



T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BOŞ UZAYDA İNCE TEL KAFES YAPILARINA İLİŞKİN
ELEKTROMANYETİK SAÇILMA PROBLEMLERİ**

OKAN MERT YÜCEDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

BURSA-2009



T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BOŞ UZAYDA İNCE TEL KAFES YAPILARINA İLİŞKİN
ELEKTROMANYETİK SAÇILMA PROBLEMLERİ**

OKAN MERT YÜCEDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BOŞ UZAYDA İNCE TEL KAFES YAPILARINA İLİŞKİN
ELEKTROMANYETİK SAÇILMA PROBLEMLERİ

OKAN MERT YÜCEDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

Bu Tez/...../200... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Burak POLAT
Danışman

.....

.....

.....

.....

ÖZET

Bu çalışmada analitik ve sayısal teknikler kullanılarak boş uzayda konuşlanmış metalik cisimlere ilişkin rezonans bölgesinde elektromanyetik ışıma ve saçılma problemleri incelenmiştir. Metalik cisimler tel ızgara tekniği ile modellenmiş olup, ilgili elektrik alan integral denkleminin çözümü için Moment Yöntemi uygulanmıştır. Boş uzay halinde bu çalışmada ele alınan kanonik yapılara ilişkin akım ve alan analizleri sürekli olarak SNEC™ yazılımı ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. SNEC™ çözümleri referans kabul edilerek hesaplanan bağıl hatanın eğitim hedefleri yönünden kabul edilebilir sınırlarda kaldığı görülmektedir. Sonuçların tam olarak uyuşmamasının temel sebebi NEC yazılımlarında kullanılan sinüzoidal baz fonksiyonlarına karşılık söz konusu yazılımda ilgili fonksiyonların darbe şekilli olmalarından kaynaklanan yakınsaklık sorunlarıdır.

Anahtar Kelimeler: Elektromanyetik Saçılma, Frekans Domeni Analizi, İnce Tel Ağ Yapıları, Moment Yöntemi.

ABSTRACT

This work investigates electromagnetic radiation and scattering mechanisms for metallic bodies in resonance region in free space employing analytical and computational methods. The metallic bodies are modelled as thin wire mesh structures and Method of Moments is employed for solving the associated electrical field integral equation. The analyses for current and field distributions on the canonical structures presented in this work are also compared to those obtained through the commercial Super NEC software SNEC™. It is observed that when one treats the SNEC™ solutions as reference, the computed relative errors can be considered in an acceptable range for educational purposes. The reason for not obtaining an exact match between the two results is attributed to the convergence properties of the pulse basis functions employed in the code while the NEC software is known to employ the more realistic sinusoidal bases.

Key Words: Electromagnetic Scattering, Frequency Domain Analysis, Thin Wire Mesh Structures, Method of Moments.

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
İÇİNDEKİLER	v
KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
GİRİŞ	1
1. KURAMSAL TEMELLER	3
1.1. Boş Uzay Green Fonksiyonu	3
1.2. Boş Uzayda Bir Hertz Dipolünün Işıma Alanı	6
1.3. Elektriksel Alan Işıma İntegrali	11
2. YÖNTEM	14
2.1. Dik konumlandırılmış Bir Bölütün Işıma Alanı	14
2.1.1. Işıma alan ifadelerindeki hacim integrallerinin hesabı	16
2.2. Dik Konumlandırılmış Bir Bölütün Işıma Alanının Yaklaşık Hesabı	17
2.2.1. Yakın alan için $P(\alpha)$ integralinin yaklaşık hesabı	20
2.2.2. Uzak alan için $P(\alpha)$ integralinin yaklaşık hesabı	22
2.3. Herhangi Bir Noktada ve Konumda Konuşlanmış Bir bölütün Işıma Alanı	24
2.3.1. Işıma alan ifadelerindeki hacim integrallerinin hesabı	26
2.4. Moment Formülasyonu	29
3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI	33
3.1. Bir Bölütün Işıma Alanları : Yakın ve Uzak Alanlar	33
3.2. Bir Boyutlu Problem: Bir İnce Tel Üzerindeki Akım Dağılımı	35
3.3. İki Boyutlu Problem : Bir Plaka Üzerindeki Akım Dağılımı ve Saçılan Alanlar	38
3.4. Üç Boyutlu Problem : Bir Küreden Saçılan Alanlar	42
4. SONUÇ	45
KAYNAKLAR	46
EKLER	50
Ek-A: Karşıtlık İlkesi	50
Ek-B: İletken Bir Küreden Saçılma: Analitik Çözüm	54
Ek-C: Euler Dönüşümleri	61
Ek-D: Moment Yöntemi	64
ÖZGEÇMİŞ	70
TEŞEKKÜR	71

KISALTMALAR DİZİNİ

Mini-NEC	: Mini-Numerik Elektromanyetik Kod (Mini-Numerical Electromagnetics Code)
NEC	: Numerik Elektromanyetik Kod (Numerical Electromagnetic Code)
PWRS	: Pocklington Tel Işıma ve Saçılma Kodu (Pocklington's Wire Radiation and Scattering Code)
SNEC	: Süper Numerik Elektromanyetik Kod (Super Numerical Electromagnetic Code)
TDRS	: İki Boyutlu Işıma ve Saçılma Kodu (Two-Dimensional Radiation and Scattering Code)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Kaynak ve gözlem noktalarının gösterimi.....	4
Şekil 2. Orijine +z yönünde yerleştirilmiş bir bölüt.....	14
Şekil 3. Boş uzayda gelişigüzel konumlanmış bir bölüt.....	25
Şekil 4. Boş uzayda gelişigüzel konumlanmış iki bölüt.....	29
Şekil 5. $\theta=90^\circ$ ve $\Phi=90^\circ$ için analitik-asimptotik yöntemlerin bağıl hataları.....	34
Şekil 6. $\theta=45^\circ$ ve $\Phi=90^\circ$ için analitik-asimptotik yöntemlerin bağıl hataları.....	34
Şekil 7. $\theta=15^\circ$ ve $\Phi=90^\circ$ için analitik-asimptotik yöntemlerin bağıl hataları.....	35
Şekil 8. +x eksenine yerleştirilmiş 1m uzunluğunda 71 bölütten oluşan ince tel	36
Şekil 9. +x eksenine yerleştirilmiş 1m uzunluğunda tel üzerindeki akım dağılımının genliği	36
Şekil 10. +x eksenine yerleştirilmiş 1m uzunluğundaki tel için bağıl hata.....	37
Şekil 11. xyz boyunca yerleştirilmiş 0.5 m uzunluğunda 61 bölütten oluşan düz tel	37
Şekil 12. 0.5 m uzunluğunda eğri tel üzerindeki akım dağılımının genliği	38
Şekil 13. 0.5 m uzunluğundaki eğri tel için bağıl hata	38
Şekil 14. Oxy düzlemine yerleştirilmiş plaka	39
Şekil 15. Oxy düzlemine yerleştirilmiş plakanın üzerindeki akım dağılımları	39
Şekil 16. Oxy düzlemine yerleştirilmiş plakadan saçılan elektrik yakın alan.....	40
Şekil 17. Oxy düzlemine yerleştirilmiş plakadan saçılan elektrik yakın alan için bağıl hata	40
Şekil 18. Oxy düzlemine yerleştirilmiş plakadan saçılan elektrik uzak alan.....	41
Şekil 19. Oxy doğrultusuna yerleştirilmiş plakadan saçılan uzak alan için bağıl hata.....	41
Şekil 20. Orijine yerleştirilmiş 2m yarıçapında 2269 bölütten oluşan küre.....	42
Şekil 21	43
Şekil 22. Orijine yerleştirilmiş 2m yarıçaplı küreden saçılan yakın elektrik alan için bağıl hata	43
Şekil 23. Orijine yerleştirilmiş 2m yarıçaplı küreden saçılan uzak elektrik alan ..	44
Şekil 24. Orijine yerleştirilmiş 2m yarıçaplı küreden saçılan uzak elektrik alan için bağıl hata	44
Şekil 25. z eksenini etrafında α kadar döndürülmüş eksenler.....	61
Şekil 26. y eksenini etrafında β kadar döndürülmüş eksenler.....	62
Şekil 27. Ötelenmiş ve döndürülmüş koordinat sistemi.....	63
Şekil 28. Alt bölge baz fonksiyonları ve fonksiyonel yaklaşıklıkları	69

SİMGELER DİZİNİ

\vec{D}	: Elektrik deplasman vektörü
\vec{H}	: Manyetik alan vektörü
J_f	: Hacimsel akım yoğunluğu
ρ_f	: Hacimsel yük yoğunluğu
\vec{A}	: Vektör potansiyeli
R	: Gözlem ve kaynak noktaları arasındaki mesafe
G	: Green fonksiyonu
\vec{E}	: Elektrik alan vektörü
\vec{B}	: Manyetik endüksiyon vektörü
ϕ	: Skaler potansiyel
\vec{r}	: Gözlem noktasına ait üç boyutlu konum vektörü
\vec{r}'	: Kaynak noktasına ait üç boyutlu konum vektörü
$\delta(r)$: Üç boyutlu Delta Dirac fonksiyonu
μ_0	: Boş uzay manyetik geçirgenlik sabiti
ϵ_0	: Boş uzay dielektrik sabiti
ω	: Açısal frekans
l	: Bölüt boyu
\hat{e}_m^j	: m. bölüte ait birim teğet vektör
q	: Elektrik yükü
Q	: Toplam elektrik yükü
γ	: Euler sabiti
λ	: Dalga boyu
a	: Bölüt yarıçapı
c	: Işık hızı
k	: Dalga sayısı
s	: İletken eksenini boyunca tanımlı değişken

GİRİŞ

Bu çalışmada analitik ve sayısal teknikler kullanılarak boş uzayda konuşlanmış metalik cisimlere ilişkin rezonans bölgesinde elektromanyetik ışıma ve saçılma mekanizması incelenmiştir. Metalik cisimler, ince tel yaklaşığı altında tel ızgara tekniği ile modellenmiş olup, ilgili elektrik alan integral denklemi darbe baz fonksiyonları ve Dirac delta ağırlaştırma fonksiyonları kullanılarak Moment Yöntemi ile çözülmüştür.

Elektromanyetik saçılma analizi yapılacak olan yapının ince tel ağ örgü eşdeğerinin oluşturulması ve analizi konusunda, 60'ların ikinci yarısından beri Richmond'un iyi bilinen makalesinin (Richmond 1966) önderliğinde yoğun çalışmalar süregelmiştir. Bu alandaki kuramsal birikim literatürde yer almakla beraber ilgili açık kodlar en yoğun olarak ABD Silahlı Kuvvetleri'nden Prof. Carl Baum tarafından koordine edilen Interaction Notes serisi altında çok sayıda raporda yer almıştır. Bu alandaki ilk raporlar Chao ve Strait 1970, Mautz ve Harrington 1971 kaynaklarında verilmiştir.

İntegral eşitliği formülasyonuna ve moment yöntemine dayalı algoritmalara sahip olan yazılımların başlıcaları; TDRS (Two-Dimensional Radiation and Scattering), PWRS (Pocklington's Wire Radiation and Scattering), NEC (Numerical Electromagnetics Code), Mini-NEC'tir (Mini-Numerical Electromagnetics Code) (Balanis, 1989). Bu yöndeki yazılımların en gelişmişisi olarak kabul edilebilecek olanı ise 70'lerin başında Lawrence Livermore Ulusal Laboratuvarı'nda geliştirilen NEC'tir (Burke ve Poggio, 1977). Takip eden yıllarda gelişen matematiksel teknikler ve bilgisayar teknolojilerinin ışığında bu tür simülatörlerin yetenekleri arttıkça ticari değer (NEC-WIN, SUPERNEC) veya gizlilik niteliği (NEC-4) kazanmışlar, bu şekilde artık sadece açık kodlara değil kimi zaman programların kendilerine dahi erişim olanağı kalmamıştır. Üstelik açık kodlara erişilebildiği durumlarda dahi algoritmik karmaşa nedeniyle bu yazılımlara ek yetenekler kazandırabilecek takviyeler yapmak pek olası değildir.

Bu alışma ile yetenekleri bilinen ticari ve gizli durumdaki yazılımların belirli yeteneklerine sahip ancak uygulanan analitik teknikler sayesinde amaca uygun olarak diğer yazılımlarda mevcut olmayan çok sayıda ek yetenekle donatılabilecek akademik amaçlı bir ürünün matematiksel temelleri sunulmaktadır.

1. KURAMSAL TEMELLER

1.1. Boş Uzay Green Fonksiyonu

Green fonksiyonu elektromanyetik dalga kuramında önemli bir rol oynar. Fiziksel olarak, Green fonksiyonu noktasal bir kaynak tarafından üretilen elektromanyetik alanı ifade eder.

\vec{r} üç boyutlu konum vektörü, $f(\vec{r})$ bilinmeyen fonksiyon, L lineer operatör ve $g(\vec{r})$ de kaynak dağılımı olacak şekilde ışınım denklemi aşağıdaki gibi genel olarak ifade edilebilir.

$$L(f(\vec{r})) = -g(\vec{r}) \quad (1.1)$$

Eğer kaynak Dirac delta fonksiyonu ise Green fonksiyonu,

$$L(G(\vec{r}, \vec{r}')) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.2)$$

(1.2) eşitliğinin çözümü olarak tanımlanır. Burada \vec{r}' gözlem noktasının konum vektörüdür.

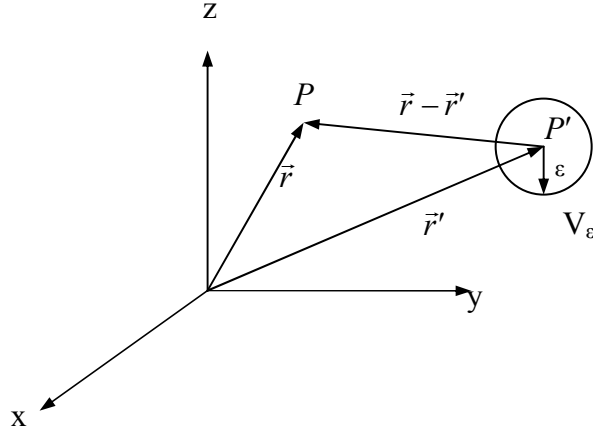
Dirac delta fonksiyonu, tanımsız olduğu $\vec{r} = \vec{r}'$ hariç tüm uzayda sıfırdır.

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = 0, \quad \vec{r} \neq \vec{r}' \quad (1.3)$$

Bununla beraber eğer f sürekli herhangi bir fonksiyon, V bir hacim ve dV , V hacmine ait bir diferansiyel eleman ise

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}')dV = \int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r}' - \vec{r})dV = \begin{cases} f(\vec{r}'), & \vec{r}' \in V \\ 0, & \vec{r}' \notin V \end{cases} \quad (1.4)$$

(1.4) özdeşliği mevcuttur.



Şekil 1. Kaynak ve gözlem noktalarının gösterimi

(1.4) ifadesinde $f(\vec{r}) = 1$ olarak alınır ve söz konusu ifade Şekil 1' de görülen merkezi $P' = (x', y', z')$ noktasında yer alan ϵ yarıçaplı ve V hacimli küre için yazılırsa

$$\int_{V_\epsilon} \delta(\vec{r} - \vec{r}') dv = \int_{V_\epsilon} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) dv = 1 \quad (1.5)$$

ifadesi elde edilir.

Buna göre, $P' = (x', y', z')$ kaynak noktası, $P = (x, y, z)$ ise gözlem noktası koordinatları ise delta fonksiyonu kaynak noktası koordinatlarında bulunan noktasal bir kaynağa karşılık gelirken, Green fonksiyonu ise bu noktasal kaynağın gözlem noktasında oluşturduğu alanı ifade etmektedir. (1.5) ifadesinden de görülebileceği üzere eğer kaynak ile gözlem noktaları yer değiştirirlerse Green fonksiyonu yapısını korur.

Green fonksiyonu aşağıdaki üç boyutlu skaler Helmholtz denklemini sağlar,

$$(\text{lap} + k^2)G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.6)$$

Bu ifade de G Green fonksiyonu belirtir ve kaynak noktasının konumuna göre küresel simetriktir. Eğer koordinat sisteminin merkezi kaynak noktasına taşınırsa, G sadece gözlem noktasının bir fonksiyonu haline gelir:

$$(\text{lap} + k^2)G = -\delta(\vec{r}) \quad (1.7)$$

$\delta(\vec{r})$, orijin hariç her noktada özdeş olarak sıfır olduğundan (1.7) ifadesinin çözümü fazör ifadeninin tanımına bağlı olarak

$$G = \frac{Ce^{-ikR}}{R} \quad (\text{zamana bağıllık } e^{i\omega t}) \quad (1.8)$$

ya da

$$G = \frac{Ce^{ikR}}{R} \quad (\text{zamana bağıllık } e^{-i\omega t}) \quad (1.9)$$

eşitliklerinden biri olur. Bu ifadelerde C sabittir ve (1.7) ifadesi yardımıyla bulunur. Ayrıca

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = \hat{x}(x - x') + \hat{y}(y - y') + \hat{z}(z - z') \quad (1.10)$$

olmak üzere

$$R = |\vec{R}| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad (1.11)$$

olarak tanımlıdır.

Bu çalışmada zamana bağıllılık $e^{-i\omega t}$ olarak alınacaktır. Bu durumda ışınım koşulunu sağlayan (1.9) ifadesi olur. (1.7) ifadesinin her iki tarafının, merkezi orijinde olan sonsuz küçük ε yarıçaplı küresel V_ε hacmi üzerinden integrali alındığında

$$\int_{V_\varepsilon} \text{lap} G dV = \int_{V_\varepsilon} \text{div}(\text{grad} G) dV = -1 \quad (1.12)$$

ifadesi elde edilir. Gauss teoremi yardımıyla

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{dG}{dR} dS = -1 \quad (1.13)$$

yazılabilir. Burada, S_ε , V_ε hacmini kuşatan küresel yüzeydir. $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{Ce^{ikR}}{R} \rightarrow \frac{C}{R}$ olacağı

göz önünde bulundurulursa (1.13) ifadesinden $C = \frac{1}{4\pi}$ olarak hesaplanır. Buna göre skaler Helmholtz denklemini sağlayan boş uzay Green fonksiyonu

$$G = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \quad (1.14)$$

olarak bulunur.

1.2. Boş Uzayda Bir Hertz Dipolünün Işıma Alanı

Basit bir ortam için fazör Maxwell denklemleri

$$\text{rot}\vec{E} - i\omega\vec{B} = 0, \quad \text{div}\vec{D} = \rho_f \quad (1.15)$$

$$\text{rot}\vec{H} + i\omega\vec{D} = \vec{J}_f, \quad \text{div}\vec{B} = 0 \quad (1.16)$$

İle verilebilir. Burada \vec{E} elektrik alan, \vec{D} elektrik deplasman, \vec{H} manyetik alan ve \vec{B} , manyetik endüksiyon vektörü, \vec{J}_f hacimsel akım yoğunluğu, ρ_f ise hacimsel yük yoğunluğudur.

\vec{A} vektör potansiyeli ve ϕ skaler potansiyeli Lorentz koşulu altında şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{rot}\vec{A} \\ \vec{E} &= i\omega\vec{A} - \text{grad}\phi \\ \text{div}\vec{A} &= \frac{ik^2\phi}{\omega} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Buna göre $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ vektör potansiyeli aşağıda verilen Helmholtz denklemini sağlar.

$$(\text{lap} + k^2)\vec{A} = -\mu_0\vec{J}_f \quad (1.18)$$

x -yönünde, koordinat merkezine yerleştirilmiş, sonsuz küçük elektrik dipolün boş uzaydaki tanımı

$$\vec{J}_f = \hat{x}\delta(\vec{r}) \quad (1.19)$$

ile verilir. Burada $\delta(\vec{r})$ üç boyutlu delta fonksiyonudur. (1.18) denkleminin (1.7) ifadesinden faydalanarak çözümü gerçekleştirilirse

$$\vec{A} = \mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \hat{x} \quad (1.20)$$

elde edilir. Burada $r = |\vec{r}|$ 'dır. Fazör Maxwell denklemlerinden faydalanarak

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{k^2} \text{rot}\vec{B} \quad (1.21)$$

yazılabilir. Yine Maxwell denklemlerinde belirtildiği üzere $\text{div}\vec{B} = 0$ olduğundan, vektör eşitliklerinden $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ yazılabilir. Buna göre elektrik alan ifadesi

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{k^2} \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) \quad (1.22)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 'dür ve boş uzay dalga sayısı adını alır.

$$\text{rot}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{y} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{z}$$

ifadesinden

$$B_x = 0, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (1.23)$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial A_x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial A_x}{\partial r}$$

ifadelerinden faydalanarak

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{z}{r} e^{ikr} \left(i \frac{k}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (1.24)$$

ve

$$B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{y}{r} e^{ikr} \left(i \frac{k}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (1.25)$$

olarak bulunur.

$$\text{rot}\vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{z} \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{y^2}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) \right\} e^{ikr}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{z^2}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) \right\} e^{ikr}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{xy}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{xz}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr}$$

olduğundan (1.21) eşitliğine göre

$$E_x^x = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi k^2} \left\{ \frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{x^2}{r^2} \left(\frac{k^2}{r} + \frac{3ik}{r^2} - \frac{3}{r^3} \right) \right\} e^{ikr} \quad (1.27)$$

$$E_y^x = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi k^2} \frac{xy}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr} \quad (1.28)$$

$$E_z^x = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi k^2} \frac{xz}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr} \quad (1.29)$$

elde edilir. (1.27)-(1.29) elektrik alan ifadelerinde x -yönünde yönlendiği durumu ifade etmektedir.

y -yönünde, koordinat merkezine yerleştirilmiş, sonsuz küçük elektrik dipolün boş uzaydaki tanımı

$$\vec{J}_f = \hat{y}\delta(\vec{r}) \quad (1.30)$$

ile verilir. Burada (1.18) denkleminin (1.7) ifadesinden faydalanarak çözümü yapılırsa

$$\vec{A} = \mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \hat{y} \quad (1.31)$$

elde edilir.

$$\text{rot}\vec{A} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{z}$$

ifadesinden

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = 0, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} \quad (1.32)$$

bulunur.

