OLUŞUM TİPİ DENKLEMLERİN HİROTA BİLİNEER FORMLARI VE ETKİLEŞİM ÇÖZÜMLERİ

Melih ZEYNEL

T.C.
ULUDAĞÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLUŞUM TİPİ DENKLEMLERİN HİROTA BİLİNEER FORMLARI VE ETKİLEŞİM ÇÖZÜMLERİ

Melih ZEYNEL
0000-0001-5472-4934

Prof. Dr. Emrullah YAŞAR
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2023

TEZ ONAYI

Melih Zeynel tarafından hazırlanan "OLUŞUM TİPİ DENKLEMLERİN HİROTA BİLİNEER FORMLARI VE ETKİLEŞİM ÇÖZÜMLERİ" adlı tez çalışması jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Emrullah Yaşar

Başkan : Prof. Dr. Emrullah Yaşar İmza

0000-0003-4732-5753
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Arzu Akbulut İmza

0000-0003-2448-2481
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi İlker Burak Giresunlu İmza

0000-0002-2190-0003
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi
Fen Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali KARA
Enstitü Müdürü
...../....../.......

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25/05/2023

Melih ZEYNEL

TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. Emrullah YAŞAR
Tarih

Melih ZEYNEL
Tarih

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

OLUŞUM TİPİ DENKLEMLERİN HİROTA BİLİNEER FORMLARI VE ETKİLEŞİM ÇÖZÜMLERİ

Melih ZEYNEL

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danşıman: Prof. Dr. Emrullah Yaşar

Bu tez çalışmasında bazı oluşum tipi denklemlerin Hirota metodu ile tam çözümlerinin elde edilmesi araştırılmıştır. Bu anlamda Hirota bilineer formuna sahip olan yeni bir (3 +1)-boyutlu oluşum tipi modelin çeşitli fiziksel özellikleri haiz olan tam çözümleri elde edilmiştir. Bu noktada, nöral ağ metodu tekniği ile birçok çözüm formu önerilmiş (tek tabaka, 4-3-1, 4-2-3 ve 4-2-2 nöronlu çoklu tabaka halleri için) ve çözüm formlarındaki parametrelerin değişik halleri için sayısal simülasyon sunulmuştur. Elde edilen çözüm formları olarak genelleştirilmiş ve klasik lump, periyodik tip I ve tip II, haydut dalga ve nöral ağ tipi çözümleri teşkil edilmiştir. Bunun yanında Hirota bilineer formuna sahip bazı modeller için lineer terkip prensibi ele alınmıştır. Son olarak ise bir analitik şema yardımıyla (basitleştirilmiş Hirota) bazı oluşum tipi denklemlerin 1-soliton, 2-soliton ve 3-soliton çözüm formları üretilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hirota Bilineer Denklemi, Sembolik Hesaplama, Bilineer Nöral Ağ Metodu.

2023, vii+76 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

HİROTA BILINEAR FORMS OF EVOLUTION TYPE EQUATIONS AND THEIR INTERACTION SOLUTIONS

Melih ZEYNEL

Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emrullah Yaşar

In this thesis, the Hirota method was investigated to obtain the exact solutions of some evolution-type equations. In this sense, exact solutions with various physical characteristics of a new (3+1)-dimensional evolution type model with the Hirota bilinear form have been obtained. The neural network method technique proposes many solution forms (for single-layer, multi-layer with 4-3-1, 4-2-3, and 4-2-2 cases). Numerical simulations are presented for different cases of the parameters in the solution forms. The obtained solution forms are generalized and classical lump, periodic type I and type II, rogue wave, and neural network type solutions. In addition, the linear composition principle is discussed for some models with Hirota bilinear form. Finally, 1-soliton, 2-soliton and 3-soliton solution forms of an evolution type equation were obtained with the help of simplified Hirota analytical scheme.

Key Words: Hirota Bilinear Equation, Symbolic Computation, Bilinear Neural Network Method.

2023, vii+76 pages.

TEŞEKKÜR

Başta yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam sürecinde benden desteklerini esirgemeyen, bana her koşulda anlayış gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Emrullah YAŞAR'a teşekkürlerimi sunarım.
Hem lisans hem de yüksek lisans eğitimimin ders aşamasında kendilerinden çok şey öğrendiğim ve desteklerini her zaman hissettiğim Sayın Doç. Dr. Elif YAŞAR'a ve Sayın Dr. Öğr Üyesi Nisa ÇELİK'e teşekkürlerimi sunarım.
Son olarak her zaman yanımda olduğunu hissettiren annem Filiz ZEYNEL'e ve hayatımın her döneminde büyük destekçim olan rahmetli babam Yılmaz ZEYNEL'e teşekkürlerimi sunarım.
Bu çalışma sürecinde Tübitak 2210-Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programına destekleri için teşekkürlerimi sunarım.

Melih ZEYNEL
25/05/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$D_t^{n_1} D_x^{n_2} \ldots$	Hirota türev operatörleri
$P(D)$	Hirota türev operatör polinomu
θ_i	Faz kayması
p_i	Dispersiyon bağıntısı
$u=T\,[\,f\,(x,t,\ldots,y)]$	Hirota bilineer dönüşümü
$\varpi_{k_n,f}$	Ağırlık katsayısı
$L(f)$	Lineer diferensiyel operatör
$N(f,f)$	Lineer olmayan diferensiyel operatör

Kısaltmalar	**Açıklama**
BKP	B tipi Kadomtsev-Petviashvili
BNAM	Bilineer Nöral Ağ Metodu
KDD	Kısmi Diferensiyel Denklem
KdV	Korteweg-de Vries
KP	Kadomtsev-Petviashvili
YHBD	Yeni Hirota Bilineer Denklemi
SK	Sadawa-Kotera

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklem, bir veya daha fazla bilinmeyen fonksiyon (bağımlı değişken) ve bunların türevlerini ilişkilendiren bir denklemdir. Uygulamalı bilimlerde, fonksiyonlar (bağımlı değişkenler) genellikle fiziksel nicelikleri, türevler ise değişim oranlarını temsil eder ve diferensiyel denklem bu ikisi arasındaki ilişkiyi tanımlar. Bu tür ilişkilerin yaygın olması nedeniyle diferensiyel denklemler mühendislik, fizik, biyoloji, kimya ve ekonomi dahil olmak üzere birçok disiplinde önemli bir görev üstlenmektedir. Temel olarak diferensiyel denklemlerin incelenmesi, çözümlerinin (her denklemi sağlayan fonksiyonlar kümesi) ve çözümlerinin özelliklerinin incelenmesinden oluşur. Sadece bazı basit tipte diferensiyel denklemler açık formüllerle çözülebilir; ancak, belirli bir diferensiyel denklemin çözümlerinin birçok özelliği, tam olarak hesaplanmadan belirlenebilir. Diferensiyel denklemler ilk olarak Newton ve Leibniz tarafından kalkülüs denilen "sonsuz küçüklerin hesabı" icadıyla ortaya çıktı. 1671 tarihli "Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum" adlı çalışmasının 2. Bölümünde, I. Newton üç tür diferensiyel denklem sundu:

$$\begin{aligned} y' &= F(x), \\ y' &= F(x,y), \\ x_1 y_{x_1} + x_2 y_{x_2} &= y. \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemlerde, y, x'in (veya x_1 ve x_2'nin) bilinmeyen bir fonksiyonudur ve F, verilen bir fonksiyondur. Sunulan örnekleri ve diğerlerini sonsuz seriler kullanarak çözer ve çözümlerin tek olmadığını tartışır. Diferensiyel denklemler birkaç sınıfa ayrılabilir. Bu diferensiyel denklem sınıfları, denklemin özelliklerini açıklamanın yanı sıra, bir çözüme ulaşma konusunda bilgi vermeye yardımcı olabilir. Yaygın olarak kullanılan sınıflar, denklemin adi veya kısmi, lineer veya lineer olmayan ve homojen veya homojen olmayan olup olmadığını içerir.

