T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SIFIRLAYICI KOŞULLARIYLA TANIMLANAN BAZI HALKALAR ÜZERİNE

Ebru BİTKİN
0000-0003-4771-381X

Doç. Dr. Yeliz KARA ŞEN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2023

TEZ ONAYI

Ebru BİTKİN tarafından hazırlanan "Sıfırlayıcı Koşullarıyla Tanımlanan Bazı Halkalar Üzerine " adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Yeliz KARA ŞEN

Başkan: Prof. Dr. Gökhan SOYDAN İmza
0000-0002-6321-4132
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ İmza
0000-0003-1526-6963
Bursa Teknik Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Yeliz KARA ŞEN İmza
0000-0002-8001-6082
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Ensititü Müdürü
01.06.2023

B. U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01.06.2023

İmza

Ebru BİTKİN

TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge** " kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Doç. Dr. Yeliz KARA ŞEN	Ebru BİTKİN
01.06.2023	01.06.2023

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SIFIRLAYICI KOŞULLARIYLA TANIMLANAN BAZI HALKALAR ÜZERİNE

Ebru BİTKİN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yeliz KARA ŞEN

Tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, çalışmadaki bütünlüğün sağlanması için gerekli olan temel kavramlara yer verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde Baer halkalar ve bu halkanın genelleştirmelerinden olan yarı-Baer ve π-Baer halkalardan bahsedilmiştir. Bu halkalara ait temel özellikler ve bu halkaların çeşitli genişlemeleri araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde ise sıfırlayıcı koşulları kullanılarak tanımlanan bazı halka sınıflarından olan dual halkalar ile Ikeda Nakayama halkaları bulunmaktadır. Ayrıca yeni bir halka sınıfı olan π-dual halka sınıfı tanıtılmıştır. π-dual halkaların bir takım özellikleri incelenmiştir. Bu yeni sınıfın dual halkalar, π-Baer halkalar ve π-genişleyen halkalarla olan ilişkileri de araştırılmıştır.

Son bölüm ise çalışmaya ait sonuçları içermektedir.

Anahtar Kelimeler: Baer Halka, Projeksiyon Değişmez İdeal, Sıfırlayıcı Koşulları, Yarı-Baer Halka, π-Baer Halka.

2023, v + 63 sayfa.

ABSTRACT

Msc Thesis

ON SOME RINGS DEFINED BY ANNIHILATOR CONDITIONS

Ebru BİTKİN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Yeliz KARA ŞEN

This thesis consists of four chapters.

In the first part, for the sake of completeless the fundamental notions are given.

In the second chapter, Baer rings and some generalizations of Baer rings such as quasi-Baer and π-Baer rings are mentioned. The principal properties and several extensions of the former rings are explored.

In the third section, dual rings and Ikeda Nakayama rings, which are also defined by annihilator conditions, are included. Moreover, the class of π-dual rings is introduced. Several properties of π-dual rings is studied. The relationships of this new class with dual rings, π-Baer rings and π-extending rings are also investigated.

Final section includes the results of the study.

Key Words: Annihilator Conditions, Baer Rings, Quasi-Baer Rings, Projection Invariant İdeal, π-Baer Rings.
2023, v +63 pages.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sürecinde, sabrı, bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, güler yüzü ve destek veren sözleriyle çalışma azmimi arttıran, tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve düzenlenmesinde ilgi ve desteğini esirgemeyen, değerli zamanını ayırmaktan çekinmeyen, engin birikimiyle yardımına ihtiyaç duyduğum her zaman kapısını açık bulma bahtiyarlığını hissettiğim, birlikte çalışmaktan onur duyduğum değerli tez danışmanım sayın Doç. Dr. Yeliz KARA ŞEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Lisans hayatım boyunca hem matematiğe hem hayata dair çok şey öğrendiğim, lisans üstü eğitimime başlamamda çok büyük katkıları olan, hayatım boyunca örnek alacağım kıymetli hocam Prof. Dr. Şenol DOST'a ve bana inanıp benden desteğini esirgemeyen, her konuşmamızda motivasyonumu arttıran değerli Prof. Dr. Gökhan SOYDAN'a tüm emekleri için çok teşekkür ederim.

Tez sürecinde yaşadığım sıkıntılarımda yanımda olan, her türlü desteğini aldığım arkadaşım Recep TUTUCU'ya teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışmasına 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile destek olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Yaşamım boyunca vermiş olduğu destekle gücüme güç katan, maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan, desteklerini esirgemeyen ve hala kahrımı çeken canım annem Leyla BİTKİN'e sevgili babam Ahmet BİTKİN ve biricik kardeşim Said BİTKİN'e teşekkür ederim.

Ebru BİTKİN
TARİH

İçindekiler

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
R	Halka
$I \trianglelefteq R$	I, R halkasının bir ideali
$I_R \leq R_R$	I, R halkasının bir sağ ideali
${}_RI \leq {}_RR$	I, R halkasının bir sol ideali
$I_R \trianglelefteq_p R_R$	I, R halkasının bir projeksiyon değişmez sağ ideali
${}_RI \trianglelefteq_p {}_RR$	I, R halkasının bir projeksiyon değişmez sol ideali
$R[x]$	Katsayıları R halkasından alınan polinomlar halkası
M_R	M bir sağ R-modül
$End(M_R)$	M modülünün endomorfizma halkası
$Soc(M)$	M modülünün minimal alt modüllerinin toplamı
$Z(M)$	M modülünün tekil alt modülü
$N \leq M$	N, M modülünün sağ R-alt modülü
$N \leq_d M$	N, M modülünün dik toplanan alt modülü
$N \leq_e M$	N, M modülünün esas alt modülü
$N_R \trianglelefteq_p M_R$	N, M modülünün projeksiyon değişmez sağ alt modülü
$N_R \trianglelefteq M_R$	N, M modülünün tam değişmez sağ alt modülü
$N \leq_c M$	N, M modülünün tümleyen alt modülü
$Mat_n(R)$	R halkası üzerine kurulu $n \times n$ tipindeki matris halkası
$\mathbf{T}_n(R)$	R halkası üzerine kurulu $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matris halkası
$\mathbf{I}(R)$	R halkasındaki eş kare elemanlarla üretilen alt halka
$S_l(R)$	R halkasının sol yarı merkezil eş kare elemanlarının kümesi
$S_r(R)$	R halkasının sağ yarı merkezil eş kare elemanlarının kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi

GİRİŞ

Baer halka kavramı, Kaplansky tarafından 1955 yılında tanıtılmıştır. Buna göre, bir halkanın boş olmayan her alt kümesinin sağ sıfırlayıcısının bir eş kare eleman tarafından sağ ideal olarak üretildiği halkalara Baer halka adı verilmiştir. Kaplansky'nin von Neumann cebirlerinden soyutlayarak tanımladığı bu sınıfın kökleri operatör teoriye dayanmaktadır. Hilbert uzayındaki operatör halkalarının bazı aksiyomları, Baer halkalanın sağladığı bazı özelliklerin cebir teorideki özel durumlarıdır. Kaplansky ve Berberian, Baer halka teorisinin geliştirilmesinde etkili olmuşlardır (Kaplansky, 1965), (Berberian, 1972).

Clark, herhangi bir idealin sağ sıfırlayıcısının bir eş kare eleman tarafından sağ ideal olarak üretildiği halkaları yarı-Baer (quasi-Baer) olarak tanımlamıştır (Clark, 1967). Bu kavramlar yardımıyla geliştirilen teorilerin önemi, halka üzerindeki belirli sıfırlayıcı koşullarının eş kare elemanlar tarafından üretilmesidir. Baer ve yarı-Baer koşullarının her birinin diğerine göre bazı avantajlı durumları söz konusudur. Genel olarak, Baer koşulu tek taraflı idealler üzerinde tanımlanırken, yarı-Baer koşulu iki yönlü ideallerle tanımlanır. Her tamlık bölgesi bir Baer halka ve her asal halka bir yarı-Baer halka olduğundan, Baer halkaların temel yapı taşı, bir bölge iken; yarı-Baer halkaların temel yapı taşı ise bir asal halkadır. Yarı-Baer halka koşulu, tam ya da üst üçgensel matris halkalarına ve polinom halkalarına hiçbir ek koşula gerek kalmadan aktarılmasına rağmen benzer özellikler Baer halkalar için geçerli değildir. Diğer bir ifadeyle; Baer halkalarının çeşitli halka genişlemelerinin Baer olması için bazı ek koşullara ihtiyaç duyulur.

Baer ve yarı-Baer halka koşulları arasında yer alan ve bu iki koşulun bazı belirgin özelliklerine sahip başka bir halka koşulunun varlığı da son yıllarda araştırılmıştır (Birkenmeier vd., 2018). Halkanın projeksiyon değişmez ideallerinin sıfırlayıcılarının eş kare eleman tarafından üretilmesiyle tanımlanan bu sınıfa, projeksiyon değişmez Baer (kısaca, π-Baer) halka adı verilmiştir. π-Baer halka özelliği bazı koşullar altında Baer ve yarı-Baer halka özellikleriyle aynı olur. Ayrıca, π-Baer halkaların çeşitli halka genelleştirmeleri (üst üçgensel matris halkaları, tam matris halkaları ve polinom halkaları) de π-Baer halkadır.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümünde, bütünlüğün sağlanması için, ihtiyaç duyulan temel tanımlara ve kavramlara yer verilmiştir. İkinci bölümünde ise Baer halkalar, yarı-Baer halkalar ve π-Baer halkalar yer almaktadır. Bu halka sınflarının yapısal özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Her bir halka sınıfının matris genişlemelerine ve polinom genişlemelerine göre nasıl davrandığına ilişkin sonuçlara da yer verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümü ise sıfırlayıcı koşullarıyla tanımlanan bazı halka sınıflarına ayrılmıştır. Bu kısımda dual halkalar ve Ikeda Nakayama halkalarıyla, dual halka kavramından yola çıkarak tanımlanan π-dual halka sınıfı bulunmaktadır. π-dual halkaların bir takım özellikleri incelenmiştir. Bu yeni sınıfın dual halkalar, π-Baer halkalar ve π-genişleyen halkalarla olan ilişkileri de araştırılmıştır. Son bölümde ise çalışmaya ait sonuçlar bulunmaktadır.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olacak, halka ve modül teoride iyi bilinen birtakım temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu kısım; (Anderson ve Fuller, 1992), (Birkenmeier vd., 2013), (Çallıalp ve Tekir, 2009), (Kaplansky, 1965) ve (Tercan ve Kara, 2015) kaynakları temel alınarak hazırlanmıştır.

1.1 Modüller

Tanım 1.1.1 *$(M, +)$ değişmeli bir grup ve R bir halka olmak üzere, eğer $\cdot : M \times R \longrightarrow M$ tanımlı fonksiyon aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M'ye R üzerinde bir sağ modül ya da kısaca sağ R-modül denir ve M_R ile gösterilir:*

(1) $\forall\, a \in R$ ve $m, n \in M$ ***için*** *$(m + n)a = ma + na$,*

(2) $\forall\, a, b \in R$ ve $m \in M$ ***için*** *$m(a + b) = ma + mb$,*

(3) $\forall\, a, b \in R$ ve $m \in M$ ***için*** *$m(ab) = (ma)b$.*

Burada, $m1 = m$ koşulu da sağlanıyorsa M'ye birimli (unitary) modül adı verilir.
Benzer şekilde sol R-modül kavramı tanımlanır.
Özel olarak, R halkası değişmeli ise sağ ve sol modül kavramlarının aynı olacağı açıktır.

Çalışma boyunca halkalar, birleşmeli ve birimli halka olarak, modüller ise birimli sağ R-modül olarak alınacaktır.
"0" sembolünün birden fazla işlevi bulunmaktadır. Bir modülün ya da bir halkanın sıfır elemanını gösterdiği gibi tam sayı olan sıfırı ya da $\{0\}$ kümesini de temsil edebilir. Çalışmada 0'ın üstlendiği görev belli olduğundan, herhangi bir karışıklık söz konusu değildir.

Örnek 1.1.2 *(1) Her halka, kendi üzerinde bir modül yapısına sahiptir.*
(2) $(G, +)$ değişmeli bir grup olsun. Bu durumda $\cdot : G \times \mathbb{Z} \longrightarrow G$

$$(k,j) \longrightarrow kj = \begin{cases} 0, & j = 0 \\ \underbrace{k + k + \cdots + k}_{j\, tane}, & j > 0 \\ \underbrace{(-k) + (-k) + \cdots + (-k)}_{j\, tane}, & j < 0 \end{cases}$$

işlemi ile G, bir sağ $\mathbb{Z}$-modüldür. Benzer biçimde G, bir sol $\mathbb{Z}$-modüldür.

(3) P, R halkasında bir sağ ideal olsun. Bu durumda P bir sağ R-modüldür.

(4) U, C cismi üzerine kurulu bir vektör uzayı olmak üzere, U bir C-modüldür.

Tanım 1.1.3 *M bir sağ R-modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. N de bir sağ R-modül ise N'ye M'nin sağ R-alt modülü adı verilir ve $N \leq M$ ile gösterilir.*

Önerme 1.1.4 *R bir halka, M bir sağ R-modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. Her $n_1, n_2 \in N$ ve $r \in R$ için;*

(i) $0 \in N$

(ii) $n_1 - n_2 \in N$

(iii) $n_1 r \in N$ $(rn_1 \in N)$

koşulları sağlanıyorsa N, M'nin sağ (sol) R-alt modülüdür.

Örnek 1.1.5 *(1) Bir R halkasının her sağ ideali aynı zamanda bir sağ R-alt modülüdür.*

(2) C bir cisim ise C'nin aşikar alt modülleri dışında C-alt modülü yoktur.

(3) $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ise M'nin alt modülleri $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{Z}$) biçimindedir.

(4) M, bir modül ve $x \in M$ olsun. $xR = \{xr \,|\, r \in R\}$ de M'nin bir sağ R-alt modülüdür ve bu alt modüle devirli alt modül adı verilir.

(5) $\{N_j : j \in J\}$, R'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\bigcap\limits_{j\in J} N_j$ ve $\sum\limits_{j\in J} N_j$ de R'nin birer alt modülüdürler.

Tanım 1.1.6 *S ve R iki halka, $(M,+)$ değişmeli bir grup olmak üzere eğer M bir sağ R-modül ve sol S-modülse ve her $s \in S$, $r \in R$ ve $m \in M$ için $(sm)r = s(mr)$ oluyorsa M'ye, (S,R)-bimodül denir.*

Örnek 1.1.7 (i) *R halkası bir (R, R)-bimodüldür.*

(ii) M sağ R-modülü bir $(\mathbb{Z}, R)$-bimodüldür. Gerçekten; $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $m \in M$ ve $r \in R$ için $n(mr) = \underbrace{mr + mr + \cdots + mr}_{n-kez}$ ve $(nm)r = (\underbrace{m + m + \cdots + m}_{n-kez})r = \underbrace{mr + mr + \cdots + mr}_{n-kez}$ olur. Bu durumda $n(mr) = (nm)r$ bulunur. Diğer taraftan, Örnek 1.1.2 (2) yardımıyla M, sol $\mathbb{Z}$-modül olduğundan M bir $(\mathbb{Z}, R)$-bimodüldür.

(iii) P, R'nin ideali ise P bir (R, R)-bimodüldür.

(iv) R, S'nin bir alt halkası olsun. O halde S, sırasıyla bir (R, R), (R, S), ve (S, R)-bimodüldür.

(v) $K = Mat_{n\times m}(R)$, $A = Mat_n(R)$ ve $S = Mat_m(R)$ ise K bir (A, S)-bimodüldür.

(vi) $S = End(M_R)$ ise M bir (S, R)-bimodüldür.

Tanım 1.1.8 (i) *M bir modül ve $0 \neq X \leq M$ olsun. Eğer M'nin X'te kapsanan, sıfırdan ve X'ten başka bir alt modülü yoksa X, M'nin minimal alt modülü olarak adlandırılır.*

(ii) $0 \neq M$ olmak üzere M modülünün her X alt modülü için $X = 0$ ya da $X = M$ ise M'ye bir basit (simple) modül denir.

(iii) X, M modülünün bir öz alt modülü olsun. Eğer M'nin X'i kapsayan, X'ten başka hiçbir öz alt modülü yoksa X'e M'nin maksimal alt modülü denir.

Tanım 1.1.9 *Bir R halkasındaki tüm maksimal ideallerin kesişimine R'nin Jacobson radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir.*

Tanım 1.1.10 *Bir R halkasında $C(R) = \{r' \in R \,|\, r'r = rr',\ \forall\, r \in R\}$ şeklinde tanımlı kümeye R'nin merkezi denir. Eğer $x \in C(R)$ ise x'e merkezil eleman denir.*

Tanım 1.1.11 *R bir halka ve $x \in R$ olsun. Bu durumda;*

(i) $x^2 = x$ oluyorsa x elemanına eş kare (idempotent) eleman denir.

(ii) Eğer en az bir n doğal sayısı için $x^n = 0$ oluyorsa x'e üstel sıfır (nilpotent) eleman denir.

Yardımcı Teorem 1.1.12 *R halkasında $c = c^2 \in R$ ve $s \in R$ olmak üzere $c - cs + csc$ ve $c - sc + csc$ elemanları da R'de birer eş kare elemandır.*

İspat. $(c-cs+csc)^2 = c-cs+csc-csc+cscs-cscsc+csc-cscs+cscsc = c-cs+csc$ olur. Benzer şekilde $(c - sc + csc)^2 = c - sc + csc$ olduğu da görülebilir. ■

Tanım 1.1.13 *Bir R halkasının sıfırdan başka üstel sıfır elemanı yoksa R'ye, indirgenmiş (reduced) halka denir.*

Tanım 1.1.14 *(i) R halkasında $f^2 = f \in R$ ve her $x \in R$ için $xf = fxf$ (ya da $fx = fxf$) sağlanıyorsa f eş kare elemanına R'nin sol (ya da sağ) yarı merkezil (semicentral) elemanı denir. R'nin tüm sol (ya da sağ) yarı merkezil elemanlarının oluşturduğu küme $S_l(R) = \{f^2 = f \in R \mid xf = fxf,\ \forall\ x \in R\}$ (ya da $S_r(R) = \{f^2 = f \in R \mid fx = fxf,\ \forall\ x \in R\}$) ile gösterilir.*
(ii) Bir R halkasında $S_l(R) = S_r(R) = \{0, 1\}$ ise R'ye yarı merkezil indirgenmiş (semicentral reduced) halka denir.

Önerme 1.1.15 *$g^2 = g \in R$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*
(i) $g \in S_l(R)$'dir.
(ii) gR, R'de bir idealdir.
(iii) $1 - g \in S_r(R)$ olur.
(iv) $(1 - g)Rg = 0$'dır.

İspat. Tanım 1.1.14'ten ispat açıktır. ■

Tanım 1.1.16 *Bir R halkasındaki her eş kare eleman merkezil ise R halkasına Abel halka denir.*

Değişmeli her halkanın Abel olduğu açıktır. Diğer yandan, F bir cisim olmak üzere $R = F[x, y],\ \ xy \neq yx$ halkası değişmeli olmayan Abel halkadır.

Yardımcı Teorem 1.1.17 *İndirgenmiş her halka Abeldir.*

İspat. R indirgenmiş halka, $a \in R$ ve $e^2 = e \in R$ olsun. Burada $((1-e)ae)^2 = 0$'dır. R indirgenmiş olduğundan $(1-e)ae = 0$ olmalıdır. O halde $ae = eae$ olup $e \in S_l(R)$ bulunur. Benzer şekilde $(ea(1-e))^2 = 0$ olacağından $e \in S_r(R)$ elde edilir. Böylece R halkası Abeldir. ■

Tanım 1.1.18 *R bir halka ve* $\emptyset \neq A \subseteq R$ *için* $r_R(A) = \{r \in R \,|\, ar = 0, \forall a \in A\}$ *ve* $l_R(A) = \{r \in R \,|\, ra = 0, \forall a \in A\}$ *kümelerine sırasıyla* X*'in sağ ve sol sıfırlayıcısı adı verilir.*

Tanım 1.1.19 A *boş olmayan bir küme olmak üzere,* A *üzerindeki bir* $\leq$ *bağıntısı, her* $a, b, c \in A$ *için*

(i) $a \leq a$

(ii) $a \leq b$ *ve* $b \leq a$ *ise* $a = b$

(iii) $a \leq b$ *ve* $b \leq c$ *ise* $a \leq c$

koşullarını sağlıyorsa, $\leq$ *bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.* A*'ya da kısmi sıralı küme adı verilir.*

Yardımcı Teorem 1.1.20 *(Zorn Lemma) Kısmi sıralı bir* K *kümesinin, her zincirinin* K*'de bir üst sınırı varsa* K*'nin bir maksimal elemanı vardır.*

Yardımcı Teorem 1.1.21 *(Modüler Kural)* $A, B, C \leq M$ *olsun. Eğer* $B \leq A$ *ise bu durumda* $A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$*'dir.*

1.2 Esas Alt Modül

Tanım 1.2.1 M *bir modül ve* $X \leq M$ *olsun. Eğer her* $0 \neq Y \leq M$ *alt modülü için* $X \cap Y \neq 0$ *oluyorsa* X*'e* M*'nin esas (essential) alt modülü denir ve* $X \leq_e M$ *ile gösterilir.*

Diğer bir ifadeyle;

$$X \leq_e M \Leftrightarrow Y \leq M \text{ için } X \cap Y = 0 \text{ ise } Y = 0 \text{ dır.}$$

Örnek 1.2.2 (i) *Her modül kendisinde bir esas alt modüldür. Diğer yandan, sıfır alt modülünün esas olduğu modül sıfır modülüdür.*

(ii) *Bir tamlık bölgesinde sıfırdan farklı her sağ alt modül esastır.*

(iii) $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$*'nin sıfırdan farklı her alt modülü M'de esastır. Özel olarak* $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \leq_e \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ *olur.*

(iv) $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ *ise* $\mathbb{Z}$*'nin sıfırdan farklı her sağ ideali* $\mathbb{Z}$*'de esas olur.*

Önerme 1.2.3 (i) $N \leq_e M$ *olması için gerek ve yeter şart her* $0 \neq m \in M$ *için* $N \cap mR \neq 0$ *olmasıdır.*

(ii) $K \leq N \leq M$ *için* $K \leq_e M$ *olması için gerek ve yeter* $K \leq_e N$ *ve* $N \leq_e M$ *dir.*

(iii) $N \leq_e M$ *ve* $K \leq M$ *ise* $N \cap K \leq_e K$*'dır.*

(iv) $N \leq_e M$ *ve* $m \in M$ *olmak üzere* $m^{-1}N = \{r \in R : mr \in N\} \leq_e R_R$ *dir.*

(v) *Her* $h > 1$ *için* $N_j \leq_e K_j$ $(1 \leq j \leq h)$ *ise* $\bigcap\limits_{j=1}^{h} N_j \leq_e \bigcap\limits_{j=1}^{h} K_j$ *dir.*

(vi) $L \leq N \leq M$ *ve* $N/L \leq_e M/L$ *ise* $N \leq_e M$ *dir.*

(vii) B *ve* C *sağ* R*-modüller,* $f : B \to C$ R*-homomorfizma ve* $A \leq_e C$ *olsun. Bu durumda* $f^{-1}(A) \leq_e B$ *dir.*

$(viii)$ J*, boş olmayan keyfi bir indis kümesi olsun. Her* $j \in J$ *için* $L_j \leq_e M_j$ *ise* $\bigoplus\limits_{j \in J} L_j \leq_e \bigoplus\limits_{j \in J} M_j$*'dir.*

İspat. (i) $N \leq_e M$ ve $0 \neq m \in M$ olsun. Burada $0 \neq mR \leq M_R$ olduğundan $N \cap mR \neq 0$'dır. Tersine $0 \neq L \leq M$ ve $0 \neq x \in L$ olsun. Kabulden, $N \cap xR \neq 0$ olur. Bu durumda $0 \neq N \cap xR \subseteq N \cap L$ olup $N \cap L \neq 0$ bulunur. Böylece $N \leq_e M$'dir.

