PELL DENKLEMLERİ VE

PELL FORMLARININ OTOMORFİZMLERİ

Gülşah BİBEROĞLU

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PELL DENKLEMLERİ VE PELL FORMLARININ OTOMORFİZMLERİ

Gülşah BİBEROĞLU
0000-0003-0821-716X

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2023

TEZ ONAYI

Gülşah BİBEROĞLU tarafından hazırlanan "PELL DENKLEMLERİ VE PELL FORMLARININ OTOMORFİZMLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Başkan:	Prof. Dr. Ahmet TEKCAN 0000-0002-5341-0009 Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye :	Prof. Dr. Betül GEZER 0000-0001-9133-1734 Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye :	Doç. Dr. İrem KÜPELİ ERKEN 0000-0003-4471-3291 Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
../../2023

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

22/05/2023

Gülşah BİBEROĞLU

TEZ YAYINLANMA

FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof.Dr.Ahmet TEKCAN
22/05/2023

Gülşah BİBEROĞLU
22/05/2023

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PELL DENKLEMLERİ VE PELL FORMLARININ OTOMORFİZMLERİ

Gülşah BİBEROĞLU

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu çalışmada $k \geq 2$ tam sayısı için $d = k^2 + 4$ olmak üzere $\Delta = 4d$ diskriminantlı $F_\Delta(x, y) = x^2 - dy^2$ Pell formlarının tüm otomorfizm kümeleri elde edilmiştir. Daha sonra ise bu Pell formdan faydalanarak $F_\Delta(x, y) = \pm 1$ ve $F_\Delta(x, y) = \pm k^2$ Pell denklemlerinin tüm tam sayı çözümleri kümesi belirlenmiştir.

Birinci bölümde kuadratik formlar, bu formların bazı temel özellikleri, Pell denklemleri ve balans sayıları hakkında genel bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde materyal ve yöntem belirtilmiştir.

Üçüncü bölüm tezin orijinal kısmı olup bu bölümde, $k \geq 2$ tam sayısı için $d = k^2 + 4$ olmak üzere $\Delta = 4d$ diskriminantlı $F_\Delta(x, y) = x^2 - dy^2$ Pell formu tanımlanarak bu formların tüm otomorfizm kümeleri belirlenmiştir. Daha sonra ise bu Pell formdan faydalanarak $F_\Delta(x, y) = \pm 1$ ve $F_\Delta(x, y) = \pm k^2$ Pell denklemlerinin tüm tam sayı çözümleri kümesi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sonuç verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuadratik Form, Pell Form, Pell Denklemleri, Çözüm Temsilcileri Kümesi, Otomorfizm.

2023, x + 43 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

PELL EQUATIONS AND THE AUTOMORPHISMS OF PELL FORMS

Gülşah BİBEROĞLU

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this thesis, the set of all automorphisms of the Pell forms $F_\Delta(x,y)=x^2-dy^2$ of discriminant $\Delta=4d$, where $d=k^2+4$ for some positive integer $k\geq 2$ is determined. Later the set of all integer solutions of the Pell equations $F_\Delta(x,y)=\pm 1$ and $F_\Delta(x,y)=\pm k^2$ is obtained.

In the first section, some notations and definitions on quadratic forms, some fundamental properties of quadratic forms, Pell equations and balancing numbers are given.

In the second section, the material and method are given.

In the third section, which is the original part of the thesis, the set of all automorphisms of Pell forms $F_\Delta(x,y)=x^2-dy^2$ of discriminant $\Delta=4d$, where $d=k^2+4$ for some positive integer $k\geq 2$ is determined. Later the set of all integer solutions of the Pell equations $F_\Delta(x,y)=\pm 1$ and $F_\Delta(x,y)=\pm k^2$ is obtained.

In the last section, result is given.

Keywords: Quadratic Form, Pell Form, Pell Equations, Set of Representations, Automorphism.

2023, x + 43 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sırasında, yaptığım çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren araştırmalarımın her aşamasında öneri, bilgi ve yardımlarını esirgemeyerek gelişimime katkıda bulunan, çalışmalarım süresince her anlamda bana destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet TEKCAN' a saygı ve sevgilerimle teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında maddi ve manevi hiçbir desteğini esirgemeyen değerli annem Dilek TEZGELDİ' ye de teşekkürü bir borç bilirim.

Gülşah BİBEROĞLU

22/05/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
F	Kuadratik form
Δ	Formun diskriminantı
F_Δ	Pell form
M_F	Formun modülü
$x^2 - dy^2 = \pm n$	Pell denklemi
B_n	Balans sayısı
b_n	Kobalans sayısı
C_n	Lucas balans sayısı
c_n	Lucas kobalans sayısı
α, β	Pell sayılarının karakteristik denkleminin kökleri
Rep	Çözüm temsilcileri kümesi
M	Çözüm matrisi
ε_Δ	Temel birim
(x_1, y_1)	Pell denkleminin temel çözümü
$\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$	Kuadratik sayı cismi

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Tezin bu bölümünde kuadratik formlar, Pell ve Diophantine denklemleri ve balans sayıları ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

1.1 Kuadratik Formlar

a, b, c ler reel sayılar olmak üzere

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

şeklindeki ifadelere kuadratik form denir ve $F = (a,\ b,\ c)$ ile gösterilir. F nin diskriminantı $\Delta = \Delta(F)$ ile gösterilir ve

$$\Delta(F) = b^2 - 4ac$$

olarak tanımlanır (Flath 1989).

a, b, c lerin tam sayı olması durumunda F ye tam form denir. Diskriminant negatif ve a ve c pozitif ise F ye pozitif tanımlı form, diskriminant pozitif ise F ye indefinite form ve a, b, c nin aralarında asal olması durumunda ise F ye ilkel form denir.

$r, s, t, u \in \mathbb{Z}$ ve $ru - st = \pm 1$ olmak üzere $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ şeklindeki 2×2 lik matrislerin kümesi, matrislerde çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup $\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{Z})$ ile gösterilirse

$$\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} : r,\ s,\ t,\ u \in \mathbb{Z},\ \ ru - st = \pm 1 \right\}$$

dir. Benzer şekilde

$$\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} : r,\ s,\ t,\ u \in \mathbb{Z},\ \ ru - st = 1 \right\}$$

dir.

$g = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ matrisi verilen bir F formunu

$$gF = F(rx + ty, sx + uy)$$

formuna resmeder. Burada dikkat edilirse F nin g altındaki resmi de yine bir kuadratik formdur. Eğer iki form verildiğinde birini diğerine resmeden bir g matrisi bulunabiliyorsa bu formlara denktir denir. g nin determinantı 1 ise bu formlara has denk, -1 ise has olmayan denk formlar denir. Örneğin, $F = (3, 2, \ -1)$ formunun $g = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi altındaki resmi

$$\begin{aligned} gF = F(2x + 5y, x + 3y) &= 3(2x + 5y)^2 + 2(2x + 5y)(x + 3y) - (x + 3y)^2 \\ &= 15x^2 + 76xy + 96y^2 \end{aligned}$$

dir.

F formunu kendisine resmeden g matrisine F nin bir otomorfizmi denir. g nin determinantı 1 ise has otomorfizm, -1 ise has olmayan otomorfizm denir. Örneğin, $F = (1, 8, 8)$ formunun bir has otomorfizmi $g = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ dir. Çünkü $\det(g) = 1$ olup $gF = F$ dir. Has olmayan otomorfizmi ise $g = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$ dir. Çünkü $\det(g) = -1$ olup $gF = F$ dir.

g nin determinantının 1 olması durumunda F nin otomorfizmleri kümesi $Aut^+(F)$ ile, -1 olması durumunda ise $Aut^-(F)$ ile gösterilir. F formunu kendisinin toplamaya göre tersi olan $-F$ formuna resmeden ve determinantı -1 olan g matrislerinin kümesi de $Aut^*(F)$ ile gösterilir.

$\mathrm{Im}(z) > 0$ özelliğindeki bir z karmaşık sayısı için pozitif tanımlı bir F formu

$$F(x, y) = a(x + zy)(x + \bar{z}y)$$

olarak yazılabilir. Bu şekildeki z sayısı $z(F)$ ile gösterilir. $v > 0$ için $z = u + iv$ denilirse

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = ax^2 + 2auxy + a|z|^2y^2$$

olur. Buna göre $2au = b$ ve $a|z|^2 = c$ olacağından

$$u = \frac{b}{2a} \quad \text{ve} \quad v = \frac{\sqrt{-\Delta(F)}}{2a}$$

dir. O halde

$$z(F) = \frac{b + i\sqrt{-\Delta(F)}}{2a}$$

dur. Örneğin, $F = (4, 3, 5)$ pozitif tanımlı formu için $z(F) = \frac{3+i\sqrt{71}}{8}$ dir. Tersine $v > 0$ için $z = u + iv$ sayısı verilmiş olsun. Bu takdirde $\Delta(F) = -4v^2$ diskriminantlı

$$F_z = (1, 2u,\ u^2 + v^2)$$

pozitif tanımlı formu vardır ve yine

$$z(F_z) = \frac{2u + i\sqrt{4v^2}}{2} = u + iv = z$$

dir. Örneğin, $z = 2 + 3i$ karmaşık sayısı için $F_z = (1, 4, 13)$ olup $z(F_z) = z = 2 + 3i$ dir.