Kısmi diferensiyel denklem (KDD), bilinmeyen çok değişkenli fonksiyonları ve bunların kısmi türevlerini içeren bir diferensiyel denklemdir. KDD'ler, birkaç değişkenli fonksiyonları içeren problemleri formüle etmek için kullanılır. KDD'ler, ses, ısı, elektrostatik, optik, elektrodinamik, sıvı akışı, elastisite veya kuantum mekaniği gibi doğadaki çok çeşitli olguları (fiziksel fenomenleri) tanımlamak için kullanılabilir. Lineer olmayan bir diferensiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve türevleri için lineer olmayan bir diferensiyel denklemdir (fonksiyonun bağımsız değişkenlerindeki lineerlik veya lineer olmama dikkate alınmaz). Lineer olmayan diferensiyel denklemleri tam olarak çözmenin çok az yöntemi mevcuttur (Mesela belirli simetrilere sahip denklem formları gibi). Lineer olmayan diferensiyel denklemler, uzun zaman aralıklarında kaos karakterli çok karmaşık davranışlar sergileyebilir. Lineer olmayan diferensiyel denklemler için çözümlerin varlığı, tekliği ve elde edilmesi gibi temel sorular ve lineer olmayan KDD'ler için başlangıç ve sınır değer problemlerinin iyi konulmuşluğu zor problemlerdir ve özel durumlarda bunların çözülmesi matematiksel olarak önemli bir ilerleme olarak kabul edilir. İçerisinde t zaman bileşenini ihtiva eden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için yukarıda da zikredildiği gibi simetri tekniklerinin yanında, Painlevé analizi, ters saçılım metodu ve Hirota bilineer metodu gibi yaklaşımlar mevcuttur. Matematiksel fizik, oşinografi, mühendislik bilimleri ve diğerleri gibi bir dizi alanda lineer olmayan KDD'lerin soliton (sabit bir hızla yayılırken şeklini koruyan, kendi kendini güçlendiren bir dalga paketi) çözümlerini bulmak için yaygın olarak kullanılan ve sağlam bir matematiksel araç olan Hirota yöntemi, lineer olmayan KDD'lerin uygun dönüşümler ile bilineerleştirilmesini gerektirir.

Hirota yöntemi, N-soliton çözümleri elde etmek için standart ve güçlü bir yaklaşım sunar. Yeni bilineer türevler, soliton çözümlerin yanı sıra lump çözümlerin üretilmesinde çok önemli bir rol oynar ve Hirota bilineer formları, bu teori için anahtar hükmündedir. İntegrallenebilir denklemlerin bağımlı değişken dönüşümleri altında Hirota bilineer formlarına dönüştürülebilmesi karakteristik bir özelliktir. Bu aynı zamanda, lineer olmayan bir denklemin ne zaman bir üstel fonksiyon ilişkisi yoluyla Hirota bilineer veya genelleştirilmiş bilineer olarak bilineer formda ifade edilebileceğini söyleyen Bell polinom teorisi tarafından da yansıtılır.

Ele alınan lineer olmayan KDD'lerin Hirota bilineer formu ve çeşitli metodları ile belirli fiziksel özellikleri haiz olan bir çok çözüm metodu geliştirildi. Çok yakın bir zamanda nöral ağ metodunu Hirota bilineer tekniği ile bağdaştıran bir yaklaşım literatürde yer edindi.

Bu yaklaşımda bilineer nöral sinir ağı adlı yeni bir yöntem tanıtılmış ve lineer olmayan KDD'lerin tam analitik çözümlerini elde etmek için karşılık gelen tensör formülü önerilmiştir. Bu yaklaşımın ilginçliği, sinir ağı modelinin tam analitik çözümü bulmak için ilk kez kullanılmasıdır. Bu yöntem ile, lineer olmayan KDD'leri çözmek için bilineerleştirmeden sonraki neredeyse tüm yöntemlerin kapsandığı örnekler ile sunulmuştur. Ayrıca, gösterilmiştir ki, söz konusu metot şayet ele alınan modelin Hirota bilineer formu mevcut ise lineer olmayan KDD'lerin tam analitik çözümlerini elde etmek için genel bir yaklaşımdır.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Tanım 2.1: Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferensiyel denklem adı verilir. Bir diferensiyel denklem

$$f(x,y,\frac{dy}{dx}) = 0, \tag{2.1}$$

ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim

$$f(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},...,\frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde yazılır. Burada x bağımsız değişken, y bağımlı değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri bulunduğunda denklem, adi diferensiyel denklem olarak adlandırılır (Çağlıyan ve ark. 2013, Sezer ve Daşcıoğlu 2016).

Tanım 2.2: Kısmi diferensiyel denklemin (KDD) anahtar tanımlayıcı özelliği, birden fazla bağımsız değişkeni $(x,y,...)$ olmasıdır. Bu değişkenlerin bilinmeyen bir fonksiyonu olan bağımlı bir $u(x,y,...)$ vardır. Türevleri genellikle alt simgelerle $\partial u/\partial x = u_x$ vb. şeklinde gösterilir. Bir KDD, bağımsız değişkenleri, bağımlı değişken u'yu ve u'nun kısmi türevlerini ilişkilendiren bir özdeşliktir.

$$F(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y)) = F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu, birinci dereceden iki bağımsız değişkenli en genel kısmi diferensiyel denklemdir. Bir denklemin mertebesi görünen en yüksek türevdir. İki bağımsız değişkenli en genel ikinci dereceden KDD,

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = 0$$

dır (Walter A. Strauss Partical Differential Equations,2008, s.1).

Tanım 2.3: $I \subset R$ aralığında tanımlı ve n 'inci mertebeden sürekli türevlere sahip bir

f fonksiyonu ele alınsın. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu ve türevleri;

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.3}$$

diferansiyel denkleminde yerlerine yazıldığında

$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))$$

ifadesi x bağımsız değişkenine göre bir özdeşlik oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna (2.3) denkleminin tam çözümü denir (Çağlıyan ve ark. 2013, Sezer ve Daşcıoğlu 2016).

Tanım 2.4: Kısmi diferensiyel denklemler lineer ve lineer olmayan olarak sınıflandırılır. Aşağıdaki durumlarda kısmi diferensiyel denklem lineer olarak adlandırılır:
i) Denklemde yer alan bağımlı değişkenin ve her kısmi türevinin kuvveti 1'dir.
ii) Bağımlı değişkenin katsayıları ve her kısmi türevin katsayıları sabit veya bağımsız değişkenlerdir. Ancak, bu koşullardan herhangi biri karşılanmazsa, denklem lineer olmayan olarak adlandırılır (Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory,2009, s.6).