(ii) $K \leq N \leq M$ için $K \leq_e M$ ve $0 \neq A \leq N$ kabul edilsin. O halde $0 \neq A \leq M$ olur. Burada $K \leq_e M$ olduğundan $K \cap A \neq 0$ bulunur. O halde $K \leq_e N$ dir. Diğer yandan, $0 \neq B \leq M$ kabul edilsin. $K \leq_e M$ olduğundan $0 \neq K \cap B \subseteq N \cap B$ olur. Böylece $N \leq_e M$ elde edilir. Tersine, $K \leq_e N$, $N \leq_e M$ ve $0 \neq X \leq M$ olsun. $N \leq_e M$ olduğundan $N \cap X \neq 0$ elde edilir. $K \leq_e N$ olduğundan $K \cap (N \cap X) \neq 0$ olur. Buradan $0 \neq K \cap (N \cap X) = K \cap X$ olup, $K \leq_e M$'dir.

(iii) $0 \neq X \leq K$ olsun. Eğer $0 \neq X \leq M$ ve $N \leq_e M$ ise $N \cap X \neq 0$ dır. Buradan

$(N \cap K) \cap X = N \cap (K \cap X) = N \cap X \neq 0$ olur. O halde $N \cap K \leq_e K$ dır.

(iv) $m^{-1}N$'nin R'de bir sağ ideal olduğu görülebilir. $0 \neq I_R \leq R_R$ olsun. Eğer $mI = 0$ ise $x \in I$ için $mx = 0 \in N$ elde edilir. $x \in m^{-1}N$ olduğundan $I \subseteq m^{-1}N$ bulunur. O halde $I \cap m^{-1}N = I \neq 0$ dır. Diğer yandan, $mI \neq 0$ olsun. Bu durumda $0 \neq (mI)_R \leq M_R$ ve $N \leq_e M$ olduğundan $N \cap mI \neq 0$ dır. O halde $0 \neq r \in I$ için $r \in m^{-1}N \cap I$'dır. Böylece $m^{-1}N \leq_e R_R$ elde edilir.

(v) $h = 2$ seçilsin. Burada, $N_1 \leq_e K_1,\ N_2 \leq_e K_2$ ve $X \leq K_1 \cap K_2$ için $(N_1 \cap N_2) \cap X = 0$ kabul edilsin. Şu halde $X \leq K_1$ ve $X \leq K_2$ dir. Bu durumda $N_1 \cap X \leq X \leq K_2$ ve $N_2 \cap X \leq X \leq K_1$ olur. $0 = N_1 \cap (N_2 \cap X)$ olduğundan $N_2 \cap X = 0$ yani $X = 0$ bulunur. O halde $N_1 \cap N_2 \leq_e K_1 \cap K_2$ olur. h üzerinden tümevarım uygulanarak $\bigcap\limits_{j=1}^{h} N_j \leq_e \bigcap\limits_{j=1}^{h} K_j$ sonucuna ulaşılır.

(vi) $0 \neq X \leq M$ olsun. Eğer $X \leq L$ ise $N \cap X = X \neq 0$ olur. Bu durumda $N \leq_e M$ olur. $L \leq X$ ise $0 \neq X/L \leq M/L$ olup $N/L \leq_e M/L$ olduğundan $N/L \cap X/L \neq 0$ bulunur. O halde $(N \cap X)/L \neq 0$ olup $L \leq N \cap X$ elde edilir. Eğer $L = 0$ ise $N \cap X \neq 0$ olacaktır ve buradan $N \leq_e M$ olur. $L \neq 0$ ise $0 \neq L \leq N \cap X$ olacağından bu durumda da yine $N \leq_e M$'dir.

(vii) $0 \neq M \leq B$ ve $M \cap f^{-1}(A) = 0$ olsun. $x \in$ Çek$f$ alınırsa $f(x) = 0 \in A$ olacaktır. Bu durumda $x \in f^{-1}(A)$ olup Çek$f \subset f^{-1}(A)$ elde edilir. Böylece $M \cap$Çek$f \subset M \cap f^{-1}(A) = 0$ yani $M \cap$ Çek$f = 0$ bulunur. $\alpha = f|_M,\ \alpha : m \to f(m)$ dönüşümü örtendir. Çek$\alpha = M \cap$ Çek$f = 0$ olduğundan α dönüşümü birebirdir. O halde α bir R-izomorfizma, yani $M \cong f(M)$ olur. $M \neq 0$ olduğundan $0 \neq f(M) \leq C$ olur. Burada $y \in A$ için $y \in f(M) \cap A$ ise $y = f(m)$ olacak şekilde $m \in M$ bulunabilir. Şu halde $m \in f^{-1}(A) \cap M = 0$ olacağından $m = 0$ ve $y = 0$ elde edilir. Böylece $f(M) \cap A = 0$ olur. Ancak hipotez gereği $A \leq_e C$'dir. O halde bu bir çelişkidir, yani $M \cap f^{-1}(A) \neq 0$ olur. Böylece $f^{-1}(A) \leq_e B$'dir.

$(viii)$ $I = \{1, 2\}$ kabul edilsin. $L_1 \leq_e M_1$ ve $L_2 \leq_e M_2$ ise $L_1 \oplus L_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ koşulunun sağlandığı gösterilecektir. O halde, $\pi_1 : M_1 \oplus M_2 \to M_1,\ \ (m_1 + m_2) \mapsto m_1$ ve $\pi_2 : M_1 \oplus M_2 \to M_2,\ \ (m_1 + m_2) \mapsto m_2$ izdüşüm fonksiyonları verilsin. Bu fonksiyonların örten olduğu açıktır. Burada $\pi_1(L_1 \oplus M_2) = L_1$ ve $\pi_2(M_1 \oplus L_2) = L_2$ olup $\pi_1^{-1}(L_1) = L_1 \oplus M_2$ ve $\pi_2^{-1}(L_2) = M_1 \oplus L_2$ bulunur. Önermenin (vii). maddesi gereğince $\pi_1^{-1}(L_1) = L_1 \oplus M_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ ve $\pi_2^{-1}(L_2) = M_1 \oplus L_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ olur. Önermenin (v). maddesindeki özellikten $(L_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus L_2) \leq_e M_1 \oplus M_2$ yazılabilir. Bu durumda $L_2 \leq M_2 \leq L_1 \oplus M_2$ olduğundan modüler kural gereğince $(L_1 \oplus M_2) \cap (L_2 \oplus M_1) = L_2 \oplus [(L_1 \oplus M_2) \cap M_1] = L_2 \oplus [M_1 \cap (L_1 \oplus M_2)]$ bulunur. Tekrar modüler kural uygulanırsa $L_2 \oplus [M_1 \cap (L_1 \oplus M_2)] = L_2 \oplus [L_1 \oplus (M_1 \cap M_2)]$ elde edilir. Burada $M_1 \cap M_2 = 0$'dır. Bu durumda sonuç olarak $(L_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus L_2) = L_1 \oplus L_2$ bulunur. Böylece $L_1 \oplus L_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$'dir. ■

1.3 Tümleyen Alt Modüller

Tanım 1.3.1 *M bir modül ve $P \leq M$ olsun. R, $R \cap P = 0$ özelliğine göre maksimal ise R alt modülüne P'nin M'deki tümleyeni (complement) denir. Diğer bir ifadeyle; R, P'nin M'deki tümleyenidir. $\Leftrightarrow$ $R \cap P = 0$ dır ve her $R \subset N \leq M$ için $N \cap P \neq 0$ olur. Burada, R'ye M'nin bir tümleyen alt modülü denir ve $R \leq_c M$ ile gösterilir.*

Örnek 1.3.2 *(i) $0 \leq_c M$ ve $M \leq_c M$ olduğu açıktır.*
(ii) C bir cisim ve $M_C = C \oplus C$ olsun. Bu durumda $L = C \oplus 0 = \{(a, 0) : a \in C\}$, M'nin bir alt modülüdür. Böylece $x \in C$ için $(x, 1)C = \{(x, 1)c : c \in C\} = \{(xc, c) : c \in C\}$ alt modülü L'nin M'deki tümleyenidir. Üstelik $T = 0 \oplus C = \{(0, x) : x \in C\}$ alt modülü de L'nin M'deki başka bir tümleyenidir. Dikkat edilirse $L \leq_c M$, $(x, 1)C \leq_c M$ ve $T = 0 \oplus C \leq_c M$ bulunur. Buradan, bir alt modülün birden fazla tümleyeni olabilir, sonucuna ulaşılır.

Zorn Lemma yardımıyla aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 1.3.3 *Bir modülün her alt modülünün bir tümleyeni vardır.*

Önerme 1.3.4 *M bir R-modül, $L \leq M$ ve K, L'nin M'deki tümleyeni olsun. Bu durumda $K \oplus L \leq_e M$'dir.*

İspat. $0 \neq N \leq M$ için $(K \oplus L) \cap N = 0$ olsun. $K \subset K + N$ olduğundan $(K+N) \cap L \neq 0$ elde edilir. $0 \neq x \in (K+N) \cap L$ alınsın. O halde $k \in K$ ve $n \in N$ için $x = k + n$ yazılabilir. Buradan $x - k = n \in K \oplus L$ ve $n \in (K \oplus L) \cap N$ bulunur. Kabulden $(K \oplus L) \cap N = 0$ olup $n = 0$ elde edilir. O halde $x = k \in K \cap L = 0$, yani $x = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu bir çelişkidir. Böylece $(K \oplus L) \cap N \neq 0$ olup, $K \oplus L \leq_e M$'dir. ■

Önerme 1.3.5 *$N \leq M$ olsun. $N \leq_e K \leq_c M$ olacak şekilde bir $K \leq M$ vardır.*

İspat. $N \leq M$ olsun. Önerme 1.3.3 'ten N'nin M'de bir N' tümleyeni vardır. $N \subseteq K$ olacak şekilde N''nün de M'de bir K tümleyeni vardır. Burada $0 \neq L \leq K$ alınsın. $N' \subseteq N' + L$ olduğundan $(L + N') \cap N \neq 0$ elde edilir. O halde $0 \neq x \in (L + N') \cap N$ için $x \in N$ ve $x \in (L + N')$'dir. $l \in L$ ve $n' \in N'$ için $x = l + n'$ yazılabilir. Bu durumda $x - l = n' \in K \cap N'$ bulunur. Hipotez gereği $K \cap N' = 0,\ \ x - l = n = 0$ ve $x = l \in N \cap L$ elde edilir. Yani $N \cap L \neq 0$ olup $N \leq_e K$ bulunur. ■

Önerme 1.3.6 *K, M'de bir tümleyen alt modüldür. $\Leftrightarrow$ K'nin M'de esas öz genişlemesi yoktur.*

İspat. $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq M$ için $K \neq L$ olsun. K'nin, $X \leq M$'nin tümleyeni olduğu kabul edilsin. O halde $K \cap X = 0$ ve K bu özelliğe göre maksimaldir. Bu durumda $K \cap X \leq_e L \cap X = 0$ bulunur. Bu bir çelişkidir, $K = L$ olmalıdır. Tersi Önerme 1.3.5'den elde edilir. ■

Esas öz genişlemesi olmayan alt modüller kapalı (closed) olarak da adlandırılır. Önerme 1.3.6'dan tümleyen ve kapalı alt modüllerin aynı olduğu açıktır.

Önerme 1.3.7 *K, $L \leq_c M$ olsun. K'nin L'nin M'deki tümleyeni olması için gerek ve yeter şart L'nin, K'nin M'deki tümleyeni olmasıdır.*

İspat. Önerme 1.3.4 gereği $K \oplus L \leq_e M$'dir. K'nin M'deki tümleyeni L' olsun. $L' \cap (K \oplus L) \leq_e L' \cap M = L'$ yazılabilir. Modüler kural gereği $L' \cap (K \oplus L) = L \oplus (L' \cap K) = L$ olduğundan $L \leq_e L'$ bulunur. $L \leq_e M$ olup Önerme 1.3.6'dan $L = L'$ olur. Bu durumda L, K'nin M'deki tümleyenidir. Tersi benzer adımlarla görülebilir. ■

Önerme 1.3.8 *M bir modül ve $K, N \leq M$ olmak üzere K, N alt modülünün M'deki tümleyeni olsun. Bu durumda,*

(i) $\frac{(N+K)}{K} \leq_e \frac{M}{K}$

(ii) $N \oplus K \leq_e M$

koşulları sağlanır.

İspat. (i) $K \subset L$ için $\frac{L}{K} \cap \frac{(N+K)}{K} = 0$ olsun. Buradan $\frac{L \cap (N+K)}{K} = 0$ olup $L \cap (N+K) = K$ elde edilir. Modüler kurala göre $K = L \cap (K + N) = K + (L \cap N)$ yazılabilir. Bu durumda $L \cap N \subseteq K$ bulunur. $K \cap N = 0$ özelliğine göre K maksimal olduğundan $L = K$ olmalıdır. $L/K = 0$ olup $\frac{(N+K)}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ bulunur.

(ii) K, N'nin M'deki tümleyeni olduğundan Önerme 1.3.4 gereği $N \oplus K \leq_e M$'dir. ■

Önerme 1.3.9 *$K, N \leq M$ ve $K \leq M$ olsun. $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ dır.*

İspat. $N \leq_e M$, $N' = \frac{N}{K}$, $M' = \frac{M}{K}$ ve $L' \leq M'$ için $L' \cap N' = 0$ olsun. $L' \leq M'$ ise $K \subset L \leq M$ için $L' = \frac{L}{K}$ olup $0 = L' \cap N' = \frac{L}{K} \cap \frac{N}{K} = \frac{L \cap N}{K} = 0$ bulunur. O halde $L \cap N = K$ olur. K'nin M'deki tümleyeni K' olsun. Bu durumda $0 = K \cap K' = (L \cap N) \cap K' = (L \cap K') \cap N = 0$ ve $N \leq_e M$ olduğundan $L \cap K' = 0$ olur. Böylece $L = K$'dır ve $L' = \frac{L}{K} = 0$ olup $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ sonucuna ulaşılır. Tersi, Önerme 1.2.3 yardımıyla görülür. ■

Önerme 1.3.10 *$N, K \leq M$ olsun. Bu durumda*

(i) $K \leq_c M$ ise $\frac{K}{N} \leq_c \frac{M}{N}$'dir.

(ii) $\frac{K}{N} \leq_c \frac{M}{N}$ ve $N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$'dir.

İspat. (i) $L \leq M$ için $K \leq L$ ve $\frac{K}{N} \leq_e \frac{L}{N}$ olsun. Bu durumda Önerme 1.2.3 (vi)'den $K \leq_e L$'dir. $K \leq_c M$ olduğundan Önerme 1.3.6 gereği $K = L$ olmalıdır. $\frac{K}{N} = \frac{L}{N}$ olacağından Önerme 1.3.6'den $\frac{K}{N} \leq_c \frac{M}{N}$'dir.

(ii) $\frac{K}{N} \leq_c \frac{M}{N}$ ise $N \subset K' \leq M$ için $\frac{K}{N}$, $\frac{K'}{N}$'nin $\frac{M}{N}$'deki tümleyeni olsun. Buradan, $0 = \frac{K}{N} \cap \frac{K'}{N} = \frac{K \cap K'}{N}$ olup $K \cap K' = N$ bulunur. $N \leq_c M$, N, N''nün M'deki tümleyeni olsun. Buradan $N \cap N' = 0$ olacağından $(K \cap K') \cap N' = 0$ yazılabilir. Burada, $K \leq L \leq M$ için $L \cap (K' \cap N') = 0$ kabul edilsin. $N = K \cap K' \subset L \cap K'$'dür. $N \subset (L \cap K')$, $(L \cap K') \cap N' = 0$ ve N, N''nün M'deki tümleyeni olduğundan $L \cap K' = N$ olmalıdır. Bu durumda $\frac{L}{N} \cap \frac{K'}{N} = \frac{L \cap K'}{N} = \frac{N}{N} = 0$ elde edilir. $\frac{K}{N}$, $\frac{K'}{N}$'nin $\frac{M}{N}$'deki tümleyeni olduğundan $\frac{L}{N} = \frac{K}{N}$ olmalıdır. Buradan $K = L$ olup $K \cap (K' \cap N') = 0$ özelliğine göre K maksimal alt modül olur. Böylece K, $K' \cap N'$'nün tümleyenidir, $K \leq_c M$'dir. ■

Tanım 1.3.11 *M, bir modül olmak üzere $M = P + P'$ ve $P \cap P' = 0$ oluyorsa P ve P' alt modülllerine M'nin dik toplanan alt modülleri denir. Bu durumda $M = P \oplus P'$ ve $P \leq_d M,\ P' \leq_d M$ ile gösterilir.*

Örnek 1.3.12 *(i) M'nin aşikar alt modüllerinin M'de birer dik toplanan alt modül olduğu açıktır.*

(ii) Her $g^2 = g \in End(M_R)$ için $M = gM \oplus (1-g)M$'dir. Bu durumda M modülünün 0 ve 1'den başka eş kare dönüşümü yoksa bu modülün sıfır ve kendisinden başka dik toplanan alt modülü de yoktur. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

(iii) $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün dik toplanan alt modülleri için $x \in \mathbb{Z}$ ve $x^2 = x$ olsun. Bu durumda $x = 0$ ya da $x = 1$ olup, $0, M \leq_d M$ bulunur.

Önerme 1.3.13 *$A \leq_d M$ ise $A \leq_c M$'dir.*

İspat. $A \leq_d M$ olsun. O halde $M = A \oplus A'$ olacak biçimde $A' \leq M$ vardır. Burada $A \subseteq K$ ve $A' \cap K = 0$ olacak şekilde $K \leq M$ seçilsin. $k \in K$ için bir $a \in A$ ve $a' \in A'$ vardır ki $k = a + a'$ yazılabilir. Şu halde $a' = k - a \in K$ olup $a' \in K \cap A' = 0$ bulunur. Bu durumda $a' = 0$'dır. O halde $k = a \in K \cap A$ olur ve $K \cap A = K$ bulunur. Buradan $A = K$ elde edilir. Böylece A, A' alt modülünün M'deki tümleyenidir, yani $A, A' \leq_c M$'dir. ■

Önerme 1.3.13'ün tersinin doğru olmak zorunda olmadığı Örnek 1.3.2 (ii)'den görülebilir.

Tanım 1.3.14 0 *ve kendisinden başka dik toplanan alt modülü olmayan bir* M *modülüne, ayrışmaz (indecomposable) modül adı verilir.*

Tanım 1.3.15 *Bir* M *modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamına* M*'nin socle alt modülü adı verilir.* $Soc(M)$ *ile gösterilir. Eğer* $Soc(M) = M$ *ise* M *modülüne yarı basit (semisimple) modül adı verilir. Diğer bir ifadeyle;*

$$Soc(M) = \left\{ \sum_{\alpha \in I} S_\alpha : \ S_\alpha, M\text{'nin basit alt modülleri} \right\}\text{'dir.}$$

Eğer $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ ise $Soc(M_{\mathbb{Z}}) = 0$ ve $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p$ ise p asalı için $Soc(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$'dir.

Önerme 1.3.16 (i) $\{M_j \mid j \in J\}$, M *modülünün basit alt modüllerinin bir ailesi olmak üzere,* M*'nin, yarı basit modül olması için gerek ve yeter koşul* $M \cong \bigoplus_{j \in J} M_j$ *olmasıdır.*
(ii) M*'nin, yarı basit modül olması için gerek ve yeter koşul her* $A \leq M$ *için* $A \leq_d M$*'dir.*

Önerme 1.3.17 $Soc(M)$, M*'deki tüm esas alt modüllerin kesişimidir.*

İspat. $P = \bigcap\{K : K \leq_e M\}$ olsun. $K \leq_e M$ ve $0 \neq U \leq M$ basit alt modülü alınsın. $K \leq_e M$ olduğundan $K \cap U \neq 0$ ve $0 \neq K \cap U \leq U$ olup $K \cap U = U$ elde edilir. Bu durumda $U \subseteq K$ olur. $K \leq_e M$ olduğundan $U \leq P$'dir. $Soc(M) = \bigoplus U \subseteq P$ olup $Soc(M) \subseteq P$ elde edilir. Diğer yandan $A \leq P$ olsun. C, A'nın M'deki tümleyeni olmak üzere $A \cap C = 0$ ve $A \oplus C \leq_e M$'dir. Buradan $P \leq A \oplus C$ olur. Modüler kuraldan $P = P \cap (A \oplus C) = A \oplus (P \cap C)$ olup $A \leq_d P$'dir. Önerme 1.3.16 (ii)'den, P yarı basittir, $Soc(P) = P.$ O halde $P \subseteq Soc(M)$ olur ve ispat tamamlanır. ■

Tanım 1.3.18 M *bir modül olsun.* $Z(M) = \{x \in M : xE = 0$ *olacak şekilde bir* $E_R \leq_e R_R$ *vardır.*$\}$ *alt modülüne* M*'nin tekil (singular) alt modülü adı verilir. Eğer* $Z(M) = M$ *ise* M*'ye tekil (singular) modül;* $Z(M) = 0$ *ise tekil olmayan (nonsingular) modül adı verilir.*

$M_R = R_R$ alınırsa $Z(R_R)$, R'nin iki yönlü ideali olur.