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial A_y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial A_y}{\partial r}$$

ifadelerinden faydalanarak

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{z}{r} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr} \quad (1.33)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x}{r} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr} \quad (1.34)$$

olarak bulunur.

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{y} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \hat{z} \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{xy}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \frac{z^2}{r} \left(-\frac{k^2}{r^2} - \frac{3ik}{r^3} + \frac{3}{r^4} \right) \right\} e^{ikr}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{x^2}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) \right\} e^{ikr}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{zy}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr}$$

olduğundan (1.21) eşitliğine göre y -yönünde yönelmiş kaynağın oluşturduğu elektrik alan

$$E_x^y = -\frac{i\omega}{k^2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{xy}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr} \quad (1.36)$$

$$E_y^y = \frac{i\omega \mu_0}{k^2 4\pi} \left\{ \frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{y^2}{r^2} \left(\frac{k^2}{r} + \frac{3ik}{r^2} - \frac{3}{r^3} \right) \right\} e^{ikr} \quad (1.37)$$

$$E_z^y = -\frac{i\omega \mu_0 zy}{k^2 4\pi r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr} \quad (1.38)$$

şeklinde elde edilir.

z -yönünde, koordinat merkezine yerleştirilmiş, sonsuz küçük elektrik dipolün boş uzaydaki tanımı

$$\vec{J} = \hat{z}\delta(\vec{r}) \quad (1.39)$$

ile verilir. (1.18) denkleminin (1.7) ifadesinden faydalanarak çözümünden

$$\vec{A} = \mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \hat{z} \quad (1.40)$$

elde edilir.

$$\text{rot}\vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{y}$$

ifadesinden

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = 0 \quad (1.41)$$

bulunur.

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

ifadelerinden faydalanarak

$$B_x = \frac{\mu_0 y}{4\pi r} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr} \quad (1.42)$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 x}{4\pi r} \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) e^{ikr} \quad (1.43)$$

olarak bulunur.

$$\text{rot}\vec{B} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{z} \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{xz}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{yz}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{x^2}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) \right\} e^{ikr}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{y^2}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) \right\} e^{ikr}$$

olduğundan (1.21) eşitliğine göre z -yönünde yerleşen kaynağın oluşturduğu elektrik alan

$$E_x^z = -\frac{i\omega}{k^2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{xz}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr} \quad (1.45)$$

$$E_y^z = -\frac{i\omega}{k^2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{yz}{r} \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{3ik}{r^3} - \frac{3}{r^4} \right) e^{ikr} \quad (1.46)$$

$$E_z^z = \frac{i\omega}{k^2} \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{z^2}{r^2} \left(\frac{k^2}{r} + \frac{3ik}{r^2} - \frac{3}{r^3} \right) \right\} e^{ikr} \quad (1.47)$$

şeklinde elde edilir.

1.3. Elektriksel Alan Işıma İntegrali

Elektrik alan, boş uzayda, Lorentz koşulu altında fazör Maxwell denklemlerinin yardımıyla vektör potansiyeli cinsinden

$$\vec{E} = ikc\vec{A} + \frac{ic}{k} \text{grad} [\text{div}\vec{A}] \quad (1.48)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada k dalga sayısı, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ boş uzayda ışık hızıdır.

$$g(R) = \frac{e^{ikR}}{R} \quad (1.49)$$

olmak üzere vektör potansiyeli

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} g(R) \vec{J}_f(\vec{r}') dV' \quad (1.50)$$

şeklinde yazılır. Buna göre \vec{A} vektörünün diverjansı

$$\text{div}\vec{A} = \text{div}[\vec{J}_f(\vec{r}')g(R)] = \vec{J}_f(\vec{r}') \cdot \text{grad}g(R) \quad (1.51)$$

şeklini alır. Burada

$$\text{grad}g(R) = \hat{R} \frac{dg}{dR} = \hat{R}g(R) \left(ik - \frac{1}{R} \right) \quad (1.52)$$

Burada $\hat{R} = \vec{R}/|\vec{R}|$, \vec{R} doğrultusundaki birim vektördür. (1.52) eşitliği (1.51) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\text{div}[\vec{J}_f(\vec{r}')g(R)] = (\vec{J}_f(\vec{r}') \cdot \vec{R}) \frac{g(R)}{R} \left[ik - \frac{1}{R} \right] \quad (1.53)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \text{grad}[\text{div}[\vec{J}_f(\vec{r}')g(R)]] &= (\vec{J}_f(\vec{r}') \cdot \vec{R}) \text{grad} \left[\frac{g(R)}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right] \\ &+ \frac{g(R)}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \text{grad}[\vec{J}_f(\vec{r}') \cdot \vec{R}] \end{aligned} \quad (1.54)$$

olur. Bu eşitlikte yer alan $\text{grad} \left[\frac{g(R)}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right]$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\text{grad} \left[\frac{g(R)}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right] = \hat{R} \frac{g(R)}{R} \left[\left(ik - \frac{1}{R} \right)^2 + \left(-\frac{ik}{R} + \frac{2}{R^2} \right) \right] \quad (1.55)$$

Benzer olarak

$$\text{grad}[\vec{J}_f(\vec{r}') \cdot \vec{R}] = J_{f_x} \hat{x} + J_{f_y} \hat{y} + J_{f_z} \hat{z} = \vec{J}_f(\vec{r}') \quad (1.56)$$

olarak bulunur. (1.55) ve (1.56) ifadeleri (1.54) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[\text{div} \left[\vec{J}(\vec{r}') g(R) \right] \right] &= \left(\vec{J}_f(\vec{r}') \cdot \vec{R} \right) \hat{R} \frac{g(R)}{R} \left[\left(ik - \frac{1}{R} \right)^2 - \frac{ik}{R} + \frac{2}{R^2} \right] \\ &+ \vec{J}_f(\vec{r}') \frac{g(R)}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \end{aligned} \quad (1.57)$$

eşitliği elde edilir. (1.57) ve (1.50) ifadeleri (1.48) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_{V'} \left\{ \vec{J}_f(\vec{r}') f_1(R) + \vec{R} \left(\vec{J}_f(\vec{r}') \cdot \vec{R} \right) f_2(R) \right\} g(R) dv' \quad (1.58)$$

elektrik alan integral denklemi elde edilir. Burada f_1 ve f_2 fonksiyonlarının açık ifadeleri aşağıda verilmiştir.

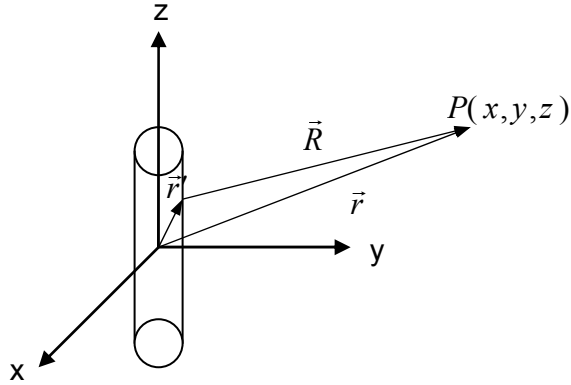
$$f_1(R) = \frac{1}{R^2} \left[-1 + ikR + k^2 R^2 \right] \quad (1.59)$$

$$f_2(R) = \frac{1}{R^4} \left[3 - 3ikR - k^2 R^2 \right] \quad (1.60)$$

2. YÖNTEM

2.1. Dik konumlandırılmış Bir Bölütün Işıma Alanı

Kartezyen koordinat sisteminde orijine yerleştirilmiş ve $+z$ -yönünde konumlandırılmış l uzunluğunda ve a yarıçapında elektriksel olarak küçük ($l \ll \lambda$) ve ince ($a \ll \lambda$) bir iletken tel bölüt ele alınsın. Söz konusu ince tel bölüt Şekil 2'de görülmektedir.



Şekil 2. Orijine $+z$ yönünde yerleştirilmiş bir bölüt

Söz konusu bölüt üzerinde akımın z eksenı boyunca $+z$ yönünde aktığı kabul edilsin. Buna göre iletken tel bölüt üzerindeki akım yoğunluğunun silindirik koordinatlardaki ifadesi

$$\vec{J}_f(\vec{r}') = \hat{z} J_z(\vec{r}') = \hat{z} I(z') \frac{\delta(\rho' - a)}{2\pi a} \left[U\left(z' + \frac{l}{2}\right) - U\left(z' - \frac{l}{2}\right) \right] \quad (2.1)$$

eşitliği ile verilebilir. Bu ifade de $I(z')$ tel eksenini boyunca $+z$ yönünde sabit akan akımı, $\delta(\rho' - a)$ Dirac distribüsyonunu ve u da birim basamak fonksiyonunu göstermektedir.

Bir önceki bölümde elde edilen elektrik alan integral denklemlerinden faydalanarak söz konusu bölüt üzerindeki akım dağılımının neden olduğu elektrik alan ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E_x^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_V (x - x')(z - z') J_z(\vec{r}') f_2(R) g(R) dV' \quad (2.2)$$

$$E_y^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_V (y - y')(z - z') J_z(\vec{r}') f_2(R) g(R) dV' \quad (2.3)$$

$$E_z^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_V \{f_1(R) + (z - z')^2 f_2(R)\} J_z(\vec{r}') g(R) dV' \quad (2.4)$$

Kaynak ve gözlem noktası arasındaki vektör (1.10) da tanımlanmıştır. Bu tanım,

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi \quad (2.5)$$

$$x' = a \cos \phi', \quad y' = a \sin \phi' \quad (2.6)$$

dönüşümleriyle silindirik koordinat sisteminde ifade edilirse

$$R = \left[(\rho \cos \phi - a \cos \phi')^2 + (\rho \sin \phi - a \sin \phi')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

ve parantez kareleri açıldıktan sonra ifade,

$$R = \left[\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2 \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

şeklini alır.

l_{boy} uzunluklu ve a yarıçaplı elektrik iletken bir eğrisel tel parçası için ince tel yaklaşığı,

- telin yarıçapının telin içinde bulunduğu ortamdaki dalga boyundan çok küçük ($a \ll \lambda$)
- telin boyunun telin yarıçapından çok büyük ($a \ll l_{boy}$)

özelliklerini sağlaması halinde geçerlidir.

İnce tel yaklaşıklığı altında (2.8) ifadesi,

$$R \cong [\rho^2 + a^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad (2.9)$$

şeklini alır.

2.1.1. Işıma alan ifadelerindeki hacim integrallerinin hesabı

(2.2) ifadesi silindirik koordinatlarda

$$E_x^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_V (x - \rho' \cos \phi')(z - z') J_z(\vec{r}') f_2(R) g(R) \rho' d\rho' d\phi' dz' \quad (2.10)$$

şeklinde yazılabilir. (2.1) ifadesindeki akım yoğunluğu yerine yazılıp Dirac delta fonksiyonundan kaynaklanan sadeleşmeler yapılırsa (2.2) ifadesi,

$$E_x^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} (x - a \cos \phi')(z - z') f_2(R) g(R) \frac{d\phi'}{2\pi} dz' \quad (2.11)$$

şeklini alır. Bu ifadenin ϕ' ne göre integrasyonu sonucu,

$$E_x^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \int_{-l/2}^{l/2} x(z - z') f_2(R) g(R) dz' \quad (2.12)$$

olarak bulunur.

(2.3) ifadesi silindirik koordinatlarda

$$E_y^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_{V'} (y - \rho' \sin \phi')(z - z') J_z(\vec{r}') f_2(R) g(R) \rho' d\rho' d\phi' dz' \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.1) ifadesindeki akım yoğunluğu yerine yazılıp Dirac delta fonksiyonundan kaynaklanan sadeleşmeler yapılırsa (2.3) ifadesi,

$$E_y^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} (y - a \sin \phi')(z - z') f_2(R) g(R) \frac{d\phi'}{2\pi} dz' \quad (2.14)$$

şeklini alır. Bu ifadenin ϕ' ne göre integrasyonu sonucu,

$$E_y^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \int_{-l/2}^{l/2} y(z-z') f_2(R) g(R) dz' \quad (2.15)$$

olarak bulunur.

(2.4) ifadesi silindirik koordinatlarda

$$E_z^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_{V'} \{f_1(R) + (z-z')^2 f_2(R)\} J_z(\vec{r}') g(R) \rho' d\rho' d\phi' dz' \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.1) ifadesindeki akım yoğunluğu yerine yazılıp Dirac delta fonksiyonundan kaynaklanan sadeleşmeler yapılırsa (2.4) ifadesi,

$$E_z^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \{f_1(R) + (z-z')^2 f_2(R)\} g(R) \frac{d\phi'}{2\pi} dz' \quad (2.17)$$

şeklini alır. Bu ifadenin ϕ' ne göre integrasyonu sonucu,

$$E_z^z(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \int_{-l/2}^{l/2} \{f_1(R) + (z-z')^2 f_2(R)\} g(R) dz' \quad (2.18)$$

olarak bulunur.

(2.12), (2.15) ifadelerinin çözümü Fresnel integrallerinin yardımıyla olmaktadır. (2.18) ifadesinin integrasyonu ise analitik olarak alınamamaktadır. Bu yüzden bu ifadenin integrasyonu nümerik yollar veya analitik asimptotik yaklaşımlar kullanılarak alınır. (2.18) ifadesinin integrali yakın alanda ve uzak alanda ayrı ayrı incelenecektir.

2.2. Dik Konumlandırılmış Bir Bölütün Işıma Alanının Yaklaşık Hesabı

Dik konumlandırılmış bir bölütün ışığı alanın $E_x^z(\vec{r})$, $E_y^z(\vec{r})$ ve $E_z^z(\vec{r})$ bileşenlerinin hesabı için aşağıdaki adımlar izlenir:

(2.12) ifadesi, değişken dönüşümü ile bileşenlerine ayrıştırılırsa,

$$E_x^z(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu_0 x}{4\pi} \left[-\int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^2} dR - \frac{3i}{k} \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^3} dR + \frac{3}{k^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^4} dR \right] \quad (2.19)$$

şeklini alır. Burada

$$R_1 = [\rho^2 + a^2 + (z + l/2)^2]^{1/2} \quad (2.20)$$

$$R_2 = [\rho^2 + a^2 + (z - l/2)^2]^{1/2} \quad (2.21)$$

olarak tanımlıdır. Benzer şekilde (2.15) ifadesi

$$\vec{E}_y^z(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu_0 y}{4\pi} \left[-\int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^2} dR - \frac{3}{k} i \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^3} dR + \frac{3}{k^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^4} dR \right] \quad (2.22)$$

olarak elde edilir. Bu ifadelerdeki integraller

$$I(\alpha) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^\alpha} dR, \quad \alpha = 2, 3, 4 \text{ için} \quad (2.23)$$

olarak tanımlanırsa

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} \left[\frac{-e^{ikR}}{R^{\alpha-1}} \Big|_{R_1}^{R_2} + ikI(\alpha - 1) \right] \quad (2.24)$$

bağıntısı yardımıyla,

$$I(1) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R} dR = [Ci(kR_2) - Ci(kR_1)] + i[Si(kR_2) - Si(kR_1)] \quad (2.25)$$

olmak üzere

$$I(2) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^2} dR = \frac{-e^{ikR_2}}{R_2} + \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + ikI(1) \quad (2.26)$$

$$I(3) = \frac{-e^{ikR_2}}{2R_2^2} + \frac{e^{ikR_1}}{2R_1^2} - \frac{ik e^{ikR_2}}{2R_2} + \frac{ik e^{ikR_1}}{2R_1} - \frac{k^2}{2} I(1) \quad (2.27)$$

$$I(4) = \frac{-e^{ikR_2}}{3R_2^3} + \frac{e^{ikR_1}}{3R_1^3} - \frac{ik e^{ikR_2}}{6R_2^2} + \frac{ik e^{ikR_1}}{6R_1^2} + \frac{k^2 e^{ikR_2}}{6R_2} - \frac{k^2 e^{ikR_1}}{6R_1} - \frac{ik^3}{6} I(1) \quad (2.28)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.25) ifadesindeki Kosinüs ve Sinüs integralleri sırasıyla

$$Ci(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt, \quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bağıntılar (2.19) ve (2.22) ifadelerinde yerlerine yazılırsa,

$$E_x^z(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu_0 x}{4\pi} \left[-I(2) - \frac{3i}{k} I(3) + \frac{3}{k^2} I(4) \right] \quad (2.29)$$

$$E_y^z(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu_0 y}{4\pi} \left[-I(2) - \frac{3i}{k} I(3) + \frac{3}{k^2} I(4) \right] \quad (2.30)$$

Fresnel integrallerinin hesabına indirgenmiş olur.

(2.18) ifadesi ise, $(z-z')^2 = R^2 - \rho^2 - a^2$ dönüşümü yapıp bileşenlerine ayrıştırılırsa

$$E_z^z(\vec{r}) = i\omega\mu_0 \left[\frac{-1}{2\pi k} \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^2} dz' + \left(\frac{1}{2\pi k^2} + \frac{a^2 + \rho^2}{4\pi} \right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^3} dz' \right. \\ \left. + \left(\frac{3i(\rho^2 + a^2)}{4\pi} \right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^4} dz' - \left(\frac{3(\rho^2 + a^2)}{4\pi k^2} \right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^5} dz' \right] \quad (2.31)$$

şeklini alır. Burada

$$\bar{E}_z^z(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \left[\frac{-1}{k} P(2) + \left(\frac{1}{k^2} + \frac{a^2 + \rho^2}{2} \right) P(3) \right. \\ \left. + \left(\frac{3i(\rho^2 + a^2)}{2} \right) P(4) - \left(\frac{3(\rho^2 + a^2)}{2k^2} \right) P(5) \right] \quad (2.32)$$

ve

$$P(\alpha) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{ikR}}{R^\alpha} dz', \quad \alpha = 2, 3, 4, 5 \quad (2.33)$$

olarak tanımlanmıştır.

Dik konumlandırılmış bir bölütün ışıdığı alanın $E_z^z(\vec{r})$ bileşenindeki $P(\alpha)$ ifadelerinin integrasyonu yakın alan ve uzak alanda farklı yaklaşımlarla sonraki iki bölümde elde edilecektir.

2.2.1. Yakın alan için $P(\alpha)$ integralinin yaklaşık hesabı

Dik konumlandırılmış bir bölütün yakın ışınma alanının bulunması temelde (2.33) ifadesinin hesabına dayanır.

Küçük r değerleri için faz terimi (2.33) ifadesinde yer alan integralin dışına çıkartılabilir ve aşağıdaki ifade elde edilir.

$$P(\alpha) = e^{ikr} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{ik(R-r)}}{R^\alpha} dz' \quad (2.34)$$

Bu ifade Taylor serisi yardımıyla

$$P(\alpha) = e^{ikr} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{(R-r)^m}{R^\alpha} dz' \quad (2.35)$$

olarak yazılabilir.