Tanım 2.5: 19. yüzyılın sonlarında integre edilebilen denklemler teorisi ortaya atılmış ve sığ su dalga denklemleri için geliştirilen

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Korteweg- de Vries denklemi ilk defa Diederik Korteweg ve Gustav de Vries tarafından tanıtılmıştır (Korteweg ve de Vries 1895). Bu denklemde de görülebileceği gibi lineer ol-mayan yapının yanında bağımsız değişkenlerden birisi t zaman değişkeni olup diğeri ise x uzaysal değişkenidir. Dolayısıyla

$$F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}, \ldots) = 0$$

biçimindeki denklemlere oluşum tipi denklemler denilmiştir. Geçmişten beri üzerinde yoğun bir şekilde çalışılmaya başlanmış ve günümüzde de devam etmektedir. Mesela, KdV denklemi için 20. yüzyıldan itibaren çözümlerinin elde edilebilmesi adına ters saçılım yaklaşımı, Bäcklund dönüşümleri, Hirota bilineerleştirme metodu, homojen dengeleme yaklaşımı gibi metotlar geliştirilmiştir (Yıldırım, 2019, s.2).
İntegrallenebilir denklemleri ele almak için Hirota yöntemi oldukça etkilidir. Bu yöntem özellikle birçok oluşum tipi denklemlerin çoklu soliton çözümlerini ele almak için yaygın olarak kullanılmaktadır. Hirota yönteminin bilineer operatörlerinin en geleneksel tanımı şu şekildedir.

Tanım 2.6: Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem $x, y, z, ..., t$ bağımsız değişkenler olmak üzere

$$F(u) = F(u, u_x, u_t, u_y, u_z ... u_{xz}, ..., u_{xt}, ...) = 0 \tag{2.4}$$

şekilde tanımlansın. İlk olarak

$$u = T(f(x,t,...).g(x,t,...)) \tag{2.5}$$

dönüşümü kullanılarak (2.4) denklemi bağımlı değişkenlerle kuadratik bir forma dönüştürülür. Bu yarı lineer forma (2.4) denkleminin bilineer formu denir. Bazı denklemler için bu şekilde uygun dönüşüm bulunamayabilir.

$S : C^n \rightarrow C$ türevlenebilir fonksiyonların uzayı olsun. Hirota $D : S \, x \, S \rightarrow S$ operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$D_t^{n_1} D_x^{n_2} ... \{f.g\} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial_t} - \frac{\partial}{\partial_{t'}} \right)^{n_1} \left(\frac{\partial}{\partial_x} - \frac{\partial}{\partial_{x'}} \right)^{n_2} ... \right] f(x,t,...).g(x',t',...)|_{x=x',t=t'...} . \tag{2.6}$$

Burada $x, t, ...$ bağımsız değişkenler ve n_i $(i = 1, 2, ...)$ ise pozitif tamsayılardır (Pekcan

2005, s.6).

Hirota D operatörünün bir çeşit birleşimini kullanarak, (2.4) denkleminin bilineer formu D operatörünün bir polinomu olarak yazılır. Bu polinom ise $P(D)$ olarak isimlendirilir.

Tanım 2.7: (2.4) formundaki denklemler,

$$\sum_{\xi,\mu=1}^{n} P_{\xi,\mu}^{\eta}(D_{x_i}) f^{\xi} f^{\mu} = 0,\ \eta = 1,2,...r \tag{2.7}$$

biçiminde yazılabiliyorsa, (2.4) denklemi Hirota bilineer formundadır denir. Bazı n, r ve $P_{\xi,\mu}^{\eta}$ *(D)* lineer operatörleri için f^{i} yeni bağımlı değişkenlerdir (Pekcan. 2005, s.6).

P(D), exp(θ_1) ve exp(θ_2) fonksiyonları üzerinde etki eden bir lineer operatör olsun. Bu durumda

$$P(D)\{\exp(\theta_1).\exp(\theta_2)\} = P(c_1 - c_2, ..., h_1 - h_2, l_1 - l_2)\exp(\theta_1 + \theta_2) \tag{2.8}$$

dir. Burada $\theta_i = c_i x + ... + h_i y + l_i z + \alpha_i$ ve $c_i, h_i, l_i, \alpha_i, ...$ $(i = 1,2,..)$ keyfi sabitlerdir (Pekcan 2005, s.7).

İşlemlerde kolaylık sağlaması adına bilineer diferansiyel operatörlerden bazıları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$D_x^2\{f.g\} = f_{xx}g - 2f_x g_x + f g_{xx},$$

$$D_x D_t\{f.g\} = D_x(f_t g - f g_t) = f_{xt} g - f_t g_x - f_x g_t + f g_{xt},$$

$$D_x^4\{f.g\} = f_{4x} g - 4f_{3x} g_x + 6 f_{xx} g_{xx} - 4 f_x g_{3x} + f g_{4x}.$$

Tanım 2.8: Hirota Pertürbasyon Çözüm Formları

Bu tanımda Hirota bilineer formu $P(D)\{f\,.\,f\} = 0$ biçiminde olan (2.4) denkleminin tam çözümlerini bulmak için Hirota bilineer metodununun gerekli aşamaları verilmiştir. Tam çözümlerin bulunmasında pertürbasyon açılımları kullanılır. Bunun için $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + ...$ açılımı kullanılacaktır. Burada f_m, $(m = 1,2,...)$ $x,t,...$ bağımsız değişkenleri-nin bir fonksiyonu ve ε pertürbasyon parametresidir. Genelliği bozmadan $f_0 = 1$ alınabilir. Böylece $f\,.\,f$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f\,.\,f = 1.1 + \varepsilon(f_1.1 + 1.f_1) + \varepsilon^2(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2) + \varepsilon^3(f_3.1 + f_2.f_1 + f_1.f_2 + 1.f_3) + ...$$

Yukarıdaki ifade $P(D)\{f\,.\,f\} = 0$'da yerine yazılır ve $P(D)$ polinomunun lineerliği kullanılarak şu elde edilir:

$$P(D)\{f\,.\,f\} = P(D)\{1.1\} + \varepsilon P(D)\{f_1.1 + 1.f_1\} +$$
$$\varepsilon^2 P(D)\{f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2\} + \varepsilon^3 P(D)\{f_3.1 + f_2.f_1 + f_1.f_2 + 1.f_3\} + ... = 0.$$

Bu denklemin sağlanması için ε^m'nin $(m = 1,2,...)$ katsayıları sıfır olmalıdır. ε^0 katsayısı zaten sıfırdır. ε^1'in katsayısından

$$P(D)\{f_1.1 + 1.f_1\} = 2P(\partial)f_1 = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin çözümlerinden biri üstel fonksiyondur. Hirota bilineer yöntemi uygulanırken f_1 fonksiyonu üstel fonksiyon olarak alınır ve diğer f_i fonksiyonları da üstel fonksiyon olarak karşımıza çıkar. Hirota bilineer yönteminin etkinliği bu noktada ortaya çıkar. (2.4) denkleminin 1-soliton çözümünü araştırdığımızda f fonksiyonunu üstel fonksiyonların polinomu olarak yazacağımız için, tüm $j \geq s + 1$ için f_j fonksiyonları sıfır olacaktır. Bundan sonra bir denklemin soliton çözümü oluşturulurken tüm $j \geq s+1$ için $f_j = 0$ olduğu varsayılacaktır (Pekcan 2005, s.10).