Eğer $F = (a, b, c)$ bir indefinite form ise $z(F) = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ dir. Örneğin, $\Delta = 73$ diskriminantlı $F = (1,7,-6)$ indefinite formu için $z(F) = \frac{-7+\sqrt{73}}{2}$ dir. Tekcan (2007), F indefinite formlarının denk olmaları ile $z(F)$ lerinin denk olmaları arasında bir ilişkinin olduğunu göstermiştir. Şöyle ki F_1 ve F_2 herhangi iki indefinite form olsun. Bu takdirde $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ için $gF_1 = F_2$ dir $\Leftrightarrow$

$$(g^{-1})^T z(F_1) = \begin{cases} z(F_2) & \det(g) = 1 \text{ ise} \\ \bar{z}(F_2) & \det(g) = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Örneğin, $F_1 = (1, 7, -6)$ ve $F_2 = (4, 3, -4)$ formları $g = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ matrisi altında has denktir. Bu formlar için

$$z(F_1) = \frac{-7 + \sqrt{73}}{2} \quad \text{ve} \quad z(F_2) = \frac{-3 + \sqrt{73}}{8}$$

olup, $(g^{-1})^T = \begin{bmatrix} 13 & -10 \\ -9 & 7 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ matrisi için

$$(g^{-1})^T z(F_1) = \frac{13\left(\frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right) - 10}{-9\left(\frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right) + 7} = \frac{-3+\sqrt{73}}{8} = z(F_2)$$

dir. Benzer şekilde $F_1 = (3, 5, -1)$ ve $F_2 = (9, 37, 37)$ indefinite kuadratik formları da $g = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ matrisi altında has olmayan denktirler. Bu formlar için

$$z(F_1) = \frac{-5+\sqrt{37}}{6} \quad \text{ve} \quad z(F_2) = \frac{-37+\sqrt{37}}{18}$$

olup, $(g^{-1})^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ matrisi için

$$(g^{-1})^T z(F_1) = \frac{5\left(\frac{-5+\sqrt{37}}{6}\right) - 2}{-3\left(\frac{-5+\sqrt{37}}{6}\right) + 1} = \frac{-37-\sqrt{37}}{18} = \bar{z}(F_2)$$

dir.

1.2 Pell ve Diophantine Denklemleri

a, b, c ler tam sayı olmak üzere $ax + by = c$ tipindeki denklemlere birinci dereceden (lineer) Diophantine denklemi denir. Bu denklemin tam sayı çözümleri vardır $\Leftrightarrow$ $\mathrm{obeb}(a, b)|c$ dir. Bu durumda (x_0, y_0) bu denklemi gerçekleyen herhangi bir tam sayı ikilisi ise, denklemin tüm tam sayı çözümleri $t \in \mathbb{Z}$ için

$$(x, y) = (x_0 + \tfrac{b}{d}t,\ y_0 - \tfrac{a}{d}t)$$

şeklindedir. Örneğin, $478x + 122y = 6$ Diophantine denklemi ele alınsın. Burada

$$\begin{aligned} 478 &= 122 \cdot 3 + 112 \\ 122 &= 112 \cdot 1 + 10 \\ 112 &= 10 \cdot 11 + 2 \\ 10 &= 2 \cdot 5 + 0 \end{aligned}$$

olup $d = (478, 122) = 2$ ve $2|6$ olduğundan denklemin bir tam sayı çözümü ve dolayısıyla tam sayı çözümleri vardır. Yukarıdaki eşitlikte obeb den geriye doğru gidilirse

$$2 = 112 - 10 \cdot 11 = 112 - (122 - 112 \cdot 1) \cdot 11$$
$$= 112 \cdot 12 - 122 \cdot 11$$
$$= (478 - 122 \cdot 3) \cdot 12 - 122 \cdot 11$$
$$= 478 \cdot 12 - 122 \cdot 47$$

elde edilir. Buna göre

$$478 \cdot 36 + 122 \cdot (-141) = 6$$

olduğundan denklemin özel bir tam sayı çözümü $(x_0, y_0) = (36, -141)$ dir. Dolayısıyla denklemin diğer tüm tam sayı çözümleri t tam sayısı için

$$(x, y) = (36 + 61t,\ -141 - 239t)$$

dir.

$d > 0$ ve tam kare olmayan bir tam sayı ve $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = \pm n$$

şeklindeki denklemlere Pell denklemi denir (Barbeau 2003). $x^2 - dy^2 = n$ ye pozitif Pell denklemi, $x^2 - dy^2 = -n$ ye ise negatif Pell denklemi denir. $n = 1$ için elde edilen

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

Pell denklemini gerçekleyen en küçük pozitif (x_1, y_1) tam sayı çözümüne denklemin temel çözümü denir. Denklemin temel çözümü varsa sonsuz çoklukta tam sayı çözümleri vardır. Eğer $x^2 - dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere denklemin tam sayı çözümleri (x_n, y_n) dir. Eğer $x^2 - dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^{2n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere denklemin diğer tüm tam sayı çözümleri (x_{2n-1}, y_{2n-1}) dir (Mollin 1996).

$\sqrt{d} = [m_0; \overline{m_1, m_2, \cdots, m_l}]$ olsun. $U_{-2} = 0, U_{-1} = 1, V_{-2} = 1, V_{-1} = 0$ ve $n \geq 0$ için

$$U_n = m_n U_{n-1} + U_{n-2} \quad \text{ve} \quad V_n = m_n V_{n-1} + V_{n-2}$$

tanımlansın. Bu takdirde

$$U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n = (-1)^{n-1} \quad \text{ve} \quad U_n V_{n-2} - U_{n-2} V_n = (-1)^n m_n$$

dir. $W_n = \frac{U_n}{V_n}$ için

$$W_n - W_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{V_n V_{n-1}}, W_n - W_{n-2} = \frac{(-1)^n m_n}{V_n V_{n-2}} \quad \text{ve} \quad \lim_{n \to \infty} W_n = \sqrt{d}$$

dir. Üstelik $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (U_{l-1}, V_{l-1}) & l \text{ çift ise} \\ (U_{2l-1}, V_{2l-1}) & l \text{ tek ise} \end{cases}$$

olup denklemin diğer tam sayı çözümleri yukarıdaki matristen farklı olarak

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

olmak üzere (x_n, y_n) olarak da verilebilir. Bu tam sayı çözümleri arasında $n \geq 3$ için

$$x_{n+1} = (2x_1 - 1)(x_n + x_{n-1}) - x_{n-2}$$
$$y_{n+1} = (2x_1 - 1)(y_n + y_{n-1}) - y_{n-2}$$

şeklinde bir bağıntı vardır. l çift iken $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin temel çözümü yoktur.

l tek iken denklemin temel çözümü $(x_1, y_1) = (U_{l-1}, V_{l-1})$ olup denklemin diğer tam sayı çözümleri

$$x_{2n+1} + y_{2n+1}\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{2n+1}$$

olmak üzere (x_{2n+1}, y_{2n+1}) dir ve çözümler arasında $n \geq 3$ için

$$x_{2n+1} = (4x_1^2 + 1)(x_{2n-1} + x_{2n-3}) - x_{2n-5}$$
$$y_{2n+1} = (4x_1^2 + 1)(y_{2n-1} + y_{2n-3}) - y_{2n-5}$$

şeklinde bir bağıntı vardır (Mollin 1996).

1.3 $ax^2 + bxy + cy^2 = n$ Diophantine Denklemi

Bu kısımda bir F indefinite formu ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = n \tag{1.1}$$

denkleminin tüm tam sayı çözümleri $\Omega = \{(x, y): F(x, y) = n\}$ kümesi ele alınacaktır.

F indefinite formu

$$F(x, y) = \frac{\left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(ax + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}y\right)}{a}$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu durumda

$$M_F = \left\{ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}y \colon \ x, y \in \mathbb{Z}\right\}$$

kümesine F nin modülü denir.

Δ mod 4 te 0 a denk iken $\rho_\Delta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ ve 1 e denk iken $\rho_\Delta = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$ olarak tanımlanırsa

$$[x' \quad y'] = \begin{cases} [x \quad y]\begin{bmatrix} u - \frac{b}{2}v & av \\ -cv & u + \frac{b}{2}v \end{bmatrix} & \Delta \equiv 0(\text{mod}4) \text{ ise} \\ [x \quad y]\begin{bmatrix} u + \frac{1-b}{2}v & av \\ -cv & u + \frac{1+b}{2}v \end{bmatrix} & \Delta \equiv 1(\text{mod}4) \text{ ise} \end{cases} \tag{1.2}$$

olmak üzere

$$(u + v\rho_\Delta)\left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right) = ax' + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y'$$

dir. Üstelik $\Psi(x,y) = ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y$ dönüşümü için

$$\Psi: \Omega = \{(x,y): F(x,y) = n\} \to \{\gamma \in M_F: N(\gamma) = an\}$$

dir.