Binom açılımı kullanılarak (2.35) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$P(\alpha) = e^{ikr} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \int_{-l/2}^{l/2} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} R^{m-n-\alpha} r^n dz' = e^{ikr} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} r^n J(m-n-\alpha) \quad (2.36)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadede yer alan $J(m-n-\alpha)$ terimi $B^2 = \rho^2 + a^2$ ve $u = z - z'$ olmak üzere

$$J(m-n-\alpha) = \int_{-l/2}^{l/2} R^{m-n-\alpha} dz' = \int_{u_1=z-l/2}^{u_2=z+l/2} [B^2 + u^2]^{-\frac{m-n-\alpha}{2}} du \quad (2.37)$$

ile verilebilir. $J(m-n-\alpha)$ fonksiyonu, $0 \leq n \leq m$ ve $2 \leq \alpha \leq 5$ olmak üzere $(m-n-\alpha) \in [-5, \infty)$ aralığında tanımlıdır. Buna göre (2.36) ifadesi

$$\begin{aligned}
P(\alpha) = e^{ikr} & \left\{ J(-\alpha) + ik[J(1-\alpha) - rJ(-\alpha)] \right. \\
& + \frac{(ik)^2}{2!} [J(2-\alpha) - 2rJ(1-\alpha) + r^2J(-\alpha)] \\
& \left. + \frac{(ik)^3}{3!} [J(3-\alpha) - 3rJ(2-\alpha) + 3r^2J(1-\alpha) - r^3J(-\alpha)] + \dots \right\}
\end{aligned} \quad (2.38)$$

biçiminde yazılabilir.

(2.37) ifadesinden faydalanarak $\alpha = 2, 3, 4, 5$ için (2.38) eşitliğinde yer alan $J(\alpha)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$J(-5) = \int_{u_1}^{u_2} (B^2 + u^2)^{-5/2} du = \left[\frac{u_2(3B^2 + 2u_2^2)}{3(B^2 + u_2^2)^{3/2} B^4} \right] - \left[\frac{u_1(3B^2 + 2u_1^2)}{3(B^2 + u_1^2)^{3/2} B^4} \right] \quad (2.39)$$

$$J(-4) = \int_{u_1}^{u_2} (B^2 + u^2)^{-2} du = \left\{ \frac{u_2}{2B^2(B^2 + u_2^2)} + \frac{\arctan\left(\frac{u_2}{B}\right)}{2B^3} \right\} - \left\{ \frac{u_1}{2B^2(B^2 + u_1^2)} + \frac{\arctan\left(\frac{u_1}{B}\right)}{2B^3} \right\} \quad (2.40)$$

$$J(-3) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(B^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{1}{B^2} \left\{ \frac{u_2}{(B^2 + u_2^2)^{1/2}} - \frac{u_1}{(B^2 + u_1^2)^{1/2}} \right\} \quad (2.41)$$

$$J(-2) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{B^2 + u^2} = \frac{1}{B} \left\{ \arctan\left(\frac{u_2}{B}\right) - \arctan\left(\frac{u_1}{B}\right) \right\} \quad (2.42)$$

$$J(-1) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{B^2 + u^2}} = \ln \left(\frac{u_2 + \sqrt{B^2 + u_2^2}}{u_1 + \sqrt{B^2 + u_1^2}} \right) \quad (2.43)$$

$$J(0) = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1 \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
J(1) = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{B^2 + u^2} du & = \frac{u_2 (B^2 + u_2^2)^{1/2}}{2} - \frac{u_1 (B^2 + u_1^2)^{1/2}}{2} \\
& + \frac{B^2}{2} \ln \left(\frac{u_2 + (B^2 + u_2^2)^{1/2}}{u_1 + (B^2 + u_1^2)^{1/2}} \right)
\end{aligned} \quad (2.45)$$

olarak belirlenir. Bu ifadeler (2.18) de yerine yazılarak yakın alan ifadeleri elde edilir.

2.2.2. Uzak alan için $P(\alpha)$ integralinin yaklaşık hesabı

Dik konumlandırılmış bir bölütün uzak alanda ışınma alanının analitik-asimptotik olarak çıkarılması (2.33) integralinin hesabına dayanır.

Büyük r değerleri için geçerli (2.33) ifadesini z' ne göre Maclaurin serisine açmak geçerli bir yaklaşımdır (Harrington 1967). Buna göre

$$P(\alpha) \cong \int_{-l/2}^{l/2} \left[h_{\alpha}(0) + h'_{\alpha}(0)z' + \frac{1}{2!} h''_{\alpha}(0)(z')^2 + \frac{1}{3!} h'''_{\alpha}(0)(z')^3 + \frac{1}{4!} h^{IV}_{\alpha}(0)(z')^4 \right] dz' \quad (2.46)$$

ifadesi yazılabilir. Burada I , II , III , IV türevlerin mertebelerini belirtmek için kullanılmıştır ve

$$h_{\alpha}(0) = \frac{e^{ikR_0}}{R_0^{\alpha}} \quad (2.47)$$

olmak üzere

$$R_0 = [x^2 + y^2 + z^2 + a^2]^{1/2} \quad (2.48)$$

dır. (2.46) ifadesinde integral alınarak

$$P(\alpha) = h_{\alpha}(0)l + \frac{h''_{\alpha}(0)l^3}{24} + \frac{h^{IV}_{\alpha}(0)l^5}{1920} \quad (2.49)$$

elde edilir. $\alpha = 2, 3, 4, 5$ için $h_{\alpha}(0)$, $h''_{\alpha}(0)$, $h^{IV}_{\alpha}(0)$ değerleri hesaplanmış ve aşağıda sunulmuştur:

$P(1)$ ifadesinin bileşenleri:

$$f_1(0) = \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \quad (2.50)$$

$$f_1''(0) = e^{ikR_0} \left[\frac{ik}{R_0^2} - \frac{(k^2 z^2 + 1)}{R_0^3} - \frac{3ikz^2}{R_0^4} + \frac{3z^2}{R_0^5} \right] \quad (2.51)$$

$$f_1^{IV}(0) = \left\{ -\frac{3k^2}{R_0^3} - \frac{(9ik + 6ik^3z^2)}{R_0^4} + \frac{36k^2z^2 + k^4z^4 + 9}{R_0^5} \right. \\ \left. + \frac{90ikz^2 + 10ik^3z^4}{R_0^6} - \frac{90z^2 - 15k^2z^4}{R_0^7} - \frac{105ikz^4}{R_0^8} + \frac{105z^4}{R_0^9} \right\} \quad (2.52)$$

$P(2)$ ifadesinin bileşenleri:

$$f_2(0) = \frac{e^{ikR_0}}{R_0^2} \quad (2.53)$$

$$f_2^{II}(0) = e^{ikR_0} \left[\frac{ik}{R_0^3} - \frac{(k^2z^2 + 2)}{R_0^4} - \frac{5ikz^2}{R_0^5} + \frac{8z^2}{R_0^6} \right] \quad (2.54)$$

$$f_2^{IV}(0) = \left\{ -\frac{3k^2}{R_0^4} - \frac{(15ik + 6ik^3z^2)}{R_0^5} + \frac{54k^2z^2 + k^4z^4 + 24}{R_0^6} \right. \\ \left. + \frac{198ikz^2 + 9ik^3z^4}{R_0^7} - \frac{288z^2 + 87k^2z^4}{R_0^8} - \frac{279ikz^4}{R_0^9} + \frac{384z^4}{R_0^{10}} \right\} \quad (2.55)$$

$P(3)$ ifadesinin bileşenleri:

$$f_3(0) = \frac{e^{ikR_0}}{R_0^3} \quad (2.56)$$

$$f_3^{II}(0) = e^{ikR_0} \left[\frac{ik}{R_0^4} - \frac{(k^2z^2 + 3)}{R_0^5} - \frac{7ikz^2}{R_0^6} + \frac{15z^2}{R_0^7} \right] \quad (2.57)$$

$$f_3^{IV}(0) = \left\{ -\frac{3k^2}{R_0^5} - \frac{(21ik + 6ik^3z^2)}{R_0^6} + \frac{72k^2z^2 + k^4z^4 + 45}{R_0^7} \right. \\ \left. + \frac{342ikz^2 + 18ik^3z^4}{R_0^8} - \frac{630z^2 + 141k^2z^4}{R_0^9} - \frac{561ikz^4}{R_0^{10}} + \frac{945z^4}{R_0^{11}} \right\} \quad (2.58)$$

$P(4)$ ifadesinin bileşenleri:

$$f_4(0) = \frac{e^{ikR_0}}{R_0^4} \quad (2.59)$$

$$f_4^{II}(0) = e^{ikR_0} \left[\frac{ik}{R_0^5} - \frac{(k^2z^2 + 4)}{R_0^6} - \frac{9ikz^2}{R_0^7} + \frac{24z^2}{R_0^8} \right] \quad (2.60)$$

$$f_4^{IV}(0) = \left\{ -\frac{3k^2}{R_0^6} - \frac{(27ik + 6ik^3z^2)}{R_0^5} + \frac{90k^2z^2 + k^4z^4 + 72}{R_0^8} \right. \\ \left. + \frac{174ikz^2 + 261ikz^2 + 22ik^3z^4}{R_0^9} - \frac{1152z^2 + 87k^2z^3 + 120k^2z^4}{R_0^{10}} \right. \\ \left. - \frac{783ikz^3 + 192ikz^4}{R_0^{11}} + \frac{1920z^4}{R_0^{12}} \right\} \quad (2.61)$$

biçiminde elde edilir.

$P(5)$ ifadesinin bileşenleri:

$$f_5(0) = \frac{e^{ikR_0}}{R_0^5} \quad (2.62)$$

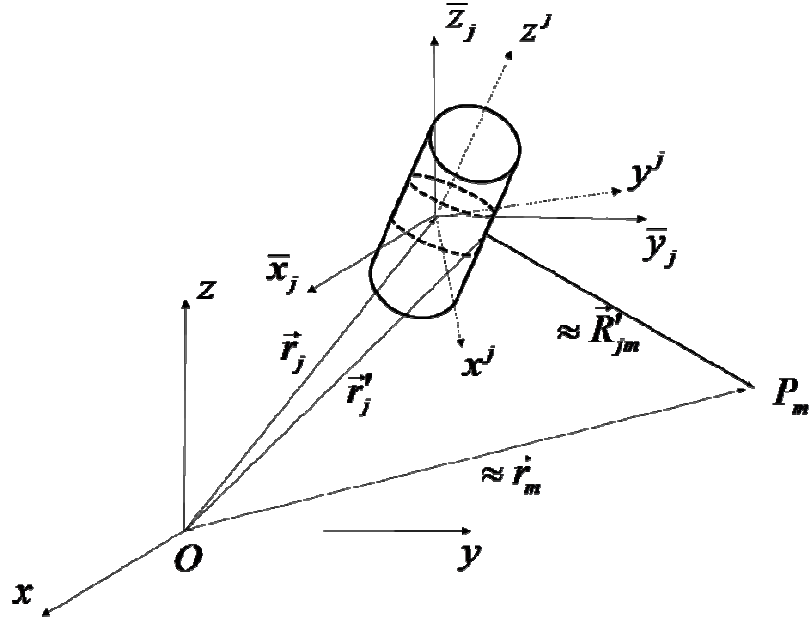
$$f_5^{II}(0) = e^{ikR_0} \left[\frac{ik}{R_0^6} - \frac{(k^2z^2 + 5)}{R_0^7} - \frac{11ikz^2}{R_0^8} + \frac{35z^2}{R_0^9} \right] \quad (2.63)$$

$$f_5^{IV}(0) = \left\{ -\frac{3k^2}{R_0^7} - \frac{33ik}{R_0^8} + \frac{108k^2z^2 - k^4z^4 + 105}{R_0^9} \right. \\ \left. + \frac{738ikz^2 + 26ik^3z^4}{R_0^{10}} - \frac{1890z^2 + 285k^2z^4}{R_0^{11}} \right. \\ \left. - \frac{1545ikz^4}{R_0^{12}} + \frac{3465z^4}{R_0^{13}} \right\} \quad (2.64)$$

Bu ifadeler (2.18) de yerine yazılarak yakın alan ifadeleri elde edilir.

2.3. Herhangi Bir Noktada ve Konumda Konuşlanmış Bir bölütün Işıma Alanı

Boş uzayda $Oxyz$ referans koordinat sistemine göre herhangi bir noktada ve herhangi bir yönde konumlandırılmış l uzunluğunda, a yarıçapında elektriksel olarak küçük ($l \ll \lambda$) ve ince ($a \ll \lambda$) iletken bir tel bölüt Şekil 3' te görülmektedir.



Şekil 3. Boş uzayda gelişigüzel konumlanmış bir bölüt

Söz konusu bölütün bir P_m gözlem noktasında oluşturduğu elektrik alan hesabı için bölütün yer aldığı kabul edilen yerel koordinatlar (x^j, y^j, z^j) sanki referans koordinatlarıymış gibi düşünülerek işlem yapılır. Sonuçta gözlem noktasında hesaplanan elektromanyetik alanın elektrik alan bileşenleri kaynak bölütün konumlandığı yerel koordinatlar cinsinden elde edilir. Bu alan bileşenleri daha sonra Euler dönüşümleri ile referans koordinatlar cinsinden yazılabilir. Bu yöntemle, normal yöntemde açıklandığından farklı olarak, Buna göre kaynak bölütün yer aldığı yerel koordinatlar referans koordinatlar gibi düşünülürse söz konusu bölüt Şekil 3'teki gibi konumlanmış kabul edilir.

Bölütün eksenini boyunca aktığı kabul edilen hacimsel akım yoğunluğunun yerel silindirik koordinatlardaki ifadesi

$$\vec{J}(\vec{r}^{j'}) = \hat{z}^{j'} I \frac{\delta(\rho^{j'} - a)}{2\pi a} \left[U\left(z^{j'} + \frac{l}{2}\right) - U\left(z^{j'} - \frac{l}{2}\right) \right] \quad (2.65)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada

$$\vec{r}^{j'} = x^{j'} \hat{x}^j + y^{j'} \hat{y}^j + z^{j'} \hat{z}^j \quad (2.66)$$

yerel koordinat sisteminde kaynak vektörüdür.

Önceki bölümde elde edilen elektrik alan integral denklemlerinden faydalanarak söz konusu bölüt üzerindeki akım dağılımının neden olduğu elektrik alan ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E_x^z(\vec{r}^j) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_{V^{j'}} (x^j - x^{j'}) (z^j - z^{j'}) J_z(\vec{r}^{j'}) f_2(R^j) g(R^j) dV^{j'} \quad (2.67)$$

$$E_y^z(\vec{r}^j) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_{V^{j'}} (y^j - y^{j'}) (z^j - z^{j'}) J_z(\vec{r}^{j'}) f_2(R^j) g(R^j) dV^{j'} \quad (2.68)$$

$$E_z^z(\vec{r}^j) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_{V^{j'}} \left\{ f_1(R^j) + (z^j - z^{j'})^2 f_2(R^j) \right\} J_z(\vec{r}^{j'}) g(R^j) dV^{j'} \quad (2.69)$$

Burada

$$\vec{r}^j = x^j \hat{x}^j + y^j \hat{y}^j + z^j \hat{z}^j \quad (2.70)$$

yerel koordinat sisteminde gözlem vektörüdür ve

$$R^j \cong [\rho^{j2} + (z^j - z^{j'})^2 + a^2]^{1/2}, \quad \rho^{j2} = x^{j2} + y^{j2} \quad (2.71)$$

yerel koordinatlarda, kaynak noktasından gözlem noktasına olan vektördür.

2.3.1. Işıma alan ifadelerindeki hacim integrallerinin hesabı

Kısım (2.2.1) de verilen yol ile ışıma alan ifadeleri yerel koordinatlarda,

$$E_x^z(\vec{r}^j) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \int_{-l^{j/2}}^{l^{j/2}} x(z^j - z^{j'}) f_2(R^j) g(R^j) dz^{j'} \quad (2.72)$$

$$E_y^z(\vec{r}^j) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \int_{-l^{j/2}}^{l^{j/2}} y(z^j - z^{j'}) f_2(R^j) g(R^j) dz^{j'} \quad (2.73)$$

$$E_z^z(\vec{r}^j) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \int_{-l^{j/2}}^{l^{j/2}} \left\{ f_1(R^j) + (z - z^{j'})^2 f_2(R^j) \right\} g(R^j) dz^{j'} \quad (2.74)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$f_1(R^j) = \frac{1}{R^{j2}} \left[-1 + ikR^j + k^2 R^{j2} \right] \quad (2.75)$$

$$f_2(R^j) = \frac{1}{R^{j4}} [3 - 3ikR^j - k^2 R^{j2}] \quad (2.76)$$

olarak tanımlıdır. Ancak bu integraller analitik asimptotik yaklaşımlar kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

Yerel koordinat sistemine göre toplam elektrik alan,

$$\vec{E}(\vec{r}^j) = \hat{x}^j E_{x^j}^{z^j}(\vec{r}^j) + \hat{y}^j E_{y^j}^{z^j}(\vec{r}^j) + \hat{z}^j E_{z^j}^{z^j}(\vec{r}^j) \quad (2.77)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu alan ifadesinin bileşenleri,

$$E_{x^j}^{z^j}(\vec{r}^j) = \frac{i\omega\mu_0 x^j}{4\pi} \left[-I^j(2) - \frac{3i}{k} I^j(3) + \frac{3}{k^2} I^j(4) \right] \quad (2.78)$$

$$E_{y^j}^{z^j}(\vec{r}^j) = \frac{i\omega\mu_0 y^j}{4\pi} \left[-I^j(2) - \frac{3i}{k} I^j(3) + \frac{3}{k^2} I^j(4) \right] \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{z^j}^{z^j}(\vec{r}^j) = \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} & \left[\frac{-1}{k} P^j(2) + \left(\frac{1}{k^2} + \frac{a^2 + \rho^{j2}}{2} \right) P^j(3) \right. \\ & \left. + \left(\frac{3i(\rho^{j2} + a^2)}{2} \right) P^j(4) - \left(\frac{3(\rho^{j2} + a^2)}{2k^2} \right) P^j(5) \right] \end{aligned} \quad (2.80)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$I^j(\alpha) = \int_{R_1^j}^{R_2^j} \frac{e^{ikR^j}}{R^{j\alpha}} dR^j, \quad \alpha = 2, 3, 4 \text{ için}$$

$$R_1 = [\rho^{j2} + a^2 + (z + l/2)^2]^{1/2}$$

$$R_2^j = [\rho^2 + a^2 + (z - l/2)^2]^{1/2}$$

$$P^j(\alpha) = \int_{R_1^j}^{R_2^j} \frac{e^{ikR^j}}{R^{j\alpha}} dz^{j'}, \quad \alpha = 2, 3, 4, 5$$

olaşeklinde tanımlıdır.

Bölütün döndürülmesiyle oluşan açılarının sinüs ve kosinüsleri, referans koordinatlardaki başlangıç ve bitiş noktalarına bağlı olarak;

$$\sin \alpha_j = (y_j'' - y_j') / \sqrt{(x_j'' - x_j')^2 + (y_j'' - y_j')^2} \quad (2.81)$$

$$\cos \alpha_j = (x_j'' - x_j') / \sqrt{(x_j'' - x_j')^2 + (y_j'' - y_j')^2} \quad (2.82)$$

$$\sin \beta_j = \frac{\sqrt{(x_j'' - x_j')^2 + (y_j'' - y_j')^2}}{\sqrt{(x_j'' - x_j')^2 + (y_j'' - y_j')^2 + (z_j'' - z_j')^2}} \quad (2.83)$$

$$\cos \beta_j = \frac{(z_j'' - z_j')}{\sqrt{(x_j'' - x_j')^2 + (y_j'' - y_j')^2 + (z_j'' - z_j')^2}} \quad (2.84)$$

şeklinde yazılabilir. Burada I ve II üst indisleri, sırasıyla, bölütün başlangıç ve bitiş noktalarını belirtmektedir.

Problemin ele alınışı bakımından öncelikle referans koordinat sisteminin merkezi, bölütün merkezine ötelenmiştir. Referans koordinat sistemine göre (x, y, z) ile verilen bir noktaya, ötelenmiş koordinat sisteminde $(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ noktası karşılık gelmektedir. Bölütün merkezinin koordinatları, bölütün başlangıç ve bitiş noktalarının aritmetik ortalaması yani $x_j = \frac{1}{2}(x_j' + x_j'')$, $y_j = \frac{1}{2}(y_j' + y_j'')$, $z_j = \frac{1}{2}(z_j' + z_j'')$ olarak tanımlanırsa, koordinat sisteminin ötelenmesi durumunda bölütün merkezinin koordinatları $\bar{x}_j = x - x_j$, $\bar{y}_j = y - y_j$, $\bar{z}_j = z - z_j$ biçiminde yazılabilir.

