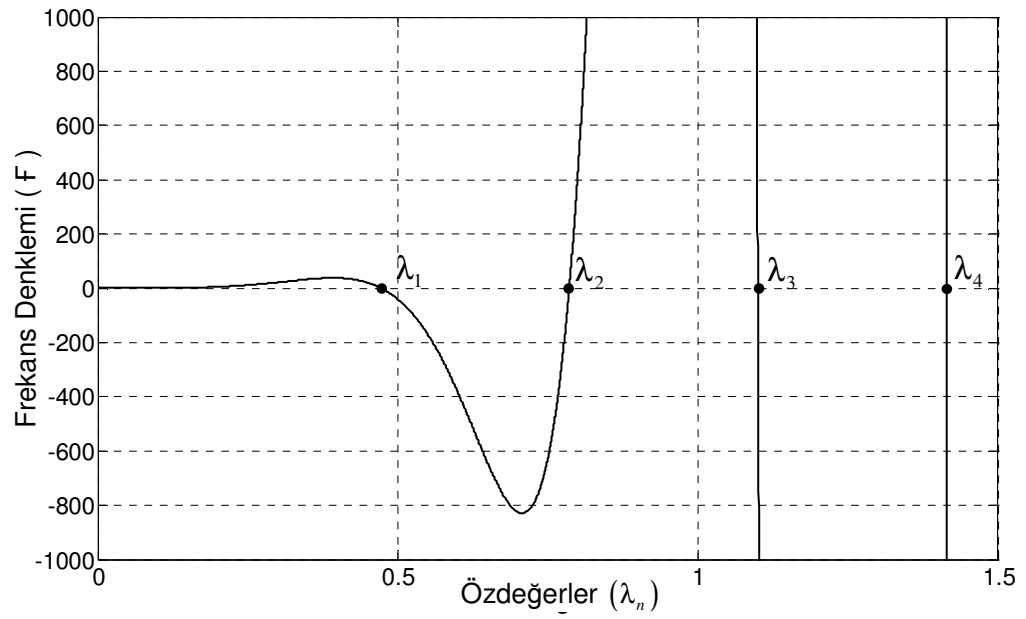
bulunur. Ancak (2.2.45) ifadesindeki integralinin el ile hesabı oldukça uzun ve karmaşıktır. Bunun yerine Matlab ortamında yazılan küçük bir program yardımıyla her bir  $\lambda_n$  değerine karşılık, ortogonalite şartını sağlayan  $A_n$  katsayıları tespit edilebilir (Çizelge 2.2.3).

Frekans denklemi kullanılarak farklı uzunluklardaki ankastre kirişler için ilk dört özdeğer Sekil.2.2.4 de ve Çizelge 2.2.2 de gösterilmektedir. Ayrıca basit mesnetli kirişin özdeğerlerini ve özfonksiyon katsayılarını veren Matlab programları Ek.1.1 ve Ek.1.2 de sunulmuştur.





(b)



(c)

**Şekil 2.2.4.** Her iki ucu ankastre mesnetli kirişin özdeğerleri

a.)  $L=1$  m

b.)  $L=5$  m

c.)  $L=10$  m

**Çizelge 2.2.2** Her iki ucu ankastre mesnetli kirişin özdeğerleri.

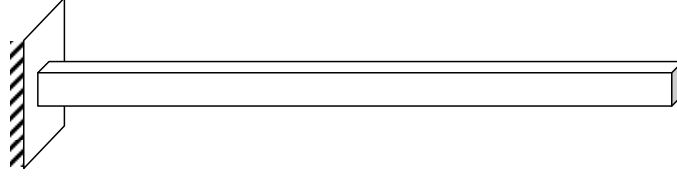
$L$ (m)	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
1	4.7300	7.8532	10.9956	14.1372
5	0.9460	1.5706	2.1991	2.8274
10	0.4730	0.7853	1.0996	1.4137
$\ell$	$\frac{3\pi}{2\ell}$	$\frac{5\pi}{2\ell}$	$\frac{7\pi}{2\ell}$	$\frac{9\pi}{2\ell}$

**Çizelge 2.2.3** Her iki ucu ankastre mesnetli kirişin özfonksiyon katsayıları
$$(A_n, B_n, C_n, D_n).$$

$L$ (m)	$A_n, B_n, C_n, D_n$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
1	$A_n$	1.0178	0.9992	1.0000	1.0000
	$B_n$	-1.0360	-0.9984	-1.0001	-1.0000
	$C_n$	-1.0178	-0.9992	-1.0000	-1.0000
	$D_n$	1.0360	0.9984	1.0001	1.0000
5	$A_n$	2.2759	2.2344	2.2362	2.2361
	$B_n$	-2.3165	-2.2327	-2.2363	-2.2361
	$C_n$	-2.2759	-2.2344	-2.2362	-2.2361
	$D_n$	2.3165	2.2327	2.2363	2.2361
10	$A_n$	3.2186	3.1599	3.1622	3.1623
	$B_n$	-3.2760	-3.1575	-3.1623	-3.1623
	$C_n$	-3.2186	-3.1599	-3.1622	-3.1623
	$D_n$	3.2760	3.1575	3.1623	3.1623

### 2.2.3. Konsol kirişin serbest titreşimi

Bir ucu ankastre diğer ucu serbest olan kirişler konsol kiriş olarak isimlendirilirler (Şekil 2.2.5). Konsol kirişin sabit ucunda çökme ve dönmelerin tamamen engellenmesine karşılık serbest uçta tam bir hareket serbestliği vardır. Denklem (2.1.26) ve (2.1.27) de konsol kirişin her iki ucundaki sınır şartları



Şekil 2.2.5. Konsol kiriş.

$$x = 0, \quad y(0, t) = 0, \quad y'(0, t) = 0 \quad (2.2.47)$$

$$x = L, \quad y''(L, t) = 0, \quad y'''(L, t) = 0 \quad (2.2.48)$$

ile verilmişti. Serbest titreşen bir kirişin yerdeğiştirmesi için (2.2.3) ile önerilen  $y(x, t)$  çözümünü kullanılarak bu şartlar

$$\begin{aligned} y(0, t) = \phi_n(0)q_n(t) = 0, & \quad \phi_n(0) = 0 \\ y'(0, t) = \phi'_n(0)q_n(t) = 0, & \quad \phi'_n(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

$$\begin{aligned} y''(L, t) = \phi''_n(L)q_n(t) = 0, & \quad \phi''_n(L) = 0 \\ y'''(L, t) = \phi'''_n(L)q_n(t) = 0, & \quad \phi'''_n(L) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2.49) ile ifade edilen sınır şartları ve (2.2.14) de verilmiş olan  $\phi_n(x)$  çözümü kullanılarak;

$$\begin{aligned}\phi_n(0) &= A_n \sin(\lambda_n 0) + B_n \cos(\lambda_n 0) + C_n \sinh(\lambda_n 0) + D_n \cosh(\lambda_n 0) = 0, \\ B_n + D_n &= 0\end{aligned}\quad (2.2.51)$$

$$\begin{aligned}\phi'_n(0) &= \lambda_n [A_n \cos(\lambda_n 0) - B_n \sin(\lambda_n 0) + C_n \cosh(\lambda_n 0) + D_n \sinh(\lambda_n 0)] = 0, \\ A_n + C_n &= 0\end{aligned}\quad (2.2.52)$$

elde edilir. Buradan  $D_n = -B_n$  ve  $C_n = -A_n$  olduğu açıkça görülmektedir. Benzer şekilde (2.2.50) ile verilen şartlar ve (2.2.14) çözümü kullanılarak

$$\begin{aligned}\phi''_n(L) &= \lambda_n^2 [-A_n \sin(\lambda_n L) - B_n \cos(\lambda_n L) + C_n \sinh(\lambda_n L) + D_n \cosh(\lambda_n L)] = 0, \\ -A_n \sin(\lambda_n L) - B_n \cos(\lambda_n L) - A_n \sinh(\lambda_n L) - B_n \cosh(\lambda_n L) &= 0\end{aligned}\quad (2.2.53)$$

yazılır. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak  $B_n$ ,  $C_n$  ve  $D_n$  katsayılarının  $A_n$  cinsinden ifadeleri

$$B_n = - \left[ \frac{(\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L))}{(\cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L))} \right] A_n \quad (2.2.54)$$

$$C_n = -A_n \quad (2.2.55)$$

$$D_n = \left[ \frac{(\sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L))}{(\cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L))} \right] A_n \quad (2.2.56)$$

şeklinde bulunur.  $B_n$  katsayısı,  $\phi''_n(L) = 0$  da yerine yazılarak gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned}\phi'''_n(L) &= \lambda_n^3 [-A_n \cos(\lambda_n L) + B_n \sin(\lambda_n L) + C_n \cosh(\lambda_n L) + D_n \sinh(\lambda_n L)] = 0, \\ -A_n \cos(\lambda_n L) + B_n \sin(\lambda_n L) + C_n \cosh(\lambda_n L) + D_n \sinh(\lambda_n L) &= 0, \\ -A_n [\cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L)] + B_n [\sin(\lambda_n L) - \sinh(\lambda_n L)] &= 0\end{aligned}\quad (2.2.57)$$



$$-A_n \left[ \cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L) \right] - A_n \frac{\left[ \sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L) \right]}{\left[ \cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L) \right]} \left[ \sin(\lambda_n L) - \sinh(\lambda_n L) \right] = 0 \quad (2.2.58)$$

konsol kiriş için frekans denklemi ( F ) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F = \left[ \cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L) \right]^2 + \left[ \sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L) \right] \left[ \sin(\lambda_n L) - \sinh(\lambda_n L) \right] = 0 \quad (2.2.59)$$

Frekans denkleminde  $\lambda_n$  değerleri bilgisayar programı yardımıyla elde edilerek, konsol kirişin özfonksiyonu

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = A_n \left\{ \sin(\lambda_n x) - \left[ \frac{\left( \sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L) \right)}{\left( \cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L) \right)} \right] \cos(\lambda_n x) \right. \\ \left. - \sinh(\lambda_n x) + \left[ \frac{\left( \sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L) \right)}{\left( \cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L) \right)} \right] \cosh(\lambda_n x) \right\} \end{aligned} \quad (2.2.60)$$

şeklinde bulunur. Bu çözümlerin içerisinde şiddeti bir olan (2.1.62) ortogormalite şartını sağlayan çözümdür. Şu halde,

$$\|\phi_n(x)\| = \left( \int_0^L \phi_n^2(x) dx \right)^{1/2} = 1 \quad (2.2.61)$$

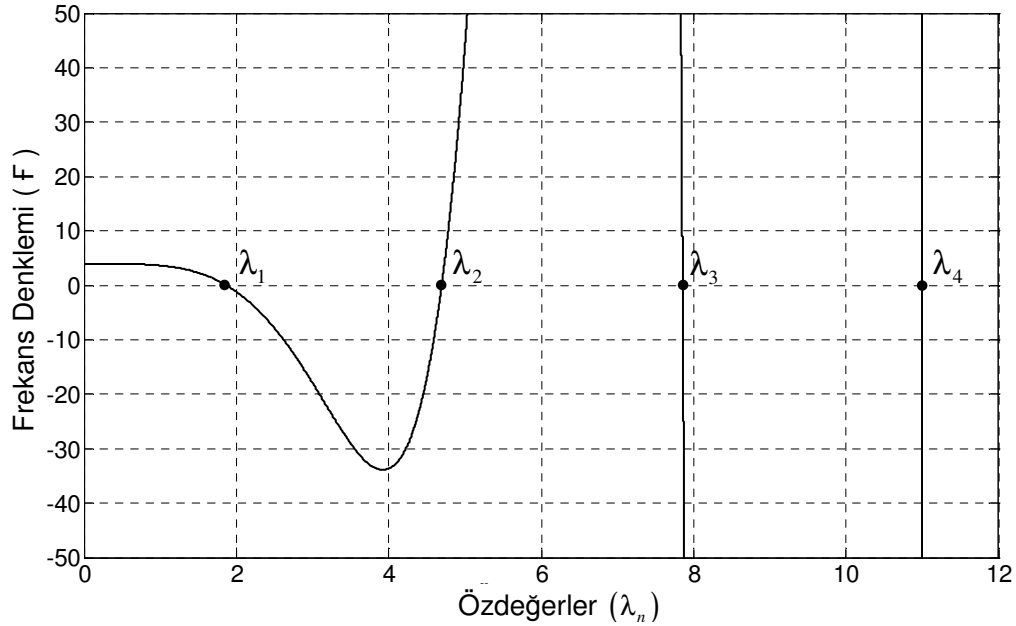
yazılabilir.  $\phi_n(x)$  yerine yazılırsa

$$A^2 = \frac{1}{\int_0^L \left\{ \sin(\lambda_n x) - \left[ \frac{\left( \sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L) \right)}{\left( \cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L) \right)} \right] \cos(\lambda_n x) - \sinh(\lambda_n x) + \left[ \frac{\left( \sin(\lambda_n L) + \sinh(\lambda_n L) \right)}{\left( \cos(\lambda_n L) + \cosh(\lambda_n L) \right)} \right] \cosh(\lambda_n x) \right\}^2 dx} \quad (2.2.62)$$

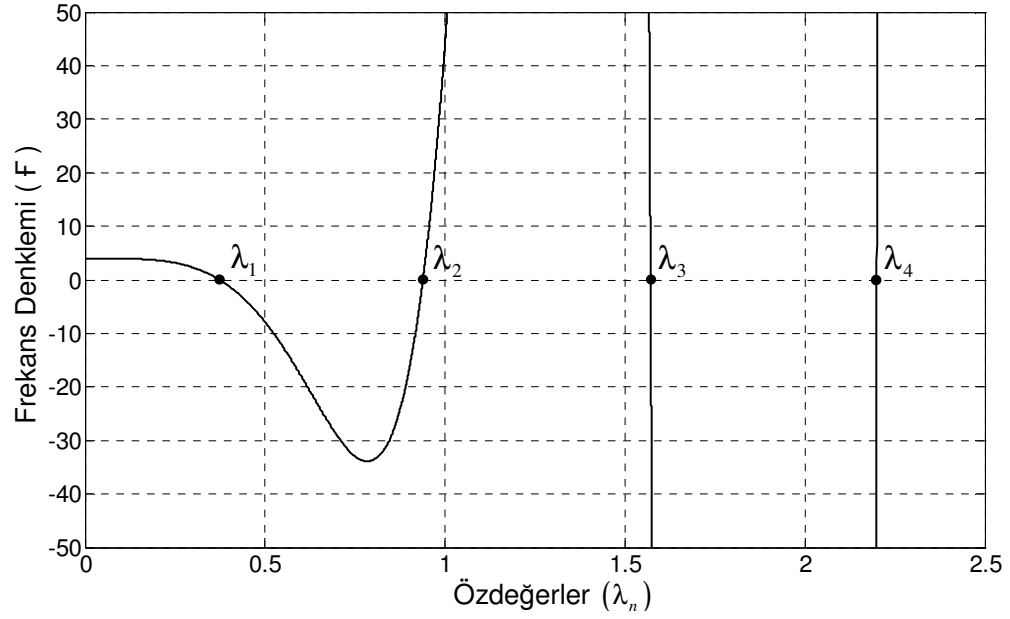
elde edilir. Burada da (2.2.62) ifadesindeki integralinin el ile hesabı oldukça uzun ve karmaşıktır. Bunun yerine yine Matlab ortamında yazılan küçük bir program yardımıyla ortogonalite şartını sağlayan  $A_n$  katsayısı tespit edilebilir (Çizelge 2.2.5).

Hem ankastre kiriş (Çizelge 2.1.3) ve hem de konsol kiriş (Çizelge 2.1.5) için hesaplanan  $A_n$  katsayılarının 3. ve 4. özdeğerlerden sonra artık değişmediği ve  $\sqrt{1/\ell}$  değerine yakınsadığı gözlenmektedir. Buradan hareketle uzunluğu bilinen bir kirişte  $A$  katsayısının yaklaşık değeri, tıpkı  $\lambda_n$  özdeğerlerinde olduğu gibi hesap edilebilir.

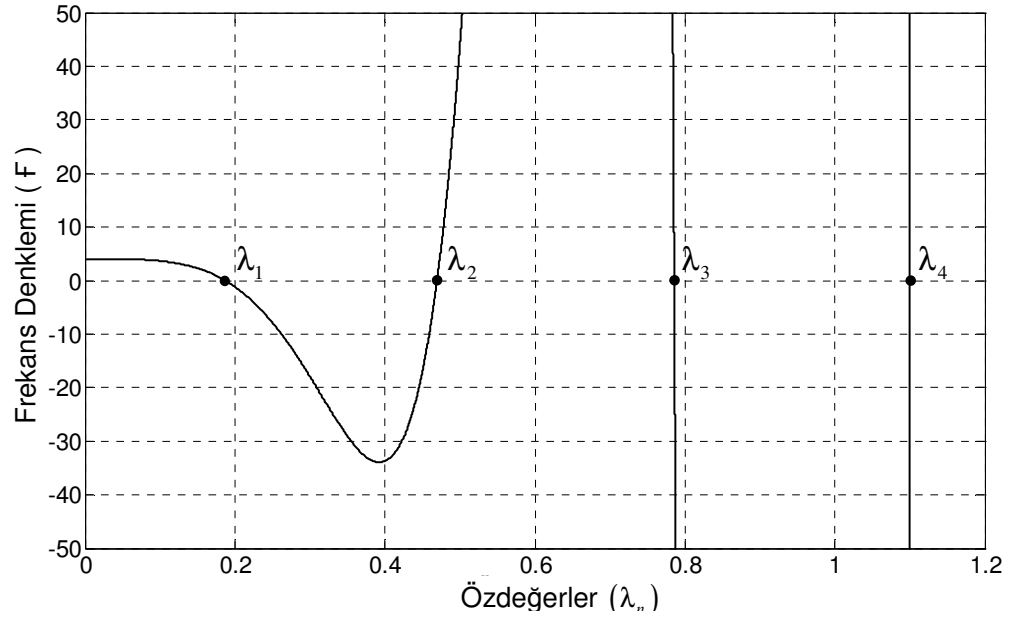
Frekans denklemi kullanılarak farklı uzunluklardaki konsol kirişler için ilk dört özdeğer Sekil.2.2.6 de ve Çizelge 2.2.4 te gösterilmektedir. Ayrıca basit mesnetli kirişin özdeğerlerini ve özfonksiyon katsayılarını veren Matlab programları Ek.1.4 ve Ek.1.5 te sunulmuştur.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.2.6. Konsol kirişin özdeğerleri

- a.)  $L = 1$  m
- b.)  $L = 5$  m
- c.)  $L = 10$  m

**Çizelge 2.2.4** Konsol kirişin özdeğerleri.

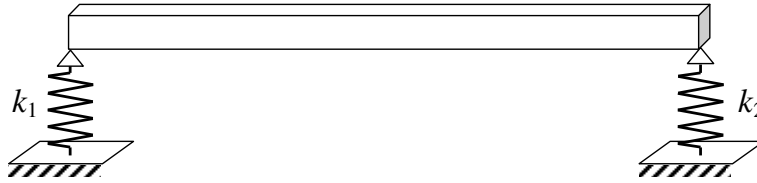
$L$ (m)	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
1	1.8751	4.6941	7.8548	10.9955
5	0.3750	0.9388	1.5710	2.1991
10	0.1875	0.4694	0.7855	1.0996
$\ell$	$\frac{\pi}{2\ell}$	$\frac{3\pi}{2\ell}$	$\frac{5\pi}{2\ell}$	$\frac{7\pi}{2\ell}$

**Çizelge 2.2.5** Konsol kirişin özfonksiyon katsayıları ( $A_n, B_n, C_n, D_n$ ).

$L$ (m)	$A_n, B_n, C_n, D_n$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
1	$A_n$	0.7341	1.0185	0.9992	1.0000
	$B_n$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	$C_n$	-0.7341	-1.0185	-0.9992	-1.0000
	$D_n$	-1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000
5	$A_n$	0.3283	0.4555	0.4468	0.4472
	$B_n$	0.4473	0.4472	0.4472	0.4472
	$C_n$	-0.3283	-0.4555	-0.4468	-0.4472
	$D_n$	-0.4473	-0.4472	-0.4472	-0.4472
10	$A_n$	0.2322	0.3221	0.3160	0.3162
	$B_n$	0.3163	0.3162	0.3162	0.3162
	$C_n$	-0.2322	-0.3221	-0.3160	-0.3162
	$D_n$	-0.3163	-0.3162	-0.3162	-0.3162

### 2.2.4. Elastik mesnetli kirişin serbest titreşimi

Elastik mesnetli kirişte, kirişin her iki ucunda da dönmelere karşı herhangi bir direnç söz konusu değildir. Ancak mesnetler tepki kuvveti ile orantılı çökme yapmaktadır. Denklem (2.1.31) de ifade edildiği üzere elastik mesnetli bir kirişte sınır şartları



Şekil 2.2.7. Elastik mesnetli kiriş.

$$y(0,t) = 0, \quad EI \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} \Big|_{(0,t)} = k_1 y_1(0,t) \quad (2.2.63)$$

$$y''(L,t) = 0, \quad EI \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} \Big|_{(L,t)} = -k_2 y_2(L,t) \quad (2.2.64)$$

ile verilir. Bu sınır şartları (2.2.3) ile önerilen  $y(x,t)$  çözümü kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} y''(0,t) = \phi_n''(0) q_n(t) = 0, & \quad \phi_n''(0) = 0 \\ y'''(0,t) = \phi_n'''(0) q_n(t) = \frac{k_1}{EI} \phi_n(0) q(t), & \quad \phi_n'''(0) = \frac{k_1}{EI} \phi_n(0) \end{aligned} \quad (2.2.65)$$

$$\begin{aligned} y''(L,t) = \phi_n''(L) q_n(t) = 0, & \quad \phi_n''(L) = 0 \\ y'''(L,t) = \phi_n'''(L) q_n(t) = \frac{k_2}{EI} \phi_n(L) q(t), & \quad \phi_n'''(L) = \frac{k_2}{EI} \phi_n(L) \end{aligned} \quad (2.2.66)$$

elde edilir. (2.2.65) ile verilen sınır şartları ve (2.2.14) de verilmiş olan  $\phi_n(x)$  çözümü kullanılarak;

$$\phi_n''(0) = \lambda_n^2 [-A_n \sin(\lambda_n 0) - B_n \cos(\lambda_n 0) + C_n \sinh(\lambda_n 0) + D_n \cosh(\lambda_n 0)] = 0 \quad (2.2.67)$$

$$-B_n + D_n = 0 \quad (2.2.68)$$

$$\begin{aligned} \phi_n'''(0) &= \lambda_n^3 [-A_n \cos(\lambda_n 0) + B_n \sin(\lambda_n 0) + C_n \cosh(\lambda_n 0) + D_n \sinh(\lambda_n 0)] \\ &= \frac{k_1}{EI} [A_n \sin(\lambda_n 0) + B_n \cos(\lambda_n 0) + C_n \sinh(\lambda_n 0) + D_n \cosh(\lambda_n 0)] \end{aligned} \quad (2.2.69)$$

$$\lambda_n^3 (-A_n + C_n) = \frac{k_1}{EI} (B_n + D_n) \quad (2.2.70)$$

bulunur. Burada  $D_n = B_n$  olduğu açıkça görülmektedir. Benzer şekilde (2.2.66) ile verilen sınır şartları ve (2.2.14) kullanılarak

$$\phi_n''(L) = \lambda_n^2 [-A_n \sin(\lambda_n L) - B_n \cos(\lambda_n L) + C_n \sinh(\lambda_n L) + D_n \cosh(\lambda_n L)] = 0 \quad (2.2.71)$$

$$\begin{aligned} \phi_n'''(L) &= \lambda_n^3 [-A_n \cos(\lambda_n L) + B_n \sin(\lambda_n L) + C_n \cosh(\lambda_n L) + D_n \sinh(\lambda_n L)] \\ &= \frac{k_2}{EI} [A_n \sin(\lambda_n L) + B_n \cos(\lambda_n L) + C_n \sinh(\lambda_n L) + D_n \cosh(\lambda_n L)] \end{aligned} \quad (2.2.72)$$

yazılabilir. Gösterimdeki karışıklığın önüne geçmek için (2.2.73) ve (2.2.74) ile verilen kısaltmalar ifade edilebilir.

$$n_1 = \sin(\lambda_n L), \quad n_2 = \cos(\lambda_n L), \quad n_3 = \sinh(\lambda_n L), \quad n_4 = \cosh(\lambda_n L) \quad (2.2.73)$$

$$u_1 = \frac{k_1}{EI\lambda_n^3}, \quad u_2 = \frac{k_2}{EI\lambda_n^3}, \quad u_3 = \left( \frac{n_1 - n_3}{2u_1 n_3 - n_2 + n_4} \right) \quad (2.2.74)$$

Gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapılarak (2.2.71) den

$$B_n = u_3 A_n \quad (2.2.75)$$

$$D_n = u_3 A_n \quad (2.2.76)$$

$$C_n = [2u_1 u_3 + 1] A_n \quad (2.2.77)$$

şeklinde tüm katsayılar  $A_n$  cinsinden elde edilir. Son olarak tüm sabitler (2.2.72) de yazılarak elastik mesnetli bir kiriş için frekans denklemi ( F ) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F = -n_2 + u_3 (n_1 + n_3) + n_4 (2u_1 u_3 + 1) - u_2 [n_1 + u_3 (n_2 + n_4) + n_3 (2u_1 u_3 + 1)] = 0 \quad (2.2.78)$$

Elde edilen bu frekans denkleminin kökleri Ek.1.6 da verilen Matlab programı yardımı ile hesap edilebilir. Böylece elastik mesnetli bir kirişin özfonksiyonlarında bilinmeyen olarak yalnızca  $A$  katsayısı kalır.

$$\phi_n(x) = A_n [\sin(\lambda_n x) + u_3 \cos(\lambda_n x) + (2u_1 u_3 + 1) \sinh(\lambda_n x) + u_3 \cosh(\lambda_n x)] \quad (2.2.79)$$

Burada  $\lambda_n$  nın her değerine karşılık ayrı bir  $A_n$  katsayısının mevcut olduğu unutulmamalıdır. Bu katsayılar, (2.1.59) da verilen ortogormalite şartı kullanılarak her  $\lambda_n$  için ayrı ayrı hesap edilmelidir. Şu halde,

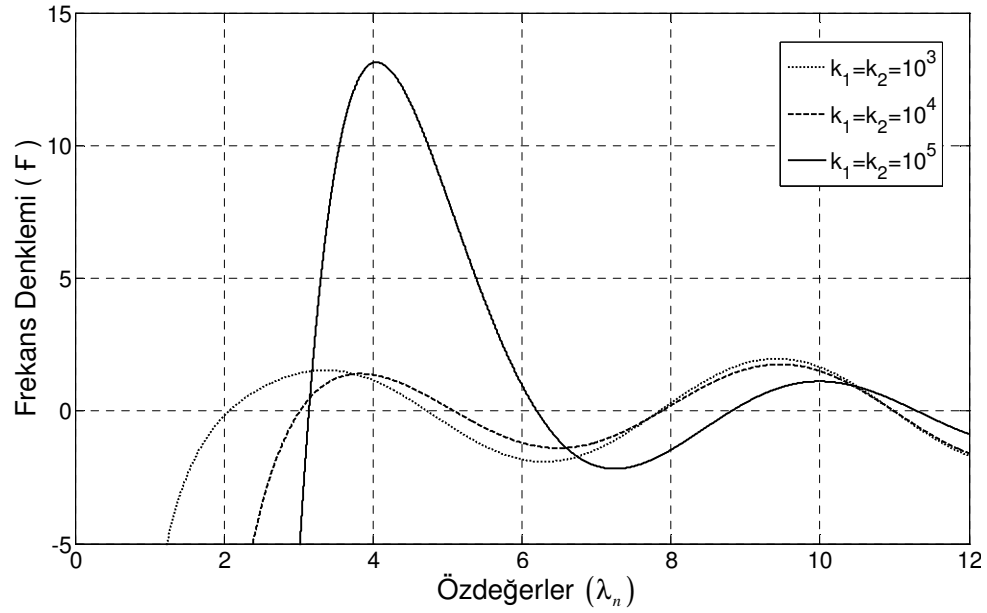
$$\|\phi_n(x)\| = \left( \int_0^L \phi_n^2(x) dx \right)^{1/2} = 1 \quad (2.2.80)$$

yazılabilir.  $\phi_n(x)$  burada yerine yazılırsa

$$A_n^2 = \frac{1}{\int_0^L [\sin(\lambda_n x) + u_3 \cos(\lambda_n x) + (2u_1 u_3 + 1) \sinh(\lambda_n x) + u_3 \cosh(\lambda_n x)]^2 dx} \quad (2.2.81)$$

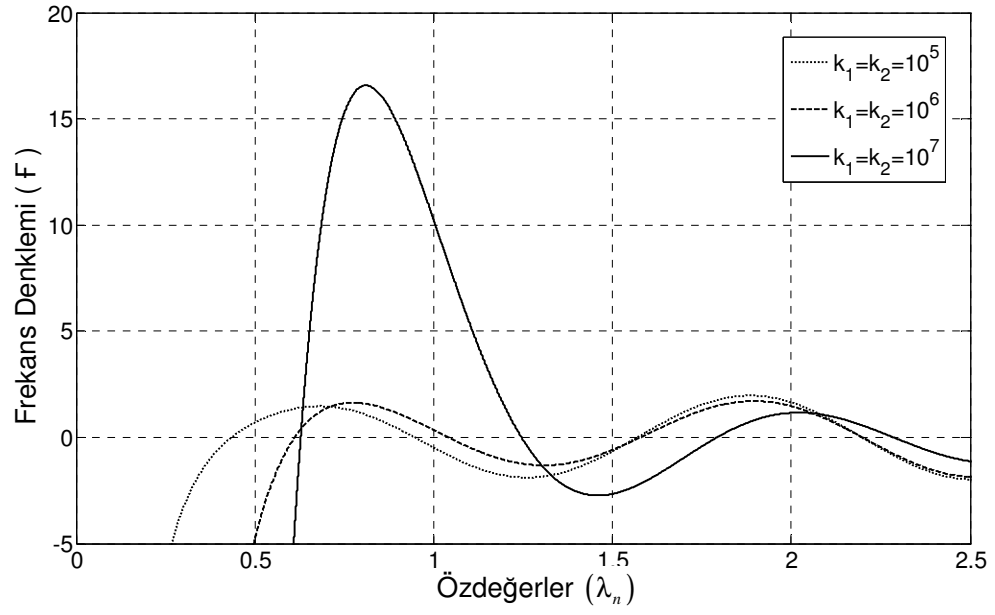
elde edilir. İntegralin hesabının oldukça zor olduğu görülmektedir. Ancak Ek.1.7 de verilen küçük bir Matlab programı yardımı ile her bir  $\lambda_n$  değerine tekabül eden  $A$  katsayıları kolayca tespit edilebilir (Çizelge 2.2.7).

Frekans denklemi kullanılarak farklı uzunluklarda ve farklı sertlikteki elastik mesnetlerle taşınan kirişler için ilk dört özdeğer Sekil 2.2.8 de ve Çizelge 2.2.6 da gösterilmektedir. Çizelge 2.2.6 dan açıkça görülmektedir ki elastik desteklerin sertliği arttıkça öz değerler basit mesnetli kirişin öz değerlerine yakınsamaktadır.

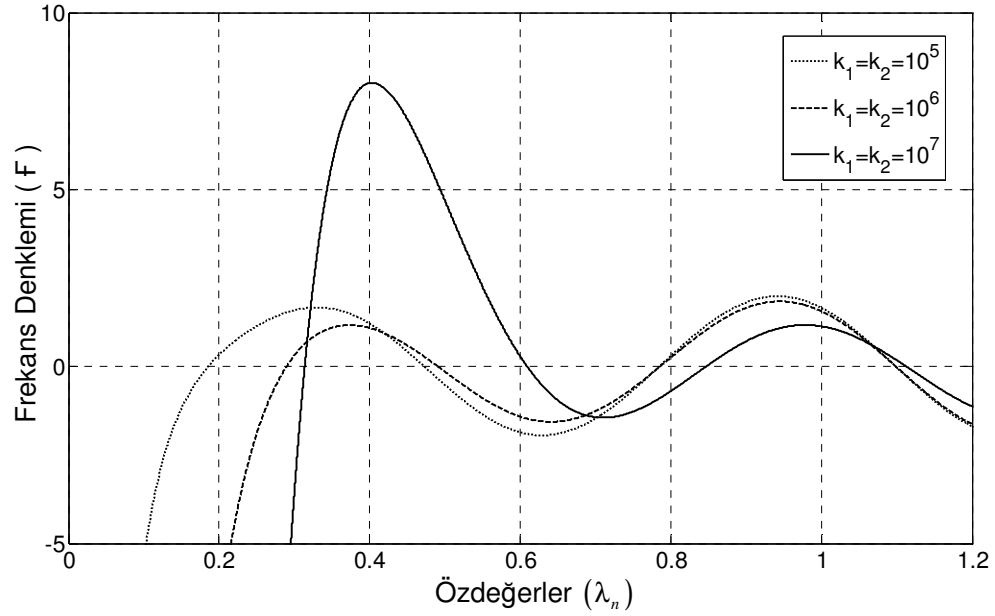


(a)





(b)



(c)

**Şekil 2.2.8.** Elastik mesnetli kirişin ilk dört özdeğeri;

- a.)  $L=1$  m,  $H=0.01$  m
- b.)  $L=5$  m,  $H=0.1$  m
- c.)  $L=10$  m,  $H=0.2$  m

**Çizelge 2.2.6.** Elastik mesnetli kirişin farklı yay rijitlikleri için ilk dört özdeğeri  
( $L = 1$  m,  $H = B = 0.01$  m)

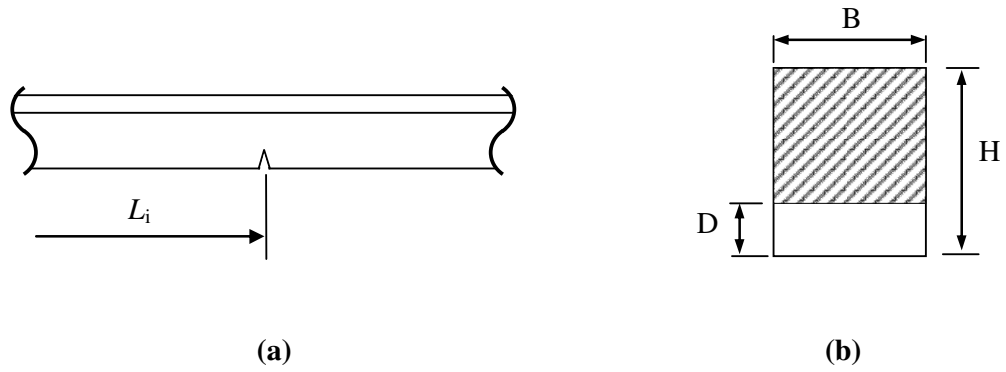
$k_1, k_2$	$\lambda_n$	$L = 1$ m	$L = 2$ m	$L = 3$ m
$10^3$ (N/m)	$\lambda_1$	2.0721	1.4842	1.0404
	$\lambda_2$	4.7360	2.4987	1.8957
	$\lambda_3$	7.8535	3.9357	2.6784
	$\lambda_4$	10.9956	5.4990	3.6744
$10^4$ (N/m)	$\lambda_1$	3.0191	1.5696	1.0471
	$\lambda_2$	5.0942	3.0794	2.0903
	$\lambda_3$	7.8818	4.3277	3.0984
	$\lambda_4$	10.9994	5.6055	4.0064
$10^5$ (N/m)	$\lambda_1$	3.1401	1.5708	1.0472
	$\lambda_2$	6.2000	3.1409	2.0944
	$\lambda_3$	8.8186	4.7044	3.1411
	$\lambda_4$	11.3093	6.2398	4.1861
$\infty$ (Rijit mesnet)	$\lambda_1$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{L}$
	$\lambda_2$	$2\pi$	$\pi$	$\frac{2\pi}{L}$
	$\lambda_3$	$3\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{L}$
	$\lambda_4$	$4\pi$	$2\pi$	$\frac{4\pi}{L}$

**Çizelge 2.2.7.** Elastik mesnetli kirişin farklı yay rijitlikleri için özfonksiyon katsayıları  $(A_n, B_n, C_n, D_n)$ ,  $(L = 1 \text{ m}, H = B = 0.01 \text{ m})$ .

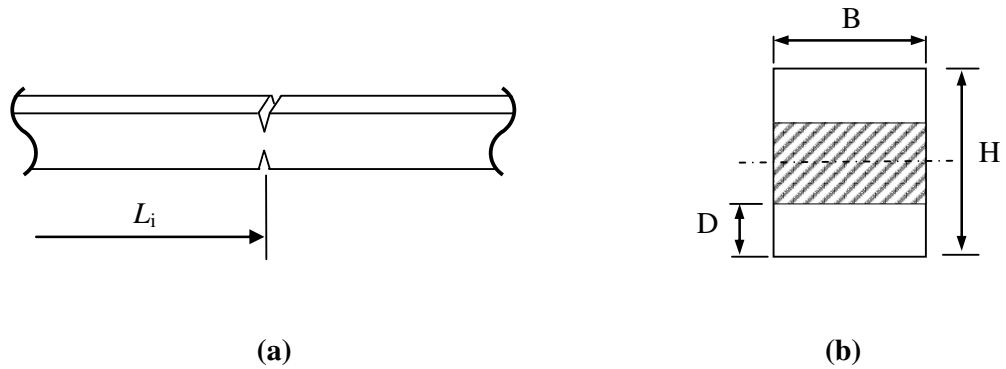
$k_1, k_2$	$A_n, B_n, C_n, D_n$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$10^3 \text{ (N/m)}$	$A_n$	0.7341	0.0258	0.0047	$\cong 0$
	$B_n$	-0.1957	0.0262	-0.0016	$\cong 0$
	$C_n$	0.4778	0.0287	0.0046	$\cong 0$
	$D_n$	-0.1957	0.0262	-0.0016	$\cong 0$
$10^4 \text{ (N/m)}$	$A_n$	0.0909	0.0123	0.0051	$\cong 0$
	$B_n$	-0.0667	0.0144	-0.0017	$\cong 0$
	$C_n$	-0.1916	0.0250	0.0047	$\cong 0$
	$D_n$	-0.0667	0.0144	-0.0017	$\cong 0$
$10^5 \text{ (N/m)}$	$A_n$	0.0064	0.0023	0.0048	$\cong 0$
	$B_n$	-0.0059	-0.0028	-0.0022	$\cong 0$
	$C_n$	-0.2147	-0.0115	0.0009	$\cong 0$
	$D_n$	-0.0059	-0.0028	-0.0022	$\cong 0$
$\infty$ (Rijit mesnet)	$A_n$	$\cong 0$	$\cong 0$	$\cong 0$	$\cong 0$
	$B_n$	$\cong 0$	$\cong 0$	$\cong 0$	$\cong 0$
	$C_n$	-0.2192	-0.0132	-0.0007	$\cong 0$
	$D_n$	$\cong 0$	$\cong 0$	$\cong 0$	$\cong 0$

### 2.3. Çatlak İhtiva Eden Kirişlerin Serbest Titreşimi

Kirişin herhangi bir noktasında oluşan bir çatlak, çatlağın derinliğine, konumuna ve geometrisine bağlı olarak, kirişin bu noktasının eğilme direncini lokal olarak değiştirmektedir. Şekil 2.3.1.a ve Şekil 2.3.2.a da  $x = L_i$  konumunda tek ve çift taraflı açık çatlak ihtiva eden kirişler, Şekil 2.3.1.b ve Şekil 2.3.2.b de ise çatlak ihtiva eden bu kirişlerin çatlak kesitleri gösterilmektedir. Burada kesit alanının genişliği  $B$ , yüksekliği  $H$  ve çatlak derinliği  $D$  ile ifade edilmektedir. Şekillerden kirişin çatlak tarafından iki parçaya ayrıldığı görülmektedir. Şu halde  $n$  adet çatlak, kirişi  $n+1$  parçaya bölecektir. Euler – Bernoulli kiriş teorisi kullanılarak kirişin çatlak tarafından parçalanmış her bir kısmı için hareket denklemi



Şekil 2.3.1. Tek taraflı açık çatlak ihtiva eden kiriş.



Şekil 2.3.2. Çift taraflı açık çatlak ihtiva eden kiriş

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L_1 \quad (2.3.1a)$$

$$EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0, \quad L_1 < x < L_2 \quad (2.3.1b)$$

.

.

.

$$EI \frac{\partial^4 y_{i+1}}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y_{i+1}}{\partial t^2} = 0, \quad L_i < x < L \quad (2.3.1c)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $y_1$ ,  $y_2$  ve  $y_i$  kirişin düşey yer değiştirmelerini ifade etmektedir.

Çatlağın bulunduğu noktada yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin eşit olduğu göz önünde bulundurularak bu noktadaki şartlar

$$y_i(L_i^-, t) = y_{i+1}(L_i^+, t) \quad (2.3.2)$$

$$y_i''(L_i^-, t) = y_{i+1}''(L_i^+, t) \quad (2.3.3)$$

$$y_i'''(L_i^-, t) = y_{i+1}'''(L_i^+, t) \quad (2.3.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,  $L_i^-$ ,  $L_i^+$  çatlak konumunun hemen öncesini ve hemen sonrasını belirtmektedir. Çatlaktaki süreksizlik şartı ise aşağıda gösterildiği gibidir.

$$y_2'(L_1^+, t) - y_1'(L_1^-, t) = \theta_1 y_2''(L_1^+, t) \quad (2.3.5)$$

Burada,  $\theta_1$  dönme yayı olarak modellenen çatlağın yerel esnekliğini ifade etmektedir ve çatlak derinliğinin bir fonksiyonudur.

$\theta_1$  *konsol giriş* için Ostachowitz ve Krawczuk (1991) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\theta_1 = 6 \pi H f(\gamma) \quad (2.3.6)$$

$f(\gamma)$ , tek taraflı açık çatlak için;

$$f(\gamma) = 0.6384\gamma^2 - 1.035\gamma^3 + 3.7201\gamma^4 - 5.177\gamma^5 + 7.553\gamma^6 - 7.332\gamma^7 + 2.4909\gamma^8 \quad (2.3.7)$$

çift taraflı açık çatlak için;

$$f(\gamma) = 0.5335\gamma^2 - 0.929\gamma^3 + 3.500\gamma^4 - 3.181\gamma^5 + 5.793\gamma^6 \quad (2.3.8)$$

ile verilir (Haisty ve Springer 1998).

$\theta_1$  *basit mesnetli giriş* için Chondros (1998) tarafından aşağıda gösterildiği gibi verilmiştir.

$$\theta_1 = 6 \pi H (1 - \nu^2) f(\gamma) \quad (2.3.9)$$

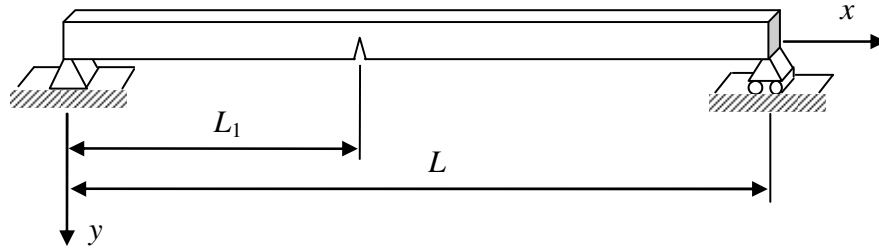
$f(\gamma)$ , tek taraflı açık çatlak için;

$$f(\gamma) = 0.6272\gamma^2 - 1.04533\gamma^3 + 4.5948\gamma^4 - 9.9736\gamma^5 + 20.2948\gamma^6 - 33.0351\gamma^7 + 47.1063\gamma^8 - 40.7556\gamma^9 + 19.6\gamma^{10} \quad (2.3.10)$$

Burada  $\gamma$  çatlak derinliğinin kesitin çatlak doğrultusundaki yüksekliğine oranıdır ( $\gamma = D/H$ ). Hesaplamalarda çatlağı birer dönme yayı olarak kabul eden bu çatlak modeli kullanılacaktır. Ancak literatürde bu modelin haricinde farklı çatlak modelleri de mevcuttur.

### 2.3.1. Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin serbest titreşimi

Şekil 2.3.3. de  $x = L_1$  konumunda tek taraflı açık çatlak ihtiva eden,  $L$  uzunluğunda, basit mesnetli, düz bir kiriş gösterilmektedir. Şu halde kirişin çatlak tarafından iki parçaya ayrıldığı görülmektedir. Euler – Bernoulli kiriş teorisi kullanılarak kirişin her bir kısmı için hareket denklemleri



Şekil 2.3.3.  $x = L_1$  konumunda açık çatlak ihtiva eden basit mesnetli kiriş.