Teorem 2.9: Hirota bilineer formu $P(D)\{f\,.\,f\} = 0$ olarak yazılabilen (2.4) denkleminin bilineer dönüşümü $u = T\,[\,f\,(x, t, ..., y)]$ olsun. O halde bu denklemin 1- soliton çözümü şu şekildedir:

$$u = T[f(x,t,y,...)] = T[1+\exp(\theta_1)].$$

Burada $c_1, r_1, ..., h_1$ sabitler olmak üzere, $\theta_1 = c_1x + r_1t + h_1y + ... + \alpha_1$ ve $P(c_1, r_1, h_1, ...)$ $= P(p_1) = 0$ dır. Burada p_1 dispersiyon bağıntısının kısaca gösterimidir.
Bu denklemin 2- soliton çözümü şu şekildedir:

$$u = T[f(x,t,y,...)] = T[1+\exp(\theta_1)+\exp(\theta_2)+B(1,2)\exp(\theta_1+\theta_2)].$$

Burada $c_i, r_i, ..., h_i$ $(i = 1,2)$ sabitler olmak üzere $\theta_i = c_ix + r_it + ... + h_iy + \alpha_i$, $P(c_i, r_i, ..., h_i) =$ $P(p_i) = 0$ ve $B(1,2) = -\frac{P(p_1-p_2)}{P(p_1+p_2)}$ dır.

(2.4) denklemi için, $P(p_i) = 0$ $(i = 1,2,3)$ iken

$$\sum_{\rho=\pm 1} P(\rho_1p_1+\rho_2p_2+\rho_3p_3)+P(\rho_1p_1-\rho_2p_2)P(\rho_2p_2-\rho_3p_3)P(\rho_3p_3-\rho_1p_1) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa, denklemin 3-soliton çözümü şu şekildedir:

$$\begin{aligned} u \;=\; & T[f(x,t,...,y)] = T[1+\exp(\theta_1)+\exp(\theta_2)+\exp(\theta_3)+ \\ & B(1,2)\exp(\theta_1+\theta_2)+B(1,3)\exp(\theta_1+\theta_3)+ \\ & B(2,3)\exp(\theta_2+\theta_3)+B(1,2)B(1,3)B(2,3)\exp(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]. \end{aligned}$$

Burada $k_i, r_i, ..., h_i$ $(i < j$ ve $i, j = 1,2,3)$ sabitler olmak üzere $\theta_i = c_ix + r_it + ... + h_iy + \alpha_i$, $P(c_i, r_i, ..., h_i) = P(p_i) = 0$ ve $B(i, j) = -\frac{P(p_i-p_j)}{P(p_i+p_j)}$ dır (Pekcan 2005, s.10.11.15).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. KdV Denklemi için Hirota Metodu

Bu bölümde, Kruskal ve arkadaşları (Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D. ve Miura R. M., 1095-1097) tarafından integrallenebilir olduğu gösterilen Korteweg de Vries (KdV) denklemine Hirota bilineer yöntemini tatbik edeceğiz (Pekcan, A.2005). Bu denklem aynı zamanda Hirota (Hirota R., 1971) tarafından da incelenmiştir. KdV'nin 1, 2, 3 ve N-soliton çözümleri oluşturulmuştur. Soliton çözümleri oluşturulacak KdV denklemi şu şekildedir:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.1}$$

1.Adım : KdV denkleminin bilineer formunu elde etmek için $u(x,t) = -2(\ln f)_{xx}$ dönüşümü kullanılır. Bu dönüşüm altında (3.1) denkleminin elde edilen bilineer formu şu şekildedir:

$$f f_{xt} - f_x f_t + f f_{xxxx} - 4 f_x f_{xxx} + 3 f_{xx}^2 = 0. \tag{3.2}$$

2.Adım : Hirota D operatörünü kullanarak (3.1) denkleminin bilineer formu Hirota bilineer formda yazılır. $f\,.\,f$ 'e uygulanan $D_t D_x$ operatörü incelenirse aşağıdaki form elde edilir.

$$\begin{aligned} D_t D_x \{f.f'\} &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial_t} - \frac{\partial}{\partial_{t'}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial_x} - \frac{\partial}{\partial_{x'}}\right)\right]\{f(x,t).f(x',t')\}|_{x=x',t=t'} \\ &= f_{xt} f + f f_{xt} - f_t f_x - f_x f_t \\ &= 2(f f_{xt} - f_x f_t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Bu terimlerin (3.2) denkleminin ilk iki teriminin iki katı olduğu açıktır. $f\,.\,f$ 'e uygulanan D_x^4 operatörü incelenirse aşağıdaki form elde edilir:

$$
\begin{aligned}
D_x^4\{f.f'\} &= \left(\frac{\partial}{\partial_x}-\frac{\partial}{\partial_{x'}}\right)^4\{f(x,t).f(x',t')\}|_{x=x',t=t'} \\
&= f_{xxxx}f-4f_{xxx}f_x+6f_{xx}f_{xx}-4f_xf_{xxx}+ff_{xxxx} \\
&= 2(ff_{xxxx}-4f_{xxx}f_x+3f_{xx}^2). \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Bu terimlerin (3.2) denkleminin son üç teriminin iki katı olduğu açıktır. Dolayısıyla (3.2) denkleminin Hirota bilineer formu

$$
P(D)\{f.f\}=(D_xD_t+D_x^4)\{f.f\}=0 \qquad (3.5)
$$

şeklinde elde edilir.

3.Adım: (3.5) denkleminde $f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + ...$ pertürbasyon açılımı yazılırsa

$$
P(D)\{f.f\}=P(D)\{1.1\}+\varepsilon P(D)\{f_1.1+1.f_1\}+ \qquad (3.6)
$$

$$
\varepsilon^2P(D)\{f_2.1+f_1.f_1+1.f_2\}+\varepsilon^3P(D)\{f_3.1+f_2.f_1+f_1.f_2+1.f_3\}+...=0
$$

elde edilir.

3.1.1. KdV denkleminin 1-soliton çözümü

Bölüm 2'de anlatıldığı gibi KdV denkleminin 1-soliton çözümünü oluşturmak için, $f = 1 + \varepsilon f_1$ pertürbasyon açılımı ele alınır (Pekcan, A. 2005). Burada $f_1 = \exp(\theta_1)$ ve $\theta_1 = c_1x + r_1t + \alpha_1$' dir. Dikkat edilmelidir ki $j \geq 2$ için $f_j = 0$ 'dır. f, (3.6) denkleminde yazılır ve $m = 1,2,3$ için ε^m'nin katsayıları sıfıra eşitlenir. ε^0'ın katsayısı $P(D)\{1.1\} = 0$'dır. ε^1'ın katsayısı sıfıra eşitlenir ve

$$
\begin{aligned}
P(D)\{f_1.1+1.f_1\} &= P(\partial)\exp(\theta_1)+P(-\partial)\exp(\theta_1) \qquad (3.7) \\
&= 2P(\partial)\exp(\theta_1)=0
\end{aligned}
$$

elde edilir. $r_1 = -c_1^3$ anlamına gelen $P(p_1) = 0$ pertürbasyon ilişkisi vardır. ε^2'nin katsayısından

$$
\begin{aligned}
P(D)\{f_1.f_1\} &= P(D)\{\exp(\theta_1).\exp(\theta_1)\} \\
&= P(p_1 - p_1)\exp(2\theta_1) = 0
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

elde edilir. Son olarak genelliği bozmadan $\varepsilon = 1$ seçilebilir ve dolayısıyla $f = 1+\exp(\theta_1)$ pertürbasyon açılımına göre KdV denkleminin 1-soliton çözümü şu şekildedir:

$$
u(x,t) = -\frac{c_1^2}{2\cosh^2(\frac{\theta_1}{2})}. \tag{3.9}
$$

Burada $\theta_1 = c_1x - c_1^3t + \alpha_1$'dir.