Ek-C kısmındaki (C-12) de verilen Euler dönüşümleri yardımıyla

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x}_0 \\ y - \bar{y}_0 \\ z - \bar{z}_0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}^j &= \hat{x} \cos \alpha \cos \beta + \hat{y} \sin \alpha \cos \beta - \hat{z} \sin \beta \\ \hat{y}^j &= -\hat{x} \sin \alpha + \hat{y} \cos \alpha \\ \hat{x}^j &= \hat{x} \cos \alpha \sin \beta + \hat{y} \sin \alpha \sin \beta + \hat{z} \cos \beta \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} x^j &= x \cos \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \cos \beta - z \sin \beta \\ y^j &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z^j &= x \cos \alpha \sin \beta + y \sin \alpha \sin \beta + z \cos \beta \end{aligned} \quad (2.87)$$

özdeşlikleri tanımlanabilir. Ayrıca

$$\rho^{j2} = x^{j2} + y^{j2} \quad (2.88)$$

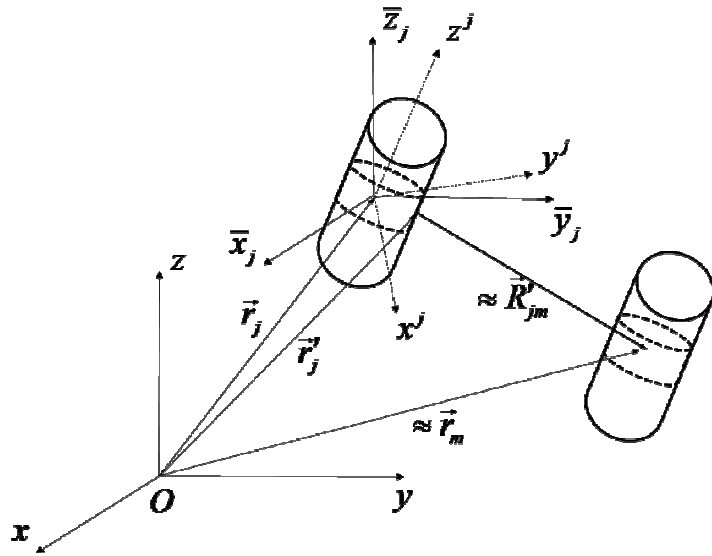
$$r^{j2} = x^{j2} + y^{j2} + z^{j2} \quad (2.89)$$

şeklinde tanımlıdır.

2.4. Moment Formülasyonu

Bu çalışmada incelenecek cisimler, ince tellerle modellenecek ve her bir ince tel Moment Yöntemi gereği uygun aralıklarda bölütlere ayrıştırılacaktır.

Boş uzayda referans xyz koordinatlarına göre herhangi bir konumda bulunan bir bölüt ve bundan belirli bir mesafede gelişigüzel konumlanmış diğer bir bölüt daha düşünölsün. Bu durum Şekil 4'de görölmektedir. Söz konusu bölütlerin sayıları değişik konumlar için arttırılabilir. Buna göre bu çalışma kapsamında genelleme için üzerinde belirli bir akım yoğunluğu olduğu kabul edilen bölüt kaynak bölüt olarak isimlendirilecek ve kısaca j . bölüt olarak anılacaktır. Benzer şekilde üzerindeki akım yoğunluğu hesaplanacak olan ve $P_m(x_m, y_m, z_m)$ gözlem noktasında olduğu kabul edilen bölüt ise hedef bölüt olarak isimlendirilecek ve kısaca m . bölüt olarak anılacaktır.



Şekil 4. Boş uzayda gelişigüzel konumlanmış iki bölüt

n . bölütten akan \vec{J}_n hacimsel akım yoğunluğu tarafından oluşturulan elektrik alan $\vec{E}^n(\vec{r})$ 'nin, nonmanyetik ancak elektriksel olarak genel izotropik $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ bir ortamda yerel koordinatlara göre ifadesi,

$$\vec{E}^n(\vec{r}^j) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} \iiint_{V_n^{j'}} \left\{ \vec{J}_n(\vec{r}^{j'}) f_1(R_m^{j'}) + R_m^{j'} \left(\vec{J}_n(\vec{r}^{j'}) \cdot \vec{R}_m^{j'} \right) f_2(R_m^{j'}) \right\} \vec{g}(R_m^{j'}) dV_n^{j'} \quad (2.90)$$

elektrik alan integral denklemi ile verilir. Burada f_1 ve f_2 fonksiyonlarının açık ifadeleri (2.75) ve (2.76)'da verilmiştir. Ayrıca

$$R_m^{j'} \cong [x_m^{j2} + y_m^{j2} + (z_m^j - z^{j'})^2 + a^2]^{1/2} \quad (2.91)$$

olarak tanımlanmıştır.

“Her bölütün üzerindeki toplam teğet elektriksel alan sıfırdır,” şeklindeki sınır koşulunun Moment Yönteminin yapısı gereği yaklaşık olarak bölütlerin \vec{r}_m merkez noktalarında sağlandığı kabul edildiğinde herhangi m . bölüt için Moment Yönteminin özelliği gereği aşağıdaki moment denklem sistemi elde edilir.

$$\hat{\ell}_m \cdot \vec{E}(\vec{r}_m) = -\hat{\ell}_m \cdot \vec{E}^{inc}(\vec{r}_m), \quad m = 1, \dots, M \quad (2.92)$$

Burada $\vec{E}^{inc}(\vec{r}_m)$ gelen elektrik alanının $\vec{r} = \vec{r}_m$ noktasındaki ifadesidir. m . bölütün teğet vektörü $\hat{\ell}_m$,

$$\hat{\ell}_m = \ell_m^x \hat{x} + \ell_m^y \hat{y} + \ell_m^z \hat{z} \quad (2.93)$$

şeklinde tanımlıdır.

Elektrik alan ifadesi

$$\vec{E}^n(\vec{r}) = \hat{x}E_x^n(\vec{r}) + \hat{y}E_y^n(\vec{r}) + \hat{z}E_z^n(\vec{r}) \quad (2.94)$$

olmak üzere toplam saçılan elektrik alan,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^M I_n \left[\hat{x}E_x^n(\vec{r}) + \hat{y}E_y^n(\vec{r}) + \hat{z}E_z^n(\vec{r}) \right] \quad (2.95)$$

şeklinde tanımlanabilir.

$\vec{E}(\vec{r}_m)$ toplam saçılan alanının toplam M adet bölütün katkısıyla oluştuğu dikkate alındığında moment denklemi,

$$\sum_{n=1}^M Z_{mn} I_n = V_m, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.96)$$

şeklini alır. Burada

$$Z_{mn} = \hat{l}_m \cdot (\hat{x} E_x^n(\vec{r}_m) + \hat{y} E_y^n(\vec{r}_m) + \hat{z} E_z^n(\vec{r}_m)) \quad (2.97)$$

$$Z_{mn} = l_m^x E_x^n(\vec{r}_m) + l_m^y E_y^n(\vec{r}_m) + l_m^z E_z^n(\vec{r}_m) \quad (2.98)$$

şeklinde tanımlanır. Bu matris integralinin çözümüdür.

Ayrıca potansiyel sütununun elemanları ise gelen alana bağlı olarak,

$$V_m = -\hat{\ell}_m \cdot \vec{E}^{inc}(\vec{r}_m) \quad (2.99)$$

Ek-A'da verilen karşılıklı ilkesi gereği

$$Z_{mn} = Z_{nm} \quad (2.100)$$

olur ve hesaplama kolaylığı sağlar.

Potansiyel sütununun elemanları ise gelen alana bağlı olarak,

$$V_m = -\hat{\ell}_m \cdot \vec{E}^{inc}(\vec{r}_m) \quad (2.101)$$

şeklinde yazılabilir. Boş uzayda gelen alan aşağıdaki gibi bir düzlemsel dalga kabul edildiğinde,

$$\vec{E}^{inc}(\vec{r}_m) = \hat{e} e^{ik_0 \hat{n} \cdot \vec{r}_m} = \hat{e} e^{ik_0(x_m \cos \alpha_m + y_m \cos \beta_m + z_m \cos \gamma_m)} \quad (2.102)$$

ve yerine yazıldığında, potansiyel elemanları,

$$V_m = -\hat{e} \cdot \hat{\ell}_m e^{ik_0(x_m \cos \alpha_m + y_m \cos \beta_m + z_m \cos \gamma_m)} \quad (2.103)$$

şeklini alır.

İncelenen yapıyı oluşturan tel kafes, elektriksel olarak küçük ve ince iletken tel bölütlerin birleşimiyle oluşturulur. Tel bölütlerinin birleştiği noktalara *düğüm noktaları* denir. Düğüm noktalarında, *bir düğüme giren akımların toplamı, düğümden çıkan*

akımların toplamına eşittir biçiminde ifade edilebilecek Kirchhoff akımlar yasası sağlanmalıdır. Bununla beraber teorik olarak kafes yapıyı oluşturan ince bir telin herhangi bir düğüme girmeyen (açık) uçlarında akımlar sifıra gitmelidir. Dolayısıyla, tel kafes yapılarının analizlerinde bu iki sınır koşulunun sağlanmasına dikkat edilmelidir (Crow ve Shumpert 1972). Bu iki sınır koşulunun sağlanması amacıyla empedans matrisine tel kafes yapıyı oluşturan düğüm sayısı kadar satır eklenir. Eklenen her bir satırın eleman sayısı empedans matrisinin sütun sayısı kadardır ve değerleri sıfırdır. Söz konusu iki koşul empedans matrisine eklenen bu ek satırların ilgili elemanlarına o düğüme giren teller için +1 ve o düğümden çıkan teller için -1 değerinin atanmasıyla sağlanabilir. Karesel yapısı bozulan matrisin tersi genelleştirilmiş anlamda alınmaktadır:

$$[I]_{N \times 1} = \left([Z]_{N \times P}^T \cdot [Z]_{P \times N} \right)^{-1} \cdot \left([Z]_{N \times P}^T \cdot [V]_{P \times 1} \right) \quad (2.104)$$

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI

Elde edilen sonuçlarda, saçıcı cisimler, elektrik alanı x eksenine paralel yönlenmiş, $+z$ yönünde yayılan düzlemsel dalga ile aydınlatılmaktadır. Saçıcı cisimlerin bulunduğu ortam boş uzaydır. Cisimlerin boyutları rezonans bölgesinde seçilmiştir.

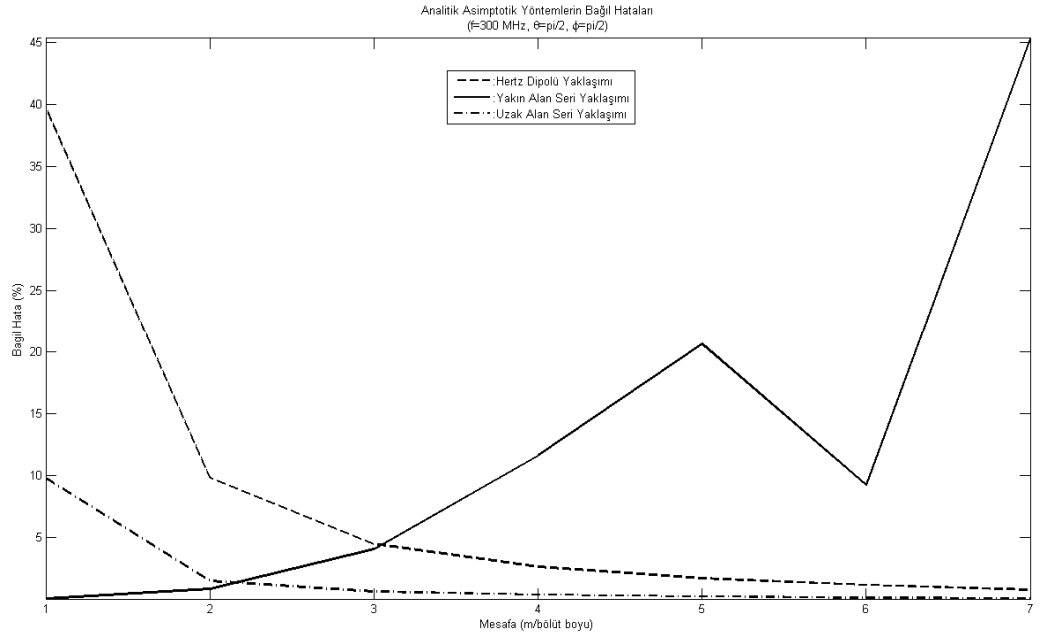
Elde edilen bağıl hatalar,

$$Yüzde\ Bağıl\ Hata = 100 \frac{|\vec{E}_{SNEC^{TM}} - \vec{E}_{KOD}|}{|\vec{E}_{SNEC^{TM}}|} \quad (3.1)$$

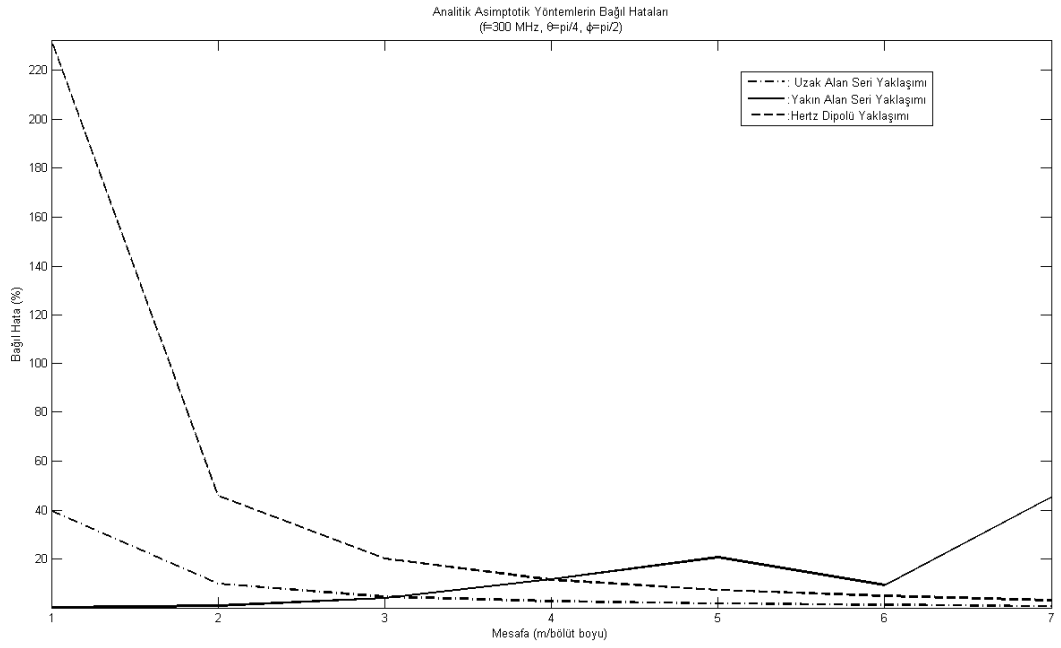
formülü ile hesaplanmıştır.

3.1. Bir Bölütün Işıma Alanları : Yakın ve Uzak Alanlar

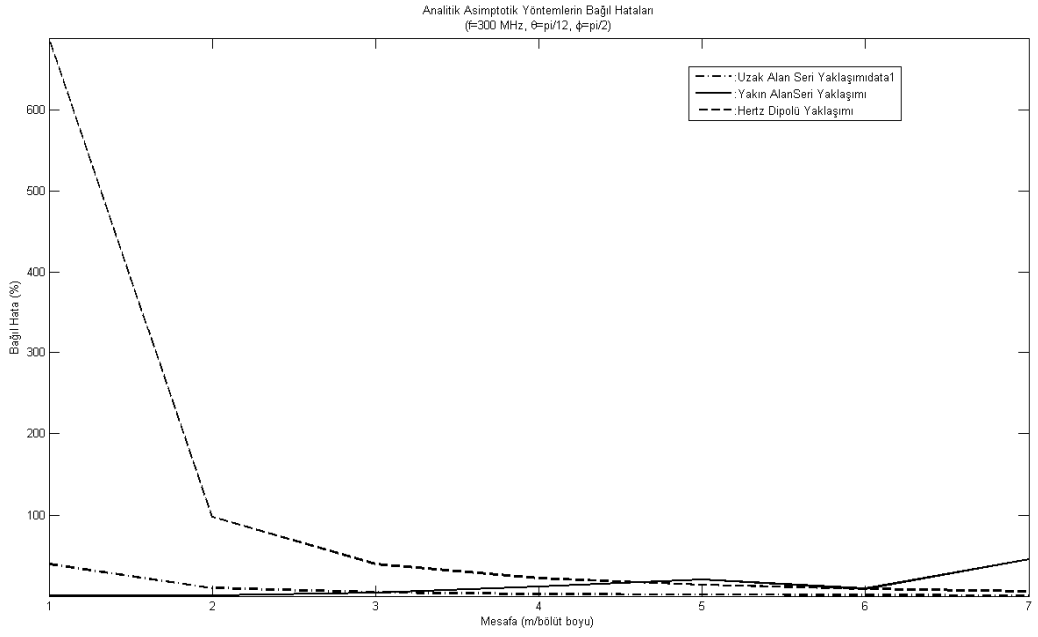
$+x$ eksenine yerleştirilmiş boyu $l = \lambda/50$ ve yarıçapı $a = l/9 = \lambda/450$ olan bir bölüte ait analitik-asimptotik yöntemlerin bağıl hatalarının bölüt boyuna göre değişiminin grafikleri $\theta = 90^\circ$ ve $\phi = 0^\circ$ için Şekil 5'te, $\theta = 45^\circ$ ve $\phi = 0^\circ$ için Şekil 6'da ve $\theta = 15^\circ$ ve $\phi = 0^\circ$ için Şekil 7'de verilmiştir.



Şekil 5. $\theta=90^\circ$ ve $\Phi=90^\circ$ için analitik-asimptotik yöntemlerin bağıl hataları



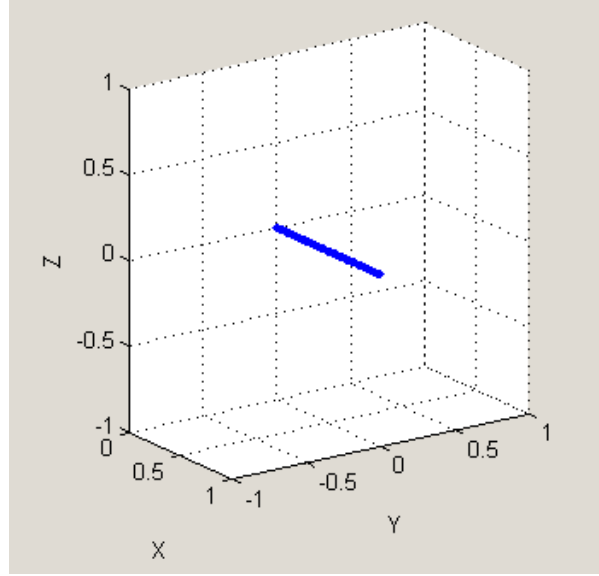
Şekil 6. $\theta=45^\circ$ ve $\Phi=90^\circ$ için analitik-asimptotik yöntemlerin bağıl hataları



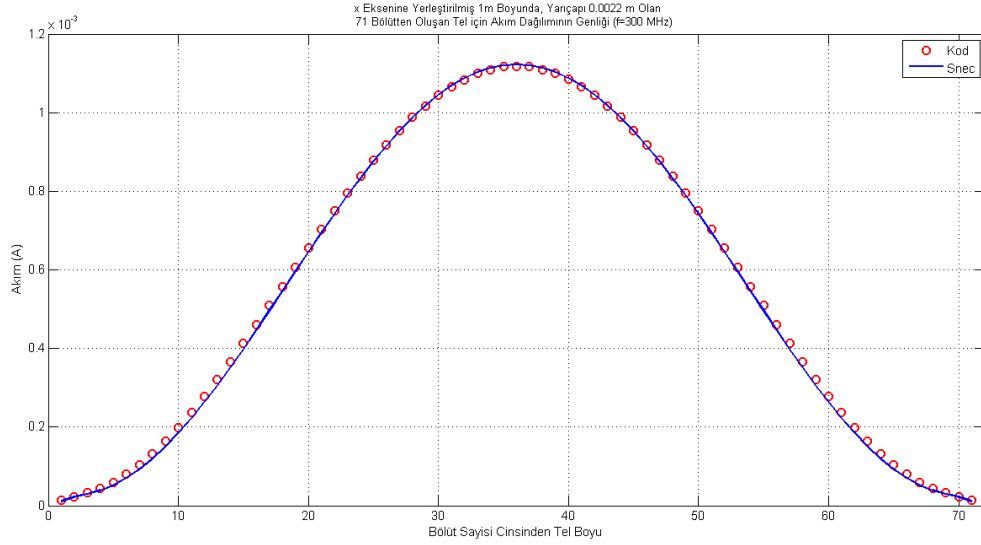
Şekil 7. $\theta=15^\circ$ ve $\Phi=90^\circ$ için analitik-asimptotik yöntemlerin bağlı hataları

3.2. Bir Boyutlu Problem: Bir İnce Tel Üzerindeki Akım Dağılımı

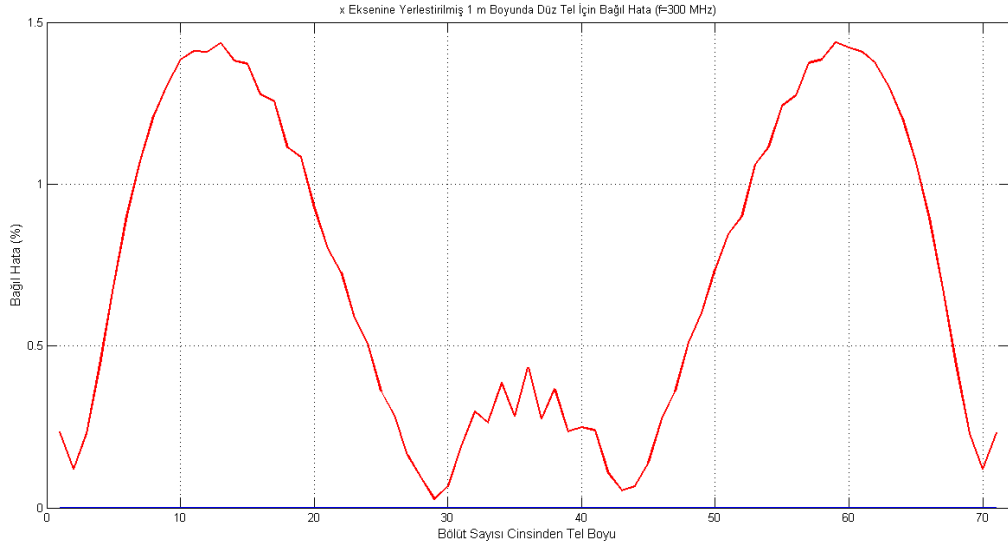
Şekil 8'de x eksenine yerleştirilmiş 1 m uzunluğunda ve 71 bölüttten oluşan tel yapıdan saçılma problemi incelenmiştir. Teli aydınlatan elektrik alanının frekansı 300 MHz'dir. Düzlemsel dalganın bu tel üzerinde indüklediği akım dağılımının genliği Şekil 9'da ve bağlı hata ise Şekil 10'da görülmektedir. Dalga boyu cinsinden ise $\lambda = 1$ [m], $l = \lambda/71$, $a = \lambda/70$ ' dir.