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L_1 \quad (2.3.11)$$

$$EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0, \quad L_1 < x < L \quad (2.3.12)$$

ile verilir. Basit mesnetli bir kirişin sınır şartları (2.1.30) da

$$y_1(0, t) = 0, \quad y_1''(0, t) = 0 \quad (2.3.13)$$

$$y_2(L, t) = 0, \quad y_2''(L, t) = 0 \quad (2.3.14)$$

şeklinde ifade edilmiş ve çatlağın bulunduğu noktadaki süreklilik şartları da (2.3.4), (2.3.5) ve (2.3.6) ile aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$y_1(L_1^-, t) = y_2(L_1^+, t) \quad (2.3.15)$$

$$y_1''(L_1^-, t) = y_2''(L_1^+, t) \quad (2.3.16)$$

$$y_1'''(L_1^-, t) = y_2'''(L_1^+, t) \quad (2.3.17)$$

Çatlaktaki süreksizlik şartı da, (2.3.7) kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$y_2'(L_1^+, t) - y_1'(L_1^-, t) = \theta_1 y_2''(L_1^+, t) \quad (2.3.18)$$

Kirişin yer değiştirmesinin

$$y_{(i)}(x, t) = \phi_{ni}(x) q_{ni}(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.19)$$

şeklinde ayrık bir çözümünün var olduğu kabul edilsin. Şu halde önerilen bu çözüm denklem (2.3.11) ve (2.3.12) de yerine yazılarak

$$\phi_{n1}^{IV}(x) - \lambda_n^4 \phi_{n1}(x) = 0, \quad 0 < x < L_1 \quad (2.3.20)$$

$$\phi_{n2}^{IV}(x) - \lambda_n^4 \phi_{n2}(x) = 0, \quad L_1 < x < L \quad (2.3.21)$$

elde edilir. Burada,

$$\lambda_n^4 = \frac{m\omega_n^2}{EI} \quad (2.3.22)$$

ile verilir. Kirişin uç noktaları için denklem (2.3.13) ve (2.3.14) ile verilen sınır şartları (2.3.19) ile önerilen çözüm kullanılarak yeniden düzenlenirse yeni sınır şartları

$$\phi_{n1}(0) = 0, \quad \phi_{n1}''(0) = 0 \quad (2.3.23)$$

$$\phi_{n2}(L) = 0, \quad \phi_{n2}''(L) = 0 \quad (2.3.24)$$



şeklinde ifade edilir. Benzer işlem (2.3.15), (2.3.16), (2.3.17) ve (2.3.18) ifadelerine uygulanarak

$$\phi_{n1}(L_1) = \phi_{n2}(L_1) \quad (2.3.25)$$

$$\phi_{n1}''(L_1) = \phi_{n2}''(L_1) \quad (2.3.26)$$

$$\phi_{n1}'''(L_1) = \phi_{n2}'''(L_1) \quad (2.3.27)$$

$$\phi_{n2}'(L_1) - \phi_{n1}'(L_1) = \theta_1 \phi_{n2}''(L_1) \quad (2.3.28)$$

bulunur. Denklem (2.3.20) ve (2.3.21) ile verilen homojen diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin,

$$\begin{aligned} \phi_{n1}(x) &= A_{n1} \sin(\lambda_n x) + B_{n1} \cos(\lambda_n x) + C_{n1} \sinh(\lambda_n x) + D_{n1} \cosh(\lambda_n x), \\ 0 < x < L_1 \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

$$\begin{aligned} \phi_{n2}(x) &= A_{n2} \sin \lambda_n (x - L_1) + B_{n2} \cos \lambda_n (x - L_1) + C_{n2} \sinh \lambda_n (x - L_1) + D_{n2} \cosh \lambda_n (x - L_1), \\ L_1 < x < L \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

olduğu açıkça görülmektedir. Kirişin serbest titreşim modlarını gösteren bu çözümler kirişin öz fonksiyonları olarak isimlendirilir. Buradaki  $A_{ni}$ ,  $B_{ni}$ ,  $C_{ni}$  ve  $D_{ni}$  sabitleri sınır şartlarından elde edilecektir. Çözüme başlamadan evvel aşağıdaki kısaltmaları tanımlamak hesaplamaları oldukça kolaylaştıracaktır:

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin(\lambda_n L_1), & n_2 &= \cos(\lambda_n L_1), \\ n_3 &= \sinh(\lambda_n L_1), & n_4 &= \cosh(\lambda_n L_1), \\ m_1 &= \sin[\lambda_n (L - L_1)], & m_2 &= \cos[\lambda_n (L - L_1)], \\ m_3 &= \sinh[\lambda_n (L - L_1)], & m_4 &= \cosh[\lambda_n (L - L_1)] \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Kirişin birinci bölgesi için (2.3.29) da verilen özfonksiyon ve (2.3.23) sınır şartları kullanılarak

$$\phi_{n1}(0) = A_{n1} \sin(\lambda_n 0) + B_{n1} \cos(\lambda_n 0) + C_{n1} \sinh(\lambda_n 0) + D_{n1} \cosh(\lambda_n 0) = 0 \quad (2.3.32)$$

$$\phi_{n1}''(0) = -A_{n1} \sin(\lambda_n 0) - B_{n1} \cos(\lambda_n 0) + C_{n1} \sinh(\lambda_n 0) + D_{n1} \cosh(\lambda_n 0) = 0 \quad (2.3.33)$$

yazılabilir. Bu iki ifadeden

$$B_{n1} = D_{n1} = 0 \quad (2.3.34)$$

elde edilir. Benzer şekilde, kirişin ikinci bölgesi için de (2.3.30) çözümü ve (2.3.24) sınır şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} \phi_{n2}(L) &= A_{n2}m_1 + B_{n2}m_2 + C_{n2}m_3 + D_{n2}m_4 = 0 \\ \phi_{n2}''(L) &= -A_{n2}m_1 - B_{n2}m_2 + C_{n2}m_3 + D_{n2}m_4 = 0 \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

bulunur. (2.3.35) ifadeleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ -m_1 & -m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n2} \\ B_{n2} \\ C_{n2} \\ D_{n2} \end{bmatrix} \quad (2.3.36)$$

yada

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B_{2 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n2} \\ B_{n2} \\ C_{n2} \\ D_{n2} \end{bmatrix}, \quad B_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ -m_1 & -m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \quad (2.3.37)$$

şeklinde yazılabilir. Çatlak için (2.3.25), (2.3.26), (2.3.27) ve (2.3.28) ile verilen uygunluk şartları kullanılarak

$$n_1 A_{n1} + n_2 B_{n1} + n_3 C_{n1} + n_4 D_{n1} = B_{n2} + D_{n2} \quad (2.3.38)$$

$$n_1 A_{n1} + n_2 B_{n1} - n_3 C_{n1} - n_4 D_{n1} = B_{n2} - D_{n2} \quad (2.3.39)$$

$$-n_2 A_{n1} + n_1 B_{n1} + n_4 C_{n1} + n_3 D_{n1} = -A_{n2} + C_{n2} \quad (2.3.40)$$

$$[A_{n2} + C_{n2}] - [n_2 A_{n1} - n_1 B_{n1} + n_4 C_{n1} + n_3 D_{n1}] = \theta_1 \lambda_n [-B_{n2} + D_{n2}] \quad (2.3.41)$$

bulunur. (2.3.38), (2.3.39), (2.3.40) ve (2.3.41) ifadeleri de yine matris formunda

$$\begin{bmatrix} A_{n2} \\ B_{n2} \\ C_{n2} \\ D_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ C_{n1} \\ D_{n1} \end{bmatrix} \quad (2.3.42)$$

şeklinde yada

$$\begin{bmatrix} A_{n2} \\ B_{n2} \\ C_{n2} \\ D_{n2} \end{bmatrix} = T_{4 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ C_{n1} \\ D_{n1} \end{bmatrix} \quad (2.3.43)$$

ile gösterilebilir. Burada

$$T_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} n_2 - \beta n_1 & -n_1 - \beta n_2 & \beta n_3 & \beta n_4 \\ n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ -\beta n_1 & -\beta n_2 & n_4 + \beta n_3 & n_3 + \beta n_4 \\ 0 & 0 & n_3 & n_4 \end{bmatrix} \quad (2.3.44)$$

transfer matrisi olarak isimlendirilir.  $\beta$  ise

$$\left( \beta = \frac{\theta_1 \lambda_n}{2} \right) \quad (2.3.45)$$

ile verilir. Denklem (2.3.43), (2.3.37) de yerine yazılarak

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B_{2 \times 4} \times T_{4 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ C_{n1} \\ D_{n1} \end{bmatrix} = R_{2 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ C_{n1} \\ D_{n1} \end{bmatrix} \quad (2.3.46)$$

elde edilir.  $B_{n1} = D_{n1} = 0$  olduğu hatırlanarak,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R_{2 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ 0 \\ C_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.47)$$

bulunur. Burada,

$$R_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} \quad (2.3.48)$$

şeklindedir.  $R_{2 \times 4}$  matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} r_{11} &= b_{11}t_{11} + b_{12}t_{21} + b_{13}t_{31} + b_{14}t_{41} \\ r_{12} &= b_{11}t_{12} + b_{12}t_{22} + b_{13}t_{32} + b_{14}t_{42} \\ r_{13} &= b_{11}t_{13} + b_{12}t_{23} + b_{13}t_{33} + b_{14}t_{43} \\ r_{14} &= b_{11}t_{14} + b_{12}t_{24} + b_{13}t_{34} + b_{14}t_{44} \\ r_{21} &= b_{21}t_{11} + b_{22}t_{21} + b_{23}t_{31} + b_{24}t_{41} \\ r_{22} &= b_{21}t_{12} + b_{22}t_{22} + b_{23}t_{32} + b_{24}t_{42} \\ r_{23} &= b_{21}t_{13} + b_{22}t_{23} + b_{23}t_{33} + b_{24}t_{43} \\ r_{24} &= b_{21}t_{14} + b_{22}t_{24} + b_{23}t_{34} + b_{24}t_{44} \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

ile verilir. Öz fonksiyon katsayıları için  $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni} = 0$  bir önemsiz (trivial) çözümdür. Burada  $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$  için sıfırdan farklı bir çözümün varlığı

$$\det \begin{bmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{21} & r_{23} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.3.50)$$

olmasını gerektirir (Dettman, 1986). Bu şart kullanılarak frekans denklemi ( F ) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F = -n_2 + n_4 u_1 - o_1 + o_2 u_1 = 0 \quad (2.3.51)$$

$A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$  özfonksiyon katsayılarının tümü tek bir katsayı  $A_{n1}$  cinsinden

$$B_{n1} = 0, \quad C_{n1} = u_1 A_{n1}, \quad D_{n1} = 0 \quad (2.3.52)$$

$$A_{n2} = -o_1 A_{n1}, \quad B_{n2} = n_1 A_{n1}, \quad C_{n2} = -(o_2 u_1) A_{n1}, \quad D_{n2} = (n_3 u_1) A_{n1} \quad (2.3.53)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, denklemlerdeki karışıklığın önüne geçmek için, aşağıdaki kısaltmalar kullanılmıştır:

$$o_1 = \frac{n_1 m_2}{m_1}, \quad o_2 = \frac{n_3 m_4}{m_3}, \quad u_1 = \left( \frac{\theta_1 n_1 \lambda_n - o_1 - n_2}{\theta_1 n_3 \lambda_n + o_2 + n_4} \right) \quad (2.3.54)$$

Böylece tek taraflı açık çatlak ihtiva eden kirişin öz fonksiyonları

$$\phi_{n1}(x) = A_{n1} [\sin(\lambda_n x) + u_1 \sinh(\lambda_n x)], \quad 0 < x < L_1 \quad (2.3.55)$$

$$\phi_{n2}(x) = A_{n1} [-o_1 \sin \lambda_n (x - L_1) + n_1 \cos \lambda_n (x - L_1) - o_2 u_1 \sinh \lambda_n (x - L_1) + n_3 u_1 \cosh \lambda_n (x - L_1)],$$

$$L_1 < x < L \quad (2.3.56)$$

olarak bulunur. Burada,  $A_{n1}$  katsayısının tüm değerleri bir çözüm olmakla birlikte özfonksiyonların normunu 1 yapan  $A_{n1}$  değeri hesaplamalarda daha kullanışlıdır. Şu halde (2.1.59) de aşağıdaki gibi verilen

$$\|\phi_n(x)\| = \left( \int_0^L \phi_n^2(x) dx \right)^{1/2} = \left( \int_0^{L_1} \phi_{n1}^2(x) dx + \int_{L_1}^L \phi_{n2}^2(x) dx \right)^{1/2} = 1 \quad (2.2.57)$$

ifadesinde her bir özfonksiyon yerine yazılarak

$$A_{n1}^2 = \frac{1}{\int_0^{L_1} \left[ \frac{\phi_{n1}(x)}{A_{n1}} \right]^2 dx + \int_{L_1}^L \left[ \frac{\phi_{n2}(x)}{A_{n1}} \right]^2 dx} \quad (2.2.58)$$

şeklinde elde edilir. Burada integralin el ile hesabının oldukça zor olduğu görülmektedir. Ancak Ek.1.9 da verilen Matlab programı yardımı ile her bir  $\lambda_n$  değerine tekabül eden  $A_{n1}$  katsayısı ve diğer özfonksiyon katsayıları kolayca tespit edilebilir (Çizelge 2.3.3 ve Çizelge 2.3.4).

Frekans denklemi kullanılarak  $L=1$  m uzunluğunda ve  $H=B=0.01$  m kesite sahip kirişin, farklı çatlak konumu ve çatlak derinliği için ilk dört özdeğeri Çizelge 2.3.1 ve Çizelge 2.3.2 de gösterilmektedir. Her iki çizelgeden açıkça görülmektedir ki çatlak derinliği sıfıra, çatlak konumu ise kirişin her iki ucuna yaklaştıkça kirişin öz değerleri çatlak ihtiva etmeyen basit mesnetli kirişin öz değerlerine yakınsamaktadır.

**Çizelge 2.3.1.** Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin farklı çatlak derinlik oranları içinilk dört özdeğeri  $\left( \ell_1 = \frac{L_1}{L} = 0.5 \right)$ .

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\gamma = 0$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$
$\gamma = 0.25$	3.1323	6.2832	9.3973	12.5664
$\gamma = 0.50$	3.0938	6.2832	9.2883	12.5663
$\gamma = 0.75$	2.9250	6.2832	8.9005	12.5663

**Çizelge 2.3.2.** Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin farklı çatlak konumları için ilk dört özdeğeri ( $\gamma = 0.5$ ).

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\ell_1 = 0$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$
$\ell_1 = 0.25$	3.1171	6.1899	9.3553	12.5664
$\ell_1 = 0.50$	3.0938	6.2832	9.2883	12.5663
$\ell_1 = 0.75$	3.1171	6.1899	9.3553	12.5664
$\ell_1 = L$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$

**Çizelge 2.3.3.** Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin özfonksiyon katsayıları

$$(A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}), \left( \ell_1 = \frac{L_1}{L} = 0.5 \right).$$

$\gamma$	$A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.25	$A_{n1}$	1.4122	1.0203	1.4122	1.1725
	$B_{n1}$	0	0	0	0
	$C_{n1}$	0.0026	0.0864	-0.00035	-0.0042
	$D_{n1}$	0	0	0	0
	$A_{n2}$	-0.0066	1.0203	0.0194	-1.1725
	$B_{n2}$	1.4122	0	-1.4120	0.000017
	$C_{n2}$	-0.0065	-1.0017	0.0194	1.1304
	$D_{n2}$	0.0060	0.9980	-0.0194	-1.1304
0.50	$A_{n1}$	1.4037	1.0444	1.4047	1.2054
	$B_{n1}$	0	0	0	0
	$C_{n1}$	0.0137	0.0820	-0.0018	-0.0038
	$D_{n1}$	0	0	0	0
	$A_{n2}$	-0.0335	1.0444	0.0958	-1.2054
	$B_{n2}$	1.4033	0	-1.4014	-0.0004
	$C_{n2}$	-0.0336	-0.9504	0.0958	1.0058
	$D_{n2}$	0.0306	0.9469	-0.0958	-1.0058
0.75	$A_{n1}$	1.3710	1.1348	1.3860	1.2938
	$B_{n1}$	0	0	0	0
	$C_{n1}$	0.0652	0.0646	-0.0084	-0.0024
	$D_{n1}$	0	0	0	0
	$A_{n2}$	-0.1482	1.1348	0.3592	-1.2938
	$B_{n2}$	1.3629	0	-1.3386	0.00002
	$C_{n2}$	-0.1482	-0.7486	0.3592	0.6356
	$D_{n2}$	0.1331	0.7458	-0.3591	-0.6356

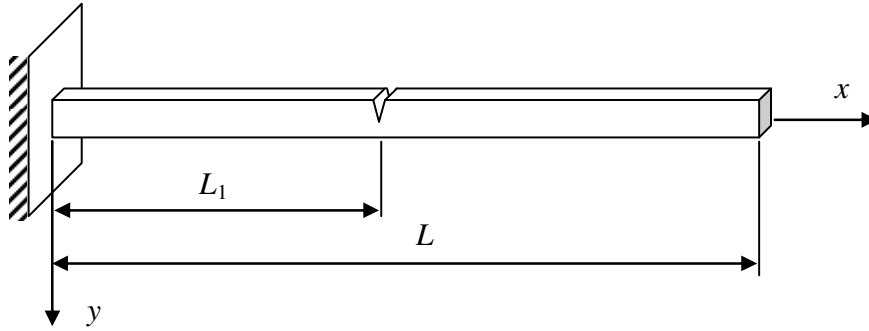


**Çizelge 2.3.4.** Çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin özfonksiyon katsayıları  
 $(A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}), (\gamma = 0.50)$ .

$\ell_1$	$A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.25	$A_{n1}$	1.4345	1.4019	1.3350	2.0004
	$B_{n1}$	0	0	0	0
	$C_{n1}$	0.0221	0.0279	0.0122	0.0962
	$D_{n1}$	0	0	0	0
	$A_{n2}$	0.9717	-0.0982	-1.0659	0.6668
	$B_{n2}$	1.0081	-0.0982	0.9602	-0.00001
	$C_{n2}$	-0.0194	0.0044	-0.0628	-1.1110
	$D_{n2}$	0.0191	-0.0044	0.0628	1.1110
0.50	$A_{n1}$	1.4037	1.0444	1.4047	1.2054
	$B_{n1}$	0	0	0	0
	$C_{n1}$	0.0137	0.0820	-0.0018	-0.0038
	$D_{n1}$	0	0	0	0
	$A_{n2}$	-0.0335	1.0444	0.0958	-1.2054
	$B_{n2}$	1.4033	0	-1.4014	-0.0004
	$C_{n2}$	-0.0336	-0.9504	0.0958	1.0058
	$D_{n2}$	0.0306	0.9469	-0.0958	-1.0058
0.75	$A_{n1}$	1.4002	1.4050	1.4347	0.6668
	$B_{n1}$	0	0	0	0
	$C_{n1}$	0.0037	-0.0012	0.00011	0.00017
	$D_{n1}$	0	0	0	0
	$A_{n2}$	-1.0205	0.0327	0.9274	2.0004
	$B_{n2}$	1.0081	-0.0326	0.9602	-0.000014
	$C_{n2}$	-0.0292	0.0016	-0.0640	-1.1151
	$D_{n2}$	0.0191	-0.0015	0.0628	1.1110

### 2.3.2. Çatlak ihtiva eden konsol kirişin serbest titreşimi

Konsol kirişte, bir ucun öteleme ve dönme yapamayacak şekilde tamamen sabitlenmesine karşılık, diğer uç tamamen serbesttir. Sabit uçta sınır şartları geometrik karakterde olup yer değiştirme ile ilgilidir. Buna mukabil, serbest uçtaki sınır şartları dinamik karakterdedir. Şekil 2.3.4 de  $L_0$  konumunda tek yönlü açık çatlak ihtiva eden bir konsol kiriş gösterilmektedir.



Şekil 2.3.4.  $x = L_1$  konumunda açık çatlak ihtiva eden konsol kiriş.

Euler – Bernoulli kiriş teorisi kullanılarak çatlak tarafından iki parçaya ayrılan böyle bir kirişin hareket denklemleri

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L_1 \quad (2.3.59)$$

$$EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0, \quad L_1 \leq x < L \quad (2.3.60)$$

şeklinde yazılabilir. Konsol kirişin her iki ucundaki sınır şartları

$$y_1(0, t) = y_1'(0, t) = 0 \quad (2.3.61)$$

$$y_2''(L, t) = y_2'''(L, t) = 0 \quad (2.3.62)$$

ile verilir. Çatlağın bulunduğu noktada yerdeğiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin eşit olduğu akılda tutularak, çatlak konumundaki uygunluk şartları denklem (2.3.4), (2.3.5) ve (2.4.6) dan

$$\begin{aligned} y_1(L_1^-, t) &= y_2(L_1^+, t), \\ y_1''(L_1^-, t) &= y_2''(L_1^+, t), \\ y_1'''(L_1^-, t) &= y_2'''(L_1^+, t) \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

şeklinde yazılır. Kirişin çatlak ihtiva eden noktasındaki süreksizlik ise denklem (2.3.7) den

$$y_2'(L_1^+, t) - y_1'(L_1^-, t) = \theta_1 y_2''(L_1^+, t) \quad (2.3.64)$$

ile ifade edilir. Kirişin yer değiştirmesinin

$$y_{(i)}(x, t) = \phi_{ni}(x) q_{ni}(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.65)$$

şeklinde ayrık bir çözümünün var olduğu kabul edilsin. Şu halde, önerilen bu çözüm (2.3.59) ve (2.3.60) ile verilen hareket denklemlerinde yerine yazılarak

$$\phi_{n1}^{IV}(x) - \lambda_n^4 \phi_{n1}(x) = 0, \quad 0 < x < L_1 \quad (2.3.66)$$

$$\phi_{n2}^{IV}(x) - \lambda_n^4 \phi_{n2}(x) = 0, \quad L_1 \leq x < L \quad (2.3.67)$$

bulunur. Denklem (2.3.61) ve (2.3.62) ile verilen kirişin uç şartları ve  $y(x, t)$  çözümü kullanılarak

$$\phi_{n1}(0) = 0, \quad \phi_{n1}'(0) = 0 \quad (2.3.68)$$

$$\phi_{n2}''(L) = 0, \quad \phi_{n2}'''(L) = 0 \quad (2.3.69)$$

elde edilir. Benzer şekilde, çatlakın bulunduğu nokta için denklem (2.3.63) ve (2.3.64) ile verilen şartlar (2.3.65) çözümü ile birlikte yazılarak

$$\begin{aligned}\phi_{n1}(L_1^-) &= \phi_{n2}(L_1^+), \\ \phi_{n1}''(L_1^-) &= \phi_{n2}''(L_1^+), \\ \phi_{n1}'''(L_1^-) &= \phi_{n2}'''(L_1^+)\end{aligned}\tag{2.3.70}$$

$$\phi_{n2}'(L_1^-) - \phi_{n1}'(L_1^+) = \theta_1 \phi_{n2}''(L_1^+)\tag{2.3.71}$$

bulunur. (2.3.66) ve (2.3.67) ile verilen homojen adi diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$\begin{aligned}\phi_{n1}(x) &= A_{n1} \sin(\lambda_n x) + B_{n1} \cos(\lambda_n x) + C_{n1} \sinh(\lambda_n x) + D_{n1} \cosh(\lambda_n x), \\ 0 < x < L_1\end{aligned}\tag{2.3.72}$$

$$\begin{aligned}\phi_{n2}(x) &= A_{n2} \sin \lambda_n (x - L_1) + B_{n2} \cos \lambda_n (x - L_1) + C_{n2} \sinh \lambda_n (x - L_1) + D_{n2} \cosh \lambda_n (x - L_1), \\ L_1 < x < L\end{aligned}\tag{2.3.73}$$

şeklinde verilmişti. Burada,  $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$  öz fonksiyon sabitleri, sınır şartları kullanılarak hesap edilecektir. (2.3.72) çözümü ve (2.3.68) uç şartları yardımı ile

$$\begin{aligned}\phi_{n1}(0) &= A_{n1} \sin(\lambda_n 0) + B_{n1} \cos(\lambda_n 0) + C_{n1} \sinh(\lambda_n 0) + D_{n1} \cosh(\lambda_n 0) = 0, \\ D_{n1} &= -B_{n1}\end{aligned}\tag{2.3.74}$$

$$\begin{aligned}\phi_{n1}'(0) &= \lambda_n [A_{n1} \cos(\lambda_n 0) - B_{n1} \sin(\lambda_n 0) + C_{n1} \cosh(\lambda_n 0) + D_{n1} \sinh(\lambda_n 0)] = 0, \\ C_{n1} &= -A_{n1}\end{aligned}\tag{2.3.75}$$

elde edilir. (2.3.31) de verilen kısaltmalar kullanılarak kirişin ikinci kısmı için (2.3.73) ile verilen özfonksiyon (2.3.69) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\phi_{n2}''(L) &= -m_1 A_{n2} - m_2 B_{n2} + m_3 C_{n2} + m_4 D_{n2} = 0 \\ \phi_{n2}'''(L) &= -m_2 A_{n2} + m_1 B_{n2} + m_4 C_{n2} + m_3 D_{n2} = 0\end{aligned}\quad (2.3.76)$$

bulunur. (2.3.76) ifadeleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 & m_3 & m_4 \\ -m_2 & m_1 & m_4 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n2} \\ B_{n2} \\ C_{n2} \\ D_{n2} \end{bmatrix}\quad (2.3.77)$$

yada

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B_{2 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n2} \\ B_{n2} \\ C_{n2} \\ D_{n2} \end{bmatrix}, \quad B_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 & m_3 & m_4 \\ -m_2 & m_1 & m_4 & m_3 \end{bmatrix}\quad (2.3.78)$$

şeklinde yazılabilir. Çatlak için (2.3.70) ve (2.3.71) ile verilen şartlar basit mesnetli kiriş için verilen şartlarla aynıdır. Şu halde (2.3.44) de verilen transfer matrisi burada da aynen kullanılabilir.  $B_{2 \times 4}$  ve  $T_{4 \times 4}$  matrisleri (2.3.46) da yerine yazılarak

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B_{2 \times 4} \times T_{4 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ C_{n1} \\ D_{n1} \end{bmatrix} = R_{2 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ C_{n1} \\ D_{n1} \end{bmatrix} = R_{2 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ -A_{n1} \\ -B_{n1} \end{bmatrix}\quad (2.3.79)$$

elde edilir ( $C_{n1} = -A_{n1}$ ,  $D_{n1} = -B_{n1}$ ). Burada,

$$R_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix}\quad (2.3.80)$$

şeklindedir. Konsol kiriş için non-trivial çözümün varlığı

$$\det \begin{bmatrix} r_{11} - r_{13} & r_{12} - r_{14} \\ r_{21} - r_{23} & r_{22} - r_{24} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.3.81)$$

olmasını gerektirir. Bu şart kullanılarak frekans denklemi ( F ) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F = [-u_1.m_2 + n_1m_1 + u_3m_4 - n_3m_3] + u_5 [-u_2.m_2 + n_2m_1 + u_4m_4 - n_4m_3] = 0 \quad (2.3.82)$$

Ayrıca, gerekli düzenlemeler yapılarak buradan

$$\begin{aligned} B_{n1} &= (u_5) A_{n1} \\ C_{n1} &= -A_{n1} \\ D_{n1} &= (-u_5) A_{n1} \end{aligned} \quad (2.3.83)$$

$$\begin{aligned} A_{n2} &= (u_1 + u_2u_5) A_{n1} \\ B_{n2} &= (n_1 + n_2u_5) A_{n1} \\ C_{n2} &= (u_3 + u_4u_5) A_{n1} \\ D_{n2} &= (-n_3 + n_4u_5) A_{n1} \end{aligned} \quad (2.3.84)$$

şeklinde tüm katsayılar  $A_{n1}$  cinsinden ifade edilir. Burada aşağıdaki kısaltmalar kullanılmıştır:

$$\begin{aligned} u_1 &= n_2 - \beta n_1 - \beta n_3, \\ u_2 &= -n_1 - \beta n_2 - \beta n_4, \\ u_3 &= -n_4 - \beta n_1 - \beta n_3, \\ u_4 &= -n_3 - \beta n_2 - \beta n_4 \end{aligned} \quad (2.3.85)$$

$$u_5 = \frac{-u_1m_1 - n_1m_2 + u_3m_3 - n_3m_4}{u_2m_1 + n_2m_2 - u_4m_3 + n_4m_4} \quad (2.3.86)$$

Böylece tek taraflı açık çatlak ihtiva eden kirişin öz fonksiyonları

$$\begin{aligned} \phi_{n1}(x) &= A_{n1} \left[ \sin(\lambda_n x) + u_5 \cos(\lambda_n x) - \sinh(\lambda_n x) - u_5 \cosh(\lambda_n x) \right], \\ &0 < x < L_1 \end{aligned} \quad (2.3.87)$$

$$\begin{aligned} \phi_{n2}(x) &= A_{n1} \left[ (u_1 + u_2 u_5) \sin \lambda_n (x - L_1) + (n_1 + n_2 u_5) \cos \lambda_n (x - L_1) \right. \\ &\left. + (u_3 + u_4 u_5) \sinh \lambda_n (x - L_1) + (-n_3 + n_4 u_5) \cosh \lambda_n (x - L_1) \right], \quad L_1 < x < L \end{aligned} \quad (2.3.88)$$

olarak bulunur. Denklem (2.1.59) kullanılarak özfonksiyonların normunu 1 yapan  $A_{n1}$  değeri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\|\phi_n(x)\| = \left( \int_0^L \phi_n^2(x) dx \right)^{1/2} = \left( \int_0^{L_1} \phi_{n1}^2(x) dx + \int_{L_1}^L \phi_{n2}^2(x) dx \right)^{1/2} = 1 \quad (2.3.89)$$

Her bir özfonksiyon yerine yazılarak

$$A_{n1}^2 = \frac{1}{\int_0^{L_1} \left[ \frac{\phi_{n1}(x)}{A_{n1}} \right]^2 dx + \int_{L_1}^L \left[ \frac{\phi_{n2}(x)}{A_{n1}} \right]^2 dx} \quad (2.3.90)$$

elde edilir. İntegralin hesabının oldukça zor olduğu görülmektedir. Ancak Ek.1.9 da verilen Matlab programı yardımı ile her bir  $\lambda_n$  değerine tekabül eden  $A_1$  katsayıları ve diğer katsayılar kolayca tespit edilebilir (Çizelge 2.3.7 ve Çizelge 2.3.8).

Frekans denklemi kullanılarak  $L = 1m$  uzunluğunda ve  $H = B = 0.01m$  kesite sahip kirişin, farklı çatlak konumu ve çatlak derinliği için ilk dört özdeğeri Çizelge 2.3.5 ve Çizelge 2.3.6 da gösterilmektedir. Her iki çizelgeden açıkça görülmektedir ki çatlak derinliği sıfıra, çatlak konumu ise kirişin serbest ucuna yaklaştıkça, kirişin öz değerleri çatlak ihtiva etmeyen konsol kirişin öz değerlerine yakınsamaktadır.

**Çizelge 2.3.5.** Konsol kirişin farklı çatlak derinlik oranları için ilk dört özdeğeri

$$\left( \ell_1 = \frac{L_1}{L} = 0.4 \right)$$

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\gamma = 0$	1.8751	4.6941	7.8548	10.9955
$\gamma = 0.25$	1.8625	4.6835	7.8434	10.9880
$\gamma = 0.50$	1.8624	4.6439	7.8022	10.9604
$\gamma = 0.75$	1.8402	4.5635	7.7245	10.9077

**Çizelge 2.3.6.** Konsol kirişin farklı çatlak konumları için ilk dört özdeğeri

$$(\gamma = 0.5)$$

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\ell_1 = 0.25$	1.8498	4.6915	7.7742	10.8745
$\ell_1 = 0.50$	1.8682	4.6208	7.8547	10.8349
$\ell_1 = 0.75$	1.8745	4.6678	7.7274	10.8491
$\ell_1 = L$	1.8751	4.6941	7.8548	10.9955



**Çizelge 2.3.7.** Konsol kirişin özfonksiyon katsayıları ( $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ ).

$$\left( \ell_1 = \frac{L_1}{L} = 0.4 \right)$$

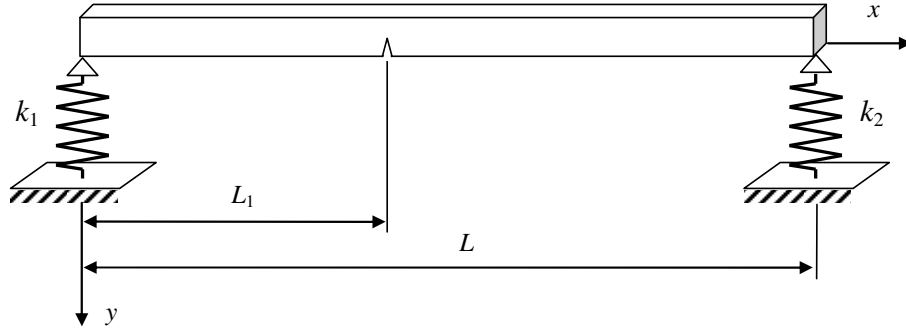
$\gamma$	$A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.25	$A_{n1}$	0.4415	0.0346	0.00051	$\cong 0$
	$B_{n1}$	-0.6009	-0.0341	-0.00051	$\cong 0$
	$C_{n1}$	-0.4415	-0.0346	-0.00051	$\cong 0$
	$D_{n1}$	0.6009	0.0341	0.00051	$\cong 0$
	$A_{n2}$	0.7354	0.0216	-0.00052	$\cong 0$
	$B_{n2}$	-0.1424	0.0432	0.00051	$\cong 0$
	$C_{n2}$	0.2856	0.0129	0.00003	$\cong 0$
	$D_{n2}$	0.4153	0.0035	0.00003	$\cong 0$
0.50	$A_{n1}$	0.4271	0.0318	0.00045	$\cong 0$
	$B_{n1}$	-0.5792	-0.0316	-0.00045	$\cong 0$
	$C_{n1}$	-0.4271	-0.0318	-0.00045	$\cong 0$
	$D_{n1}$	0.5792	0.0316	0.00045	$\cong 0$
	$A_{n2}$	0.7227	0.0187	-0.00049	$\cong 0$
	$B_{n2}$	-0.1363	0.0394	0.00046	$\cong 0$
	$C_{n2}$	0.2896	0.0121	0.00003	$\cong 0$
	$D_{n2}$	0.3991	0.0044	0.00005	$\cong 0$
0.75	$A_{n1}$	0.4051	0.0266	0.00035	$\cong 0$
	$B_{n1}$	-0.5451	-0.0270	-0.00035	$\cong 0$
	$C_{n1}$	-0.4051	-0.0266	-0.00034	$\cong 0$
	$D_{n1}$	0.5451	0.0270	0.00035	$\cong 0$
	$A_{n2}$	0.7088	0.0138	-0.00043	$\cong 0$
	$B_{n2}$	-0.1320	0.0326	0.00037	$\cong 0$
	$C_{n2}$	0.3031	0.0105	0.00002	$\cong 0$
	$D_{n2}$	0.3738	0.0055	0.00007	$\cong 0$

**Çizelge 2.3.8.** Konsol kirişin özfonksiyon katsayıları ( $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ ).  
( $\gamma = 0.50$ )

$\ell_1$	$A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.25	$A_{n1}$	0.4137	0.0533	0.0014	0.00003
	$B_{n1}$	-0.5568	-0.0527	-0.0015	-0.00003
	$C_{n1}$	-0.4137	-0.0533	-0.0014	-0.00003
	$D_{n1}$	0.5568	0.0527	0.0015	0.00003
	$A_{n2}$	0.6405	0.0682	-0.00064	-0.00002
	$B_{n2}$	-0.3138	0.0288	0.0019	0.00004
	$C_{n2}$	0.1411	0.0089	0.00003	$\cong 0$
	$D_{n2}$	0.4192	0.0154	0.00030	$\cong 0$
0.50	$A_{n1}$	0.4328	0.0218	0.00019	$\cong 0$
	$B_{n1}$	-0.5885	-0.0216	-0.00019	$\cong 0$
	$C_{n1}$	-0.4328	-0.0218	-0.00019	$\cong 0$
	$D_{n1}$	0.5885	0.0216	0.00019	$\cong 0$
	$A_{n2}$	0.7426	-0.00094	-0.00027	$\cong 0$
	$B_{n2}$	-0.0019	0.0306	$\cong 0$	$\cong 0$
	$C_{n2}$	0.4423	0.0138	0.00003	$\cong 0$
	$D_{n2}$	0.3987	0.0011	$\cong 0$	$\cong 0$
0.75	$A_{n1}$	0.4944	0.0084	0.00003	$\cong 0$
	$B_{n1}$	-0.6735	-0.0082	-0.00003	$\cong 0$
	$C_{n1}$	-0.4944	-0.0084	-0.00003	$\cong 0$
	$D_{n1}$	0.6735	0.0082	0.00003	$\cong 0$
	$A_{n2}$	0.7495	-0.0113	0.00002	$\cong 0$
	$B_{n2}$	0.3772	0.0048	-0.00004	$\cong 0$
	$C_{n2}$	1.4891	0.0218	0.00004	$\cong 0$
	$D_{n2}$	0.5083	-0.0022	$\cong 0$	$\cong 0$

### 2.3.3. Çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kirişin öz fonksiyonları

Şekil 2.3.5. de  $x = L_1$  konumunda tek taraflı açık çatlak ihtiva eden,  $L$  uzunluğunda, her iki ucundan elastik mesnetli, düz bir kiriş gösterilmektedir. Kirişin her iki ucundaki elastik mesnetlerin rijitlikleri  $k_1$  ve  $k_2$  dir. Şu halde Euler – Bernoulli kiriş teorisi kullanılarak çatlak tarafından iki parçaya ayrılan kirişin hareket denklemleri



Şekil 2.3.5.  $x = L_1$  konumunda tek taraflı açık çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kiriş

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L_1 \quad (2.3.91)$$

$$EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0, \quad L_1 < x < L \quad (2.3.92)$$

şeklinde verilmektedir.

Elastik mesnetli bir kiriş için sınır şartları (2.1.31) den

$$EI \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \Big|_{(0,t)} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \Big|_{(L,t)} = 0 \quad (2.3.93)$$

$$EI \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} \Big|_{(0,t)} = k_1 y_1(0,t), \quad EI \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} \Big|_{(L,t)} = -k_2 y_2(L,t) \quad (2.3.94)$$

şeklinde yazılır. Çatlağın bulunduğu noktadaki şartlar (2.3.4), (2.3.5) (2.3.6) ve (2.3.7) de aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned} y_1(L_1^-, t) &= y_2(L_1^+, t), \\ y_1''(L_1^-, t) &= y_2''(L_1^+, t), \\ y_1'''(L_1^-, t) &= y_2'''(L_1^+, t) \end{aligned} \quad (2.3.95)$$

$$y_2'(L_1^+, t) - y_1'(L_1^-, t) = \theta_1 y_2''(L_1^+, t), \quad (2.3.86)$$

Şu halde, kirişin yer değiştirmesinin yine

$$y_{(i)}(x, t) = \phi_{ni}(x) q_{ni}(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.97)$$

şeklinde ayrık bir çözümünün var olduğu kabul edilir ve bu çözüm denklem (2.3.96) ve (2.3.92) de yerine yazılırsa

$$\phi_{n1}^{IV}(x) - \lambda_n^4 \phi_{n1}(x) = 0, \quad 0 < x < L_1 \quad (2.3.98)$$

$$\phi_{n2}^{IV}(x) - \lambda_n^4 \phi_{n2}(x) = 0, \quad L_1 \leq x < L \quad (2.3.99)$$

bulunur. Denklem (2.3.97) de önerilen çözüm (2.3.93) ve (2.3.94) ile verilen uç şartlarına tatbik edilirse

$$\phi_{n1}''(0) = 0, \quad \phi_{n1}'''(0) = \frac{k_1}{EI} \phi_{n1}(0) \quad (2.3.100)$$

$$\phi_{n2}''(L) = 0, \quad \phi_{n2}'''(L) = \frac{-k_2}{EI} \phi_{n2}(L) \quad (2.3.101)$$

elde edilir. Son olarak, (2.3.97) çözümü çatlak için verilen (2.3.95) ve (2.3.96) şartlarına tatbik edilirse

$$\begin{aligned}\phi_{n1}(L_1^-) &= \phi_{n2}(L_1^+), \\ \phi_{n1}''(L_1^-) &= \phi_{n2}''(L_1^+),\end{aligned}\tag{2.3.102}$$

$$\phi_{n1}'''(L_1^-) = \phi_{n2}'''(L_1^+)$$

$$\phi_{n2}'(L_1^-) - \phi_{n1}'(L_1^+) = \theta_1 \phi_{n2}''(L_1^+)\tag{2.3.103}$$

bulunur.