3.1.2. KdV denkleminin 2-soliton çözümü

KdV denkleminin 2-soliton çözümünü elde etmek için $f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2$ pertürbasyon açılımı alınır (Pekcan, A. 2005). Burada $f_1 = \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2)$ ve $i = 1,2$ için $\theta_i = c_ix + r_it + \alpha_i$ ' dir. f_2'yi daha sonra belirleyeceğiz. Dikkat edilmelidir ki $j \geq 3$ için $f_j = 0$ 'dır. Şimdi f, (3.6) denkleminde yazılır ve $m = 1,2,3,4$ için ε^m'nin katsayıları sıfıra eşitlenir. Bunun sonucunda ε^0'ın katsayısı:

$$
P(D)\{1.1\} = P(0,0)\{1\} = 0 \tag{3.10}
$$

ve ε^1'in katsayısı

$$
\begin{aligned}
P(D)\{1.f_1 + f_1.1\} &= 2P(\partial)\{\exp(\theta_1) + \exp(\theta_2)\} \\
&= 2[P(\partial)\exp(\theta_1) + P(\partial)\exp(\theta_2)] = 0
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

olur. Burada $r_i = -c_i^3$ ve $i = 1,2$ için $P(p_i) = c_i^4 + c_iw_i = 0$ dır. ε^2'in katsayısı ise:

$$
\begin{aligned}
P(D)\{1.f_2+f_2.1\}+P(D)\{f_1.f_1\} &= 2P(\partial)f_2+ \qquad (3.12)\\
P(D)\{(\exp(\theta_1)&+\exp(\theta_2)).(\exp(\theta_1)+\exp(\theta_2))\}\\
&= 2[P(\partial)f_2+P(D)\{\exp(\theta_1).\exp(\theta_2)\}]\\
&= 2[P(\partial)f_2+P(p_1-p_2)\exp(\theta_1+\theta_2)]=0
\end{aligned}
$$

dır. Bu f_2'nin $f_2=B(1,2)\exp(\theta_1+\theta_2)$ biçiminde olmasını sağlar. Yukarıdaki denklemde f_2'yi yerine yazarsak $B(1,2)$ ifadesini

$$
B(1,2)=-\frac{P(p_1-p_2)}{P(p_1+p_2)}=\frac{(c_1-c_2)^2}{(c_1+c_2)^2} \qquad (3.13)
$$

elde ederiz. $f_3=0$ olduğundan ε^3'ün katsayısı

$$
\begin{aligned}
P(D)\{f_1.f_2+f_2.f_1\} = 2B(1,2)[P(D)\{(\exp(\theta_1)).(\exp(\theta_1)+\exp(\theta_2))\}+ \qquad (3.14)\\
P(D)\{(\exp(\theta_2)).(\exp(\theta_1)+\exp(\theta_2))\}\\
= \quad 2B(1,2)[P(p_2)\exp(2\theta_1+\theta_2)+P(p_1)\exp(\theta_1+2\theta_2)]
\end{aligned}
$$

ve $i=1,2$ için $P(p_i)=0$, olduğundan bu zaten sıfırdır. ε^4'ün katsayısı da önemsiz bir şekilde yok olur. Böylece $\varepsilon=1$ alabiliriz. Böylece $f=1+\exp(\theta_1)+\exp(\theta_2)+A(1,2)\exp(\theta_1+\theta_2)$ ve KdV denkleminin 2-soliton çözümü

$$
u(x,t)=-2\frac{\begin{array}{c}\{c_1^2\exp(\theta_1)+c_2^2\exp(\theta_2)+A(1,2)(c_2^2\exp(\theta_1)\\ +c_1^2\exp(\theta_2))\exp(\theta_1+\theta_2)+2(c_1-c_2)^2\exp(\theta_1+\theta_2)\}\end{array}}{(1+\exp(\theta_1)+\exp(\theta_2)+B(1,2)\exp(\theta_1+\theta_2))^2} \qquad (3.15)
$$

dir. Burada $i=1,2$ için $\theta_i=c_ix-c_i^3+\alpha_1$ ve $B(1,2)=\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$ dir.

3.1.3. KdV denkleminin 3-soliton çözümü

KdV denkleminin 3-soliton çözümünü elde etmek için $f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3$ pertürbasyon açılımı alınır (Pekcan,A. 2005). Burada $f_1 = \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3)$ ve $i = 1,2,3$ için $\theta_i = c_i x + r_i t + \alpha_i$ ' dir. Dikkat edilmelidir ki $j \geq 4$ için $f_j = 0$ 'dır. Şimdi f, (3.14) denkleminde yazılır ve $m = 1,2,...,6$ için ε^m katsayıları sıfıra eşitlenir. Bunun sonucunda ε^0'ın katsayısı yine sıfırdır. ε^1'in katsayısı ise

$$P(D)\{1.f_1 + f_1.1\} = 2P(\partial)\{\exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3)\} = 0 \tag{3.16}$$

dır ve bu $i = 1,2,3$ için $r_i = -c_i^3$ olmakla birlikte $P(p_i) = 0$ anlamına gelir. ε^2'nin katsayısından ise aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\begin{aligned} -P(\partial)f_2 &= [(c_1-c_2)(r_1-r_2)+(c_1-c_2)^4]\exp(\theta_1+\theta_2)+ \\ &\quad [(c_1-c_3)(r_1-r_3)+(c_1-c_3)^4]\exp(\theta_1+\theta_3)+ \\ &\quad [(c_2-c_3)(r_2-r_3)+(c_2-c_3)^4]\exp(\theta_2+\theta_3). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Bu f_2'nin $f_2 = B(1,2)\exp(\theta_1 + \theta_2) + B(1,3)\exp(\theta_1 + \theta_3) + B(2,3)\exp(\theta_2 + \theta_3)$ biçiminde olması gerektiğini gösterir. Bu formu (3.17) denklemine ekleyerek $i, j = 1,2,3$ ve $i < j$ için $A(i, j)$'yi şu şekilde elde ederiz:

$$B(i,j) = -\frac{P(p_i - p_j)}{P(p_i + p_j)} = \frac{(c_i - c_j)^2}{(c_i + c_j)^2}. \tag{3.18}$$

ε^3'ün katsayısı

$$\begin{aligned} -P(\partial)\{f_3\} &= \exp(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\{B(1,2)P(p_3-p_2-p_1) \\ &\quad +B(1,3)P(p_2-p_1-p_3)+B(2,3)P(p_1-p_2-p_3)\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

biçimindedir. Dolayısıyla $f_3 = C\exp(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ olmalıdır. Yani (3.19) denkleminden çıkarılacak sonuç şu şekildedir:

$$C = -\frac{B(1,2)P(p_3 - p_1 - p_2) + B(1,3)P(p_2 - p_1 - p_3) + B(2,3)P(p_1 - p_2 - p_3)}{P(p_1 + p_2 + p_3)} \tag{3.20}$$