Şekil 8. +x eksenine yerleştirilmiş 1m uzunluğunda 71 bölütle oluşan ince tel

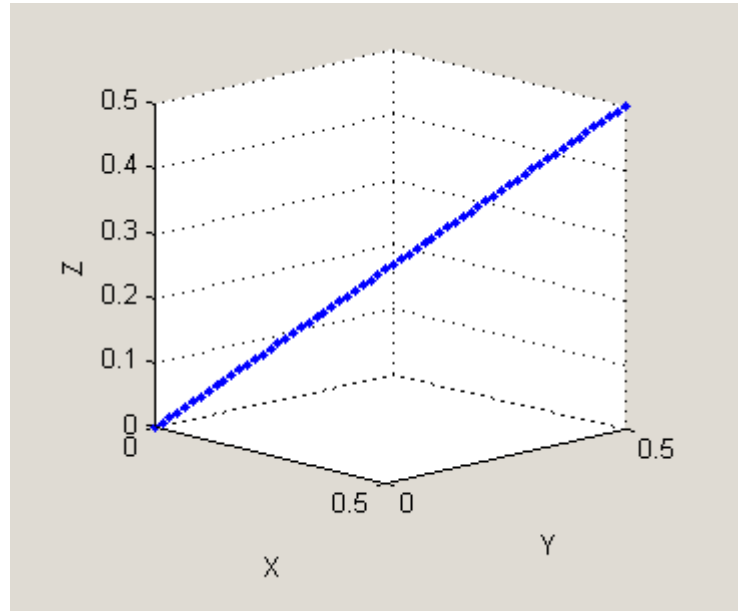


Şekil 9. +x eksenine yerleştirilmiş 1m uzunluğunda tel üzerindeki akım dağılımının genliği

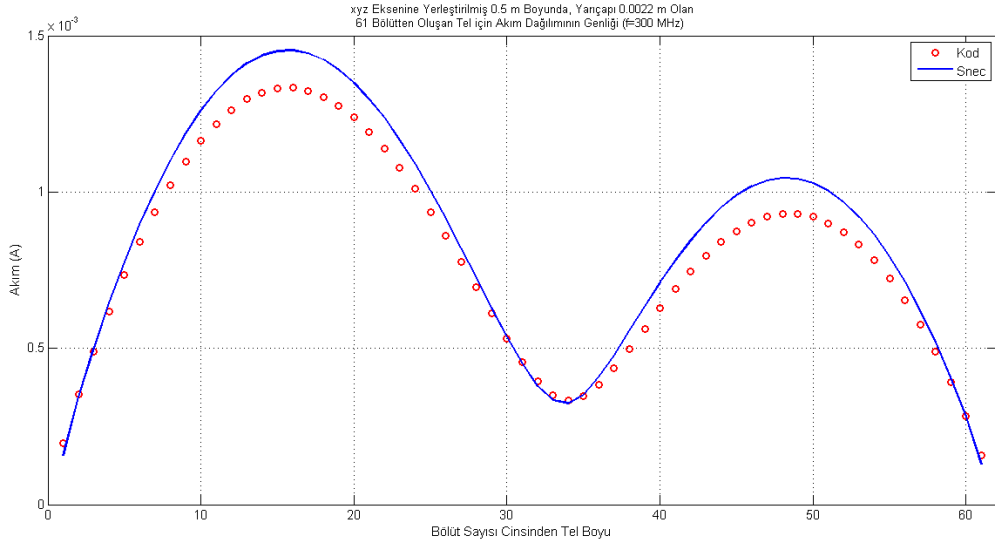


Şekil 10. +x eksenine yerleştirilmiş 1 m uzunluğundaki tel için bağıl hata

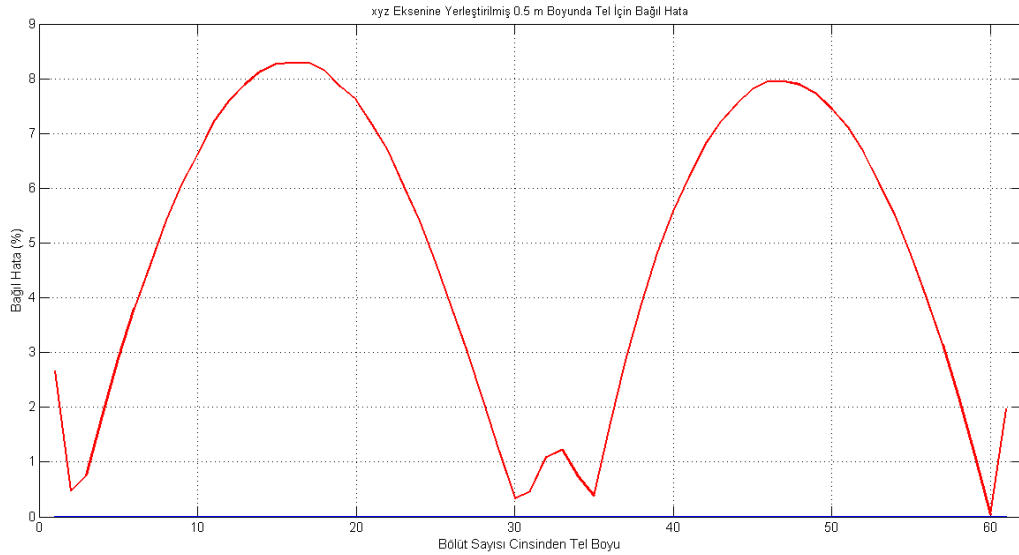
Şekil 11'de (0,0,0) ve (0.5,0.5,0.5) noktaları boyunca yerleşmiş 61 bölüttten oluşan tel verilmektedir. Eğri teli aydınlatan elektrik alanının frekansı 300 MHz'dir. Dalga boyu cinsinden ise, $\lambda = 1 [m]$, $l = \lambda/61$, $a = \lambda/70$ ' dir. Düzlemsel dalganın bu tel üzerinde indüklediği akım dağılımının genliği Şekil 12'de ve bağıl hata ise Şekil 13'ee görülmektedir.



Şekil 11. xyz boyunca yerleştirilmiş 0.5 m uzunluğunda 61 bölüttten oluşan düz tel



Şekil 12. 0.5 m uzunluğunda eğri tel üzerindeki akım dağılımının genliği

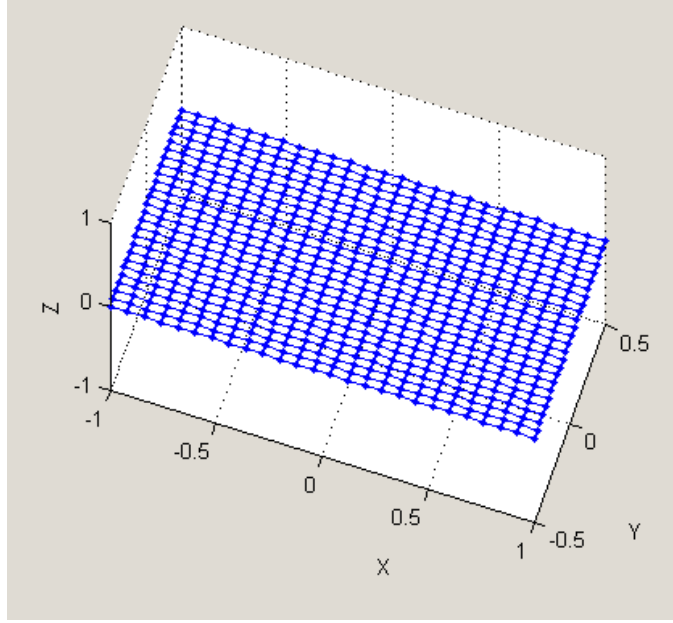


Şekil 13. 0.5 m uzunluğundaki eğri tel için bağlı hata

3.3. İki Boyutlu Problem : Bir Plaka Üzerindeki Akım Dağılımı ve Saçılan Alanlar

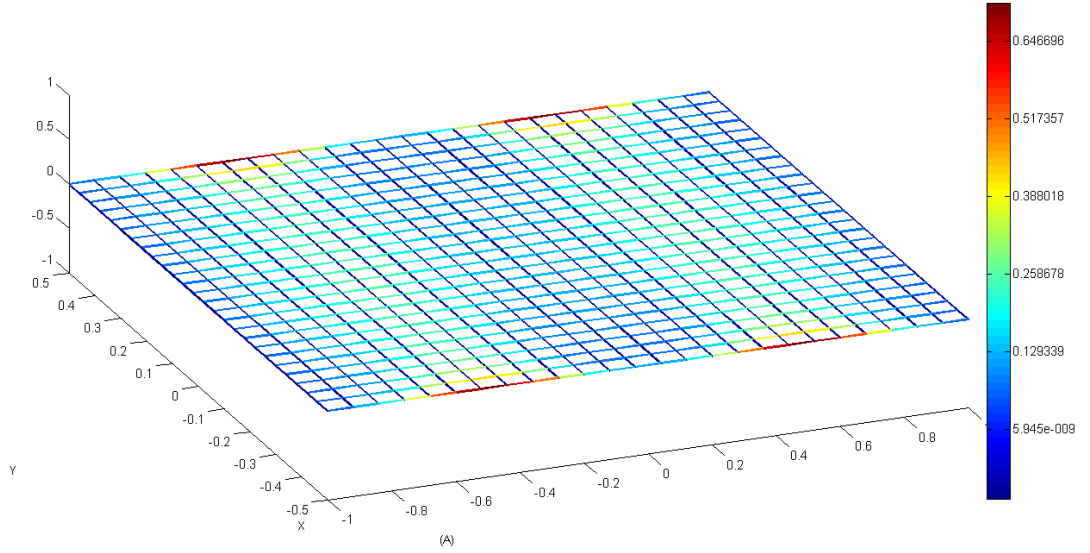
Şekil 14'te xy düzlemine yerleştirilmiş 2x1 m boyutlarında 1300 bölütten oluşan plaka verilmiştir. Plakayı aydınlatan elektrik alanın frekansı 300 MHz'dir. Dalga boyu cinsinden $l = \lambda/61$ 'dir. Şekil 15'de plaka üzerindeki akım dağılımları, Şekil 18'de

saçılan uzak alan ve Şekil 19'de saçılan uzak alana ait bağıl hata grafikleri görülmektedir.

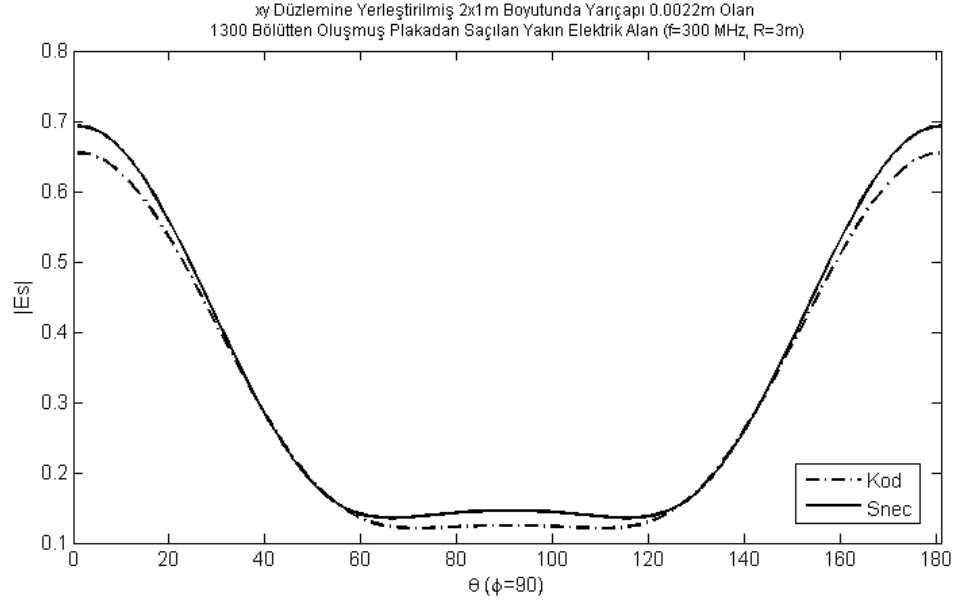


Şekil 14. Oxy düzlemine yerleştirilmiş plaka

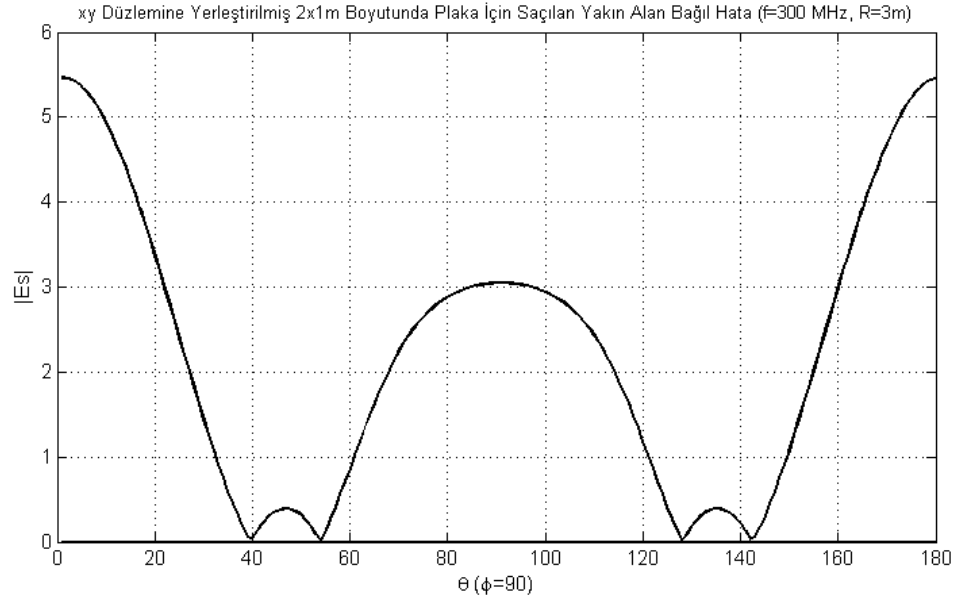
Oxy Düzlemine Yerleştirilmiş 2x1 m Boyutlarında, Bölüt Yarıçapı 0.0022 m Olan
1300 Bölütten Oluşan Plaka ($f=300$ MHz)



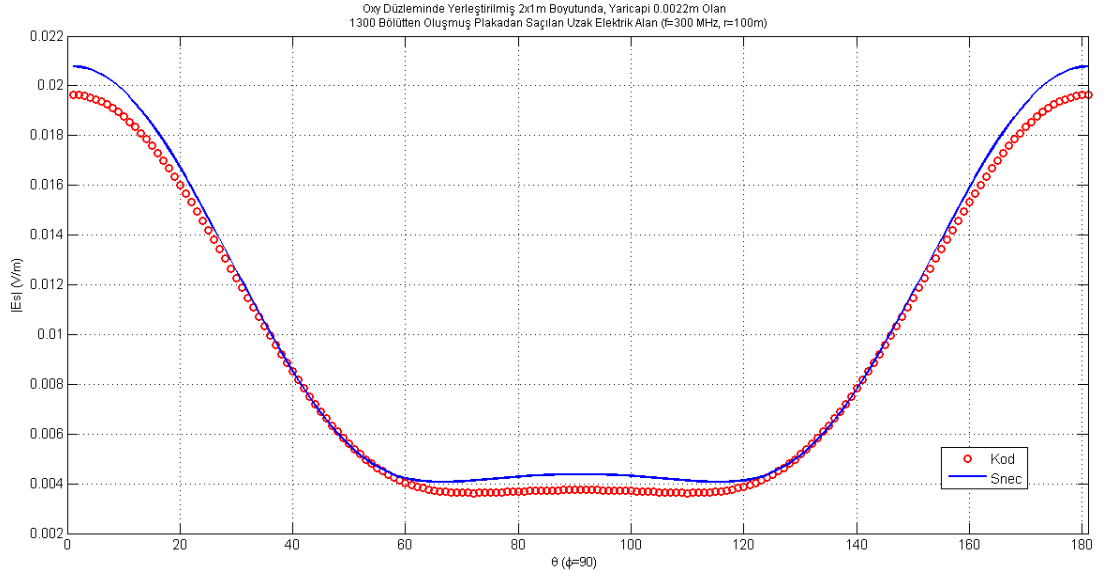
Şekil 15. Oxy düzlemine yerleştirilmiş plakanın üzerindeki akım dağılımları



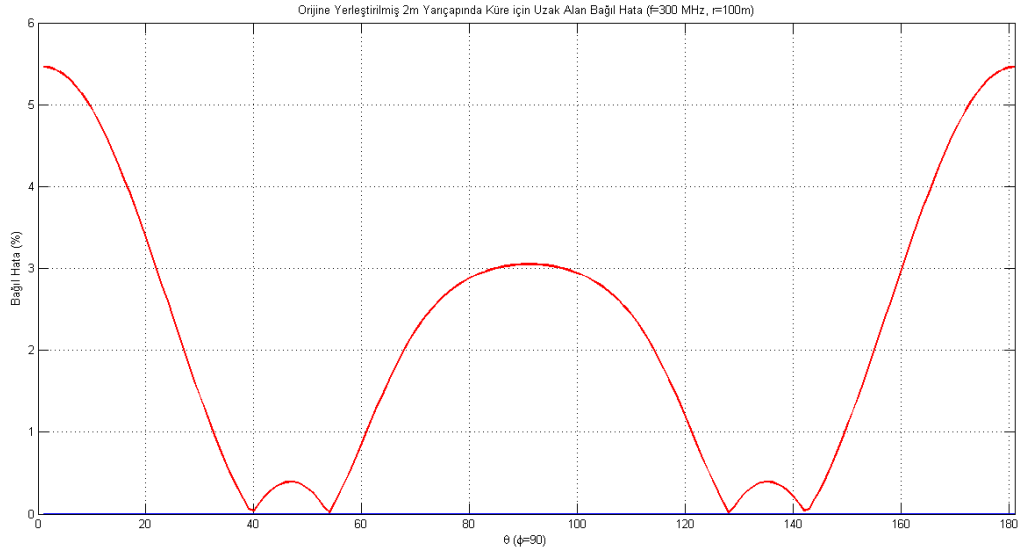
Şekil 16. Oxy düzlemine yerleştirilmiş plakadan saçılan elektrik yakın alan