(2.3.98) ve (2.3.99) ile verilen homojen adi diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$\begin{aligned}\phi_{n1}(x) &= A_{n1} \sin(\lambda_n x) + B_{n1} \cos(\lambda_n x) + C_{n1} \sinh(\lambda_n x) + D_{n1} \cosh(\lambda_n x), \\ 0 < x < L_1\end{aligned}\tag{2.3.104}$$

$$\begin{aligned}\phi_{n2}(x) &= A_2 \sin \lambda(x - L_1) + B_2 \cos \lambda(x - L_1) + C_2 \sinh \lambda(x - L_1) + D_2 \cosh \lambda(x - L_1), \\ L_1 < x < L\end{aligned}\tag{2.3.105}$$

şeklinde kolaylıkla ifade edilebilir. (2.3.104) çözümü ve (2.3.100) uç şartları yardımı ile

$$-A_{n1} \sin(\lambda_n 0) - B_{n1} \cos(\lambda_n 0) + C_{n1} \sinh(\lambda_n 0) + D_{n1} \cosh(\lambda_n 0) = 0\tag{2.3.106}$$

$$-B_{n1} + D_{n1} = 0\tag{2.3.107}$$

$$\begin{aligned}\lambda_n^3 [-A_{n1} \cos(\lambda_n 0) + B_{n1} \sin(\lambda_n 0) + C_{n1} \cosh(\lambda_n 0) + D_{n1} \sinh(\lambda_n 0)] \\ = \frac{k_1}{EI} [A_{n1} \sin(\lambda_n 0) + B_{n1} \cos(\lambda_n 0) + C_{n1} \sinh(\lambda_n 0) + D_{n1} \cosh(\lambda_n 0)]\end{aligned}\tag{2.3.108}$$

$$\lambda_n^3 [-A_{n1} + C_{n1}] = \frac{k_1}{EI} [B_{n1} + D_{n1}]\tag{2.3.109}$$

elde edilir. Buradan

$$D_{n1} = B_{n1}, \quad C_{n1} = \frac{2k_1}{EI\lambda_n^3} B_{n1} + A_{n1} \quad (2.3.110)$$

bulunur. (2.3.31) de verilen kısaltmalar kullanılarak kirişin ikinci kısmı için (2.3.110) ile verilen özfonksiyon (2.3.101) da yerine yazılır.

$$-A_2 m_1 - B_2 m_2 + C_2 m_3 + D_2 m_4 = 0 \quad (2.3.111)$$

$$\lambda_n^3 [-A_{n2} m_2 + B_{n2} m_1 + C_{n2} m_4 + D_{n2} m_3] = -\frac{k_2}{EI} [A_{n2} m_1 + B_{n2} m_2 + C_{n2} m_3 + D_{n2} m_4] \quad (2.3.112)$$

İfadeler düzenlenerek, aşağıdaki gibi yeni katsayılar tanımlanırsa

$$K_1 = \frac{k_1}{EI\lambda_n^3}, \quad K_2 = \frac{-k_2}{EI\lambda_n^3} \quad (2.3.113)$$

$B_{2 \times 4}$  matrisi,

$$B_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 & m_3 & m_4 \\ (-m_2 - K_2 m_1) & (m_1 - K_2 m_2) & (m_4 - K_2 m_3) & (m_3 - K_2 m_4) \end{bmatrix} \quad (2.3.114)$$

şeklinde yazılabilir. Çatlak için (2.3.70) ve (2.3.71) ile verilen şartlar basit mesnetli kiriş için verilen şartlarla aynıdır. Şu halde (2.3.44) de verilen transfer matrisi burada da aynen kullanılabilir.  $B_{2 \times 4}$  ve  $T_{4 \times 4}$  matrisleri (2.3.46) da yerine yazılarak

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B_{2 \times 4} \times T_{4 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ C_{n1} \\ D_{n1} \end{bmatrix} = R_{2 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ C_{n1} \\ D_{n1} \end{bmatrix} = R_{2 \times 4} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ B_{n1} \\ 2K_1 B_{n1} + A_{n1} \\ B_{n1} \end{bmatrix} \quad (2.3.115)$$

elde edilir ( $C_{n1} = 2K_1 B_{n1} + A_{n1}$ ,  $D_{n1} = B_{n1}$ ). Burada,

$$R_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} \quad (2.3.116)$$

şeklindedir. Elastik mesnetli kiriş için non – trivial çözümün varlığı

$$\det \begin{bmatrix} r_{11} - r_{13} & r_{12} - r_{14} \\ r_{21} - r_{23} & r_{22} - r_{24} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.3.117)$$

olmasını gerektirir. Bu şart kullanılarak frekans denklemi ( F ) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F = (s_1 - s_2 h_1) m_1 + (n_1 - n_2 h_1) m_2 - (s_3 - s_4 h_1) m_3 - (n_3 - s_5 h_1) m_4 = 0 \quad (2.3.118)$$

Ayrıca, gerekli düzenlemeler yapılarak buradan

$$\begin{aligned} B_{n1} &= (h_1) A_{n1} \\ C_{n1} &= (2K_1 h_1 + 1) A_{n1} \\ D_{n1} &= (h_1) A_{n1} \end{aligned} \quad (2.3.119)$$

$$\begin{aligned} A_{n2} &= (s_1 + s_2 h_1) A_{n1} \\ B_{n2} &= (n_1 + n_2 h_1) A_{n1} \\ C_{n2} &= (s_3 + s_4 h_1) A_{n1} \\ D_{n2} &= [(2K_1 h_1 + 1) n_3 + n_4 h_1] A_{n1} \end{aligned} \quad (2.3.120)$$

olacak şekilde tüm katsayılar  $A_{n1}$  cinsinden ifade edilebilir. Burada aşağıdaki kısaltmalar kullanılmıştır :

$$\begin{aligned}
s_1 &= n_2 - n_1\beta + n_3\beta \\
s_2 &= -n_1 + n_4\beta - n_2\beta + 2K_1n_3\beta \\
s_3 &= n_4 + n_3\beta - n_1\beta \\
s_4 &= n_3 + n_4\beta - n_2\beta + 2K_1(n_4 + n_3\beta)
\end{aligned} \tag{2.3.121}$$

$$h_1 = -\frac{n_1m_1 + s_1m_2 + n_3m_3 + s_3m_4 - K_2(s_1m_1 + n_1m_2 + s_3m_3 + n_3m_4)}{n_2m_1 - s_2m_2 + n_4m_3 + s_4m_4 - K_2(s_2m_1 + n_2m_2 + s_4m_3 + n_4m_4 + 2K_1n_3m_4) + 2K_1m_3n_3} \tag{2.3.122}$$

Böylece tek taraflı açık çatlak ihtiva eden kirişin öz fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\phi_{n1}(x) &= A_{n1} \left[ \sin(\lambda_n x) + h_1 \cos(\lambda_n x) + (2K_1h_1 + 1) \sinh(\lambda_n x) + h_1 \cosh(\lambda_n x) \right], \\
0 < x < L_1
\end{aligned} \tag{2.3.123}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{n2}(x) &= A_{n1} \left[ (s_1 + s_2h_1) \sin \lambda_n(x - L_1) + (n_1 + n_2h_1) \cos \lambda_n(x - L_1) \right. \\
&\left. + (s_3 + s_4h_1) \sinh \lambda_n(x - L_1) + [(2K_1h_1 + 1)n_3 + n_4h_1] \cosh \lambda_n(x - L_1) \right], \quad L_1 < x < L
\end{aligned} \tag{2.3.124}$$

olarak bulunur. Denklem (2.1.59) kullanılarak özfonksiyonların normunu 1 yapan  $A_{n1}$  değeri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\|\phi_n(x)\| = \left( \int_0^L \phi_n^2(x) dx \right)^{1/2} = \left( \int_0^{L_1} \phi_{n1}^2(x) dx + \int_{L_1}^L \phi_{n2}^2(x) dx \right)^{1/2} = 1 \tag{2.2.125}$$

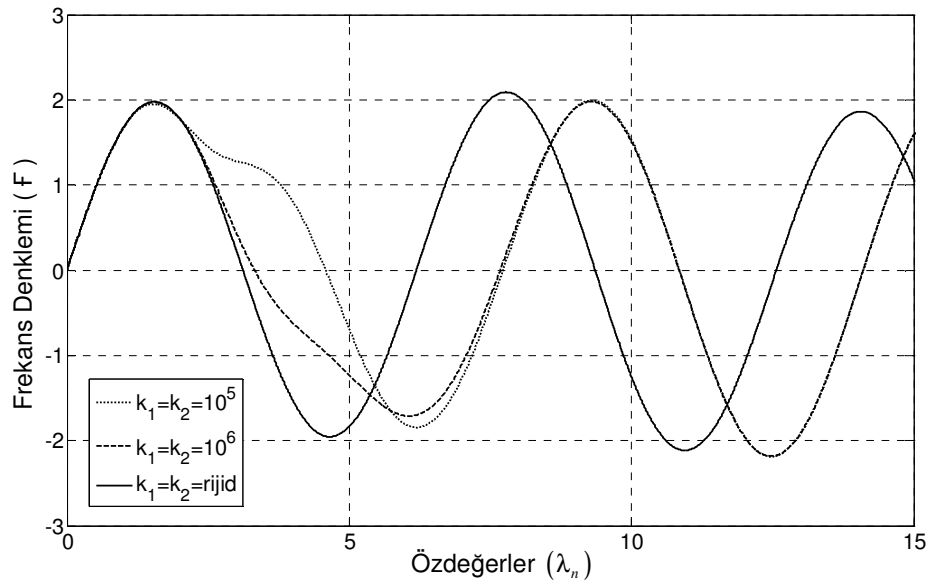
$\phi_{n1}(x)$  ve  $\phi_{n2}(x)$  özfonksiyonları yerlerine yazılarak

$$A_{n1}^2 = \frac{1}{\int_0^{L_1} \left[ \frac{\phi_{n1}(x)}{A_{n1}} \right]^2 dx + \int_{L_1}^L \left[ \frac{\phi_{n2}(x)}{A_{n1}} \right]^2 dx} \tag{2.2.126}$$

bulunur.



Frekans denklemi kullanılarak  $L=1$  m uzunluğunda ve  $H=B=0.01$  m kesite sahip kirişin, farklı yay rijitlikleri için ilk dört özdeğeri Şekil 2.3.6 ve Çizelge 2.3.9 da gösterilmektedir. Her iki çizelgeden açıkça görülmektedir ki yay rijitliği sonsuza yaklaştıkça kirişin öz değerleri basit mesnetli kirişin öz değerlerine yakınsamaktadır. Ek.1.12 ve Ek.1.13 de verilen Matlab programları yardımı ile  $\lambda_n$  değerleri ve her bir  $\lambda_n$  değerine tekabül eden  $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$  katsayıları kolayca tespit edilebilir (Çizelge 2.3.10).



**Şekil 2.3.6.** Çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kirişin ilk dört özdeğeri;  
( $\ell_1 = L_1 / L = 0.25$ ,  $\gamma = 0.5$ )

**Çizelge 2.3.9.** Çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kirişin farklı yay rijitlikleri için ilk dört özdeğeri. ( $\ell_1 = L_1 / L = 0.25$ ,  $\gamma = 0.5$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$k_1 = k_2 = 10^5$	4.5828	7.7239	10.8512	14.1057
$k_1 = k_2 = 10^6$	3.3221	7.6740	10.8451	14.1044
$k_1 = k_2 = \infty$	3.1171	6.1899	9.3553	12.5664

**Çizelge 2.3.10.** Çatlak ihtiva eden elastik mesnetli kirişin farklı yay rijitlikleri için özfonksiyon katsayıları  $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ . ( $\ell_1 = L_1 / L = 0.25$ ,  $\gamma = 0.5$ )

$k_1 = k_2$	$A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$10^5$	$A_{n1}$	1.6288	1.4522	1.2284	1.1395
	$B_{n1}$	-0.1198	-0.4043	-0.6363	-0.8038
	$C_{n1}$	0.1787	0.4299	0.6482	0.8058
	$D_{n1}$	-0.1198	-0.4043	-0.6363	-0.8038
	$A_{n2}$	0.6803	-0.3133	-1.0314	-1.4262
	$B_{n2}$	1.4345	1.5015	1.0895	0.3172
	$C_{n2}$	0.0394	-0.0314	-0.0468	-0.0105
	$D_{n2}$	0.0451	0.0275	0.0467	0.0105
$10^6$	$A_{n1}$	1.4072	1.4625	1.4044	1.4930
	$B_{n1}$	-0.0043	-0.0538	-0.1378	-0.2901
	$C_{n1}$	0.0465	0.0761	0.1454	0.2884
	$D_{n1}$	-0.0043	-0.0538	-0.1378	-0.2901
	$A_{n2}$	0.8999	-0.6086	-1.3326	-1.4361
	$B_{n2}$	1.0360	1.3933	0.7111	-0.2911
	$C_{n2}$	0.0071	-0.0753	-0.0471	0.0368
	$D_{n2}$	0.0374	0.0665	0.0478	-0.0369
$\infty$	$A_{n1}$	1.4344	1.4019	1.3379	1.4142
	$B_{n1}$	0	0	0	0
	$C_{n1}$	0.0222	0.0279	0.0128	0
	$D_{n1}$	0	0	0	0
	$A_{n2}$	0.9718	-0.0983	-1.0620	-1.4142
	$B_{n2}$	1.0080	1.4016	0.9623	-0.00001
	$C_{n2}$	-0.0195	-0.0625	-0.0657	0
	$D_{n2}$	0.0191	0.0625	0.0656	0

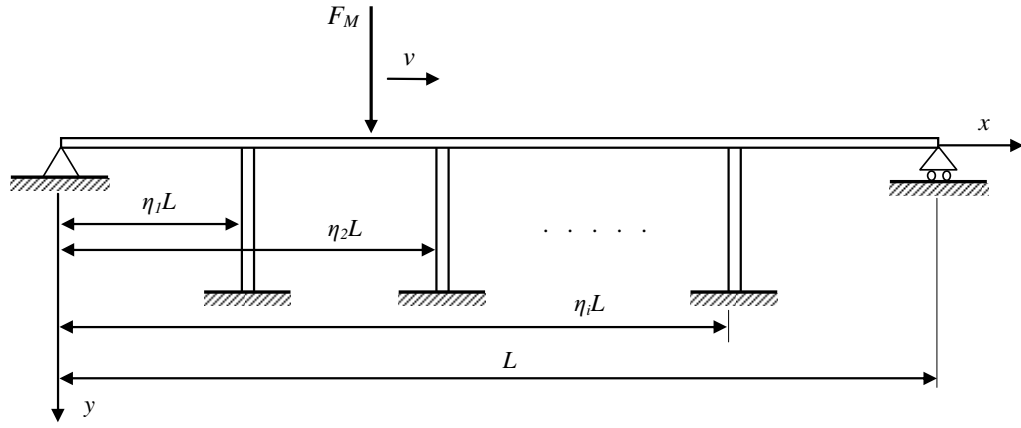
## 2.4. Hareketli Kuvvetin Etkisi Altındaki Kirişlerin Titreşimleri

Bu bölümde hareketli kuvvetin etkisi altındaki farklı şarlara haiz kirişlerin dinamik davranışları Euler – Bernoulli kiriş teorisi kullanılarak incelenmektedir. İlk olarak dikey destek ayağı ihtiva eden kirişlerin dinamik davranışları tespit edilecektir. Burada, destek ayaklarının her biri yay ve damperden oluşan bir sistem olarak modellenmektedir. Ardından hafif eğriliğe sahip kirişlerin dinamik davranışları ele alınacak ve son olarak çatlak ihtiva eden kirişlerin hareketli kuvvetin etkisi altındaki dinamik davranışları tespit edilecektir. Kiriş üzerindeki çatlak, sertliği çatlak derinliği ve geometrisi ile değişen birer kütsüz dönme yayı olarak modellenmektedir.

### 2.4.1. Hareketli bir kuvvetin etkisi altındaki destek ayağı ihtiva eden kirişin titreşimi

Kiriş dayanımını artırmak için kullanılan destek ayaklarının her biri, yay ve damperden ibaret ideal bir eleman olarak modellenebilir. Bu model ile destek ayaklarındaki tepki kuvvetleri, kiriş üzerine yayılı birer kuvvet olarak ifade edilir ve böylece daha az sınır şartı kullanılarak problemin çözümü elde edilir. Bu yöntemle ne kadar çok sayıda kolon mevcut olursa olsun, çözüm bölgesi parçalanmadığı ve ekstra sınır şartları tanımlanmadığı için çözüme oldukça basit işlemlerle ulaşılabilmektedir. Aksi takdirde her bir kolon için sınır şartları tanımlamak ve kiriş açıklığı adedince hareket denklemini çözmek gerekmektedir.

Bu bölümde hareketli yükün tesiri altındaki sayısız destek ayağı ihtiva eden basit mesnetli bir kirişin dinamik davranışı Fourier serisi açılımı yardımı ile incelenmektedir. Bu yolla köprü - araç problemini analitik olarak ele alan oldukça gerçekçi bir model oluşturulmaktadır. Şekil 2.4.1 de sayısız dikey kolon ile desteklenmiş bir kiriş gösterilmektedir. Burada hareketli kuvvet kiriş üzerinde sabit  $v$  hızı ile ilerlemektedir. Kirişi  $x_i = \eta_i L$  noktasından destekleyen her bir kolon rijitliği  $(k_1, k_2, \dots, k_i)$  ve sönüm katsayısı  $(c_1, c_2, \dots, c_i)$  ile gösterilen birer yay-damper elemanı ile modellenmektedir. Hesaplamalarda kirişin yatay yer değiştirmeleri ihmal edilecektir. Kirişin, eksen boyunca kesit alanı sabittir ve analizlerde kirişin kendi sönümü de dikkate alınacaktır.



**Şekil 2.4.1.** Hareketli bir kuvvetin etkisi altındaki destek ayağı ihtiva eden kiriş.

Zamanla değişen yayılı bir kuvvetin tesiri altındaki sönümlü Euler – Bernoulli kirişinin hareket denklemleri Stanisis ve Hardin (1969) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} = F(x, t) \quad (2.4.1)$$

Burada,  $E$  elastiklik katsayısı,  $I$  kiriş ekseninin alan atalet momenti,  $m$  kirişin birim uzunluğunun kütlesi,  $c$  kirişin kendi sönüm katsayısı ve  $y$  de kirişin yer değiştirmesini ifade etmektedir. Kirişe etkiyen zorlama fonksiyonu  $F(x, t)$  ise iki ayaklı bir köprü için

$$F(x, t) = F_M(x, t) + \sum_{i=1}^z F_k(x, t) + \sum_{i=1}^z F_c(x, t) \quad (2.4.2)$$

şeklinde. Burada  $F_M$  hareketli ağırlık kuvvetini,  $F_k$ ,  $F_c$  ise destek ayaklarındaki yay ve sönüm kuvvetlerini göstermektedir.

Kirişin zorlanmış titreşim cevabının serbest titreşimindeki öz fonksiyonları cinsinden

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \quad (2.4.3)$$

formunda olduğu kabul edilsin. Burada,  $q_n(t)$  ler zamanın bilinmeyen fonksiyonlarıdır.  $\phi_n(x)$  ler ise kirişin öz fonksiyonlarıdır ve basit mesnetli düz bir kiriş için bir önceki bölümde hesap edilmişlerdir. Basit mesnetli bir kirişin özfonksiyonları (2.2.28) de

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.4)$$

şeklinde hesap edilmişti. Basit mesnetli düz bir kiriş için elde edilen bu öz fonksiyonlar, (2.4.3) eşitliğinde yerine yazılacaktır.

$$y(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin(\lambda_n x) \quad (2.4.5)$$

Denklem (2.4.5) ile önerilen çözüm (2.4.1) de yerine yazılmadan evvel, hareketli kuvvet ( $F_M$ ), yay ( $F_k$ ) ve viskoz sönüm kuvvetleri ( $F_c$ ) Fourier serisine açılmalıdır. Hareketli kuvvetin seri açılımının (2.1.65) den

$$F_M(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x) \quad (2.4.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $a_n$  katsayısı sabit olabileceği gibi zamanın fonksiyonu da olabilir ve (2.4.6) ile önerilen serinin her iki yanı  $\phi_k(x)$  ile çarpılıp 0 - L aralığında integre edilerek hesap edilebilir.

$$\int_0^L F_M(x,t) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_k x) dx = a_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_k x) dx \quad (2.4.7)$$

Trigonometrik fonksiyonlar verilen aralıkta ortogonal (dik) olduklarından sağ taraftaki tüm integraller  $n = k$  haricinde sıfırdır. Yalnızca

$$\int_0^L \frac{2}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = 1, \quad (n = k) \quad (2.4.8)$$

dir. Buradan

$$a_n = \int_0^L F_M(x, t) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x) dx \quad (2.4.9)$$

elde edilir.  $F_M(x, t)$  (2.4.9) de yerine yazılır.

$$a_n = Mg \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \delta(x - vt) \sin(\lambda_n x) dx \quad (2.4.10)$$

ve delta fonksiyonunun (2.1.33) ile verilen özelliği hatırd tutulursa

$$a_n = Mg \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n vt) \quad (2.4.11)$$

elde edilir. Şu halde, hareketli ağırlık kuvvetinin Fourier açılımı

$$F_M(x, t) = Mg \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(vt) \phi_n(x) \quad (2.4.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Şu halde, yay  $F_k(x, t)$  ve sönüm  $F_c(x, t)$  kuvvetlerinin de Fourier açılımlarının

$$[F_k(x, t)]_i = k_i \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n^2(\eta_i L) \phi_n(x) \quad (2.4.13)$$

$$[F_c(x,t)]_i = c_i \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \phi_n^2(\eta_i L) \phi_n(x) \quad (2.4.14)$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Burada, yay kuvvetlerinin ve viskoz sönüm kuvvetlerinin hala tam olarak bilinmediğine  $q_n(t)$  ve  $\dot{q}_n(t)$  fonksiyonlarını içerdiğine dikkat edilmelidir. Tüm bu kuvvetler  $(F_k)_i$ ,  $(F_c)_i$  ve yer değiştirme ifadeleri  $y(\eta_i L, t)$ ,  $\dot{y}(\eta_i L, t)$  kirişin hareket denklemi (2.4.1) de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} & EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right] + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right] + c \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right] \\ & = Mg \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(vt) \phi_n(x) \\ & + \sum_i^z \left\{ k_i q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2(\eta_i L) \phi_n(x) \right\} + \sum_i^z \left\{ c_i \dot{q}(t) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2(\eta_i L) \phi_n(x) \right\} \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

bulunur. (2.4.15) ifadesinin her iki yanını  $\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_k x)$  ile çarpılarak 0 dan  $L$  ye kadar integre edilirse

$$\begin{aligned} & EI \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \int_0^L \phi_n^{IV}(x) \phi_k(x) dx \right) + m \left( \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx \right) \\ & + c \left( \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx \right) = Mg \left( \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(vt) \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx \right) \\ & + \sum_i^z \left\{ k_i q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2(\eta_i L) \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx \right\} \\ & + \sum_i^z \left\{ c_i \dot{q}(t) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2(\eta_i L) \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

elde edilir. Burada  $\phi_n(x)$  ve  $\phi_k(x)$  fonksiyonları dik fonksiyonlar olduklarından

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_k x) dx = 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_k \quad (2.4.17)$$

ve ortonormal olduklarından

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx = \int_0^L \frac{2}{L} \sin^2(\lambda_n x) dx = 1, \quad \lambda_n = \lambda_k \quad (2.4.18)$$

şeklindedir. Şu halde, ifade biraz düzenlenerek (2.4.1) ile verilen kısmi diferansiyel denklemin çözümü, aşağıdaki adi diferansiyel denklemin çözümüne indirgenir.

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \left\{ \frac{c}{m} - \sum_i^z \left( \frac{c_i}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2(\eta_i L) \right) \right\} \dot{q}_n(t) + \left\{ \frac{EI\lambda_n^4}{m} - \sum_i^z \left( \frac{k_i}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2(\eta_i L) \right) \right\} q_n(t) \\ = \frac{Mg}{m} \phi_n(vt) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Burada aşağıdaki kısaltmalar tanımlanarak

$$2\zeta = \frac{c}{m} - \sum_i^z \left( \frac{c_i}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2(\eta_i L) \right) \quad (2.4.20)$$

$$\omega_n^2 = \frac{EI\lambda_n^4}{m} - \sum_i^z \left( \frac{k_i}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2(\eta_i L) \right) \quad (2.4.21)$$

$$F_0 = \frac{Mg}{m}, \quad \omega_F = \lambda_n v \quad (2.4.22)$$



(2.4.19) ifadesi aşağıdaki şekilde yeniden tanzim edilebilir.

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta\dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n = F_0 \sin \omega_F t \quad (2.4.23)$$

(2.4.23) ile verilen adi diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi

$$r^2 + 2\zeta r + \omega_n^2 = 0 \quad (2.4.24)$$

şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri aşağıda verilen ifade ile elde edilir.

$$r_{1,2} = \frac{-2\zeta \pm \sqrt{4\zeta^2 - 4\omega_n^2}}{2} \quad (2.4.25)$$

Köklerin durumuna göre üç farklı çözüm söz konusudur. Ancak öncelikle yeni birtakım katsayılar tanımlamak uygun olacaktır. İlk olarak

$$D_{ncr} = 2\sqrt{\omega_{mn}^2} = 2\omega_{mn} \quad (2.4.26)$$

ile gösterilen modifiye kritik sönüm oranı tanımlamak uygun olacaktır. Burada,  $\omega_{mn}$  n. moda tekabül eden sönümsüz haldeki doğal frekansı ifade etmektedir. Buna ek olarak

$$\zeta = \frac{2\zeta}{D_{ncr}} \quad (2.4.27)$$

oranını modifiye sönüm oranı olarak isimlendirilebilir.  $\zeta$  sayısı karakteristik denklemin üç farklı durumunu ifade etmek için kullanılacaktır. Bu yeni sabitler yardımı ile kökler tekrar yazılacak olursa

$$r_{1,2} = \sqrt{\omega_{mn}^2} \left[ -\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1} \right] \quad (2.4.28)$$

$\zeta$  ile gösterilen modifiye sönüm oranının köklerin reel yada kompleks olma durumunu belirlediği görülecektir.

Şayet modifiye sönüm oranı birden büyük ise ( $1 < \zeta$ ), diskriminant pozitifdir ve karakteristik denklemin iki adet ayırık kökü mevcuttur. Bu halde (2.4.23) ifadesinin homojen kısmının çözümü

$$(q_n)_h = b_1 e^{s_1 t} + b_2 e^{s_2 t}, \quad \begin{array}{l} s_1 < 0 \\ s_2 < 0 \end{array} \quad (2.4.29)$$

ile verilir. Burada  $b_1, b_2$  katsayıları başlangıç şartları yardımı ile hesaplanacaktır.

Eğer  $0 < \zeta < 1$  aralığında ise, diskriminant negatiftir ve karakteristik denklemin iki adet kompleks kökü mevcuttur. Bu kökler,

$$r_{1,2} = \sqrt{\omega_{mn}^2} \left[ -\zeta \mp \sqrt{1 - \zeta^2} i \right], \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.4.30)$$

şeklinindedir. Şu halde, (2.4.23) ifadesinin homojen kısmının çözümü

$$(q_n)_h = \bar{b}_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \bar{b}_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2.4.31)$$

ile gösterir. Burada  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  yine başlangıç şartları kullanılarak bulunacaktır.  $\alpha$  ve  $\beta$  ile gösterilen sabitler kompleks köklerinin gerçek ve sanal kısımlarını ifade etmektedir.

$$\alpha = -\zeta \sqrt{\omega_{mn}^2}, \quad \beta = \sqrt{\omega_{mn}^2} \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.4.32)$$

$\zeta = 1$ , olduğu kritik sönümlü halde çözüm

$$(a_n)_h = (\hat{b}_1 + \hat{b}_2 t) e^{\alpha t} \quad (2.4.33)$$

şeklindedir.

Denklem (2.4.23) ün özel çözümü

$$(q_n)_p = \gamma_n \sin \omega_F t + \xi_n \cos \omega_F t \quad (2.4.34)$$

ile aranmalıdır. Bu özel çözüm (2.4.23) eşitliğinde yerine yazılarak katsayılar

$$\gamma_n = \frac{(\omega_{mn}^2 - \omega_F^2) F_0}{\left[ (\omega_F^2 - \omega_{mn}^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_F^2 \right]} \quad (2.4.35)$$

$$\xi_n = \frac{-D_n \omega_F F_0}{\left[ (\omega_F^2 - \omega_{mn}^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_F^2 \right]} \quad (2.4.36)$$

bulunur. Sonuçta köklerin gerçek ya da sanal olmasına göre homojen kısmın uygun bir çözümü ile özel çözümün toplamı  $q_n(t)$  yi verir. Çözüm,

$r_1$  ve  $r_2$  gerçek sayı ise,

$$q_n(t) = (q_n)_h + (q_n)_p = b_1 e^{r_1 t} + b_2 e^{r_2 t} + \gamma_n \sin \omega_F t + \xi_n \cos \omega_F t \quad (2.4.37)$$

$r_1$  ve  $r_2$  sanal ise,

$$q_n(t) = (q_n)_h + (q_n)_p = \bar{b}_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \bar{b}_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \gamma_n \sin \omega_F t + \xi_n \cos \omega_F t \quad (2.4.38)$$

$r_1 = r_2$  ise,

$$q_n(t) = (q_n)_h + (q_n)_p = (\hat{b}_1 + \hat{b}_2 t) e^{\alpha t} + \gamma_n \sin \omega_F t + \xi_n \cos \omega_F t \quad (2.4.39)$$

ifadeleri ile verilir.

Basit bir örnek olması bakımından başlangıç şartları sıfır alınarak  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\bar{b}_1$ ,  $\bar{b}_2$ ,  $\hat{b}_1$ , ve  $\hat{b}_2$  katsayıları hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} y(x,0) = 0, & \quad \rightarrow \quad a_n(0) = 0 \\ \dot{y}(x,0) = 0, & \quad \rightarrow \quad \dot{a}_n(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

(2.4.37), (2.4.38), (2.4.39) ifadeleri ve bunların zaman göre ilk türevleri  $t = 0$  için başlangıç şartlarına yani sıfıra eşitlenerek, katsayılar

$$b_1 = \frac{\xi_n r_2 - \gamma_n \omega_F}{r_1 - r_2}, \quad b_2 = \frac{\gamma_n \omega_F - \xi_n r_1}{r_1 - r_2} \quad (2.4.41)$$

$$\bar{b}_1 = -\xi_n, \quad \bar{b}_2 = \frac{\xi_n \alpha - \gamma_n \omega_F}{\beta} \quad (2.4.42)$$

$$\hat{b}_1 = -\xi_n, \quad \hat{b}_2 = \frac{\xi_n \alpha - \gamma_n \omega_F}{1 + \alpha} \quad (2.4.43)$$

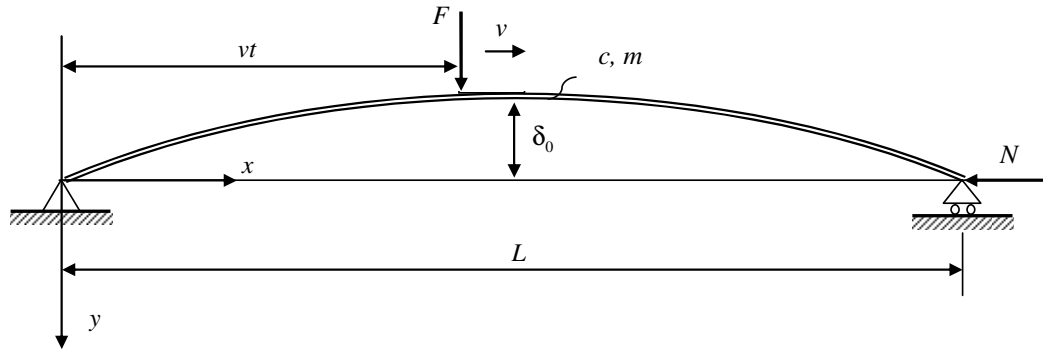
şeklinde elde edilir ve böylece problem tamamen çözülmüş olur.

### 2.4.2. Hareketli kuvvetin etkisi altındaki eğrisel kirişin titreşimi

Kirişlerin, üretim hataları ve ısıl genleşmelerin de etkisiyle, ideal bir doğrusallıkta üretilmeleri neredeyse imkânsızdır. Kiriş tamamen düz üretilse dahi zamanla kendi ağırlığının etkisi ile bir miktar çökme yapacak ve doğrusallığını kaybedecektir. Hatta bazı durumlarda eğilme direncini artırmak için kirişler, bilinçli bir şekilde dışbükey üretilmektedirler. Düz kiriş halinde hareketli kuvvetin etkisi altındaki kirişin dinamik davranışı Pasin (1994) tarafından incelenmiştir. Hafif eğrilik ihtiva eden kiriş için ise literatürde bir çalışmaya rastlanılmamıştır.

Şekil 2.4.2 de hareketli kütlenin etkisi altındaki böyle bir eğrisel kiriş gösterilmektedir. Kirişin kesit alanı kiriş boyunca sabit ve kirişin birim uzunluğunun kütlesi  $m$  dir. Kiriş başlangıçta  $y_0$  ile verilen hafif bir eğrilige sahiptir ve bu eğriliğin Fourier serisine açılabilirdiği kabul edilmektedir. Ağırlık kuvveti köprü üzerinde yatay hızı ile hareket etmektedir.

Hareket analizinde birinci mertbe teorisi kullanılmaktadır. Yani köprünün yer değiştirmelerin ve eğriliğin küçük olduğu kabul edilmektedir. Bunun yanında, kirişin kendi sönümü de hesaplamalara dâhil edilmektedir. Şu halde, Euler – Bernoulli kiriş teorisi kullanılarak kirişin hareket denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.



Şekil 2.4.2. Hareketli kuvvetin etkisi altındaki eğrisel kiriş

$$EI \frac{\partial^4 (y - y_0)}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 (y - y_0)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 (y - y_0)}{\partial t^2} + c \frac{\partial (y - y_0)}{\partial t} = Mg \delta(x - a) \quad (2.4.44)$$

Kirişin başlangıçta sahip olduğu  $y_0$  eğriliği zamanla değişen anlık bir eğrilik olmadığı

için  $\frac{\partial y_0}{\partial t} = 0$  ve  $\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = 0$  şeklindedir. Şu halde, (2.4.44) ifadesi

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} = Mg\delta(x-a) + EI \frac{\partial^4 y_0}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \quad (2.4.45)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

Kirişin zorlanmış titreşim cevabı basit mesnetli bir kirişin serbest titreşim modlarının birleşimlerinin açılımı ile ifade edilebilir. Yani,

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \quad (2.4.46)$$

yazılabilir. Burada,  $q_n(t)$  ler bilinmeyen ancak, yer değiştirmelerle birlikte hesaplanacak olan fonksiyonlardır.  $\phi_n(x)$  ler ise kirişin öz fonksiyonlarıdır ve basit mesnetli düz bir kiriş için bir önceki bölümde hesap edilmişlerdir. Basit mesnetli bir kirişin öz fonksiyonları (2.2.28) de

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.47)$$

şeklinde hesap edilmişti. Bu öz fonksiyonlar, (2.4.46) eşitliğinde yerine yazılarak

$$y(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin(\lambda_n x) \quad (2.4.48)$$

elde edilir. Kirişin başlangıç eğriliği de Fourier sinüs seri açılımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x) \quad (2.4.49)$$

Denklem (2.4.48) ile birlikte (2.4.49) ifadesinin de kirişin sınır şartlarını sağlaması gerektiğine dikkat edilmelidir. Kiriş eğriliğinin formunun

$$y_0 = \delta_0 \sin(\lambda_n x) \quad (2.4.50)$$

şeklinde olduğu kabul edilsin. Şu halde,  $A_n$  Fourier katsayıları,

$$A_{n0} = \delta_0 \sqrt{\frac{L}{2}}, \quad n=1, \quad A_{n0} = 0, \quad n=2,3,\dots \quad (2.4.51)$$

şeklinde hesap edilir (Pala 2008).

Önerilen bu ifadeler kirişin hareket denkleminde yerine yazılarak

$$EI\lambda_n^4 \sum_{n=1}^{\infty} q_n \phi_n + m \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n \phi_n + \bar{c} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \phi_n = EI\lambda_n^4 \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \phi_n + Mg\delta(x-a) \quad (2.4.52)$$

elde edilir.  $\phi_k$  ve  $\phi_n$  fonksiyonlarının ortogonal ve ortonormal oldukları akılda tutularak, eşitliğin her iki yanını  $\phi_m$  ( $k \neq n$ ) ile çarpılarak 0 dan  $L$  ye kadar integre edilirse,

$$\ddot{q}_n + \frac{\bar{c}}{m} \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \omega_n^2 A_{n0} + \frac{Mg}{m} \phi_n(a) \quad (2.4.53)$$

sonucuna ulaşılır. Burada, Böylece çözüm, kısmi diferansiyel denklemin çözümünden adi diferansiyel denklemin çözümüne indirgenir. Burada,  $\phi_n(a)$  öz fonksiyonun  $x = vt$  noktasındaki değerini ifade etmektedir.  $\omega_n$  doğal frekansı ise

$$\omega_n^2 = \frac{EI \lambda_n^4}{m}, \quad a = \lambda_n vt, \quad (2.4.54)$$

ile ifade edilir.

Sönüm oranı ( $\zeta$ ) aşağıdaki gibi tanımlanarak, homojen kısmın çözümü için daha uygun bir ifade elde edilebilir.

$$\zeta = \frac{\bar{c}}{2m\omega_n} \quad (2.4.55)$$

Bu yeni değişken yardımı ile (2.4.53) denkleminin homojen kısmı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ddot{q}_n + 2\zeta\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 \quad (2.4.56)$$

(2.4.56) homojen adi diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi

$$r^2 + 2\zeta\omega_n r + \omega_n^2 = 0 \quad (2.4.57)$$

ile verilir. Karakteristik denklemin kökleri

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.4.58)$$

olarak elde edilir.  $\zeta$  sönüm oranının değerine göre üç farklı durum söz konusudur;

Şayet  $\zeta > 1$  ise, diskriminant pozitifdir ve karakteristik denklemin iki adet ayrık kökü mevcuttur. Böylece homojen kısmın çözümü

$$(q_n)_h = b_1 e^{r_1 t} + b_2 e^{r_2 t}, \quad r_1 < 0, \quad r_2 < 0 \quad (2.4.59)$$



bulunur. Bu cevap daha önce tanımlanmış olan sönümlü titreşim cevabıdır. Burada,  $b_1$  ve  $b_2$  katsayıları başlangıç şartları kullanılarak elde edilecektir.

Eğer  $0 < \zeta < 1$  aralığında ise diskriminant negatiftir ve karakteristik denklemin iki adet kompleks kökü mevcuttur. Bu halde homojen kısmın çözümü

$$(q_n)_h = e^{-\zeta\omega_n t} [b_1 \cos \omega_d t + b_2 \sin \omega_d t], \quad 0 \leq \zeta < 1 \quad (2.4.60)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  serbest titreşen sistemin sönümlü doğal frekansını ifade etmektedir.

$\zeta = 0$  olduğu sönümsüz halde ise çözüm,

$$(q_n)_h = b_1 \cos \omega_n t + b_2 \sin \omega_n t, \quad \zeta = 0 \quad (2.4.61)$$

şeklindedir.

Homojen olmayan (2.4.53) ifadesinin özel çözümü

$$(q_n)_p = K_r + A_n \cos \omega_{fn} t + B_n \sin \omega_{fn} t \quad (2.4.62)$$

ile aranmalıdır. Burada,  $K_r$ ,  $A_n$  ve  $B_n$  sabitlerdir. Bu sabitler (2.4.62) ile verilen özel çözüm, denklem (2.4.53) de yerine yazılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K_r = A_{no}, \quad (2.4.63)$$

$$A_n = - \left( \frac{Mg}{m} \sqrt{\frac{2}{L}} \right) \frac{2\omega_n \omega_{fn} \zeta}{\left[ (\omega_n^2 - \omega_{fn}^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega_{fn}^2 \right]} \quad (2.4.64)$$

$$B_n = \left( \frac{Mg}{m} \sqrt{\frac{2}{L}} \right) \frac{(\omega_n^2 - \omega_{fn}^2)}{\left[ (\omega_n^2 - \omega_{fn}^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega_{fn}^2 \right]} \quad (2.4.65)$$

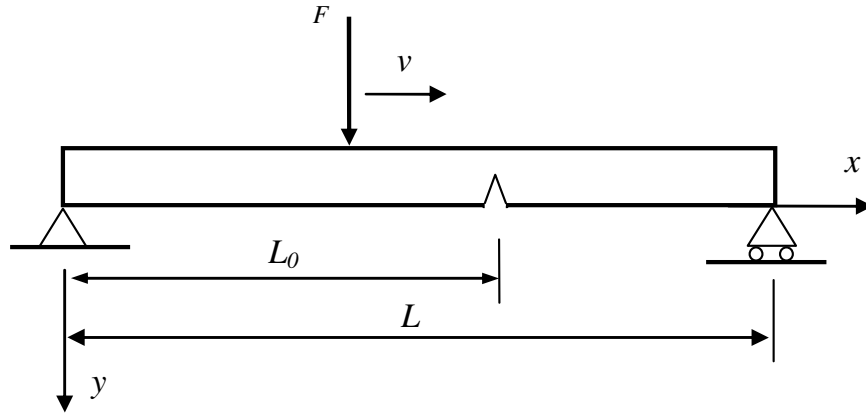
Böylece,  $0 < \zeta < 1$  aralığında olduğunda denklem (2.4.53) nin genel çözümü

$$q_n = (q_n)_h + (q_n)_p = e^{-\zeta \omega_n t} [b_1 \cos \omega_d t + b_2 \sin \omega_d t] + A_{n0} + A_n \cos \omega_{fn} t + B_n \sin \omega_{fn} t \quad (2.4.66)$$

şeklinde elde edilir.

### 2.4.3. Hareketli kuvvetin etkisi altındaki, çatlak ihtiva eden kirişin titreşimi

Kiriş üzerinde bulunan bir çatlak, çatlak derinliğine ve çatlağın kiriş üzerindeki konumuna bağlı olarak kirişin titreşim genliklerini ve yer değiştirmeleri artıracaktır.



Şekil 2.4.3. Hareketli kuvvetin etkisi altındaki çatlak ihtiva eden basit mesnetli kiriş

Çatlak ihtiva eden kirişin öz fonksiyonları önceki bölümde elde edilmişti. Kirişin hareketli yükün etkisi altındaki davranışı bu özfonksiyonların açılımı ile ifade edilebilir. Şu halde, kirişin kendi sönümü ihmal edilerek hareket denklemi

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Mg \delta(x - vt) \quad (2.4.67)$$

şeklinde yazılabilir. (2.5.67) eşitliğinin

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^N q_n(t) \phi_n(x) \quad (2.4.68)$$

şeklinde ayrık bir seri çözümünün var olduğu kabul edilsin. Burada  $\phi_n(x)$  çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin öz fonksiyonlarını ifade etmektedir. Bu öz fonksiyonlar (2.3.29) ve (2.3.30) de verilmiştir.  $q_n(t)$  genelleştirilmiş koordinatları ifade etmektedir.  $N$  hesaplamalarda göz önüne alınan özdeğer sayısını göstermektedir. (2.4.68) ile önerilen seri çözümü kirişin hareket denkleminde yerine yazılarak

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \sum_{n=0}^N q_n(t) \phi_n(x) \right) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{n=0}^N q_n(t) \phi_n(x) \right) = Mg \delta(x - vt) \quad (2.4.69)$$

elde edilir. (2.4.69) ifadesinin her iki yanını  $\phi_k(x)$  ile çarpılarak 0 dan  $L$  ye kadar integre edilirse

$$\sum_{n=1}^N [\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n] \int_0^L \phi_k(x) \phi_n(x) dx = \frac{Mg}{m} \int_0^L \delta(x - vt) \phi_k(x) dx \quad (2.4.70)$$

bulunur. Burada  $\phi_n(x)$  ve  $\phi_k(x)$  fonksiyonlarının dik fonksiyonlar oldukları göz önünde bulundurulduğunda

$$\int_0^L \phi_n \phi_k dx = 0, \quad n \neq k \quad (2.4.71)$$

olduğu ve yine

$$\int_0^L \phi_k^2 dx = \int_0^L \phi_n^2 dx = \int_0^{L_1} \phi_{n1}^2 dx + \int_{L_1}^L \phi_{n2}^2 dx = 1, \quad n = k \quad (2.4.72)$$

olacağı görülmelidir. Böylece kirişin hareketini idare eden (2.4.70) kısmi diferansiyel denklemi

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{Mg}{m} \phi_n(vt) \quad (2.4.73)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemin çözümüne indirgenmiş olur. Burada eşitliğin sağ tarafındaki zorlama fonksiyonu hareketli kütlede kiriş üzerine gelen ağırlık kuvvetini ifade etmektedir. Hareketli kuvvet hangi bölge üzerinde hareket ediyorsa bu kuvvet, o bölgenin özfonksiyonu kullanılarak Fourier serisine açılmalıdır. Şu halde, (2.4.72) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \begin{cases} \frac{Mg}{m} \phi_{n1}(vt), & t \leq \frac{L_1}{v} \\ \frac{Mg}{m} \phi_{n2}(vt), & t > \frac{L_1}{v} \end{cases} \quad (2.4.74)$$

Burada,  $t = \frac{L_1}{v}$  anında hareketli kuvvet tam çatlak üzerindedir ve bir bölgeden diğerine geçmektedir. Her bir bölgenin özfonksiyonları (2.3.29) ve (2.3.30) de

$$\phi_{n1}(vt) = A_{n1} \sin(\lambda_n vt) + B_{n1} \cos(\lambda_n vt) + C_{n1} \sinh(\lambda_n vt) + D_{n1} \cosh(\lambda_n vt), \quad (2.4.75)$$

$$\phi_{n2}(vt) = A_{n2} \sin[\lambda_n(L-vt)] + B_{n2} \cos[\lambda_n(L-vt)] + C_{n2} \sinh[\lambda_n(L-vt)] + D_{n2} \cosh[\lambda_n(L-vt)] \quad (2.4.76)$$

ile verilmiştir. Şu halde, hareketli kütle birinci bölgede hareket ederken çözüm ayrı, ikinci kısma geçtiğinde ayrı değerlendirilmelidir. Zira hareketli kütle kirişin ikinci kısmına geçtiğinde kiriş için başlangıç şartları sıfır alınamaz. Kiriş artık ilk haldeki şeklini değiştirmiştir. Buna göre  $t \leq \frac{L_0}{v}$  için homojen kısmın çözümü;

$$(q_{n1})_h = d_1 \sin \omega_n t + d_2 \cos \omega_n t \quad (2.4.77)$$

ile verilir. Özel çözüm ise

$$(q_{n1})_p = \bar{A}_{n1} \sin \Omega_n t + \bar{B}_{n1} \cos \Omega_n t + \bar{C}_{n1} \sinh \Omega_n t + \bar{D}_{n1} \cosh \Omega_n t \quad (2.4.78)$$

ile aranmalıdır ( $\Omega_n = \lambda_n v$ ). Özel çözüm (2.4.74) de yerine yazılarak özel çözümün katsayıları

$$\begin{aligned} \bar{A}_{n1} &= \frac{Mg}{m} \frac{A_{n1}}{(\omega_n^2 - \Omega_n^2)}, & \bar{B}_{n1} &= \frac{Mg}{m} \frac{B_{n1}}{(\omega_n^2 - \Omega_n^2)} \\ \bar{C}_{n1} &= \frac{Mg}{m} \frac{C_{n1}}{(\omega_n^2 + \Omega_n^2)}, & \bar{D}_{n1} &= \frac{Mg}{m} \frac{D_{n1}}{(\omega_n^2 + \Omega_n^2)} \end{aligned} \quad (2.4.79)$$

Bulunur. Genel çözüm homojen kısmın çözümü (2.4.77) ve özel çözümünün (2.4.77) toplamı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$q_{n1}(t) = d_1 \sin \omega_n t + d_2 \cos \omega_n t + (q_n)_p \quad (2.4.80)$$

$d_1$  ve  $d_2$  sabitlerini tespit etmek için başlangıç şartları kullanılmalıdır. Kirişin başlangıçta tamamen düz ve sükûnette olduğu düşünülürse, başlangıç şartları

$$\begin{aligned}
y(x,0) &= \sum_{n=0}^N \phi_n(x) q_n(0) = 0 & \rightarrow & q_n(0) = 0 \\
\dot{y}(x,0) &= \sum_{n=0}^N \phi_n(x) \dot{q}_n(0) = 0 & \rightarrow & \dot{q}_n(0) = 0
\end{aligned} \tag{2.4.81}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu şartlar çözüme uygulanırsa

$$d_1 = -\frac{\Omega_n}{\omega_n} (\bar{A}_{n1} + \bar{C}_{n1}), \quad d_2 = -\bar{B}_{n1} - \bar{D}_{n1} \tag{2.4.82}$$

elde edilir. Böylece (2.4.74) denklemin genel çözümü  $t \leq \frac{L_0}{v}$  için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
q_{n1}(t) \Big|_{t \leq \frac{L_0}{v}} &= (q_{n1})_h + (q_{n1})_p \\
&= d_1 \sin \omega_n t + d_2 \cos \omega_n t + \bar{A}_{n1} \sin \Omega_n t + \bar{B}_{n1} \cos \Omega_n t + \bar{C}_{n1} \sinh \Omega_n t + \bar{D}_{n1} \cosh \Omega_n t
\end{aligned} \tag{2.4.83}$$

Benzer şekilde,  $t > \frac{L_0}{v}$  için homojen kısmın çözümü ve özel çözüm

$$(q_{n2})_h = \bar{d}_1 \sin \omega_n t + \bar{d}_2 \cos \omega_n t \tag{2.4.84}$$

ve

$$(q_{n2})_p = \bar{A}_{n2} \sin \Omega_n t + \bar{B}_{n2} \cos \Omega_n t + \bar{C}_{n2} \sinh \Omega_n t + \bar{D}_{n2} \cosh \Omega_n t \tag{2.4.85}$$

ile verilir. Özel çözüm (2.4.74) de yerine yazılarak katsayılar

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{n2} &= \frac{Mg}{m} \frac{A_{n2}}{(\omega_n^2 - \Omega_n^2)}, \\
\bar{B}_{n2} &= \frac{Mg}{m} \frac{B_{n2}}{(\omega_n^2 - \Omega_n^2)}, \\
\bar{C}_{n2} &= \frac{Mg}{m} \frac{C_{n2}}{(\omega_n^2 + \Omega_n^2)}, \\
\bar{D}_{n2} &= \frac{Mg}{m} \frac{D_{n2}}{(\omega_n^2 + \Omega_n^2)}
\end{aligned} \tag{2.4.86}$$

olarak bulunur. Böylece hareketli kütle ikinci bölge üzerinde hareket ederken  $q_{n2}(t)$  genel çözümü

$$q_{n2}(t) \Big|_{t > \frac{L_0}{v}} = \bar{d}_1 \sin \omega_n t + \bar{d}_2 \cos \omega_n t + (q_{n2})_p \tag{2.4.87}$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\bar{d}_1$  ve  $\bar{d}_2$  katsayıları yine başlangıç şartları kullanılarak hesap edilecektir. Ancak, hareketli kütle ikinci bölgeye giriş yaptığı  $t = \frac{L_0}{v}$  anında girişin başlangıç şartlarının bu kez sıfır olmadığına dikkat edilmelidir. Bu andaki sınır şartları (2.4.83) ile verilen birinci bölge çözümü ve türevi kullanılarak

$$q_{n2}\left(\frac{L_0}{v}\right) = q_{n1}\left(\frac{L_0}{v}\right) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{L_0/v} Q_{n1}(\tau) \sin \omega_n \left(\frac{L_0}{v} - \tau\right) d\tau = H_1 \tag{2.4.88}$$

ve

$$\dot{q}_{n2}\left(\frac{L_0}{v}\right) = \dot{q}_{n1}\left(\frac{L_0}{v}\right) = \int_0^{L_0/v} Q_{n1}(\tau) \cos \omega_n \left(\frac{L_0}{v} - \tau\right) d\tau = H_2 \tag{2.4.89}$$

şeklinde ifade edilir. (2.4.81) denklemi bu şartlar altında çözüldüğünde katsayılar

$$\bar{d}_1 = \sin \frac{\omega_n L_0}{v} (H_1 - \bar{B}_{n2} - \bar{D}_{n2}) + \frac{\cos \frac{\omega_n L_0}{v}}{\omega_n} \left[ H_2 - \Omega_n (\bar{A}_{n2} + \bar{C}_{n2}) \right] \quad (2.4.90)$$

$$\bar{d}_2 = \cos \frac{\omega_n L_0}{v} (H_1 - \bar{B}_{n2} - \bar{D}_{n2}) - \frac{\sin \frac{\omega_n L_0}{v}}{\omega_n} \left[ H_2 - \Omega_n (\bar{A}_{n2} + \bar{C}_{n2}) \right] \quad (2.4.91)$$

olarak bulunur. Böylece  $q_{n2}(t)$  ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} q_{n2}(t) \Big|_{t > \frac{L_0}{v}} &= (q_{n2})_h + (q_{n2})_p \\ &= \bar{d}_1 \sin \omega_n t + \bar{d}_2 \cos \omega_n t + \bar{A}_{n2} \sin \Omega_n t + \bar{B}_{n2} \cos \Omega_n t + \bar{C}_{n2} \sinh \Omega_n t + \bar{D}_{n2} \cosh \Omega_n t \end{aligned} \quad (2.4.92)$$

şeklinde verilir ve böylece problem tamamen çözülmüş olur. Burada şu husus unutulmamalıdır, hareketli kütle kirişin ilk kısmında hareket ederken çözüm (2.4.83) ile verilmektedir. Ancak kütle çatlağı geçtiğinde yani ikinci bölge üzerinde hareketini sürdürdüğünde bu kez çözüm (2.4.92) ile verilmektedir. Çatlak sayısı arttığında çözüm bölgesi ve çözüm sayısı da artacaktır. Bununla birlikte, her bir çözüm için kullanılacak sınır şartları bir önceki çözümün o noktadaki değeri ile ifade edilecektir.