Δ tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) = \{x + y\sqrt{\Delta} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ kuadratik sayı cisminde bir $\alpha = x + y\sqrt{\Delta}$ elemanının eşleniği ve normu sırasıyla $\bar{\alpha}$ ve $N(\alpha)$ ile gösterilir ve $\bar{\alpha} = x - y\sqrt{\Delta}$ ve $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$ olarak tanımlanır. $O_\Delta = \{x + y\rho_\Delta: x, y \in \mathbb{Z}\}$ halkasının temel birimi $\varepsilon_\Delta = x + y\rho_\Delta$ olmak üzere

$$\tau_\Delta = \begin{cases} \varepsilon_\Delta & N(\varepsilon_\Delta) = 1 \text{ ise} \\ \varepsilon_\Delta^2 & N(\varepsilon_\Delta) = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Bu τ_Δ değeri için

$$h = \left|\frac{an\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau_\Delta - \text{sgn}(an)}{\tau_\Delta}\right)$$

tanımlansın. (1.1) deki denklem

$$\Delta y^2 + 4an = (2ax + by)^2 \tag{1.3}$$

olarak yeniden yazılabilir. $0 \le y \le h$ aralığındaki y ler için, $\Delta y^2 + 4an$ nin bir tam sayının karesi olup olmadığı kontrol edilir. Eğer belli bir y_0 için tam kare ise (1.3) den

$$x_0 = \frac{-by_0 \pm \sqrt{\Delta y_0^2 + 4an}}{2a}$$

olarak elde edilir. x_0 ın tam sayı olması durumunda denklemin bir (x_0, y_0) özel tam sayı çözümü elde edilmiş olur. Bu durumda Rep $= \{[x_0 \quad y_0]\}$ kümesine çözüm temsilcileri kümesi denir. (1.2) den elde edilen M matrisi için

$$\Omega = \{\pm(x, y)\colon \; [x \quad y] = [x_0 \quad y_0]M^m, \, m \in \mathbb{Z}\}$$

dir. Eğer bu aralıktaki belli bir y değeri için $\Delta y^2 + 4an$ ifadesi tam kare olmuyorsa denklemin tam sayı çözümleri yoktur. Örneğin,

$$x^2 + 4xy - y^2 = -16$$

Diophantine denklemi ele alınsın. Burada $F = (1, 4, -1)$ olup $\Delta(F) = 4 \cdot 5$ dir. Buna göre O_{20} halkasının temel birimi $\varepsilon_{20} = 9 + 4\sqrt{5}$ dir. $N(\varepsilon_{20}) = 1$ olduğundan $\tau_{20} = 9 + 4\sqrt{5}$ ve böylece

$$0 \leq y \leq h = \left|\frac{1 \cdot (-16) \cdot (9 + 4\sqrt{5})}{20}\right|^{1/2} \left(\frac{10 + 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}\right) \cong 4.001$$

dir. Buna göre

$$\Delta y^2 + 4an = 20y^2 - 64$$

eşitliği, $y = 2$ ve $y = 4$ için gerçeklenir. $y = 2$ için $x = -6, -2$ ve $y = 4$ için $x = -16, 0$ olarak elde edilir. O halde

$$\text{Rep} = \{[-6 \quad 2], [-2 \quad 2], [-16 \quad 4], [0 \quad 4]\}$$

olup $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$ matrisi için

$$\Omega = \{\pm(x, y)\colon \; [x \quad y] = [-6 \quad 2]M^m, [-2 \quad 2]M^m,$$

$$[-16 \quad 4]M^m, \; [0 \quad 4]M^m, m \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

1.4 Balans ve Kobalans Sayıları

Behera ve Panda (1999)

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \qquad (1.4)$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif n tam sayısına balans sayısı, eşitlikteki pozitif r tamsayısına ise balansır demişlerdir.

Balans sayıları B_n ile gösterilir ve $B_0 = 0, B_1 = 1, B_2 = 6$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

dir.

(1.4) eşitliğinden

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 1}}{2}$$

olur. Şu halde $C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$ bir tam sayı olup bu sayıya Lucas balans sayısı denir. Lucas balans sayıları $C_0 = 1, C_1 = 3, C_2 = 17$ olup $n \geq 1$ için

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}$$

dir.

Benzer şekilde Panda ve Ray (2005) ise

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \qquad (1.5)$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif n tam sayısına kobalans sayısı, eşitlikteki pozitif r tamsayısına ise kobalansır demişlerdir.

Kobalans sayıları b_n ile gösterilir ve $b_0 = b_1 = 0, b_2 = 2$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

dir.

(1.5) eşitliğinden

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2}$$

olur. Şu halde $c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$ bir tam sayı olup bu sayıya Lucas kobalans sayısı denir. Lucas kobalans sayıları $c_0 = c_1 = 1, c_2 = 7$ olup $n \geq 1$ için

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}$$

dir.

Balansırlar R_n ve kobalansırlar da r_n ile gösterilirse, (1.4) ve (1.5) den

$$B_n = r_{n+1} \quad \text{ve} \quad R_n = b_n$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$b_n = \frac{-2B_n - 1 + \sqrt{8B_n^2 + 1}}{2} \quad \text{ve} \quad B_n = \frac{2b_n + 1 + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}}{2}$$

dir.

Pell sayıları ise başlangıç terimleri $P_0 = 0, P_1 = 1$ ve genel terimi $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

olan sayılardır. Üstelik $n \geq 0$ için

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{2}} \tag{1.6}$$

dir (Burada $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ dir).

Pell sayıları ile yukarıda bahsedilen balans, kobalans, Lucas balans ve Lucas kobalans sayıları arasında bir ilişki vardır. Ray (2009) balans sayıları için

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \tag{1.7}$$

olduğunu ve (1.6) ve (1.7) eşitliklerinden

$$B_n = \frac{P_{2n}}{2}$$

olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde kobalans, Lucas balans ve Lucas kobalans sayıları için de

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2},\ C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} \quad \text{ve} \quad c_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2}$$

olduğunu belirterek,

$$b_n = \frac{P_{2n-1} - 1}{2}, \quad C_n = P_{2n} + P_{2n-1} \ \text{ ve } \ c_n = P_{2n-1} + P_{2n-2}$$

olduğunu göstermiştir. Daha sonra Gözeri ve ark. (2017) ise balans sayılarının genel teriminin

$$B_n = P_n^2 + P_n P_{n-1}$$

ve kobalans sayılarının genel teriminin ise

$$b_n = \begin{cases} P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} & n \text{ tek ise} \\ P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} - 1 & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olduğunu, Lucas balans ve Lucas kobalans sayılarının genel terimlerinin de

$$C_n = 2B_n + 2b_n + 1 \quad \text{ve} \quad c_n = 2B_n - 2b_n - 1$$

olduğunu göstermişlerdir.

Panda ve Ray (2011), Pell sayılarının bazı özel toplamlarını ele almışlar ve

$$\sum_{i=1}^{2n} P_i = B_n + b_{n+1}, \quad \sum_{i=1}^{n} P_{2i-1} = B_n \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} P_{2i} = b_{n+1}$$

olduğunu göstermişlerdir. Bunlardan farklı olarak

$$\sum_{i=1}^{2n-1} P_i = B_n + b_n \tag{1.8}$$

olduğunu göstermişlerdir. Gözeri ve ark. (2017) ise benzer problemi Pell Lucas sayıları (bu sayılar Q_n ile gösterilir ve $Q_0 = Q_1 = 2$ olup genel terimi $n \geq 2$ için $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ olan sayılardır) için ele almışlar ve (1.8) eşitliğine benzer şekilde

$$\sum_{i=0}^{2n-1} Q_i = C_n + c_n$$

olduğunu göstermişlerdir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Δ mod 4 de 0 a denk iken

$$F_\Delta(x,y) = x^2 - \frac{\Delta}{4}y^2$$

ve mod 4 de 1 e denk iken

$$F_\Delta(x,y) = x^2 + xy - \frac{\Delta - 1}{4}y^2$$

olarak tanımlanan kuadratik forma Pell form denir.

$k \geq 1$ tam sayı olmak üzere $d = k^2 + 4$ için $\Delta = 4d$ olsun. Bu takdirde

$$F_\Delta(x,y) = x^2 - dy^2$$

bir Pell form olur.

Burada ilk olarak $k \geq 3$ tek ve $k \geq 2$ çift olmak üzere yukarıdaki $F_\Delta(x,y) = x^2 - dy^2$ Pell formunun tüm

$$Aut^+(F_\Delta), Aut^-(F_\Delta) \text{ ve } Aut^*(F_\Delta)$$

otomorfizm kümeleri k ya bağlı olarak elde edildi.

Daha sonra

$$F_\Delta(x,y) = \pm 1 \text{ ve } F_\Delta(x,y) = \pm k^2$$

Pell denklemlerinin tüm tam sayı çözümleri kümesi, bu formların otomorfizmleri kümesi ve çözüm temsilcileri kümesi kullanılarak yine $k \geq 3$ tek ve $k \geq 2$ çift olmak üzere iki durumda ele alındı.

3. PELL FORM VE PELL DENKLEMLERİ

Bu bölümde özel bir Pell formunun tüm otomorfizmleri kümeleri ele alınacak ve bu Pell formundan elde edilen özel iki Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi elde edilecektir.