Şekil 17. Oxy düzlemine yerleştirilmiş plakadan saçılan elektrik yakın alan için bağıl hata



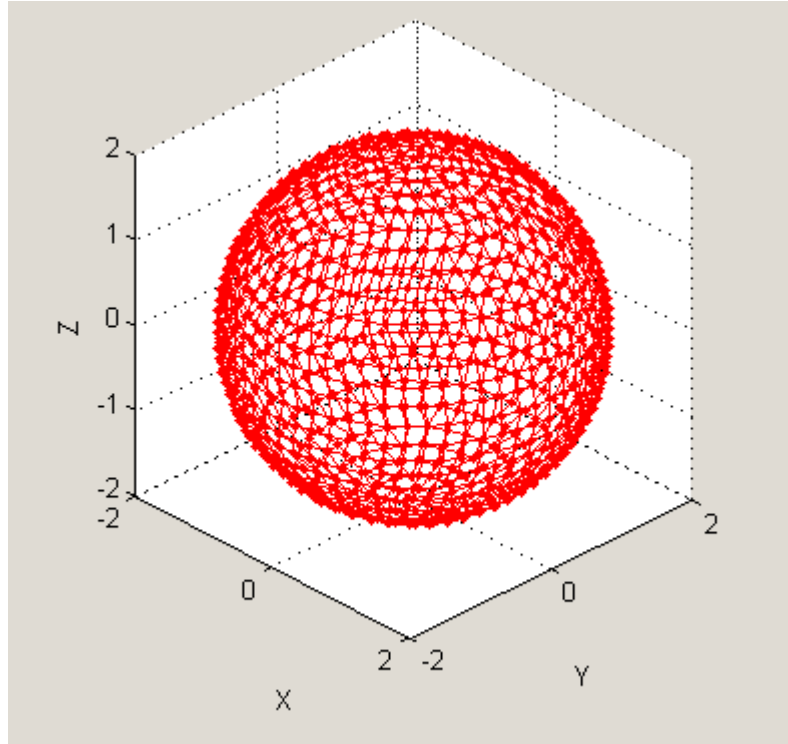
Şekil 18. *Oxy* düzlemine yerleştirilmiş plakadan saçılan elektrik uzak alan



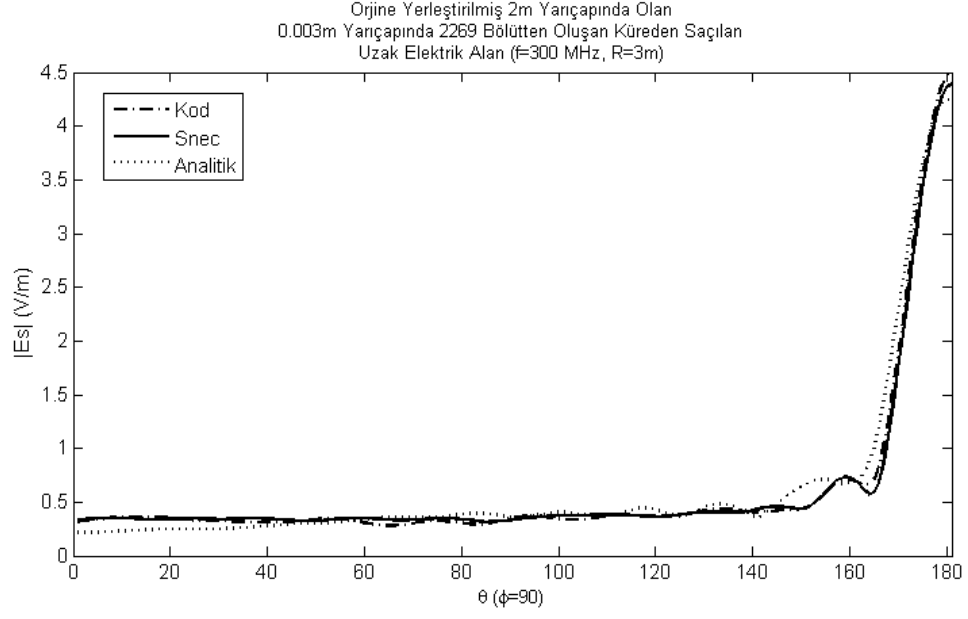
Şekil 19. *Oxy* doğrultusuna yerleştirilmiş plakadan saçılan uzak alan için bağlı hata

3.4. Üç Boyutlu Problem : Bir Küreden Saçılan Alanlar

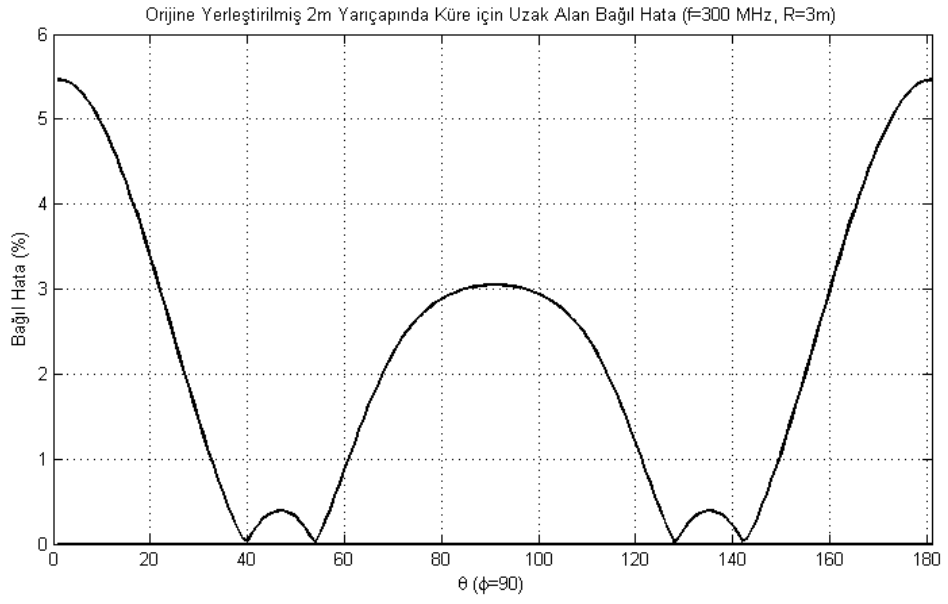
Şekil 20'de orijine yerleşmiş 2 m yarıçapındaki ve 2269 bölüttten oluşan küre verilmiştir. 100 m mesafedeki alan ifadeleri incelenmiştir. Şekil 23'da 100 m mesafede saçılan elektrik alan ve Şekil 24'de saçılan elektrik alana ait bağıl hata görülmektedir.



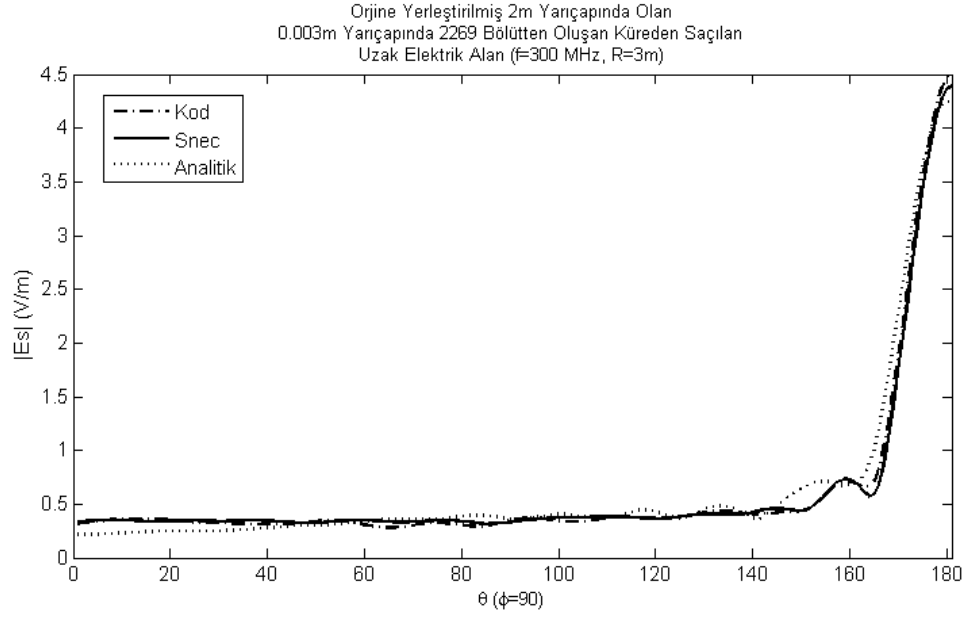
Şekil 20. Orijine yerleştirilmiş 2m yarıçapında 2269 bölüttten oluşan küre



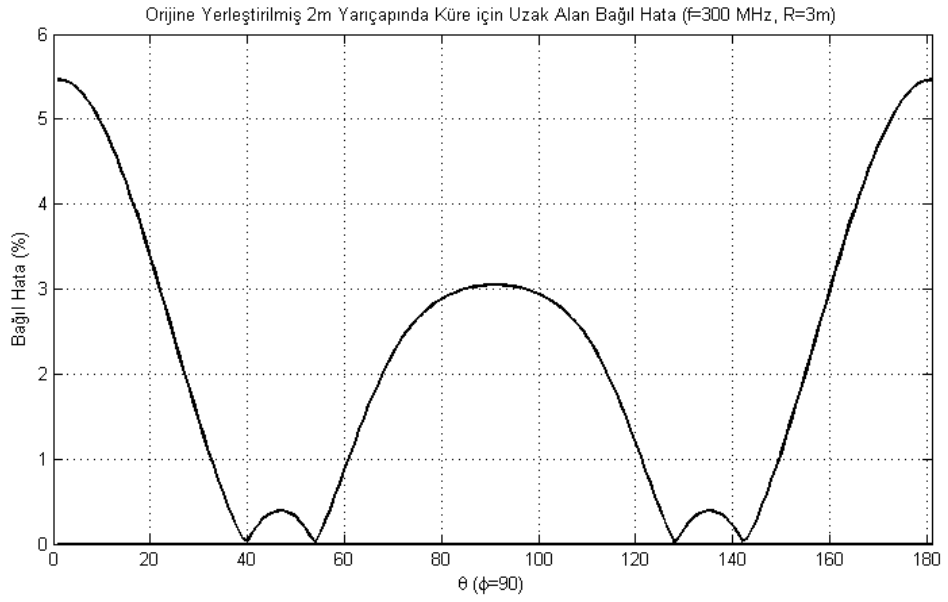
Şekil 21



Şekil 22. Orjine yerleştirilmiş 2m yarıçaplı küreden saçılan yakın elektrik alan için bağıl hata



Şekil 23. Orijine yerleştirilmiş 2m yarıçaplı küreden saçılan uzak elektrik alan



Şekil 24. Orijine yerleştirilmiş 2m yarıçaplı küreden saçılan uzak elektrik alan için bağlı hata

4. SONUÇ

Bu çalışmada analitik ve sayısal teknikler kullanılarak boş uzayda konuşlanmış metalik cisimlere ilişkin rezonans bölgesinde elektromanyetik ışıma ve saçılma mekanizması incelenmiştir. Metalik cisimler, ince tel yaklaşığı altında tel ızgara tekniği ile modellenmiş olup, ilgili elektrik alan integral denklemi darbe baz fonksiyonları ve Dirac delta ağırlaştırma fonksiyonları kullanılarak Moment Yöntemi ile çözülmüştür.

Elde edilen sonuçlar SNEC™ ile kıyaslandığında, rezonans bölgesinde uygun bölüt boyu ve yarıçapında uyumlu sonuçlar vermiştir.

Elde edilen bağıl hata grafiklerine bakıldığında akademik açıdan kabul edilebilir sınırlar içerisinde kaldığı görülmektedir.

Darbe yerine sinüzoidal baz fonksiyonlarının kullanılması ile bu farklılıklar büyük ölçüde azalacak, integrallerin yakınsama hızı artacak ve matris boyutları küçülecektir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar boş uzayda her türlü cismin metalik tellerle modellenip saçılan alanlarının hesabına olanak vermektedirler. Yazılımın analitik olarak geliştirilmiş olması ileriye yönelik olarak hem fiziksel hem de geometrik yönlerden önemli ölçüde ilerlemeler sağlayacaktır. Bunlardan başlıcaları arasında ince tel yerine daha gelişmiş kalın tel veya parça yüzey modellerinin kullanılması ve boş uzay yerine boş olmayan ortamlara ilişkin Green fonksiyonları ile ortamın toplam saçılan alana etkisinin de analize dahil edilmesi sayılabilir.

KAYNAKLAR

RICHMOND, J.H. 1966. A Wire-Grid Model for Scattering by Conducting Bodies, IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol.AP-14, No.6,782-786.

CHAO, H.H., B.J. STRAIT. 1970. Computer Programs for Radiation and Scattering by Arbitrary Configuration of Bent Wires. Interaction Notes, Note 191.

MAUTZ, J.R., R.F. HARRINGTON. 1971. Computer Programs for Characteristic Modes of Wire Objects. Interaction Notes, Note 11.

KUO, D.C, B.J. STRAIT. 1972. Improved Programs for Analysis of Radiation and Scattering by Configurations of Arbitrarily Bent Thin Wires. Interaction Notes, Note 15.

RICHMOND, J.H. 1973. An Integral-Equation Solution for TE Radiation and Scattering from Conducting Cylinders. Interaction Notes, Note 201.

TAYLOR, C.D., K.T. CHEN, T.T. CROW. 1974. An Improvement on Wire Modeling for Determining the EMP Interaction with Aircraft. Interaction Notes, Note 241.

MILLER, E. K., R.M. BEVENSEE, A.J. POGGIO, R. ADAMS, F.J. DEADRICK, J.A. LANDT. 1977. An Evaluation of Computer Programs Using Integral Equations for The Electromagnetic Analysis of Thin Wire Structures. Interaction Notes, Note 177.

KING, R.W.P., T.T. WU. 1974. Analysis of Crossed Wires in A Plane-Wave Field. Interaction Notes, Note 216.

G. J. BURKE, A. J. POGGIO. 1977. Numerical electromagnetic code (NEC), Part I, Part II, Part III. C. E. Baum Ed., NM. Interaction Notes, Note 363.

NEC-WIN Softwares, Nittany Scientific <http://www.nittany-scientific.com/> , Erişim tarihi: 13.08.2009.

SUPERNEC – Poynting Group, <http://www.supernec.com/> , Erişim tarihi: 13.08.2009.

NEC-4. Lawrence Livermore Ulusal Laboratuvarı, CA, USA.

BALANIS, C.A. 1989. Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley & Sons Inc., United States of America, 0-471-62194-3

HARRINGTON, R.F. 1967, Matrix Methods for Field Problems, IEEE, Vol. 55, No. 2

BRETONES, A.R, S.A. EXTREMA, R.F. MARTIN. 1991. About the Study in the Time Domain of Junctions between Thin Wires. Antennas and Propagation ICAP91,Vol.2 ,596-599

KING, R.W.P, V.W.H. CHANG. 1970. Coupled Linear Antennas with Skew Orientation. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, 694-696

CROW, T., T. SHUMPERT . Electromagnetic Scattering from Configurations of Thin Wires with Multiple Junctions. C. E. Baum Ed., NM. Interaction Notes, Note 90.

HARRINGTON, R.F. 1968. Field Computation by Moment Methods, Macmillian Series in Electrical Science, New York

WILTON, D.R., S. GOVIND. 1977. Incorporation of Edge Conditions in MoM Solutions. Transaction on Antennas and Propagation, Vol.25, 845-850

HARRINGTON, R.F. 2001. Time-Harmonic Electromagnetic Fields, IEEE Pres Series.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ F-2007/37 No.lu ARAŞTIRMA FONU PROJESİ. Bir Kayıplı Dielektrik Yarı-Uzay Üzerinde Konuşlanmış Metalik Tel Izgara Yapılarına İlişkin Işıma ve Saçılma Problemleri. Yönetici: Prof. Dr. Burak Polat.

- RICHMOND, J.H. 1966. A Wire-Grid Model for Scattering by Conducting Bodies. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol.AP-14, No.6,782-786
- KING, H.E. 1957. Mutual impedance of unequal length antennas in echelon, IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol.AP-5, 306-313
- KING, R.W.P.1995. The Complete Electromagnetic Field of a Three-Phase Transmission Line Over the Earth and its Interaction with the Human Body. J. Appl. Phys., Vol.78,No.2,668-683
- KING, R.W.P. 1995. The Electromagnetic Field of a Horizontal Electric Dipole in the Presence of a Three-Layered Region. J. Appl. Phys., Vol. 69, No.12, 7987-7995
- CHAO, H.H., B.J. STRAIT. 1970. Computer Programs for Radiation and Scattering by Arbitrary Configuration of Bent Wires, Interaction Notes, Note 191
- MITTRA, R., W.L. KO. 1975. A finite Difference Approach to the Wire Junction Problem. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, 435-438
- BUTLER, C.M. 1972. Currents Induced on a Pair of Skew Crossed Wires. IEEE Transaction on Antennas and Propagation,731-736
- TAYLOR, C.D., S.M. LIN, H.V. MCADAMS. 1970. Scattering From Crossed Wires, IEEE Transaction on Antennas and Propagation,133-136
- NEWMAN, E.H. 1988. Simple Examples of the Method of Moments in Electromagnetics, IEEE Transaction on Education, Vol.31, No.3, 193-199
- RICHMOND, J.H. 1990. Radiation and Scattering by Thin-Wire Structures in the Complex Frequency Domain, OSU Research Foundation Report RF 2902-10
- KING, R.W.P., V.W.H., CHANG. 1970. Coupled Linear Antennas with Skew Orientation, IEEE Transaction on Antennas and Propagation, 694-696
- MOORE, J., R. PIZER. 1984. Moment Methods in Electromagnetics

WANG, J. J. H. 1991. Generalized Moment Method Solution in Electromagnetics: Formulation and Computer Solution of Integral Equations. Wiley & Sons Inc., New York, 0471514438

SCHELKUNOFF, S.A. 1939. On Diffraction and Radiation of Electromagnetic Waves, Physical Review, Vol. 56.

EKLER

Ek-A: Karşılık İlkesi

Karşılık ilkesi en basit anlamda, bir sistemin bir kaynağa olan cevabının, kaynak ve gözlem (ölçüm) noktası kendi aralarında yer değiştirdiğinde, değişmemesidir.

Lineer ve izotropik bir ortamda \vec{J}^a, ρ^a ve \vec{J}^b, ρ^b biçiminde tanımlanan eş frekanslı iki tip kaynağın ürettikleri alanlar \vec{E}^a, \vec{B}^a ve \vec{E}^b, \vec{B}^b olsun. Söz konusu kaynaklar ve alanlar için fazör Maxwell denklemleri

$$\text{rot}\vec{E}^a = i\omega\mu_0\vec{H}^a \quad (\text{A.1})$$

$$\text{rot}\vec{H}^a = \vec{J}^a - i\omega\varepsilon(\vec{r})\vec{E}^a \quad (\text{A.2})$$

$$\text{rot}\vec{E}^b = i\omega\mu_0\vec{H}^b \quad (\text{A.3})$$

$$\text{rot}\vec{H}^b = \vec{J}^b - i\omega\varepsilon(\vec{r})\vec{E}^b \quad (\text{A.4})$$

biçiminde yazılabilir. Eğer (A.1) eşitliği \vec{H}^b ile, (A.2) eşitliği \vec{E}^b ile, (A.3) eşitliği \vec{H}^a ile ve (A.4) eşitliği \vec{E}^a ile noktasal çarpılırsa

$$\vec{H}^b \cdot \text{rot}\vec{E}^a = i\omega\mu_0\vec{H}^b \cdot \vec{H}^a \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{E}^a \cdot \text{rot}\vec{H}^b = \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - i\omega\varepsilon(\vec{r})\vec{E}^a \cdot \vec{E}^b \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{H}^a \cdot \text{rot}\vec{E}^b = i\omega\mu_0\vec{H}^a \cdot \vec{H}^b \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{E}^b \cdot \text{rot}\vec{H}^a = \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - i\omega\varepsilon(\vec{r})\vec{E}^b \cdot \vec{E}^a \quad (\text{A.8})$$

ifadeleri elde edilir. A ve B herhangi iki vektör olmak üzere

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot}\vec{B} \quad (\text{A.9})$$

vektör eşitliğinden ve (A.5)-(A.8) ifadelerinden faydalanarak

$$\text{div}(\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) = \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b \quad (\text{A.10})$$

ifadesi yazılabilir.