## 2.5. Hareketli Kütlenin Etkisi Altındaki Kirişlerin Titreşimleri

Hareketli yükün kütlesinin, köprünün kütlesine oranının düşük olduğu durumlarda kütlenin atalet etkileri ihmal edilmektedir. Böylece kirişin hareketini idare eden çok daha basit bir matematik model oluşturulabilmektedir. Literatürdeki birçok çalışma hareketli yük – kiriş problemini bu yolla ele almıştır. Bu modellerle kiriş ile hareketli kütle arasındaki etkileşim ihmal edilmekte ve kirişin hareketli bir kuvvetin ( $F = Mg$ ) etkisi altında olduğu farz edilmektedir. Ancak, yükün hareketinin önem arz ettiği durumlarda, bu çözüm yöntemi kullanılamaz. Bunun yerine hareketli kütlenin atalet etkilerini de göz önüne alan bir yöntem geliştirilmelidir. Yükün hareketini tespiti için ilk olarak, sabit hızla hareket eden bir kütlenin kiriş eksenine dik doğrultudaki ivme ifadesinin elde edilmesi uygun olacaktır. Dikey doğrultudaki yer değiştirme  $y(x,t)$ ,  $x$  ve  $t$  nin fonksiyonudur. Şu halde, dikey doğrultudaki yer değiştirme ifadesi zamana göre bir kez türetilerek

$$v_y = \frac{dy(x,t)}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \partial t = v_x \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.5.1)$$

hız ifadesi elde edilir. Türev operatörü

$$\left( \frac{d}{dt} \right) y(x,t) = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) y(x,t) \quad (2.5.2)$$

$$\frac{d}{dt} = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.5.3)$$

şeklinde tanımlanarak, hız zamana göre tekrar türetilir

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \right) y(x,t) = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) y(x,t) \quad (2.5.4)$$

ve düzenlenirse

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.5.5)$$

ivme ifadesi elde edilir.

Hareketli kütlein kiriş üzerindeki hareketinin her anında, kiriş ile temasının kesilmediği kabul edildiğinde, hareketli kütlein kiriş eksenine dik doğrultudaki  $a_M$  ivmesi  $a_y$  ile ifade edilebilir.

$$a_M = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.5.6)$$

yada

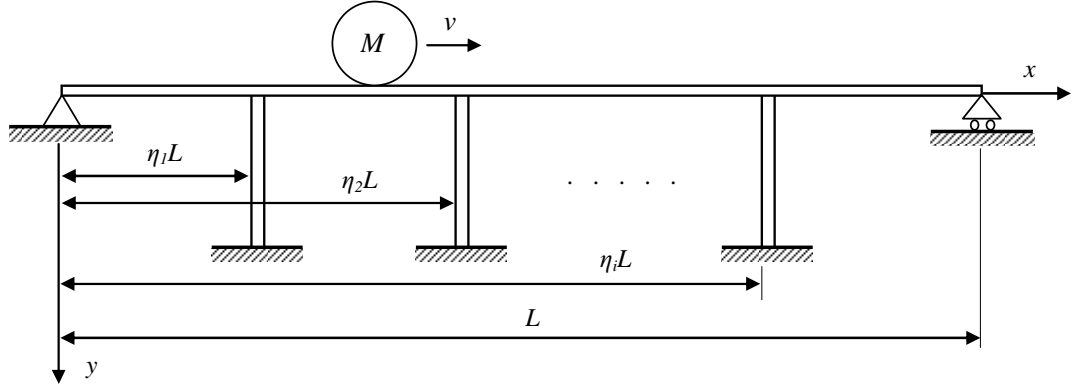
$$a_M = \ddot{y} + 2v\dot{y}' + v^2 y'' \quad (2.5.7)$$

Burada, ikinci terim Coriolis ivmesi, üçüncü terim ise merkezci ivmedir. Ancak literatürdeki hemen her çalışmada ivme ifadesindeki bu terimler ihmal edilmiştir. Bundan sonraki bölümde hareketli kütleli yükün ivmesi  $a_M$  ile gösterilecek, Coriolis ve merkezci ivme terimleri de hesaplamalara dâhil edilecektir. Böylece hareketli kütle ile kiriş arasındaki tesir kuvvetleri gerçeğe çok daha yakın bir biçimde ifade edilmiş olacaktır.

### **2.5.1. Hareketli bir kütlein etkisi altındaki destek ayağı ihtiva eden kirişin titreşimi**

Kısım 2.4.1 de hareketli bir kuvvetin etkisi altındaki sayısız destek ayağı ihtiva eden kirişin dinamik davranışı incelenmişti. Bu bölümde hareketli kuvvetin değil hareketli kütlein etkisi altındaki kirişin dinamik davranışı ele alınmaktadır. Hareketli kütlein ataletinin yanında, merkezci ve Coriolis ivme terimleri de hesaplamalarda göz önüne alınmaktadır.

Şekil 2.5.1 de sayısız dikey kolon ile desteklenmiş bir kiriş gösterilmektedir. Burada hareketli kütle kiriş üzerinde sabit  $v$  hızı ile ilerlemektedir. Kirişi  $x_i = \eta_i L$  noktasından destekleyen her bir kolon sertliği ( $k_1, k_2, \dots, k_i$ ) ve sönüm katsayısı ( $c_1, c_2, \dots, c_i$ ) ile gösterilen birer yay-damper elemanı ile modellenmektedir. Hesaplamalarda kirişin yatay yer değiştirmeleri ihmal edilecektir. Kirişin, eksen boyunca kesit alanı sabittir ve analizlerde kirişin kendi sönümü de dikkate alınacaktır.



Şekil 2.5.1. Hareketli bir kütlein etkisi altındaki destek ayağı ihtiva eden kiriş.

Hareketli bir kütlein tesiri altındaki sönümlü Euler – Bernoulli kirişinin hareket denklemini Stanisic ve Hardin (1969) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} = M [g - a_M] \delta(x - a) + F_d(x, t) \quad (2.5.8)$$

Burada, Kirişe destek ayaklarından gelen tepki kuvveti  $F_d(x, t)$

$$F_d(x, t) = \sum_i^z (F_{ki} + F_{ci}) \delta(x - \eta_i L) \quad (2.5.9)$$

şeklindedir. Denklem (2.5.7) de hareketli kütlein kiriş eksenine dik doğrultudaki ivmesi aşağıda gösterildiği şekilde elde edilmiştir.

$$a_M = \ddot{y} + v^2 y'' + 2v\dot{y}' \quad (2.5.10)$$

İvme ifadesi denklem (2.5.8) de yerine yazılırsa

$$EIy^{iv} + m\ddot{y} + \bar{c}\dot{y} = Mg\delta(x-a) - M \left[ \ddot{y} + v^2 y'' + 2v\dot{y}' \right] \delta(x-a) + \sum_i^z (F_{ki} + F_{ci}) \delta(x-\eta_i L) \quad (2.5.11)$$

bulunur. Kirişin zorlanmış titreşim cevabının

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \quad (2.5.12)$$

formunda olduğu kabul edilsin.  $y(x,t)$  çözümü ve daha önce (2.4.12), (2.4.13) ifadeleri ile verilmiş olan destek ayaklarındaki tepki kuvvetleri (2.5.11) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right) + c \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right) \\ & = Mg\delta(x-a) \\ & - M \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right) + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right) + 2v \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right) \right] \delta(x-a) \\ & + \sum_i^z \left\{ k_i \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right) \right\} + \sum_i^z \left\{ c_i \left( \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \phi_n(x) \right) \right\} \delta(x-\eta_i L) \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

elde edilir.  $\phi_k$  ve  $\phi_n$  fonksiyonlarının ortogonal ve ortonormal oldukları akılda tutularak, eşitliğin her iki yanını  $\phi_k$  ( $k \neq n$ ) ile çarpılarak 0 dan  $L$  ye kadar integre edilirse,

$$\begin{aligned}
& EI\lambda_n^4 q_n(t) \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx + m\ddot{q}_n(t) \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx + c\dot{q}_n(t) \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx \\
& = Mg \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \phi_k(x) \delta(x-vt) dx \right) \\
& - \left[ M\ddot{q}_n(t) \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) \delta(x-vt) dx + v^2 \lambda_n^2 q_n(t) \int_0^L \phi_n''(x) \phi_k(x) \delta(x-vt) dx \right. \\
& \left. + 2v\lambda_n \dot{q}_n(t) \int_0^L \phi_n'(x) \phi_k(x) \delta(x-vt) dx \right] \\
& + \sum_i^z \left\{ k_i q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) \delta(x-\eta_i L) dx \right\} \\
& + \sum_i^z \left\{ c_i \dot{q}(t) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) \delta(x-\eta_i L) dx \right\} \tag{2.5.14}
\end{aligned}$$

ortonormalite şartı gereği  $\int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) dx = 1$  şeklindedir. Şu halde (2.5.14) ifadesinde

gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_n(t) + 2\zeta\dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n \\
& = \frac{M}{m} \phi_n(vt) \left\{ g - \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{q}_k(t) \phi_k(vt) + v^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 q_k(t) \phi_k''(vt) + 2v \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \dot{q}_k(t) \phi_k'(vt) \right] \right\} \\
& \tag{2.5.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Özel çözüme ulaşmak için ilk etapta (2.5.15) ifadesinin sağ tarafının ilk iki terimi dikkate alınsın,

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta\dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n = \frac{Mg}{m} \phi_n(vt) \tag{2.5.16}$$

Bu ifadenin aynı Kısım 2.4.1 de çözülmüş ve çözüm (2.4.36) ile

$$q_n(t) = (q_n)_h + (q_n)_p = b_1 e^{s_1 t} + b_2 e^{s_2 t} + \gamma_n \sin \omega_F t + \xi_n \cos \omega_F t \quad (2.5.17)$$

şeklinde elde edilmişti. Ancak bunun aranan gerçek çözüm olmadığı unutulmamalıdır. Gerçek çözüm (2.5.17) ile ifade edilen çözüm ve türevleri denklem (2.5.15) de yerine yazılarak iteratif bir yaklaşımla elde edilecektir. Çözümün yakınsaklığı burada vaaz edilmeyecektir ancak detayları için Kounadis (1992) ve Michaltsos ve arkadaşlarının (2001) çalışmalarına bakılabilir.

Denklem (2.5.15) in sağ tarafındaki terimlerin tamamı  $F_n(t)$  ile gösterilsin,

$$\ddot{q}_n + 2\zeta\omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = F_n(t) \quad (2.5.18)$$

$F_n(t)$  açık şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F_n(t) = \frac{M}{m} \phi_n(vt) \left\{ g - \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{q}_k(t) \phi_k(vt) + v^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 q_k(t) \phi_k''(vt) + 2v \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \dot{q}_k(t) \phi_k'(vt) \right] \right\} \quad (2.5.19)$$

Son olarak (2.5.18) ifadesinin çözümü Duhamel integrali yardımı ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q_n(t) = \int_0^{\infty} F_n(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.5.20)$$

Burada  $h(t-\tau)$  Dirac delta dağılım fonksiyonuna olan cevaptır.

Başlangıçta düz ve hareketsiz bir kiriş için başlangıç şartları sıfırdır.

$$q_n(t) = 0, \quad \dot{q}_n(t) = 0 \quad (2.5.21)$$

$h(t - \tau)$  Dirac delta fonksiyon cevabı aşağıdaki şekilde verilir.

$$h(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \quad (2.5.22)$$

Denklem (2.5.22), (2.5.20) ifadesinde yerine yazılarak,

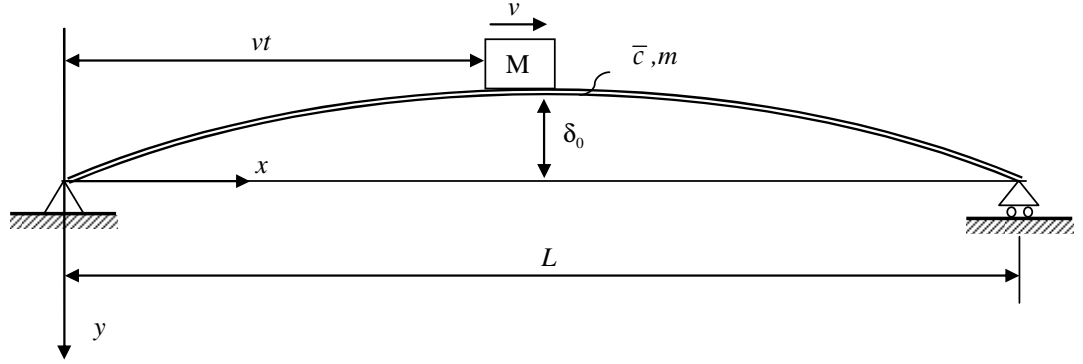
$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} F_n(\tau) \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (2.5.23)$$

problemin çözümü elde edilmiş olur. Hareketli yükün etkisi altındaki sayısız destek ihtiva eden kirişin dinamik davranışını veren matlab programı Ek.1.14 de verilmiştir.

### 2.5.2. Hareketli kütlelin etkisi altındaki eğrisel kirişin titreşimi

Daha önceki bölümlerde hareketli tekil bir kuvvetin etkisi altındaki hafif eğriliğe sahip bir kirişin dinamik davranışını incelemiştik. Bu kısımda ise bu kez hareketli kütlelin etkisi altındaki benzer eğriliğe sahip bir kirişin hareketi incelenecektir. Eğrisel bir kirişte merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin etkilerinin düz kirişlere nazaran daha fazla olması beklenmektedir. Bu nedenle hesaplamalarda bu etkilerde dikkate alınacaktır. Şekil 2.5.2 de hareketli kütlelin etkisi altındaki eğrisel bir kiriş gösterilmektedir. Kirişin kesit alanı kiriş boyunca sabit ve kirişin birim uzunluğunun kütlesi  $m$  dir. Kiriş başlangıçta  $y_0$  ile verilen hafif bir eğriliğe sahiptir ve bu eğriliğin Fourier serisine açılabilirdiği kabul edilmektedir. Ağırlık kuvveti köprü üzerinde yatay  $v$  hızı ile hareket etmektedir.

Hareket analizinde birinci mertbe teorisi kullanılmaktadır. Yani köprünün yer değiştirmelerinin ve ilkel eğriliğinin küçük olduğu kabul edilmektedir. Bunun yanında, kirişin kendi sönümü de hesaplamalara dâhil edilmektedir. şu halde, Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılarak kirişin hareket denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.



şekil 2.5.2. Hareketli kütleinin etkisi altındaki eğrisel kiriş

Bu kabuller altında kirişin hareket denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$EI \frac{\partial^4 (y - y_0)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 (y - y_0)}{\partial t^2} + c \frac{\partial (y - y_0)}{\partial t} = M [g - a_M] \delta(x - a) \quad (2.5.24)$$

İfade biraz düzenlenirse

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} = M [g - a_M] \delta(x - a) + EI \frac{\partial^4 y_0}{\partial x^4} \quad (2.5.25)$$

sonucuna ulaşılır. Burada,  $\delta(x - a)$  delta Dirac delta fonksiyonudur. Denklem (2.5.7) de hareketli kütleinin kiriş eksenine dik doğrultudaki ivmesi aşağıda gösterildiği şekilde elde edilmişti.

$$a_M = \ddot{y} + v^2 y'' + 2v\dot{y}' \quad (2.5.26)$$



İvme ifadesi denklem (2.5.25) de yerine yazılırsa

$$EIy'''' + m\ddot{y} + c\dot{y} = Mg\delta(x-a) - M[\ddot{y} + v^2 y'' + 2v\dot{y}']\delta(x-a) + Mv^2 y_0''\delta(x-a) + EIy_0'''' \quad (2.5.27)$$

yada

$$EIy'''' + m\ddot{y} + c\dot{y} = EIy_0'''' + Mg\delta(x-a) - M[\ddot{y} + v^2 y'' + 2v\dot{y}']\delta(x-a) + Mv^2 y_0''\delta(x-a) \quad (2.5.28)$$

elde edilir. Kirişin zorlanmış titreşim cevabı basit mesnetli bir kirişin serbest titreşim modlarının birleşimlerinin açılımı ile ifade edilebilir. Yani,

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\phi_n(x) \quad (2.5.29)$$

yazılabilir. Burada,  $q_n(t)$  ler bilinmeyen ancak, yer değiştirmelerle birlikte hesaplanacak olan fonksiyonlardır.  $\phi_n(x)$  ler ise kirişin öz fonksiyonlarıdır ve basit mesnetli düz bir kiriş için bir önceki bölümde hesap edilmişlerdir. Basit mesnetli bir kirişin öz fonksiyonları (2.2.28) de

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5.30)$$

şeklinde hesap edilmişti. Bu öz fonksiyonlar, (2.5.29) eşitliğinde yerine yazılarak

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x) \quad (2.5.31)$$

elde edilir. Kirişin başlangıç eğriliği de Fourier sinüs seri açılımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x) \quad (2.5.32)$$

Denklem (2.5.31) ile birlikte (2.5.32) ifadesinin de kirişin sınır şartlarını sağlaması gerektiğine dikkat edilmelidir. Kiriş eğriliğinin formunun

$$y_0 = \delta_0 \sin(\lambda_n x) \quad (2.5.33)$$

şeklinde olduğu kabul edilsin. Şu halde,  $A_n$  Fourier katsayıları,

$$A_{n0} = \delta_0 \sqrt{\frac{L}{2}}, \quad n=1, \quad A_{n0} = 0, \quad n=2,3,\dots \quad (2.5.34)$$

hesap edilir.

Önerilen bu ifadeler kirişin hareket denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned} EI \lambda_n^4 \sum_{n=1}^{\infty} q_n \phi_n + m \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n \phi_n + c \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \phi_n &= EI \lambda_n^4 \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \phi_n + Mg \delta(x-a) \\ &- M \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n \phi_n + v^2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n \phi_n'' + 2v \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \phi_n' \right] \delta(x-a) \\ &+ \left( Mv^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} \phi_n'' \right) \delta(x-a) \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

elde edilir.  $\phi_k$  ve  $\phi_n$  fonksiyonlarının ortogonal ve ortonormal oldukları akıld tutularak, eşitliğin her iki yanını  $\phi_k$  ( $k \neq n$ ) ile çarpılarak 0 dan  $L$  ye kadar integre edilirse,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n + \frac{c}{m} \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n &= \omega_n^2 A_{n0} + \frac{Mg}{m} \phi_n(a) \\ &- \frac{M}{m} \phi_n(a) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{q}_k \phi_k(a) + v^2 \sum_{k=1}^{\infty} q_k \phi_k''(a) + 2v \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k \phi_k'(a) \right] \\ &+ \frac{Mv^2}{m} \phi_n(a) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} A_{k0} \phi_k''(a) \right] \end{aligned} \quad (2.5.36)$$

sonucuna ulaşılır. Burada, Böylece çözüm, kısmi diferansiyel denklemin çözümünden adi diferansiyel denklemin çözümüne indirgenir. Burada,  $\phi_n(a)$  öz fonksiyonun  $x = vt$  noktasındaki değerini ifade etmektedir.  $\omega_n$  doğal frekansı ise

$$\omega_n^2 = \frac{EI \lambda_n^4}{m}, \quad a = \lambda_n vt \quad (2.5.37)$$

ile ifade edilir.

Her ne kadar çözüm adi diferansiyel denklemin çözümüne indirgenmiş olsa da, denklem (2.5.36) nın çözümü oldukça zordur. Zira merkezci ve Coriolis ivme terimlerinden dolayı denklem gayri-lineerdir. Burada Kounadis (1992) tarafından verilen bir yöntem kullanılacaktır. Picard yönteminin farklı bir versiyonu olan bu Michaltsos ve ark. (2001) tarafından da kullanılmıştır.

Özel çözüme ulaşmak için ilk etapta (2.5.36) ifadesinin sağ tarafının ilk iki terimi dikkate alınsın,

$$\ddot{q}_n + 2\zeta\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \omega_n^2 A_{n0} + \frac{Mg}{m}\phi_n(a), \quad \phi_n(a) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\omega_{fn}t) \quad (2.5.38)$$

Bu halde homojen olmayan (2.5.38) ifadesinin genel çözümü

$$q_n(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [b_1 \cos \omega_d t + b_2 \sin \omega_d t] + A_{n0} + A_n \cos \omega_{fn} t + B_n \sin \omega_{fn} t \quad (2.5.39)$$

şeklinde önceki bölümde elde edilmişti. Ancak bunun aranan gerçek çözüm olduğu unutulmamalıdır. Gerçek çözüm (2.5.39) ile ifade edilen çözüm ve türevleri denklem (2.5.36) da yerine yazılarak iteratif bir yaklaşımla elde edilecektir. Çözümün yakınsaklığı burada vaaz edilmeyecektir. Ancak detayları için Kounadis (1992) ve Michaltsos ve arkadaşlarının (2001) çalışmalarına bakılabilir.

Denklem (2.5.36) nın sağ tarafındaki terimlerin tamamı  $F_n(t)$  ile gösterilsin,

$$\ddot{q}_n + 2\zeta\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = F_n(t) \quad (2.5.40)$$

$F_n(t)$  açık şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \omega_n^2 A_{n0} + \frac{Mg}{m}\phi_n(vt) \\ &- \frac{M}{m}\phi_n(vt) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{q}_k(t)\phi_k(vt) + v^2 \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\phi_k''(vt) + 2v \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k(t)\phi_k'(vt) \right] \\ &- \frac{Mv^2}{m}\phi_n(vt) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} A_{k0}\phi_k''(vt) \right] \end{aligned} \quad (2.5.41)$$

Burada,

$$\omega_{fn} = \lambda_n v, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5.42)$$

$$\omega_{fk} = \lambda_k v, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5.43)$$

$$A_{k0} = \delta_0 \sqrt{\frac{L}{2}}, \quad n = 1, \quad (2.5.44)$$

$$A_k = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$\lambda_n = (n\pi)/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5.45)$$

$$\lambda_k = (k\pi)/L, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir.

Son olarak (2.5.40) ifadesinin sıfır başlangıç şartları altındaki çözümü Duhamel integrali yardımı ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.5.46)$$

Başlangıçta düz ve hareketsiz bir giriş için başlangıç şartları sıfırdır.

$$q_n(t) = 0, \quad \dot{q}_n(t) = 0 \quad (2.5.47)$$

$h(t-\tau)$  Dirac delta fonksiyon cevabı (birim impuls) aşağıdaki şekilde verilir (Michaltsos 2001).

$$h(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) \quad (2.5.48)$$

Denklem (2.5.48), (2.5.46) da yerine yazılarak,

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} F_n(\tau) \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (2.5.49)$$

problemin çözümü sıfır başlangıç şartları altında elde edilmiş olur. Ancak gerçekte eğrilikten dolayı kirişin başlangıç şartları sıfır değildir ve denklem (2.5.49) ile verilen çözüme sıfır olmayan başlangıç şartları da dâhil edilmelidir. Başlangıçta eğriliği  $y_0$  ile verilen kiriş için başlangıç şartları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\left. \begin{array}{l} q_n(0) = A_{n0}, \\ \dot{q}_n(0) = 0, \end{array} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5.50)$$

ve bu başlangıç şartları kullanılarak,

$$q_n(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [\bar{b}_1 \cos \omega_d t + \bar{b}_2 \sin \omega_d t] \quad (2.5.51)$$

çözümüne ulaşılır. Burada,

$$\bar{b}_1 = A_{n0}, \quad \bar{b}_2 = \frac{\zeta\omega_n b_1}{\omega_d}, \quad (2.5.52)$$

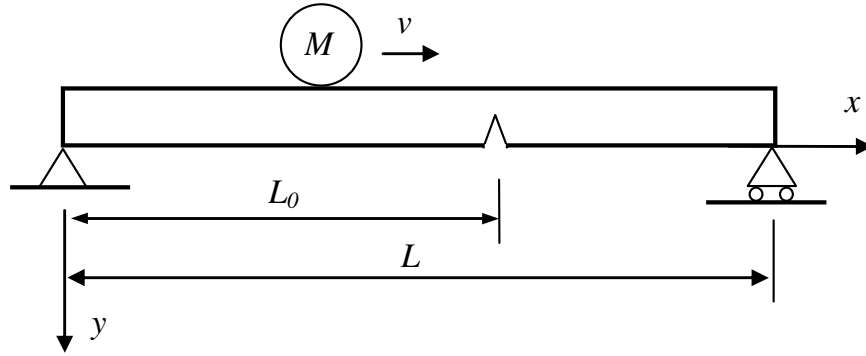
ile verilir. Sonuç olarak eğrisel kiriş için denklem (2.5.40) ın gerçek çözümü (2.5.49) ve (2.5.51) çözümlerinin toplamı ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q_n(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [\bar{b}_1 \cos \omega_d t + \bar{b}_2 \sin \omega_d t] + \frac{1}{\omega_d} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} F_n(\tau) \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (2.5.53)$$

Hareketli yükün etkisi altındaki eğrisel kirişin dinamik davranışını veren matlab programı Ek 1.15 te verilmiştir.

### 2.5.3. Hareketli kütlenin etkisi altındaki, çatlak ihtiva eden kirişlerin titreşimi

Kirişin herhangi bir noktasında çatlak ihtiva etmesi durumunda, çatlağın bulunduğu bölgede, çatlak derinliğine ve geometrisine bağlı olarak, eğilme direncini lokal olarak değiştirdiği ve kirişin serbest titreşim cevabına etki ettiği önceki bölümlerde vaaz edilmişti. Bu kısımda çatlağın kirişin zoraki titreşim cevabına yada bir başka ifade ile hareketli yüklerin etkisi altındaki çatlak ihtiva eden kirişlerin dinamik davranışlarının tespitine yönelik yöntem sunulacaktır.



Şekil 2.5.3. Sabit hızlı  $M$  kütlesinin etkisi altındaki çatlak ihtiva eden basit mesnetli kiriş

Kiriş üzerinde bulunan bir çatlak, çatlak derinliğine ve çatlağın kiriş üzerindeki konumuna bağlı olarak kirişin titreşim genliklerini ve yer değiştirmeleri artıracaktır. Ancak kütleli yükün tesiri merkezci ve Coriolis kuvvetlerinden dolayı çok daha karmaşıktır. Bu kuvvetlerin kirişin dinamik davranışı üzerinde nasıl bir etki oluşacağını önceden kestirmek oldukça güçtür. Zira titreşen bir kirişin anlık eğimi bu Merkezci ve Coriolis ivmelerinin yönünü tayin etmektedir. Oysaki titreşen bir sistemde bu eğim ve buna bağlı olarak ta ivmeler sürekli yön değiştirmektedir. Bununla birlikte zayıf kirişlerde çökmeler daha fazla olacağından bu etkilerin de daha belirgin olması beklenir. Ancak şunu da belirtmek gerekir ki merkezci ve Coriolis ivmeleri gayri-lineer karakterde olduğundan, bu terimlerin formülasyona dâhil edilmesi hareket denkleminin çözümünü oldukça güçleştirecektir.

Hareketli kütlenin etkisi altındaki kirişin hareket denklemi aşağıdaki şekilde verilebilir (Michaltsos ve Kounadis 2001).

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = M [g - a_M] \delta(x - vt) \quad (2.5.54)$$

Burada,  $\delta(x - vt)$  delta Dirac fonksiyonu,  $y$  kirişin dikey yer değiştirmeleridir. Hareketli kütlenin dikey doğrultudaki ivmesi  $a_M$

$$a_M = \ddot{y} + v^2 y'' + 2v \dot{y}' \quad (2.5.55)$$

olarak denklem (2.5.7) de elde edilmişti. Bu ivme ifadesi denklem (2.5.54) de yerine yazılırsa

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Mg \delta(x - vt) - M [\ddot{y} + v^2 y'' + 2v \dot{y}'] \delta(x - vt) \quad (2.5.56)$$

elde edilir. (2.5.56) eşitliğinin çatlak ihtiva eden kirişin serbest titreşimindeki  $\phi_n(x)$  öz fonksiyonları cinsinden

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^N \phi_n(x) q_n(t) \quad (2.5.57)$$

şeklinde ayrık bir seri çözümünün var olduğu kabul edilsin. Burada  $\phi_n(x)$  çatlak ihtiva eden basit mesnetli kirişin öz fonksiyonlarını ifade etmektedir. Bu öz fonksiyonlar (2.3.29) ve (2.3.30) ifadeleri ile önceki bölümlerde hesaplanmıştır.  $q_n(t)$  genelleştirilmiş koordinatları ifade etmektedir.  $N$  hesaplamalarda göz önüne alınan özdeğer sayısını göstermektedir.

(2.5.3) ifadesinin her iki yanını  $\phi_k(x)$  ile çarpılarak 0 dan  $L$  ye kadar integre edilirse



$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N [\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n] \int_0^L \phi_k(x) \phi_n(x) dx &= \frac{Mg}{m} \int_0^L \delta(x-vt) \phi_k(x) dx \\
&- \frac{M}{m} \left[ \sum_{m=1}^N \ddot{q}_m \int_0^L \phi_n(x) \phi_k(x) \delta(x-vt) dx \right] \\
&- \frac{M}{m} \left[ \sum_{m=1}^N v^2 q_m \int_0^L \phi_n''(x) \phi_k(x) \delta(x-vt) dx \right] \\
&- \frac{M}{m} \left[ \sum_{m=1}^N 2v \dot{q}_m \int_0^L \phi_n'(x) \phi_k(x) \delta(x-vt) dx \right]
\end{aligned} \tag{2.5.58}$$

elde edilir. Burada  $\phi_n(x)$  ve  $\phi_k(x)$  fonksiyonlarının dik fonksiyonlar oldukları göz önünde bulundurulduğunda

$$\int_0^L \phi_n \phi_k dx = 0, \quad n \neq k \tag{2.5.59}$$

olduğu ve yine

$$\int_0^L \phi_k^2 dx = \int_0^L \phi_n^2 dx = \int_0^{L_0} \phi_{n1}^2 dx + \int_{L_0}^L \phi_{n2}^2 dx = k, \quad n = k \tag{2.5.60}$$

olacağı görülmelidir.  $\phi_n(x)$  ve  $\phi_k(x)$  fonksiyonları ortonormal olduğunda  $k$  sabiti 1'e eşit olur. Ancak genellikle bu fonksiyonlar ortonormal değildirler. Önceki kısımda öz fonksiyonların katsayıları tek bir değişkene bağlanmış ve bu  $A_{n1}$  değişkeninin detayları bu kısımda vaaz edileceği belirtilerek keyfi olarak belirlenebileceği söylenmişti. İşte bu katsayılar ya tamamen keyfi belirlenerek  $K$  sabiti hesaplanmalı ve eşitliğin sağ tarafı  $K$  ya bölünmeli yada  $K = 1$  olacak şekilde öz fonksiyonların katsayıları tayin edilmelidir. Burada ikinci yol izlenecektir yani öz fonksiyonların katsayıları  $K$  sabitini bir yapacak

şekilde tayin edilecektir. Bu da ancak  $A_{n1}$  in integralin hesabı ile elde edilen  $k$  sabitinin karekökünün tersine ( $A_{n1} = 1/\sqrt{K}$ ) eşit alınması ile mümkündür. Böylece (2.5.58) denklemi

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{M}{m} \phi_n(vt) \left\{ g - \left[ \sum_{k=1}^N \ddot{q}_k \phi_k(vt) \right] + \left[ v^2 \sum_{k=1}^N q_k \phi_k''(vt) \right] + \left[ 2v \sum_{k=1}^N \dot{q}_k \phi_k'(vt) \right] \right\} \quad (2.5.61)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada gayri-lineer (2.5.61) denkleminin kapalı bir çözümünü bulmak mümkün değildir. Ancak, Michaltsos ve Kounadis (2001) tarafından verilen bir yöntem kullanılarak yaklaşık bir çözüm bulunabilir. Gayri-lineer diferansiyel denklemlerin çözümünü için verilen Picard yöntemine benzer bu yöntem Kounadis (1985) tarafından da kullanılmıştır. Yönteme göre diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü, sağ taraftaki ilk terim göz önüne alınarak elde edilen çözüm denklemin sağ tarafında yerine yazılarak ardışık bir yaklaşımla bulunabilir ve bu çözüm yakınsaktır. (2.5.61) denkleminde sağ taraftaki gayri-lineer terimler ihmal edilirse

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \begin{cases} \frac{Mg}{m} \phi_{n1}(vt), & t \leq \frac{L_0}{v} \\ \frac{Mg}{m} \phi_{n2}(vt), & t > \frac{L_0}{v} \end{cases} \quad (2.5.62)$$

yazılabilir. Burada,

$$\phi_{n1}(vt) = A_{n1} \sin(\lambda_n vt) + B_{n1} \cos(\lambda_n vt) + C_{n1} \sinh(\lambda_n vt) + D_{n1} \cosh(\lambda_n vt), \quad (2.5.63)$$

$$\phi_{n2}(vt) = A_{n2} \sin[\lambda_n(L-vt)] + B_{n2} \cos[\lambda_n(L-vt)] + C_{n2} \sinh[\lambda_n(L-vt)] + D_{n2} \cosh[\lambda_n(L-vt)] \quad (2.5.64)$$

çatlak ihtiva eden kirişin öz fonksiyonlarını ifade etmektedir. Hareketli kütle birinci bölgede hareket ederken çözüm ayrı ikinci kısma geçtiğinde ayrı değerlendirilmelidir. Zira hareketli kütle kirişin ikinci kısmına geçtiğinde kiriş için başlangıç şartları sıfır alınmaz. Kiriş artık ilk haldeki şeklini değiştirmiştir. Buna göre  $t \leq \frac{L_0}{v}$  için genel çözüm Kısım 2.4 te;

$$\begin{aligned} q_{n1}(t) \Big|_{t \leq \frac{L_0}{v}} &= (q_{n1})_h + (q_{n1})_p \\ &= d_1 \sin \omega_n t + d_2 \cos \omega_n t + \bar{A}_{n1} \sin \Omega_n t + \bar{B}_{n1} \cos \Omega_n t + \bar{C}_{n1} \sinh \Omega_n t + \bar{D}_{n1} \cosh \Omega_n t \end{aligned} \quad (2.5.65)$$

ile verilmişti. Şimdi, sağ taraftaki ilk terim dikkate alınarak elde edilmiş olan (2.5.65) ifadesi (2.5.61) denkleminin sağ tarafında yazılmalıdır. (2.5.61) denkleminin sağ tarafındaki terimlerin tamamı  $Q_{n1}$  ile gösterilirse

$$\ddot{q}_{n1} + \omega_n^2 q_{n1} = Q_{n1} = \frac{M}{m} \phi_{n1}(vt) \left\{ g - \left[ \sum_{k=1}^N \ddot{q}_k \phi_{k1} \right] - v^2 \left[ \sum_{k=1}^N q_k \phi_{k1}'' \right] - 2v \left[ \sum_{k=1}^N \dot{q}_k \phi_{k1}' \right] \right\} \quad (2.5.66)$$

yazılabilir. Sonuç olarak  $t \leq \frac{L_0}{v}$  için çözülmesi gereken nihai ifade

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = Q_{n1}, \quad t \leq L_0 / v \quad (2.5.67)$$

denklemdir. Sıfır başlangıç şartları altında (2.5.67) denkleminin çözümü, Duhamel integrali ile aşağıdaki gibi verilir.

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t Q_{n1}(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau, \quad t \leq \frac{L_0}{v} \quad (2.5.68)$$

Benzer şekilde,  $t > \frac{L_0}{v}$  için genel çözüm

$$\begin{aligned} q_{n2}(t) \Big|_{t > \frac{L_0}{v}} &= (q_{n2})_h + (q_{n2})_p \\ &= \bar{d}_1 \sin \omega_n t + \bar{d}_2 \cos \omega_n t + \bar{A}_{n2} \sin \Omega_n t + \bar{B}_{n2} \cos \Omega_n t + \bar{C}_{n2} \sinh \Omega_n t + \bar{D}_{n2} \cosh \Omega_n t \end{aligned} \quad (2.5.69)$$

$t > \frac{L_0}{v}$ , için sağ taraftaki ilk terim dikkate alınarak elde edilmiş olan (2.5.69)

ifadesi (2.5.61) denkleminin sağ tarafında yazılmalıdır. (2.5.61) denkleminin sağ tarafındaki terimlerin tamamı bu kez  $Q_{n2}$  ile gösterilsin. Şu halde

$$Q_{n2} = \ddot{q}_{n2} + \omega_n^2 q_{n2} = \frac{M}{m} \phi_{n2}(vt) \left\{ g - \left[ \sum_{k=1}^N \ddot{q}_k \phi_{k2} \right] - v^2 \left[ \sum_{k=1}^N q_k \phi_{k2}'' \right] - 2v \left[ \sum_{k=1}^N \dot{q}_k \phi_{k2}' \right] \right\} \quad (2.5.70)$$

yazılabilir. Burada,  $q_{m2}$ ,  $\dot{q}_{m2}$ ,  $\ddot{q}_{m2}$  ifadeleri (2.5.69) çözümü türetilerek bulunacaktır.

Sonuç olarak (2.5.69) eşitliği (2.5.61) de yerine yazılarak

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = Q_{n2}, \quad t > L_0 / v \quad (2.5.71)$$

ifadesine ulaşılır. Duhamel integrali yardımı ile (2.5.71) denkleminin çözümü

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{\frac{L_0}{v}} Q_{n1}(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau + \frac{1}{\omega_n} \int_{\frac{L_0}{v}}^t Q_{n2}(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau, \quad t > \frac{L_0}{v} \quad (2.5.72)$$

şeklinde verilir ve böylece problem tamamen çözülmüş olur. Burada şu husus unutulmamalıdır, hareketli kütle kirişin ilk kısmında hareket ederken çözüm (2.5.68) ile verilmektedir. Ancak kütle çatlak geçtiğinde yani ikinci bölge üzerinde hareketini sürdürdüğünde bu kez çözüm (2.5.72) ile verilmektedir. Çatlak sayısı arttığında çözüm bölgesi ve çözüm sayısı da artacaktır. Bununla birlikte, her bir çözüm için kullanılacak başlangıç şartları bir önceki çözümün o noktadaki değeri ile ifade edilecektir.

Hareketli yükün etkisi altındaki çatlak ihtiva eden kirişin dinamik davranışını veren matlab programı Ek 1.16 da verilmiştir.

### 3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Hareketli yüklerin etkisi altındaki kirişlerin dinamik davranışlarının tespiti için geliştirilen formülasyon ve yöntemler kullanılarak Matlab programı yardımı ile farklı tip ve şartlardaki kirişler için aşağıdaki örnek simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Sayısız destek ayağı ihtiva eden kirişler, eğrisel kirişler ve son olarak ta çatlak ihtiva eden kirişler için hesaplamalar yapılmış ve kirişlerin dinamik davranışına etki eden parametrelerin farklı değerleri için hesaplamalar ve çizimler yapılmıştır.

Hareketli yüklerin etkisi altındaki kirişlerin dinamik davranışının tespiti için gerçekleştirilen tüm bu analizler yalnızca hareketli yükün kirişe giriş yaptığı ve kirişi terk ettiği zaman aralığında geçerlidir. Şayet, hareketli yük kirişi terk ettikten sonra da kirişin dinamik davranışı tespit edilmek istenirse, yükün kirişi terk ettiği andaki kiriş durumu başlangıç şartı olarak tanımlanmalı ve kirişin bu başlangıç şartları altında serbest titreştiği kabul edilerek yeni bir analiz yapılmalıdır.

Basit mesnetli bir kirişte maksimum yer değiştirmenin kirişin orta noktasında oluşması beklenmektedir. Zira statik halde basit mesnetli bir kirişte maksimum yer değiştirme, kütle kirişin orta noktasına konulduğunda, yine kirişin orta noktasında oluşur ve

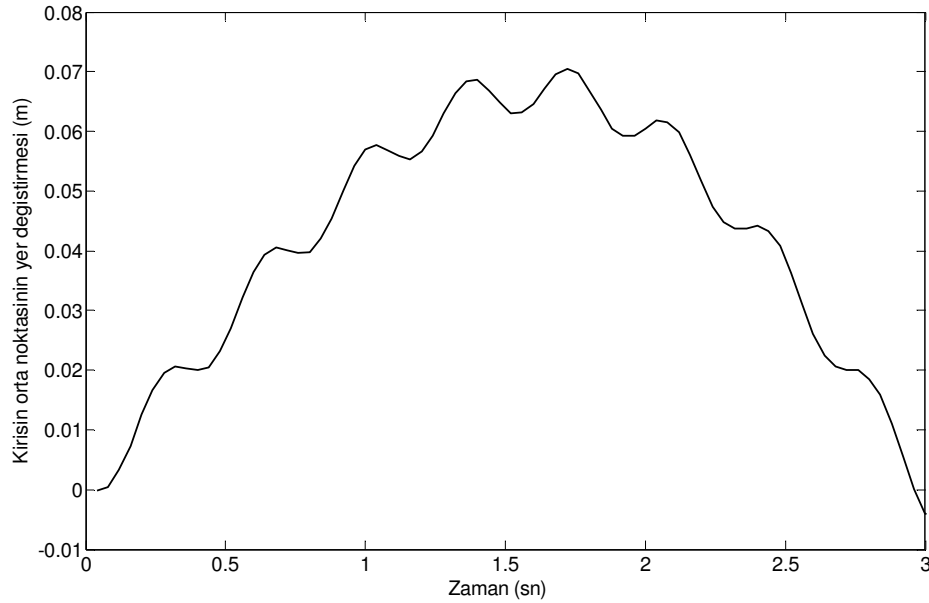
$$y_{\max} = \frac{MgL^3}{48EI} \quad (3.1)$$

ile verilir. Bu nedenle dinamik hesaplamalardan elde edilecek olan orta nokta yer değiştirmeleri bu değere bölünerek aşağıdaki gibi boyutsuz hale getirilecektir.