Tanım 1.3.19 *R bir tamlık bölgesi ve M bir modül olsun. $\{a \in M : xa = 0$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır.$\}$ kümesi M'nin bir alt modülüdür ve bu alt modüle M'nin burulmalı alt modülü denir. $Tor(M)$ ile gösterilir. Eğer $Tor(M) = M$ ise M'ye burulmalı (torsion) modül, $Tor(M) = 0$ ise M'ye burulmasız (torsion-free) modül denir.*

Yardımcı Teorem 1.3.20 *(i) $Z(M) = \{x \in M : r_R(x) \leq_e R_R\}$ dir.*
(ii) $M_{\mathbb{Z}}$, tekil (ya da tekil olmayan) bir modüldür. $\Leftrightarrow$ $M_{\mathbb{Z}}$ burulmalı (ya da burulmasız) modüldür.

İspat. (i) $S = \{x \in M : r_R(x) \leq_e R_R\}$ ve $x \in S$ olsun. Bu durumda $r_R(x) \leq_e R_R$ olur. Ayrıca $xr_R(x) = 0$ olduğundan $x \in Z(M)$ ve $S \subseteq Z(M)$ bulunur. $x \in Z(M)$ alınsın. O halde bir $E \leq_e R$ için $xE = 0$ sağlanır. Buradan $0 \neq I \leq R_R$ için $I \cap E \neq 0$ yazılabilir. Bu durumda $0 \neq r \in I \cap E$ için $xr = 0$ ve $r \in r_R(x)$ bulunur. Böylece $r \in r_R(x) \cap I \neq 0$ olup $r_R(x) \leq_e R_R$'dir. Buradan, $x \in S$ olur ve ispat tamamlanır.
(ii) $x \in Z(M)$ verilsin. Bu durumda $x(n\mathbb{Z}) = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu durumda x sonlu mertebelidir, yani $x \in Tor(M)$'dir. Buradan, $Z(M) = 0$ olmasının gerek ve yeter şartının $Tor(M) = 0$ olduğunu görülür. ■

Önerme 1.3.21 *(i) M bir modül ve $S \leq M$ olsun. Bu durumda $Z(S) = S \cap Z(M)$ olur.*
(ii) $Z(Z(M)) = Z(M)$'dir.
(iii) M_1 ve M_2 sağ R-modüller olsun. O halde $Z(M_1 \oplus M_2) = Z(M_1) \oplus Z(M_2)$ sağlanır.
(iv) M ve T birer R-modül olmak üzere $f : M_R \to T_R$ dönüşümü bir R-homomorfizma ise $f(Z(M)) \subseteq Z(T)$ olur.

İspat. (i) $S \leq M$, $Z(S) \leq S$ ve $Z(S) \subseteq Z(M)$ olduğundan $Z(S) \subseteq S \cap Z(M)$ olur. Burada $x \in S \cap Z(M)$ alınsın. $x \in Z(M)$ olduğundan $r(x) \leq_e R_R$ ve $x \in S$'dir. Bu durumda $x \in Z(S)$ olup $S \cap Z(M) \subseteq Z(S)$ bulunur.
(ii) $N = Z(M)$ olsun. (i)'den $Z(N) = N \cap Z(M)$ olduğundan $Z(Z(M)) = Z(M)$ olur.
(iii) Açıktır.
(iv) $Z(M) \leq M$ olduğu bilinmektedir. $x \in Z(M)$ olsun. O halde $r_R(x) \leq_e R_R$'dir.

Burada $r \in r_R(x)$ seçilirse $xr = 0$ olur. f bir R-homomorfizma olduğundan $f(xr) = f(x)r = 0$ bulunur. Bu durumda $r \in r_R(f(x))$ olup $r_R(x) \subseteq r_R(f(x))$'tir. O halde $r_R(f(x)) \leq_e R_R$ ve $f(x) \in Z(T)$ olur. Böylece $f(Z(M)) \subseteq Z(T)$'dir. ■

Örnek 1.3.22 *C bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} C & C \\ 0 & C \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $Z(R_R) = \begin{bmatrix} C & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $Z({}_RR) = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olup, $Z(R_R) \neq Z({}_RR)$'dir.*

Örnek 1.3.23 (i) *M bir $\mathbb{Z}$-modül olsun. Bu durumda $Z(M_{\mathbb{Z}}) = 0$ olup $M_{\mathbb{Z}}$ tekil değildir.*
(ii) *p bir asal sayı olsun. Şu halde $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p$ için $Z(M_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_p$ olur ve böylece $M_{\mathbb{Z}}$ tekildir.*
(iii) *$M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ ve p bir asal sayı olsun. O halde $Z(M_{\mathbb{Z}}) = Z(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p) = Z(\mathbb{Z}) \oplus Z(\mathbb{Z}_p) = 0 \oplus \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$ olur. Böylece $M_{\mathbb{Z}}$ ne tekil ne de tekil olmayan bir alt modüldür.*

1.4 Tam ve Projeksiyon Değişmez Alt Modüller

Tanım 1.4.1 (i) *M bir modül ve $N_R \leq M_R$ olsun. Her $f \in End(M_R)$ için $f(N) \subseteq N$ ise N'ye M'nin tam değişmez (fully invariant) sağ alt modülü denir ve $N_R \trianglelefteq M_R$ ile gösterilir.*
(ii) *M bir modül ve $N_R \leq M_R$ olsun. Her $g^2 = g \in End(M_R)$ için $g(N) \subseteq N$ ise N'ye M'nin projeksiyon değişmez (projection invariant) sağ alt modülü denir ve $N_R \trianglelefteq_p M_R$ ile gösterilir.*

Tam değişmez her alt modül, projeksiyon değişmezdir.

Örnek 1.4.2 (i) *R halkasının tam değişmez R-alt modülleri R'nin iki yönlü idealleridir.*
(ii) *R halkasının Jacobson radikali de R'de tam değişmezdir.*
(iii) *G bir grup olmak üzere $Tor(G)$ de G'de tam değişmezdir.*
(iv) *$Soc(M)$ ve $Z(M)$, M'nin tam değişmez alt modülleridir.*
(v) *Ayrıştırılamaz bir modülün her alt modülü projeksiyon değişmezdir.*

Tanım 1.4.3 *R halkasının bir sağ (sol) ideali Y olsun. Eğer her $g^2 = g \in R$ için $gY \subseteq Y$ (ya da $Yg \subseteq Y$) ise Y'ye R'nin projeksiyon değişmez sağ (ya da sol) ideali denir. $Y_R \trianglelefteq_p R_R$ (ya da ${}_RY \trianglelefteq_p {}_RR$) ile gösterilir.*

Önerme 1.4.4 *R, bir Abel halka olsun. Şu halde, R'nin her tek yönlü ideali projeksiyon değişmezdir.*

İspat. P, R'nin bir sağ ideali ve $g^2 = g \in R$ olsun. Bu durumda her $a \in P$ için $ga = ag \in P$ olacağından $gP \subseteq P$ olup $P_R \trianglelefteq_p R_R$ bulunur. ■

Tanım 1.4.5 *M bir modül ve $D, D' \leq M$ olmak üzere $M = D \oplus D'$ olsun. Her $X_R \leq M_R$ için $X = (X \cap D) \oplus (X \cap D')$ ise M'ye dağılımlı (distributive) modül denir.*

Önerme 1.4.6 *Dağılımlı bir M modülündeki her K sağ R-alt modülü M'de projeksiyon değişmez sağ alt modüldür.*

İspat. Her $g^2 = g \in End(M_R)$ için $M = g(M) \oplus (1-g)(M)$ olur. $K = K \cap M = K \cap (gM \oplus (1-g)M) = (K \cap gM) \oplus (K \cap (1-g)M) = gK \oplus (1-g)K = K$ bulunur. Bu durumda $gK \subseteq K$ olup $K_R \trianglelefteq_p M_R$ elde edilir. ■

Önerme 1.4.7 *M_R bir modül olmak üzere;*
(i) $\{N_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$, M'nin projeksiyon değişmez alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda, $\bigcap\limits_{\alpha\in I} N_\alpha$ ve $\sum\limits_{\alpha\in I} N_\alpha$ da M'nin projeksiyon değişmez alt modülleridir.
(ii) $X_R \leq Y_R \leq M_R$ için $X_R \trianglelefteq_p Y_R$ ve $Y_R \trianglelefteq_p M_R$ ise $X_R \trianglelefteq_p M_R$'dir.
(iii) $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ ve $N_R \trianglelefteq_p M_R$ olsun. Bu durumda $\pi_i : M \to M_i$, i. izdüşüm fonksiyonu olmak üzere, $N = \bigoplus\limits_{i\in I} \pi_i(N) = \bigoplus\limits_{i\in I}(N \cap M_i)$ sağlanır.

İspat. (i) Her $\alpha \in I$ için $N_\alpha \trianglelefteq_p M$ olduğundan her $f^2 = f \in End(M_R)$ için $f(N_\alpha) \subseteq N_\alpha$ olur. Burada $x \in f(\bigcap\limits_{\alpha\in I} N_\alpha)$ seçilirse her $\alpha \in I$ için $x \in f(N_\alpha) \subseteq N_\alpha$ bulunur. Bu durumda $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} N_\alpha$ olur. Böylece $f(\bigcap\limits_{\alpha\in I} N_\alpha) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha\in I} N_\alpha$ olup $\bigcap\limits_{\alpha\in I} N_\alpha \trianglelefteq_p M$ elde edilir. Benzer şekilde $\sum\limits_{\alpha\in I} N_\alpha \trianglelefteq_p M$ olduğu da görülebilir.

(ii) $e^2 = e \in End(M_R)$ olsun. $Y_R \trianglelefteq_p M_R$ ise $e(Y) \subseteq Y$'dir. $e|_Y : Y \to Y$, R homomorfizma olur. $(e|_Y)^2 = e|_Y \in End(Y_R)$'dir. $X_R \trianglelefteq_p Y_R$ olduğundan $e|_Y(X) \subseteq X$ olup $e(X) \subseteq X$ bulunur. Böylece $X_R \trianglelefteq_p M_R$'dir.

(iii) Her $i \in I$ için $N \cap M_i \subseteq N$ olduğundan $\bigoplus_{i \in I}(N \cap M_i) \subseteq N$ olur. Şimdi, $\pi_i : M \to M_i$ ve $n \in N$ olsun. $n = \sum_{i \in I} m_i$ olacak şekilde $m_i \in M_i$ vardır. Bu durumda $\pi_i(n) = m_i \in M_i$ olur. Böylece $\theta : M \xrightarrow{\pi_i} M_i \xrightarrow{i} M$, $\theta = i\pi_i$ tanımlansın. $\theta^2 = \theta$ olacağından $\theta(N) = i\pi_i(N) \subseteq N$ bulunur. Buradan, $i\pi_i(n) = i(m_i) = m_i \in N$ olur. Şu halde $m_i \in N \cap M_i$'dir. Böylece $n = \sum_{i \in I} m_i \in \sum_{i \in I} N \cap M_i = \bigoplus_{i \in I} N \cap M_i$ elde edilir. Bu durumda $N = \bigoplus_{i \in I} N \cap M_i$ olur. ■

Örnek 1.4.8 *R bir halka ve $M_R = R \oplus R$ olsun. $x, y \in R$ için $f : M \to M$, $f(x, y) = (x, 0)$ dönüşümü tanımlansın. O halde $f^2 = f \in End(M_R)$'dir. Diğer yandan $g : M \to M$, $g(x, y) = (y, x)$ olsun. g dönüşümü $g^2 = g$ özelliğinde bir R-homomorfizmadır. $A_R = R \oplus 0$ alt modülü M'nin bir dik toplananıdır. Fakat, $g(A) = 0 \oplus R \nsubseteq R \oplus 0$ olduğundan A_R, M'nin projeksiyon değişmez alt modülü değildir.*

1.5 Sıfırlayıcıların Özellikleri

Bu kısımda sıfırlayıcıların özelliklerine yer verilecektir.

Önerme 1.5.1 *(i) $\emptyset \neq X \subseteq R$ için $r_R(X)$ (ya da $l_R(X)$), R'nin bir sağ (ya da sol) idealidir.*

(ii) X, R halkasında bir sağ (ya da sol) ideal ise, $r_R(X)$ (ya da $l_R(X)$), R'nin bir idealidir.

İspat. (i) $r_1, r_2 \in r_R(X)$ olsun. Bu durumda $Xr_1 = 0$, $Xr_2 = 0$ olduğundan $X(r_1 - r_2) = 0$ dır. O halde $r_1 - r_2 \in r_R(X)$ dir. Diğer yandan, $a \in R$ ve $r \in r_R(X)$ alalım. $X(ra) = (Xr)a = 0a = 0$ olur. Böylece $a \in R$ için $ra \in r_R(X)$ dir. Yani $r_R(X)$, R'de bir sağ idealdir. Benzer adımlarla $l_R(X)$'in R de bir sol ideal olduğu görülebilir.

(ii) X, R'nin bir sağ ideali olsun. (i) kısmından, $r_R(X)$, R'nin bir sağ idealdir. $r \in R$

ve $a \in r_R(X)$ için $Xa = 0$ dır. Buradan $X(ra) = (Xr)a \subseteq Xa = 0$ olduğundan, $ra \in r_R(X)$ olur. $r_R(X)$, R'nin bir sol idealidir. ■

Önerme 1.5.2 *R bir halka olsun.*

(i) $\emptyset \neq S, T \subseteq R$ ve $S \subseteq T$ için $r_R(T) \subseteq r_R(S)$ ve $l_R(T) \subseteq l_R(S)$'dir.

(ii) $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. Bu durumda $A \subseteq r_R(l_R(A))$ ve $A \subseteq l_R(r_R(A))$'dır.

(iii) $\emptyset \neq X \subseteq R$ için $r_R(X) = r_R(l_R(r_R(X)))$ ve $l_R(X) = l_R(r_R(l_R(X)))$'tir.

(iv) I keyfi indis kümesi olmak üzere $i \in I$ için $P_i \subseteq R$ olsun. Bu durumda $r_R(\sum\limits_{i\in I} P_i) = \bigcap\limits_{i\in I} r_R(P_i)$ ve $l_R(\sum\limits_{i\in I} P_i) = \bigcap\limits_{i\in I} l_R(P_i)$'dir.

(v) Her $i \in I$ için $S_i \subseteq R$ olsun. O halde $r_R(\bigcup\limits_{i\in I} S_i) = \bigcap\limits_{i\in I} r_R(S_i)$ olur.

(vi) $\emptyset \neq X \subseteq R$ için $r_R(X) = r_R(RX)$ ve $l_R(X) = l_R(XR)$ 'dir.

İspat. (i) $a \in r_R(T)$ olsun. Bu durumda $Ta = 0$ dır. $S \subseteq T$ için de $Sa = 0$ olacağından $a \in r_R(S)$ olur. Böylece $r_R(T) \subseteq r_R(S)$ dir. Benzer şekilde $l_R(T) \subseteq l_R(S)$ olduğu görülebilir.

(ii) $l_R(A)A = 0$ olduğundan $A \subseteq r_R(l_R(A))$ olur. Diğer yandan $Al_R(A) = 0$ olduğundan $A \subseteq l_R(r_R(A))$ olur.

(iii) (ii) koşulundan $r_R(X) \subseteq r_R(l_R(r_R(X)))$ olur. $a \in r_R(l_R(r_R(X)))$ olsun. $(l_R(r_R(X))a = 0$ olup, (ii) gereği $Xa \subseteq l_R(r_R(X))a = 0$ dır. Buradan $Xa = 0$ olur ve $a \in r_R(X)$ elde edilir. Böylece $r_R(X) = r_R(l_R(r_R(X)))$. Benzer şekilde $l_R(X) = l_R(r_R(l_R(X)))$ eşitliği de kolayca görülebilir.

(iv) $x \in r_R(\sum\limits_{i\in I} P_i)$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $P_ix = 0$ bulunur. Buradan $x \in \bigcap\limits_{i\in I} r_R(P_i)$ yazılabilir. O halde $r_R(\sum\limits_{i\in I} P_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} r_R(P_i)$'dir. Burada $x \in \bigcap r_R(P_i)$ seçilsin. Her $i \in I$ için $P_ix = 0$ olduğundan, $x \in r_R(\sum P_i)$ olur. Böylece $r_R(\sum P_i) = \bigcap r_R(P_i)$ elde edilir. Benzer şekilde $l_R(\sum\limits_{i\in I} P_i) = \bigcap\limits_{i\in I} l_R(P_i)$ eşitliği de görülebilir.

(v) ve (vi) tanımlardan açıktır. ■

Önerme 1.5.3 *R bir halka ve $g^2 = g \in R$ olsun. Bu durumda $r_R(Rg) = (1 - g)R$ ve $l_R(gR) = R(1 - g)$ olur.*

İspat. $x \in (1-g)R$ olsun. $x = (1-g)a$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. $(Rg)(1-g)a = Rg(1-g)a = 0$ olduğundan $x \in r_R(Rg)$ bulunur. O halde $b \in r_R(Rg)$ kabul edilsin. Buradan $(Rg)b = 0$'dır. Her $r \in R$ için $rgb = 0$'dır. Özel olarak $1_R \in R$ için $gb = 0$ olup $b = (1-g)b$ elde edilir. O halde $b \in (1-g)R$'dir. Böylece $r_R(Rg) = (1-g)R$'dir. Benzer şekilde $l_R(gR) = R(1-g)$ olduğu da görülebilir. ■

Örnek 1.5.4 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} k & l \\ 0 & m \end{bmatrix} : k, l, m \in \mathbb{Z} \right\}$ *olsun. R halkasındaki tüm eş kare elemanların kümesi* $\boldsymbol{J} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$*'dir.* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ *için* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R = \left\{ \begin{bmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : k, l \in \mathbb{Z} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *olur. Buradan*

$$l_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R \right) = l_R\left(\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = R \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ *elde edilir.*

Önerme 1.5.5 *R bir halka olmak üzere A ve B, R'nin birer sağ ideali olarak seçilsin. Eğer $Z(R_R) = 0$ ve $A_R \leq_e B_R$ ise $l_R(A) = l_R(B)$ ve $r_R(A) = r_R(B)$ olur.*

İspat. $A_R \leq B_R$ olduğundan $l_R(B) \subseteq l_R(A)$ olduğu Önerme 1.5.2 (i)'den açıktır. $x \in l_R(A)$ seçilsin. $b \in B$ için $V = \{r \in R : br \in A\}$ olsun. Önerme 1.2.3 gereği V, R halkasında bir esas sağ ideal olur. Burada $xbV = 0$ olacağından $xb \in Z(R_R) = 0$ olup $xb = 0$ bulunur. Öyleyse $x \in l_R(B)$'dir. Böylece $l_R(A) \subseteq l_R(B)$ olup, $l_R(A) = l_R(B)$'dir. Benzer adımlarla $r_R(A) = r_R(B)$ olduğu da görülebilir. ■

Önerme 1.5.6 *R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadelerden herhangi ikisi üçüncüyü gerektirir.*

(i) Her $\emptyset \neq K \subseteq R$, $r_R(K) = eR$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in R$ vardır.

(ii) Her $\emptyset \neq L \subseteq R$, $l_R(L) = Rf$ olacak biçimde bir $f^2 = f \in R$ vardır.

(iii) R, birimlidir.

İspat. $(i)+(ii) \Rightarrow (iii)$: $K=0$ ise $r_R(0)=R=eR$ ve $l_R(0)=R=Re$ olacak şekilde $e^2=e\in R$ vardır. Burada $eR=R=Re$ olur. Her $a\in R$ için $ea=a=ae$ olur. Bu durumda e, R halkasının birim elemanıdır.

$(ii)+(iii) \Rightarrow (i)$: $\emptyset \neq A\subseteq R$ alalım. $\emptyset\neq L=r_R(A)\subseteq R$ olsun. (ii) gereği $l_R(L)=Re$ olacak şekilde $e^2=e\in R$ vardır. $l_R(r_R(A))=Re$ dir. Bu durumda $r_R(l_R(r_R(A)))=r_R(Re)$ olur ve Önerme 1.5.2 (iii) gereği $r_R(l_R(r_R(A)))=r_R(A)$ olur. Önerme 1.5.3 yardımıyla $r_R(A)=r_R(Re)=(1-e)R$ elde edilir. $(1-e)^2=(1-e)\in R$ olup ispat tamamlanır.

$(i)+(iii)\Rightarrow(ii)$: İspat $((ii),(iii)\Rightarrow(i))$ kısmına benzer olarak elde edilir. ■

Örnek 1.5.7 *C, bir cisim olmak üzere; $A=\begin{bmatrix} C & C \\ 0 & 0\end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{bmatrix} : a,b\in C\right\}$ halkası verilsin. A halkasının birim elemanının olmadığı açıktır.*
$\boldsymbol{J}=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0\end{bmatrix} : b\in C\right\}$ kümesi, A halkasındaki tüm eş kare elemanların kümesidir. $X_1=\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ve $X_2=\begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ olmak üzere $r_A(A)=0$, $r_A(0)=A$, $r_A(X_1)=0$ ve $r_A(X_2)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}A$ dır. Böylece Önerme 1.5.6'nın (i) koşulunu sağladığı görülür.

Diğer yandan, $l_A(X_1)=A\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ olur, ancak $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\notin \boldsymbol{J}$ olduğundan A halkası Önerme 1.5.6 nın (iii) koşulunu sağlamaz.

Önerme 1.5.8 *R bir halka, ${}_RY\trianglelefteq_p {}_RR$ ve $X_R\trianglelefteq_p R_R$ olsun. Bu durumda,*

(i) $r_R(Y)$, R halkasında projeksiyon değişmez sağ idealdir.

(ii) $l_R(X)$, R halkasında projeksiyon değişmez sol idealdir.

(iii) $c^2=c\in R$ ve $cR\trianglelefteq_p R_R$ ise $c\in S_l(R)$'dir.

(iv) $e^2=e\in R$ ve $Re\trianglelefteq_p {}_RR$ ise $e\in S_r(R)$'dir.

İspat. (i) $r_R(Y)$'nin bir sağ ideal olduğu açıktır. $c^2=c\in R$ olsun. Buradan, $Y(cr_R(Y))\subseteq Yr_R(Y)=0$ bulunur. O halde $cr_R(Y)\subseteq r_R(Y)$ olup $r_R(Y)\trianglelefteq_p R_R$ elde edilir.

(ii) İspat (i)'deki adımlara benzer şekilde elde edilir.

(iii) $x \in R$ alınsın. $xc = cxc$ olduğu gösterilmelidir. Yardımcı Teorem 1.1.12'den $(c+xc-cxc)^2 = c+xc-cxc$'dir. Bu durumda $cR \trianglelefteq_p R_R$ olduğundan $(c+xc-cxc)(cR) \subseteq cR$ yazılır. Buradan $(c + xc - cxc)(cR) = (c + xc - cxc)R$ olup bir $a \in R$ için $c + xc - cxc = a$ olur. O halde $c + cxc - cxc = ca = c + xc - cxc$ olacağından $c = c + xc - cxc$ ve $xc = cxc$ bulunur. Böylece $c \in S_l(R)$'dir.