$i = 1,2,3$ için $r_i = -c_i^3$ olduğunu kullanarak tüm sadeleştirmeler yapılırsa $C = B(1,2)B(1,3)B(2,3)$ sonucuna ulaşılır. $f_4 = 0$ olduğundan ε^4'ün katsayısı

$$P(D)\{f_1f_3 + f_3f_1 + f_2f_2\} = 0 \tag{3.21}$$

olur. Bazı hesaplamalardan sonra (3.21) denklemi

$$\begin{gathered}\exp(2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)[BP(p_2 + p_3) + B(1,2)B(1,3)P(p_2 - p_3)] + \\ \exp(\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3)[BP(p_1 + p_3) + B(1,2)B(2,3)P(p_1 - p_3)] + \\ \exp(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3)[BP(p_1 + p_2) + B(1,3)B(2,3)P(p_1 - p_2)] = 0\end{gathered} \tag{3.22}$$

biçimindedir. Bu $C = B(1,2)A(1,3)A(2,3)$ tarafından sağlanır. Son olarak ε^5 ve ε^6 katsayıları da otomatik olarak yok olur. Burada $\varepsilon = 1$ alabiliriz. Böylece $f = 1 + \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3) + B(1,2)\exp(\theta_1 + \theta_2) + B(1,3)\exp(\theta_1 + \theta_3) + B(2,3)\exp(\theta_2 + \theta_3) + C \exp(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ ve KdV denkleminin 3-soliton çözümü

$$u(x,t) = -2\frac{M(x,t)}{N(x,t)} \tag{3.23}$$

biçiminde temsil edilir. Burada $i = 1,2,3$, $i < j$ için $\theta_i = c_ix + r_it + \alpha_i$, $B(i,j) = \frac{(c_i - c_j)^2}{(c_i + c_j)^2}$ ve $C = B(1,2)A(1,3)A(2,3)$ olmak üzere,

$M(x,t) = \exp(\theta_1 + \theta_2)[2(c_1 - c_2)^2 + 2(c_1 - c_2)^2 B(1,3)B(2,3)\exp(2\theta_3)$

$+B(1,2)c_1^2\exp(\theta_2) + B(1,2)c_2^2\exp(\theta_1)] + \exp(\theta_1 + \theta_3)[2(c_1 - c_3)^2$

$$+2(c_1-c_3)^2B(1,2)B(2,3)\exp(2\theta_2)+B(1,3)c_1^2\exp(\theta_3)+B(1,3)c_3^2\exp(\theta_1)]$$

$$+\exp(\theta_2+\theta_3)[2(c_2-k_3)^2+2(c_2-c_3)^2B(1,2)B(1,3)\exp(2\theta_1)$$

$$+B(2,3)c_2^2\exp(\theta_3)+B(2,3)c_3^2\exp(\theta_2)]+c_1^2\exp(\theta_1)+c_2^2\exp(\theta_2)+c_3^2\exp(\theta_3)$$

$$+C\exp(\theta_1+\theta_2+\theta_3)[B(1,2)c_3^2\exp(\theta_1+\theta_2)+B(1,3)c_2^2\exp(\theta_1+\theta_3)$$

$$+B(2,3)c_1^2\exp(\theta_2+\theta_3)+\exp(\theta_1+\theta_2+\theta_3)[B(1,2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2+2c_1c_2-2c_1c_3-2c_2c_3)$$

$$+B(1,3)(c_1^2+c_2^2+c_3^2+2c_1c_3-2c_1c_2-)2c_2c_3)$$

$$+B(2,3)(c_1^2+c_2^2+c_3^2+2c_2c_3-2c_1c_2-2c_1c_3)$$

$$+C(c_1^2+c_2^2+c_3^2+2c_1c_2+2c_1c_3+2c_2c_3))] \tag{3.24}$$

ve

$$\begin{aligned} N(x,t) &= [1+\exp(\theta_1)+\exp(\theta_2)+\exp(\theta_3) \\ &\quad +B(1,2)\exp(\theta_1+\theta_2)+B(1,3)\exp(\theta_1+\theta_3) \\ &\quad +B(2,3)\exp(\theta_2+\theta_3)+C\exp(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]^2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

dır.

3.2. Lineer Terkip Prensibi

(2.7) numaralı Hirota bilineer denklemini ele alalım. Burada P belirtilen değişkenlere karşılık gelen

$$P(0,0,...,0)=0 \tag{3.26}$$

polinomudur. D_{x_i}, $(1 \le i \le M)$ ise (2.6) ile tanımlanan operatörlerdir. Matematiksel fiziğin çeşitli lineer olmayan denklemleri, bağımlı değişken dönüşümleri yoluyla Hirota formları olarak yazılır (Hirota R, 2004, Ma, W. X. ve Fan, E. 2011).
$1 \le i \le N$ olmak üzere N dalga değişkenleri

$$\theta_i = c_{1,i}x_1 + c_{2,i}x_2 + \ldots + c_{M,i}x_M. \tag{3.27}$$

biçiminde ve N üstel dalga fonksiyonları

$$f_i = \exp(\theta_i) = \exp(c_{1,i}x_1 + c_{2,i}x_2 + \ldots + c_{M,i}x_M) \tag{3.28}$$

tanımlanır. Burada $c_{i,j}$'ler sabitlerdir.

$$P(D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_M}) \exp(\theta_i).\exp(\theta_j) = \tag{3.29}$$

$$P(c_{1,i} - c_{1,j}, c_{2,i} - c_{2,j}, \ldots, c_{M,i} - c_{M,j}) \exp(\theta_i + \theta_j),$$

bilineer özdeşliğine sahip olduğumuzu biliyoruz (Hirota R, 2004, Ma, W. X. 2011) (3.26) bağıntısı tüm f_i $(1 \leq i \leq N)$ üstel dalga fonksiyonlarının (2.7) Hirota bilineer denk-lemini çözdüğünü ifade eder. Şimdi bir N-dalga test fonksiyonunu ele alalım:

$$f = \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 + \cdots + \varepsilon_N f_N = \varepsilon_1 \exp(\theta_1) + \varepsilon_2 \exp(\theta_2) + \cdots + \varepsilon_N \exp(\theta_N). \tag{3.30}$$

Burada ε_i'ler $(1 \leq i \leq N)$ keyfi sabitlerdir. Bu, N üstel dalga çözümlerinin genel lineer bir kombinasyonudur. Doğal olarak, her bir f_i'nin (2.7) denkleminin çözümü olması hasebiyle acaba (3.30) fonksiyonu da (2.7) Hirota bilineer denkleminin bir çözümü olarak düşünülebilir mi diye sormak mümkündür. Cevap müspettir. Bu üstel dalgaların lineer bir terkibi ilkesi, üstel dalgalar ve olası P polinomu üzerinde bazı ek koşullar altında Hirota bilineer denklemine uygulanır. (3.29) 'dan,

$$P(D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_M}) f \cdot f = \sum_{i,j=1}^{N} \varepsilon_i \varepsilon_j P(D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_M}) \exp(\theta_i).\exp(\theta_j) \tag{3.31}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} \varepsilon_i \varepsilon_j P(c_{1,i} - c_{1,j}, c_{2,i} - c_{2,j}, \ldots, c_{M,i} - c_{M,j}) \exp(\theta_i + \theta_j)$$

ifadesini elde ederiz. Bu bilineerlik özelliği, $\exp(\theta_i)$ ($1 \leq i \leq N$) üstel dalgaları için lineer terkip ilkesinin oluşturulmasında önemli bir rol oynayıp aynı zamanda yarı periyodik dalga çözümlerinin teşkilinde de önemli bir araçtır.