$\bar{y} = y / y_{\max}$  Benzer şekilde hareketli kütlenin konumu ( $vt$ ), kiriş boyuna bölünerek  $\bar{t} = (vt) / L$  ile verilen boyutsuz hareketli kütle pozisyonu tanımlanabilir. Daha anlaşılır ve yorumlanabilir sonuçlara ulaşabilmek için grafikler bu boyutsuz parametreler ile sunulacaktır.

### 3.1. Hareketli Yüklerin Etkisi Altındaki Destek İhtiva Eden Kirişlerin Titreşimi

Hareketli tekil yük, destek ayaklarındaki tepki kuvvetleri ve sönüm kuvvetleri Dirac delta dağılım fonksiyonu ve Fourier seri açılımından faydalanılarak kiriş üzerine yayılı yüklere dönüştürülmüştür. Bu sayede kiriş çözüm bölgelerine parçalanmadığı için analizlerde basit mesnetli düz bir kirişin özdeğerleri kullanılabilmiştir. Bu sayede oldukça genel ve basit bir çözüm yöntemi ortaya konmuştur. Bu yöntemi literatürdeki çalışmalarla karşılaştırmak için sayısal değerler ilk olarak Esmailzadeh ve Ghorashi tarafından kabul edilen değerlere eşit alınmıştır ( $EI = 2,07 \times 1,04 \times 10^5 \text{ Nm}^2$ ,  $c = 0$ ,  $L = 10 \text{ m}$ ,  $F = 70 \text{ kg}$ ,  $m = 7 \text{ kg/m}$ ). Esmailzadeh ve Ghorashi destek ihtiva etmeyen ( $k_i=0$  ve  $c_i=0$ ) basit mesnetli bir kiriş için hesaplamalar yapmış ve kirişin orta noktasının yer değiştirmesinin zamanla değişimini vermiştir. Aynı sayısal değerler için bu çalışmanın sonuçları kullanılarak yapılan hesaplamalar neticesinde kirişin yer değiştirme-zaman grafiği Şekil 3.1.1 te gösterilmiştir. Esmailzadeh ve Ghorashi tarafından verilen sonuçlar ile Şekil 3.1.1 in mükemmel bir uyum içerisinde olduğu görülmüştür. Ancak bu tez çalışmasının daha genel ve kapsayıcı olduğu unutulmamalıdır.



**Şekil 3.1.1.** Destek ihtiva etmeyen kirişin orta nokta yer değiştirmesinin zamanla değişimi,  $c = 0$ ,  $L=10 \text{ m}$ ,  $F = 70 \times 9.81 \text{ N}$ ,  $EI=(2.07 \times 1.04) \times 10^5 \text{ Nm}^2$ .

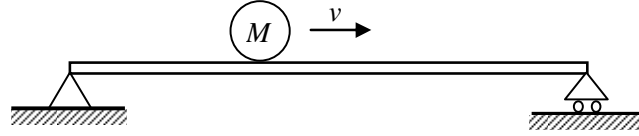
Daha gerçekçi bir model üzerinde çalışmak ve formülasyonun farkını ortaya koymak için kiriş ve hareketli yük için aşağıdaki sayısal veriler dikkate alınarak hesaplamalar yapılmıştır.  $E = 2.10^{11}$  N/m<sup>2</sup>,  $b = h = 0.1$  m,  $c = 10^4$  Ns/m,  $L = 10$  m,  $M = 200$  kg,  $m = 100$  kg/m. Destek ayaklarının kirişin dinamik davranışına etkisini göstermek amacıyla üç farklı kiriş göz önüne alınarak incelemeler yapılmıştır. Bunlar;

- a.) Destek ihtiva etmeyen kiriş.
- b.) Orta noktadan tek bir ayakla desteklenen kiriş,  $x_D = 0.5L$
- c.) İki noktadan desteklenen kiriş,  $x_{D1} = 0.3L$ ,  $x_{D2} = 0.7L$ .
- d.) Eşit aralıklarla üç farklı noktadan ayakla desteklenen kiriş,  $x_{D1} = 0.25L$ ,  $x_{D2} = 0.5L$  ve  $x_{D3} = 0.75L$ .

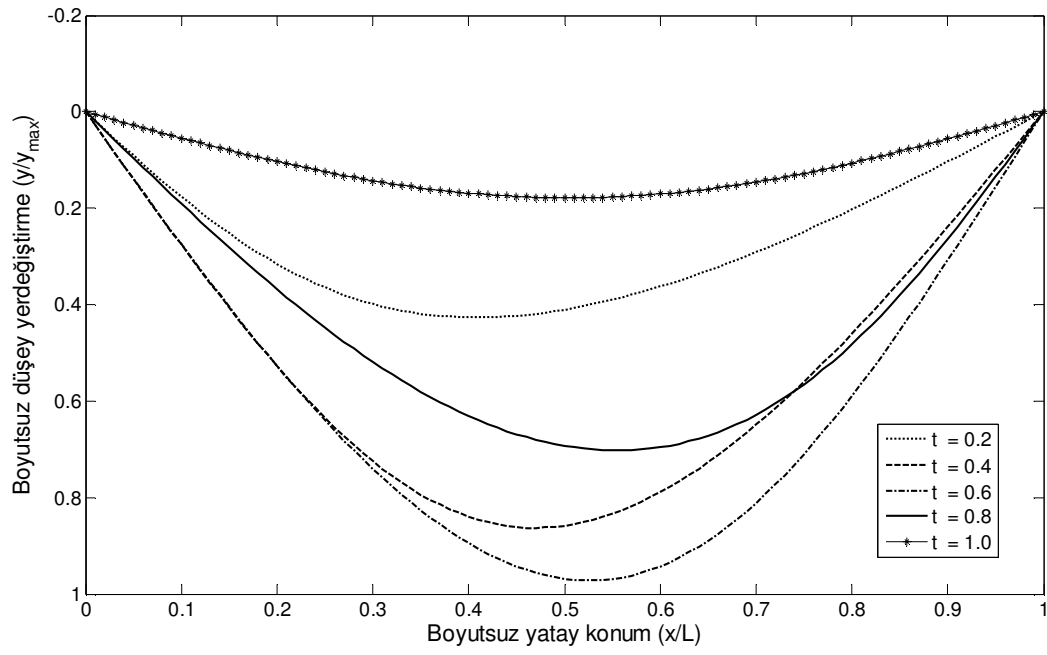
Dikey destek ayakları ( $k_i = 5.10^4$  N/m,  $c_i = 10^4$  Ns/m) olan birey yay damper eleman olarak modellenmektedir.

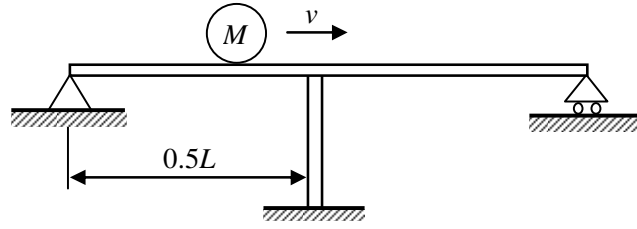
Şekil 3.1.2 de boyutsuz hareketli kütle pozisyonunun farklı değerleri için ( $\bar{t} = 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8 - 1$ ) kirişin boyutsuz şekli destek ihtiva etmeyen, 1, 2 ve 3 adet destek ayağı ihtiva eden kiriş için sırasıyla gösterilmiştir. Şekil 3.1.2(a) herhangi bir destek ihtiva etmeyen kirişin hareketin farklı anlarındaki boyutsuz şeklini göstermektedir. Şekil 3.1.2(b) aynı sonuçları kiriş orta noktadan tek bir destekle desteklendiğinde, Şekil 3.1.2(c) ise kirişin eşit aralıklarla üç farklı noktadan desteklendiği durumda vermektedir. Bu üç grafik incelendiğinde beklenildiği gibi destek ayaklarının sayısındaki artışın kirişin yer değiştirme genliklerini azalttığı açıkça görülmektedir. Destek ayağı ihtiva etmeyen duruma göre tek bir destek ayağının mevcut olmasının kirişin yer değiştirmelerini oldukça azalttığı Şekil 3.1.2(a) ve Şekil 3.1.2(b) den açıkça görülmektedir. Buna karşılık destek ayağı sayısının 2 veya 3 'e çıkartılması ile kiriş yer değiştirmelerinin çok ciddi bir azalma göstermediği fark edilmektedir (Şekil 3.1.2(c,d)).



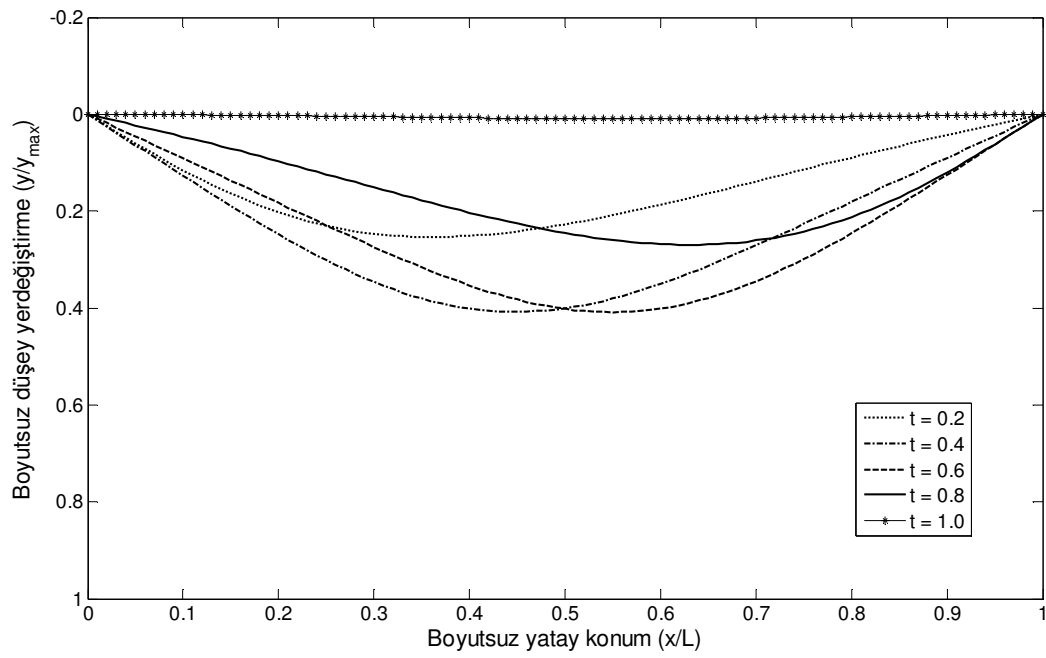


$$(v = 1 \text{ m/sn})$$

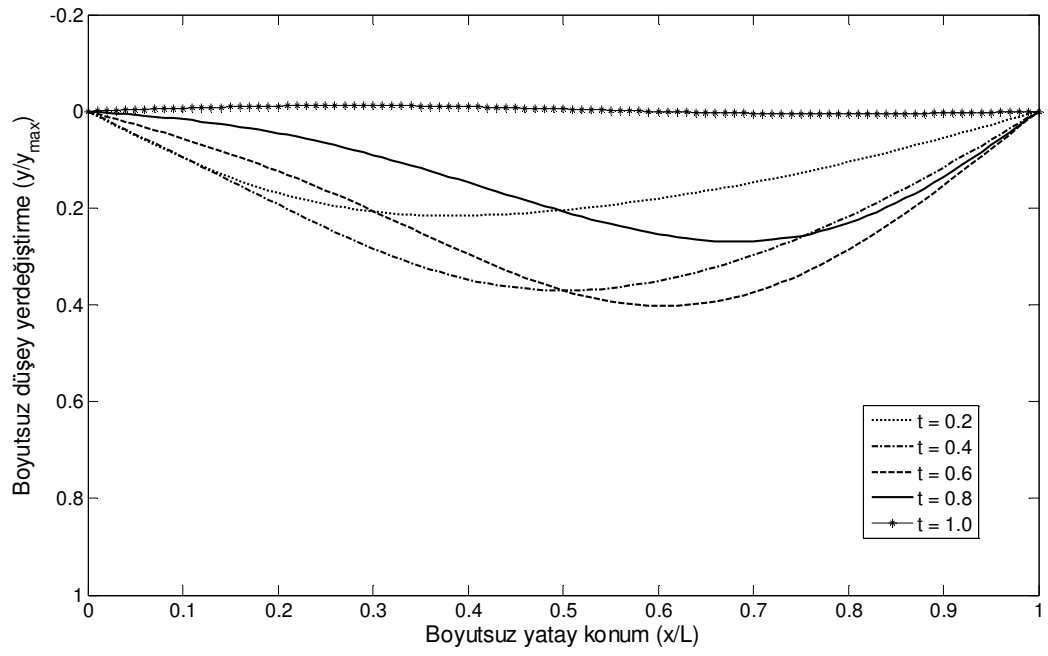
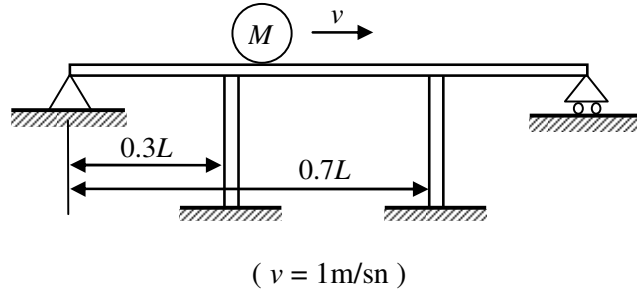
**(a)**



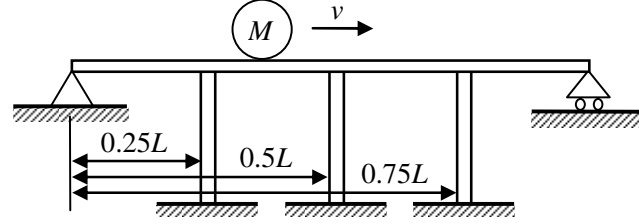
(  $v = 1\text{m/sn}$  )



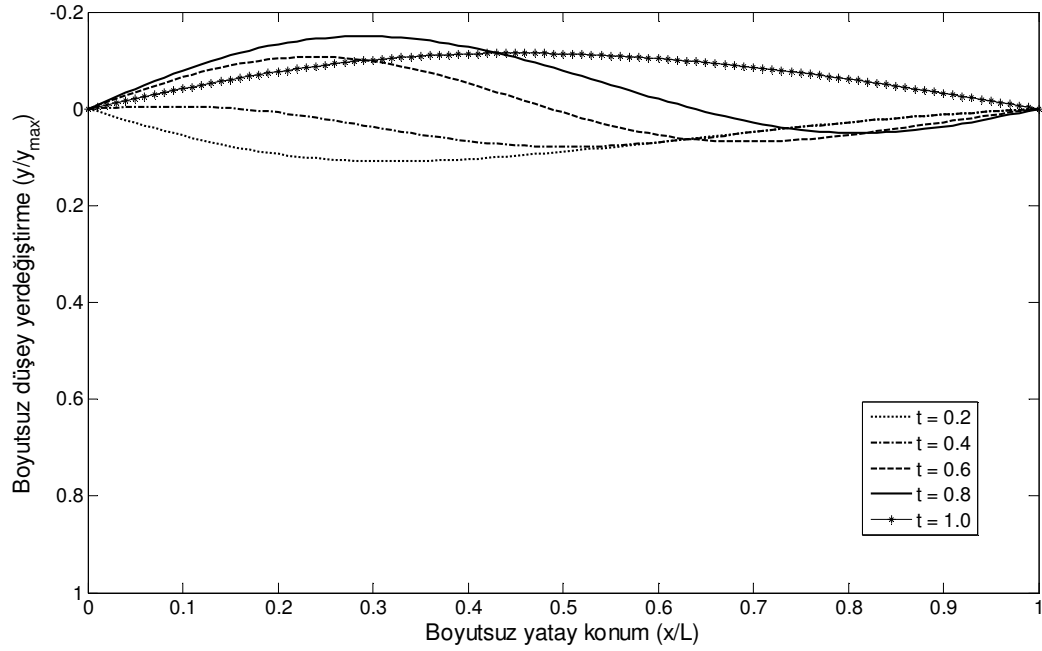
(b)



(c)



$$(v = 1 \text{ m/sn})$$



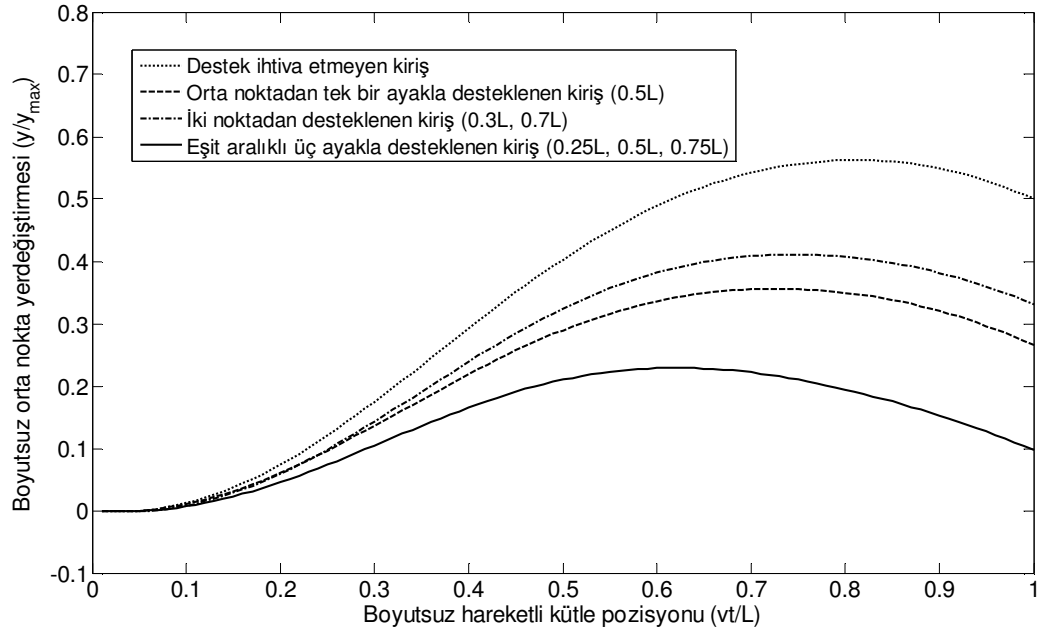
(d)

**Şekil 3.1.2.** Boyutsuz hareketli kütle pozisyonunun farklı değerleri için boyutsuz kiriş şekilleri,  $v = 1 \text{ m/s}$ ,  $(\bar{t} = 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8 - 1)$  ( $k_i = 5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ ,  $c_i = 10^4 \text{ Ns/m}$ ).

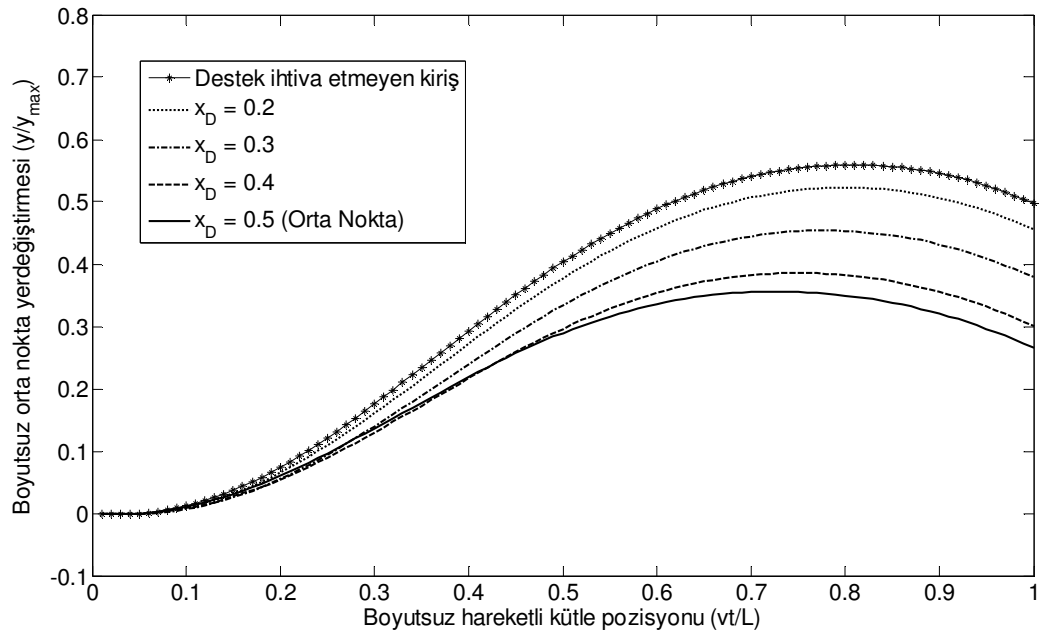
- Destek ihtiva etmeyen kiriş.
- Orta noktadan tek bir ayakla desteklenen kiriş,  $x_D = 0.5L$
- İki noktadan desteklenen kiriş,  $x_{D1} = 0.3L$ ,  $x_{D2} = 0.7L$ .
- Eşit aralıklarla üç farklı noktadan ayakla desteklenen kiriş,  $x_{D1} = 0.25L$ ,  $x_{D2} = 0.5L$  ve  $x_{D3} = 0.75L$ .

Şekil 3.1.3 destek ayaklarının sayısının kirişin orta nokta yer değiştirmelerine etkisini göstermektedir. Noktalarla gösterilen eğri destek ihtiva etmeyen kirişin, kesik çizgiler ile gösterilen eğri orta noktasından tek bir ayakla desteklenen kirişin ( $x_{D1} = 0.5L$ ), kesik – noktalı çizgiler ile gösterilen eğri iki noktadan desteklenen kirişin ( $x_{D1} = 0.3L, x_{D2} = 0.7L$ ) ve son olarakta sürekli çizgi ile gösterilen eğri eşit aralıklarla yerleştirilmiş üç ayakla desteklenen ( $x_{D1} = 0.25L, x_{D2} = 0.5L, x_{D3} = 0.75L$ ) kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin, boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimini göstermektedir. Tıpkı Şekil 3.1.2 de görüldüğü gibi Şekil 3.2.3 den de ayak sayısındaki artışla birlikte kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin azaldığı görülmektedir. Buna ek olarak, orta noktada tek bir destek ayağı bulunması ya da  $x_{D1} = 0.3L$  ve  $x_{D2} = 0.7L$  konumlarında iki adet destek ayağının bulunmasının yer değiştirmeler bakımından ciddi bir fark oluşturmadığı görülmektedir. Şu halde belli bir ayak sayısından sonra destek ayağı miktarının sürekli artırılmasının anlamsız olacağı söylenebilir. Farklı uzunluk ve şartlardaki kirişler için Ek 1.14 te verilen Matlab programı kullanılarak yeni analizler yapılabilir ve en uygun destek ayağı miktarı tespit edilebilir.

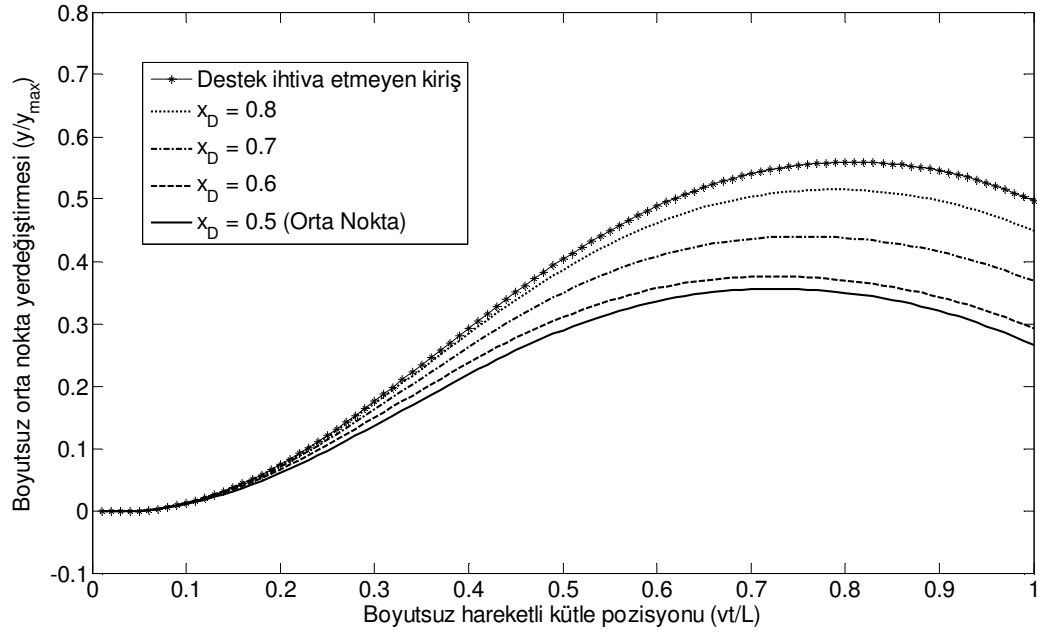
Şekil 3.1.4 de destek ayağının konumunun yer değiştirmelere etkisi incelenmektedir. Bu amaçla destek ayağının farklı konumları için yine boyutsuz orta noktanın yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimi verilmiştir. Şekil 3.1.4 dikkatle incelendiğinde yer değiştirmelerinin destek ayağı kirişin orta noktasına yerleştirildiğinde en az olduğu görülmektedir. Destek kirişin uç noktalarına kaydırıldığında ise etkisi azalmakta ve eğri destek ihtiva etmeyen kirişin cevabına yakınsamaktadır. Böylece çökmelerin asgari seviyeye indirilebilmesi için destek ayağının kirişin orta noktasına yerleştirilmesinin gerektiği görülmüş olur. Bu durum statik halde de böyle olduğundan aslında beklenen bir sonuçtur.



**Şekil 3.1.3.** Kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonu ile değişimi ( $v=10\text{m/s}$ ).



(a)



(b)

**Şekil 3.1.4.** Tek bir ayakla desteklenen kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonu ile değişimi ( $v=10\text{m/s}$ ).

a.)  $0 < x_D < 0.5L$ ,

b.)  $0.5L < x_D < L$ .

Herhangi bir ekstra destek ihtiva etmeyen basit mesnetli sönümsüz bir kiriş için elde edilen sonuçlar yine aynı kiriş için Esmailzadeh ve Ghorashi (1997) tarafından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak her iki çalışmada elde edilen yer değiştirmelerin tam bir uyum içerisinde olduğu gözlenmiştir. Ancak burada geliştirilen yöntem Esmailzadeh ve Ghorashi 'nin çalışmasında olduğu gibi kuple dinamik denklemleri içermediğinden özellikle birden fazla hareketli kütle söz konusu olduğu durumlarda oldukça kullanışlıdır. Kiriş üzerinde hareket eden kaç kütle olursa olsun tek bir kütle için verilen yöntem, N sayıdaki hareketli kütle taşıyan kirişe kolaylıkla genişletilebilir. Şöyle ki, N sayıda hareketli yük kirişe tesir ediyor olsun. Tüm bu kuvvetler

$$F_2 = \frac{2F_2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi v_2(t-t_2)}{L} \sin(\lambda_n x)$$

$$F_3 = \frac{2F_3}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi v_3(t-t_2-t_3)}{L} \sin(\lambda_n x)$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$F_N = \frac{2F_s}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi v_N(t-t_2-t_3-\dots-t_s)}{L} \sin(\lambda_n x)$$

şeklinde ifade edilerek, kirişin hareket denkleminin sağ tarafında yazılarak herhangi bir matematiksel güçlük oluşturmadan çözülebilirler. Burada,  $t_2, t_3, \dots, t_N$  uygulanan kuvvetlerin arasındaki zaman farkını,  $v_2, v_3, \dots, v_N$  ise, bu kuvvetlerin hızlarını ifade etmektedir. Bu yükleme durumunda hareketli yüklerden ilki kirişin sonuna ulaştığı anda ikinci bir yük katarı kirişe giriş yapacaktır. Bu yüzden bu analiz ancak ilk yükün kirişe giriş yaptığı zaman ile kirişin çıkışına vardığı zaman aralığında geçerlidir.



### 3.2. Hareketli Yükün Tesiri Altındaki Eğrisel Kirişlerin Titreşimi

Her kiriş gerçekte az yada çok belli bir eğriliğe sahiptir. Bu eğrilik bazen bilinçli bir şekilde kirişin dayanımını artırmak için verilebileceği gibi, pek çok defa kirişin ağırlığının etkisiyle kendiliğinden oluşur. Dairesel kirişler için detaylı incelemeler yapılmış olmasına karşılık (Wu ve Chiang 2003), keyfi bir eğriliğe sahip kirişler için literatürde pek fazla çalışma mevcut değildir. Bu alanda yapılan çalışmaların neredeyse tamamında kiriş basit mesnetli düz bir kiriş olarak ifade edilmiştir. Oysaki kirişler bazı durumlarda kiriş dayanımını artırmak amacıyla bilinçli olarak dışbükey yapılabilirler. Aksi durumda ise zaten kiriş, kendi ağırlığının etkisiyle  $y_0$  kadar bir sehim yapar. Her iki durumda da tamamen düz bir kirişten bahsetmek imkânsızdır.

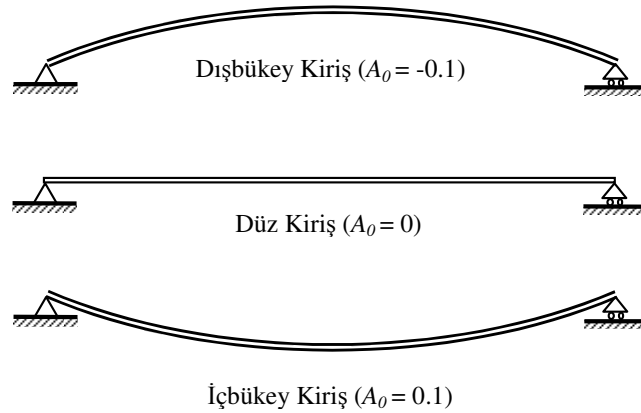
Bazı özel örnekler üzerinde kirişin dikey yer değiştirmeleri zamana bağlı olarak elde edilmiş ve grafiklerle verilmiştir. Bu amaçla kiriş için aşağıdaki kabuller yapılacaktır:  $L=10$  m,  $b=0,2$  m,  $h=0,2$  m,  $m=100$  kg/m,  $c=1000$  Ns/m,  $E=2,07.10^{11}$  N/m<sup>2</sup>,  $A_0 = (-0,1m - 0 - 0,1m)$  (Şekil 3.2.1). Buna ek olarak hareketli kütle için de aşağıdaki kabuller yapılacaktır:  $M=1000$  kg,  $v = (10$  m/sn – 25 m/sn – 50 m/sn).

Şekil 3.2.2 de kirişin başlangıç eğriliğinin kirişin dinamik davranışına etkisi gösterilmektedir. Noktalı çizgiler ile gösterilen eğriler dışbükey başlangıç eğriliğine sahip kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerini göstermektedir. Kesik ve sürekli çizgiler ile gösterilen eğriler ise sırasıyla düz kirişin ve iç bükey başlangıç eğriliğine sahip kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimini vermektedir. Şekil 3.2.2.(a-b-c) den dışbükey başlangıç eğriliğine sahip kirişte boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin daha fazla olduğu görülmektedir. Ancak bu durum yüksek hızlarda merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin etkisiyle tam tersine dönmekte ve Şekil 3.2.2.(d-e) de görüldüğü gibi içbükey başlangıç eğriliğine sahip kirişte orta nokta yer değiştirmeleri daha fazla olmaktadır.

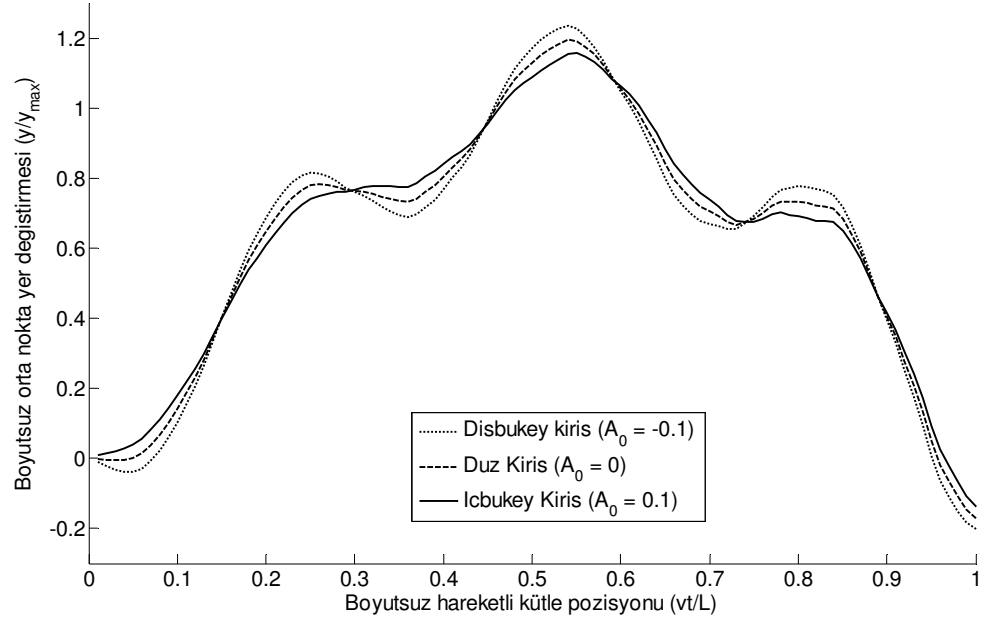
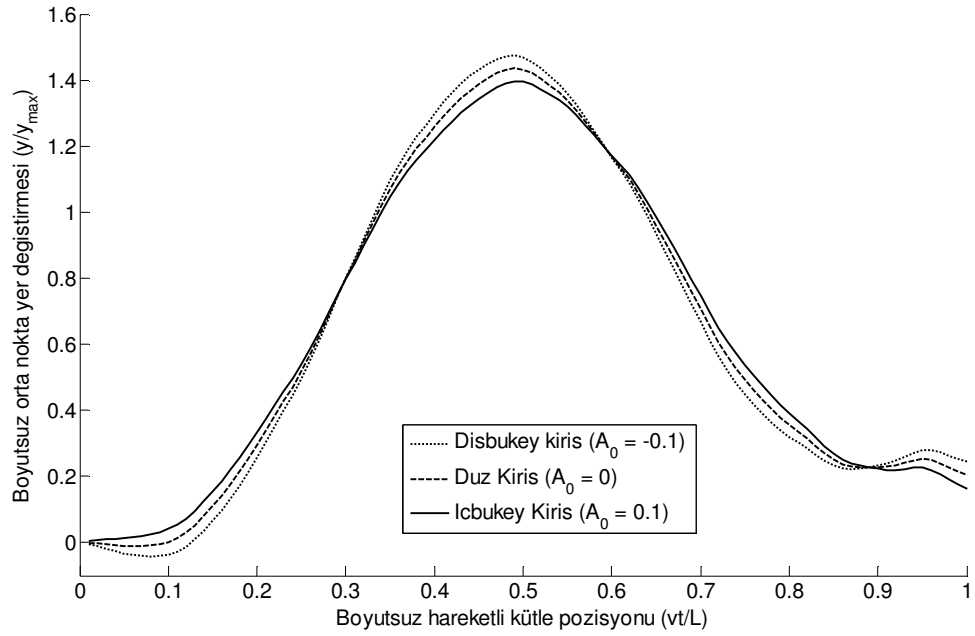
Şekil 3.2.3 de kirişin başlangıç eğriliği bu kez hareketli yükün kütlesi ile birlikte ele alınmaktadır. Yine noktalı çizgiler dışbükey başlangıç eğriliğine sahip kirişin; kesik çizgiler düz kirişin; sürekli çizgiler ise içbükey kirişin boyutsuz orta nokta yer

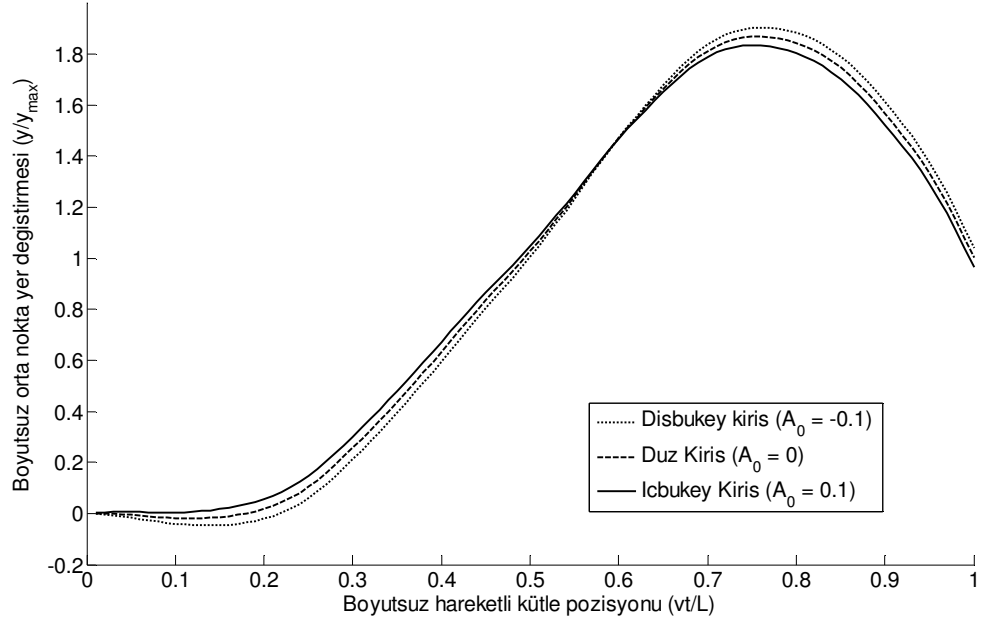
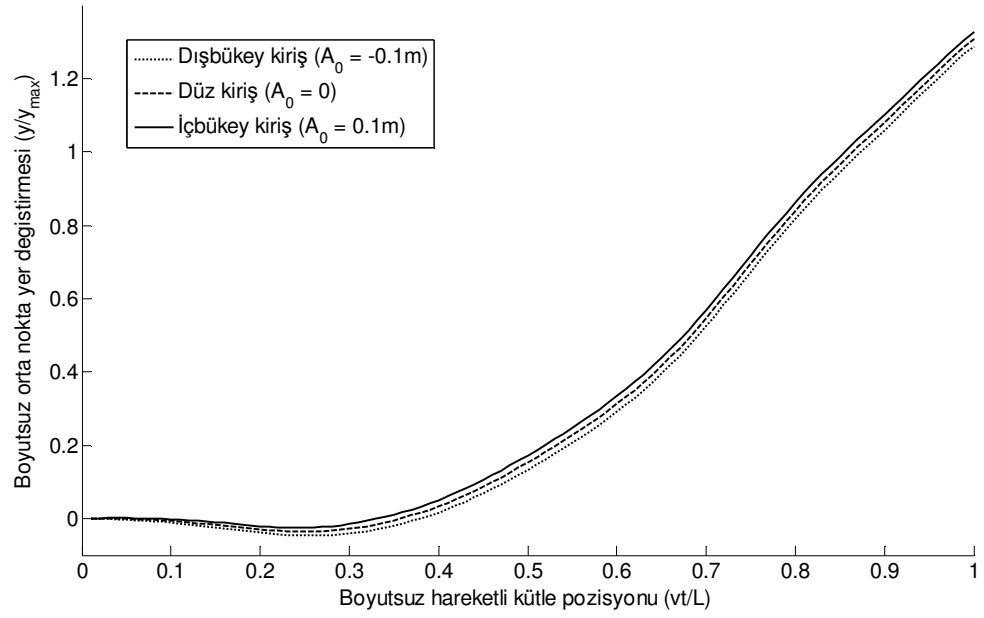
değişikliklerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimini göstermektedir. Şekil 3.2.3.(a-b-c-d-e) den açıkça görüldüğü üzere, hareketli yükün kütlesi arttıkça içbükey ve dışbükey başlangıç eğriliğine sahip kirişlerin orta nokta yer değişiklikleri arasındaki fark ortadan kalkmaktadır. Bunu sebebinin aşırı çökmeler neticesinde her durumda kirişin içbükey bir şekil alması olduğu söylenebilir.

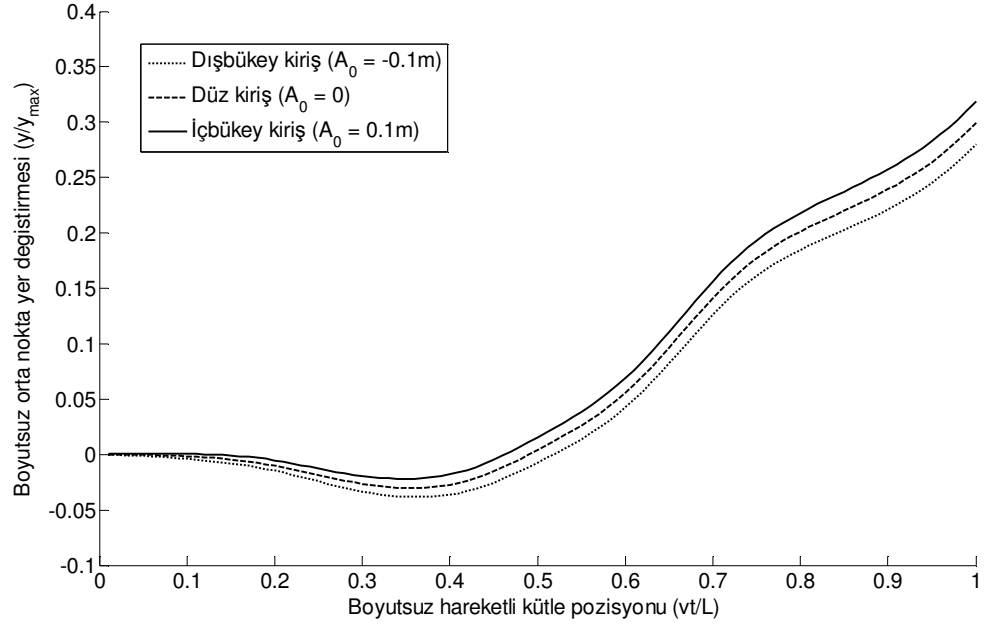
Şekil 3.2.4 dışbükey başlangıç eğriliğine sahip kirişte, atalet, merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin eğrisel kirişin dinamik davranışı üzerine etkisini göstermektedir. Noktalı çizgiler yalnızca hareketli ağırlık kuvvetinin ( $F = Mg$ ); kesik çizgiler ağırlık kuvvetinin yanı sıra hareketli kütle ataletinin; sürekli çizgiler ise en genel halde ağırlık, atalet, merkezci ve Coriolis etkilerinin etkisi altındaki kirişin boyutsuz orta nokta yer değişikliklerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimini göstermektedir. Grafiklerden atalet, merkezci ve Coriolis etkilerinin hesaplamalara dâhil edilmesi ile kirişin dinamik cevabında kayda değer bir değişimin ortaya çıktığı görülmektedir. Ayrıca Şekil 3.2.4.(a-b-c) grafikleri karşılaştırıldığında hızın artan değerlerinin merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin etkilerini artırdığı görülmektedir.