(iv) İspat (iii)'deki adımlarla açıktır. ■

2. BAER HALKALAR VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Bu bölümde Baer halka, yarı-Baer halka ve π-Baer halka sınıflarına yer verilmiş, bu halka sınıflarının yapısal özellikleri ve çeşitli halka genişlemeleri incelenmiştir. Burada (Armendariz, 1974), (Birkenmeier vd, 2001), (Birkenmeier vd., 2013), (Birkenmeier vd., 2018), (Chatters ve Khuri, 1980), (Hajarnavis ve Norton, 1985) ve (Kaplansky, 1965) kaynakları kullanılmıştır.

2.1 Baer Halkalar

Tanım 2.1.1 *R, bir halka olmak üzere $\emptyset \neq X \subseteq R$ için $r_R(X) = eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ varsa R halkasına, Baer halka denir.*

Önerme 1.5.6 gereği birimli bir R halkasında Baer halka tanımı sağ-sol simetriktir. Diğer bir ifadeyle; R'nin Baer halka olması için gerek ve yeter şart her $\emptyset \neq X \subseteq R$ için $l_R(X) = Rc$ olacak şekilde bir $c^2 = c \in R$ var olmasıdır.

Örnek 2.1.2 (i) *Her tamlık bölgesi bir Baer halkadır.*
(ii) *Von Neuman cebirlerleri birer Baer halkadır.*
(iii) *Yarı basit her halka bir Baer halkadır.*

Önerme 2.1.3 *Yarı basit bir modülün endomorfizma halkası bir Baer halkadır.*

İspat. M yarı basit modül ve $S = End(M_R)$ olsun. $\emptyset \neq X \subseteq S$ için $X = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ve $U = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(M)$ olsun. Buradan $M = U \oplus W$ olacak şekilde $W_R \leq M_R$ vardır. $e : M \to W$ bir izdüşüm fonksiyonu olsun. Her $\alpha \in \Lambda$ için $e\varphi_\alpha(M) = 0$ ise $e\varphi_\alpha = 0$ olur. O halde $e \in l_S(X)$ bulunur. O halde $Se \subseteq l_S(X)$'tir. $g \in l_S(X)$ seçilsin. Her $\alpha \in \Lambda$ için $g\varphi_\alpha = 0$'dır. $m \in M$ alınsın. $u \in U$ ve $w \in W$ için $m = u + w$ yazılabilir. Buradan $g(m) = g(u) + g(w) = g(w) = ge(m)$ elde edilir. Yani her $m \in M$ için $(g - ge)(m) = 0$ olur. O halde $g = ge \in Se$ olup $l_S(X) \subseteq Se$ bulunur. Böylece S halkası Baer'dir. ■

Önerme 2.1.3 aracılığıyla, cisim üzerine kurulu bir vektör uzayının endomorfizma halkasının da Baer halka olduğu sonucuna ulaşılır.

Önerme 2.1.4 *R halkası Baer olsun. Bu durumda her $e^2 = e \in R$ için eRe de bir Baer halkadır.*

İspat. $\emptyset \neq X \subseteq eRe$ olsun. R halkası Baer olduğundan $r_R(X) = fR$ olacak şekilde $f^2 = f \in R$ vardır. $X \subseteq eRe$ olduğundan her $x \in X$ için $x = ebe$ olacak biçimde $b \in R$ vardır. O halde $x(1-e) = 0$ olur. Bu durumda $1 - e \in r_R(X) = fR$ olacağından $1-e = fb$ olacak biçimde $b \in R$ vardır. $f(1-e) = f^2b = fb = 1-e$ yazılabilir. Böylece $ef(1-e) = e(1-e) = 0$ olup $ef = efe \in eRe$ bulunur. $(efe)^2 = efe \in eRe$ ve $r_{eRe}(X) = eRe \cap r_R(X)$ olduğu açıktır. Burada $x(efe) = xfe = 0$ olup, $efe \in r_{eRe}(X)$ bulunur. Böylece $(efe)(eRe) \subseteq r_{eRe}(X)$ sonucuna ulaşılır. $b \in r_{eRe}(X)$ olsun. Buradan $b \in eRe$ ve $b \in fR$'dir. $t, r \in R$ için $b = ete$ ve $b = fr$ yazılabilir. $eb = e^2te = b$ ve $fb = f^2r = b$ olup $feb = fb = b$ ve $efeb = eb = b$ bulunur. Bu durumda $b = (efe)b \in (efe)eRe$ elde edilir. Yani $r_{eRe}(X) \subseteq (efe)(eRe)$ olur. Sonuç olarak $r_{eRe}(X) = (efe)(eRe)$, $(efe)^2 = efe \in eRe$ olup eRe Baer'dir. ■

Önerme 2.1.5 (i) *R, Baer halka olmak üzere, S, R'nin bir alt halkası olsun. Eğer S, R'nin tüm eş kare elemanlarını içeriyorsa S halkası da Baer'dir.*
(ii) *$\{R_i \mid i \in I\}$ halkalar kümesi ve $R = \prod\limits_{i \in I} R_i$ olsun. R'nin Baer olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için R_i'nin Baer olmasıdır.*

İspat. (i) $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. Bu durumda $r_R(X) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. $r_S(X) = eR \cap S$ ve $e \in S$ olduğundan $r_S(X) = eS$ olup S, Baer halkadır.
(ii) İspat açıktır. ■

Önerme 2.1.6 *R bir Baer halka ise tekil değildir.*

İspat. $x \in Z(R_R)$ olsun. Bu durumda $r_R(x) \leq_e R_R$'dir. R, Baer olduğundan $r_R(x) = fR$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır. $R = fR \oplus (1-f)R$ olarak yazılabilir. $fR \leq_e R_R$ olduğundan $(1-f)R = 0$ olmalıdır. Böylece $f = 1$ ve $x = 0$ bulunur. Bu durumda $Z(R_R) = 0$'dır. Benzer adımlarla $Z({}_RR) = 0$ olduğu da görülebilir. O halde R tekil olmayan bir halkadır. ■

Tanım 2.1.7 *(i) R bir halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. $q(R)$, R'nin kesirler cismi olmak üzere $II^{-1} = R$ olacak şekilde $I^{-1} = \{r \in q(R) : rI \subseteq R\}$ bulunabiliyorsa R'nin sonlu üretilmiş her ideali tersinirdir, denir.*
(ii) R değişmeli ve sıfır bölensiz bir halka olsun. Eğer R'nin sıfırdan farklı sonlu üretilmiş her ideali tersinir ise R'ye Prüfer bölge denir.

Örnek 2.1.8 *$S = Mat_2(\mathbb{Z}[x])$ olsun. $\mathbb{Z}[x]$ Baer bir halkadır. Fakat, $l_S\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}\right)$, S'nin bir eş kare elemanı tarafindan üretilemediğinden, $S = Mat_2(\mathbb{Z}[x])$ Baer değildir.*

Örnek 2.1.8, Baer halka özelliğinin tam matris halkalarına doğrudan taşınmadığını göstermektedir. Aşağıdaki önerme (Kaplansky, 1965) kaynağında yer alıp hangi koşul altında bu özelliğin tam matris halkalarına taşınabildiğini belirtmektedir.

Önerme 2.1.9 *$Mat_n(R)$'nin Baer halka olması için gerek ve yeter şart R tamlık bölgesinin Prüfer bölge olmasıdır.*

Sonuç 2.1.10 *F bir cisim olmak üzere $Mat_n(F)$ ve $Mat_n(\mathbb{Z})$ matris halkaları Baer halkadır.*

Örnek 2.1.11 *$R = \mathbf{T}_2(\mathbb{Z}) = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ matris halkası verilsin. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ için $r_R\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$, R'nin bir eş kare elemanıyla üretilemediğinden, R bir Baer halka değildir.*

Örnek 2.1.11, Baer halka özelliğinin üst üçgensel matris halkalarına doğrudan taşınmadığını nitelendirmektedir. Aşağıdaki önerme, (Kaplansky, 1965) kaynağında bulunmakta olup hangi koşul altında bu özelliğin üst üçgensel matris halkalarına taşınabildiğini belirtmektedir.

Önerme 2.1.12 *R sıfır bölensiz bir halka ve $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{T}_n(R)$ üst üçgensel matris halkasının Baer olması için gerek ve yeter şart R'nin bir bölümlü halka olmasıdır.*

Yardımcı Teorem 2.1.13 *R indirgenmiş halka olsun. Bu durumda,*
(i) Her $0 \neq X \subseteq R$ için $r_R(X) = l_R(X)$'tir.
(ii) Her $0 \neq X \subseteq R$ için $r_R(X)$, R'nin idealidir.

İspat. (i) $a \in r_R(X)$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $xa = 0$'dır. $(ax)^2 = axax = 0$ ve R indirgenmiş olduğundan $ax = 0$ olmalıdır. Bu durumda $a \in l_R(X)$ olup $r_R(X) \subseteq l_R(X)$ bulunur. Benzer adımlarla ters yönlü kapsamanın sağlandığı da görülebilir. Böylece $r_R(X) = l_R(X)$ elde edilir.
(ii) Önerme 1.5.1 (i) gereği $l_R(X)$ sol ideal ve $r_R(X)$ sağ idealdir. (i) kısmından $r_R(X) = l_R(X)$ olup $r_R(X)$, R'nin idealidir. ■

Örnek 2.1.14 *$S = Mat_2(\mathbb{Z}[x])$ olsun. Açıktır ki $\mathbb{Z}[x]$ ve $Mat_2(\mathbb{Z})$ Baer halkadır. Buradan $S = Mat_2(\mathbb{Z}[x]) \cong Mat_2(\mathbb{Z})[x]$ olup, Örnek 2.1.8 gereği, S Baer değildir.*

Örnek 2.1.14, Baer halkaların polinom genişlemelerinin Baer olmadığını göstermektedir. Aşağıdaki önerme, ardındaki iki sonuç ve önerme (Armendariz, 1974) kaynağında yer almaktadır. Bu sonuçlar Baer halkanın polinom genişlemelerinin hangi koşul altında Baer olduğunu ispat ederken kullanılmaktadır.

Önerme 2.1.15 *R indirgenmiş bir halka ve $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ olsun. Şu halde $fg = 0$ olması için gerek ve yeter şart her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_i b_j = 0$ olmasıdır.*

İspat. $fg = 0$ olsun. Burada $n = m$ kabul edilebilir. Böylece $a_0 b_0 = 0$; $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$; ...; $a_n b_0 + ... + a_0 b_n = 0$ elde edilir. R indirgenmiş bir halka olduğundan $a_0 b_0 = 0$'dır ancak ve ancak $b_0 a_0 = 0$'dır. İkinci eşitlik soldan b_0 ile çarpılırsa $b_0 a_1 b_0 = 0$ olup $(a_1 b_0)^2 = 0$ ve $a_1 b_0 = 0$ bulunur. Benzer şekilde her $0 \leq i \leq n$ için $a_i b_0 = 0$ olduğu görülür. O halde $a_0b_1 = 0$; $a_1b_1 + a_0b_2 = 0$; ...; $a_{n-1}b_1 + ... + a_0b_n = 0$'dır. Açıktır ki $a_0b_1 = 0$ olması için gerek ve yeter şart $b_1a_0 = 0$ olmasıdır. Üçüncü denklemden $a_1b_1 = 0$ olduğu sonucuna varılır. Benzer adımlarla her $0 \leq i \leq n$ için $a_ib_1 = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$ olduğu görülür. Tersi açıktır. ■

Sonuç 2.1.16 *R indirgenmiş bir halka ve $g^2 = g \in R[x]$ ise $g \in R$'dir.*

İspat. $g = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ olsun. Bu durumda $1 - g = (1 - a_0) + \sum_{i=1}^{n} a_ix^i$ yazılabilir. $g^2 = g$ olduğundan $a_0(1 - a_0) = 0$ ve her $1 \leq i$ için $a_i^2 = 0$ olur. Böylece $a_i = 0$'dır ve $g = a_0 = a_0^2 \in R$ elde edilir. ■

Sonuç 2.1.17 *R indirgenmiş bir halka ve $U \subseteq R[x]$ olsun. $f = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in R[x]$ için $S_f = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ olmak üzere $T = \bigcup_{f \in U} S_f$ ise $r_{R[x]}(U) = r_R(T)[x]$ olur.*

İspat. $g = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i \in R[x]$ ve $gU = 0$ ise her $f \in U$ için $gf = 0$ olur. Önerme 2.1.15 gereği her $0 \leq i \leq m$ için $b_i \in r_R(T)$ bulunur. Buradan $r_{R[x]}(U) \subseteq r_R(T)[x]$ elde edilir. Ters yönlü kapsamanın sağlandığı açıktır. ■

Önerme 2.1.18 *R indirgenmiş bir halkadır. $\Leftrightarrow$ $R[x]$ indirgenmiştir.*

İspat. $f^2(x) = 0$, $deg(f(x)) = n$ olacak şekilde $f(x) \in R[x]$ seçilsin. $n = 0$ için $f(x) = a \in R$ ve $a^2 = 0$ olup R halkası indirgenmiş olduğundan $f(x) = a = 0$ elde edilir. $n = 1$ olsun. Bu durumda $0 = f^2(x) = (a_0 + a_1x)^2$'dir. Buradan $a_0^2 = 0$ ve $a_1^2 = 0$ olacağından $a_0 = a_1 = 0$ sonucuna ulaşılır. O halde $deg(f(x)) = n$ için; $f^2(x) = 0 = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)^2$ yazılabilir. Buradan $a_0^2 = 0,\ a_1^2 = 0, \cdots, a_n^2 = 0$ olacağından $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ bulunur. Böylece $R[x]$ indirgenmiş halkadır. Tersine $a \in R$ ve $a^2 = 0$ olsun. $f(x) = a$ sabit polinomu $R[x]$ indirgenmiş halkasının bir elemanı olduğu için $f^2(x) = a^2 = 0$ ise $a = 0$'dır. Bu durumda R halkası indirgenmiştir. ■

Teorem 2.1.19 *R indirgenmiş halka olsun. Bu durumda R Baer'dir. $\Leftrightarrow$ $R[x]$ polinom halkası Baer'dir.*

İspat. $R[x]$ Baer ve $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. O halde bir $e^2 = e \in R[x]$ için $r_R(A) = R \cap r_{R[x]}(A) = R \cap eR[x]$ yazılabilir. Sonuç 2.1.16'dan $e \in R$'dir. Buradan $R \cap eR[x] = eR$ bulunur. Böylece R Baer'dir. Tersine, R Baer halka olsun. $\emptyset \neq U \subseteq R[x]$, $f \in R[x]$ ve $T = \bigcup_{f \in S_f} S_f$ olmak üzere Sonuç 2.1.17 yardımıyla $r_{R[x]}(U) = [r_R(S_f)][x] = [r_R(T)][x]$ elde edilir. $\emptyset \neq T \subseteq R$ ve R Baer olduğundan $r_R(T) = fR$ olacak biçimde bir $f^2 = f \in R$ vardır. Burada $r_{R[x]}(U) = fR[x]$ olup $R[x]$ Baer'dir. ■

Tanım 2.1.20 (i) *M bir sağ R modül olmak üzere tümleyen her alt modül aynı zamanda bir dik toplanan alt modül ise M modülüne genişleyen (CS, extending) modül denir. Diğer bir ifadeyle; M modülü genişleyendir. $\Leftrightarrow$ Her $N_R \leq M_R$ için $N \leq_e D \leq_d M$ olacak biçimde bir $D \leq_d M$ vardır.*
(ii) *R_R genişleyen bir modül ise R'ye genişleyen halka denir.*

Tanım 2.1.21 *R bir halka olsun. R'nin her X sağ ideali için $l_R(X) = 0$ iken $X_R \leq_e R_R$ oluyorsa, R'ye sağ eş tekil olmayan (cononsingular) halka denir.*

Aşağıdaki önerme (Chatters ve Khuri, 1980) makalesinde yer alan ve yazarlarının adıyla anılan, Chatters - Khuri Teoremi, Baer halkalar ile genişleyen halkalar arasındaki ilişkiyi ortaya koyan oldukça önemli bir önermedir.

Önerme 2.1.22 *R, sağ tekil olmayan ve sağ genişleyen bir halkadır. $\Leftrightarrow$ R, Baer ve sağ eş tekil olmayan bir halka olmasıdır.*

İspat. $\emptyset \neq X \subseteq R$ için $I = XR$ olsun. Şu halde, $I_R \leq R_R$ olur. R halkası sağ genişleyen halka olduğundan $I_R \leq_e (eR)_R$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Önerme 1.5.5 gereği $l_R(I) = l_R(eR) = R(1-e)$ olur. Burada $l_R(I) = l_R(XR) = l_R(X) = R(1-e)$ olup R, bir Baer halkadır. $A_R \leq R_R$ ideali için $l_R(A) = 0$ kabul edilsin. R halkası sağ genişleyen halka olduğundan bir $g^2 = g \in R$ için $A_R \leq_e (gR)_R$ olur. Buradan $l_R(A) = l_R(gR) = R(1-g)$ olacağından $(1-g)A = 0$ yazılabilir. Öyleyse $1 - g \in l_R(A) = 0$'dır. Bu durumda $g = 1$ olmalıdır. O halde $A_R \leq_e R_R$ olup R sağ eş tekil olmayan bir halkadır.
Tersine R, Baer halka olsun. Önerme 2.1.6'den $Z(R_R) = 0$'dır. Bu durumda $Y_R \leq R_R$

için $l_R(Y) = Rf$ olacak biçimde $f^2 = f \in R$ vardır. Buradan, $Y \subseteq r_R(l_R(Y)) = r_R(Rf) = (1-f)R$ elde edilir. Varsayalım ki $Y_R \nleq_e (1-f)R$ olsun. Bu durumda sıfırdan farklı bir $Z_R \leq (1-f)R_R$ ideali için $Y \cap Z = 0$'dır. K, Z'nin R halkasında $Y \subseteq K$ özelliğinde bir tümleyeni olsun. Öyleyse $K \cap Z = 0$ ve $(K \oplus Z)_R \leq_e R_R$ olur. $K_R \nleq_e R_R$ ve R halkası sağ eş tekil olmayan halka olduğundan $l_R(K) \neq 0$'dır. O halde $0 \neq s \in l_R(K) \subseteq l_R(Y) = Rf$'dir. Buradan $s(1-f) = 0$ bulunur. $sZ = s(1-f)Z = 0$ olup $s(K \oplus Z) = 0$ olur. $(K \oplus Z)_R \leq_e R_R$ olduğundan, $s \in Z(R_R) = 0$ olup $s = 0$ bulunur. Bu bir çelişkidir. O halde $Y_R \leq_e (1-f)R$ olmalıdır. Bu durumda R sağ genişleyen bir halkadır. ■

2.2 Yarı-Baer Halkalar

Tanım 2.2.1 *R bir halka ve P, R halkasında bir ideal olsun. $r_R(P) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ varsa R'ye yarı-Baer (quasi-Baer) halka denir.*

Yarı-Baer halka tanımı sağ-sol simetriktir. Diğer bir ifadeyle; R'nin yarı-Baer olması için gerek ve yeter şart R'nin her P ideali için $l_R(P) = Rf$ olacak şekilde $f^2 = f \in R$ vardır.

Tanım 2.2.1'den, Baer her halkanın yarı-Baer olduğu açıktır.

Önerme 2.2.2 *R halkasında I bir sağ (ya da sol) ideal olsun. R yarı-Baer'dir. $\Leftrightarrow r_R(I) = eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $l_R(I) = Rf$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$) elemanı vardır.*

İspat. $I_R \leq R_R$ olsun. $RI \trianglelefteq R$ olduğundan $r_R(RI) = r_R(I) = fR$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır. O halde R yarı-Baer'dir. Önermenin tersinin ispatı açıktır. ■

Önerme 2.2.2'de belirtilen e ve f eş kare elemanları, Önerme 1.1.15 gereği, $e \in S_l(R)$ ve $f \in S_r(R)$ olur.

Önerme 2.2.3 *R halkasının yarı-Baer halka olması için gerek ve yeter koşul R'deki her P ideali için bir $g \in S_l(R)$ bulunabilir ki $P \subseteq gR$ ve $l_R(P) \cap gR = gR(1-g)$ sağlanır.*

İspat. R yarı-Baer halka ve $P \trianglelefteq R$ olsun. Bu durumda bir $c \in S_r(R)$ için $l_R(P) = Rc$ yazılabilir. Buradan $P \subseteq r_R(l_R(P)) = r_R(Rc) = (1-c)R$'dir. $g = 1-c$ seçilsin. $g \in S_l(R)$'dir. O halde $l_R(P) \cap gR = gR \cap R(1-g) = gR(1-g)$ bulunur. Tersine $P \trianglelefteq R$ ve $g \in S_l(R)$ için $P \subseteq gR$ ve $l_R(P) \cap gR = gR(1-g)$ sağlansın. $a \in l_R(P)$ olsun. Şu halde $a = ag + a(1-g)$ yazılabilir. Öyleyse $ga = ga(1-g)$ olup $ga \in l_R(P) \cap gR$ bulunur. Buradan $ga = ga(1-g)$ olduğundan $gag = 0$ olur. Ancak $g \in S_l(R)$ olduğundan $0 = gag = ag$ olmalıdır. Böylece $a = a(1-g) \in R(1-g)$ elde edilir. Buradan $l_R(P) = R(1-g)$ olup R halkası yarı-Baer'dir. ■

Önerme 2.2.4 *R, yarı-Baer bir halka olsun. $e^2 = e \in R$ için eRe halkası da Baer halka olur.*

İspat. Önerme 2.1.4'ün ispatındaki X alt kümesi yerine I sağ ideali alınarak, ispat elde edilir. ■

Önerme 2.2.5 *Yarı-Baer bir halkanın merkezi Baer'dir.*

İspat. C, yarı-Baer R halkasının merkezi ve $\emptyset \neq X \subseteq C$ olsun. $RX = XR \trianglelefteq R$ için $r_R(RX) = eR$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in R$ vardır. Bu durumda $r_R(RX) = r_R(X) = eR$ yazılabilir. Benzer şekilde $l_R(XR) = Rf$ olacak şekilde de $f^2 = f \in R$ vardır. O halde $l_R(XR) = l_R(X) = Rf$ olur. Bu durumda $Xe = eX = 0$ olacağından $e \in l_R(X) = Rf$ olup $r \in R$ için $e = rf$ yazılabilir. Buradan $ef = rf^2 = e$ bulunur. Aynı zamanda; $Xf = fX = 0$'dır. Şu durumda $f \in r_R(X) = eR$ olup $b \in R$ için $f = eb$ yazılabilir. O halde $ef = e^2b = f$ bulunur. Böylece $e = f$'dir. Eğer $Rf = eR$ ve $e = f$ ise $e \in C$'dir. Buradan $r_C(X) = C \cap r_R(X) = C \cap eR = eC$ elde edilir. Yani C bir Baer halkadır. ■

Sonuç 2.2.6 *Bir Baer halkanın merkezi de Baer'dir.*

İspat. Tanım 2.2.1 ve Önerme 2.2.5'ten ispat elde edilir. ■

K, bir cisim ve X, Y, Z değişkenler olmak üzere $A = K[X, Y, Z]$ halkası $XY = XZ =$

$ZX = YX = 0$ ve $YZ \neq ZY$ özelliğinde bir halka olsun. Bu durumda $C(A) = K[X]$ ve $K[X]$ Baer'dir. Fakat $r_A(Y) = AX = K[X]X$ olduğundan $r_A(Y)$ bir eş kare elemanla üretilmez. Yani A, Baer değildir. O halde Sonuç 2.2.6'in tersi doğru olmak zorunda değildir.