3.1 Pell Form

Yukarıda Δ mod 4 de 0 a denk iken

$$F_{\Delta}(x,y) = x^2 - \frac{\Delta}{4}y^2$$

ve mod 4 de 1 e denk iken

$$F_{\Delta}(x,y) = x^2 + xy - \frac{\Delta - 1}{4}y^2$$

olarak tanımlanan kuadratik forma Pell form denildiği belirtilmişti. $F_{\Delta}(x,y) = 1$ denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi $\mathrm{Pell}(\Delta)$ ve $F_{\Delta}(x,y) = \pm 1$ denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi de $\mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta)$ ile gösterilsin. Bu takdirde $(x,y) \in \mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta)$ için

$$g_F(x,y) = \begin{cases} \begin{bmatrix} x - \frac{b}{2}y & ay \\ -cy & x + \frac{b}{2}y \end{bmatrix} & \Delta \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4) \text{ ise} \\ \begin{bmatrix} x + \frac{1-b}{2}y & ay \\ -cy & x + \frac{1+b}{2}y \end{bmatrix} & \Delta \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ ise} \end{cases} \tag{3.1}$$

olarak tanımlanırsa, $g_F(x,y)$ nin determinantının bir Pell form olduğu açıktır. Gerçekten de $\Delta \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ ise

$$\det\big(g_F(x,y)\big) = \left(x - \frac{b}{2}y\right)\left(x + \frac{b}{2}y\right) + acy$$

$$= x^2 - \frac{b^2}{4}y^2 + acy$$

$$= x^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4}y^2$$

$$= x^2 - \frac{\Delta}{4}y^2$$

$$= F_\Delta(x,y)$$

ve $\Delta \equiv 1(\text{mod } 4)$ ise

$$\det\big(g_F(x,y)\big) = \left(x + \frac{1-b}{2}y\right)\left(x + \frac{1+b}{2}y\right) + acy$$

$$= x^2 + xy + \frac{1-b^2}{4}y^2 + acy$$

$$= x^2 + xy - \frac{1-(b^2-4ac)}{4}y^2$$

$$= x^2 + xy + \frac{1-\Delta}{4}y^2$$

$$= F_\Delta(x,y)$$

dir, yani $\det(g_F(x,y)) = F_\Delta(x,y)$ dir. Üstelik

$$g_F\colon \mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$$

bir grup homomorfizmi olup her $(x,y) \in \mathrm{Pell}(\Delta)$ için $g_F(x,y) \in Aut^+(F)$ dir.

Şimdi $k \geq 1$ tam sayı olmak üzere $d = k^2 + 4$ için $\Delta = 4d$ olsun. Bu takdirde

$$F_\Delta(x,y) = x^2 - dy^2 \tag{3.2}$$

bir Pell form olur. Bu Pell formunun tüm otomorfizm kümeleri için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1. (3.2) deki F_Δ Pell formu için

1) $k \geq 3$ tek ise

$$g_F^+ = \begin{bmatrix} \dfrac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} & \dfrac{k^5+4k^3+3k}{2} \\ \dfrac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2} & \dfrac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} \end{bmatrix},$$

$$g_F^- = \begin{bmatrix} \dfrac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} & \dfrac{k^5+4k^3+3k}{2} \\ -\dfrac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2} & -\dfrac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} \end{bmatrix},$$

ve

$$g_F^* = \begin{bmatrix} \dfrac{k^3+3k}{2} & \dfrac{k^2+1}{2} \\ \dfrac{k^4+5k^2+4}{2} & \dfrac{k^3+3k}{2} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Aut^+(F_\Delta) = \{\pm(g_F^+)^t : t \in \mathbb{Z}\},\ Aut^-(F_\Delta) = \{\pm g_F^-(g_F^+)^t : t \in \mathbb{Z}\}$$

ve

$$Aut^*(F_\Delta) = \{\pm(g_F^*)^{2t-1} : t \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

2) $k \geq 2$ çift ise

$$g_F^+ = \begin{bmatrix} \dfrac{k^2+2}{2} & \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{k^3+4k}{2} & \dfrac{k^2+2}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad g_F^- = \begin{bmatrix} \dfrac{k^2+2}{2} & \dfrac{k}{2} \\ -\dfrac{k^3+4k}{2} & -\dfrac{k^2+2}{2} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Aut^{+}(F_{\Delta}) = \{\pm(g_F^{+})^t : t \in \mathbb{Z}\}, Aut^{-}(F_{\Delta}) = \{\pm g_F^{-}(g_F^{+})^t : t \in \mathbb{Z}\} \text{ ve } Aut^{*}(F_{\Delta}) = \{\}$$

dir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. (1) $k \geq 3$ tek tam sayısı için

$$\sqrt{k^2+4} = k + (\sqrt{k^2+4} - k) = k + \cfrac{1}{\frac{k-1}{2} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{k-1}{2} + \cfrac{1}{2k + (\sqrt{k^2+4} - k)}}}}}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\sqrt{d} = [k; \overline{\frac{k-1}{2}, 1, 1, \frac{k-1}{2}, 2k}]$$

dir. Burada $l = 5$ olduğundan $F_{\Delta}(x, y) = 1$ denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2}, \frac{k^5 + 4k^3 + 3k}{2}\right)$$

dir. Şu halde (3.1) den

$$g_F^{+} = \begin{bmatrix} \frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2} & \frac{k^5 + 4k^3 + 3k}{2} \\ \frac{k^7 + 8k^5 + 19k^3 + 12k}{2} & \frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2} \end{bmatrix}$$

F_{Δ} nın bir has otomorfizmi olur.

$$g_F^{-} = \begin{bmatrix} \frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2} & \frac{k^5 + 4k^3 + 3k}{2} \\ -\frac{k^7 + 8k^5 + 19k^3 + 12k}{2} & -\frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi için $\det(g_F^{-} g_F^{+}) = -1$ olup

$$g_F^{-} g_F^{+} F_{\Delta} = F_{\Delta}$$

olduğundan $g_F^{-} g_F^{+}, F_{\Delta}$ nın bir has olmayan otomorfizmi, yani $g_F^{-} g_F^{+} \in Aut^{-}(F_{\Delta})$ dir. Üstelik her bir $t \in \mathbb{Z}$ için $g_F^{-}(g_F^{+})^t$ de F_{Δ} nın bir has olmayan otomorfizmidir. Peryot uzunluğu tek olduğundan $F_{\Delta}(x, y) = -1$ denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = (\frac{k^3 + 3k}{2}, \frac{k^2 + 1}{2})$$

dir. Buna göre

$$g_F^* = \begin{bmatrix} \frac{k^3 + 3k}{2} & \frac{k^2 + 1}{2} \\ \frac{k^4 + 5k^2 + 4}{2} & \frac{k^3 + 3k}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi için $\det(g_F^*) = -1$ olup

$$g_F^* F_\Delta = -F_\Delta$$

dır. Dolayısıyla $g_F^* \in Aut^*(F_\Delta)$ dir. Burada dikkat edilirse $(g_F^*)^2 = g_F^+$ olduğundan g_F^* ın çift kuvvetleri F_Δ nın birer has otomorfizmleridir. Şu halde

$$Aut^*(F_\Delta) = \{\pm(g_F^*)^{2t-1} : t \in \mathbb{Z}\}$$

dır.

(2) Benzer şekilde $k \geq 2$ çift tam sayısı için

$$\sqrt{d} = [k; \overline{\frac{k}{2}, 2k}]$$

dır. $l = 2$ olduğundan $F_\Delta(x, y) = 1$ in temel çözümü

$$(x_1, y_1) = (\frac{k^2 + 2}{2}, \frac{k}{2})$$

dir. Buna göre

$$g_F^+ = \begin{bmatrix} \frac{k^2 + 2}{2} & \frac{k}{2} \\ \frac{k^3 + 4k}{2} & \frac{k^2 + 2}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi F_Δ nın bir has otomorfizmidir, yani

$$g_F^+ F_\Delta = F_\Delta$$

dır. Benzer şekilde

$$g_F^- = \begin{bmatrix} \frac{k^2+2}{2} & \frac{k}{2} \\ -\frac{k^3+4k}{2} & -\frac{k^2+2}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi için $\det(g_F^- g_F^+) = -1$ olup

$$g_F^- g_F^+ F_\Delta = F_\Delta$$

olduğundan $g_F^- g_F^+, F_\Delta$ nın bir has olmayan otomorfizmi, yani $g_F^- g_F^+ \in Aut^-(F_\Delta)$ dir. Açılımın peryot uzunluğu çift olduğundan $F_\Delta(x, y) = -1$ denkleminin temel çözümü ve dolayısıyla tam sayı çözümleri yoktur. Şu halde $g_F^* F_\Delta = -F_\Delta$ ve $\det(g_F^*) = -1$ olacak şekilde bir g_F^* matrisi olmadığından $Aut^*(F_\Delta) = \{\}$ dir.

Aşağıda Çizelge 3.1. de $3 \leq k \leq 21$ tek tam sayıları için $F_\Delta(x, y) = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümleri verilmiştir.

Çizelge 3.1. $F_\Delta(x, y) = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümleri

k	(x_1, y_1)
3	(649, 180)
5	(9801, 1820)
7	(66249, 9100)
9	(285769, 30996)
11	(930249, 83204)
13	(2499849, 190060)
15	(5848201, 386460)
17	(1712320649, 719780)
19	(23915529, 1251796)
21	(43468489, 2060604)

Aşağıda Çizelge 3.2. de $3 \leq k \leq 21$ tek tam sayıları için $F_{\Delta}(x, y) = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümleri verilmiştir.