**Şekil 3.2.1** Dışbükey, düz ve içbükey kiriş.

(a)  $M = 1000$  kg,  $v = 5$  m/sn(b)  $M = 1000$  kg,  $v = 10$  m/sn

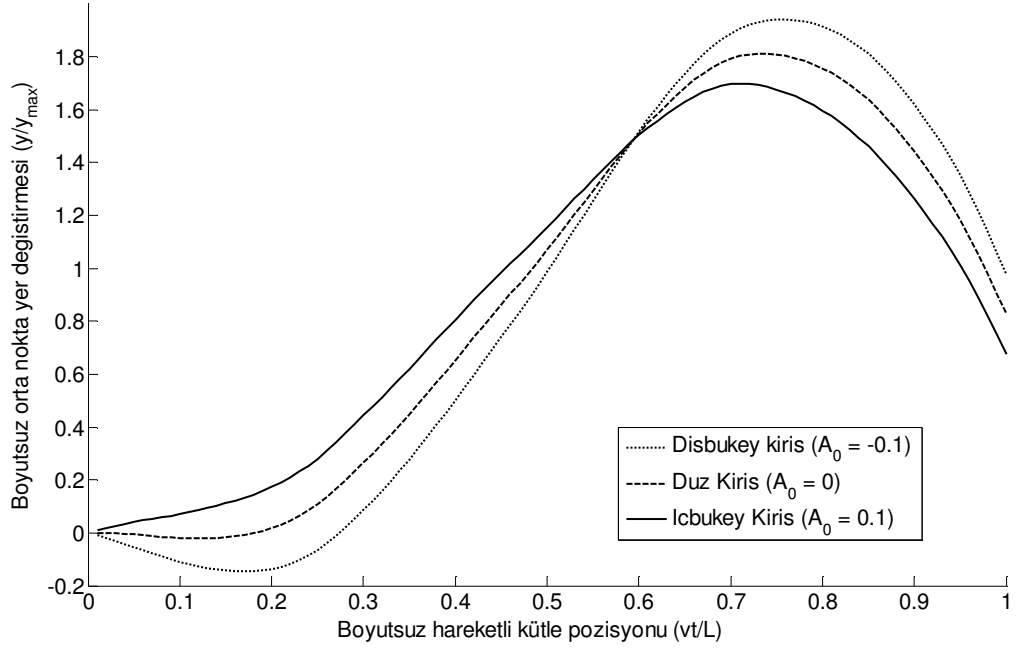
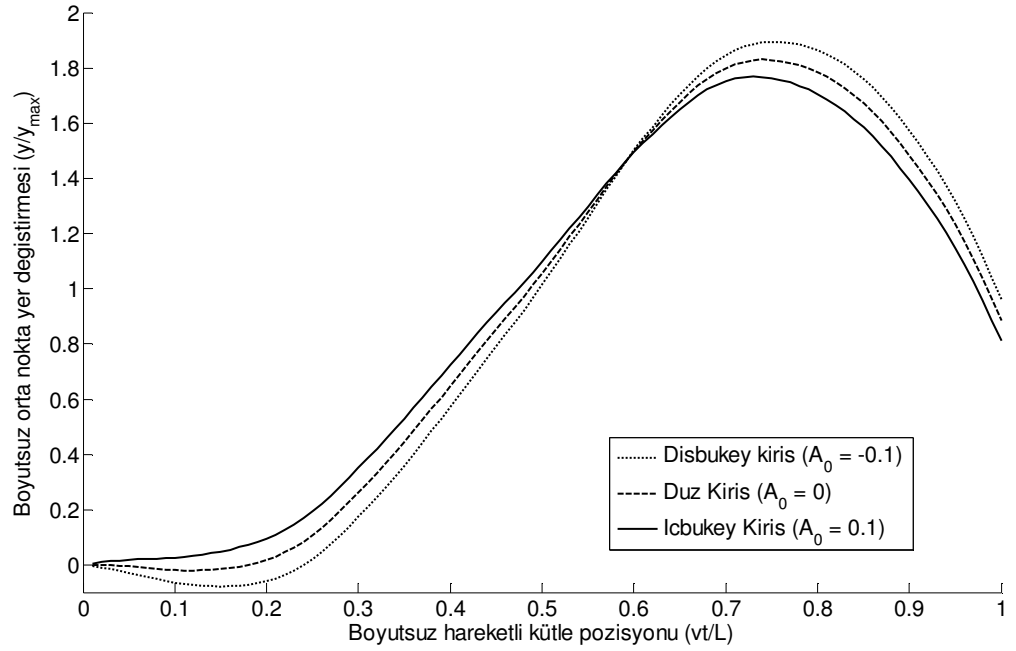
(c)  $M = 1000$  kg,  $v = 20$  m/sn(d)  $M = 1000$  kg,  $v = 50$  m/sn

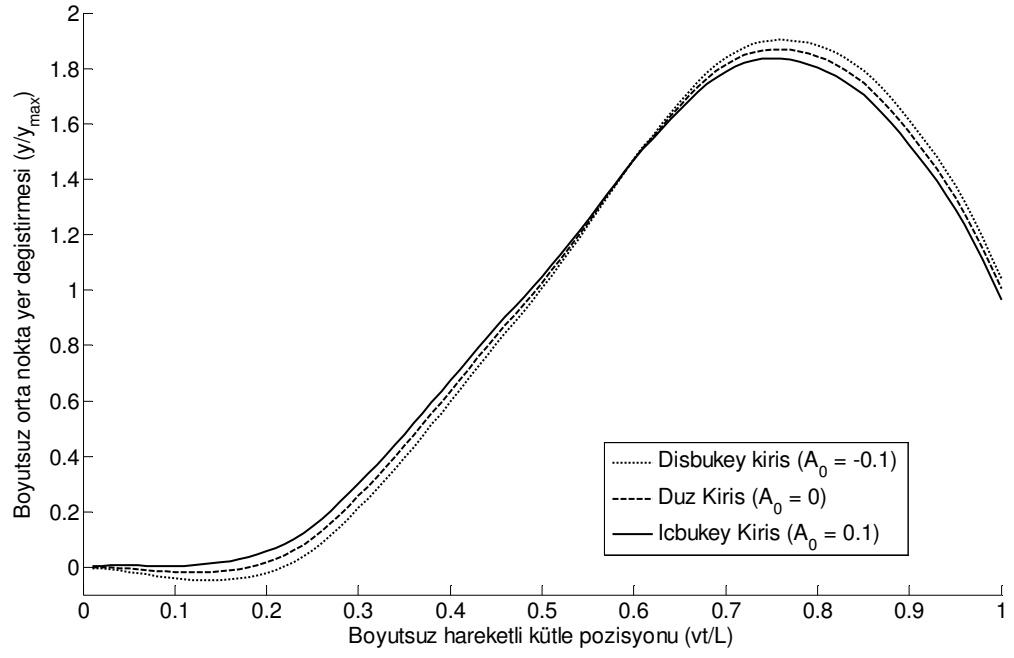
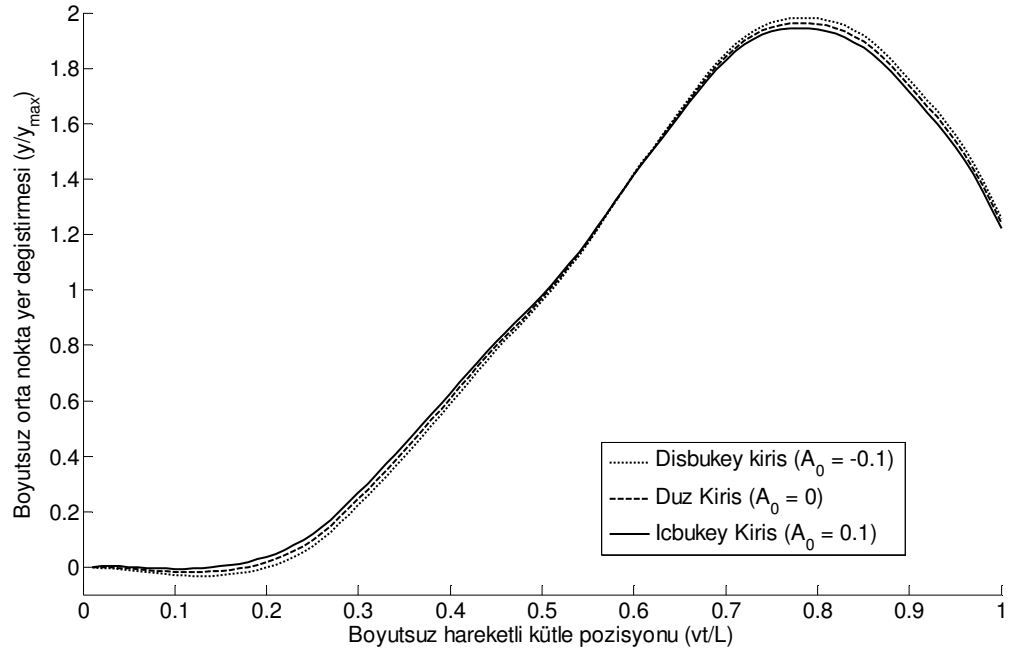


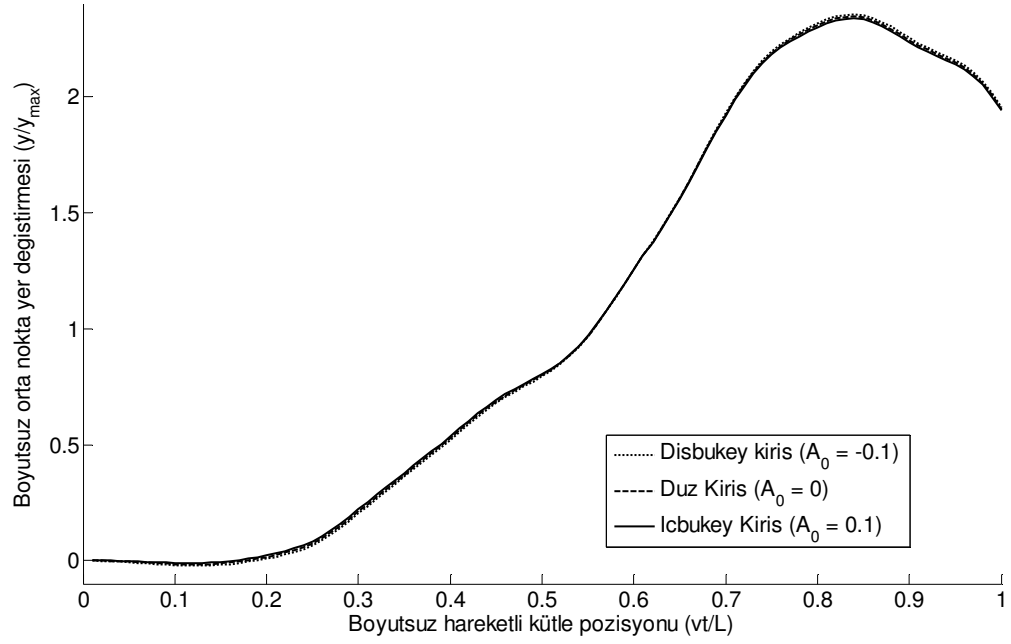
(e)  $M = 1000$  kg,  $v = 100$  m/sn

Şekil 3.2.2. Hareketli kütlenin farklı hızları için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimi.

- a.)  $v = 5$  m/s
- b.)  $v = 10$  m/s
- c.)  $v = 20$  m/s
- d.)  $v = 50$  m/s
- e.)  $v = 100$  m/s

(a)  $M = 25$  kg,  $v = 20$  m/sn(b)  $M = 50$  kg,  $v = 20$  m/sn

(c)  $M = 100$  kg,  $v = 20$  m/sn(d)  $M = 200$  kg,  $v = 20$  m/sn

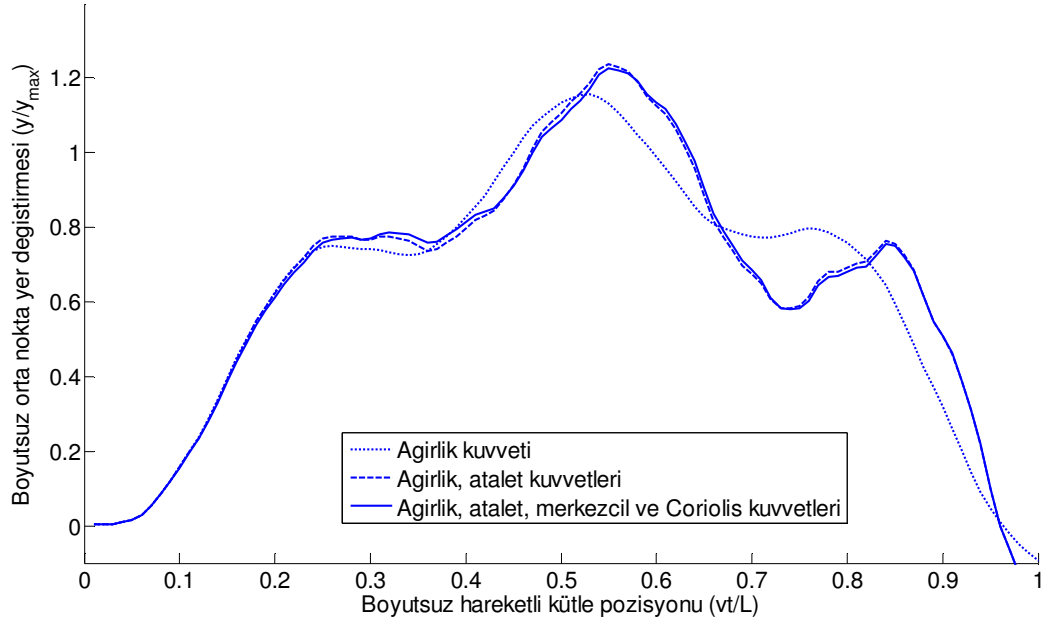
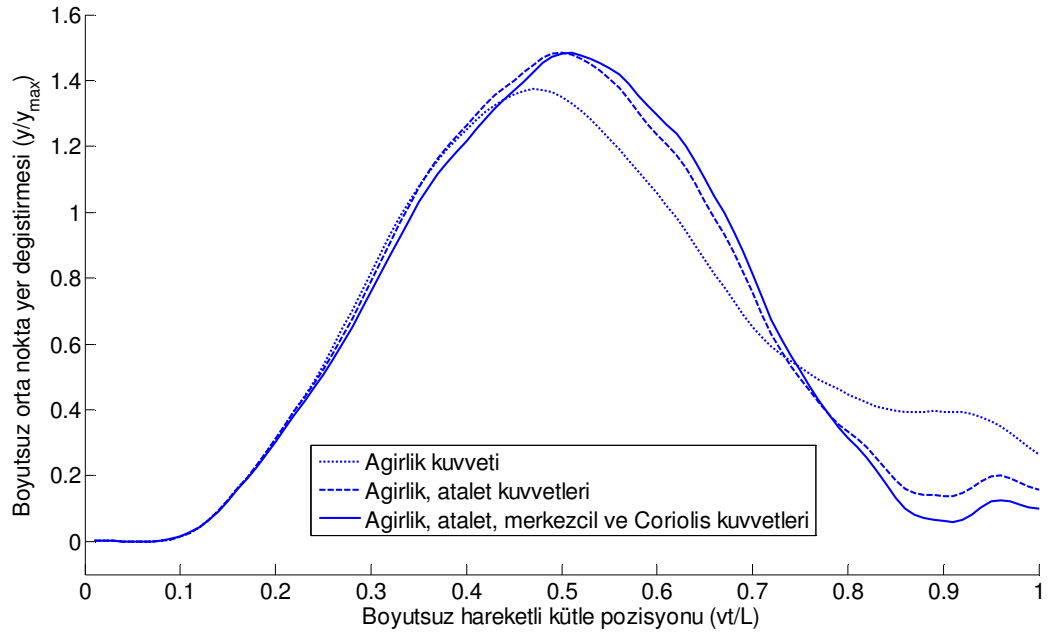


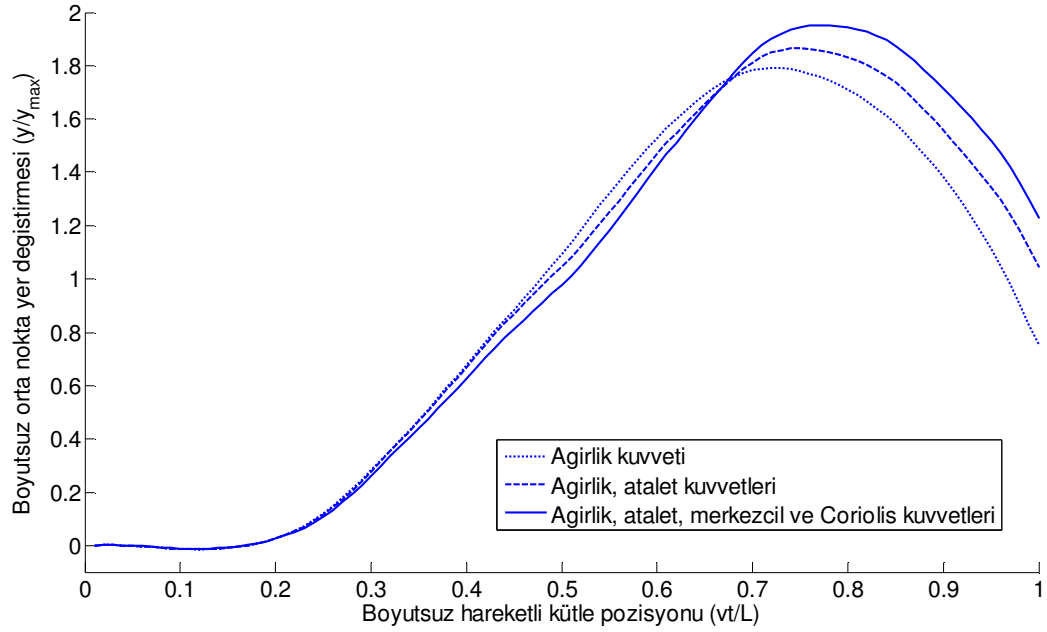
(e)  $M = 500$  kg,  $v = 20$  m/sn

**Şekil 3.2.3.** Hareketli yükün farklı kütleleri için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimi.

- $M = 25$  kg
- $M = 50$  kg
- $M = 100$  kg
- $M = 200$  kg
- $M = 500$  kg



(a)  $M = 1000$  kg,  $v = 5$  m/sn(b)  $M = 1000$  kg,  $v = 10$  m/sn

(c)  $M = 1000$  kg,  $v = 20$  m/sn

**Şekil 3.2.4.** Hareketli yükün farklı durumları için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmesinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimi ( $A_0 = 0.1$ );

- a.  $v = 5$  m/s
- b.  $v = 10$  m/s
- c.  $v = 20$  m/s

Eğrisel bir kirişte kütle ivme etkilerinin düz kirişlere kıyasla çok daha etkin olduğu görülmektedir. Kirişin eğriliğinin içbükey yada dışbükey oluşu özellikle merkezci kuvvetin yönüne doğrudan tesir etmektedir. Ancak kiriş eğriliğinin birinci mertebe teorisinin kabulleri dışına çıkacak mertebede fazla olması durumunda problem silindirik koordinatlarda incelenmelidir. Bu çalışmada eğriliğin kirişin boyuna nazaran küçük olduğu kabul edilmektedir. Şöyle ki böylesi bir eğrilik kirişin kendi ağırlığının etkisi ile yaptığı sehimden yada kirişin ısıl genleşmelerle şeklinin bozulmasından kaynaklanıyor olsun.

### 3.3. Hareketli Yüklerin Etkisi Altındaki Çatlak İhtiva Eden Kirişlerin Titreşimleri

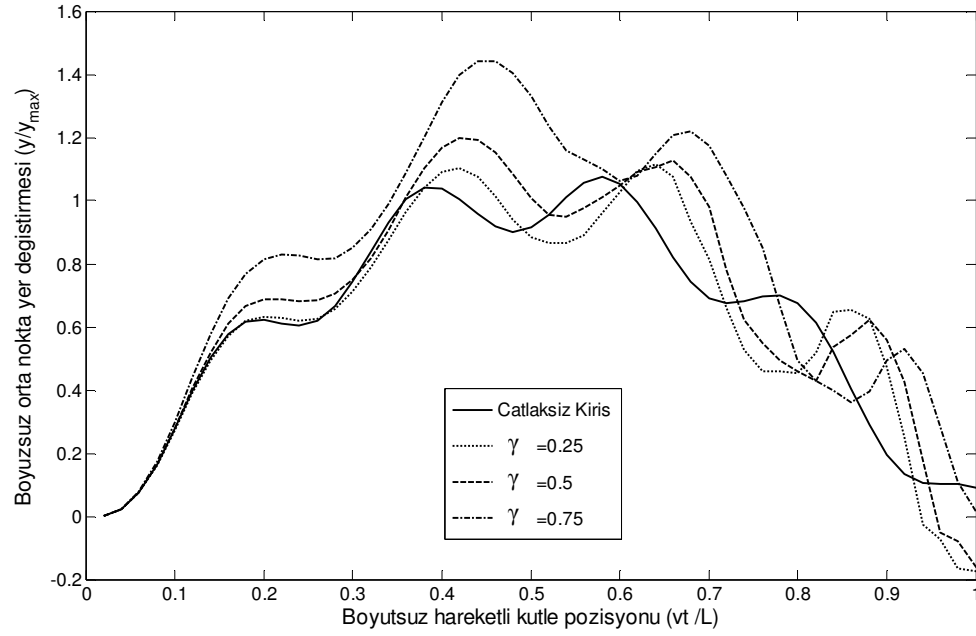
Kirişin herhangi bir noktasında oluşan bir çatlak, çatlağın derinliğine, konumuna ve geometrisine bağlı olarak, kirişin bu noktasının eğilme direncini lokal olarak değiştirmektedir. Bunun doğal bir sonucu olarak ta kirişin dinamik davranışı ve kararlılığı değişmektedir.

Bazı özel örnekler üzerinde kirişin dikey yer değiştirmeleri zamana bağlı olarak elde edilmiş ve grafiklerle verilmiştir. Bu amaçla kiriş için aşağıdaki kabuller yapılacaktır:  $L = 20\text{m}$  uzunluğunda ve  $H = 0.2\text{m}$ ,  $B = 0.2\text{m}$  kesit uzunluklarına sahip bir kiriş göz önüne alınacaktır. Bununla birlikte kirişin elastiklik katsayısının  $E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  ve birim hacminin kütesinin  $\rho = 7800\text{kg/m}^3$  olduğu kabul edilecektir.

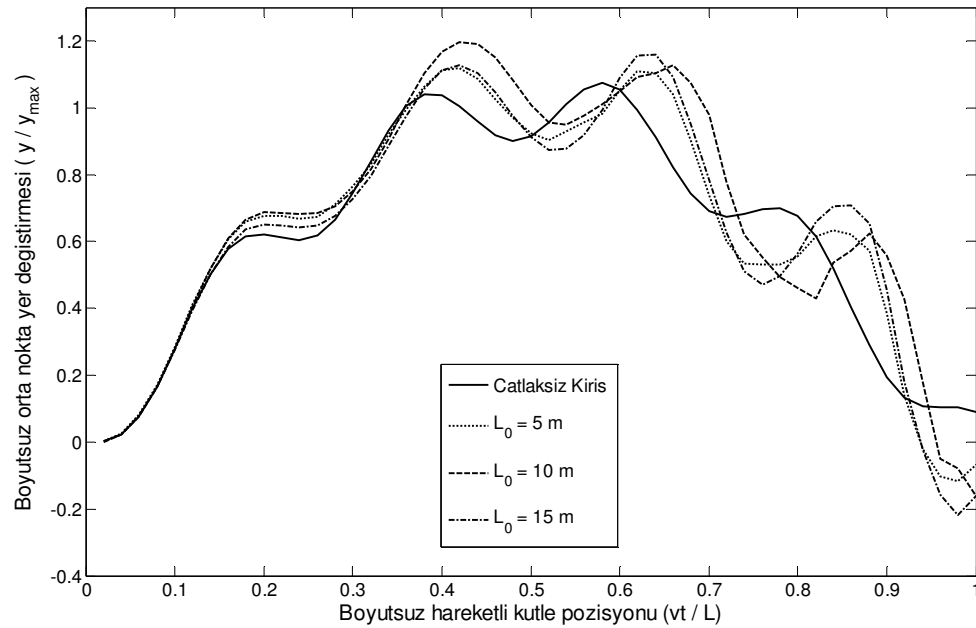
İlk olarak çatlak derinliği ve çatlak konumunun kirişin yer değiştirmesine etkisi incelenecektir. Bu amaçla Şekil 3.3.1 de çatlağın kirişin orta noktasında bulunduğu ( $L_0 = L/2$ ) kabul edilerek farklı çatlak derinliği oranları ( $\gamma = 0.25 - 0.5 - 0.75$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmeleri boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı olarak verilmiştir. Beklenildiği gibi çatlak derinliği oranı arttıkça orta noktanın boyutsuz yer değiştirmeleri de artmaktadır.

Şekil 3.3.2 de ise, çatlak derinliği oranı ( $\gamma = 0.5$ ) sabit tutularak, farklı çatlak konumları ( $L_0 = 5\text{m} - 10\text{m} - 15\text{m}$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmeleri, boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı olarak verilmiştir. Şekilden açıkça görüldüğü üzere, maksimum boyutsuz yer değiştirmeler çatlak kirişin orta noktasında olduğunda meydana gelmektedir. Buna karşılık çatlak kirişin uç noktalarına yaklaştıkça boyutsuz yer değiştirmelerin azaldığı ve çatlaksız hale yakınsadığı görülmektedir.

Şekil 3.3.1 ve Şekil 3.3.2 dikkatlice incelendiğinde çatlak derinliğinin, kirişin boyutsuz yer değiştirmeleri üzerine etkisinin çatlağın konumundan daha belirgin olduğu görülmektedir.



**Şekil 3.3.1.** Farklı çatlak derinliği oranları ( $\gamma$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli ktle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $L_0=10\text{m}$ ,  $v=5\text{m/s}$ ,  $M=1000\text{kg}$ ).



**Şekil 3.3.2.** Farklı çatlak konumları ( $L_0$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli ktle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $\gamma=0.5$ ,  $v=5\text{m/s}$ ,  $M=1000\text{kg}$ ).

Bu çalışmanın bir diğer amacı da atalet, merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin kirişin dinamik davranışına etkilerini göstermek ve bu kuvvetleri etkileyen değişkenleri tespit etmektir. Hareketli yükün hızının ve kütesinin bu kuvvetleri aynı anda doğrudan etkileyen iki parametre olduğu denklemlerden açıkça görülmektedir. Ancak bu etkinin boyutunu kestirmek özellikle böylesi dinamik bir olayda, oldukça güçtür. Bu amaçla Şekil 3.3.3, Şekil 3.3.4, Şekil 3.3.5, Şekil 3.3.6 ve Şekil 3.3.7 'de hareketli yükün farklı kütleleri için ağırlık, atalet, merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin etkileri gösterilmiştir. Burada her bir şekil hareketli yükün farklı hızları için hareketli yükün kütesindeki değişimin atalet, merkezci ve Coriolis terimlerine etkisini göstermektedir.

Hesaplamalarda çatlağın kirişin orta noktasında bulunduğu ( $L_0 = L/2$ ) ve çatlak derinlik oranının ( $\gamma = 0.5$ ) olduğu kabul edilmektedir. Sabit kuvvetin ( $F = Mg$ ), atalet, merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin etkileri ayrı ayrı eğrilerde, hareketli yükün farklı hız ve kütleleri için gösterilmiştir. Noktalı eğriler ağırlık kuvvetinin ( $Mg$ ) etkisi altındaki kirişin orta noktasında oluşan boyutsuz yer değiştirmeleri; kesik çizgiler ile gösterilen eğriler buna atalet kuvvetlerinin dâhil edildiği durumu; sürekli çizgiler ile gösterilen eğriler ise tüm bu kuvvetlere merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin de dahil edildiği en genel haldeki boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerini boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı olarak göstermektedir.

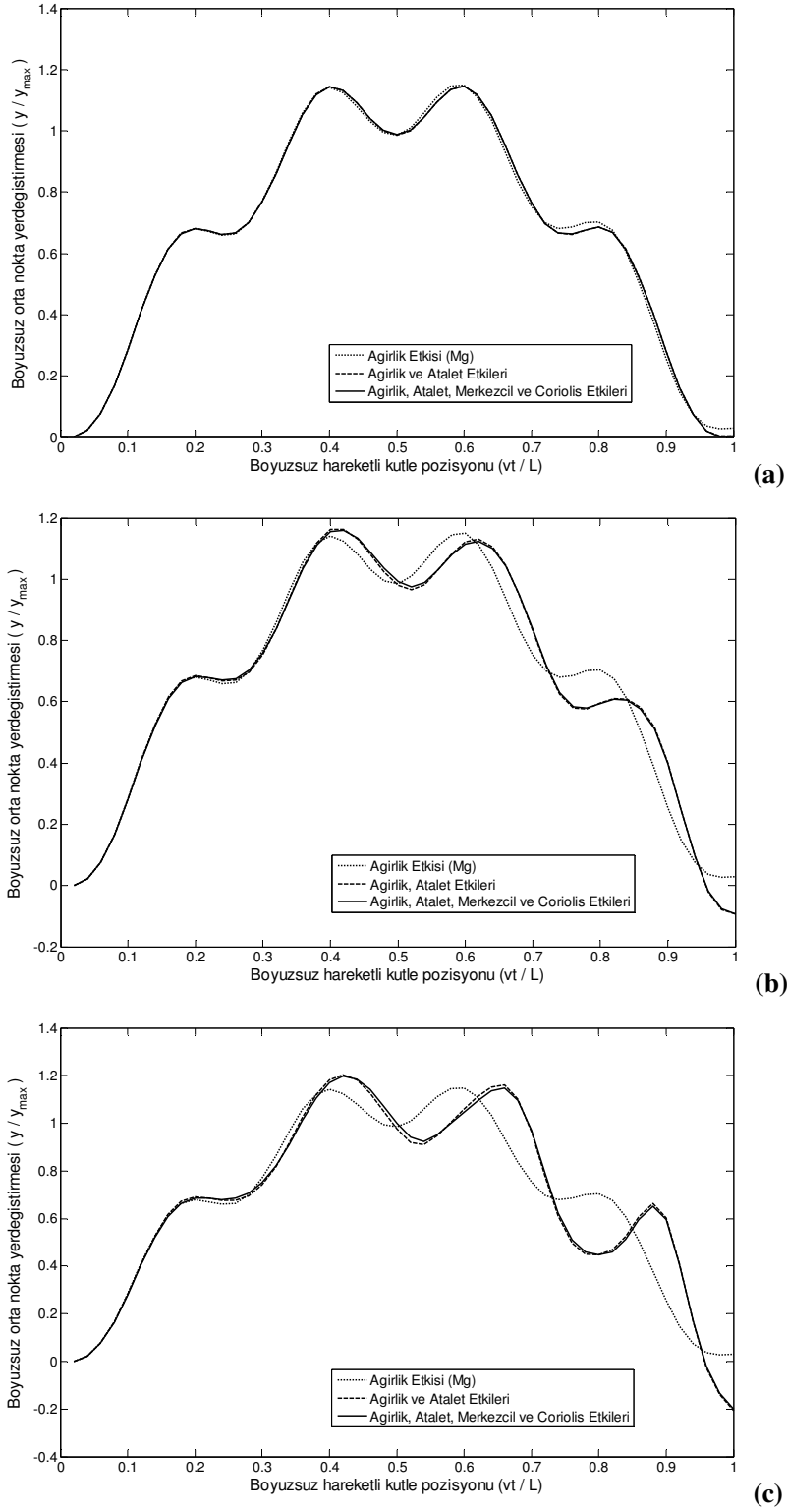
Kütlenin küçük değerlerinde atalet kuvvetlerinin etkilerinin ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu görülmektedir. Kütle arttıkça bu etkiler de gözle görünür bir değişim meydana gelmektedir [Şekil 3.3.3(b,c), Şekil 3.3.4(b,c), Şekil 3.3.5(b,c), Şekil 3.3.6(b,c) ve Şekil 3.3.7(b,c)].

Grafikler dikkatlice incelendiğinde hareketli yükün kütesinin, hareketli yükün hızına kıyasla kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkisinin daha belirgin olduğu anlaşılmaktadır. Tüm grafiklerde hareketli yükün kütlesi arttıkça boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin belli bir değere kadar arttığı görülmektedir. Bu artış düşük hızlarda ve çok yüksek hızlarda daha az olmakta ancak 20m/s civarında en yüksek değerine ulaşmaktadır. Kirişin yaklaşık 800 kg olduğu düşünülürse hareketli kütlelerin kirişin

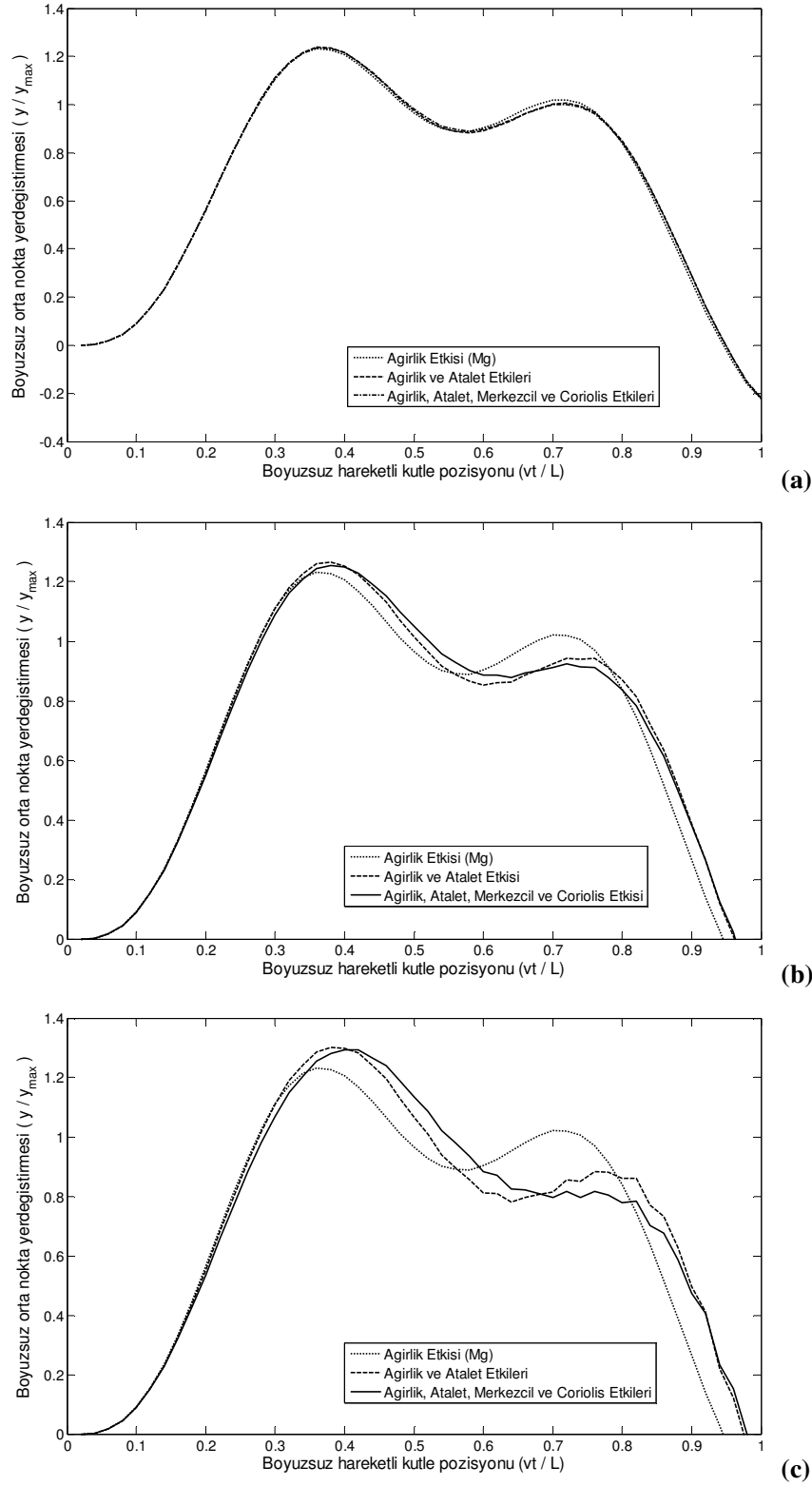
kütlesine nazaran büyük olduğu ve hareketli kütlelerin bu kritik hız ile seyrettiği durumda atalet etkilerinin ihmal edilmesi yaklaşık %15-%20, merkezci ve Coriolis etkilerinin ihmal edilmesi %5-%10 hataya sebep olmaktadır (Şekil 3.3.5(c,d)). Şu halde belli bir kritik hız değerinde atalet, merkezci ve Coriolis etkileri maksimum değerine ulaşmakta bu hız değerinin altında ve üzerindeki hızlarda düşüş göstermektedir.

Hareketli kütlelerin düşük hızlarında merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin etkisinin atalet kuvvetinin etkisi yanında ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu Şekil 3.3.3(a), Şekil 3.3.4(a), Şekil 3.3.5(a), Şekil 3.3.6(a) ve Şekil 3.3.7(a) da açıkça görülmektedir. Buna karşılık hız arttıkça, bu etkiler atalet kuvvetinin etkisi ile kıyaslanabilecek mertebelere ulaşmaktadır [Şekil 3.3.3(b), Şekil 3.3.4(b), Şekil 3.3.5(b), Şekil 3.3.6(b) ve Şekil 3.3.7(b)]. Oldukça geniş bir hız aralığında atalet kuvvetinin kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmesine etkisinin merkezci ve Coriolis etkilerinin toplamından daha fazla olduğu görülmektedir.

Tüm grafikler dikkatle incelendiğinde Atalet etkilerinin hareketli yükün kütlesi arttıkça şiddetini artırdığı buna karşılık Merkezci ve Coriolis etkilerinin hareketli yükün kütlesinin yanında hızı ile de değişim gösterdiği anlaşılmaktadır. Çok yüksek hızlarda merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin kirişin orta noktasının yer değiştirmesine etkisi tekrar azalmakta [Şekil 3.3.7] ve hatta yer değiştirmeleri azaltan yönde tesir edebilmektedir.

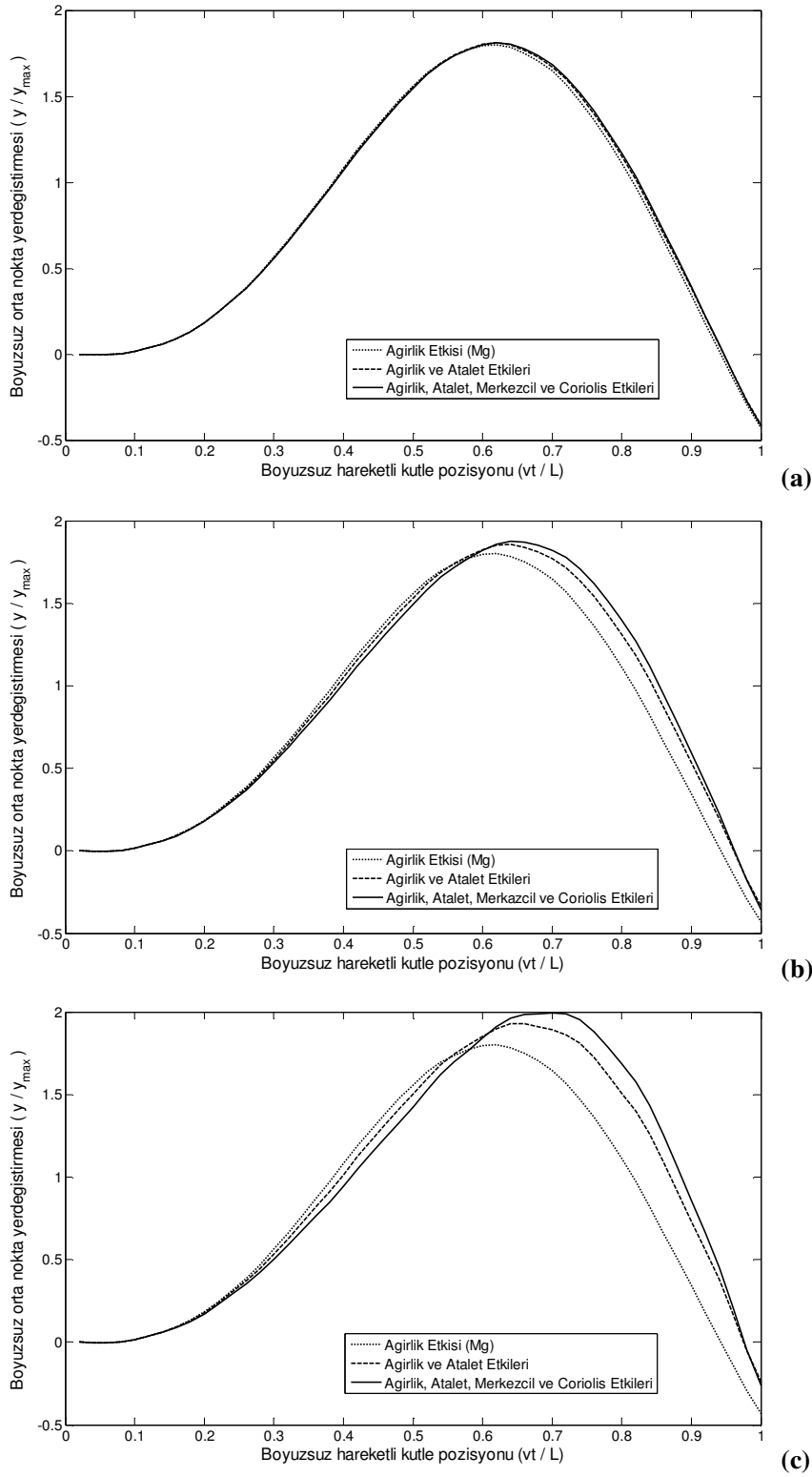


**Şekil 3.3.3.** Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değıştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağıl değışimleri ( $L_0=10\text{m}$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $v=5\text{m/s}$ ),  
a.)  $M=100\text{kg}$ ,    b.)  $M=500\text{kg}$ ,    c.)  $M=1000\text{kg}$

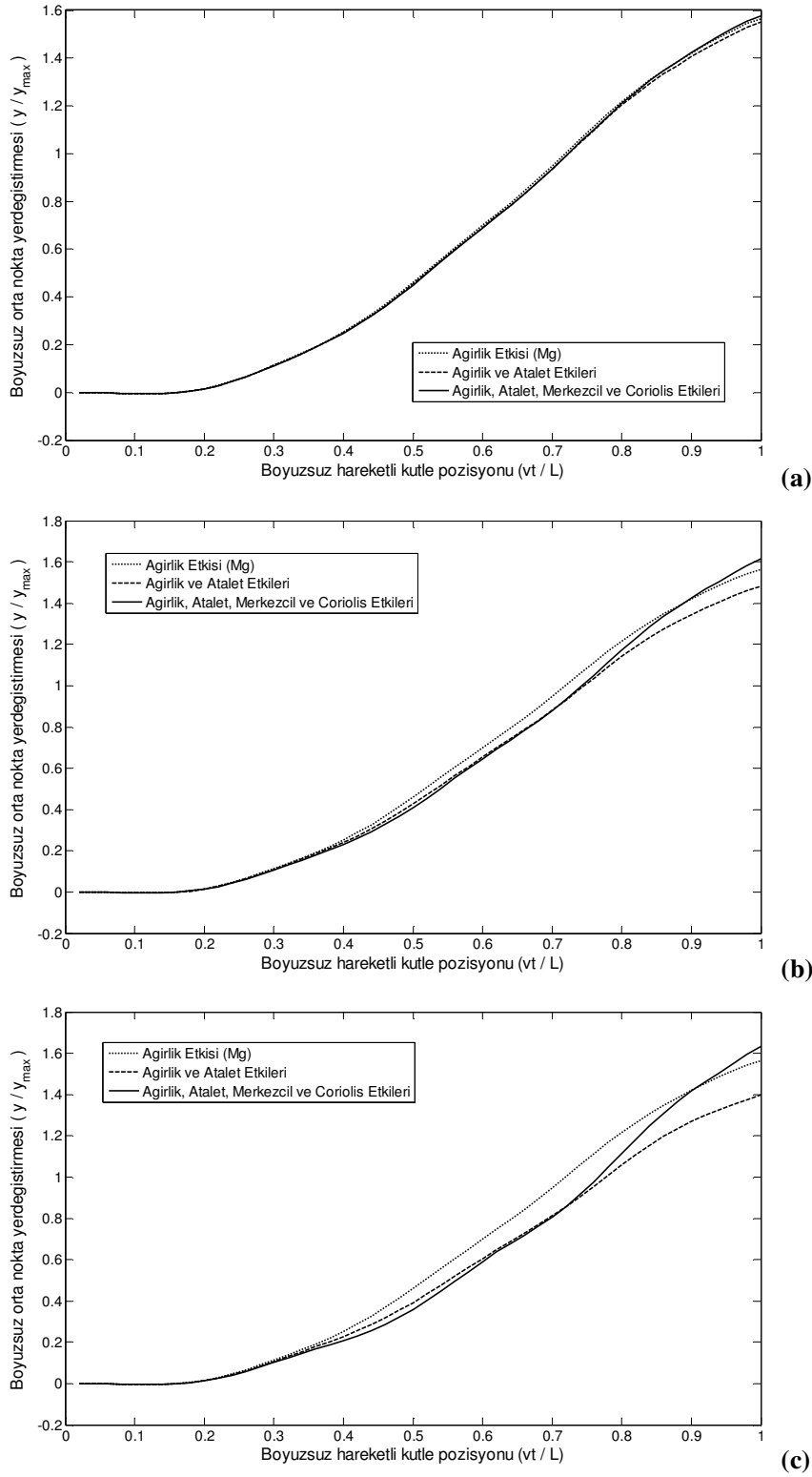


**Şekil 3.3.4.** Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değıştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağılı değışimleri ( $L_0=10\text{m}$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $v=10\text{m/s}$ ),  
a.)  $M=100\text{kg}$ ,    b.)  $M=500\text{kg}$ ,    c.)  $M=1000\text{kg}$

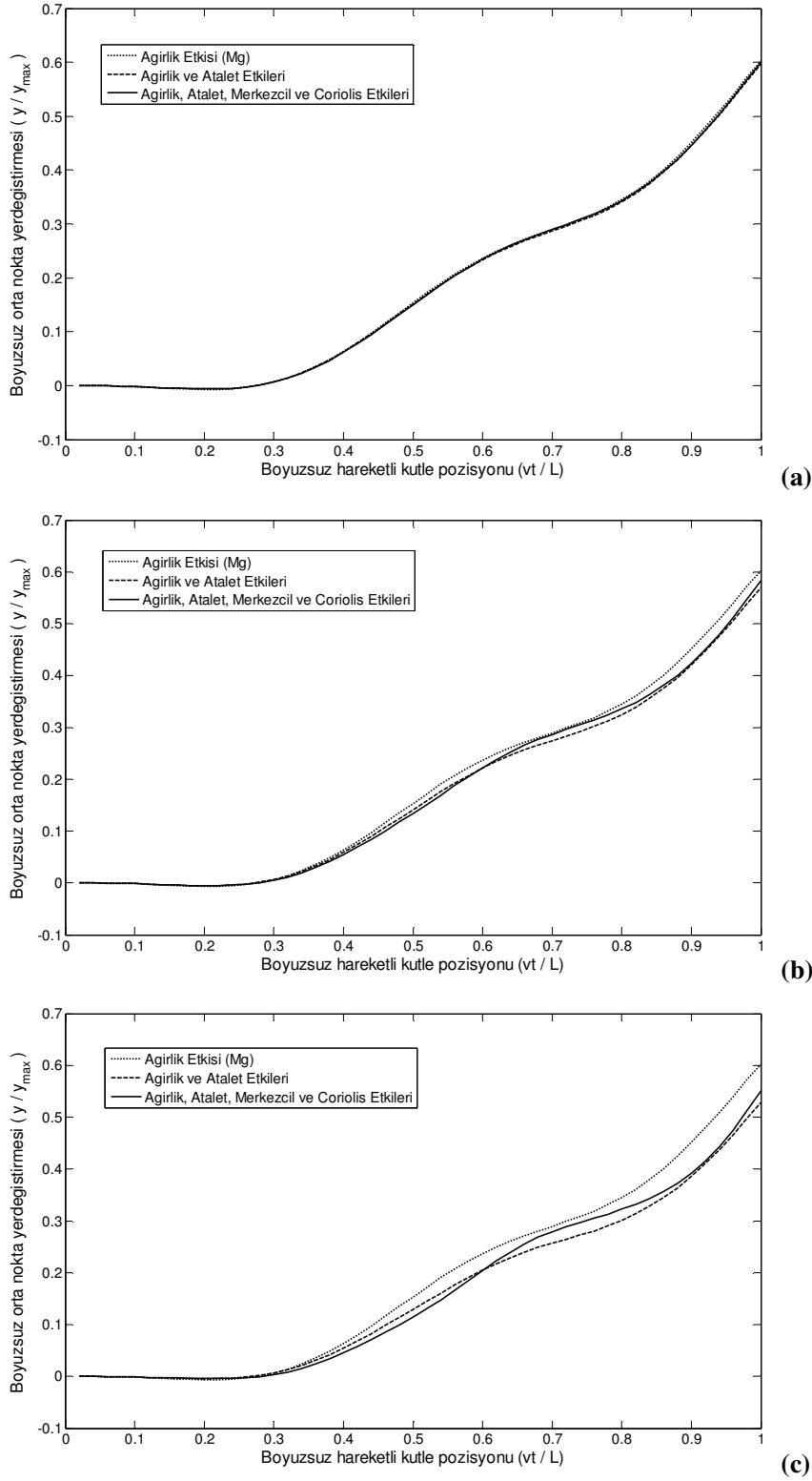




**Şekil 3.3.5.** Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $L_0=10m$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $v=20m/s$ ),  
a.)  $M=100kg$ ,    b.)  $M=500kg$ ,    c.)  $M=1000kg$



**Şekil 3.3.6.** Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimleri ( $L_0=10\text{m}$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $v=50\text{m/s}$ ),  
a.)  $M=100\text{kg}$ , b.)  $M=500\text{kg}$ , c.)  $M=1000\text{kg}$



**Şekil 3.3.7.** Hareketli yükün farklı kütleleri ( $M$ ) için, boyuzsuz orta nokta yer değıştirmelerinin boyuzsuz hareketli kutle pozisyonuna bağı değışimleri ( $L_0=10\text{m}$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $v=100\text{m/s}$ ),  
a.)  $M=100\text{kg}$ , b.)  $M=500\text{kg}$ , c.)  $M=1000\text{kg}$

## SONUÇ

Bu çalışmada hareketli kuvvet veya hareketli kütlenin tesiri altındaki kirişlerin dinamik davranışları incelenmiştir. Bu incelemelerde Euler – Bernoulli kiriş teorisi kullanılmıştır. Düşey kolonlarla desteklenmiş düz veya eğrisel kirişlerden, çatlak ihtiva eden basit yada elastik mesnetli kirişlere varıncaya kadar pek çok farklı özellik ve şartlardaki kirişlerin hareketli yüklerin tesiri altındaki titreşim analizleri yapılmıştır.