Eğer ortamda kaynak yoksa ($\vec{J}^a = \vec{J}^b = 0$) (A.10) ifadesi aşağıdaki biçimi alır

$$\text{div}(\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) = 0 \quad (\text{A.11})$$

(A.11) ifadesine *Lorentz karşıtlık teoremi* denir.

Söz konusu kaynakları içinde barındıran bir V hacmi ve bu hacmi saran kapalı bir S yüzeyi olsun. V boyunca (A.10) ifadesinin her iki tarafının integrali alındığında

$$\int_V \text{div}(\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) dV = \int_V (\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b) dV \quad (\text{A.12})$$

ifadesi elde edilir ve bu ifade diverjans teoremi gereğince

$$\oint_S (\vec{E}^a \times \vec{H}^b - \vec{E}^b \times \vec{H}^a) dS = \int_V (\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b) dV \quad (\text{A.13})$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer S kapalı yüzeyi sonsuz çaplı bir küre yüzeyi olarak düşünülürse, V hacmi içerisinde kalan kaynakların oluşturdukları alanlar düzlemsel elektromanyetik dalgalar olacaktır. Buna göre elektrik ve manyetik alanlar arasındaki ilişki

$$\vec{H}^a = \frac{1}{\eta} \vec{n} \times \vec{E}^a \quad (\text{A.14})$$

ve

$$\vec{H}^b = \frac{1}{\eta} \vec{n} \times \vec{E}^b \quad (\text{A.15})$$

olarak verilebilir. Burada \vec{n} düzlemsel elektromanyetik dalgaının yayılım yönü, η ise boşluğun karakteristik empedansıdır. Öyleyse (A.14) ve (A.15) eşitliklerinden faydalanarak

$$\vec{E}^a \times \vec{H}^b = \frac{1}{\eta} [\vec{E}^a \times (\vec{n} \times \vec{E}^b)] = \frac{1}{\eta} [(\vec{E}^a \cdot \vec{E}^b) \vec{n} - (\vec{E}^a \cdot \vec{n}) \vec{E}^b] \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{E}^b \times \vec{H}^a = \frac{1}{\eta} [\vec{E}^b \times (\vec{n} \times \vec{E}^a)] = \frac{1}{\eta} [(\vec{E}^b \cdot \vec{E}^a) \vec{n} - (\vec{E}^b \cdot \vec{n}) \vec{E}^a] \quad (\text{A.17})$$

yazılabilir. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ olduğundan ve noktasal çarpım özelliğinden

$$\int_V (\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b) dV = 0 \quad (\text{A.18})$$

yazılabilir ve

$$\int_V (\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b) dV = \int_V (\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a) dV \quad (\text{A.19})$$

olur.

$$\vec{J}_a = \hat{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \quad (\text{A.20})$$

$$\vec{J}_b = \hat{b} \delta(\vec{r} - \vec{r}_b) \quad (\text{A.21})$$

$$\vec{E}^a(\vec{r}) = \hat{x} g_x^a \delta(\vec{r}; \vec{r}_a) + \hat{y} g_y^a \delta(\vec{r}; \vec{r}_a) + \hat{z} g_z^a \delta(\vec{r}; \vec{r}_a) \quad (\text{A.22})$$

$$\vec{E}^b(\vec{r}) = \hat{x}g_x^b\delta(\vec{r};\vec{r}_a) + \hat{y}g_y^b\delta(\vec{r};\vec{r}_a) + \hat{z}g_z^b\delta(\vec{r};\vec{r}_a) \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{b} \cdot \vec{E}^a(\vec{r}) = \hat{b} \cdot [\hat{x}g_x^a\delta(\vec{r};\vec{r}_a) + \hat{y}g_y^a\delta(\vec{r};\vec{r}_a) + \hat{z}g_z^a\delta(\vec{r};\vec{r}_a)] \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{a} \cdot \vec{E}^b(\vec{r}) = \hat{a} \cdot [\hat{x}g_x^b\delta(\vec{r};\vec{r}_a) + \hat{y}g_y^b\delta(\vec{r};\vec{r}_a) + \hat{z}g_z^b\delta(\vec{r};\vec{r}_a)] \quad (\text{A.25})$$

Özel olarak,

$\hat{a} = \hat{x}$, $\hat{b} = \hat{y}$ olsun. Buradan hemen

$$g_y^x(\vec{r}_b; \vec{r}_a) = g_x^y(\vec{r}_b; \vec{r}_a) \quad (\text{A.26})$$

eşitliği görülür. Öte yandan argümanlar yönünden

$$(\vec{r}_b; \vec{r}_a) = (\vec{r}_a; \vec{r}_b) = (|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) \quad (\text{A.27})$$

özelliği söz konusu olduğundan

$$g_y^x(|\vec{r}_b - \vec{r}_a|) = g_x^y(|\vec{r}_b - \vec{r}_a|) \Rightarrow g_y^x = g_x^y \quad (\text{A.28})$$

sonucu elde edilir. Empedans matrisinin simetri özelliğini göstermek için ise A ve B kaynakları olarak ince tel elemanları alalım. Kaynaklar,

$$\vec{J}^a(\vec{r}^a) = \hat{z}J_z(\vec{r}^a) = \hat{z}I_a \frac{\delta(\rho^a - a)}{2\pi a} \left[U\left(z^a + \frac{l_a}{2}\right) - U\left(z^a - \frac{l_a}{2}\right) \right] \quad (\text{A.29})$$

$$\vec{J}^b(\vec{r}^b) = \hat{z}J_z(\vec{r}^b) = \hat{z}I_b \frac{\delta(\rho^b - a)}{2\pi a} \left[U\left(z^b + \frac{l}{2}\right) - U\left(z^b - \frac{l}{2}\right) \right] \quad (\text{A.30})$$

ince tellerin eksenleri ile çakışık koordinat sistemlerinde tanımlanırsa, (1.58) ifadesi kullanılarak \vec{J}^a nin oluşturduğu elektrik alan

$$\vec{E}^a(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} I_a \int_{-l_a/2}^{l_a/2} \left\{ \hat{z}f_1(R^a) + \vec{R}^a (\hat{z} \cdot \vec{R}^a) f_2(R^a) \right\} g(R^a) dz^a \quad (\text{A.31})$$

ve \vec{J}^b nin oluşturduğu elektrik alan,

$$\vec{E}^b(\vec{r}) = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} I_b \int_{-l_b/2}^{l_b/2} \left\{ \hat{z}f_1(R^b) + \vec{R}^b (\hat{z} \cdot \vec{R}^b) f_2(R^b) \right\} g(R^b) dz^b \quad (\text{A.32})$$

şeklinde elde edilir.

$$\int_{V^a} \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a dV^a = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} I_a I_b \int_{-l_a/2}^{l_a/2} \int_{-l_b/2}^{l_b/2} \left\{ f_1(R^{ba}) + |\hat{z} \cdot \vec{R}^{ba}|^2 f_2(R^{ba}) \right\} g(R^{ba}) dz^b dz^a \quad (\text{A.33})$$

benzer şekilde,

$$\int_{V^b} \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b dV^b = \frac{ic\mu_0}{4\pi k} I_a I_b \int_{-l_b/2}^{l_b/2} \int_{-l_a/2}^{l_a/2} \left\{ f_1(R^{ab}) + |\hat{z} \cdot \vec{R}^{ab}|^2 f_2(R^{ab}) \right\} g(R^{ab}) dz^a dz^b \quad (\text{A.34})$$

elde edilir. Bu ifadelerde \vec{R}^a ve \vec{R}^b , sırasıyla A ve B kaynaklarının üzerindeki herhangi bir noktadan uzayda herhangi bir noktaya uzanım vektörünü verir iken \vec{R}^{ab} ise A kaynağı üzerindeki herhangi bir noktadan B kaynağı üzerindeki herhangi bir noktaya uzanım vektörünü verir ve

$$\vec{R}^{ab} = -\vec{R}^{ba} \quad (\text{A.35})$$

ilişkisi mevcuttur. Buradan

$$|\hat{z} \cdot \vec{R}^{ab}| = |\hat{z} \cdot \vec{R}^{ba}| \quad (\text{A.36})$$

Bağıntısı hemen görülebileceği için (A.33) ve (A.34) integrallerinin birbirine eşit olduğu ve dolayısıyla da karşılık ilkesinin bu özel örnek ile doğrulandığı hemen görülebilir.

Ek-B: İletken Bir Küreden Saçılma: Analitik Çözüm

İletken olmayan ve içerisinde yük barındırmayan boş uzayda fazör Maxwell denklemleri

$$\text{rot}\vec{E} - i\omega\mu_0\vec{H} = 0, \quad \text{div}\vec{D} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\text{rot}\vec{H} + i\omega\varepsilon_0\vec{E} = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{B.2})$$

ile verilirler. Buna göre vektör eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{D} &= 0 \\ \text{div}(-\text{rot}\vec{F}) &= 0 \\ \vec{D} &= -\text{rot}\vec{F} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada \vec{F} herhangi bir vektördür. Buna göre \vec{F} 'nin etkisiyle oluşan elektrik alan

$$\vec{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon_0}\text{rot}\vec{F} \quad (\text{B.3})$$

eşitliği ile verilir. Yukarıda verilen fazör Maxwell denklemlerinden faydalanarak

$$\vec{H}_F = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0}\text{rotrot}\vec{F} \quad (\text{B.4})$$

ve

$$\vec{H}_F = i\omega\vec{F} - \text{grad}\phi_m \quad (\text{B.5})$$

elde edilir. Burada ϕ_m herhangi bir skalerdir. (B.4) ve (B.5) ifadelerinden faydalanarak

$$\text{rotrot}\vec{F} - \omega^2\varepsilon_0\mu_0\vec{F} = i\omega\varepsilon_0\mu_0\text{grad}\phi_m \quad (\text{B.6})$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde vektör eşitliklerinden faydalanarak

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{B} &= 0 \\ \text{div}(\text{rot}\vec{A}) &= 0 \\ \vec{B} &= \text{rot}\vec{A} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada \vec{A} herhangi bir vektördür. \vec{A} 'nın etkisiyle oluşan manyetik alan

$$\vec{H}_A = \frac{1}{\mu_0}\text{rot}\vec{A} \quad (\text{B.7})$$

eşitliği ile verilir. Yukarıda verilen fazör Maxwell denklemlerinden faydalanarak

$$\vec{E}_A = -\frac{1}{i\omega\mu_0\varepsilon_0} \text{rotrot}\vec{A} \quad (\text{B.8})$$

ve

$$\vec{E}_A = i\omega\vec{A} - \text{grad}\phi_e \quad (\text{B.9})$$

elde edilir. Burada ϕ_e herhangi bir skalerdir. (B.8) ve (B.9) ifadelerinden faydalanarak

$$\text{rotrot}\vec{A} - \omega^2\varepsilon_0\mu_0\vec{A} = i\omega\mu_0\varepsilon_0\text{grad}\phi_e \quad (\text{B.10})$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda \vec{A} ve \vec{F} vektörlerinin etkisiyle oluşan toplam elektrik ve manyetik alanlar

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon_0} \text{rot}\vec{F} - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \text{rotrot}\vec{A} \quad (\text{B.11})$$

$$\vec{H} = \vec{H}_A + \vec{H}_F = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \text{rotrot}\vec{F} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot}\vec{A} \quad (\text{B.12})$$

ifadeleri kullanılarak yazılırlar.

Boş uzayda bulunan iletken bir küreye gelen ve saçılan alanlar TE^r ve TM^r dalgalarının süperpozisyonu olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} TE^r; \vec{A} = 0, \vec{F} = \hat{r}F_r(r, \theta, \phi) \\ TM^r; \vec{F} = 0, \vec{A} = \hat{r}A_r(r, \theta, \phi) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

TE^r için alan bileşenleri yazılırsa

$$\vec{E} = \vec{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon_0} \text{rot}\vec{F} \quad (\text{B.14})$$

$$\vec{E}_F = E_{Fr}\hat{r} + E_{F\theta}\hat{\theta} + E_{F\phi}\hat{\phi} \quad (\text{B.15})$$

$$E_{Fr} = 0$$

$$E_{F\theta} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \quad (\text{B.16})$$

$$E_{F\phi} = \frac{1}{r\varepsilon_0} \frac{\partial F_r}{\partial \theta}$$

$$\vec{H}_F = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \text{rotrot}\vec{F} \quad (\text{B.17})$$

$$\vec{H}_F = H_{Fr}\hat{r} + \vec{H}_{F\theta}\hat{\theta} + \vec{H}_{F\phi}\hat{\phi} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned}
H_{Fr} &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) F_r \\
H_{F\theta} &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta} \\
H_{F\phi} &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \phi}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

elde edilir. Benzer işlemleri TM' için uygularsak

$$\begin{aligned}
E_{Ar} &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) A_r \\
E_{A\theta} &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \\
E_{A\phi} &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
H_{Ar} &= 0 \\
H_{A\theta} &= \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \\
H_{A\phi} &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

ifadeleri elde edilir. Buna göre elektrik ve manyetik alanların radyal bileşenleri

$$E_r = E_{Ar} + E_{Fr} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) A_r \tag{B.22}$$

$$H_r = H_{Ar} + H_{Fr} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) F_r \tag{B.23}$$

olarak bulunur.

Boş uzayda +z yönünde hareket eden ve elektrik alan bileşeni +x yönünde olan düzlemsel bir elektromanyetik dalga

$$\vec{E}^i = \hat{x}E_0 e^{ikz} = \hat{x}E_0 e^{ikr \cos \theta} \tag{B.24}$$

ifadesi ile verilebilir. Küresel koordinatlarda söz konusu dalganın bileşenleri

$$\begin{aligned}
E_r^i &= \sin \theta \cos \phi E_x^i + \sin \theta \sin \phi E_y^i + \cos \theta E_z^i \\
E_\theta^i &= \cos \theta \cos \phi E_x^i + \cos \theta \sin \phi E_y^i - \sin \theta E_z^i \\
E_\phi^i &= -\sin \phi E_x^i + \cos \phi E_y^i
\end{aligned} \tag{B.25}$$

şeklinde yazılabilir. Gelen düzlemsel elektromanyetik dalga için (B.24) göz önünde bulundurulduğunda (B.25) ifadesi

$$\begin{aligned}
E_r^i &= -\frac{E_0 \cos \phi}{ikr} \frac{\partial}{\partial \theta} e^{ikr \cos \theta} \\
E_\theta^i &= E_0 \cos \theta \cos \phi e^{ikr \cos \theta} \\
E_\phi^i &= -E_0 \sin \phi e^{ikr \cos \theta}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

şeklinde yazılabilir.

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta) \tag{B.27}$$

eşitliğinden faydalanarak gelen düzlemsel elektromanyetik dalga için alan bileşenleri tekrar yazılırsa

$$E_r^i = i \frac{E_0}{(kr)^2} \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} i^n (2n+1) \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \tag{B.28}$$

$$E_\theta^i = \frac{E_0}{kr} \cos \theta \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} i^n (2n+1) \hat{J}_n(kr) P_n(\cos \theta) \tag{B.29}$$

$$E_\phi^i = -\frac{E_0}{kr} \sin \phi \sum_{n=1}^{\infty} i^n (2n+1) \hat{J}_n(kr) P_n(\cos \theta) \tag{B.30}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada Bu eşitliklerde \hat{J}_n küresel Bessel fonksiyonu, $P_n^1(\cos \theta)$ birleşik Legendre polinomu ve $P_n(\cos \theta)$ Legendre polinomudur.

$$\begin{aligned}
\hat{J}_n(kr) &= kr j_n(kr) \\
P_n^0(\cos \theta) &= P_n(\cos \theta) \\
P_n^1(\cos \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) \\
P_0^1(\cos \theta) &= 0
\end{aligned} \tag{B.31}$$

olarak alınmıştır.

(B.22) ile (B.28) ifadeleri eşitlenirse

$$-\frac{1}{i\omega\epsilon_0\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) A_r^i = i \frac{E_0}{(kr)^2} \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} i^n (2n+1) \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \tag{B.32}$$

ve $A_r^i = E_0 \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} d_n \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta)$ olarak kabuledilirse. d_n bilinmeyen bir katsayıdır. Bu katsayı

$$\frac{d^2}{dr^2} \hat{J}_n(kr) + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \hat{J}_n(kr) = 0 \tag{B.33}$$

teoremine göre

$$E_r^i = \frac{i}{\omega\epsilon_0\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} A_r^i + k^2 A_r^i \right) = \frac{i}{\omega\epsilon_0\mu_0} \frac{n(n+1)}{r^2} A_r^i \tag{B.34}$$

$$E_r^i = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \frac{n(n+1)}{r^2} E_0 \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} d_n \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.35})$$

eşitliklerinden faydalanarak

$$d_n = \frac{1}{\omega} \frac{i^n (2n+1)}{n(n+1)} \quad (\text{B.36})$$

olarak hesaplanır. Buna göre gelen alanın radyal bileşeni için manyetik vektör potansiyeli

$$A_r^i = \frac{E_0}{\omega} \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.37})$$

$$a_n = \frac{i^n (2n+1)}{n(n+1)} \quad (\text{B.38})$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde, boş uzayda +z yönünde hareket eden ve manyetik alan bileşeni +y yönünde olan düzlemsel bir elektromanyetik dalga

$$\vec{H}^i = \hat{y} H_0 e^{ikz} = \hat{y} H_0 e^{ikr \cos \theta} \quad (\text{B.39})$$

İfadesi ile verilebilir. Küresel koordinatlarda söz konusu dalga'nın bileşenleri

$$\begin{aligned} H_r^i &= \sin \theta \cos \phi H_x^i + \sin \theta \sin \phi H_y^i + \cos \theta H_z^i \\ H_\theta^i &= \cos \theta \cos \phi H_x^i + \cos \theta \sin \phi H_y^i - \sin \theta H_z^i \\ H_\phi^i &= -\sin \phi H_x^i + \cos \phi H_y^i \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

olarak yazılabilir ve (B.27) ile (B.31) eşitliklerinden faydalanarak

$$H_r^i = i \frac{H_0 \sin \phi}{(kr)^2} \sum_{n=1}^{\infty} i^n (2n+1) \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.41})$$

$$H_\theta^i = \frac{H_0}{kr} \cos \theta \sin \phi \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \hat{J}_n(kr) P_n^0(\cos \theta) \quad (\text{B.42})$$

$$H_\phi^i = \frac{H_0}{kr} \cos \phi \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \hat{J}_n(kr) P_n^0(\cos \theta) \quad (\text{B.43})$$

eşitlikleri elde edilir. (B.23) ve (B.41) ifadeleri eşitlensin

$$\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) F_r = i \frac{H_0}{(kr)^2} \sin \phi \sum_{n=1}^{\infty} i^n (2n+1) \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.44})$$

ve $F_r = H_0 \sin \phi \sum_{n=1}^{\infty} d_n \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta)$ olarak önerilsin. d_n bilinmeyen bir katsayıdır. Bu katsayı (B.33) ifadesinden faydalanarak

$$H_r^i = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} F_r + k^2 F_r \right) = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \frac{n(n+1)}{r^2} F_r \quad (\text{B.45})$$

$$H_r^i = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \frac{n(n+1)}{r^2} H_0 \sin \phi \sum_{n=1}^{\infty} d_n \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.46})$$

eşitliklerinden faydalanarak

$$d_n = \frac{1}{\omega} \frac{i^n (2n+1)}{n(n+1)} \quad (\text{B.47})$$

olarak hesaplanır. Buna göre gelen alanın radyal bileşeni için elektrik vektör potansiyeli

$$F_r^i = \frac{E_0}{\omega \eta} \sin \phi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{J}_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.48})$$

$$a_n = \frac{i^n (2n+1)}{n(n+1)} \quad (\text{B.49})$$

olarak bulunur. $\eta = 120\pi$ 'dir ve boşluğun karakteristik empedansıdır.

Yukarıda çıkartılmış olan gelen alan ifadelerinde yer alan küresel Bessel fonksiyonlarının yerine $e^{-i\omega t}$ zaman bağımlılığı göz önünde bulundurularak birinci tip Hankel fonksiyonları kullanılarak saçılan alanın vektör potansiyelleri ile ifadesi elde edilir. Buna göre saçılan alana ait vektör potansiyelleri (B.37) ve (B.48) ifadelerinden faydalanarak

$$A_r^s = \frac{E_0}{\omega} \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{H}_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.50})$$

$$F_r^s = \frac{E_0}{\omega \eta} \sin \phi \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{H}_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.51})$$

olarak yazılır. b_n ve c_n katsayıları sınır koşulları yardımıyla hesaplanır. Gelen ve saçılan alanların oluşturduğu toplam alan için vektör potansiyel ifadeleri

$$A_r^t = A_r^i + A_r^s = \frac{E_0}{\omega} \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \hat{J}_n(kr) + b_n \hat{H}_n^{(1)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.52})$$

$$F_r^t = F_r^i + F_r^s = \frac{E_0}{\omega \eta} \sin \phi \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \hat{J}_n(kr) + c_n \hat{H}_n^{(1)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.53})$$

olarak yazılır. Burada $a_n = \frac{i^n (2n+1)}{n(n+1)}$ 'dır.