Çizelge 3.2. $F_{\Delta}(x, y) = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümleri

k	(x_1, y_1)
3	(18, 5)
5	(70, 13)
7	(182, 25)
9	(378, 41)
11	(682, 61)
13	(1118, 85)
15	(1710, 113)
17	(2482, 145)
19	(3458, 181)
21	(4662, 221)

Aşağıda Çizelge 3.3. de $2 \leq k \leq 20$ çift tam sayıları için $F_{\Delta}(x, y) = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümleri verilmiştir.

Çizelge 3.3. $F_{\Delta}(x, y) = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümleri

k	(x_1, y_1)
2	(3, 1)
4	(9, 2)
6	(19, 3)
8	(33, 4)
10	(51, 5)
12	(73, 6)
14	(99, 7)
16	(129, 8)
18	(163, 9)
20	(201, 10)

3.2 $F_\Delta(x,y) = \pm 1$ Pell Denklemi

Bir önceki alt bölümde F_Δ Pell formunun tüm otomorfizm kümeleri belirlendi. Bu kısımda ise

$$F_\Delta(x,y) = \pm 1$$

denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi belirlenecektir. Yine bu kısımda da problem $k \geq 3$ tek ve $k \geq 2$ çift olmak üzere iki durumda verilecektir.

1. Durum. $k \geq 3$ tek.

Teorem 3.2.1. $F_\Delta(x,y) = 1$ denklemi için

(1) denklemin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2}, \frac{k^5 + 4k^3 + 3k}{2}\right)$$

dir.

(2) $n \geq 1$ için

$$M = \begin{bmatrix} \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} & \frac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2} \\ \frac{k^5+4k^3+3k}{2} & \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

ve

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\Omega = \{(x_n, y_n) : n \geq 1\}$$

dir.

(3) $n \geq 4$ için denklemin tam sayı çözümleri

$$x_n = (k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 1)(x_{n-1} + x_{n-2}) - x_{n-3}$$

$$y_n = (k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 1)(y_{n-1} + y_{n-2}) - y_{n-3}$$

bağıntısını gerçekler.

(4) denklemin herhangi bir (x_n, y_n) tam sayı çözümü basit sürekli kesirli açılım yardımıyla

$$\frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \left[3; \underbrace{1, 1, 1, 1, 6}_{2n-1 \text{ kez}}, 1, 1, 2\right] & k = 3 \text{ ise} \\ \left[k; \underbrace{\frac{k-1}{2}, 1,\ 1,\ \frac{k-1}{2},\ 2k}_{2n-1 \text{ kez}},\ \frac{k-1}{2},\ 1,\ 1,\ \frac{k-1}{2}\right] & k \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak da verilebilir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. (1) Teorem 3.1.1 den denklemin temel çözümünün

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2}, \frac{k^5 + 4k^3 + 3k}{2}\right)$$

olduğu açıktır.

(2) $n = 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2} \\ \frac{k^5 + 4k^3 + 3k}{2} \end{bmatrix}$$

olup denklemin temel çözümü olduğundan bir tam sayı çözümüdür. $n - 1$ için doğru olduğu kabul edilsin, yani

$$\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2} & \frac{k^7 + 8k^5 + 19k^3 + 12k}{2} \\ \frac{k^5 + 4k^3 + 3k}{2} & \frac{k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2}{2} \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} & \frac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2} \\ \frac{k^5+4k^3+3k}{2} & \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} & \frac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2} \\ \frac{k^5+4k^3+3k}{2} & \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} & \frac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2} \\ \frac{k^5+4k^3+3k}{2} & \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} & \frac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2} \\ \frac{k^5+4k^3+3k}{2} & \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2}\right) x_{n-1} + \left(\frac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2}\right) y_{n-1} \\ \left(\frac{k^5+4k^3+3k}{2}\right) x_{n-1} + \left(\frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2}\right) y_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir. Buna göre

$$x_n = \left(\frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2}\right) x_{n-1} + \left(\frac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2}\right) y_{n-1}$$

ve

$$y_n = \left(\frac{k^5+4k^3+3k}{2}\right) x_{n-1} + \left(\frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2}\right) y_{n-1}$$

olup

$$x_n^2 - dy_n^2 = \left[\left(\frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2}\right) x_{n-1} + \left(\frac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2}\right) y_{n-1}\right]^2$$

$$-(k^2+4)\left[(\tfrac{k^5+4k^3+3k}{2})x_{n-1}+(\tfrac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2})y_{n-1}\right]^2$$

$$= x_{n-1}^2-(k^2+4)y_{n-1}^2$$

$$= 1$$

dir, yani eşitlik her $n \geq 1$ için doğrudur.

(3) $x_1=\frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2}$ ve $y_1=\frac{k^5+4k^3+3k}{2}$ için $\alpha = x_1+y_1\sqrt{d}$ ve $\beta = x_1-y_1\sqrt{d}$ olsun. Bu takdirde

$$x_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \quad \text{ve} \quad y_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{d}}$$

dir. Diğer yandan

$$(k^6+6k^4+9k^2+1)\alpha^2+(k^6+6k^4+9k^2+1)\alpha-1=\alpha^3$$

ve

$$(k^6+6k^4+9k^2+1)\beta^2+(k^6+6k^4+9k^2+1)\beta-1=\beta^3$$

olduğundan

$$(k^6+6k^4+9k^2+1)(x_{n-1}+x_{n-2})-x_{n-3}$$

$$=(k^6+6k^4+9k^2+1)(\tfrac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{2}+\tfrac{\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}}{2})-\tfrac{\alpha^{n-3}+\beta^{n-3}}{2}$$

$$=\frac{\alpha^n}{2}\left[\frac{(k^6+6k^4+9k^2+1)\alpha^2+(k^6+6k^4+9k^2+1)\alpha-1}{\alpha^3}\right]$$

$$+\frac{\beta^n}{2}\left[\frac{(k^6+6k^4+9k^2+1)\beta^2+(k^6+6k^4+9k^2+1)\beta-1}{\beta^3}\right]$$

$$=\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}$$

$$=x_n$$

dir. Benzer şekilde $n \geq 4$ için $y_n=(k^6+6k^4+9k^2+1)(y_{n-1}+y_{n-2})-y_{n-3}$ olduğu da gösterilebilir.

(4) Tümevarımla gösterilebilir.

Yukarıdaki teoreme dikkat edilirse, $k \geq 3$ tek olması durumunda $F_{\Delta}(x, y) = 1$ denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesinin belirlenebilmesi için (3.3) deki M matrisinin n. kuvvetinin belirlenmesi gerekir.

Teorem 3.2.2. $x_1 = \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2}$ ve $y_1 = \frac{k^5+4k^3+3k}{2}$ olsun. $n \geq 2$ çift ise

$$R = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} x_1^{n-2i} y_1^{2i} d^i = U,$$

$$S = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^{i+1}$$

$$T = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^{i}$$

ve $n \geq 1$ tek ise

$$R = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} x_1^{n-2i} y_1^{2i} d^i = U,$$

$$S = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^{i+1}$$

$$T = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^{i}$$

olmak üzere (3.3) deki M matrisinin n. kuvveti

$$M^n = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}$$

dir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. Tümevarımla gösterilebilir.

Teorem 3.2.3. $x_1 = \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2}$ ve $y_1 = \frac{k^5+4k^3+3k}{2}$ olsun. Bu takdirde $n \geq 2$ çift için

$$(x_n, y_n) = \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} x_1^{n-2i} y_1^{2i} d^i, \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^i \right)$$

ve $n \geq 1$ tek için

$$(x_n, y_n) = \left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} x_1^{n-2i} y_1^{2i} d^i, \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^i \right)$$

olmak üzere $\Omega = \{(x_n, y_n): n \geq 1\}$ dir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. Teorem 3.2.1 ve 3.2.2 den görülür.

Şimdi $F_\Delta(x, y) = -1$ negatif Pell denklemi ele alınabilir.

Teorem 3.2.4. $F_\Delta(x, y) = -1$ negatif Pell denklemi için

(1) denklemin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{k^3 + 3k}{2}, \frac{k^2 + 1}{2}\right)$$

dir.

(2) $n \geq 1$ için

$$M = \begin{bmatrix} \frac{k^3 + 3k}{2} & \frac{k^4 + 5k^2 + 4}{2} \\ \frac{k^2 + 1}{2} & \frac{k^3 + 3k}{2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} = M^{2n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\Omega = \{(x_{2n-1}, y_{2n-1}): n \geq 1\}$ dir.

(3) $n \geq 4$ için denklemin tam sayı çözümleri

$$x_{2n-1} = (k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 1)(x_{2n-3} + x_{2n-5}) - x_{2n-7}$$

$$y_{2n-1} = (k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 1)(y_{2n-3} + y_{2n-5}) - y_{2n-7}$$

bağıntısını gerçekler.