Analizlerde yükün kiriş üzerine yayılı kısmının, kirişin kendi boyunun yanında yeterince küçük olduğu kabul edilmektedir. Böylece hareketli yükün tekil bir yük olduğu farz edilmiş olur. Benzer bir kabul, kirişi desteklemek için kullanılan düşey kolonlar için de yapılmıştır. Kolonların kiriş boyunca olan genişliğinin kiriş boyuna nazaran yeterince küçük olduğu yani kolon kuvvetlerinin tıpkı hareketli yük gibi dar bir bölgede kiriş üzerine etkidiği ve bu kuvvetlerinin de tekil yük olarak kabul edilebilecekleri vaaz edilmiştir.

Hareketli kütle, sabit bir kuvvet olarak ifade edilebildiği gibi atalet, merkezci ve Coriolis etkilerini ihtiva edecek şekilde bir kütsel yük olarak ele alınabilir. Şimdiye kadar merkezci ve Coriolis etkileri üzerinde pek durulmamış ve neredeyse tüm çalışmalarda ihmal edilmiştir. Ancak özellikle uzun kirişlerin, eğri kirişlerin yada yüksek hızlarda hareket eden kütlelerin tesiri altındaki kirişlerin dinamik davranışlarının incelenmesinde merkezci ve Coriolis kuvvetleri göz önüne alınmalıdır. Bu çalışmada tüm bu etkilerin dikkate alındığı oldukça genel bir çözüm yöntemi sunulmaktadır. Merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin formülasyona dahil edilmesi ile birlikte kirişin hareketini idare eden diferansiyel denklem gayri-lineer hale dönüşmektedir. Bu gayri-lineer ifade iteratif bir yaklaşımla yaklaşık olarak çözülmüştür. Sistemin cevabı bütün haller için Duhamel integrali yardımı ile verilmektedir. Hareketli kütlenin sabit kuvvet olarak kabul edilmesinin özellikle yüksek hızlarda ve uzun kirişlerde ciddi bir hataya sebebiyet verdiği görülmüştür. Yüksek hızlarda kütlenin atalet etkisi, uzun kirişlerde

kirişin şeklindeki değişime bağlı olarak merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin etkilerinin fark edilir derecelere ulaşması bu hatanın nedenleridir.

Tamamı analitik olan bu tez çalışması, Matlab ortamında yazılan ve oldukça genel problemlere çözüm sunabilen bilgisayar programları yardımları ve sayısal örneklerle desteklenmiştir. Oluşturulan sayısal modeller ve örnek problemler, geliştirilen bilgisayar programlarının yardımıyla çözülmüştür. Böylece tüm parametre ve değişkenlerin kirişin dinamik davranışı üzerine olan etkisi örnekler üzerinde gösterilmiştir. Bu sayısal verilerden bir kısmı literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılarak doğruluğu teyit edilmiştir. Eğrisel kirişler ve çatlak ihtiva eden kirişler için elde edilen sonuçları karşılaştıracak benzer bir çalışma bulunmadığından, bunun yerine dinamik yer değiştirmelerin bir kısmı statik yer değiştirmelere oranlanarak normalize edilmiş ve böylece açık ve kesin sonuçlar elde edilmiştir.

Atalet, merkezci, Coriolis kuvvetlerinin etkilerinin yanında, düşey kolonla desteklenmiş kirişlerde kolon rijitliğinin ve sönüm oranının, çatlak ihtiva eden kirişlerde çatlak derinliğinin ve çatlak konumunun, eğrisel kirişlerde de kirişin eğrilığının kirişin dinamik davranışına olan etkisini veren bağıntılara ulaşılmış ve her biri için analitik çözüm elde edilmiştir. Matlab ortamında yazılan bilgisayar programları yardımıyla merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin kirişin dinamik davranışına etkileri gösterilmiştir. Ayrıca kirişin dinamik davranışına etki eden parametrelerin farklı değerleri için kirişin boyutsuz orta nokta yer değiştirmelerinin boyutsuz hareketli kütle pozisyonuna bağlı değişimi elde edilmiştir. Çatlağın kirişin dinamik davranışına etkisi farklı çatlak derinliği ve çatlak konumu için çizilen yer değiştirme eğrileri ile gösterilmiştir. Sonuç olarak basit mesnetli bir kirişte çatlak için en kritik konumun kirişin orta noktasının olduğu gözlenmiştir.

Kiriş ve kirişlerin titreşim genliklerini düşürmek ve kirişin mukavemetini artırmak için özellikle uzun köprü ve kirişler kolonlarla desteklenmektedir. Bu durum analitik çözümde çözüm bölgesini parçalara ayırarak ilave denklemler, yeni sınır şartları ve dolayısıyla hesaplanması gerekli pek çok katsayı anlamına gelmektedir.  $z$  adet kolon ile desteklenen bir kirişin dinamik davranışının tespiti için  $(z+1)$  sayıda hareket denklemi,

$4(z+1)$  sayıda sınır şartı ve süreklilik şartı ile çözümlenmelidir. Bu yolla böylesi bir problem ancak bilgisayar ve paket programlar yardımı ile çözülebilir. Bu nedenle böyle bir problemde klasik çözüm yöntemi pek kullanışlı değildir. Burada çözümü oldukça basitleştiren ve kolon sayısı ne kadar çok olursa olsun çözümün mümkün olduğu bir yöntem sunulmuştur.

Geliştirilen formülasyon sayesinde kirişi desteklemek ve eğilme dayanımını artırmak için kullanılan destek ayakları hareket denklemlerine herhangi bir ekstra sınır şartı, ilave denklem ve katsayı getirmemektedir. Klasik çözüm yöntemi ile böyle bir köprünün hareketini incelemek için destek ayağı adedince sınır şartı tanımlamak ve bu ayaklarla ayrılan her bir kısım için de ayrı hareket denklemi oluşturmak gerekirdi. Sonuç olarak ta çözülmesi gerekli birden fazla hareket denklemi ve sınır şartı sayısınınca belirlenmesi gerekli katsayı ile karşı karşıya kalırdı. Oysaki geliştirilen yöntemle ayaklardaki tepki kuvvetleri, şiddeti bilinmeyen, ancak uygulama noktası bilinen bir tekil kuvvet olarak tahayyül edilmekte ve bu tekil kuvvetler Fourier serileri yardımıyla kiriş üzerinde yayılı birer kuvvet gibi ifade edilebilmektedir. Böylece kiriş ayaklarındaki tepki kuvvetleri hareket denklemlerinde birer zorlayıcı dış tesir olarak yer alabilmektedir. Bu sayede destek ayaklarında ekstra sınır şartları tanımlamadan ve tek bir hareket denklemi çözümlenerek köprünün dinamik davranışı tespit edilebilmektedir.

Çalışmada ayrıca hareketli yüklerin etkisi altındaki hafif eğriliğe sahip kirişlerin dinamik davranışları da incelenmiştir. Böylesi bir hafif eğriliğe sahip kirişin eğilme direncini artırmak için kirişe bilinçli bir şekilde verilebilir ya da kirişler kendi ağırlıklarının etkisi veya üzerinde taşıdığı yükün tesiriyle doğrusallıklarını kaybedebilir ve eğrisel bir şekil kazanabilirler. Böyle bir kirişte, kirişin uçlarında aksel bir kuvvet oluşacaktır. Bu nedenle hesaplamalarda kirişe bir ucundan etkiyen yatay bir kuvvetin varlığı kabul edilmiştir.

Kirişin eğriliğinin yanı sıra hareketli kütlelerden kaynaklanan atalet, merkezci ve Coriolis kuvvetleri de hesaplamalara dâhil edilmiştir. Böyle bir problemin analitik çözümünün zorluğu birçok araştırmacı tarafından vurgulanmıştır. Bu zorluğun temel iki nedenlerinden biri kirişin ihtiva ettiği eğrilik, diğeri ise merkezci ve Coriolis

terimlerinin gayri-lineer özellik taşımasıdır. Merkezci ve Coriolis ivme terimlerinin ihtiva ettiği gayri-lineeritenin çözüme getireceği bu zorluk Michaltsos ve Kounadis (2001) tarafından verilen ardıl yaklaşımlar yöntemi benzeri iteratif bir yöntem kullanılarak aşılmıştır. Yöntem hareketli kütle - kiriş problemine uygulanırken, Fourier serisindeki terim sayısının ( $n$ ) artan değerlerinde Duhamel integralinde yakınsama probleminin olduğu gözlenmiştir. Trigonometrik fonksiyonların artan  $n$  değerlerinde çok sık işaret değiştiriyor olmaları buna karşılık Duhamel integralinin sayısal hesabındaki zaman adımının bu değişimi algılayacak kadar küçük seçilememesi bu problemin kaynağını teşkil etmektedir. Zaman adımının yeterince küçük seçilememesi nedeni ise, hesaplama süresinin seçilen zaman adımı ve Fourier serisindeki terim sayısı ile artmasıdır. Bu problem Fourier serisinin yalnızca ilk dört terimi ele alınarak giderilmiştir. Fourier serileri ilk birkaç için iyi yakınsak olduğundan bu büyük bir sorun oluşturmamaktadır. Bu halde bile hesaplama süreleri tek bir problem için yarım saati aşabilmektedir.

Kirişin dinamik davranışına etkisi olan pek çok parametrenin farklı değerleri için yöntem örneklendirilmiş ve bu parametrelerin kirişin dinamik davranışına etkileri grafiklerle gösterilmiştir. Analizlerin sonucunda nispeten küçük kütleler taşıyan kirişlerde kirişe çok küçük bir dışbükey eğrilik verilerek kirişin eğilme titreşimlerinin düşürülebileceği anlaşılmaktadır.

Özellikle eğri kirişlerde ve yüksek hızla hareket eden sistemlerde atalet etkisinin yanında merkezci ve Coriolis ivme etkilerinin de göz ardı edilmemesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Burada elde edilen en önemli sonuçlardan birisi de atalet, merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin özellikle hafif eğrilik ihtiva eden kirişlerde ve hareketli kütlelerin yüksek hızlarında kirişin enine titreşimleri üzerinde daha etkili olduğudur. Hareketli kütlelerin yüksek hızlarında bu terimler hesaplamalarda göz ardı edilmemelidir. Ancak, hareketli yükün hızı arttıkça hesaplamaların geçerli olduğu zaman aralığında da daralmaktadır. Oysa çok yüksek hızlarda yük kirişi terk ettikten sonra da kiriş ciddi yer değiştirmeler yapabilir. Bu durumda yükün kirişi terk ettiği andan sonrası içinde ayrı bir hesaplama yapılması gerekmektedir.

Analiz sonuçları kirişin hareketine etki eden tüm değişkenlerin farklı değerleri için örneklendirilmiştir. Bu amaçla harekete etki eden parametrelerin farklı değerleri için kirişin orta noktasının yer değiştirme eğrileri elde edilmiştir. Sayısal örnekler üzerinde yapılan hesaplamalar Fourier serisinde ilk üç modun yer değiştirmeler üzerinde etkili olduğunu, sonraki çözüm modlarının ise kirişin hareketine ciddi bir etkisinin olmadığını göstermiştir. Bu nedenle hesaplamalarda yalnızca ilk dört mod dikkate alınmış ve eklerde verilen Matlab programlarında da Fourier açılımının ilk dört terimi hesap edilmiştir.

Çözümde dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta şudur; hareket analizi hareketli kütle kirişe giriş yaptığı anda başlamakta ve kirişi terk ettiği anda bitmektedir. Oysaki kiriş titreşimine bu andan itibaren de devam edebilir. Ancak formülasyon hareketli kütle için kirişi terk ettiği andan sonrası için bir çözüm sunmamaktadır. Bu durum Fourier seri açılımının özelliğinden kaynaklanır. Hareketli yük periyodik fonksiyonlarla ifade edildiğinden yük kirişi terk ettiği anda bir diğer yük kirişe giriş yapar. Bu nedenle hareketli yük kirişi terk ettikten sonra kirişin yapacağı serbest titreşimi tespit etmek için ayrı bir analiz gereklidir. Esasen mevcut formülasyon yük kirişi terk ettikten sonra da kullanılabilir. Bu durumda o andaki başlangıç şartları ve özfonksiyonlar önceki analizden belirlenmiş olduğundan kirişin hareket denkleminin sağ tarafı sıfır kabul edilip, bu başlangıç şartları altında serbest titreştiği kabul edilebilir.

Bu çalışma ile literatürdeki önemli bir kısım hata ve eksikler giderilmiştir. Pek çok çalışmada çatlak ihtiva eden kirişin öz fonksiyonları ortogonal ve ortonormal kabul edilmiştir. Oysaki bu çalışma dâhilinde yapılan hesaplamalar göstermiştir ki öz fonksiyonlar pek çok durumda ortogonal olmakla birlikte genel olarak ortonormal değildir. Ortogonalite şartının nasıl sağlanacağı ve bu şartın yardımı ile öz fonksiyonların katsayılarının nasıl hesaplanacağı detaylı bir şekilde verilmiştir. Öz fonksiyon katsayılarının açık bir şekilde tespiti mümkün değildir. Bunun için sınır şartları kullanılarak tüm katsayılar tek bir bilinmeyene indirgenilmeli ve bu bilinmeyen özfonksiyonu ortonormal yapacak şekilde tayin edilmelidir. Bu prosedür daha önce hiçbir çalışmada açıklanmamış, eksik bırakılmıştır.



Literatürdeki bir diğer eksik fakat çok önemli nokta başlangıç şartları ile ilgilidir. Çatlak ihtiva kirişlerin çözümü birkaç adımda gerçekleştirilebilmektedir. Hareketli kütle çatlağın bulunduğu noktaya ulaştığında çözümün diğer adımına geçilmektedir. Fakat bu anda kiriş şekil değiştirmiş olduğundan, başlangıç şartlarının sıfır olamayacağı gayet açıktır. Bu nokta pek çok araştırmacı tarafından gözden kaçırılmış ve ihmal edilmiştir. Bu tez çalışmasının en önemli özelliklerinden biride her bir adımda kirişin başlangıç şartlarının bir önceki adımdan hesaplanarak formülasyonda göz önüne alınmasıdır.

Bu çalışmanın sonuçları kullanılarak hareketli akışkan taşıyan düz veya eğrisel boruların titreşimleri en genel halde incelenebilir. Literatürde hareketli akışkanın etkisi altındaki kirişlerin dinamik davranışını merkezci ve Coriolis ivme terimlerini kapsayacak şekilde ele alan bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Tekil bir kütle yerine bu şekilde kiriş üzerine yayılı kütlelerin söz konusu olduğu problemler bu çalışmada verilen yöntemlere benzer yöntemlerle incelenebilir.

Deprem sonrası köprü ve kirişlerde oluşan çatlakların etkilerinin azaltılması için kirişler ayaklarla güçlendirilmektedir. Köprüyü desteklemek için kullanılan dikey ayaklar birer yay ve sönüm elemanı olarak modellenebilir. Böyle bir sistemin hareketi formülasyona küçük ilaveler yapılarak incelenebilir.

Yöntemin farklı tipteki hareketli yüklerin etkisi altındaki kirişlere uygulamaları gerçekleştirilebilir. Masela hareketli tekil yük yerine hareketli katarlarının etkisi altındaki kirişlerin dinamik davranışlarında çalışılabilir.

Bu çalışma yardımı ile hareketli yüklerin etkisi altındaki kirişlerin titreşimini kontrol etmek için hangi parametrelerle oynanması gerektiği anlaşılmaktadır. Şu halde bu sonuçlar kullanılarak kirişin titreşimlerinin kontrolü üzerine bir çalışma yapılabilir. Ayrıca bu çalışmanın sonuçlarından faydalanılarak deprem sonrası çatlak oluşan kirişlerde çatlağın konumunun tespitine yönelik çalışmalar yürütülebilir ve çatlak ihtiva eden bu yapıların extra destek ayakları ile güçlendirilmeleri halinde sistemin nasıl bir dinamik davranış göstereceği küçük ekleme ve değişikliklerle elde edilebilir.

**KAYNAKLAR**

- ANIFANTIS, N., A.D., DIMAROGONAS. 1984. Post Buckling Behavior of Transverse Cracked Columns, *Computers and Structures*, 18:351-356.
- ARIAEI A, S. ZIAEI-RAD, M. GHAYOUR. 2009. Vibration analysis of beams with open and breathing cracks subjected to moving masses, *Journal of Sound and Vibration*.
- AYRE, R.S., G. FORD and L.S. JACOBSEN. 1950. Transverse Vibration of a Two Span Beam Under the Action of a Moving Constant Force, *Transactions ASME, Journal of Applied Mechanics*, 17:1-12.
- BIGGS, J.M., H.S. SUER and J.M. KOUW. 1959. Vibration on simple-span highway bridges, *Transactions ASCE*, 124(2979):291-318.
- BONDAR, N.G. 1954. Dynamic Calculations of Beams Subjected to a Moving Load (in Russian), *Isseledovaniya po teorii sooruzhenii*, Vol.6. Stroiizdat, Moscow, 11-23.
- CHAN MAN FOG C.F., D. DE KEE, P.N. KALONI. 2003. *Advanced Mathematics for Engineering and Science*. 981-238-291-7. World Scientific Publishing Co. Ltd. Singapore. 49-53.
- CHONDROS, T.G., A.D. DIMAROGONAS. 1980. Identification of Cracks in Welded Joints of Complex Structures, *Journal of Sound and Vibration*, 69(4):531-538.
- CHONDROS, T.G., A.D. DIMAROGONAS and J. YAO. 1998. A Continuous Cracked Beam Vibration Theory, *Journal of Sound And Vibration* 215(1):17-34
- DETTMAN, J.W. 1986. *Introduction to Linear Algebra and Differential Equations*. 0-486-65191-6. New York. McGraw – Hill. 55-56.
- DIMARAGONAS, A.D. 1996. Vibration of Cracked Structures: A State of the Art Review, *Engineering Fracture Mechanics*, 55(5):831-837.
- ESMAILZADEH, E., M. GHORASHI. 1992. Beams Carrying Uniform Partially Distributed Moving Masses, Technical Report, Mechanical Engineering Department, Sharif University Of Technology, Tehran.
- ESMAILZADEH, E., M. GHORASHI. 1995. Analysis of a Beam Traversed by Uniform Partially Distributed Moving Masses, *Journal of Sound and Vibration*, 184(1):9-17.
- ESMAILZADEH E, N JALILI. 2003. Vehicle-passenger-structure interaction of uniform bridges traversed by moving vehicles, *Journal of Sound and Vibration*, 260:611-635.
- FERTIS, D.G. 1987. Safety of long span highway bridges based on dynamic response, In *Proceedings of Bridge and transmission line Structures Congress*, Orlando, FL, August. 17(20): 449-468.
- FRYBA, L. 1972. *Vibration of Solid and Structures Under Moving Loads*, Research Institute of Transport, Pragua.

- FRYBA, L. 1976. Non-stationary response of a beam to a moving random force, *Journal of Sound and Vibration* 46(3):323-338.
- FRYBA, L. 1980. Estimation of Fatigue life of railway bridges under traffic loads, *Journal of Sound and Vibration*, 70(3):527-541.
- GARINEI A, G RISITANO. 2008. Vibrations of railway bridges for high speed trains under moving loads varying in time, *Engineering Structures*, 30:724-732.
- GREEN, M.F., D. CEBON. 1994. Dynamic Response of Highway bridges to very heavy vehicle loads, Theory and Experimental Validation, *Journal of Sound and Vibration*, 170(1):51-78.
- GÜRGÖZE, M. 1997. On the Eigen-values of Viscously Damped Beams Carrying Heavy Masses and Restrained by Linear and Torsional Springs, *Journal of Sound and Vibration*, 208:153-158.
- GÜRGÖZE, M., V. MERMERTAŞ. 1998. On the Eigen-values of a Viscously Damped Cantilever Carrying a Tip Mass, *Journal of Sound and Vibration*, 216(2):309-314.
- HAISTY, B.S., W.T. SPRINGER. 1998. A General Beam Element for Use in Damage Assessment of Complex Structures, *Journal of Vibration, Acoustic, Stress and Reliability in Design*, 110:389-394.
- HILLERBORG, A. 1948. A Study of Dynamic Influences of Moving on Girders, 3rd Congress, Intern. Assoc. for Bridge and Structural. Engineering, Preliminary Publ. 661-667.
- HUANG, C.S., Y.P. TSENG, and C.L. HUNG. 2000. An Accurate Solution for the Responses of Circular Curved Beams Subjected to a Moving Load, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(12):1723-1740.
- INGLIS, C.E. 1934. A Mathematical Treatise on Vibration in Railway Bridges, Cambridge University Press, Cambridge.
- INMAN, D.J. 1994. *Engineering Vibration*, Prentice Hall International Edition, 329-340.
- KARAOLIDES, Ch., A.N. KOUNADIS. 1983. Forced Motion of a Simple Frame Subjected to a Moving Force, *Journal of Sound and Vibration*, 88:37-45.
- KOCATÜRK T, M. ŞİMŞEK. 2004. Vibration of Visco-elastic Beams Subjected to Moving Harmonic Loads, *Journal of Engineering and Natural Sciences*, 3:116-128.
- KOLOUSEK, V. 1967. Part I: General problems, *Dynamics of Civil Engineering Structures*, 2d ed, SNTL, Prague.
- KOLOUSEK, V. 1956. Part II: Continuous Beams and Frame Systems, *Dynamics of Civil Engineering Structures*, 2d ed, SNTL, Prague.
- KOLOUSEK, V. 1956. Part III: Selected Topics (In Czech), *Dynamics of Civil Engineering Structures*, SNTL, Prague.
- KOUNADIS, A. 1985. A Very Efficient Approximate Method for Solving Non-linear Boundary Value Problems, *Scientific Papers of NTUA*, 9(3,4):1-10
- KOUNADIS, A.N. 1992. An efficient and simple approximate technique for solving nonlinear initial and boundary-value problems, *Computational mechanics*, 9:221-231.

- KRYLOV, A.N. 1905. Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben, *Mathematische Annalen* 61,211.
- KWON, H.C., M.C. KIM, I.W. LEE. 1998. Vibration control of bridges under moving loads, *Computers and Structures*, 66(4):473-480.
- LAW, S.S., X.Q. ZHU. 2004. Dynamic behavior of damaged concrete bridge structures under moving vehicular loads, *Engineering Structures*, 26:1279-1293.
- LIANG, R.Y., F.K. CHOY and I. HU. 1990. Detection of cracks in beam structures using measurements of natural frequencies, *Journal of Franklin Institute*, 328(4):381-388.
- LIN, H.P., S.C. CHANG and J.D. WU. 2002. Beam Vibrations with an Arbitrary Number of Cracks, *Journal of Sound and Vibration* 258(5):987-999.
- LIN, H.P. 2004. Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack, *Engineering Structures*, 26:427-436.
- LIN H.P., S.C. CHANG. 2005. Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints, *Journal of Sound and Vibration*, 281:155-169.
- LIN, H.P., S.C. CHANG. 2006. Forced Responses of Cracked Cantilever Beams Subjected to a Concentrated Moving Load, *International Journal of Mechanical Sciences*, 48:1456-1463
- LOWAN, A.N. 1935. On Transverse Oscillations of Beams under the Action of Moving Variable Loads. *Philosophical Magazine, Series 7*, 19(127):708-715.
- MAHMOUD, M.A., M.A. ABOU ZAID. 2002. Dynamic Response of a Beam with a Crack Subject to a Moving Mass, *Journal of Sound and Vibration* 256(4):591-603.
- MAHMOUD, M.A. 2001. Stress Intensity Factors for Single and Double Edge Cracks in a Simple Beam Subject to a Moving Load, *International Journal of Fracture*, 11:151-161.
- MICHALTSOS, G.T., T.G. KONSTANTAKOPOULOS. 2000. Dynamic Response of a Bridge with Surface Deck Irregularities, *Journal of Vibration and Control*, 6:667-689.
- MICHALTSOS GT. 2001. The Influence of Centripetal and Coriolis Forces on the Dynamic Response of Light Bridges under Moving Vehicles, *Journal of Sound and Vibration*, 247(2):261-277.
- MICHALTSOS G.T., A.N. KOUNADIS. 2001. The effect of centripetal and Coriolis forces on the dynamic response of light bridges under moving loads, *Journal of Vibration and Control*, 7:315-326.
- MICHALTSOS GT. 2002. Dynamic Behavior of a Single-Span Beam Subjected to Loads Moving with Variable Speeds, *Journal of Sound And Vibration*, 258(2):359-372.
- OSTACHOWICZ, W.M., M. KRAWCZUK 1991. Analysis of the effect of the cracks on the natural frequencies of a cantilever beam, *Journal of Sound And Vibration*, 150:191-201.
- PALA, Y. 2006. Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler, 975-591-936-8, Bursa-Türkiye, 533-536.

- PARHI, D.R., A.K. BEHERA. 1997. Dynamic Deflection of a Cracked Shaft Subjected to Moving Mass, Transactions of The CSME, 21:295-316.
- PASİN, F. 1994. Mekanik Sistemler Dinamiği, İTÜ Matbaası, İstanbul-Türkiye.
- RAO, RG. 2000. Linear Dynamics of an Elastic Beam Under Moving Loads, Journal of Vibration and Acoustics, 122(3):281-289.
- REİS, M., Y. PALA and G. KARADERE. 2008. Dynamic Analysis of Supported Finite Beams of Small Curvature under Moving Loads, Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering. 2(2).
- REİS, M., Y. PALA and G. KARADERE. 2008. Dynamic Analysis of a Bridge Supported with Many Foot Under Moving Load, The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering, 3(1):14-20.
- RIZOS, P.F., N. ASPRAGATHOS. 1990. Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam From the Vibration Modes, Journal of Sound and Vibration, 138:391-388.
- SAMANI, F.S, F. PELLICANO. 2009. Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers, Journal of Sound and Vibration, 325:742-754.
- SHIFRIN, E.I., RUOTOLO R. 1999. Natural Frequencies of a Beam with an Arbitrary Number of Cracks, Journal of Sound and Vibration, 222(3):409-423.
- SİMŞEK M, T. KOCATÜRK. 2009. Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load, Composite Structures, 90:465-473
- SONG, Y., F. BIONDINI, L.A. BERGMAN. 2002. Effects of Surface Irregularities on the Dynamical Responses of Bridge-Vehicle Interaction Systems, 15<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference.
- STANISIC, M.M., J.C. HARDIN. 1969. On Response of Beams to an Arbitrary Number of Moving Masses, Journal of the Franklin Institute, 287:115-123.
- STOKES, G. 1849. Discussion of a differential equation relating to a breaking of railway bridges, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8:707-735.
- SUN, L. 2001. Dynamic displacement response of beam-type structures to moving line loads, International Journal of Solids and Structures, 38:8869-8878.
- TIMOSHENKO, S.P. 1911. Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe, Zeitsch. f. Mathematik u. Physik, 59(2):163-203.
- TIMOSHENKO, S. 1922. On the forced Vibrations of Bridges, Phil. Magazine, 6(43):1018-1019.
- TIMOSHENKO, S. 1927. Vibration of Bridges, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 53:53-61.
- WANG R.T., J.S. LIN. 1998. Vibration of Multi-Span Timoshenko Frames Due to Moving Loads, Journal of Sound and Vibration, 212(3):417-434.

- WEN, R.K. 1960. Dynamic response of beams traversed by two-axle loads, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 87(5):91-111.
- WILLIS, R., et al. 1849. Preliminary essay to the appendix B.: Experiments for determining the effects produced by causing weights to travel over bars with different velocities. In: GREY G. et al. 1849. Report of the Commissioners Appointed to inquire into the application of iron to railway structures, London: W. Clowes and Sons, Reprinted in: Barlow str.: Treatise on the strength of Timber, Cast Iron and Malleable Iron, London, 1851.
- WU, J.S., L.K. CHIANG. 2003. Out-of-plane Responses of a Circular Curved Timoshenko Beam Due to a Moving Load, *International Journal of Solids and Structures* 40:7425–7448.
- WU, J.S., L.K. CHIANG. 2004. Dynamic analysis of an arch due to a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, 269:511-534.
- YANG, W.B., C.M. WU and J.D. YAU. 2001. Dynamic Response of a Horizontally Curved Beam Subjected to Vertical and Horizontal Moving Loads, *Journal of Sound and Vibration* 242(3):519-537.
- YANG, Y.B. 2004. Vehicle-Bridge Interaction Dynamics With Applications to High-Speed Railways, 981-238-847-8.
- YAU, J.D., Y.S. WU and Y.B. YANG. 2001. Impact Response of Bridges with Elastic Bearings to Moving Loads, *Journal of Sound and Vibration*, 248(1):9-30.
- YAU JD. 2009. Dynamic response analysis of suspended beams subjected to moving vehicles and multiple support excitations, *Journal of Sound and Vibration*, 325:907-922.
- VELOZZI, J. 1967. Vibration of Suspension Bridges under Moving Loads, *J. Struct. Div., ASCE*, 93(4):123-138.
- ZIMMERMANN, H. 1896. Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Lasts, *Centralblatt der Bauverwaltung*, 16(23):249-251.

## EKLER

### Ek 1. Matlab Programları

#### Ek 1.1. Basit Mesnetli Kirişin Serbest Titreşim Modları

```
L = ...;

La=0:0.0001:...;

    B = sin(La.*L);

    plot(La,B)
    hold on
```

#### Ek 1.2. Ankastre Mesnetli Kirişin Serbest Titreşim Modları

```
L = ...;

La=0:0.0001:...;

    n1 = sin(La.*L);
    n2 = cos(La.*L);
    n3 = sinh(La.*L);
    n4 = cosh(La.*L);

    u1 = n1-n3;
    u2 = n1+n3;
    u3 = (n2-n4).^2;

    B = (u1.*u2) + u3;

    plot(La,B)
    hold on
```

#### Ek 1.3. Ankastre Mesnetli Kirişin Özfonksiyon Katsayıları

```
syms x;
L = ...;
La = ...;

a1 = (cos(La*L)-cosh(La*L))/(sin(La*L)+sinh(La*L));
aa = int((sin(La*x)+a1*cos(La*x)-sinh(La*x)-a1*cosh(La*x))^2,0,L);

bb = 1/aa;
cc = sqrt(bb);

    A = eval(cc)
    B = a1*A
    C = -A
```

$$D = -a_1 A$$

#### Ek 1.4. Konsol Kirişin Serbest Titreşim Modları

```

L = ...;
La=0:0.00001:...;

n1 = sin(La.*L);
n2 = cos(La.*L);
n3 = sinh(La.*L);
n4 = cosh(La.*L);

u1 = n1-n3;
u2 = n1+n3;
u3 = (n2+n4).^2;

B = (u1.*u2) + u3;

plot(La,B)
hold on

```

#### Ek 1.5. Konsol Kirişin Özfonksiyon Katsayıları

```

syms x;

L = ...;
La = ...;

a1 = (sin(La*L)+sinh(La*L))/(cos(La*L)+cosh(La*L));
aa = int((sin(La*x)-a1*cos(La*x)-sinh(La*x)+a1*cosh(La*x))^2,0,L);

bb = 1/aa;
cc = sqrt(bb);

A = eval(cc)
B = a1*A
C = -A
D = -a1*A

```

#### Ek 1.6. Elastik Mesnetli Kirişin Serbest Titreşim Modları

```

L = ...;
H = ...;
E = ...;
La = ...;
k1 = ...;
k2 = ...;

I = (H^4)/12;

La=0:0.0001:...;

n1 = sin(La.*L);

```



```

n2 = cos(La.*L);
n3 = sinh(La.*L);
n4 = cosh(La.*L);

u1 = ( k1 )./( E*I*(La.^3) );
u2 = ( k2 )./( E*I*(La.^3) );

s1 = (n1 - n3);
s2 = (2*(u1.*n3)-n2+n4);

g1 = s1./s2;

s3 = (2*u1.*g1)+1;
s4 = (n1 + g1.*(n2+n4) + s3.*n3);

B = -n2 + g1.*(n1+n3) + s3.*n4 - u2.*s4;

plot(La,B)
hold on

```

### Ek 1.7. Elastik Mesnetli Kirişin Özfonksiyon Katsayıları

```

syms x;

L = ...;
H = ...;
E = ...;
La = ...;
k1 = ...;
k2 = ...;

I = (H^4)/12;

n1 = sin(La*L);
n2 = cos(La*L);
n3 = sinh(La*L);
n4 = cosh(La*L);

u1 = k1 / (E*I*(La^3));
u2 = k2 / (E*I*(La^3));
u3 = ( n1-n3 ) / ( 2*n1*n3 - n2 + n4 );

aa = int((sin(La*x) + u3*cos(La*x) + (2*u1*u3+1)*sinh(La*x)
+ u3*cosh(La*x))^2,0,L);

bb = 1/aa;
cc = sqrt(bb);

A = eval(cc)
B = u3*A
C = (2*u1*u3+1)*A
D = u3*A

```

### Ek 1.8. Çatlak İhtiva Eden Basit Mesnetli Kirişin Serbest Titreşim Modları

```

L = ...;
H = ...;
L0 = ...;
gama = ...;

fgama = 0.6384 - 1.035*gama + 3.7201*gama^2 - 5.1773*gama^3 +
7.553*gama^4 - 7.332*gama^5 + 2.4909*gama^6;

Te = 6*pi*(gama^2)*fgama*(H/L);

La=0:0.0001:...;

n1 = sin(La.*L0);
n2 = cos(La.*L0);
n3 = sinh(La.*L0);
n4 = cosh(La.*L0);

n5 = sin(La.*(L-L0));
n6 = cos(La.*(L-L0));
n7 = sinh(La.*(L-L0));
n8 = cosh(La.*(L-L0));

O1 = n1.*n6.*(n5).^(-1);
O2 = n3.*n8.*(n7).^(-1);

c1 = (Te*L*La.*n1 - n2 - O1)./(Te*L*La.*n3 + O2 + n4);

a2 = -O1;
b2 = n1;
c2 = -O2.*c1;
d2 = n3.*c1;

B = -n2 + (c1.*n4) + a2 - c2;

plot(La,B)
hold on

```

### Ek 1.9. Çatlak İhtiva Eden Basit Mesnetli Kirişin Özfonksiyon Katsayıları

```

L = ...;      H = ...;      L0 = ...;      gama = ...;
La1 = ...;   La2 = ...;   La3 = ...;   La4 = ...;

fgama = 0.6384 - 1.035*gama + 3.7201*gama^2 - 5.1773*gama^3 +
7.553*gama^4 - 7.332*gama^5 + 2.4909*gama^6;
Te = 6*pi*(gama^2)*fgama*(H/L);

E = 2.07*(10^11);
I = (H^4)/12;
p = 7800;
A = H^2;

n1 = sin(La1*L0);

```

```

n2 = cos(La1*L0);
n3 = sinh(La1*L0);
n4 = cosh(La1*L0);

m1 = sin(La1*(L-L0));
m2 = cos(La1*(L-L0));
m3 = sinh(La1*(L-L0));
m4 = cosh(La1*(L-L0));

T1 = (Te*La1)/2;

o1 = (n1*m2)/m1;
o2 = (n3*m4)/m3;

u1 = ( (Te*L*n1*La1) - o1 - n2 )/( (Te*L*n3*La1) + o2 + n4 );

Z1 = -o1;
Z2 = n1;
Z3 = -o2*u1;
Z4 = n3*u1;

A1 = 1;
B1 = 0;
C1 = u1;
D1 = 0;

A2 = Z1*A1;
B2 = Z2*A1;
C2 = Z3*A1;
D2 = Z4*A1;

F = @(x) ( A1*sin(La1*x) + B1*cos(La1*x) + C1*sinh(La1*x) +
D1*cosh(La1*x) ).^2;
Q = quadl(F,0,L0);

G = @(x) ( A2*sin(La1*(x-L0)) + B2*cos(La1*(x-L0)) + C2*sinh(La1*(x-
L0)) + D2*cosh(La1*(x-L0)) ).^2;
P = quadl(G,L0,L);
S = P+Q;

A1=sqrt(1/S)
B1 = 0
C1 = u1*A1
D1 = 0

A2 = Z1*A1
B2 = Z2*A1
C2 = Z3*A1
D2 = Z4*A1

```

**Ek 1.10. Çatlak İhtiva Eden Konsol Kirişin Serbest Titreşim Modları**

```

L = ...;           H = ...;           L0 = ...;           gama = ...;

fgama = 0.6384 - 1.035*gama + 3.7201*gama^2 - 5.1773*gama^3 +
7.553*gama^4 - 7.332*gama^5 + 2.4909*gama^6;
Te = 6*pi*(gama^2)*fgama*(H/L);

La=0:0.0001:15;

n1 = sin(La.*L0);
n2 = cos(La.*L0);
n3 = sinh(La.*L0);
n4 = cosh(La.*L0);
n5 = sin(La.*(L-L0));
n6 = cos(La.*(L-L0));
n7 = sinh(La.*(L-L0));
n8 = cosh(La.*(L-L0));

U1 = (Te*L*La)/2;

U2 = n2 - (U1.*n1) - (U1.*n3);
U3 = n1 + (U1.*n2) + (U1.*n4);
U4 = n4 + (U1.*n1) + (U1.*n3);
U5 = n3 + (U1.*n2) + (U1.*n4);

U6 = (U2.*n5) + (n1.*n6) + (U4.*n7) + (n3.*n8);
U7 = -(U3.*n5) + (n2.*n6) + (U5.*n7) + (n4.*n8);

U8 = -U6./U7;

U9 = (U2.*n6) - (n1.*n5) + (U4.*n8) + (n3.*n7);
U10 = -(U3.*n6) - (n2.*n5) + (U5.*n8) + (n4.*n7);

B = (U8.*U10) + U9;

plot(La,B)
hold on

```

**Ek 1.11. Çatlak İhtiva Eden Konsol Kirişin Özfonksiyon Katsayıları**

```

L = ...;           H = ...;           L0 = ...;           gama = ...;
La1 = ...;        La2 = ...;        La3 = ...;        La4 = ...;

fgama = 0.6384 - 1.035*gama + 3.7201*gama^2 - 5.1773*gama^3 +
7.553*gama^4 - 7.332*gama^5 + 2.4909*gama^6;
Te = 6*pi*(gama^2)*fgama*(H/L);

n1 = sin(La1*L0);
n2 = cos(La1*L0);
n3 = sinh(La1*L0);
n4 = cosh(La1*L0);

```

```

n5 = sin(La1*(L-L0));
n6 = cos(La1*(L-L0));
n7 = sinh(La1*(L-L0));
n8 = cosh(La1*(L-L0));

U1 = (Te*L*La1)/2;

U2 = n2 - (U1*n1) - (U1*n3);
U3 = n1 + (U1*n2) + (U1*n4);
U4 = n4 + (U1*n1) + (U1*n3);
U5 = n3 + (U1*n2) + (U1*n4);

U6 = (U2*n5) + (n1*n6) + (U4*n7) + (n3*n8);
U7 = -(U3*n5) + (n2*n6) + (U5*n7) + (n4*n8);

U8 = -U6/U7;

U9 = (U2*n6) - (n1*n5) + (U4*n8) + (n3*n7);
U10 = -(U3*n6) - (n2*n5) + (U5*n8) + (n4*n7);

A1 = 1;
B1 = U8*A1;
C1 = -A1;
D1 = -B1;

A2 = (U2*A1)-(U3*B1);
B2 = (n1*A1)+(n2*B1);
C2 = -(U4*A1)*(U5*B1);
D2 = -(n3*A1)-(n4*B1);

F = @(x) ( A1*sin(La1*x) + B1*cos(La1*x) + C1*sinh(La1*x) +
D1*cosh(La1*x) ).^2;
Q = quadl(F,0,L0);

G = @(x) ( A2*sin(La1*(x-L0)) + B2*cos(La1*(x-L0)) + C2*sinh(La1*(x-
L0)) + D2*cosh(La1*(x-L0)) ).^2;
P = quadl(G,L0,L);
S = P+Q;

A1 = sqrt(1/S)
B1 = U8*A1
C1 = -A1
D1 = -B1

A2 = (U2*A1)-(U3*B1)
B2 = (n1*A1)+(n2*B1)
C2 = -(U4*A1)*(U5*B1)
D2 = -(n3*A1)-(n4*B1)