Şimdi (3.31) bağıntısından, N tane $\exp(\theta_i)$ üstel dalga çözümlerinin ($1 \leq i \leq N$) herhangi bir lineer terkibinin, şayet

$$P(c_{1,i}-c_{1,j}, c_{2,i}-c_{2,j}, \ldots, c_{M,i}-c_{M,j}) = 0 \quad 1 \leq i \neq j \leq N, \tag{3.32}$$

koşulu sağlanırsa (2.7) Hirota bilineer denkleminin çözümü olduğu ortaya çıkar. Bu koşulda, $i = j$ durumu hariç tutulur, çünkü bu durum (3.26)'nın bir sonucudur. (3.32) koşulu, P polinomu sabit olduğunda dalga ile ilgili $c_{i,j}$ sayıları üzerinde lineer olmayan cebirsel denklemler sistemini üretir. Daha yüksek boyutlu durumlarda $c_{i,j}$ sayıları için çözümlerin var olma olasılığı daha yüksektir, çünkü ortaya çıkan cebirsel denklem sisteminde çözülecek daha fazla değişken vardır. Yukarıdaki analizi aşağıdaki teoremde sonuçlandıralım.

Teorem 3.2.1: (Lineer Terkip Prensibi)

$P(x_1, x_2, \ldots, x_M)$, (3.26)'yı sağlayan çok değişkenli bir polinom olsun ve dalga değişkenleri θ_i $(1 \leq i \leq N)$, (3.27) ile tanımlansın. Bu takdirde $\exp(\theta_i)$ $(1 \leq i \leq N)$ üstel dalgalarının herhangi bir lineer kombinasyonu, (3.32) koşulu sağlanıyorsa (2.7) Hirota bilineer denklemini çözer.

Bu, Hirota bilineer denklemleri için geçerli olan üstel dalga çözümlerinin lineer bir terkibi ilkesini gösterir ve Hirota bilineer formülasyonu içindeki üstel dalgaların doğrusal kombinasyonlarından N-dalga çözümleri oluşturmanın yolunu açar. (3.32) sistemini çözerek dalga ile ilgili $c_{i,j}$ sayılarının bir çözümü elde edilir. Ele alınan (2.7) lineer olmayan denkleminin (3.30) bağıntısı ile oluşturulan N-dalga çözümü bulunur.

θ_i $(1 \leq i \leq N)$, dalga değişkenlerinden birini, örneğin, $1 \leq i_0 \leq N$ iken

$$\theta_{i_0} = \varepsilon_{i_0}, \text{ yani } c_{i,i_0} = 0, \quad 1 \leq i \leq M \tag{3.33}$$

bir sabit olarak almak, N-dalga çözüm koşulu olan (3.32) bağıntısının dalgayla ilgili diğer tüm sayıların dispersiyon ilişkisini verir:

$$P(c_{1,i}, c_{2,i}, \ldots, c_{M,i}) = 0 \quad 1 \leq i \leq N \ , \ i \neq i_0. \tag{3.34}$$

Bu, Hirota terkip tekniği tarafından ikinci dereceden pertürbasyon teriminde kesilmiş özel bir N-soliton çözüm durumuna karşılık gelir. Ancak genel olarak saçılım bağıntısını sağlamak için gerekli değildir.

Şimdi Teorem 3.2.1'de bahsi geçen lineer terkip ilkesini KP ve BKP denklemlerine uygulayarak N-dalga çözümünü elde edelim.

3.2.1. (3+1)-Boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi

Kadomtsev-Petviashvili dalga denklemi ya da kısaca KP denklemi ilk kez 1970 yılında tek (solitary) dalgaların stabilitesini incelemek üzere türetilmiştir (Kadomtsev ve Petviashvili, 1970). Bu denklem temelde KdV'nin 'zayıfça yönlenmiş' hali olarak bilinmektedir (Ma, W. X. ve Fan, E. 2011).
(3+1)-Boyutlu KP denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} + 3u_{zz} = 0. \tag{3.35}$$

(3.35) denklemi $u = -2(\ln f)_{xx}$ dönüşümü ile şu şekilde yazılabilir:

$$(D_x^4 + D_t D_x + 3D_y^2 + 3D_z^2) f.f = 0, \tag{3.36}$$

ve buna eşdeğer olarak

$$f_{xxxx}f - 4f_{xxx}f_x + 3f_{xx}^2 + f_{tx}f - f_t f_x + 3(f_{yy}f - f_y^2 + f_{zz}f - f_z^2) = 0$$

elde edilir. N-dalga değişkenleri (3.27) bağıntısında şu şekilde tanımlanmıştır.

$$\theta_i = c_i x + h_i y + l_i z + r_i t, \quad 1 \leq i \neq j \leq N. \tag{3.37}$$

Bu durumda N-dalga çözüm koşulu olan (3.32) bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$$c_i^4 - 4c_i^3 c_j + 6c_i^2 c_j^2 - 4c_i c_j^3 + c_j^4 + c_i r_i - c_i r_j - c_j r_i + c_j r_j$$

$$+3h_i^2 - 6h_i h_j + 3h_j^2 + 3l_i^2 - 6l_i l_j + 3l_j^2 = 0, \quad 1 \le i \ne j \le N. \tag{3.38}$$

İncelemeyle bu denklemin bir çözümü:

$$h_i = ac_i^2, \quad l_i = bc_i^2, \quad r_i = -4c_i^3, \quad 1 \le i \le N \tag{3.39}$$

olarak elde edilir. Burada $a^2 + b^2 = 1$'dir. Bu nedenle, Teorem 3.2.1'deki lineer terkip ilkesine göre, (3.35) denkleminin N-dalga çözümü şu şekildedir:

$$u = -2(\ln f)_{xx}, \quad f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \exp(c_i x + ac_i^2 y + bc_i^2 z - 4c_i^3 t). \tag{3.40}$$

Burada $a^2 + b^2 = 1$, ve c_i, ε_i keyfi sabitlerdir. (3.40) çözümündeki her bir üstel dalga olan f_i, karşı gelen lineer olmayan saçılım bağıntısını sağlar.

3.2.2. (3+1)-Boyutlu B-Tipi Kadomtsev-Petviashvili (BKP) denklemi

(3+1) boyutlu BKP denklemi aşağıdaki gibidir:

$$u_{zt} - u_{xxxy} - 3(u_x u_y)_x + 3u_{xx} = 0. \tag{3.41}$$

Eğer $z = y$ olarak alınırsa bu (3+1)-boyutlu BKP denklemi, (2+1)-boyutlu BKP denklemine dönüşür.

$$u_{yt} - u_{xxxy} - 3(u_x u_y)_x + 3u_{xx} = 0. \tag{3.42}$$

(3.41) denklemi $u = 2(\ln f)_x$ dönüşümü ile şu şekilde yazılabilir:

$$(D_t D_z - D_x^3 D_y + 3D_x^2) f.f = 0, \tag{3.43}$$

veya buna eşdeğer olarak

$$(f_{tz} - f_{xxxy} + 3f_{xx})f - f_t f_z + f_{xxx} f_y + 3f_{xxy} f_x - 3f_{xx} f_{xy} - 3f_x^2 = 0$$

elde edilir. N dalga değişkenleri (3.27) ve (3.37) denklemleri tarafından belirlenir. Ardından N dalga çözüm koşulu olan (3.38) bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$$r_i l_i - r_i l_j - r_j l_i + r_j l_j - c_i^3 h_i + c_i^3 h_j + 3c_i^2 c_j h_i - 3c_i^2 c_j h_j$$

$$-3c_i c_j^2 h_i + 3c_i c_j^2 h_j + c_j^3 h_i - c_j^3 h + 3c_i^2 - 6c_i c_j + 3c_j^2 = 0,\ 1 \leq i \neq j \leq N. \qquad (3.44)$$