(4) denklemin herhangi bir (x_{2n-1}, y_{2n-1}) tam sayı çözümü basit sürekli kesirli açılım yardımıyla

$$\frac{x_{2n-1}}{y_{2n-1}} = \begin{cases} \left[3; \underbrace{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 6}_{2n-2 \text{ kez}},\ 1,\ 1,\ 2\right] & k = 3 \text{ ise} \\ \left[k; \underbrace{\frac{k-1}{2}, 1,\ 1, \frac{k-1}{2},\ 2k}_{2n-2 \text{ kez}}, \frac{k-1}{2},\ 1,\ 1,\ \frac{k-1}{2}\right] & k \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak da verilebilir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. Teorem 3.2.1 deki işlemlere benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.5. $x_1 = \frac{k^3+3k}{2}$ ve $y_1 = \frac{k^2+1}{2}$ olsun. Bu takdirde her $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} = \sum_{i=0}^{\frac{2n-1}{2}} \binom{2n-1}{2i} x_1^{2n-1-2i} y_1^{2i} d^i$$

ve

$$y_{2n-1} = \sum_{i=0}^{\frac{2n-1}{2}} \binom{2n-1}{2i+1} x_1^{2n-2-2i} y_1^{2i+2} d^i$$

olmak üzere $\Omega = \{(x_{2n-1}, y_{2n-1}): n \geq 1\}$ dir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. Teorem 3.2.3 ve 3.2.4 den görülür.

2. Durum. $k \geq 2$ çift.

Teorem 3.2.6. $F_\Delta(x,y) = 1$ denklemi için

(1) denklemin temel çözümü $(x_1, y_1) = (\frac{k^2+2}{2}, \frac{k}{2})$ dir.

(2) $n \geq 1$ için

$$M = \begin{bmatrix} \frac{k^2+2}{2} & \frac{k^3+4k}{2} \\ \frac{k}{2} & \frac{k^2+2}{2} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

ve $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\Omega = \{(x_n, y_n) : n \geq 1\}$ dir.

(3) $n \geq 4$ için denklemin tam sayı çözümleri

$$x_n = (k^2+1)(x_{n-1} + x_{n-2}) - x_{n-3}$$

$$y_n = (k^2+1)(y_{n-1} + y_{n-2}) - y_{n-3}$$

bağıntısını gerçekler.

(4) denklemin herhangi bir (x_n, y_n) tam sayı çözümü basit sürekli kesirli açılım yardımıyla

$$\frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \left[2;\ \underbrace{1,\ 4}_{n-2 \text{ kez}},\ 1,\ 5\right] & k = 2 \text{ ve } n \geq 2 \text{ ise} \\ \left[k;\ \underbrace{\frac{k}{2},\ 2k}_{n-1 \text{ kez}},\ \frac{k}{2}\right] & k \geq 4 \text{ ve } n \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak da verilebilir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. Teorem 3.2.1 deki işlemlere benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.7. $x_1 = \frac{k^2+2}{2}$ ve $y_1 = \frac{k}{2}$ olsun. $n \geq 2$ çift ise

$$R = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} x_1^{n-2i} y_1^{2i} d^i = U,$$

$$S = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^{i+1}$$

$$T = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^{i}$$

ve $n \geq 1$ tek ise

$$R = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} x_1^{n-2i} y_1^{2i} d^i = U,$$

$$S = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^{i+1}$$

$$T = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^{i}$$

olmak üzere (3.4) deki M matrisinin $n.$ kuvveti $M^n = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}$ dir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. Tümevarımla gösterilebilir

Teorem 3.2.8. $x_1 = \frac{k^2+2}{2}$ ve $y_1 = \frac{k}{2}$ olsun. Bu takdirde $n \geq 2$ çift için

$$(x_n, y_n) = \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} x_1^{n-2i} y_1^{2i} d^i, \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^{i} \right)$$

ve $n \geq 1$ tek için

$$(x_n, y_n) = \left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} x_1^{n-2i} y_1^{2i} d^i, \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-1-2i} y_1^{2i+1} d^i \right)$$

olmak üzere $\Omega = \{(x_n, y_n): n \geq 1\}$ dir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. Teorem 3.2.6 ve 3.2.7 den görülür.

Teorem 3.2.9. $F_\Delta(x, y) = -1$ denklemi için $\Omega = \{\quad\}$ dir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. Teorem 3.1.1 de $k \geq 2$ çift tam sayısı için açılımının peryot uzunluğunun çift olduğu gösterildi. Dolayısıyla $F_\Delta(x, y) = -1$ denkleminin temel çözümü ve tam sayı çözümleri olmadığından $\Omega = \{\quad\}$ dir.

$d = k^2 + 4$ için $\Delta = 4d$ olarak alındı. $\Delta = 1 + 4d$ olarak alınması durumunda ise yukarıdaki teoremlere benzer şekilde bir bağıntı elde etmek mümkün değildir.

Çizelge 3.4. $F_\Delta(x, y) = x^2 + xy - dy^2 = 1$ in temel çözümleri

k	(x_1, y_1)
3	(22, 7)
5	(5, 1)
7	(34, 5)
9	(131, 15)
13	(38, 3)

Gerçekten de Çizelge 3.4 de de görüleceği üzere

$$F_\Delta(x, y) = x^2 + xy - dy^2 = 1$$

denkleminin temel çözümlerinin k ya bağlı olarak elde edilmesi mümkün değildir.

3.3 $F_\Delta(x,y) = \pm k^2$ Pell Denklemi

Bu alt bölümde ise

$$F_\Delta(x,y) = \pm k^2$$

denklemi ele alınacaktır. Yine bir önceki alt bölümde olduğu gibi bu bölümde de problem $k \geq 3$ tek ve $k \geq 2$ çift olmak üzere iki durumda ele alınacaktır.

1. Durum. $k \geq 3$ tek.

Teorem 3.3.1. $F_\Delta(x,y) = k^2$ pozitif Pell denklemi için

(1) $k \geq 3$ tam kare değil ve $\#\mathrm{Rep} = 4$ ise

$$x_0^* = k, x_1^* = \frac{k^4 - 2k^3 + 5k^2 - 6k + 4}{2} \quad \text{ve} \quad y_1^* = \frac{k^3 - 2k^2 + 3k - 2}{2} \tag{3.5}$$

için $\mathrm{Rep} = \{[\pm x_0^* \quad 0], [\pm x_1^* \quad y_1^*]\}$ dir. Bu durumda

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (x_1^* R + y_1^* S, x_1^* T + y_1^* U), n \geq 0$$

$$(x_{3n-1}, y_{3n-1}) = (x_1^* R - y_1^* S, x_1^* T - y_1^* U), n \geq 1$$

$$(x_{3n}, y_{3n}) = (x_0^* R, x_0^* T), n \geq 1$$

için

$$\Omega = \{(x_{3n+1}, y_{3n+1}), (x_{3n-1}, y_{3n-1}), (x_{3n}, y_{3n})\}$$

dir.

(2) $k \geq 9$ tam kare, yani belli bir $t \geq 1$ tam sayısı için $k = t^2$ ve $\#\mathrm{Rep} = 6$ ise x_0^*, x_1^*, y_1^* (3.5) deki değerler ve

$$x_1^{**} = \frac{t^5 - t^3 + 2t}{2}, y_1^{**} = \frac{t^3 - t}{2}$$

için

$$\mathrm{Rep}=\{[\pm x_0^* \quad 0],[\pm x_1^{**} \quad y_1^{**}],[\pm x_1^* \quad y_1^*]\}$$

dir. Bu durumda

$$(x_{5n+1},y_{5n+1})=(x_1^{**}R+y_1^{**}S,x_1^{**}T+y_1^{**}U),n\geq 0$$

$$(x_{5n+2},y_{5n+2})=(x_1^{*}R+y_1^{*}S,x_1^{*}T+y_1^{*}U),n\geq 0$$

$$(x_{5n-2},y_{5n-2})=(x_1^{*}R-y_1^{*}S,x_1^{*}T-y_1^{*}U),n\geq 1$$

$$(x_{5n-1},y_{5n-1})=(x_1^{**}R-y_1^{**}S,x_1^{**}T-y_1^{**}U),n\geq 1$$

$$(x_{5n},y_{5n})=(x_0^{*}R,x_0^{*}T),n\geq 1$$

için

$$\Omega=\{(x_{5n+1},y_{5n+1}),(x_{5n+2},y_{5n+2}),(x_{5n-2},y_{5n-2}),(x_{5n-1},y_{5n-1}),(x_{5n},y_{5n})\}$$

dir. R,S,T,U lar Teorem 3.2.2 deki gibidir. (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. (1) $F_\Delta(x,y)=k^2$ için $F=(1,0,-d)$ olup $\Delta=4d$ dir. $F_\Delta(x,y)=1$ Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1,y_1)=(\frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2},\frac{k^5+4k^3+3k}{2})$$

olduğundan

$$\tau_\Delta=\frac{k^6+6k^4+9k^2+2+(k^5+4k^3+3k)\sqrt{k^2+4}}{2}$$

dır. Bu durumda

$$x_0^*=k,x_1^*=\frac{k^4-2k^3+5k^2-6k+4}{2} \quad \text{ve} \quad y_1^*=\frac{k^3-2k^2+3k-2}{2}$$

olmak üzere

$$\mathrm{Rep}=\{[\pm x_0^* \quad 0],[\pm x_1^* \quad y_1^*]\}$$

ve

$$H = \begin{bmatrix} \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} & \frac{k^5+4k^3+3k}{2} \\ \frac{k^7+8k^5+19k^3+12k}{2} & \frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2} \end{bmatrix}$$

dır. Dikkat edilirse H matrisi (3.3) deki M matrisinin transpozudur. Burada

$n \geq 1$ için $[x_{3n} \quad y_{3n}] = [x_0^* \quad 0]H^n$

$n \geq 0$ için $[x_{3n+1} \quad y_{3n+1}] = [x_1^* \quad y_1^*]H^n$

$n \geq 1$ için $[x_{3n-1} \quad y_{3n-1}] = [x_1^* \quad -y_1^*]H^n$

dir. Dolayısıyla

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (x_1^*R + y_1^*S, x_1^*T + y_1^*U), n \geq 0$$

$$(x_{3n-1}, y_{3n-1}) = (x_1^*R - y_1^*S, x_1^*T - y_1^*U), n \geq 1$$

$$(x_{3n}, y_{3n}) = (x_0^*R, x_0^*T), n \geq 1$$

için $\Omega = \{(x_{3n+1}, y_{3n+1}), (x_{3n-1}, y_{3n-1}), (x_{3n}, y_{3n})\}$ dir.