```

**Ek 1.12. Çatlak İhtiva Eden Elastik Mesnetli Kirişin Serbest Titreşim Modları**

```

L0 = ...;
gama = ...;
k1 = ...;
k2 = ...;

L = ...;
H = ...;
E = ...;
I = (H^4)/12;
v = ...;

fgama = 0.6272*gama^2 - 1.04533*gama^3 + 4.5948*gama^4 - 9.9736*gama^5
+ 20.2948*gama^6 - 33.0351*gama^7 + 47.1063*gama^8 - 40.7556*gama^9 +
19.6*gama^10;
Te = 6*pi*(1-(v^2))*fgama*H;

La=0:0.0001:20;

n1 = sin(La.*L0);
n2 = cos(La.*L0);
n3 = sinh(La.*L0);
n4 = cosh(La.*L0);

m1 = sin(La.*(L-L0));
m2 = cos(La.*(L-L0));
m3 = sinh(La.*(L-L0));
m4 = cosh(La.*(L-L0));

K1 = (k1)./(E*I*(La.^3));
K2 = (-k2)./(E*I*(La.^3));

T1 = (Te*La)/2;

U1 = n2 - (T1.*n1);
U2 = -n1 + (T1.*n4) - (T1.*n2);
U3 = T1.*n3;

P1 = -T1.*n1;
P2 = n3 + (n4.*T1) - (n2.*T1);
P3 = n4 + (T1.*n3);

s1 = (2*K1)./(La.^3);
s2 = U1 + U3;
s3 = U2 + (U3.*s1);
s4 = P1 + P3;
s5 = P2 + (P3.*s1);
s6 = n4 + (n3.*s1);

ksi = K2./(La.^3);

ks1 = (ksi.*m1) + m2;
ks2 = (ksi.*m2) - m1;
ks3 = (ksi.*m3) - m4;
ks4 = (ksi.*m4) - m3;

```

```

h1 = (ks1.*s2) + (ks2.*n1) + (ks3.*s4) + (ks4.*n3);
h2 = (ks1.*s3) + (ks2.*n2) + (ks3.*s5) + (ks4.*s6);

hh = -(h1./h2);

Z1 = 1 + (s1.*hh);
Z2 = s2 + (s3.*hh);
Z3 = n1 + (n2.*hh);
Z4 = s4 + (s5.*hh);
Z5 = n3 + (s6.*hh);

B = (Z2.*m1) + (Z3.*m2) - (Z4.*m3) - (Z5.*m4);

plot(La,B)
hold on

```

### Ek 1.13. Çatlak İhtiva Eden Elastik Mesnetli Kirişin Özfonksiyon Katsayıları

```

L0 = ...;          gama = ...;          k1 = ...;
k2 = ...;          La = ...;            L = ...;
H = ...;           m = ...;             E = ...;
I = ...;           p = ...;             A = ...;
V = ...;

s=0;

fgama = 0.6384 - 1.035*gama + 3.7201*gama^2 - 5.1773*gama^3 +
7.553*gama^4 - 7.332*gama^5 + 2.4909*gama^6;
Te = 6*pi*(gama^2)*fgama*(H/L);

wk = sqrt( ( E*I*(La^4) ) / (p*A*LL^3) );
Ok = La*v;

n1 = sin(La*L0);
n2 = cos(La*L0);
n3 = sinh(La*L0);
n4 = cosh(La*L0);
m1 = sin(La*(L-L0));
m2 = cos(La*(L-L0));
m3 = sinh(La*(L-L0));
m4 = cosh(La*(L-L0));

K1 = ( k1*(L^3) )/( E*I );
K2 = (-k2*(L^3) )/( E*I );

T1 = (Te*La)/2;

U1 = n2 - (T1*n1);
U2 = -n1 + (T1*n4) - (T1*n2);
U3 = T1 * n3;

P1 = -T1 * n1;
P2 = n3 + (n4*T1) - (n2*T1);
P3 = n4 + (T1 * n3);

```

```

s1 = (2*K1)/(La^3);
s2 = U1 + U3;
s3 = U2 + (U3*s1);
s4 = P1 + P3;
s5 = P2 + (P3*s1);
s6 = n4 + (n3*s1);

ksi = K2/(La^3);

ks1 = (ksi*m1) + m2;
ks2 = (ksi*m2) - m1;
ks3 = (ksi*m3) - m4;
ks4 = (ksi*m4) - m3;

h1 = (ks1*s2) + (ks2*n1) + (ks3*s4) + (ks4*n3);
h2 = (ks1*s3) + (ks2*n2) + (ks3*s5) + (ks4*s6);

hh = -(h1/h2);

Z1 = 1 + (s1*hh);
Z2 = s2 + (s3*hh);
Z3 = n1 + (n2*hh);
Z4 = s4 + (s5*hh);
Z5 = n3 + (s6*hh);

A1 = 1;
B1 = hh;
C1 = Z1;
D1 = hh;

A2 = Z2*A1;
B2 = Z3*A1;
C2 = Z4*A1;
D2 = Z5*A1;

F = @(x) ( A1*sin(La1*x) + B1*cos(La1*x) + C1*sinh(La1*x) +
D1*cosh(La1*x) ).^2;
Q = quadl(F,0,L0);

G = @(x) ( A2*sin(La1*(x-L0)) + B2*cos(La1*(x-L0)) + C2*sinh(La1*(x-
L0)) + D2*cosh(La1*(x-L0)) ).^2;
P = quadl(G,L0,L);
S = P+Q;
A1=sqrt(1/S);

B1 = hh*A1;
C1 = Z1*A1;
D1 = hh*A1;

A2 = Z2*A1;
B2 = Z3*A1;
C2 = Z4*A1;
D2 = Z5*A1;

```



### Ek 1.14. Hareketli Yükün Etkisi Altındaki Destek İhtiva Eden Kirişin Dinamik Davranışını Veren Matlab Programı

```
function ayakli

global ara L c m E I M v g t Q x adm N AA TTT
nu1 nu2 nu3 c1 k1 c2 k2 c3 k3;

nu1 = 0.25;          k1 = ...;          c1 = ...;
nu2 = 0.5;          k2 = ...;          c2 = ...;
nu3 = 0.75;          k3 = ...;          c3 = ...;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% fiziksel sabitler
L = ...;            N = ...;            b = ...; h = ...;
m = ...;            E = ...;            I = (b*(h^3))/12;

grpX = L/2; %%%%% yerdeğiştirmesi hesaplanacak olan nokta orta nokta

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% kiriş sönüm katsayısı
C = ...;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% hareketli kütle değişkenleri
M = ...;            v = ...;

g = 9.81;
sure = (L/v);
ara = sure/100;
adm = (L/100);
gx = grpX/adm;
x = 0:adm:L;
TTT = round(L/adm);
AA = sqrt(2/L);

for t=ara:ara:sure
duhamel(t)
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Maksimum Statik Yer Değiştirme
ymaks = (M*g*(L^3))/(48*E*I);

ww = round(sure/ara);
W = Q(gx,1:ww);
y_m = W/ymaks; %yer değiştirmeler boyutsuzlaştırılıyor
t = ara:ara:sure; %zaman boyutsuzlaştırılıyor
position = t*v/L;
plot(position,y_m,'k')
hold on
```

```

function duhamel(t)

global ara L c m E I x Q adm N AA;

yi =0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% n=1 için a1(t)
for n=1:4;
kn = (n*pi)/L;
wn = sqrt( (1/m)*( E*I*(kn^4) - N*(kn^2) ) );
ksi = c / (2*m*wn);
wd = wn*sqrt(1-(ksi^2));
qn = 0;

    for to=0:0.001:t;
        FF = (1/wd)*(exp(-ksi*wn*(t-to)) * Fnt(to,n) * sin(wd*(t-to)));
        qn = qn + (FF*0.001);
    end

yi = yi + (qn * AA * sin(kn*x));
end

Z = round(t/ara);
xx=L/adm;
Q(1:(xx+1),Z)=yi;
hold on

```

```

function Fnt = avm(to,n)

global L c N m E I M v g AA nu1 nu2 nu3 c1 k1 c2 k2 c3 k3;

ag_at = 0;          ag_at_me_co = 0;

top11 = 0;          top21 = 0;          top31 = 0;
top12 = 0;          top22 = 0;          top32 = 0;

    for k=1:4
        kk = (k*pi)/L;
        wfk = (kk*v);
        wk = sqrt( (1/m)*( E*I*(kk^4) - N*(kk^2) ) );
        ksik = c / (2*m*wk);
        wdk = wk*sqrt(1-(ksik^2));

        wsk1 = kk*nu1*L;
        wsk2 = kk*nu2*L;
        wsk3 = kk*nu3*L;

        U1 = (wk^2)-(wfk^2);
        U2 = U1 / ( (U1^2) + 4*(ksik^2)*(wk^2)*(wfk^2) );

        B = ( (2*M*g)/(m*L) ) * U2 ;
        A = (-2 * wk * wfk * ksik * B) / U1;

        b1 = -A;
        b2 = (-ksik*wk*A - B*wfk ) / wdk;

        W0 = exp(-ksik*wk*to);
        W1 = b1*cos(wdk*to) + b2*sin(wdk*to);
        W11 = b1*sin(wdk*to) - b2*cos(wdk*to);
        W2 = A*cos(wfk*to) + B*sin(wfk*to);
        W22 = A*sin(wfk*to) - B*cos(wfk*to);

        ak = (W0* W1) + W2;
        ak1 = W0*( W1*(-ksik*wk) - (wdk * W11) ) - (wfk * W22);
        ak11 = W0*((ksik^2)*(wk^2))*W1+(2*ksik*wk*wdk)*W11-(wdk^2)*W1-
        (wfk^2)*W2;

        Q1 = ak11*AA*sin(to*wfk);
        Q2 = - ak*(v*v)*(kk*kk)*AA*sin(to*wfk);
        Q3 = (ak1)*2*v*kk*AA*cos(to*wfk);

        ag_at = ag_at + Q1;
        ag_at_me_co = ag_at_me_co + Q1 + Q2 + Q3;

        top11 = top11 + ( ak*AA*sin(wsk1) );
        top21 = top21 + ( ak*AA*sin(wsk2) );
        top31 = top31 + ( ak*AA*sin(wsk3) );

        top12 = top12 + ( ak1*AA*sin(wsk1) );
        top22 = top22 + ( ak1*AA*sin(wsk2) );
        top32 = top32 + ( ak1*AA*sin(wsk3) );

    end

```

```

kn = (n*pi)/L;
wf = (kn*v);

ws1 = kn*nu1*L;
ws2 = kn*nu2*L;
ws3 = kn*nu3*L;

agirlik = ( (2*M*g)/(m*L) ) * sin(wf*to);
atalet = ( (2*M)/(m*L) ) * sin(wf*to) * (ag_at);
atalet_merkezcil_coriolis = ( (2*M)/(m*L) ) * sin(wf*to) * (ag_at_me_co);

yay1 = ( (2*k1)/(m*L) ) * sin(ws1) * sin(ws1) * (top11);
yay2 = ( (2*k2)/(m*L) ) * sin(ws2) * sin(ws2) * (top21);
yay3 = ( (2*k3)/(m*L) ) * sin(ws3) * sin(ws3) * (top31);

sonum1 = ( (2*c1)/(m*L) ) * sin(ws1) * sin(ws1) * (top12);
sonum2 = ( (2*c2)/(m*L) ) * sin(ws2) * sin(ws2) * (top22);
sonum3 = ( (2*c3)/(m*L) ) * sin(ws3) * sin(ws3) * (top32);

%atalet = 0;
%atalet_merkezcil_coriolis = 0;

%yay1 = 0;      sonum1 = 0;
%yay2 = 0;      sonum2 = 0;
%yay3 = 0;      sonum3 = 0;

Fnt = agirlik - atalet_merkezcil_coriolis - yay1 - sonum1 - yay2 -
sonum2 - yay3 - sonum3;

```

### Ek 1.15. Hareketli Yükenin Etkisi Altındaki Eğrisel Kirişin Dinamik Davranışını Veren Matlab Programı

```

function egrisel

global ara L c A1 m EI M v g t Q x xad;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% kiriş değişkenleri
L = ...;          b = ...;          h = ...;
m = ...;          E = ...;          I = (b*(h^3))/12;

grp = L/2; %%% yerdeğiştirmesi hesaplanacak olan nokta <orta nokta>

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%kiriş sönüm katsayısı
c = ...;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%kiriş eğriliğinin genliği
A1 = -0.1;
%A1 = 0;
%A1 = 0.1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% hareketli kütle değişkenleri
M = ...;          v = ...;

g = 9.81;
EI = E*I;
ara = (L/v)/100;
xad = L/100;
x=0:xad:L;
sure = (L/v);

for t=ara:ara:sure
duhamel(t)
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Maksimum Statik Yer Değiştirme
ymaks = (M*g*(L^3))/(48*E*I);

ww=round(sure/ara);
grp=round(grp/xad);
y=Q(grp,1:ww);
y_m=y/ymaks;          %yer değiştirmen boyutsuzlaştırılıyor
t=ara:ara:sure;
tt=t*v/L;            %zaman boyutsuzlaştırılıyor
plot(tt,y_m)
hold on

```

```

function duhamel(t)

global ara L c A1 m EI v x Q xad;

DD = 0;    EE = 0;    EEE = 0;    X = (pi*x)/L;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% n=1 için a1(t)
n=1;
kn = (n*pi)/L;
wn = sqrt( (1/m)*( EI*(kn.^4) ) );
ksi = c / (2*m*wn);
wd = wn*sqrt(1-(ksi.^2));
wf = (kn*v);

    for to=0:0.001:t;
        FF = (1/wd)*(exp(-ksi*wn*(t-to)) * Fn1(to) * sin(wd*(t-to)));
        DD = DD + (FF*0.001);
    end

b11 = A1;
b22 = (ksi*wn*b11) / wd;

W0 = exp(-ksi*wn*t);
W1 = b11*cos(wd*t) + b22*sin(wd*t);
DDD = (W0*W1)+DD;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% n>=2 için an(t)
for n=2:4;
kn = (n*pi)/L;
wn = sqrt( (1/m)*( EI*(kn.^4) ) );
ksi = c / (2*m*wn);
wd = wn*sqrt(1-(ksi.^2));

    for to=0:0.001:t;
        FF = (1/wd)*(exp(-ksi*wn*(t-to)) * Fn234(to,n) * sin(wd*(t-to)));
        EE = EE + (FF*0.001);
    end
EEE = EEE + ( EE * sin(n*X) );
end

Y = ( DDD * sin(X) )+ EEE;
Y0 = A1*sin(X);
%plot(x,-Y)
Z = round(t/ara);
xx=L/xad;
Q(1:(xx+1),Z)=Y-Y0;
hold on

```

```

function Fn1 = avg(to)

global L c A1 m EI M v g;

ag_at = 0;    ag_at_me_co = 0;    egrlk = 0;

    for k=1:4
        kk = (k*pi)/L;
        wfk = (kk*v);
        wk = sqrt( (1/m)*( EI*(kk.^4) ) );
        ksik = c / (2*m*wk);
        wdk = wk*sqrt(1-(ksik.^2));

        U1 = (wk.^2)-(wfk.^2);
        U2 = U1 / ( (U1.^2) + 4*(ksik.^2)*(wk.^2)*(wfk.^2) );

        B = ( (2*M*g)/(m*L) ) * U2 ;
        A = (-2 * wk * wfk * ksik * B) / U1;

        b1 = -A;
        b2 = (-ksik*wk*A - B*wfk ) / wdk;

        W0 = exp(-ksik*wk*to);
        W1 = b1*cos(wdk*to) + b2*sin(wdk*to);
        W11 = b1*sin(wdk*to) - b2*cos(wdk*to);
        W2 = A*cos(wfk*to) + B*sin(wfk*to);
        W22 = A*sin(wfk*to) - B*cos(wfk*to);

        ak = (W0 .* W1) + A1 + W2;
        ak1 = W0 .* ( W1*(-ksik*wk) - (wdk * W11) ) - (wfk * W22);
        ak11 = W0 .* ((ksik.^2)*(wk.^2))*W1+(2*ksik*wk*wdk)*W11-
        (wdk.^2)*W1)-(wfk.^2)*W2;

        Q1 = ak11.*sin(to*wfk);
        Q2 = - ak.*(v*v)*(kk*kk).*sin(to*wfk);
        Q3 = (ak1).*2*v*kk.*cos(to*wfk);

        ag_at = ag_at + Q1;
        ag_at_me_co = ag_at_me_co + Q1 + Q2 + Q3;
        egrlk = egrlk + ( A1*(kk*kk)*sin(wfk*to) );

    end

n=1;
kn = (n*pi)/L;
wf = (kn*v);
wn = sqrt( (1/m)*( EI*(kn.^4) ) );

bas = (wn.^2)*A1;
agirlik = ( (2*M*g)/(m*L) ) * sin(wf*to);
atalet = ( (2*M)/(m*L) ) * sin(wf*to) .* (ag_at);
atalet_merkezcil_coriolis = ( (2*M)/(m*L) ) * sin(wf*to) .* (ag_at_me_co);
ivmeegrilik = ( (2*M*(v.^2))/(m*L) ) * sin(wf*to) .* (egrlik);

%Fn1 = bas + agirlik;
%Fn1 = bas + agirlik - atalet;

```

```

Fn1 = bas + agirlik - atalet_merkezcil_coriolis - ivm
function Fn234 = avm(to,n)
global L c m EI M v g;

ag_at = 0;    ag_at_me_co = 0;    % başlangıç değerleri sıfırlanıyor

    for k=1:4
        kk = (k*pi)/L;
        wfk = (kk*v);
        wk = sqrt( (1/m)*( EI*(kk.^4) ) );
        ksik = c / (2*m*wk);
        wdk = wk*sqrt(1-(ksik.^2));

        U1 = (wk.^2)-(wfk.^2);    U2 = U1 / ( (U1.^2) +
4*(ksik.^2)*(wk.^2)*(wfk.^2) );

        B = ( (2*M*g)/(m*L) ) * U2 ;
        A = (-2 * wk * wfk * ksik * B) / U1;

        b1 = -A;
        b2 = (-ksik*wk*A - B*wfk ) / wdk;

        W0 = exp(-ksik*wk*to);
        W1 = b1*cos(wdk*to) + b2*sin(wdk*to);
        W11 = b1*sin(wdk*to) - b2*cos(wdk*to);
        W2 = A*cos(wfk*to) + B*sin(wfk*to);
        W22 = A*sin(wfk*to) - B*cos(wfk*to);

        ak = (W0 .* W1) + W2;
        ak1 = W0 .* ( W1*(-ksik*wk)-(wdk * W11) )-(wfk * W22);
        ak11 = W0 .* ((ksik.^2)*(wk.^2))*W1+(2*ksik*wk*wdk)*W11-
(wdk.^2)*W1)-(wfk.^2)*W2;

        Q1 = ak11.*sin(to*wfk);
        Q2 = - ak.*(v*v)*(kk*kk).sin(to*wfk);
        Q3 = ak1.*2*v*kk.*cos(to*wfk);

        ag_at = ag_at + Q1;
        ag_at_me_co = ag_at_me_co + Q1 + Q2 + Q3;

    end

kn = (n*pi)/L;
wf = (kn*v);

agirlik = ( (2*M*g)/(m*L) ) * sin(wf*to);
atalet = ( (2*M)/(m*L) ) * sin(wf*to) .* (ag_at);
atalet_merkezcil_coriolis = ( (2*M)/(m*L) ) * sin(wf*to) .* (ag_at_me_co);

%Fn234 = agirlik;    % (sadece ağırlık kuvveti)
%Fn234 = agirlik - atalet;    % (ağıllık ve atalet kuvvetleri)
Fn234 = agirlik - atalet_merkezcil_coriolis; % (ağ, at, merk ve Cor Kuvv.)

```



### Ek 1.16. Hareketli Yükün Etkisi Altındaki Çatlak İhtiva Eden Kirişin Dinamik Davranışını Veren Matlab Programı

```

function catlak

global M H gama L I g E m Q Y ara L0 v x x1 x2 i adm det Te TT TTT;
global La1 La2 La3 La4 a_1 a_2 a_3 a_4 a__1 a__2 a__3 a__4;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Kiriş özellikleri
gama = ...;          L0 = ...;          L = ...;          H = ...;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Özdeğerler ve özfonksiyon katsayıları
La1 = ...;          La2 = ...;          La3 = ...;          La4 = ...;
a_1 = ...;          a_2 = ...;          a_3 = ...;          a_4 = ...;
a__1 = ...;         a__2 = ...;         a__3 = ...;         a__4 = ...;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Hareketli Kütle
M = ...;          v = ...;          grp_x = ...;

E = ...;          I = ...;          p = ...;          g = 9.81;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Çatlak Modeli
fgama = 0.6384 - 1.035*gama + 3.7201*gama^2 - 5.1773*gama^3 +
7.553*gama^4 - 7.332*gama^5 + 2.4909*gama^6;
Te = 6*pi*(gama^2)*fgama*(H/L);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ara = (L/(50*v));          adm=(L/100);          gx = grp_x/adm;
x = 0:adm:L;              x1 = 0:adm:L0;          x2 = L0:adm:L;
j = L0/v;                 jj = round(j/ara);          i = jj*ara;
u = L/v;                  uu = round(u/ara);          ii = uu*ara;
TT = round(L0/adm);      TTT = round(L/adm);          m = p*H^2;
det = 0.0005;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Maksimum yer değiştirme
VV = ( M*g*(L^3) )/(48*E*I);

W=Q(gx,1:uu);
A0 = W/VV;
t=ara:ara:ii;
position=t*(v/L);
plot(position,A0,'b');
hold on

for t=ara:ara:i
    alan1c(t)
end
for t=(i+ara):ara:ii
    alan2c(t)
end
WA=Y(gx,1:uu);
AA = WA/VV;
plot(position,AA,'k-.');

function alan1c(t)

```

```

global det ara m L E I L0 Y x1 x2 adm A1 C1 A2 B2 C2 D2 La1 La2 La3
La4 TT TTT;
global H11 H12 H21 H22 H31 H32 H41 H42;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%sıfırlama
q11=0; q12=0; q13=0; q14=0; Z=round(t/ara);

H1_1=0; H2_1=0; H3_1=0; H4_1=0;
H1_2=0; H2_2=0; H3_2=0; H4_2=0;

wn1 = sqrt( ( E*I*(La1^4) ) / m );
wn2 = sqrt( ( E*I*(La2^4) ) / m );
wn3 = sqrt( ( E*I*(La3^4) ) / m );
wn4 = sqrt( ( E*I*(La4^4) ) / m );

    for to=det:det:t;

        F = (1/wn1)*(Q1_1c(to) * sin(wn1*(t-to)));

        FF = Q1_1c(to) * cos(wn1*(t-to));

        q11 = q11 + (F*det);

        H1_1 = H1_1 + (F*det);
        H1_2 = H1_2 + (FF*det);
    end

H11 = H1_1;
H12 = H1_2;
%H11 = 0;
%H12 = 0;

Y11 = q11 * ( A1*sin(La1*x1) + C1*sinh(La1*x1) );
Y21 = q11 * ( A2*sin(La1*(x2-L0)) + B2*cos(La1*(x2-L0)) +
C2*sinh(La1*(x2-L0)) + D2*cosh(La1*(x2-L0)) );

    for to=det:det:t;

        F = (1/wn2)*(Q1_2c(to) * sin(wn2*(t-to)));

        FF = Q1_2c(to) * cos(wn2*(t-to));

        q12 = q12 + (F*det);

        H2_1 = H2_1 + (F*det);
        H2_2 = H2_2 + (FF*det);
    end

H21 = H2_1;
H22 = H2_2;
%H21 = 0;
%H22 = 0;

Y12 = q12 * ( A1*sin(La2*x1) + C1*sinh(La2*x1) );
Y22 = q12 * ( A2*sin(La2*(x2-L0)) + B2*cos(La2*(x2-L0)) +
C2*sinh(La2*(x2-L0)) + D2*cosh(La2*(x2-L0)) );

```

```

for to=det:det:t;

F = (1/wn3)*(Q1_3c(to) * sin(wn3*(t-to)));

FF = Q1_3c(to) * cos(wn3*(t-to));

q13 = q13 + (F*det);

H3_1 = H3_1 + (F*det);
H3_2 = H3_2 + (FF*det);
end

H31 = H3_1;
H32 = H3_2;
%H31 = 0;
%H32 = 0;

Y13 = q13 * ( A1*sin(La3*x1) + C1*sinh(La3*x1) );
Y23 = q13 * ( A2*sin(La3*(x2-L0)) + B2*cos(La3*(x2-L0)) +
C2*sinh(La3*(x2-L0)) + D2*cosh(La3*(x2-L0)) );

for to=det:det:t;

F = (1/wn4)*(Q1_4c(to) * sin(wn4*(t-to)));

FF = Q1_4c(to) * cos(wn4*(t-to));

q14 = q14 + (F*det);

H4_1 = H4_1 + (F*det);
H4_2 = H4_2 + (FF*det);
end

H41 = H4_1;
H42 = H4_2;
%H41 = 0;
%H42 = 0;

Y14 = q14 * ( A1*sin(La4*x1) + C1*sinh(La4*x1) );
Y24 = q14 * ( A2*sin(La4*(x2-L0)) + B2*cos(La4*(x2-L0)) +
C2*sinh(La4*(x2-L0)) + D2*cosh(La4*(x2-L0)) );

Y1 = Y11+Y12+Y13+Y14;
Y(1:(TT+1),Z)=Y1;

Y2 = Y21+Y22+Y23+Y24;
Y((TT+2):(TTT+2),Z)=Y2;

```

```

function alan2c(t)

global det ara i L m E I L0 Y x1 x2 La1 La2 La3 La4 A1 C1 A2 B2 C2 D2
TT TTT adm;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%sıfırlama
q11=0; q12=0; q13=0; q14=0; q21=0; q22=0; q23=0; q24=0;
Z=round(t/ara);

wn1 = sqrt( ( E*I*(La1^4) ) / m );
wn2 = sqrt( ( E*I*(La2^4) ) / m );
wn3 = sqrt( ( E*I*(La3^4) ) / m );
wn4 = sqrt( ( E*I*(La4^4) ) / m );

    for to=det:det:i;
        F = (1/wn1)*(Q1_1c(to) * sin(wn1*(t-to)));
        q11 = q11 + (F*det);
    end

    for to=i:det:t;
        F = (1/wn1)*(Q2_1c(to) * sin(wn1*(t-to)));
        q21 = q21 + (F*det);
    end

Y11 = (q11 + q21) * ( A1*sin(La1*x1) + C1*sinh(La1*x1) );
Y21 = (q11 + q21) * ( A2*sin(La1*(x2-L0)) + B2*cos(La1*(x2-L0)) +
C2*sinh(La1*(x2-L0)) + D2*cosh(La1*(x2-L0)) );

    for to=det:det:i;
        F = (1/wn2)*(Q1_2c(to) * sin(wn2*(t-to)));
        q12 = q12 + (F*det);
    end

    for to=i:det:t;
        F = (1/wn2)*(Q2_2c(to) * sin(wn2*(t-to)));
        q22 = q22 + (F*det);
    end

Y12 = (q12 + q22) * ( A1*sin(La2*x1) + C1*sinh(La2*x1) );
Y22 = (q12 + q22) * ( A2*sin(La2*(x2-L0)) + B2*cos(La2*(x2-L0)) +
C2*sinh(La2*(x2-L0)) + D2*cosh(La2*(x2-L0)) );

    for to=det:det:i;
        F = (1/wn3)*(Q1_3c(to) * sin(wn3*(t-to)));
        q13 = q13 + (F*det);
    end

    for to=i:det:t;
        F = (1/wn3)*(Q2_3c(to) * sin(wn3*(t-to)));
        q23 = q23 + (F*det);
    end

Y13 = (q13 + q23) * ( A1*sin(La3*x1) + C1*sinh(La3*x1) );
Y23 = (q13 + q23) * ( A2*sin(La3*(x2-L0)) + B2*cos(La3*(x2-L0)) +
C2*sinh(La3*(x2-L0)) + D2*cosh(La3*(x2-L0)) );

```

```

for to=det:det:i;
F = (1/wn4)*(Q1_4c(to) * sin(wn4*(t-to)));
q14 = q14 + (F*det);
end

for to=i:det:t;
F = (1/wn4)*(Q2_4c(to) * sin(wn4*(t-to)));
q24 = q24 + (F*det);
end

Y14 = (q14 + q24) * ( A1*sin(La4*x1) + C1*sinh(La4*x1) );
Y24 = (q14 + q24) * ( A2*sin(La4*(x2-L0)) + B2*cos(La4*(x2-L0)) +
C2*sinh(La4*(x2-L0)) + D2*cosh(La4*(x2-L0)) );

Y1 = Y11+Y12+Y13+Y14;
Y2 = Y21+Y22+Y23+Y24;
Y(1:(TT+1),Z)=Y1;
Y((TT+2):(TTT+2),Z)=Y2;

```

```

function Ql_1c = avg(to)

global L E I M m v g L0 Te La1 La2 a_1 a_2 A1 C1 A2 B2 C2 D2;

La = La1;          A1 = a_1;          wk = sqrt((E*I*(La^4))/m);

    Ok = La*v;          xa = La*v*to;

    n1 = sin(La*L0);    n2 = cos(La*L0);
    n3 = sinh(La*L0);   n4 = cosh(La*L0);
    n5 = sin(La*(L-L0)); n6 = cos(La*(L-L0));
    n7 = sinh(La*(L-L0)); n8 = cosh(La*(L-L0));

    O1 = (n1*n6/n5);    O2 = (n3*n8/n7);

    C1 = ((Te*L*La*n1 - n2 - O1)/(Te*L*La*n3 + O2 + n4))*A1;

A2 = -O1*A1;        B2 = n1*A1;
C2 = -O2*C1;        D2 = n3*C1;

    A_1 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * A1;
    C_1 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * C1;

    d1 = -(Ok/wk)*(A_1+C_1);

qn = d1*sin(wk*to) + A_1*sin(xa) + C_1*sinh(xa);
qn1 = wk * ( d1*cos(wk*to) ) + Ok*( A_1*cos(xa) + C_1*cosh(xa) );
qn11 = -(wk^2) * d1*sin(wk*to) - (Ok^2)*(A_1*sin(xa)-C_1*sinh(xa));

    Xka = A1*sin(xa) + C1*sinh(xa);
    Xka1 = La*( A1*cos(xa) + C1*cosh(xa) );
    Xka11 = (La^2)*( -A1*sin(xa) + C1*sinh(xa) );

    Atalet1 = qn11 * Xka;
    Merkezill = qn * (v*v)* Xka11;
    Coriolis1 = qn1 * 2 * v * Xka1;

La = La2;          A1 = a_2;          wk = sqrt((E*I*(La^4))/m);

    Ok = La*v;          xa = La*v*to;

    n1 = sin(La*L0);    n2 = cos(La*L0);
    n3 = sinh(La*L0);   n4 = cosh(La*L0);
    n5 = sin(La*(L-L0)); n6 = cos(La*(L-L0));
    n7 = sinh(La*(L-L0)); n8 = cosh(La*(L-L0));

    O1 = (n1*n6/n5);    O2 = (n3*n8/n7);

    C1 = ((Te*L*La*n1 - n2 - O1)/(Te*L*La*n3 + O2 + n4))*A1;

A2 = -O1*A1;        B2 = n1*A1;
C2 = -O2*C1;        D2 = n3*C1;

    A_1 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * A1;

```

```

C_1 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * C1;

d1 = -(Ok/wk)*(A_1+C_1);

qn = d1*sin(wk*to) + A_1*sin(xa) + C_1*sinh(xa);
qn1 = wk * ( d1*cos(wk*to) ) + Ok*( A_1*cos(xa) + C_1*cosh(xa) );
qn11 = -(wk^2) * d1*sin(wk*to) - (Ok^2)*(A_1*sin(xa)-C_1*sinh(xa));

Xka = A1*sin(xa) + C1*sinh(xa);
Xka1 = La*( A1*cos(xa) + C1*cosh(xa) );
Xka11 = (La^2)*( -A1*sin(xa) + C1*sinh(xa) );

Atalet2 = qn11 * Xka;
Merkezil2 = qn * (v*v)* Xka11;
Coriolis2 = qn1 * 2 * v * Xka1;

La = Lal;                A1 = a_1;

xa = La*v*to;

n1 = sin(La*L0);        n2 = cos(La*L0);
n3 = sinh(La*L0);       n4 = cosh(La*L0);
n5 = sin(La*(L-L0));    n6 = cos(La*(L-L0));
n7 = sinh(La*(L-L0));   n8 = cosh(La*(L-L0));

O1 = (n1*n6/n5);        O2 = (n3*n8/n7);

C1 = ((Te*L*La*n1 - n2 - O1)/(Te*L*La*n3 + O2 + n4))*A1;

A2 = -O1*A1;            B2 = n1*A1;
C2 = -O2*C1;            D2 = n3*C1;

Xna = A1*sin(xa) + C1*sinh(xa);

Agirlik = ( (M*g)/m ) * Xna;
Atalet = ( M/m ) * ( Atalet1 + Atalet2 ) * Xna;
Merkezil = ( M/m ) * ( Merkezil1 + Merkezil2 ) * Xna;
Coriolis = ( M/m ) * ( Coriolis1 + Coriolis2 ) * Xna;

Q1_1c = Agirlik - Atalet - Merkezil - Coriolis;

```

```

function Q2_1c = avg(to)

global L E I M m v g L0 Te La1 La2 La3 La4 a__1 a__2 a__3 a__4 A1 C1
A2 B2 C2 D2;
global H11 H12 H21 H22 H31 H32 H41 H42;

La = La1;          A1 = a__1;          H1 = H11;          H2 = H12;
Ok = La*v;

    xaa = La*((v*to)-L0);              wk = sqrt((E*I*(La^4))/m);

    n1 = sin(La*L0);                   n2 = cos(La*L0);
    n3 = sinh(La*L0);                  n4 = cosh(La*L0);
    n5 = sin(La*(L-L0));               n6 = cos(La*(L-L0));
    n7 = sinh(La*(L-L0));              n8 = cosh(La*(L-L0));

    O1 = (n1*n6/n5);                   O2 = (n3*n8/n7);

    C1 = ((Te*L*La*n1 - n2 - O1)/(Te*L*La*n3 + O2 + n4))*A1;

A2 = -O1*A1;          B2 = n1*A1;
C2 = -O2*C1;         D2 = n3*C1;

    A_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * A2;
    B_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * B2;
    C_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * C2;
    D_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * D2;

    s1 = sin(wk*(L0/v));                s2 = cos(wk*(L0/v));

d11 = s1*( H1 - B_2 - D_2 ) + ((s2/wk)*(H2-(Ok*(A_2+C_2))));
d22 = s2*( H1 - B_2 - D_2 ) - ((s1/wk)*(H2-(Ok*(A_2+C_2))));

    qn = d11*sin(wk*to) + d22*cos(wk*to) + A_2*sin(xaa) + B_2*cos(xaa)
+ C_2*sinh(xaa) + D_2*cosh(xaa);
    qn1 = wk*( d11*cos(wk*to) - d22*sin(wk*to) ) + Ok*( A_2*cos(xaa) -
B_2*sin(xaa) + C_2*cosh(xaa) + D_2*sinh(xaa) );
    qn11 = -(wk^2)*( d11*sin(wk*to) + d22*cos(wk*to) ) + (Ok^2)*( -
A_2*sin(xaa) - B_2*cos(xaa) + C_2*sinh(xaa) + D_2*cosh(xaa) );

Xka = A2*sin(xaa) + B2*cos(xaa) + C2*sinh(xaa) + D2*cosh(xaa);
Xka1 = La*(A2*cos(xaa)-B2*sin(xaa)+C2*cosh(xaa)+D2*sinh(xaa));
Xka11 = (La^2)*(-A2*sin(xaa)-B2*cos(xaa)+C2*sinh(xaa)+D2*cosh(xaa));

Atalet1 = qn11 * Xka;
Merkezil1 = qn * (v*v)* Xka11;
Coriolisl1 = qn1 * 2 * v * Xka1;

La = La2;          A1 = a__2;          H1 = H21;          H2 = H22;
Ok = La*v;

    xaa = La*((v*to)-L0);              wk = sqrt((E*I*(La^4))/m);

    n1 = sin(La*L0);                   n2 = cos(La*L0);

```



```

n3 = sinh(La*L0);          n4 = cosh(La*L0);
n5 = sin(La*(L-L0));       n6 = cos(La*(L-L0));
n7 = sinh(La*(L-L0));     n8 = cosh(La*(L-L0));

O1 = (n1*n6/n5);          O2 = (n3*n8/n7);

C1 = ((Te*L*La*n1 - n2 - O1)/(Te*L*La*n3 + O2 + n4))*A1;

A2 = -O1*A1;              B2 = n1*A1;
C2 = -O2*C1;              D2 = n3*C1;

A_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * A2;
B_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * B2;
C_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * C2;
D_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * D2;

s1 = sin(wk*(L0/v));     s2 = cos(wk*(L0/v));

d11 = s1*( H1 - B_2 - D_2 ) + ((s2/wk)*(H2-(Ok*(A_2+C_2))));
d22 = s2*( H1 - B_2 - D_2 ) - ((s1/wk)*(H2-(Ok*(A_2+C_2))));

qn = d11*sin(wk*to) + d22*cos(wk*to) + A_2*sin(xaa) + B_2*cos(xaa)
+ C_2*sinh(xaa) + D_2*cosh(xaa);
qn1 = wk*( d11*cos(wk*to) - d22*sin(wk*to) ) + Ok*( A_2*cos(xaa) -
B_2*sin(xaa) + C_2*cosh(xaa) + D_2*sinh(xaa) );
qn11 = -(wk^2)* ( d11*sin(wk*to) + d22*cos(wk*to) ) + (Ok^2)*( -
A_2*sin(xaa) - B_2*cos(xaa) + C_2*sinh(xaa) + D_2*cosh(xaa) );

Xka = A2*sin(xaa) + B2*cos(xaa) + C2*sinh(xaa) + D2*cosh(xaa);
Xka1 = La*( A2*cos(xaa) - B2*sin(xaa) + C2*cosh(xaa) + D2*sinh(xaa) );
Xka11 = (La^2)*(-A2*sin(xaa)-B2*cos(xaa)+C2*sinh(xaa)+D2*cosh(xaa));

Atalet2 = qn11 * Xka;
Merkezi12 = qn * (v*v)* Xka11;
Coriolis2 = qn1 * 2 * v * Xka1;

La = La3;          A1 = a__3;          H1 = H31;          H2 = H32;
Ok = La*v;

xaa = La*((v*to)-L0);          wk = sqrt((E*I*(La^4))/m);

n1 = sin(La*L0);          n2 = cos(La*L0);
n3 = sinh(La*L0);        n4 = cosh(La*L0);
n5 = sin(La*(L-L0));     n6 = cos(La*(L-L0));
n7 = sinh(La*(L-L0));   n8 = cosh(La*(L-L0));

O1 = (n1*n6/n5);          O2 = (n3*n8/n7);

C1 = ((Te*L*La*n1 - n2 - O1)/(Te*L*La*n3 + O2 + n4))*A1;

A2 = -O1*A1;              B2 = n1*A1;
C2 = -O2*C1;              D2 = n3*C1;

A_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * A2;
B_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * B2;

```

```

C_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * C2;
D_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * D2;

s1 = sin(wk*(L0/v));          s2 = cos(wk*(L0/v));

d11 = s1*( H1 - B_2 - D_2 ) + ((s2/wk)*(H2-(Ok*(A_2+C_2))));
d22 = s2*( H1 - B_2 - D_2 ) - ((s1/wk)*(H2-(Ok*(A_2+C_2))));

qn = d11*sin(wk*to) + d22*cos(wk*to) + A_2*sin(xaa) + B_2*cos(xaa)
+ C_2*sinh(xaa) + D_2*cosh(xaa);
qn1 = wk*( d11*cos(wk*to) - d22*sin(wk*to) ) + Ok*( A_2*cos(xaa) -
B_2*sin(xaa) + C_2*cosh(xaa) + D_2*sinh(xaa) );
qn11 = -(wk^2)* ( d11*sin(wk*to) + d22*cos(wk*to) ) + (Ok^2)*( -
A_2*sin(xaa) - B_2*cos(xaa) + C_2*sinh(xaa) + D_2*cosh(xaa) );

Xka = A2*sin(xaa) + B2*cos(xaa) + C2*sinh(xaa) + D2*cosh(xaa);
Xka1 = La*( A2*cos(xaa) - B2*sin(xaa) + C2*cosh(xaa) +
D2*sinh(xaa) );
Xka11 = (La^2)*( -A2*sin(xaa) - B2*cos(xaa) + C2*sinh(xaa) +
D2*cosh(xaa) );

Atalet3 = qn11 * Xka;
Merkezi3 = qn * (v*v)* Xka11;
Coriolis3 = qn1 * 2 * v * Xka1;

La = La4;          A1 = a__4;          H1 = H41;          H2 = H42;
Ok = La*v;

xaa = La*((v*to)-L0);          wk = sqrt((E*I*(La^4))/m);

n1 = sin(La*L0);          n2 = cos(La*L0);
n3 = sinh(La*L0);          n4 = cosh(La*L0);
n5 = sin(La*(L-L0));          n6 = cos(La*(L-L0));
n7 = sinh(La*(L-L0));          n8 = cosh(La*(L-L0));

O1 = (n1*n6/n5);          O2 = (n3*n8/n7);

C1 = ((Te*L*La*n1 - n2 - O1)/(Te*L*La*n3 + O2 + n4))*A1;

A2 = -O1*A1;          B2 = n1*A1;
C2 = -O2*C1;          D2 = n3*C1;

A_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * A2;
B_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)-(Ok^2))) ) * B2;
C_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * C2;
D_2 = ( (M*g)/(m*((wk^2)+(Ok^2))) ) * D2;

s1 = sin(wk*(L0/v));          s2 = cos(wk*(L0/v));

d11 = s1*( H1 - B_2 - D_2 ) + ((s2/wk)*(H2-(Ok*(A_2+C_2))));
d22 = s2*( H1 - B_2 - D_2 ) - ((s1/wk)*(H2-(Ok*(A_2+C_2))));

qn = d11*sin(wk*to) + d22*cos(wk*to) + A_2*sin(xaa) + B_2*cos(xaa)
+ C_2*sinh(xaa) + D_2*cosh(xaa);

```

```

    qn1 = wk*( d11*cos(wk*to) - d22*sin(wk*to) ) + Ok*( A_2*cos(xaa) -
B_2*sin(xaa) + C_2*cosh(xaa) + D_2*sinh(xaa) );
    qn11 = -(wk^2)* ( d11*sin(wk*to) + d22*cos(wk*to) ) + (Ok^2)*( -
A_2*sin(xaa) - B_2*cos(xaa) + C_2*sinh(xaa) + D_2*cosh(xaa) );

```

```

Xka = A2*sin(xaa) + B2*cos(xaa) + C2*sinh(xaa) + D2*cosh(xaa);
Xka1 = La*( A2*cos(xaa) - B2*sin(xaa) + C2*cosh(xaa) + D2*sinh(xaa) );
Xka11 = (La^2)*(-A2*sin(xaa)-B2*cos(xaa)+C2*sinh(xaa)+D2*cosh(xaa));

```

```

Atalet4 = qn11 * Xka;
Merkezil4 = qn * (v*v)* Xka11;
Coriolis4 = qn1 * 2 * v * Xka1;

```

```
La = La1;
```

```
A1 = a__1;
```

```
xaa = La*((v*to)-L0);
```

```
n1 = sin(La*L0);
```

```
n2 = cos(La*L0);
```

```
n3 = sinh(La*L0);
```

```
n4 = cosh(La*L0);
```

```
n5 = sin(La*(L-L0));
```

```
n6 = cos(La*(L-L0));
```

```
n7 = sinh(La*(L-L0));
```

```
n8 = cosh(La*(L-L0));
```

```
O1 = (n1*n6/n5);
```

```
O2 = (n3*n8/n7);
```

```
C1 = ((Te*L*La*n1 - n2 - O1)/(Te*L*La*n3 + O2 + n4))*A1;
```

```
A2 = -O1*A1;
```

```
B2 = n1*A1;
```

```
C2 = -O2*C1;
```

```
D2 = n3*C1;
```

```
Xna = A2*sin(xaa) + B2*cos(xaa) + C2*sinh(xaa) + D2*cosh(xaa);
```

```
Agirlik = ( (M*g)/m ) * Xna;
```

```
Atalet = ( M/m ) * ( Atalet1 + Atalet2 + Atalet3 + Atalet4 ) * Xna;
```

```
Merkezil = ( M/m ) * ( Merkezil1 + Merkezil2 + Merkezil3 + Merkezil4 )
* Xna;
```

```
Coriolis = ( M/m ) * ( Coriolis1 + Coriolis2 + Coriolis3 + Coriolis4 )
* Xna;
```

```
Q2_1c = Agirlik - Atalet - Merkezil - Coriolis;
```

## ÖZGEÇMİŞ

19 Ekim 1979'da Trabzon'da doğan Murat REİS, ilköğrenimini, Maçka'da, orta öğrenimini Bursa Tophane Anadolu Teknik Lisesi, Elektronik Bölümünde (1998), lisans eğitimini Uludağ Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümünde tamamladı (2002). Ardından U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. Kasım 2005'te "Harici Yakıt Tanklarındaki Sıvı Davranışının Araç Dinamiğine Etkisi" isimli tezi ile Yüksek Lisans derecesi alarak, aynı yıl askerlik hizmetini tamamlayan Murat REİS halen aynı anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

## **TEŞEKKÜR**

Lisansüstü öğrenimim süresince daima bana yol gösteren, üzerimde büyük emeği olan danışman hocam saygı değer Prof. Dr. Yaşar PALA 'ya, anlayışından dolayı sevgili eşim Meral Reis'e ve tüm mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.