Önerme 2.2.7 *$\{R_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ve $R = \prod_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ olsun. Bu durumda R halkasının yarı-Baer olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in \Lambda$ için R_λ'nın yarı-Baer olmasıdır.*

İspat. Açıktır. ■

Tanım 2.2.8 *R bir halka ve $K, L \trianglelefteq R$ olsun. Eğer $KL = 0$ iken $K = 0$ veya $L = 0$ ise R halkasına asal (prime) halka denir.*
Tanıma denk olarak; R halkası asaldır. $\Leftrightarrow$ $k, l \in R$ için $kRl = 0$ ise $k = 0$ ya da $l = 0$'dır.

Önerme 2.2.9 *R'nin asal halka olması için gerek ve yeter şart R'nin yarı-Baer ve yarı merkezil indirgenmiş halka olmasıdır.*

İspat. $e \in S_l(R)$ olsun. Önerme 1.1.15'den $(1-e)Re = 0$ olacaktır. R asal olduğundan $e = 0$ ya da $e = 1$ olmalıdır. Böylece R, yarı merkezil indirgenmiştir. $K \trianglelefteq R$ için $K = 0$ ise $r_R(0) = R$ olur. $K \neq 0$ ise $Kr_R(K) = 0$ olup $K = 0$ veya $r_R(K) = 0$ bulunur. $K \neq 0$ kabul edildiğinden $r_R(K) = 0$ olmalıdır. Buradan R yarı-Baer'dir. Tersine $K, J \trianglelefteq R$ ve $KJ = 0$ olsun. $g^2 = g \in R$ için $J \subseteq r_R(K) = gR$ yazılabilir. Hatta $g \in S_l(R)$'dir. R yarı merkezil indirgenmiş olduğundan $g = 0$ ise $J = 0$; $g = 1$ ise $K = 0$ bulunur. Böylece R asal bir halkadır. ■

Sonuç 2.2.10 *Asal halkalar, yarı-Baer halka sınıfının en önemli örnekleridir.*

Önerme 2.2.11 *R bir halka olmak üzere, R'nin Baer ve Abel olması için gerek ve yeter koşul R'nin yarı-Baer ve indirgenmiş olmasıdır.*

İspat. Her Baer halkanın yarı-Baer halka olduğu açıktır. $a \in R$ ve $a^2 = 0$ olsun. R, Baer halka olduğundan $r_R(a) = gR$ olacak şekilde bir $g^2 = g \in R$ vardır. Burada $agR = 0$

olur. $a^2 = aa = 0$ olduğundan $a \in r_R(a) = gR$'dir. O halde $a = ga$ yazılabilir. R, Abel bir halka olduğundan $ga = ag$ olup $a = 0$ elde edilir. Bu durumda R, indirgenmiş halkadır. Tersine; Yardımcı Teorem 1.1.17'ten R, Abeldir. $\emptyset \neq X \subseteq R$ seçilsin. Burada, Yardımcı Teorem 2.1.13 yardımıyla $r_R(X) = l_R(X)$ yazılır. R, yarı-Baer halka olduğundan bir $g^2 = g \in R$ için $l_R(r_R(X)) = Rg$ olur. O halde $r_R(l_R(r_R(X))) = r_R(Rg) = (1-g)R$ bulunur. Şu halde $(1-g)^2 = (1-g) \in R$ için $r(X) = (1-g)R$ olur. Böylece R halkası Baer'dir. ■

Aşağıdaki iki önerme yarı-Baer halka özelliğinin üst üçgensel matris halkalarına ve tam matris halkalarına doğrudan taşındığını göstermektedir.

Önerme 2.2.12 *R bir yarı-Baer halka ise her $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{T}_n(R)$ üst üçgengel matris halkası da yarı-Baer'dir.*

Önerme 2.2.13 *Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) R yarı-Baer'dir.

(ii) $\forall\, n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ için $Mat_n(R)$ matris halkası yarı-Baer'dir.

(iii) En az bir $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$ için $Mat_k(R)$ yarı-Baer'dir.

(iv) $Mat_2(R)$ yarı-Baer'dir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sonuç 2.2.10 (ii)'nin özel halidir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Açıktır.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ e_{ij}, $Mat_k(R)$'de (i,j) konumunda 1, diğer her konumda 0 olan bir matris ve $f = e_{11} + e_{22}$ olsun. $f^2 = f \in Mat_k(R)$'dir. Buradan $Mat_2(R) \cong fMat_k(R)f$ olacağından Önerme 2.2.4 gereği $Mat_2(R)$, yarı-Baer'dir.

$(iv) \Rightarrow (i)$ e, $Mat_k(R)$ matrisinde $(1,1)$ konumunda 1, diğer her konumda 0 olan bir matris olsun. $e^2 = e$ olduğu görülebilir. $eMat_2(R)e \cong R$ olduğundan Önerme 2.2.4'ten R, yarı-Baer'dir. ■

Örnek 2.2.14 *Aşağıda yarı-Baer olup Baer olmayan bazı halka örnekleri sıralanmıştır:*

(i) Önerme 2.1.6'dan R, Baer ise $Z_R(R) = 0$'dır. Eğer R bir asal halka ve $Z_R(R) \neq 0$

ise R yarı-Baer'dir ancak Baer değildir.

(ii) $\mathbf{T}_2(\mathbb{Z})$ *yarı-Baer'dir ama Baer değildir.*

(iii) $Mat_2(\mathbb{Z}[x])$ *yarı-Baer'dir ancak Baer halka değildir.*

Aşağıdaki önerme yarı-Baer halka özelliğinin polinom halkalarına doğrudan aktarıldığını göstermektedir. Bu yönden yarı-Baer halka sınıfı, Baer halka sınıfından farklılık taşımaktadır.

Önerme 2.2.15 *R, yarı-Baer'dir.* $\Leftrightarrow$ *$R[x]$ yarı-Baer'dir.*

İspat. R yarı-Baer bir halka ve $T = R[x]$ olsun. $I \trianglelefteq T$ ideali için; $I = 0$ ise $l_T(I) = T$ olduğu açıktır. $I \neq 0$ kabul edilsin. $I_0 = \{a \in R : a = 0$ veya en az bir $0 \neq f(x) \in I$ için a, $f(x)$'in terimlerinden derecesi en küçük olanının sıfırdan farklı katsayısı$\}$ olsun. Bu durumda $I_0 \trianglelefteq R$ olduğu görülür. O halde bir $e^2 = e \in R$ için $l_R(I_0) = Re$'dir. Burada $eI_0 = 0$ olduğu açıktır. $0 \neq h(x) \in I$ alınsın. Bu durumda bir $0 \neq a_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $h(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ için $a_0 \in I_0$ yazılabilir. $ea_0 = 0$ olup $eh(x) = ea_1x + \cdots + ea_nx^n \in I$ yazılabilir. $ea_1 \neq 0$ olsun. O halde $ea_1 \in I_0$'dır. Bu durumda $e(ea_1) = ea_1 = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde $ea_1 = 0$ olmalıdır. Böyle devam edilerek $ea_0 = ea_1 = \cdots = ea_n = 0$ sonucuna ulaşılır. Yani $eh(x) = 0$'dır ve $e \in l_T(I)$ bulunur. Böylece $Te \subseteq l_T(I)$ elde edilir. Diğer yandan, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in l_T(I)$ olsun. $0 \neq c_0$ olmak üzere $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_tx^t \in I$ için $g(x)f(x) = 0$'dır. Bu durumda $b_0c_0 = 0$ olacağından $b_0 \in l_R(I_0) = Re$ bulunur. Böylece $b_0 = b_0e$'dir. Buradan $b_0 \in l_R(I_0) \subseteq l_T(I)$ ve $g(x) \in l_T(I)$ olduğundan $g(x) - b_0 \in l_T(I)$ olur. $(b_1x + \cdots + b_mx^m)f(x) = 0$ ise $b_1c_0 = 0$ olup $b_1 \in l_R(I_0) = Re$ bulunur. Böylece $b_1 = b_1e$ olur. Buradan da $b_1 \in l_R(I_0) \subseteq l_T(I)$ ve $b_1x \in l_T(I)$ bulunur. O halde $g(x) - b_1x - b_0 \in l_T(I)$ olur. Bu defa $b_2c_0 = 0$ ise $b_0 \in l_R(I_0) = Re$ ve bu durumda da $b_2 = b_2e$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $b_k = b_ke$; $(k = 1, 2, \cdots, m\ )$ olup; $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_kx^k = \sum_{k=0}^{m} (b_ke)x^k$ olur. O halde $g(x) = g(x)e$'dir. Böylece $l_T(I) \subseteq Te$ bulunur. O halde $l_T(I) = Te$, $e^2 = e \in R$ elde edilir. Bu durumda $T = R[x]$ yarı-Baer'dir. Tersine, $T = R[x]$ yarı-Baer ve $I \trianglelefteq R$ olsun. $TI \trianglelefteq T$ olduğu açıktır. T yarı-Baer olduğundan

$l_T(TI) = Te(x)$ olacak şekilde bir $e(x) = e(x)^2 \in T$ vardır. $e(x) = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n$ yazılırsa, $e_0^2 = e_0 \in R$ olur. $Te(x)TI = 0$ olduğundan $e(x)I = 0$ ve $e_0I = 0$ yazılabilir. Buradan $e_0 \in l_R(I)$ olup $Re_0 \subseteq l_R(I)$ bulunur. Diğer yandan; $b \in l_R(I)$ olsun. Bu durumda $l_R(I) \subseteq l_T(TI) = Te(x)$ olduğundan $b \in Te(x)$ olur. O halde bir $h(x) \in T$ vardır ki $b = h(x)e(x)$'tir. $h(x) = h_0 + h_1x + \cdots + h_tx^t$ yazılırsa $b = h_0e_0 \in Re_0$ olup $l_R(I) \subseteq Re_0$ bulunur. Böylece $l_R(I) = Re_0,\ e_0 = e_0^2 \in R$ olup R, yarı-Baer bir halkadır.
■

Tanım 2.2.16 (i) *M bir modül ve $N_R \trianglelefteq M_R$ olmak üzere, eğer bir $D \leq_d M$ için $N \leq_e D \leq_d M$ oluyorsa M modülüne sağ tam değişmez genişleyen (FI-extending) modül denir.*
(ii) *M bir modül ve $N_R \trianglelefteq_p M_R$ olsun. Bu durumda eğer bir $D \leq_d M$ için $N \leq_e D \leq_d M$ oluyorsa M modülüne sağ projeksiyon değişmez genişleyen ya da π-genişleyen (π-extending) modül denir.*
(iii) *R_R, tam değişmez (ya da projeksiyon değişmez) genişleyen bir modül ise R halkasına da tam değişmez (ya da projeksiyon değişmez) genişleyen halka denir.*

Tanımlardan açıktır ki her genişleyen halka π-genişleyen halkadır ve her π-genişleyen halka tam değişmez genişleyen bir halkadır. Aşağıdaki önerme, Chatters-Khuri teoreminin yarı-Baer halkalardaki karşılığı olarak ifade edilebilir.

Önerme 2.2.17 *R, sağ tekil olmayan bir halka olsun. Bu durumda R_R'nin tam değişmez genişleyen bir halka olması için gerek ve yeter şart R halkasının yarı-Baer olması ve her A ideali için $A \leq_e r_R(l_R(A))$ olmasıdır.*

İspat. R_R tam değişmez genişleyen bir halka ve A, R halkasının bir ideali olsun. Bu durumda bir $e^2 = e \in R$ için $A \leq_e eR$ yazılabilir. Önerme 1.5.5 gereği $l_R(A) = l_R(eR) = R(1-e)$ bulunur. Böylece R, yarı-Baer bir halkadır. O halde $A \leq_e eR = r_R(l_R(eR)) = r_R(l_R(A))$ olup $A \leq_e r_R(l_R(A))$ elde edilir. Tersine, R yarı-Baer halkasının bir ideali A olsun. Bu durumda $l_R(A) = Rf$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır. Diğer yandan $A \leq_e r_R(l_R(A)) = r_R(Rf) = (1-f)R$ olur. O halde $A \leq_e (1-f)R$ olup, R_R tam değişmez genişleyen bir halkadır. ■

2.3 π-Baer Halkalar

Önerme 2.3.1 *R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadelerden herhangi ikisi üçüncüyü gerektirir.*

(i) R, birimli bir halkadır.

(ii) Her ${}_RY \trianglelefteq_p {}_RR$ için $r_R(Y)$ bir eş kare eleman tarafından sağ ideal olarak üretilir.

(iii) Her $X_R \trianglelefteq_p R_R$ için $l_R(X)$ bir eş kare eleman tarafindan sol ideal olarak üretilir.

İspat. $(i) + (ii) \Rightarrow (iii)$: $X_R \trianglelefteq_p R_R$ olsun. Önerme 1.5.8 gereği $l_R(X) \trianglelefteq_p {}_RR$'dir. O halde bir $c^2 = c \in R$ için $r_R(l_R(X)) = cR$ olur. Burada Önerme 1.5.2 (iii) yardımıyla $l_R(X) = l_R(r_R(l_R(X))) = R(1-c)$'dir. $1 - c = e = e^2 \in R$ olup, ispat tamamlanır.

$(ii) + (iii) \Rightarrow (i)$: $0 \trianglelefteq_p R$ ve $r_R(0) = R$ olur. (ii)'den bir $e = e^2 \in R$ için $r_R(0) = R = eR$'dir. (iii)'den de bir $c = c^2 \in R$ için $l_R(0) = R = Rc$ yazılabilir. O halde $eR = Rc$ bulunur. Bu durumda $c = e$'dir ve bu birim elemandır.

$(i) + (iii) \Rightarrow (ii)$: İspat, $(i) + (ii) \Rightarrow (iii)$'deki ispata benzer adımlarla açıktır. ■

Tanım 2.3.2 *Önerme 2.3.1'deki (ii) veya (iii) koşulunu sağlayan birimli R halkasına projeksiyon değişmez Baer halka ya da kısaca π-Baer halka adı verilir.*

Başka bir ifadeyle; R halkası π-Baer halkadır. $\Leftrightarrow$ Her $P_R \trianglelefteq_p R_R$ için $l_R(P) = Rg$ olacak şekilde bir $g^2 = g \in R$ vardır. $\Leftrightarrow$ Her ${}_RY \trianglelefteq_p {}_RR$ için $r_R(Y) = fR$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır.

Önerme 2.3.1'den açıktır ki, π-Baer halka tanımı sağ-sol simetriktir.

Önerme 2.3.3 *Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) R halkası π-Baer'dir.

(ii) Her $\emptyset \neq S \subseteq R$ ve $e^2 = e \in R$ için $Se \subseteq S$ oluyorsa bir $c^2 = c \in R$ için $r_R(S) = cR$'dir.

(iii) R halkasının projeksiyon değişmez her sağ sıfırlayıcısı bir eş kare eleman tarafından sağ ideal olarak üretilir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: R, π-Baer ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ kümesi her $e^2 = e \in R$ için $Se \subseteq S$ olsun. ${}_RRS \leq {}_RR$'dir. Buradan her $e^2 = e \in R$ için $(RS)e = R(Se) \subseteq RS$ olduğundan ${}_RRS \trianglelefteq_p {}_RR$ bulunur. O halde bir $c^2 = c \in R$ için $r_R(RS) = cR$'dir. Dolayısıyla $r_R(S) = cR$ elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $\emptyset \neq X \subseteq R$ için $I = r_R(X) \trianglelefteq_p R_R$ olsun. Bu durumda Önerme 1.5.8 gereği $l_R(I) \trianglelefteq_p {}_RR$'dir. O halde (ii) gereği $e^2 = e \in R$ için $r_R(l_R(I)) = eR$ bulunur. Böylece $r_R(l_R(I)) = r_R(l_R(r_R(X))) = eR$ olup $I = r_R(X) = eR$ elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$: ${}_RY \trianglelefteq_p {}_RR$ olsun. Önerme 1.5.8 gereği $r_R(Y)_R \trianglelefteq_p R_R$ olacaktır. (iii) koşulundan $r_R(Y) = cR$ olacak şekilde bir $c^2 = c \in R$ vardır. Böylece R, π-Baer halkadır. ■

Önerme 2.3.4 *R halkasının π-Baer olması için gerek ve yeter koşul R'deki projeksiyon değişmez her sağ K ideali ve bir $e \in S_l(R)$ için $K \subseteq eR$ ve $l_R(K) \cap eR = eR(1-e)$ olmasıdır.*

İspat. R, π-Baer ve $K_R \trianglelefteq_p R_R$ olsun. O halde $l_R(K) = Rc$ olacak biçimde bir $c^2 = c \in R$ vardır. Buradan Önerme 1.5.8 gereği $c \in S_r(R)$'dir. Bu durumda, $K \subseteq r_R(l_R(K)) = r_R(Rc)$ olacağından $K \subseteq (1-c)R$ bulunur. Burada $e = 1 - c$ alınırsa $K \subseteq eR$ ve $e \in S_l(R)$ elde edilir. Şu halde, $l_R(K) \cap eR = Rc \cap eR = R(1-e) \cap eR = eR(1-e)$ olur. Tersine $K_R \trianglelefteq_p R_R$ ve $e \in S_l(R)$ için $K \subseteq eR$ ve $l_R(K) \cap eR = eR(1-e)$ koşulları sağlansın. $a \in l_R(K)$ olsun. Burada $a = ae + a(1-e)$ olup $ea = eae + ea(1-e)$ olur. Ancak $ea \in l_R(K) \cap eR = eR(1-e)$ olduğundan $ea = ea(1-e)$ yani $eae = 0$ bulunur. $e \in S_l(R)$ olduğu için $0 = eae = ae$ ve $a = ae + a(1-e)$ olup $a = a(1-e) \in R(1-e)$ elde edilir. Şu halde $l_R(K) \subseteq R(1-e)$'dir. Kabulden $K \subseteq eR$ olduğundan $l_R(eR) \subseteq l_R(K)$'dır. O halde $R(1-e) \subseteq l_R(K)$ olur. Böylece $l_R(K) = R(1-e)$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda R, π-Baer'dir. ■

Önerme 2.3.5 (i) *R, Baer halkadır.*

(ii) *R, π-Baer halkadır.*

(iii) *R, yarı-Baer halkadır.*

Bu durumda $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ *sağlanır. Fakat, bu gerektirmeler tersinir değildir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: ${}_RY \trianglelefteq_p {}_RR$ olsun. Bir $c^2 = c \in R$ için $r_R(Y) = cR$ olacaktır. Bu durumda R, π-Baer'dir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $I \trianglelefteq R$ olsun. I aynı zamanda projeksiyon değişmez bir sol ideal olacağından bir $e^2 = e \in R$ için $r_R(I) = eR$ olur. O halde R, yarı-Baer halkadır.

$(ii) \not\Rightarrow (i)$ $R = \mathbf{T}_2(\mathbb{Z})$ halkası π-Baer'dir ancak Önerme 2.1.12'den R halkası Baer değildir.

$(iii) \not\Rightarrow (ii)$ Asal, düzgün ve tekil olmayan bir halka yarı-Baer'dir ama π-Baer değildir. ■

Sonuç 2.3.6 *π-Baer bir halkanın merkezi Baer'dir.*

İspat. Önerme 2.3.5 ve Önerme 2.2.5'den açıktır. ■

Sonuç 2.3.7 *S, R'nin bir alt halkası ve $\mathbf{I}(R)$, R halkasındaki eş kare elemanlarla üretilen bir alt halka olmak üzere,*

(i) *Y, R halkasının projeksiyon değişmez sol (ya da sağ) ideali olsun. Bu durumda $Y \cap S$ de S'de projeksiyon değişmez sol (ya da sağ) idealdir.*

(ii) *$\mathbf{I}(R) \subseteq S$ olsun. X, S'nin projeksiyon değişmez sol (ya da sağ) ideali ise RX (ya da XR) de R'nin projeksiyon değişmez sol (ya da sağ) idealidir. Hatta R, π-Baer halka ise S de π-Baer halkadır.*

(iii) *$R = \mathbf{I}(R)$ olsun. R'deki tek yönlü projeksiyon değişmez her ideal R'nin bir idealidir. Ayrıca R, π-Baer'dir. $\Leftrightarrow$ R, yarı-Baer'dir.*

İspat. (i) ${}_RY \trianglelefteq_p {}_RR$ olsun. Bu durumda ${}_S(Y \cap S) \leq {}_SS$ sağlanır. $e^2 = e \in S$ ve $t \in Y \cap S$ olsun. ${}_RY \trianglelefteq_p {}_RR$ olduğundan $te \in Y$'dir ve $t, e \in S$ olduğundan $te \in S$ olur. Böylece $(Y \cap S)e \subseteq Y \cap S$ olup ${}_S(Y \cap S) \trianglelefteq_p {}_SS$ elde edilir.

(ii) ${}_SX \trianglelefteq_p {}_SS$ ise ${}_RRX \leq {}_RR$ olduğu açıktır. $e^2 = e \in S$ olsun. O halde $e \in \mathbf{I}(R) \subseteq S$ olduğundan $e \in S$ olur. Buradan $(RX)e = R(Xe) \subseteq RX$ olup ${}_RRX \trianglelefteq_p {}_RR$ bulunur.

R, π-Baer bir halka olsun. Bu durumda ${}_SY \trianglelefteq_p {}_SS$ için ${}_RRY \trianglelefteq_p {}_RR$ olacağından bir $e^2 = e \in R$ vardır ki, $r_R(RY) = r_R(Y) = eR$ yazılır. Böylece $r_S(Y) = r_R(Y) \cap S = eR \cap S = eS$ olur. Dikkat edilirse $e^2 = e \in S$'dir. Bu durumda S de π-Baer halkadır.