(2) Diğer tüm durumlar da benzer işlemler yapılarak gösterilebilir.

Teorem 3.3.2. $F_\Delta(x, y) = -k^2$ negatif Pell denklemi için

(1) $k \geq 3$ tam kare değil ve #Rep $= 4$ ise

$$x_0^* = 2, x_1^* = \frac{k^4+3k^2}{2} \quad \text{ve} \quad y_1^* = \frac{k^3+k}{2} \tag{3.6}$$

için

$$\text{Rep} = \{[\pm x_0^* \quad 1], [\pm x_1^* \quad y_1^*]\}$$

dir. Bu durumda

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (x_0^*R + S, x_0^*T + U), n \geq 0$$

$$(x_{3n+1}, y_{3n+2}) = (x_1^*R + y_1^*S, x_1^*T + y_1^*U), n \geq 0$$

$$(x_{3n}, y_{3n}) = (-x_0^*R + S, -x_0^*T + U), n \geq 1$$

için

$$\Omega=\{(x_{3n+1},y_{3n+1}),(x_{3n+2},y_{3n+2}),(x_{3n},y_{3n})\}$$

dir.

(2) $k\geq 9$ tam kare, yani belli bir $t\geq 1$ tam sayısı için $k=t^2$ ve #Rep $=6$ ise x_0^*,x_1^*,y_1^* (3.6) daki değerler ve

$$x_1^{**}=\frac{t^5+t^3+2\mathrm{t}}{2} \quad \text{ve} \quad y_1^{**}=\frac{t^3+t}{2}$$

için

$$\text{Rep}=\{[\pm x_0^* \quad 1],[\pm x_1^{**} \quad y_1^{**}],[\pm x_1^* \quad y_1^*]\}$$

dir. Bu durumda

$$(x_{5n+1},y_{5n+1})=(x_0^*R+S,x_0^*T+U),n\geq 0$$

$$(x_{5n+2},y_{5n+2})=(x_1^{**}R+y_1^{**}S,x_1^{**}T+y_1^{**}U),n\geq 0$$

$$(x_{5n+3},y_{5n+3})=(x_1^*R+y_1^*S,x_1^*T+y_1^*U),n\geq 0$$

$$(x_{5n-2},y_{5n-2})=(x_1^*R-y_1^*S,x_1^*T-y_1^*U),n\geq 1$$

$$(x_{5n-1},y_{5n-1})=(-x_1^{**}R+y_1^{**}S,-x_1^{**}T+y_1^{**}U),n\geq 1$$

$$(x_{5n},y_{5n})=(-x_0^*R+S,-x_0^*T+U),n\geq 1$$

için

$$\Omega=\{(x_{5n+1},y_{5n+1}),(x_{5n+2},y_{5n+2}),(x_{5n+3},y_{5n+3}),(x_{5n-1},y_{5n-1}),(x_{5n},y_{5n})\}$$

dir (R,S,T,U lar Teorem 3.2.2 deki gibidir). (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. Teorem 3.3.1 in ispatındaki benzer işlemler yapılarak gösterilebilir.

2. Durum. $k\geq 2$ çift.

Teorem 3.3.3. $F_\Delta(x,y)=k^2$ pozitif Pell denklemi için

(1) $k = 2$ ise Rep $= \{[\pm 2 \quad 0]\}$ olup $x_n = 2C_n$ and $y_n = 2B_n$ için $\Omega = \{(x_n, y_n)\}$ dir.

(2) $k = 4$ ise Rep $= \{[\pm 4 \quad 0], [\pm 6 \quad 1]\}$ olup

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (6R + S, 6T + U), n \geq 0$$

$$(x_{3n-1}, y_{3n-1}) = (6R - S, 6T - U), n \geq 1$$

$$(x_{3n}, y_{3n}) = (4R, 4T), n \geq 1$$

olmak üzere $\Omega = \{(x_{3n+1}, y_{3n+1}), (x_{3n-1}, y_{3n-1}), (x_{3n}, y_{3n})\}$ dir.

(3) $k \geq 6$ tam kare değil ve #Rep $= 4$ ise

$$x_0^* = k, x_1^* = \frac{k^2 - 2k + 4}{2} \quad \text{ve} \quad y_1^* = \frac{k-2}{2} \tag{3.7}$$

için

$$\text{Rep} = \{[\pm x_0^* \quad 0], \ [\pm x_1^* \quad y_1^*]\}$$

dir. Bu durumda

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (x_1^* R + y_1^* S, x_1^* T + y_1^* U), n \geq 0$$

$$(x_{3n-1}, y_{3n-1}) = (x_1^* R - y_1^* S, x_1^* T - y_1^* U), n \geq 1$$

$$(x_{3n}, y_{3n}) = (x_0^* R, x_0^* T), n \geq 1$$

için

$$\Omega = \{(x_{3n+1}, y_{3n+1}), (x_{3n-1}, y_{3n-1}), (x_{3n}, y_{3n})\}$$

dir.

(4) $k \geq 16$ tam kare, yani belli bir $t \geq 1$ tam sayısı için $k = t^2$ ve #Rep $= 6$ ise x_0^*, x_1^*, y_1^* (3.7) deki değerler ve

$$x_1^{**} = \frac{t^3 + 2t}{2} \quad \text{ve} \quad y_1^{**} = \frac{t}{2}$$

için

$$\text{Rep} = \{[\pm x_0^* \quad 0], [\pm x_1^{**} \quad y_1^{**}], [\pm x_1^* \quad y_1^*]\}$$

dir. Bu durumda

$$(x_{5n+1}, y_{5n+1}) = (x_1^{**}R + y_1^{**}S, x_1^{**}T + y_1^{**}U), n \geq 0$$

$$(x_{5n+2}, y_{5n+2}) = (x_1^{*}R + y_1^{*}S, x_1^{*}T + y_1^{*}U), n \geq 0$$

$$(x_{5n-2}, y_{5n-2}) = (x_1^{*}R - y_1^{*}S, x_1^{*}T - y_1^{*}U), n \geq 1$$

$$(x_{5n-1}, y_{5n-1}) = (x_1^{**}R - y_1^{**}S, x_1^{**}T - y_1^{**}U), n \geq 1$$

$$(x_{5n}, y_{5n}) = (x_0^{*}R, x_0^{*}T), n \geq 1$$

için

$$\Omega = \{(x_{5n+1}, y_{5n+1}), (x_{5n+2}, y_{5n+2}), (x_{5n+3}, y_{5n+3}), (x_{5n-1}, y_{5n-1}), (x_{5n}, y_{5n})\}$$

dir (R, S, T, U lar Teorem 3.2.2 deki gibidir). (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. (1) $k = 2$ olsun. Bu takdirde $x^2 - 8y^2 = 4$ denklemi için Rep = $\{[\pm 2 \quad 0]\}$ ve $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ olup $n \geq 1$ için $[x_n \quad y_n] = [2 \quad 0]M^n$ dir. Diğer yandan $n \geq 1$ için

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & B_n \\ 8B_n & C_n \end{bmatrix}$$

olduğudan

$$[x_n \quad y_n] = [2 \quad 0]\begin{bmatrix} C_n & B_n \\ 8B_n & C_n \end{bmatrix} = [2C_n \quad 2B_n]$$

dır. Şu halde $\Omega = \{(2C_n, 2B_n)\}$ dir.

(2) $k = 4$ için Rep = $\{[\pm 4 \quad 0], [\pm 6 \quad 1]\}$ olup $M = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 40 & 9 \end{bmatrix}$ dir. Burada

$n \geq 1$ için $[x_{3n-1} \quad y_{3n-1}] = [6 \quad -1]M^n$

$n \geq 1$ için $[x_{3n} \quad y_{3n}] = [4 \quad 0]M^n$

$n \geq 0$ için $[x_{3n+1} \quad y_{3n+1}] = [6 \quad 1]M^n$

olduğundan

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (6R + S, 6T + U), n \geq 0$$

$$(x_{3n-1}, y_{3n-1}) = (6R - S, 6T - U), n \geq 1$$

$$(x_{3n}, y_{3n}) = (4R, 4T), n \geq 1$$

için $\Omega = \{(x_{3n+1}, y_{3n+1}), (x_{3n-1}, y_{3n-1}), (x_{3n}, y_{3n})\}$ dir. Diğer iki durum da benzer şekilde gösterilebilir.