Toplam vektör potansiyelleri ve (B.16), (B.19), (B.20) ve (B.21) ifadelerinden toplam elektromanyetik alana ait bileşenler aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$E_r^t = -\frac{1}{i\omega \varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) A_r^t \quad (\text{B.54})$$

$$E_{\theta}^t = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0 r} \frac{\partial^2 A_r^t}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{\varepsilon_0 r \sin \theta} \frac{\partial F_r^t}{\partial \phi} \quad (\text{B.55})$$

$$E_{\phi}^t = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r^t}{\partial r \partial \phi} + \frac{1}{\varepsilon_0 r} \frac{\partial F_r^t}{\partial \theta} \quad (\text{B.56})$$

$$H_r^t = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) F_r^t \quad (\text{B.57})$$

$$H_{\theta}^t = \frac{1}{\mu_0 r \sin \theta} \frac{\partial A_r^t}{\partial \phi} - \frac{1}{i\omega r \varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial F_r^t}{\partial r \partial \theta} \quad (\text{B.58})$$

$$H_{\phi}^t = -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial A_r^t}{\partial \theta} - \frac{1}{i\omega \mu_0 \varepsilon_0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r^t}{\partial r \partial \phi} \quad (\text{B.59})$$

Mükemmel iletken küre yüzeyinde elektrik alan teğetsel bileşeni sıfır olacağından

$$E_{\theta}^t = 0, \quad r = a, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad (\text{B.60})$$

$$E_{\phi}^t = 0, \quad r = a, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad (\text{B.61})$$

olacaktır. Öyleyse (B.52)-(B.59) ifadelerinden faydalanarak

$$E_{\theta}^t = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0 r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left\{ \frac{E_0}{\omega} \cos \phi \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \hat{J}_n(kr) + b_n \hat{H}_n^{(1)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \right\} \\ - \frac{1}{\varepsilon_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{E_0}{\omega \eta} \sin \phi \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \hat{J}_n(kr) + c_n \hat{H}_n^{(1)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \right\} \quad (\text{B.62})$$

$$E_{\theta}^t = \frac{E_0 \cos \phi}{ir} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \hat{J}_n'(kr) + b_n \hat{H}_n^{(1)'}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \sin \theta \\ - \frac{E_0}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \hat{J}_n(kr) + c_n \hat{H}_n^{(1)}(kr) \right] P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.63})$$

elde edilir. (B.60) ifadesinde verilen sınır koşulları uygulandığında

$$a_n \hat{J}_n'(ka) + b_n \hat{H}_n^{(1)'}(ka) = 0 \quad (\text{B.64})$$

$$b_n = -i^n \frac{(2n+1) \hat{J}_n'(ka)}{n(n+1) \hat{H}_n^{(1)'}(ka)} \quad (\text{B.65})$$

$$a_n \hat{J}_n(ka) + c_n \hat{H}_n^{(1)}(ka) = 0 \quad (\text{B.66})$$

$$c_n = -i^n \frac{(2n+1) \hat{J}_n(ka)}{n(n+1) \hat{H}_n^{(1)}(ka)} \quad (\text{B.67})$$

olarak bulunur. Benzer olarak toplam elektrik alanın ϕ bileşeni içinde (B.56) ve (B.61) ifadeleri kullanılarak aynı sonuca ulaşılır.

Sınır koşulları yardımıyla hesaplanan b_n ve c_n katsayıları da artık bilindiğinden (B.50) ve (B.51) ifadelerinden faydalanarak saçılan alanlar yazılabilir. Buna göre

$$E_r^s = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) A_r^s \quad (\text{B.68})$$

ifadesinden

$$E_r^s = iE_0 \cos\phi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\hat{H}_n^{(1)'}(kr) + \hat{H}_n^{(1)}(kr) \right] P_n^1(\cos\theta) \quad (\text{B.69})$$

$$E_\theta^s = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0 r} \frac{\partial^2 A_r^s}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{\varepsilon_0 r \sin\theta} \frac{\partial F_r^s}{\partial \phi} \quad (\text{B.70})$$

ifadesinden

$$E_\theta^s = -\frac{E_0 \cos\phi}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ib_n \hat{H}_n^{(1)'}(kr) \sin\theta P_n^{1'}(\cos\theta) + c_n \hat{H}_n^{(1)}(kr) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin(\theta)} \right] \quad (\text{B.71})$$

$$E_\phi^s = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2 A_r^s}{\partial r \partial \phi} + \frac{1}{\varepsilon_0 r} \frac{\partial F_r^s}{\partial \theta} \quad (\text{B.72})$$

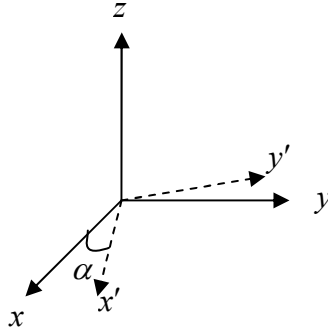
ifadesinden

$$E_\phi^s = -\frac{E_0 \sin\phi}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ib_n \hat{H}_n^{(1)'}(kr) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin(\theta)} + c_n \hat{H}_n^{(1)}(kr) \sin\theta P_n^{1'}(\cos\theta) \right] \quad (\text{B.73})$$

olarak bulunur. Burada $\hat{H}_n^{(1)'}(kr) = \frac{\partial \hat{H}_n^{(1)}(kr)}{\partial r}$, $\hat{H}_n^{(1)''}(kr) = \frac{\partial^2 \hat{H}_n^{(1)}(kr)}{\partial r^2}$ ve $P_n^{1'}(\cos\theta) = \frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial \theta}$, dir.

Ek-C: Euler Dönüşümleri

Oxy koordinat sistemi z eksenini etrafında α kadar döndürülsün. Bu durum Şekil 25 'te görülmektedir.



Şekil 25. z eksenini etrafında α kadar döndürülmüş eksenler

Bu durumda döndürülen eksenler üzerindeki bir nokta

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (\text{C.1})$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (\text{C.2})$$

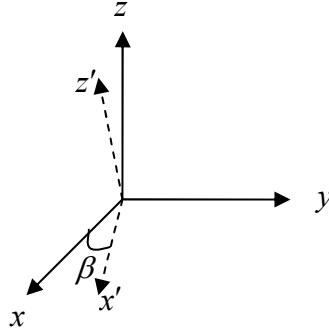
eşitlikleri ile ifade edilebilir.

Buna göre z eksenini etrafında α kadar dönme ile oluşan koordinat ile ilk koordinatlar arasında dönüşüm

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

matrisi ile sağlanır.

z eksenini etrafında döndürülmüş sistem bu kez de ilk durumu ile y eksenini etrafında β kadar döndürülsün. Bu durum Şekil 26 'de görülmektedir.



Şekil 26. y eksenini etrafında β kadar döndürülmüş eksenler

Bu durumda döndürülen eksenler üzerindeki bir nokta

$$x' = x \cos \beta - z \sin \beta \quad (\text{C.4})$$

$$z' = x \sin \beta + z \cos \beta \quad (\text{C.5})$$

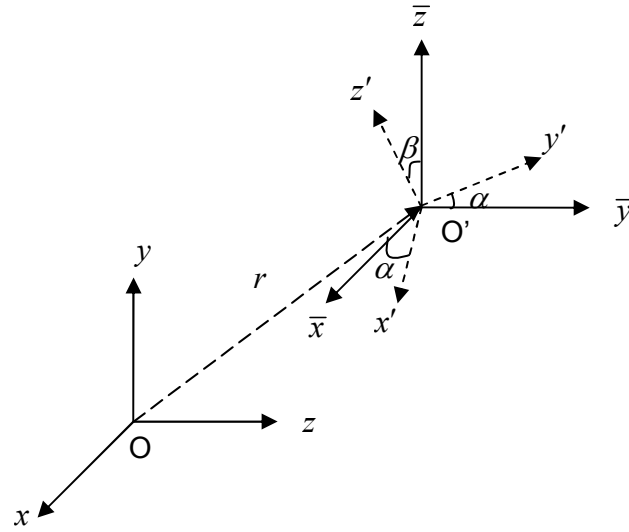
eşitlikleri ile ifade edilebilir.

Buna göre y eksenini etrafında β kadar dönme ile oluşan koordinat ile ilk koordinatlar arasında dönüşüm

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

matrisi ile sağlanır.

Ötelenmiş ve döndürülmüş bir koordinat sistemi ile bu koordinat sisteminin ilk hali olan referans koordinat sistemi Şekil 27 'de görülmektedir.



Şekil 27. Ötelenmiş ve döndürülmüş koordinat sistemi

Referans koordinatlarına göre r kadar ötelenmiş koordinat sistemini önce z ekseninde α kadar daha sonrada y ekseninde β kadar döndürürsek elde edilecek dönüşüm

$$T = R_{\bar{y}}(\beta)R_{\bar{z}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

matrisi ile sağlanır.

Buna göre ötelenmiş ve döndürülmüş (x', y', z') koordinatlarındaki bir nokta ötelenmiş koordinatların merkezi $O'(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ ve referans koordinat bileşenleri cinsinden

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x}_0 \\ y - \bar{y}_0 \\ z - \bar{z}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

eşitliği ile ifade edilebilir.

(C.7) ifadesinde verilen T matrisi ortogonal bir matris olduğundan tersi transpozese eşittir. Buna göre T matrisinin tersi

$$T^{-1} = T^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

ile verilir. Öyleyse ötelenmiş ve döndürülmüş koordinatlarda bir nokta verildiğinde bu noktanın referans koordinatlarındaki karşılığı (C.9) ifadesi ile aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Birim vektörler arasındaki bağıntı ise

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

şeklindedir.

Ek-D: Moment Yöntemi

Üç boyutlu elektromanyetik alan problemlerini çözmek için uygun bir yol da Maxwell denklemlerini kullanarak integral eşitlikleri elde etmektir. Moment yöntemi, bu şekilde lineer operatörler içeren eşitlikleri, matris yapıları şeklinde nümerik prosedürlere dönüştürerek çözmek için geliştirilmiş güçlü bir çözüm yöntemidir. Daha basitçe açıklamak gerekirse moment yöntemi, orjinal fonksiyonel eşitliği matris eşitliğine indirir. Örneğin

$$L(f) = g \quad (\text{D.1})$$

şeklinde homojen olmayan tipte bir eşitlik göz önüne alınsın. Burada L lineer operatör, g uyarı ya da kaynak fonksiyonu (değeri bilinmekte) ve f ise alan ya da cevap bilgisini içeren hesaplanacak olan terimdir. Eğer her g ile ilişkili bir tane f varsa çözüm tektir ve problem deterministiktir. Problemin analizi L ve g verildiğinde f 'nin

hesaplanmasını, problemin sentezi ise f ve g verildiğinde L 'nin hesaplanmasını içermektedir. (D.1)'deki gibi verilen bir deterministik problem için L operatörünün tanımlanması gerekmektedir.

$\langle f, g \rangle$ işlemi iç çarpım işlemi simgelesin. Buna göre iç çarpım işlemi

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad (\text{D.2})$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \quad (\text{D.3})$$

$$\langle f^*, f \rangle > 0, \quad f \neq 0 \quad (\text{D.4})$$

$$\langle f^*, f \rangle = 0, \quad f = 0$$

şartlarını sağlar. Burada α ve β sayısal değerlerdir ve $*$ işlemi karmaşık eşleniği simgeler. f fonksiyonunun genliği $\|f\|$ ile gösterilir ve

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f^* \rangle} \quad (\text{D.5})$$

şeklinde hesaplanır. Bu Euclid vektör yapısına uygundur ve iki fonksiyon arasındaki uzaklığı;

$$d(f, g) = \|f - g\| \quad (\text{D.6})$$

ifadesiyle bulunabilir.

(D.1)'in çözümünün özellikleri L operatörünün özelliklerine bağlıdır. L^a operatörü, boyutu L 'nin boyutundaki tüm f 'ler için şu şekilde tanımlanır;

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^a g \rangle \quad (\text{D.7})$$

Eğer $L^a = L$ ise L^a 'nın boyutu L 'nin boyutu olur. f gerçel ise Lf 'de gerçel olur ve buna göre operatörde gerçel olur.

Eğer (D.1)'in çözümü bütün g 'ler için bir tane ise bu durumda ters işlem operatörü (L^{-1}) tanımlanabilir ve

$$f = L^{-1}(g) \quad (\text{D.8})$$

şeklinde ifade edilebilir.

L ve L^{-1} operatör çiftleri olup birbirlerinin tersleri olduklarından g bilindiğinde (3.8) orjinal problemin çözümünü sunar.

Şimdi (D.1) ifadesi yeniden ele alınsın. Burada L lineer operatör, g bilinen değer, f ise hesaplanacak olan değerdi. Öyleyse bilinmeyen f değeri, L boyutu içerisinde, f_1, f_2, f_3, \dots fonksiyon serilerine açılın;

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (\text{D.9})$$

burada α_n 'ler sabitlerdir ve f_n 'ler açılım fonksiyonları yada temel fonksiyonlar olarak adlandırılırlar. Tam doğru çözüm için toplamın sonsuz terim içermesi gerekmektedir ancak yaklaşık çözümler için toplam sonlu değere sahiptir. (D.9) ifadesini (D.1) ifadesinde yerine yazarsak;

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g \quad (D.10)$$

ifadesi elde edilir. Burada uygun bir $\langle f, g \rangle$ iç çarpımının yapıldığı kabulünden sonra ağırlık (test) fonksiyonlarının tanımı yapılabilir. Buna amaçla L 'nin tanım aralığında bulunan $w_1, w_2, w_3 \dots$ fonksiyonları ele alınsın ve her bir w_m ile (D.10) ifadesi iç çarpım işlemine sokulsun. Sonuçta,

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, Lf_n \rangle = \langle w_m, g \rangle, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (D.11)$$

ifadesi elde edilir ve bu ifade aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$[I_{m,n}][\alpha_n] = [g_m] \quad (D.12)$$

burada

$$[I_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle & \dots & \dots \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (D.13)$$

$$[\alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad (D.14)$$

$$[g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad (D.15)$$

olur. Eğer $[I]$ matrisi tekil değilse ters $[I^{-1}]$ matrisi de mevcuttur. Öyleyse

$$[\alpha_n] = [I_{nm}^{-1}][g_m] \quad (D.16)$$

ifadesi yazılabilir ve $[\alpha_n]$ değerleri matris teoremlerinden hesaplanarak (D.9) ifadesinde yerine yazılırsa f 'nin değeri hesaplanabilir. Bu sonuç açılım ve ağırlık fonksiyonlarının seçimine göre yaklaşık yada tam olabilir. Açılım ve ağırlık

fonksiyonlarının aynı yapıda (özdeş) seçilmesi özel durumuna Galerkin yöntemi, test fonksiyonlarının Dirac dağılımı şeklinde seçilmeleri durumuna ise eş nokta yöntemi denir. Açılım ve ağırlık fonksiyonları sonlu sayıda iseler, matrislerde sonlu dereceli olacaklardır ve bu durumda bilgisayar algoritmaları sayesinde hesaplanabilmeyeceklerdir. (Harrington 1993)

Baz ve ağırlık fonksiyonları:

İntegral denklemlerin Moment Yöntemi tabanlı çözümlerinde baz fonksiyonlarının seçimi önemlidir. Baz fonksiyonlarının seçiminde ayırıt koşulları önemli bir etkidir. Elektromagnetik saçılma ve yayılım problemlerinde ayırıtla paralel akımlar tekil olabilmekte ve bu akımların ayırıt koşullarına (Wilton ve Govind 1977) uymaları gerekmektedir. İntegral denklem formülasyonlarında bilinmeyen akımlar, çekirdek fonksiyon ayırıt koşullarını sağlayacak şekilde seçilirse doğru sonuçlar elde edilebilir. Bu sebeple integral denklemin Moment Yöntemi tabanlı çözümlerinde akım karakteristiğini yansıtmak için tekil olmayan baz fonksiyonları kullanılır. Ortaya çıkan çözüm ayırıtta en yakın alt bölgeler haricinde doğru sonuç vermekte, fakat ayırıtta çok yakın bölgelerde ise süreksizlikler (anomali) göstermekte ve hatta büyük hata değerleri vermektedir. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için baz fonksiyonlarının ayırıt koşulları için doğru tekil akım formunun kapsanması gerekir.

Aynı ayırıt koşulunu sağlayan birden fazla baz fonksiyonunun olması durumunda, dikkate alınması gereken diğer bir husus alanların gerçek davranışına en yakın fonksiyonel yapıdaki baz fonksiyonun seçilmesidir.

Baz fonksiyonları, bilinmeyen fonksiyonun tüm tanım bölgesinde olması durumunda tam bölge baz fonksiyonları, belirli bir tanım bölgesinde olması durumunda alt bölge baz fonksiyonu olarak gruplanır.

Tam bölge fonksiyonları süreklilikleri bakımından problemin doğasına uygun çözümler sunabilmelerine karşın uygulanabilirlikleri daha zordur. Tam Bölge baz fonksiyonlarına Fourier, Maclurin, Chebyshev ve Hermit baz fonksiyonları örnek verilebilir.

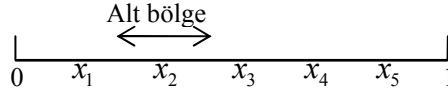
Alt bölge fonksiyonlarının problemlere uygulanması daha kolaydır. Hesaplama zamanında önemli avantajlar sağlar. Alt bölge baz fonksiyonlarından darbe, parça doğrusal ve parça sinüsoid baz fonksiyonları,

$$b(x') = \begin{cases} 1 & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

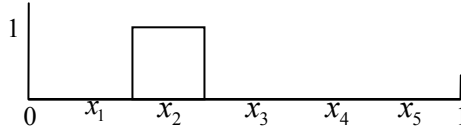
$$b(x') = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} & x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

$$b(x') = \begin{cases} \frac{\sin(k(x-x_{n-1}))}{\sin(k(x_n-x_{n-1}))} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{\sin(k(x_{n+1}-x))}{\sin(k(x_{n+1}-x_n))} & x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

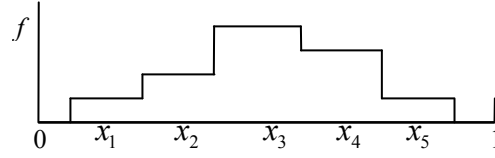
ifadeleriyle verilir (Balanis 1989). Şekil 28'de darbe ve parça sinüsoid baz fonksiyonlarının x eksenindeki yayılımı ve oluşturdukları fonksiyonel yaklaşıkları gösterilmiştir. Parça doğrusal baz fonksiyonu için parça sinüsoid baz fonksiyonunda olduğu gibi iç içe geçen baz fonksiyonları şeklinde bir yayılım vardır.



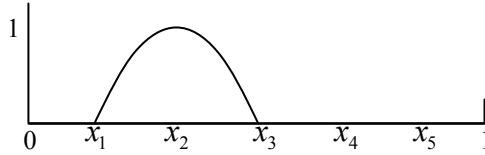
(a) Alt bölge ve noktalar



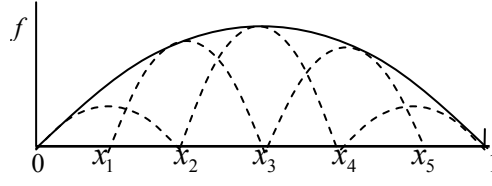
(b) Darbe baz fonksiyonu



(c) Basamak yaklaşıklığı



(d) Parça sinüsoid baz fonksiyonu



(e) Parça sinüsoid yaklaşıklığı

Şekil 28. Alt bölge baz fonksiyonları ve fonksiyonel yaklaşıklıkları

ÖZGEÇMİŞ

Okan Mert YÜCEDAĞ 1983 yılında Aydın'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İzmir'de tamamladı ve 2001 yılında Uludağ Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümünde yüksek öğrenimine başladı. 2006 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim dalında lisans üstü eğitimine devam etti. 2007 yılından itibaren TÜBİTAK Marmara Araştırma Merkezi Bilişim Teknolojileri Enstitüsü'nde araştırmacı olarak görev yapmaktadır.

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın hazırlanmasında bilimsel ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Arő. Gör. Ömer ZOR ve Prof. Dr. Burak POLAT'a, sabır ve büyük özverileri için sevgili aileme çok teşekkür ederim.