(iii) $I_R \trianglelefteq_p R_R$ ve $a \in R$ olsun. $R = \mathbf{I}(R)$ olduğundan $a = r_1e_1 + \cdots + r_ne_n$ olacak biçimde $r_i \in R$, $e_i^2 = e_i \in \mathbf{I}(R)$, $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Bu durumda $aI = (r_1e_1)I + \cdots + (r_ne_n)I = r_1(e_1I) \cdots + r_n(e_nI) \subseteq I$ olur. Böylece $I \trianglelefteq R$ olur. O halde R'nin π-Baer olması için gerek ve yeter şart R'nin yarı-Baer olmasıdır. ■

Önerme 2.3.8 *Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *R halkası Abel'dir.*

(ii) *R'nin tek yönlü her ideali projeksiyon değişmezdir.*

(iii) *R halkasında eş kare elemanla üretilen her sağ ideal projeksiyon değişmez bir sağ idealdir.*

(iv) *R'nin eş kare elemanla üretilen her sağ ideali bir idealdir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sağlandığı açıktır.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ $c^2 = c \in R$ için $cR_R \trianglelefteq_p R_R$ ise Önerme 1.5.8 (ii) gereği $c \in S_l(R)$'dir. Buradan, Önerme 1.1.15 gereği cR bir idealdir.

$(iv) \Rightarrow (i)$ $c^2 = c \in R$ için $cR \trianglelefteq R$ olsun. Önerme 1.5.8 gereği $c \in S_l(R)$ olur. Benzer şekilde $(1-c)R \trianglelefteq R$ olup, Önerme 1.5.8'den $(1-c) \in S_l(R)$'dir. Bu durumda $c \in S_r(R) \cap S_l(R)$ olup c eş kare elemanı merkezildir. O halde R halkası Abeldir. ■

Tanım 2.3.9 *Her $m \in R$ için $r_R(m)$, R'nin bir ideali oluyorsa, R halkası IFP (insertion of factors property) koşulunu sağlar, denir.*

Önerme 2.3.10 (i) *İndirgenmiş her halka IFP koşulunu sağlar.*

(ii) *IFP koşulunu sağlayan her halka Abel'dir.*

İspat. (i) R indirgenmiş bir halka olsun. $m \in R$ için $mr_R(m) = 0$ olup, $(r_R(m)m)^2 = 0$ bulunur. O halde $r_R(m)m = 0$'dır. Buradan $r_R(m) \subseteq l_R(m)$ elde edilir. Benzer şekilde $ml_R(m) = 0$ olduğu görülebilir. Bu durumda $l_R(m) \subseteq r_R(m)$ bulunur. Sonuç olarak

$r_R(m) = l_R(m)$ olup $r_R(m) \trianglelefteq R$'dir.

(ii) R, IFP koşulunu sağlayan bir halka olsun. Bu durumda bir $e^2 = e \in R$ için $r_R(e)$, R'nin bir idealidir. Buradan $r_R(e) = (1-e)R \trianglelefteq R$ olur. Böylece $1 - e \in S_l(R)$ ve $e \in S_r(R)$ bulunur. Benzer adımlarla $r_R(1-e) = eR \trianglelefteq R$ ve buradan da $e \in S_l(R)$ olur. O halde e merkezil bir eş kare elemandır. Böylece R halkası Abel'dir. ■

Aşağıdaki önerme, Baer, yarı-Baer ve π-Baer halkaların hangi koşullar altında aynı olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.3.11 *Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) *R, Abel ve π-Baer bir halkadır.*

(ii) *R, Abel ve Baer bir halkadır.*

(iii) *R, indirgenmiş yarı-Baer bir halkadır.*

(iv) *R, IFP koşulunu sağlayan yarı-Baer bir halkadır.*

(v) *R, indirgenmiş Baer bir halkadır.*

(vi) *R, IFP koşulunu sağlayan Baer bir halkadır.*

(vii) *R, indirgenmiş π-Baer bir halkadır.*

$(viii)$ *R, IFP koşulunu sağlayan π-Baer bir halkadır.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. Bu durumda $r_R(A) \leq R_R$'dir. R, Abel halka olduğundan, Önerme 2.3.8 (ii) yardımıyla $r_R(A) \trianglelefteq_p R_R$ bulunur. R, π-Baer olduğundan $l_R(r_R(A)) = Re$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in R$ vardır. Buradan, $r_R(l_R(r_R(A))) = r_R(Re) = (1-e)R$ elde edilir. Böylece $r_R(A) = (1-e)R$ olup R, Baer'dir.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Önerme 2.2.11'e denk bir ifadedir.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Önerme 2.3.10 yardımıyla açıktır.

$(iv) \Rightarrow (v)$ $\emptyset \neq X \subseteq R$ olsun. R halkası IFP koşulunu sağladığından $r_R(X)$, R'de bir idealdir. R, yarı-Baer olduğu için $l_R(r_R(X)) = Rc$ olacak şekilde bir $c^2 = c \in R$ bulunabilir. Buradan $r_R(X) = (1-c)R$ yazılabilir. Böylece R halkası Baer'dir. IFP koşulu Abel koşulunu gerektirdiğinden Önerme 2.2.11 gereği R indirgenmiştir.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Önerme 2.3.10'dan takip edilebilir.

$(vi) \Rightarrow (vii)$ İspat, kısım $(iv) \Rightarrow (v)$ ve Önerme 2.3.5'ten elde edilir.

$(vii) \Rightarrow (viii) \Rightarrow (i)$ Önerme 2.3.10'un sonucudur. ■

Baer bir halkanın tekil olmayan bir halka olduğu Önerme 2.1.6'dan bilinmektedir. Ancak bir π-Baer halka her zaman tekil olmayan bir halka olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu nitelendirir.

Örnek 2.3.12 *A bir asal halka ve $Z(A_A) \neq 0$ için $R = Mat_n(A)$ ve $1 \leq n, n \in \mathbb{N}$, olsun. R halkası asal olduğundan yarı-Baer'dir. Hatta $R = \mathbf{I}(R)$'dir. Sonuç 2.3.7 (iii)'den R halkası π-Baer'dir, ancak $Z(R_R) \neq 0$'dır.*

Önerme 2.3.13, π-Baer halkanın hangi durumda tekil olmayan bir halka olduğuna dair sonuç içerir.

Önerme 2.3.13 *R, π-Baer bir halka olsun. Eğer R halkasının esas her sağ ideali projeksiyon değişmez bir sağ idealin esas genişlemesi oluyorsa R, sağ tekil olmayan bir halkadır.*

İspat. $0 \neq x \in Z(R_R)$ olsun. Bu durumda $r_R(x) \leq_e R_R$'dir. Kabul gereği $I \leq_e r_R(x)$ olacak şekilde bir $I_R \trianglelefteq_p R_R$ bulunabilir. Burada $xI \leq_e xr_R(x) = 0$ olacağı için $xI = 0$'dır. O halde $x \in l_R(I)$ olur. R halkası π-Baer olduğundan bir $e^2 = e \in R$ için $l_R(I) = Re$ olup, $I \subseteq (1-e)R$ bulunur. $I_R \leq_e R_R$ olduğundan $e = 0$ olmalıdır. Böylece $x = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde R sağ tekil olmayan bir halkadır. ■

Önerme 2.3.14 *M tekil olmayan ve π-genişleyen bir sağ R-modül olsun. Bu durumda M_R'nin endomorfizma halkası da π-Baer'dir.*

İspat. $S = End(M_R)$ ve $X_S \trianglelefteq_p S_S$ olsun. Burada $XM_R \trianglelefteq_p M_R$ olur. O halde bir $c^2 = c \in S$ için $XM_R \leq_e cM_R$ ve $X \subseteq cS$ yazılabilir. Açıktır ki $S(1-c) \subseteq l_S(X)$'tir. $a \in l_S(X)$ ve $cm \in cM$ olsun. Bu durumda $(cm)^{-1}(XM) = \{r \in R : cmr \in XM\} \leq_e R_R$ bulunur. O halde $acm((cm)^{-1}(XM)) = 0$ olur. Bu durumda $acm = 0$'dır. Sonuç olarak $acM = 0$'dır. Böylece $a \in l_S(cM) = S(1-c)$ olup $l_S(X) = S(1-c)$, $(1-c)^2 = 1-c \in S$ elde edilir. ■

Sonuç 2.3.15 *R tekil olmayan ve π-genişleyen bir halka olsun. Bu durumda R, π-Baer halkadır.*

Aşağıdaki önerme Chatters-Khuri Teoreminden yola çıkılarak ispatlanmış, π-Baer halka ile π-genişleyen halka araşındaki ilişkiyi gösteren (Birkenmeier vd., 2018) makalesinde yer alan önemli bir önermedir.

Önerme 2.3.16 *R, sağ tekil olmayan bir halka olmak üzere R_R'nin π-genişleyen halka olması için gerek ve yeter koşul R'nin π-Baer bir halka olması ve R'deki projeksiyon değişmez her sağ P ideali için $P_R \leq_e r_R(l_R(P))$ olmasıdır.*

İspat. R_R π-genişleyen bir halka olsun. Sonuç 2.3.14 gereği R halkası π-Baer'dir. $P_R \trianglelefteq_p R_R$ olsun. Buradan bir $e^2 = e \in R$ için $P \leq_e eR$ olur. $Z(R_R) = 0$ olduğundan $l_R(P) = l_R(eR)$'dir. Sonuç olarak $r_R(l_R(P)) = r_R(l_R(eR)) = r_R(R(1-e)) = eR$ bulunur. Böylece $P_R \leq_e r_R(l_R(P))$ elde edilir. Tersine R, π-Baer ve her $P_R \trianglelefteq_p R_R$ için $P_R \leq_e r_R(l_R(P))$ olsun. Diğer yandan, R, π-Baer olduğundan $r_R(l_R(P)) = cR$ olacak şekilde bir $c^2 = c \in R$ vardır. O halde $P_R \leq_e cR$ olup R_R, π-genişleyen halkadır. ■

Önerme 2.3.17 *R, sağ tekil olmayan bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) R halkasındaki her kapalı sağ ideal bir sağ sıfirlayıcıdır.

(ii) R sağ eş tekil olmayan bir halkadır.

(iii) R'deki her sağ A ideali için $A_R \leq_e r_R(l_R(A))$ olur.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ $A_R \leq R_R$ olmak üzere $l_R(A) = 0$ kabul edilsin. Bu durumda $A_R \leq_e B_R \leq_c R_R$ olacak şekilde R'de bir B kapalı sağ ideali bulunabilir. Hipotez gereği $B = r_R(l_R(B))$ olur. $l_R(A) = 0$ kabul edildiğinden $l_R(B) = 0$ olacaktır. O halde $B = R$'dir. Buradan $A_R \leq_e R_R$ elde edilir. Böylece R halkası sağ eş tekil olmayan bir halkadır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ R halkasının bir kapalı sağ ideali C olarak seçilsin. $C \neq r_R(l_R(C))$ kabul edilsin. Kapalı ideallerin öz esas genişlemesi yoktur. Bu durumda $C_R \nleq_e r_R((l_R(C)))$

olacaktır. Şu halde bir $0 \neq D_R \leq r_R(l_R(C))$ ideali için $D \cap C = 0$'dır. E_R, D_R'nin R'deki $C \subset E$ özelliğinde bir tümleyeni olsun. Buradan $E \cap D = 0$ ve $(E \oplus D)_R \leq_e R_R$ yazılabilir. O halde $E_R \nleq_e R_R$ olur. R halkası sağ eş tekil olmayan bir halka olduğundan $l_R(E) \neq 0$'dır. Bu durumda $0 \neq x \in l_R(E)$ için $xE = 0$ ve $C \subset E$ olduğundan $xC = 0$ yazılabilir. O halde $x \in l_R(C) = l_R(r_R(l_R(C))) \subseteq l_R(D)$ olur. Buradan $xD = 0$ olacağından $x(E \oplus D) = 0$ elde edilir. Böylece $x \in Z(R_R) = 0$ olup $x = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu bir çelişkidir, dolayısıyla $C = r_R(l_R(C))$ olmalıdır.

$(i) \Rightarrow (iii)$ A, R halkasının bir sağ ideali olmak üzere $A \leq_e C \leq_c R$ özellikte bir C ideali seçilsin. (i) koşulundan $C = r_R(l_R(C))$ olur. Gerçekten; $C = r(x)$ yazılırsa, $l_R(C) = l_R(r_R(x))$ olur. Böylece $r_R(l_R(C)) = r_R(l_R(r_R(x))) = r_R(x) = C$ olup $C = r_R(l_R(C))$ elde edilir. $Z(R_R) = 0$ olduğundan Önerme 1.5.5 gereği, $l_R(A) = l_R(C)$ bulunur. Buradan $A \subseteq r_R(l_R(A)) = r_R(l_R(C)) = C$ elde edilir. Böylece $A_R \leq_e r_R(l_R(A))$'dır.

$(iii) \Rightarrow (i)$ A, R halkasında kapalı bir ideal olsun. (iii) koşulundan $A_R \leq_e r_R(l_R(A))$ yazılabilir. Ancak A kapalı bir ideal olduğundan $A_R = r_R(l_R(A))$ olur. Böylece A bir sağ sıfırlayıcıdır. ■

Sonuç 2.3.18 *R sağ tekil olmayan ve sağ eş tekil olmayan bir halka olsun. Bu durumda R halkasının π-Baer olması için gerek ve yeter koşul R'nin sağ π-genişleyen halka olmasıdır.*

İspat. Önerme 2.3.16 ve Önerme 2.3.17'den açıktır. ■

Önerme 2.3.19 *R asal bir halka olmak üzere R, π-Baer bir halkadır. $\Leftrightarrow$ Her $0 \neq Y_R \trianglelefteq_p R_R$ (ya da her $0 \neq {}_RX \trianglelefteq_p {}_RR$) için $r_R(Y) = 0$ (ya da $l_R(X) = 0$)'dır.*

İspat. R, π-Baer bir halka olsun. Bu durumda bir $c^2 = c \in S_l(R)$ vardır ki $r_R(Y) = cR \trianglelefteq R$ yazılabilir. O halde $YcR = 0$ ve R asal bir halka olduğundan $cR = r_R(Y) = 0$ bulunur. Tersinin ispatı açıktır. Benzer şekilde her $0 \neq X_R \trianglelefteq_p R_R$ için $l_R(X) = 0$ olduğu da görülebilir. ■

Önerme 2.3.20 *M bir modül ve M_1, M'nin projeksiyon değişmez bir alt modül olmak üzere, $M_1,\ M_2 \leq M$ için $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Eğer $X,\ M_2$ alt modülünün projeksiyon değişmez bir alt modülü ise $M_1 \oplus X$ de M'de projeksiyon değişmez bir alt modül olur.*

İspat. $X_R \leq (M_2)_R$ için $(M_1 \oplus X)_R \leq M_R$ olduğu açıktır. $M_1 = (fM)_R \trianglelefteq_p M_R$ ve $M_2 = (1-f)M$ olacak şekilde $f \in S_l(End(M))$ vardır. $X_R \trianglelefteq_p (M_2)_R,\ \ e^2 = e \in End(M)$ ve $m + x \in M_1 \oplus X$ olsun. Bu durumda $em + fex \in fM$ ve $(1-f)e = (1-f)e(1-f) = ((1-f)e)^2$ olup $1 - f \in S_r(End(M))$ bulunur. Buradan $(1-f)e = ((1-f)e)^2 \in End(M_2)$ olur. O halde $(1-f)ex \in X$'tir. Sonuç olarak $(M_1 \oplus X)_R \trianglelefteq_p M_R$ elde edilir. ∎

Önerme 2.3.21 *R, π-Baer halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Eğer $(1-e)R$, R halkasında projeksiyon değişmez bir sağ ideal ise $eR = eRe$ ve $R(1-e) = (1-e)R(1-e)$ halkaların ikisi de π-Baerdir. Ayrıca Re, R halkasının projeksiyon değişmez bir sol idealidir.*

İspat. $(1-e)R,\ \ R$ π-Baer halkasında projeksiyon değişmez bir sağ ideal olduğundan $1 - e \in S_l(R)$ ve $e \in S_r(R)$ olur. Bu durumda $(1-e)R(1-e) = R(1-e)$ ve $eR = eRe$ olur. $X,\ eRe$ halkasında bir projeksiyon değişmez sağ ideal olarak seçilsin. $R = eR \oplus (1-e)R,\ \ X \trianglelefteq_p eR = eRe$ ve $(1-e)R \trianglelefteq_p R$ olduğundan, Önerme 2.3.20 gereği, $X \oplus (1-e)R,\ \ R$ halkasının projeksiyon değişmez bir sağ idealidir. Buradan $I = l_R(X \oplus (1-e)R) = Rf \trianglelefteq_p {}_RR$ olacak şekilde bir $f \in S_r(R)$ bulunabilir. Bu durumda $eIe = eRfe$ ve $(efe)^2 = (efe) \in eRe$ olur. O halde $eIe = eRfe = eRfef = eRfefe = (eRfe)(efe) \subseteq (eRe)(efe)$ elde edilir. $(ere)(efe) \in (eRe)(efe)$ alınsın. Şu halde $(ere)(efe) = er(efe) = erefef = (erfe)(efe) \in (eRfe)(efe)$ olur. Böylece $(eRfe)(efe) = (eRe)(efe) = eIe$ sonucuna ulaşılır. Burada $eIeX = 0$ olacağından $eIe \subseteq l_{eRe}(X)$ olur. $a \in l_{eRe}(X)$ olsun. O halde $aX = 0$ yazılabilir. Ayrıca $a(1-e)R = 0$ olacağından $a(X \oplus (1-e)R) = 0$ olur. Buradan $a \in l_R(X \oplus (1-e)R) = I$ bulunur. Bu durumda $a \in I \cap eRe = eIe$ elde edilir. Sonuç olarak $eIe = l_{eRe}(X)$ olur ve $(eRe)(efe) = eIe$ eşitliğinden $l_{eRe}(X) = (eRe)(efe)$ elde edilir. Burada

$(efe)^2 = (efe) \in eRe$ olup eRe halkası π-Baer'dir. Benzer şekilde $R(1-e)$ halkasının da π-Baer olduğu görülebilir. ■

Tanım 2.3.22 *R ve S iki halka, M ise (R,S)-bimodül olsun.*

$$T = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} : r \in R,\, m \in M,\, s \in S \right\}$$

matrisi bilinen matris toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya genelleştirilmiş üst üçgensel matris halkası denir.

Örnek 2.3.23 *Aşağıda bazı genelleştirilmiş üst üçgensel matris halkası örnekleri sıralanmıştır:*

(i) M_R *modülü için* $T = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$.

(ii) $T = \begin{bmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$.

(iii) M_R *modülü,* $S = End(M_R)$ *ise* $T = \begin{bmatrix} End(M_R) & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$.

(iv) $M_R = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ *olsun.* $S = End(M_R) = End(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}$ *ise* $T = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$.

(v) $V,\ F$ *cismi üzerine kurulu bir vektör uzayı ise* $T = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & V \\ 0 & F \end{bmatrix}$ *ve* $T = \begin{bmatrix} F & V \\ 0 & F \end{bmatrix}$.

Bu kısımda S ve R birer halka, M bir (S,R)-bimodül ve $T = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$ genelleştirilmiş üst üçgensel matris halkası olarak kabul edilecektir.

Önerme 2.3.24 $T = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$ *için* $e_1^2 = e_1 \in S$ *ve* $e_2^2 = e_2 \in R$ *olmak üzere* $e = \begin{bmatrix} e_1 & k \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \in S_l(T)$ *ve* $f = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$ *olsun. Bu durumda*

(i) $e_1 \in S_l(S)$, $e_2 \in S_l(R)$ *ve* $f \in S_l(T)$*'dir.*

(ii) $eT = fT$*'dir.*

İspat. (i) $e \in S_l(T)$ ise $\begin{bmatrix} e_1 & k \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & m \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & k \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & m \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & k \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$ olur. O halde $e_1 s e_1 = s e_1$ ve bu durumda $e_1 \in S_l(S)$'dir. Benzer şekilde $e_2 r e_2 = r e_2$ olup $e_2 \in S_l(R)$ bulunur. Diğer yandan $e_1 s k + e_1 m e_2 + k r e_2 = sk + m e_2$'dir. Burada eğer $s = r = 0$ seçilirse her $m \in M$ için $e_1 m e_2 = m e_2$ yazılabilir. $f = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} s & m \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} se_1 & me_2 \\ 0 & re_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 s e_1 & e_1 m e_2 \\ 0 & e_2 r e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & m \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $f \in S_l(T)$'dir.

(ii) Her $m \in M$ için $e_1 m e_2 = m e_2$'dir. $k \in M$ için $e = \begin{bmatrix} e_1 & k \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$ olup $e_1 k e_2 = k e_2$ bulunur. Burada $f = e \begin{bmatrix} e_1 & -ke_2 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$ ise $f \in eT$'dir. Bu durumda $fT \subseteq eT$ olur. $e \in S_l(T)$ olduğundan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e = e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e$ bulunur. Şu halde $e = \begin{bmatrix} e_1 & k \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$ yazılırsa $k = e_1 k$ olur. Böylece $e = f \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in fT$ olup $eT \subseteq fT$ sonucuna ulaşılır. O halde $eT = fT$'dir. ■

Önerme 2.3.25 *M, (S, R)-bimodül ve I, N, J sırasıyla S, M ve R'nin toplamsal alt grupları olsunlar. Bu durumda $K = \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}$ olmak üzere ${}_T K \trianglelefteq_p {}_T T$ olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki dört şartın sağlanmasıdır:*

(i) ${}_S I \trianglelefteq_p {}_S S$ *ve* ${}_R J \trianglelefteq_p {}_R R$*'dir.*

(ii) $SN + MJ \subseteq N$*'dir.*

(iii) N*,* M*'nin* $(S, \mathbf{I}(R))$*-bialtmodülüdür.*

(iv) $IM \subseteq N$*'dir.*

İspat. ${}_TK \trianglelefteq_p {}_TT$ olsun. $r \in R$, $m \in M$, $s \in S$, $i \in I$, $n \in N$ ve $j \in J$ elemanları seçilsin. Burada $\begin{bmatrix} s & m \\ 0 & r \end{bmatrix} K \subseteq K$ olduğundan ${}_SI \leq {}_SS$ ve ${}_RJ \leq {}_RR$'dir. Burada

$\begin{bmatrix} s & m \\ 0 & r \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} s & m \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI & sN + mJ \\ 0 & rJ \end{bmatrix} \subseteq K = \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}$ yazılabilir. Bu durumda $sN + mJ \subseteq N$ ve dolayısıyla $SN + MJ \subseteq N$ sonucuna ulaşılır.