$F_\Delta(x, y) = -k^2$ negatif Pell denklemi için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.4. $F_\Delta(x, y) = -k^2$ negatif Pell denklemi için

(1) $k = 2$ ise Rep $= \{[\pm 2 \quad 1]\}$ dir ve $x_n = 2c_n, y_n = P_{2n-1}$ olmak üzere $\Omega = \{(x_n, y_n)\}$ dir.

(2) $k = 4$ ise Rep $= \{[\pm 2 \quad 1], [\pm 8 \quad 2]\}$ olup

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (2R + S, 2T + U), n \geq 0$$

$$(x_{3n+2}, y_{3n+2}) = (8R + 2S, 8T + 2U), n \geq 0$$

$$(x_{3n}, y_{3n}) = (-2R + S, -2T + U), n \geq 1$$

için

$$\Omega = \{(x_{3n+1}, y_{3n+1}), (x_{3n+2}, y_{3n+2}), (x_{3n}, y_{3n})\}$$

dir.

(3) $k \geq 6$ tam kare değil ve #Rep $= 4$ ise

$$x_0^* = 2, x_1^* = \frac{k^2}{2} \quad \text{ve} \quad y_1^* = \frac{k}{2} \tag{3.8}$$

için

$$\text{Rep} = \{[\pm x_0^* \quad 1], [\pm x_1^* \quad y_1^*]\}$$

dir.

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (x_0^* R + S, x_0^* T + U), n \geq 0$$

$$(x_{3n+2}, y_{3n+2}) = (x_1^* R + y_1^* S, x_1^* T + y_1^* U), n \geq 0$$

$$(x_{3n}, y_{3n}) = (-x_0^* R + S, -x_0^* T + U), n \geq 1$$

için

$$\Omega = \{(x_{3n+1}, y_{3n+1}), (x_{3n+2}, y_{3n+2}), (x_{3n}, y_{3n})\}$$

dir.

(4) $k \geq 16$ tam kare, yani belli bir $t \geq 1$ tam sayısı için $k = t^2$ ve $\#\mathrm{Rep} = 6$ ise x_0^*, x_1^*, y_1^* (3.8) deki değerler ve

$$x_1^{**} = \frac{t^3 - 2t}{2}, y_1^{**} = \frac{t}{2}$$

için

$$\mathrm{Rep} = \{[\pm x_0^* \quad 1], [\pm x_1^{**} \quad y_1^{**}], [\pm x_1^* \quad y_1^*]\}$$

dir.

$$(x_{5n+1}, y_{5n+1}) = (x_0^* R + S, x_0^* T + U), n \geq 0$$

$$(x_{5n+2}, y_{5n+2}) = (x_1^{**} R + y_1^{**} S, x_1^{**} T + y_1^{**} U), n \geq 0$$

$$(x_{5n+3}, y_{5n+3}) = (x_1^* R + y_1^* S, x_1^* T + y_1^* U), n \geq 0$$

$$(x_{5n-1}, y_{5n-1}) = (-x_1^{**} R + y_1^{**} S, -x_1^{**} T + y_1^{**} U), n \geq 1$$

$$(x_{5n}, y_{5n}) = (-x_0^* R + S, -x_0^* T + U), n \geq 1$$

için

$$\Omega = \{(x_{5n+1}, y_{5n+1}), (x_{5n+2}, y_{5n+2}), (x_{5n+3}, y_{5n+3}), (x_{5n-1}, y_{5n-1}), (x_{5n}, y_{5n})\}$$

dir (R, S, T, U lar Teorem 3.2.2 deki gibidir). (Tekcan ve Biberoğlu 2022)

İspat. (1) $k = 2$ olsun. Bu takdirde $x^2 - 8y^2 = -4$ denklemi için $\mathrm{Rep} = \{[\pm 2 \quad 1]\}$ ve $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ dir. Burada $n \geq 1$ için $[x_n \quad y_n] = [-2 \quad 1] M^n$ dir ve

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & B_n \\ 8B_n & C_n \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$[x_n \quad y_n] = [-2 \quad 1]\begin{bmatrix} C_n & B_n \\ 8B_n & C_n \end{bmatrix} = [-2C_n + 8B_n \qquad -2B_n + C_n]$$

dir. Burada dikkat edilirse

$$-C_n + 4B_n = c_n \quad \text{ve} \quad -2B_n + C_n = P_{2n-1}$$

dir. Dolayısıyla $x_n = 2c_n$ ve $y_n = P_{2n-1}$ için $\Omega = \{(x_n, y_n)\}$ dir.

(2) $k = 4$ için Rep $= \{[\pm 2 \quad 1], [\pm 8 \quad 2]\}$ ve $M = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 40 & 9 \end{bmatrix}$ dir. Burada

$n \geq 0$ için $[x_{3n+1} \quad y_{3n+1}] = [2 \quad 1]M^n$

$n \geq 1$ için $[x_{3n} \quad y_{3n}] = [-2 \quad 1]M^n$

$n \geq 0$ için $[x_{3n+2} \quad y_{3n+2}] = [8 \quad 2]M^n$

olduğundan

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (2R + S, 2T + U), n \geq 0$$

$$(x_{3n+2}, y_{3n+2}) = (8R + 2S, 8T + 2U), n \geq 0$$

$$(x_{3n}, y_{3n}) = (-2R + S, -2T + U), n \geq 1$$

için $\Omega = \{(x_{3n+1}, y_{3n+1}), (x_{3n+2}, y_{3n+2}), (x_{3n}, y_{3n})\}$ dir. Diğer durum da aynı yöntemle gösterilebilir.

4. SONUÇ

Bu tezde $k \geq 1$ tam sayısı için $d = k^2 + 4$ olmak üzere $\Delta = 4d$ diskriminantlı

$$F_\Delta(x, y) = x^2 - dy^2$$

Pell formu ele alındı ve ilk olarak bu F_Δ Pell formunun tüm

$$Aut^+(F_\Delta),\ Aut^-(F_\Delta) \ \text{ ve } \ Aut^*(F_\Delta)$$

otomorfizmleri kümeleri $k \geq 3$ tek ve $k \geq 2$ çift olmak üzere iki farklı durumda ele alındı ve bu kümeler k ya bağlı olarak elde edildi.

Daha sonra

$$F_\Delta(x, y) = \pm 1$$

denkleminin tam sayı çözümleri k ya bağlı olarak elde edildi. Üstelik denklemin tam sayı çözümlerinin basit sürekli kesirli açılımlar yardımıyla da verilebileceği gösterildi.

Son olarak ise

$$F_\Delta(x, y) = \pm k^2$$

Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi yine k ya bağlı olarak elde edildi. Tüm bu tam sayı çözümleri, denklemin çözüm temsilcileri kümesindeki elemanlara ve bu elemanların sayısına bağlı olacak şekilde elde edildi.

KAYNAKLAR

Barbeau, E.J. (2003). Pell's equation. Springer-Verlag New York, Inc.

Behera, A. ve Panda, G.K. (1999). On the square roots of triangular numbers. *The Fibonacci Quart.* 37(2): 98-105.

Flath, D.E. (1989). Introduction to number theory. Wiley.

Gözeri, G.K., Özkoç, A. ve Tekcan, A. (2017). Some algebraic relations on balancing numbers. *Utilitas Mathematica* 103: 217-236.

Mollin, R.A. (1996). Quadratics. CRS Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo

Panda, K.G. ve Ray, P.K. (2005). Cobalancing numbers and cobalancers. *Int. Jour. of Math and Math. Sci.* 8: 1189-1200.

Panda, G.K. ve Ray, P.K. (2011). Some links of balancing and cobalancing Numbers with Pell and associated Pell numbers. *Bull. of Inst. of Math. Acad. Sinica* 6(1): 41-72.

Ray, P.K. (2009). Balancing and cobalancing numbers. *Ph.D. dissertation*. Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.

Tekcan, A. (2007). The base points of indefinite quadratic forms in the cycle and the proper cycle of an indefinite quadratic forms. *Hacettepe Jour. of Maths. and Sta.* 36(2): 101-114.

Tekcan, A. ve Biberoğlu, G. (2022). The set of automorphisms of Pell forms and Pell equations. *South East Asian Bulletin of Mathematics.* 46(6): 783-800.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Gülşah BİBEROĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 09/08/1999
Yabancı Dil	: İngilizce

Eğitim Durumu	
Lise	: Bahçelievler Anadolu Lisesi, 2013-2017
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2017-2021

Çalıştığı Kurumlar	: Ofis Matematik, 2020-2021

İletişim (e-posta)	: gulsah.biberoglu14@gmail.com

Yayınlar	:

Tekcan, A. ve Biberoğlu, G. (2022). The set of automorphisms of Pell forms and Pell equations. *South East Asian Bulletin of Mathematics.* 46(6): 783-800.