${e_1}^2 = e_1 \in S$ ve ${e_2}^2 = e_2 \in R$ olsun. O halde $\begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \in T$ olur.

${}_TK \trianglelefteq_p {}_TT$ olduğundan $\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}$ bulunur. O halde $\begin{bmatrix} Ie_1 & Ne_2 \\ 0 & Je_2 \end{bmatrix} \subseteq$

$\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}$ elde edilir. Bu durumda $Ie_1 \subseteq I$ olduğundan ${}_SI \trianglelefteq_p {}_SS$ 'dir. Benzer şekilde $Je_2 \subseteq J$ olduğundan ${}_RJ \trianglelefteq_p {}_RR$ olur. Burada $Ne_2 \subseteq N$ olduğundan N, $(S, \mathbf{I}(R))$-bialtmodülüdür.

${}_TK \trianglelefteq_p {}_TT$ olduğundan $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in T$ eş kare elemanları için $K \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\subseteq \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}$ olur. Bu durumda $\begin{bmatrix} 0 & IM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}$ bulunur. Böylece $IM \subseteq N$'dir.

Tersine (i), (ii), (iii), (iv) koşulları sağlansın. Burada $\begin{bmatrix} e_1 & x \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \in T$ için

${e_1}^2 = e_1 \in S$ ve ${e_2}^2 = e_2 \in R$ olur. O halde $K \begin{bmatrix} e_1 & x \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & x \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} Ie_1 & Ix + Ne_2 \\ 0 & Je_2 \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix} = K$ elde edilir. Bu durumda ${}_TK \trianglelefteq_p {}_TT$'dir. ■

Önerme 2.3.26 *M, (S, R)-bimodül ve I, N, J sırasıyla S, M ve R'nin toplamsal alt grupları olsunlar. Bu durumda* $\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix} \trianglelefteq_p {}_TT$ *ise* $r_T\left(\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}\right) =$

$\begin{bmatrix} r_S(I) & r_M(I) \\ 0 & r_R(J)\cap r_R(N) \end{bmatrix}$ *olur.*

İspat. $\begin{bmatrix} r_S(I) & r_M(I) \\ 0 & r_R(J)\cap r_R(N) \end{bmatrix} \subseteq r_T\left(\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}\right)$ olduğu açıktır. Ters yönlü kapsamayı görebilmek için $s \in r_S(I)$, $r \in r_R(J)\cap r_R(N)$ ve $m \in r_M(I)$ seçilsin. Bu durumda $\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & m \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Is & Im+Nr \\ 0 & Jr \end{bmatrix} = 0$ bulunur. Böylece $r_T\left(\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix}\right) \subseteq$ $\begin{bmatrix} r_S(I) & r_M(I) \\ 0 & r_R(J)\cap r_R(N) \end{bmatrix}$ olur. ■

Teorem 2.3.27 $T = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$ *olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) T, π-Baer'dir.

(2) (i) S ve R, π-Baer'dir.

(ii) Her ${}_SI \trianglelefteq_p {}_SS$ için $r_M(I) = (r_S(I))M$ sağlanır.

(iii) Eğer ${}_SN_{\mathbf{I}(R)} \trianglelefteq {}_SM_{\mathbf{I}(R)}$ oluyorsa $r_R(N) = aR$ olacak şekilde bir $a^2 = a \in R$ vardır.

İspat. (1) ⇒ (2) T, π-Baer halka olsun.

(i) $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \trianglelefteq T$ ve $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \trianglelefteq T$ idealleri için $T = T_1 \oplus T_2$ yazılır. Önerme 2.3.21 gereği T_2, π-Baer'dir. Burada $T_2 \cong R$'dir. O halde R de π-Baer'dir. Benzer şekilde $T = T_1' \oplus T_2'$ olacak şekilde $T_1' = T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & R \end{bmatrix} \trianglelefteq T$ ve $T_2' = T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \trianglelefteq T$ idealleri vardır. Önerme 2.3.21 yardımıyla S'nin π-Baer olduğu sonucuna ulaşılır.

(ii) ${}_SI \trianglelefteq_p {}_SS$ olsun. Bu durumda Önerme 2.3.25'ten $B = \begin{bmatrix} I & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, T'nin projeksiyon değişmez bir sol ideali olur. Önerme 1.5.8 gereği $e \in S_l(T)$ vardır ki $r_T(B) = eT$'dir. Önerme 2.3.24'ten $e_1 \in S_l(S)$ ve $e_2 \in S_l(R)$ için $e = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$ yazılır. Bu durumda $r_T(B) = eT = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1S & e_1M \\ 0 & e_2R \end{bmatrix}$ olur. Önerme 2.3.26'dan $r_S(I) = e_1S$ ve $r_M(I) = e_1M = e_1SM = (r_S(I))M$ elde edilir.

(iii) ${}_SN_{\mathbf{I}(R)} \trianglelefteq {}_SM_{\mathbf{I}(R)}$ olsun. Önerme 2.3.25'te $I = J = 0$ seçilirse $K = \begin{bmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \trianglelefteq_p {}_TT$ olur. Önerme 1.5.8 gereği $c = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir $c_1 \in S_l(S)$ ve $c_2 \in S_l(R)$ bulunabilir. Bu durumda $r_T(K) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} c_1S & c_1M \\ 0 & c_2R \end{bmatrix}$ olur. Önerme 2.3.26'dan $r_R(N) = r_R(0) \cap r_R(N) = c_2(R)$ olur. Burada $a = c_2$ kabul edilirse ispat tamamlanmış olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) $K = \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & J \end{bmatrix} \trianglelefteq_p {}_TT$ olsun. Bu durumda Önerme 2.3.25'in (i) ve (iv) koşulları sağlanır. R ve S π-Baer halkalar olduğundan $r_S(I) = e_1S$ ve $r_R(J) = fR$ olacak şekilde bir $e_1 \in S_l(S)$ ve $f \in S_l(R)$ vardır. Kabul gereği $r_M(I) = (r_S(I))M = e_1M$ ve $a^2 = a \in R$ için $r_R(N) = aR$'dir. $f \in S_l(R)$ olduğundan $(af)^2 = af$ olur. $e_2 = af$ olarak seçilsin. Bu durumda $e_2R = afR = aR \cap fR = r_R(N) \cap r_R(J)$ bulunur. Burada $e = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \in T$'dir. Önerme 2.3.26'ten $r_T(K) = \begin{bmatrix} r_S(I) & r_M(I) \\ 0 & r_R(J) \cap r_R(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eS & eM \\ 0 & e_2R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} T$ elde edilir. Böylece $r_T(K) = eT$ olup T, π-Baer'dir. ■

Sonuç 2.3.28 *$S = \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $T = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$'nin π-Baer olması için gerek ve* *yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:*

(i) *R, π-Baer'dir.*

(ii) ${}_{\mathbb{Z}}M$ *burulmasızdır.*

(iii) ***Eğer*** $N_{\mathbf{I}(R)} \trianglelefteq M_{\mathbf{I}(R)}$ *ise* $r_R(N) = aR$ *olacak şekilde bir* $a^2 = a \in R$ *vardır.*

İspat. Teorem 2.3.27'den (i) ve (iii) koşullarının sağlandığı açıktır. Diğer yandan; Teorem 2.3.27 gereği ${}_{\mathbb{Z}}I \trianglelefteq_p {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ için $r_M(I) = (r_{\mathbb{Z}}(I))M$ olur. $\mathbb{Z}$ bir temel ideal bölgesi olduğundan $n \in \mathbb{Z}$ için $I = n\mathbb{Z}$ yazılabilir. Böylelikle $r_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}) = 0$ olur. Burada $r_M(I) = r_M(n\mathbb{Z}) = (r_{\mathbb{Z}}(I))M = (r_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}))M = 0$ bulunur. Bu durumda ${}_{\mathbb{Z}}M$ burulmasızdır. Önermenin tersi, Teorem 2.3.27'den açıktır. ■

Sonuç 2.3.29 *$S = End(M_R)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(1) T, π-Baer'dir.

(2) (i) R, π-Baer'dir.

(ii) Her ${}_SI \trianglelefteq_p {}_SS$ için $r_M(I) \leq_d M$'dir.

(iii) Her ${}_SN_{\mathbf{I}(R)} \trianglelefteq {}_SM_{\mathbf{I}(R)}$ için $r_R(N) = aR$ olacak biçimde bir $a^2 = a \in R$ vardır.

İspat. ${}_SI \trianglelefteq_p {}_SS$ olsun. Burada "$r_M(I) \leq_d M$'dir ancak ve ancak S, π-Baer'dir ve $r_M(I) = (r_S(I))M$'dir." önermesinin sağlandığını göstermek yeterlidir. S, π-Baer olduğundan $r_S(I) = eS$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır. Buradan $r_S(I)M = (eS)M$ ve M, (S, R)-bimodül olduğundan $r_M(I) = eM$ bulunur. $S = End(M_R)$ olup $r_M(I) = eM \leq_d M$ olur. Tersine $r_M(I) = eM = eSM = (r_S(I))M$ sağlanır. ${}_SI \trianglelefteq_p {}_SS$ seçilsin. Burada $e^2 = e \in S$ için $r_M(I) = eM$ olsun. Bu durumda $r_S(I) = eS$'dir ve böylelikle S, π-Baer'dir. ■

Sonuç 2.3.30 *M_R tekil olmayan, π-genişleyen modül ve $S = End(M_R)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) T, π-Baer'dir.

(2) (i) R, π-Baer'dir.

(ii) ${}_SN_{\mathbf{I}(R)} \trianglelefteq {}_SM_{\mathbf{I}(R)}$ ise bir $a^2 = a \in R$ için $r_R(N) = aR$'dir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) Teorem 2.3.27'den açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\ _SI \trianglelefteq_p \ _SS$ olsun. $(r_M(I))_R \leq M_R$ olduğu açıktır. $f^2 = f \in S$ için $m \in fr_M(I)$ ise $m = fx$ olacak biçimde $x \in r_M(I)$ vardır. Buradan $Ix = 0$'dır. Böylece $Im = Ifx \subseteq Ix = 0$ olup, $m \in r_M(I)$'dır. Yani $(r_M(I))_R \trianglelefteq_p M_R$ olur. M_R π-genişleyen olduğundan bir $e^2 = e \in End(M_R)$ için $(r_M(I))_R \leq_e eM$ olacaktır. Burada $em \in eM$ ve $L = \{r \in R : emr \in r_M(I)\}$ olsun. Öyleyse $L_R \leq_e R_R$'dir ve $(Iem)L = 0$'dır. Bu durumda $Iem \in Z(M_R)$ bulunur. $Z(M_R) = 0$ olduğundan $I(em) = 0$ olup $em \in r_M(I)$ bulunur. Böylece $eM \subseteq r_M(I) \leq eM$'dir. O halde $r_M(I) = eM$ olmalıdır. Şu halde $r_M(I) \leq_d M$ olur ve Önerme 2.3.29'dan T, π-Baer'dir. ■

Sonuç 2.3.31 *R, bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) R, π-Baer'dir.

(2) Her $n > 1$ tamsayısı için $\mathbf{T}_n(R)$, π-Baer'dir.

(3) En az bir $n > 1$ tamsayısı için $\mathbf{T}_n(R)$, π-Baer'dir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) $n = 2$ olsun. Öyleyse $\mathbf{T}_2(R) = \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & R \end{bmatrix}$'dir. Teorem 2.3.27'den ve $S = M = R$ olduğundan her $\ _RI \trianglelefteq_p \ _RR$ için $r_R(I) = r_R(I)R$ olur. Bu durumda Teorem 2.3.27'nin (ii) koşulu sağlanmış olur. $\ _RN_{\mathbf{I}(R)} \trianglelefteq \ _RM_{\mathbf{I}(R)}$ olsun. O halde $\ _RN \trianglelefteq_p \ _RR$ olur. R, π-Baer olduğu için $r_R(N) = eR$ olacak şekilde $e \in S_l(R)$ vardır. Burada $a = e$ kabul edilsin. Teorem 2.3.27 (iii) sağlanır. Böylece Teorem 2.3.27'ten $\mathbf{T}_2(R)$, π-Baer'dir. $\mathbf{T}_n(R)$, π-Baer olsun. $\mathbf{T}_{n+1}(R)$'nin π-Baer olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\mathbf{T}_{n+1}(R) = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & \mathbf{T}_n(R) \end{bmatrix}$, $M = [R, R, ..., R]$, $(n - kez)$ yazılabilir. Teorem 2.3.27 yardımıyla görülür ki her $\ _RI \trianglelefteq_p \ _RR$ için $r_R(I) = eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ vardır. Ayrıca $r_M(I) = eM = r_R(I)M$'dir. $W = \mathbf{T}_n(R)$ ve $\ _RN_{I(W)} \trianglelefteq \ _RM_{I(W)}$ olsun. Önerme 2.3.25'den $\begin{bmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T}_{n+1}(R)$'nin projeksiyon değişmez sol ideali olur. Buradan $N = [N_1, ..., N_n]$ olsun. Öyleyse $N_1 \subseteq ... \subseteq N_n$ için N_i'ler R'nin projeksiyon değişmez sol ideali olur. R, π-Baer olduğundan her bir i için${f_i}^2 = f_i \in R$ vardır ki, $r_R(N_i) = f_iR$'dir.

$e_{ij} \in W$, (i,j) konumunda 1, diğer tüm konumlarda 0 olan bir matris olsun. Ayrıca $a = f_1 e_{11} + \cdots + f_n e_{nn} \in W$ seçilsin. Bu durumda $a^2 = a$'dır ve $r_W(N) = aW$ olup Önerme 2.3.27'ten $\mathbf{T}_{n+1}(R)$, π-Baer'dir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Teorem 2.3.27'ten görülür. ■

Sonuç 2.3.31 göstermiştir ki, π-Baer halka üzerine kurulu üst üçgengel matris halkası da π-Baer'dir. Bu özellik Baer halka sınıfı için geçerli değildir. Gerçekten; R, bölümlü halka olmayan bir tamlık bölgesi olsun. Bu durumda $\mathbf{T}_n(R)$, π-Baer'dir ama Baer değildir. O halde Sonuç 2.3.31, π-Baer olup Baer olmayan birçok halka örnekleri sunar.

Önerme 2.3.32 *R, π-Baer halka olsun. Bu durumda her $n > 1$ tamsayısı için $Mat_n(R)$ de π-Baer'dir.*

İspat. R, π-Baer halka ise Önerme 2.3.5'den R, yarı-Baer'dir. Önerme 2.2.13 gereği $Mat_n(R)$ de yarı-Baer'dir. $Mat_n(R) = \mathbf{I}(Mat_n(R))$ olduğundan Sonuç 2.3.7 (iii) gereği $Mat_n(R)$ de π-Baer'dir. ■

Önerme 2.3.32'nin tersi doğru olmak zorunda değildir. Örneğin; R bir asal halka olmak üzere, R_R düzenli ve $Z(R_R) \neq 0$ olsun. Bu durumda R, yarı-Baer'dir böylece $Mat_n(R)$ de yarı-Baer bir halka olur. O halde Sonuç 2.3.7 (iii)'den $Mat_n(R)$, π-Baer'dir ancak R, π-Baer halka değildir.

Önerme 2.3.33 *$e(x) \in R[x]$ için $e(x) = e_0 + e_1 x + \cdots + e_n x^n$ olsun.*

(i) $(e(x))^2 = e(x)$'tir ancak ve ancak $0 \leq k$ ve $0 \leq i,j \leq k$ olmak üzere $e_k = \sum_{i+j=k} e_i e_j$'dir. Buradan $e(x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $e_0 = 0$ olmasıdır.

(ii) Eğer $e(x) = e_0 + e_1 x + \cdots + e_n x^n = (e(x))^2$ ise $\sum_{i=0}^{n} e_i = (\sum_{i=0}^{n} e_i)^2 \in R$ olur.

(iii) Eğer $(e(x))^2 = e(x)$ ise her $i \geq 0$ için $e(i) \in \mathbf{I}(R)$'dir. Böylece $\mathbf{I}(R[x]) \subseteq \mathbf{I}(R)[x]$ olur.

(iv) I, R'nin bir sağ ideali olsun. I, R'de projeksiyon değişmez sağ idealdir ancak ve ancak $I[x]$, $R[x]$'te projeksiyon değişmez sağ idealdir.

İspat. (i) ve (ii) maddelerinin ispatı basit hesaplamalarla görülebilir.

(iii) İspat tümevarım tekniği ile yapılabilir. Burada eğer $i = 0$ ise $e(x) = e_0$ ve $e_0 = e_0e_0 \in \mathbf{I}(R)$ olur. $0 < i < k$ için $= e_i \in \mathbf{I}(R)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda (i) koşulundan $e_k = \sum\limits_{i+j=k} e_ie_j = e_0e_k + e_1e_{k-1} \cdots + e_ke_0$'dır. $0 \leq i, j < k$ için $e_ie_j \in \mathbf{I}(R)$'dir. Buradan $e_0e_k = e_0e_k + e_0e_1e_{k-1} + \cdots + e_0e_ke_0$ bulunur. Bu ifade düzenlenirse $e_0e_ke_0 = -(e_0e_1e_{k-1} \cdots + e_0e_{k-1}e_1) \in \mathbf{I}(R)$ elde edilir. Yardımcı Teorem 1.1.12 yardımıyla $e_0 - e_0e_k + e_0e_ke_0$ ve $e_0 - e_ke_0 + e_0e_ke_0$, R'nin eş kare elemanları olup e_0e_k, $e_ke_0 \in \mathbf{I}(R)$ bulunur. Buradan $e_k \in \mathbf{I}(R)$ olur.

(iv) I, R'nin bir projeksiyon değişmez sağ ideali olsun. Ayrıca $e(x) = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n$ ve $(e(x))^2 = e(x)$ kabul edilsin. $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in I[x]$ seçilsin. $e(x)p(x)$ polinomunun her katsayısı e_je_k, $0 \leq j \leq n$ ve $0 \leq k \leq m$ biçimindedir. $a_k \in I$ ve $e_j \in \mathbf{I}(R)$ olduğundan (iii)'den $e(x)p(x) \in I[x]$ olup $I[x]$, $R[x]$'te projeksiyon değişmez sağ idealdir. Tersine $I[x]$, $R[x]$'te projeksiyon değişmez sağ ideal olsun. $c = c^2 \in R$ ve $b \in I$ seçilsin. Bu durumda $cb \in I[x]$ ve buradan da $cb \in I$ olur. Böylece I, R'nin projeksiyon değişmez sağ ideali olarak bulunur. ■

Önerme 2.3.34 *R, π-Baer'dir. $\Leftrightarrow$ $R[x]$, π-Baer'dir.*

İspat. R, π-Baer halka olsun. $I[x]_{R[x]} \trianglelefteq_p R[x]_{R[x]}$ seçilsin. Önerme 2.3.33'tan I, R'nin projeksiyon değişmez sağ ideali olur. O halde bir $e = e^2 \in R$ için $l_R(I) = Re$ yazılabilir. $l_{R[x]}(I[x]) = R[x]e$ olduğunu göstermek yeterlidir. $eI = 0$ olduğundan $eI[x] = 0$ bulunur. O halde $R[x]eI[x] = 0$ olur. Bu durumda $R[x]e \subseteq l_{R[x]}(I[x])$ elde edilir. Şimdi, $g(x) \in l_{R[x]}(I[x])$ kabul edilsin. Şu durumda her $h(x) \in I[x]$ için $g(x)h(x) = 0$'dır. $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ ve $h(x) = v_0 + v_1x + \cdots + v_mx^m$ olsun. Burada $v_0, v_1, \cdots, v_m \in I$'dır. $0 = g(x)h(x)$ olduğundan $b_0v_0 = 0$ ve $b_0 \in l_R(I) = Re$ olacağından $b_0 = b_0e$ elde edilir. Benzer şekilde $b_0v_1 + b_1v_0 = 0$ olur. Bu durumda $b_1 = b_1e$ elde edilir. Benzer adımlarla devam edilirse her $1 \leq i \leq n$ için $b_i = b_ie$ sonucuna ulaşılır. Buradan $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n = b_0e + b_1ex + \cdots + b_nex^n = (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)e = g(x)e \in R[x]e$ bulunur. Bu durumda $l_{R[x]}(I[x]) \subseteq R[x]e$ olup, ispat tamamlanır.

Tersine, I, R'de bir projeksiyon değişmez sağ ideal olsun. Önerme 2.3.33 (iv) koşulu gereği $I[x]$, $R[x]$'in projeksiyon değişmez sağ ideali olur. $R[x]$, π-Baer olduğundan bir $c(x) = c(x)^2 \in R[x]$, $c(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m$ için $l_{R[x]}(I[x]) = R[x]c(x)$ olur. Burada $c(x)I[x] = 0$ olduğundan $c_0I = 0$'dır. O halde $Rc_0 \subseteq l_R(I)$ bulunur. $b \in l_R(I)$ olsun. Bu durumda $b \in l_{R[x]}(I[x])$ olur. Sonuç olarak $b = bc(x) = bc_0 + bc_1x + \cdots + bc_mx^m$ elde edilir. $b \in Rc_0$ olduğundan $bc_0 = b$ yazılır. Öyleyse $bc_1 = bc_2 = \cdots = bc_m = 0$ bulunur. Buradan $l_R(I) = Rc_0$'dır ve böylece R, π-Baer bir halkadır. ■

3. SIFIRLAYICI KOŞULLARIYLA TANIMLANAN BAZI HALKALAR

3.1 Dual Halkalar ve Ikeda Nakayama Halkaları

Bu kısımda sıfırlayıcı koşullarıyla tanımlanan bazı halkalardan dual halkalar ile Ikeda Nakayama halkalarına yer verilecektir. Burada incelenen sonuçlara (Camillo vd., 2000), (Hajarnavis ve Norton, 1985), (Kaplansky, 1948) ve (Warner, 1993) kaynaklarından ulaşılabilir.

Kaplansky ile Hajarnavis-Norton tarafından tanımlanan iki farklı dual halka tanımı mevcuttur. Kaplansky, dual halkayı topolojik halkalar üzerinde incelerken; Hajarnavis ve Norton ise yine Kaplansky'den ilhamla, cebirsel anlamda çalışmalar yapmışlardır.

Tanım 3.1.1 *(X, τ) bir topolojik uzay ve $(R, +, \times)$ bir halka olmak üzere eğer $R \times R \to R$'ye tanımlı toplama ve çarpma işlemleri R üzerinde sürekli ise $(R, \tau, +, \times)$'ya (ya da kısaca R'ye) topolojik halka denir.*

Bir topolojik uzayda tanımlı gerçel katsayılı sürekli fonksiyonların halkası, normlu vektör uzayındaki sürekli lineer operatörlerin halkası, tüm Banach cebirleri ve rasyonel, gerçel ve karmaşık sayılar kümeleri standart topolojileri ile birer topolojik halka yapısı oluştururlar.

Tanım 3.1.2 *(Kaplansky, 1948) R, bir topolojik halka olsun. Eğer R'nin her kapalı sağ ideali A için $r_R(l_R(A)) = A$ ve her kapalı sol ideali B için $l_R(r_R(B)) = B$ oluyorsa R'ye dual halka denir.*

Kaplansky'nin bu çalışmasından sonra Hajarnavis ve Norton (Hajarnavis ve Norton, 1985) bu halka sınıfını daha çok cebirsel manada incelemişlerdir.

Tanım 3.1.3 *(Hajarnavis ve Norton, 1985) R, bir halka olsun. $A_R \leq R_R$ ve ${}_RB \leq {}_RR$ olmak üzere, eğer $r_R(l_R(A)) = A$ ve $l_R(r_R(B)) = B$ oluyorsa R'ye dual halka denir.*

Bu kısımda yer alan dual halkalar, Hajarnavis ve Norton tarafından tanımı verilen halkalardır.

Önerme 3.1.4 *(Hajarnavis ve Norton, 1985) R, bir dual halka ve $\{X_i\}_{i\in I}$, R'nin sağ ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $l_R(\bigcap_{i\in I} X_i) = \sum_{i\in I} l_R(X_i)$ (ya da, $r_R(\bigcap_{i\in I} X_i) = \sum_{i\in I} r_R(X_i)$) olur.*

İspat. R, dual halka olsun. $X_i = r_R(l_R(X_i))$ olacağından $l_R(\bigcap_{i\in I} X_i) = l_R(\bigcap_{i\in I} r_R(l_R(X_i))) = l_R(r_R(\sum_{i\in I} l_R(X_i))) = \sum_{i\in I} l_R(X_i)$ bulunur. ■

Önerme 3.1.5 *(Hajarnavis ve Norton, 1985) R, bir dual halka ve J, R'nin Jacobson radikali olmak üzere $r_R(J) \leq_e R_R$'dir.*

İspat. $X_R \leq R_R$ için $r_R(J) \cap X = 0$ olsun. Önerme 3.1.4'ten $R = l_R(r_R(J) \cap X) = l_R(r_R(J)) + l_R(X)$ olur. R, dual halka olduğundan $R = J + l_R(X)$ elde edilir. Böylece $1 = j + y$ olacak biçimde $j \in J$ ve $y \in l_R(X)$ vardır. $j \in J$ olduğundan $y = 1 - j$ tersinirdir. O halde $l_R(X) = R$ olup $X = 0$ bulunur. Buradan $r_R(J) \leq_e R_R$'dir. ■

Dikkat edilirse $\mathbb{Z}$ halkası Önerme 3.1.4'teki sıfırlayıcı koşulunu sağlar. Fakat $\mathbb{Z}$ bir dual halka değildir. Bu durumda bu sıfırlayıcı koşullarını sağlayan halka sınıfları da araştırılabilir. Literatürde Ikeda-Nakayama halkaları olarak adlandırılan sınıflar Önerme 3.1.4'teki sıfırlayıcı koşullarıyla tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.6 *(Camillo vd., 2000) R, bir halka, K ve L, R'nin sağ idealleri olsunlar. Eğer $l_R(K \cap L) = l_R(K) + l_R(L)$ eşitliği sağlanıyorsa R'ye sağ Ikeda-Nakayama halka ya da kısaca sağ IN-halka denir. Benzer şekilde sol IN-halka tanımlanır.*

IN-halka sınıfı, dual halka sınıfının bir genelleştirmesidir. Diğer yandan $R = \mathbb{Z}$ halkasının bir sağ IN-halka olduğu fakat dual halka olmadığı açıktır.

Önerme 3.1.7 *(Camillo vd., 2000) R bir sağ IN-halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $A_R \leq R_R$ ise $A \leq_e r_R(l_R(A))$'dır.

(ii) $J(R)$, R'nin Jacobson radikali ve her $A_R \leq R_R$ olmak üzere $l_R(A) \subseteq J(R)$ ise $A_R \leq_e R_R$'dir.

(iii) C, R'nin kapalı sağ ideali ise $C = r_R(l_R(C))$'dir.

İspat. R bir sağ IN-halka olmak üzere $x \in R$ için $A \cap xR = 0$ ise $l_R(A \cap xR) = l_R(A) + l_R(xR) = l_R(0) = R$ olur. Buradan $R = l_R(A) + l_R(x)$ olur.

(i) $x \in r_R(l_R(A))$ ise $l_R(A)x = 0$ olur. Bu durumda $l_R(A) \subseteq l_R(x)$ bulunur. O halde $R = l_R(x)$'tir. Böylece $x = 0$ olur ve $A_R \leq_e R_R$'dir.

(ii) $a \in J(R)$ için $1 - a$ tersinir bir elemandır. Burada $x \in R$ seçilsin. $1 \in R = J(R) + l_R(x)$ ise $a \in J(R)$ ve $b \in l_R(x)$ için $1 = a + b$ ve $b = 1 - a$ yazılır. $b = 1 - a \in l_R(x)$ olduğundan ve tersinir eleman içeren ideal halkanın tamamına eşit olduğundan $l_R(x) = R$ bulunur. Bu durumda $x = 0$ elde edilir.

(iii) C, R'nin kapalı sağ ideali olsun. Kapalı ideallerin esas genişlemesi yoktur. Bu durumda (i) koşulundan $C = r_R(l_R(C))$ bulunur. ■

Önerme 3.1.8 *(Camillo vd., 2000) R, bir sağ IN-halka olsun. Bu durumda*

(i) *R'nin her kapalı sağ ideali sağ dik toplanandır.*

(ii) *A ve B sağ idealleri, R'de birbirinin tümleyeni olsunlar. Bu durumda $A = eR$ ve $B = (1 - e)R$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in R$ vardır.*

İspat. A, R'nin bir kapalı ideali ve B, A'nın tümleyeni olsun. Önerme 1.3.7'den, A da B'nin tümleyenidir. Bu durumda $A \cap B = 0$'dır ve R, bir sağ IN-halka olduğundan $R = l_R(A \cap B) = l_R(A) + l_R(B)$ bulunur. O halde $e \in l_R(B)$ ve $f \in l_R(A)$ için $1 = f + e$ yazılabilir. Burada $1 - f = e \in l_R(B)$ olduğundan her $a \in A$ için $ea = a$ olup $eA = A$ elde edilir. Benzer şekilde $fB = B$ olduğu görülebilir. $ef = e(1 - e) = e - e^2$ ve $fe = (1 - e)e = e - e^2$ olduğundan $ef = fe$ bulunur. Diğer yandan $eB = 0$ ve $fA = 0$ olur. Buradan $B \subseteq r_R(e) \subseteq r_R(e^2)$ elde edilir. $a \in r_R(e^2) \cap A$ seçilsin. Şu halde $e^2a = 0 = eea = a$ olup $r_R(e^2) \cap A = 0$ bulur. Ancak $A \cap B = 0$ ve B bu özelliğe göre maksimal olduğundan $B = r_R(e) = r_R(e^2)$ olmalıdır. Benzer adımlarda görülür ki $A = r_R(f) = r_R(f^2)$'dir. Önerme 1.3.4'ten $A \oplus B \leq_e R$ olur. Burada $efr \in efR \cap (A \oplus B)$ seçilirse $a + b \in A \oplus B$ için $efr = a + b$ yazılır. $e^2f^2r = eeffr = efefr = ef(a + b) = efa + efb = 0 + feb = 0$ olacağından $f^2r \in r_R(e^2) = r_R(e)$'dır ve $ef^2r = 0$ olur. $ef^2r = effr = fefr = f^2er = 0$ ise $er \in r_R(f^2) = r_R(f)$'dır. Bu durumda $fer = 0 = efr$ ve $efR = 0$ olacağından $ef = 0$ sonucuna ulaşılır. Böylece

$f^2 = (1-e)f = f - ef = f \in R$'dir. Benzer şekilde $e^2 = e \in R$ olduğu da görülebilir. $R = l_R(A) + l_R(B)$ olduğundan $a \in A$ ve $b \in B$ için $e = a + b$ olur. $ee = ea + eb = a + 0 = a$ yani $e = a$ elde edilir. Bu durumda $eR = A$ ve $B = (1-e)R$ bulunur. ■

Sonuç 3.1.9 *(Camillo vd., 2000) R bir sağ IN-halka, P ve Q, R'nin $P \cap Q = 0$ özelliğinde iki sağ ideali olsun. Bu durumda $P_R \leq_e (eR)_R$ ve $Q \subseteq (1-e)R$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in R$ vardır.*

İspat. $Q \supseteq B$, P'nin tümleyeni ve $A \supseteq P$, B'nin tümleyeni olsun. Bu durumda $P \leq_e A$ olduğu açıktır. Önerme 1.3.6'dan $P = A$'dır. Yani B, A'nın tümleyeni olur. Böylece Önerme 3.1.8 yardımıyla ispat tamamlanır. ■

Tanım 3.1.10 *R, bir halka olsun. Eğer R'nin her öz idealinin sol sıfırlayıcısı sıfırdan farklı ise R'ye sağ Kasch halka denir.*

Önerme 3.1.11 *(Camillo vd., 2000) Her dual halka aynı zamanda bir sağ Kasch halkadır.*

İspat. A, R'nin bir öz ideali ve $l_R(A) = 0$ olsun. R, dual halka olduğundan $A = r_R(l_R(A))$ yazılabilir. Bu durumda $A = r_R(l_R(A)) = r_R(0) = R$ olur, bu bir çelişkidir. O halde $l_R(A) \neq 0$ olmalıdır. Böylece R bir sağ Kasch halkadır. ■

Önerme 3.1.12 *(Camillo vd., 2000) R bir sağ Kasch halka, her $x \in R$ ve her $A_R \leq R_R$ için $Rx \leq_e l_R(r_R(x))$ ve $l_R(A \cap xR) = l_R(A) + l_R(x)$ olsun. Bu durumda $r_R(l_R(A)) = A$ olur.*

İspat. $A \subseteq r_R(l_R(A))$ olduğu açıktır. $y \in r_R(l_R(A))$, $y \notin A$ olsun. Burada $l_R(A) \subseteq l_R(y)$'dir. $K = \{k \in R \,|\, yk \in A\}$ sağ ideali seçilsin. $yK \subseteq A$ olduğundan $A \cap yR = yK$ olup, hipotez gereği $l_R(yK) = l_R(A \cap yR) = l_R(A) + l_R(y) = l_R(y)$ bulunur. Şu halde $r_R(y) \subseteq K$ olduğundan $l_R(K) \subseteq l_R(r_R(y))$'dir. $r \in R$ için $ry \in Ry \cap l_R(K)$ olsun. $ryK = 0$ olup $r \in l_R(yK) = l_R(y)$'dir. Burada, $ry = 0$ olduğundan $Ry \cap l_R(K) = 0$ olur. Hipotezden $Ry \leq_e l_R(r_R(y))$ olduğundan $l_R(K) = 0$'dır. Bu ise R'nin sağ Kasch halka olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $y \in A$'dır. ■

3.2 π-Dual Halkalar

R'nin projeksiyon değişmez idealleri üzerinde dual halka koşulu araştırılabilir. Bu kısımda, bu yeni halka sınıfına ait bazı sonuçlar ve diğer halka sınıfları ile olan ilişkilerini gösteren önermeler yer almaktadır. Bu kısımdaki tüm sonuçlar, (Bitkin ve Kara, 2022) kaynağında bulunmaktadır.

Tanım 3.2.1 *(Bitkin ve Kara, 2022) R bir halka ve $A_R \trianglelefteq_p R_R$ olsun. Eğer $r_R(l_R(A)) = A$ oluyorsa R'ye projeksiyon değişmez sağ dual halka ya da kısaca sağ π-dual halka denir.*

Projeksiyon değişmez sol dual halka da benzer şekilde tanımlanır. Eğer bir R halkası hem sağ hem de sol π-dual halka ise bu halkaya π-dual halka denir. Diğer yandan, π-dual halkaların, dual halka sınıfının bir genelleştirmesi olduğu açıkça görülür.

Önerme 3.2.2 *(Bitkin ve Kara, 2022) R, π-dual halka ve $\{X_i\}_{i\in I}$, R'nin projeksiyon değişmez sağ (ya da sol) ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $l_R(\bigcap\limits_{i\in I} X_i) = \sum\limits_{i\in I} l_R(X_i)$ (ya da, $r_R(\bigcap\limits_{i\in I} X_i) = \sum\limits_{i\in I} r_R(X_i)$) olur.*

İspat. R, π-dual halka ve $\{X_i\}_{i\in I}$, R'nin projeksiyon değişmez sağ ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $X_i = r_R(l_R(X_i))$ olur. O halde $l_R(\bigcap\limits_{i\in I} X_i)$ $= l_R(\bigcap r_R(l_R(X_i))) = l_R(r_R \sum\limits_{i\in I} l_R(X_i))$ elde edilir. Önerme 1.5.8 gereği, $l_R(X_i)$ ve $\sum l_R(X_i)$, R'nin projeksiyon değişmez sol idealleridir. R, π-dual olduğundan, $\sum l_R(X_i) =$ $l_R(r_R(\sum l_R(X_i)))$ yazılabilir. Böylece $l_R(\bigcap\limits_{i\in I} X_i) = \sum\limits_{i\in I} l_R(X_i)$'dir. Sol idealller için de eşitlik benzer adımlarla görülebilir. ■

Önerme 3.2.3 *R, $Z(R_R) = 0$ özelliğinde bir halka olsun.*

(i) R, π-dualdir.

(ii) Her $A_R \trianglelefteq_p R_R$ için $A \leq_e r_R(l_R(A))$'dır.

(iii) R'nin kapalı projeksiyon değişmez her ideali bir sağ sıfırlayıcıdır.

Bu durumda $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ sağlanır, fakat $(ii) \nRightarrow (i)$'dir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ Açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ A, R'nin projeksiyon değişmez ve kapalı bir sağ ideali olsun. (ii)'den $A \leq_e$

$r_R(l_R(A))$'dır. A kapalı olduğundan $A = r_R(l_R(A))$ elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ $B_R \trianglelefteq_p R_R$ olsun. Bu durumda $B_R \leq_e C_R \leq_c R_R$ olacak biçimde bir $C_R \leq R_R$ vardır. $Z(R_R) = 0$ olduğundan, (Birkenmeier vd., 2013)'ten, $C_R \trianglelefteq_p R_R$'dir. Buradan, (iii) gereği $C = r_R(l_R(C))$ bulunur. Diğer yandan $Z(R_R) = 0$ ve $B \leq_e C$ olduğundan $l_R(B) = l_R(C)$'dir. Böylece $r_R(l_R(B)) = r_R(l_R(C)) = C$ olup $B \leq_e r_R(l_R(B))$'dir.

$(ii) \not\Rightarrow (i)$ $R = \mathbb{Z}$ halkası (ii) koşulunu sağlar fakat R, π-dual değildir. ■

Tanım 3.2.4 *Tek yönlü her ideali iki yönlü ideal olan halkaya duo halka denir.*

Önerme 3.2.5 *(Bitkin ve Kara, 2022) Aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması durumunda, R, dual halkadır. $\Leftrightarrow$ R, π-dual halkadır.*

(i) *R, ayrışmaz bir halkadır.*

(ii) *R, Abel halkadır.*

(iii) *R, duo halkadır.*

İspat. Verilen koşullardaki halkaların her birinin her sağ ideali aynı zamanda bir projeksiyon değişmez ideal olacağı için dual halka ile π-dual halka tanımları da çakışır. ■

Aşağıdaki önerme π-Baer, π-genişleyen ve π-dual halkalar arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Önerme 3.2.6 *(Bitkin ve Kara, 2022)* (i) *R, π-Baer bir halka olsun. Bu durumda R, sağ π-dual halkadır $\Leftrightarrow$ Her $A_R \trianglelefteq_p R_R$ için $A = eR$ olacak şekilde bir $e \in S_l(R)$ vardır.*

(ii) *R, π-Baer ve sağ π-dual halka ise R, sağ π-genişleyendir.*

İspat. (i) R, π-Baer ve sağ π-dual bir halka olsun. A, R'nin projeksiyon değişmez bir sağ ideali olarak seçilsin. Önerme 1.5.1 gereği $l_R(A)$, R'de projeksiyon değişmez sol ideal olur. R halkası π-Baer olduğundan, $l_R(A) = Rf$ olacak şekilde $f^2 = f \in R$ bulunabilir. Buradan $r_R(l_R(A)) = (1-f)R$'dir. R, sağ π-dual bir halka olduğundan, $A = r_R(l_R(A)) = (1-f)R$ olup $e = 1-f$ için $A = eR$'dir. Buradan Önerme 1.1.15 gereği $e \in S_l(R)$'dir. Teoremin tersi açıktır.

(ii) İspat (i)'nin bir sonucudur. ■

Örnek 3.2.7 *(Bitkin ve Kara, 2022) F bir cisim olmak üzere $R = \mathbf{T}_2(F)$ olsun. Bu durumda R halkası π-Baer'dir, aynı zamanda sağ π-genişleyendir. Ancak R, π-dual bir halka değildir. Gerçekten; $I = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ projeksiyon değişmez sağ ideali için $I = eR$ olacak şekilde bir e eş kare elemanı olmadığından Önerme 3.2.6 (i) gereği, R, π-dual halka değildir. Çünkü $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R$'dir ve burada $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elemanı üstel sıfır bir elemandır.*

Önerme 2.3.16 gereği, tekil olmayan her π-Baer halka sağ π-genişleyen halkadır. Bu durumda π-dual halkaların tekil halka olup olmadığı sorusu akıllara gelebilir. Aşağıda verilen örnek, bu ihtimalin olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.2.8 *(Bitkin ve Kara, 2022) (i) $R = \mathbb{Z}$ tekil olmayan bir halkadır, fakat R, π-dual halka değildir.*

(ii) F bir cisim, V, F cismi üzerine kurulu bir vektör uzayı ve $boy(V_F) = 1$ olsun. Burada $R = \begin{bmatrix} F & & V \\ & \diagdown & \\ 0 & & F \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} f & v \\ 0 & f \end{bmatrix} : f \in F, v \in V \right\}$ halkası seçilsin. R, değişmeli ve ayrışmaz bir halkadır. Şu halde $Z(R_R) = \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ olup R, tekil olmayan bir halka değildir. Fakat R, π-dual halkadır.

(iii) $R = T_2(\mathbb{Z})$ halkası sağ π-genişleyendir, fakat Önerme 3.2.6 (i) gereği R, π-dual değildir.

Örnek 3.2.8 (ii), π-genişleyen ve π-dual bir halkanın π-Baer halka olmak zorunda olmadığını da göstermektedir.

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, literatürde önemli bir rolü olan Baer halka sınıfı ve bu sınıfın bir takım genelleştirmeleri incelenmiş ve bu sınıfların sahip olduğu özellikler derlenmiştir. Bunun yanı sıra, sıfırlayıcı koşullarıyla tanımlanan, dual halkalar ile Ikeda Nakayama halkalarının bazı özelliklere de yer verilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde, dual halkalardan esinlenerek, projeksiyon değişmez idealler üzerinde dual halka koşulu araştırılmış ve bu yeni sınıfa π-dual halka adı verilmiştir. π-dual halkaların bir takım özellikleri incelenmiştir. Bu yeni halka sınıfının hangi koşullarda dual halka sınıfıyla aynı olduğu irdelenmiştir. Ayrıca π-dual halkaların, π-Baer ve π-genişleyen halkalarla olan ilişkileri de araştırılmıştır. Diğer yandan, π-dual halkaların tekil olmak (ya da tekil olmamak) zorunda olmadığına ilişkin çeşitli örnekler sunulmuştur.

Gelecek çalışmalarda, π-dual halka koşulunun modül teorideki karşılığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Anderson, F. W., Fuller, K. R. (1992). Rings and Categories of Modules *(Vol. 13). Springer Science & Business Media*.

Armendariz, E. P. (1974). A Note on Extensions of Baer and P.P-Rings. *J. Aust. Math. Soc. 18, 470–473.*

Berberian, S. K. (1972). Baer $*$-Rings, *Springer, Berlin.*

Birkenmeier, G. F., Park, J. K., Rizvi, S.T. (2013). Extensions of Rings and Modules *New York: Birkhäuser.*

Birkenmeier, G. F. Kara, Y. Tercan, A. (2018). π-Baer Rings. *J. Algebra Appl. 17(2), 1850029 19 pages.*

Bitkin, E., Kara, Y. (2022). Topological Rings and Annihilator Conditions. *In Mathematical Methods for Engineering Applications: ICMASE 2021,Salamanca, Spain, July 1–2 (pp. 167-172). Cham: Springer International Publishing.*

Camillo, V., Nicholson, W. K., Yousif, M. F., (2000). Ikeda-Nakayama Rings *Journal of Algebra 226, 1001-1010.*

Clark, W.E. (1967). Twisted Matrix Units Semigroup Algebras, *Duke Math. J. 34, 417-424.*

Chatters A. W., Khuri, S. M. (1980). Endomorphism Rings of Modules Over Non-Singular CS Rings, *J. Lond. Math. Soc. 21, 434–444.*

Çallıalp, F., Tekir, Ü. (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller. *Birsen Yayınevi*

Fuchs, L. (1970). *Infinite Abelian Groups I, Academic Press, New York.*

Hajarnavis, C. R., Norton, N. C. (1985). On dual rings and their modules. *Journal of Algebra, 93(2), 253-266.*

Kaplansky, I. (1948). Dual rings. *Annals of mathematics, 689-701.*

Kaplansky, I. (1965). Rings of Operators. *Benjamin, New York.*

Tercan, A., Kara, Y. (2015). Modül ve Halka Teori Latis Teorik Yaklaşımlar. *Efil Yayınevi*.

Warner, S. (1993). Topological rings. *Elsevier*.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Ebru BİTKİN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	HATAY 1996
Yabancı Dil	:	İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	:	
Lise	:	PAŞA KARACA ANADOLU ÖĞRETMEN LİSESİ, 2010-2014
Lisans	:	HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ, 2014-2018
Yüksek Lisans	:	BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ, 2020-2023
İletişim(e-posta)	:	502011003@ogr.uludag.edu.tr
Akademik çalışmalar	:	Bitkin, E., Kara, Y. (2022). Topological Rings and Annihilator Conditions. *In Mathematical Methods for Engineering Applications: ICMASE 2021, Salamanca, Spain, July 1–2 (pp. 167-172). Cham: Springer International Publishing.*