Benzer şekilde inceleme yoluyla, bu denklemin bir çözümü

$$h_i = c_i^{-1}, \quad l_i = ac_i^{-1}, \quad r_i = \frac{1}{a} c_i^3, \quad 1 \leq i \leq N \qquad (3.45)$$

olarak elde edilir. Burada $a \neq 0$ olmak üzere keyfi sabittir. Teorem 3.2.1'deki lineer terkip ilkesinden, (3.41) denkleminin aşağıdaki N-dalga çözümüne sahip olduğu sonucu çıkar:

$$u = 2(\ln f)_x, \quad f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \exp(c_i x + c_i^{-1} y + a c_i^{-1} z + \frac{1}{a} c_i^3 t). \qquad (3.46)$$

Burada a, c_i'ler keyfi sıfır olmayan keyfi sabitler ve ε_i 'ler keyfi sabitlerdir. Bununla birlikte, f çözümündeki N üstel dalga olan f_i, $1 \leq i \leq N$'nin hiçbiri karşılık gelen lineer olmayan saçılım bağıntısını sağlamaz. $a = 1$ durumu $z = y$'yi oluşturur ve bu nedenle (3.42) denklemine aşağıdaki N-dalga çözümünü verir:

$$u = 2(\ln f)_x, \quad f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \exp(c_i x + c_i^{-1} y + c_i^3 t). \qquad (3.47)$$

3.3. Bilineer Nöral Ağ Metodu (BNAM)

BNAM, lineer olmayan oluşum denklemlerinin soliton dalga çözümlerini elde etmek için kullanılan bir yaklaşımdır. BNAM, çift periyodik, homoklinik, breather, çoklu dalga gibi tek gizli katmanlı klasik test fonksiyonlarının çoğunu içerir (Shen, J. L., ve Wu, X. Y. 2021, Zhang, R. F., Li, M. C., Albishari, M., Zheng, F. C., ve Lan, Z. Z., 2021 Zeynel, M. ve Yaşar E. 2022). Aslında, BNAM'nun bariz avantajı, "4-2-2", "4-3-2", "4-2-3" gibi birden çok gizli katmana uygulanabilmesidir. Burada verilen 4-3-2 ifadesi giriş tabakası için 4, gizli tabaka için 3, veri tabakası için 2 nöron bulunduğunu gösterir. Bu özellik modelin haydut dalga, parlak ve karanlık dalga çözümlerinin elde edilmesinde gözlenecektir.

Modelin adımlarını sunmadan önce aşağıdaki 3+1 boyutlu denklemi ele alalım (Gao, L. N., Zhao, X. Y., Zi, Y. Y., Yu, J. ve Lü, X. 2016):

$$u_{yt} - u_{xxxy} - 3(u_x u_y)_x - 3u_{xx} + 3u_{zz} = 0. \tag{3.48}$$

Hirota bilineer teorisi ve

$$u = 2[\ln f(x,y,z,t)]_x = 2\frac{f_x(x,y,z,t)}{f(x,y,z,t)} \tag{3.49}$$

dönüşümü kullanılarak bu denklemin Hirota bilineer formu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$(D_t D_y - D_x^3 D_y - 3D_x^2 + 3D_z^2) f.f = 0. \tag{3.50}$$

$$2[(f f_{ty} - f_t f_y) + f_{xxx} f_y + 3 f_{xxy} f_x - 3 f_{xx} f_{xy} - f f_{xxxy} - 3(f f_{xx} - f_x^2) + 3(f f_{zz} - f_z^2)] = 0. \tag{3.51}$$

Şimdi BNAM'nin ayrıntılı adımlarını ve tensör formülünü inceleyelim. Şekil 3.1 ve şekil 3.2. ele alınan denklemin tensör formülü aşağıdaki gibidir:

$$f = \varpi_{k_n,f} \psi_{k_n}(\zeta_{k_n}), \quad \zeta_{k_j} = \varpi_{k_{j-1},k_j} \psi_{k_{j-1}}(\zeta_{k_{j-1}}) + b_{k_j}, \;\; (j = 1,2...n) \tag{3.52}$$

burada $\varpi_{k_n,\,f}$ ağırlık katsayısı ve f aktivasyon fonksiyonudur. f fonksiyonu herhangi bir fonksiyon olarak kullanılabilir ancak son gizli katmanda ψ_{k_n} $(\zeta\ )$ $\geqslant$ 0 olmalıdır. BNAM'nin temel adımları aşağıda verilmiştir:

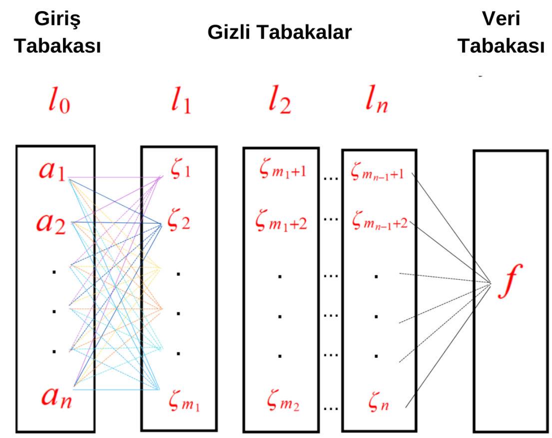
1. Aşama: (3.49) genelleştirilmiş bilineer dönüşümle, dikkate alınan denklemin bilineer denklem veya genelleştirilmiş bilineer form olduğu tespit edilir.

2. Aşama: Nöral ağı modelinin tensör formülünü bilineer denklemde yerine koyarak, lineer olmayan cebirsel denklem sistemleri elde edilir.

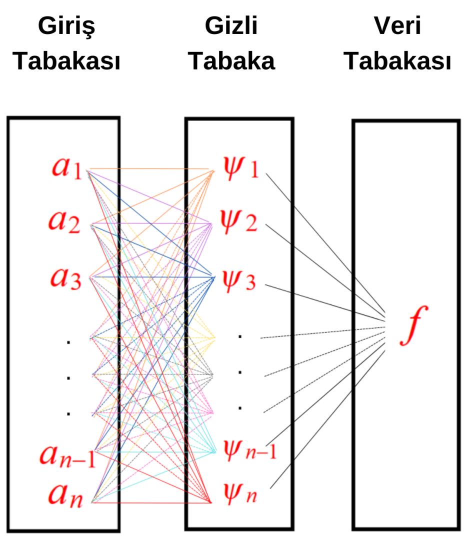
3. Aşama: f aktivasyon fonksiyonunun yapısına bağlı olarak çeşitli elementer fonksiyonların katsayıları toparlanır ve 0'a eşitlenir.

4. Aşama: Elde edilen lineer olmayan cebirsel denklem sistemi Maple yazılımı ile çözülerek katsayı çözümleri elde edilir.

5. Aşama: Elde edilen katsayı çözümleri (3.52) denkleminde yazılır. Daha sonra bu aktivasyon fonksiyonunu (3.49) genelleştirilmiş bilineer dönüşüme bağlayarak lineer olmayan oluşum denklemleri için analitik çözümler oluşturulur.



Şekil 3.1. (3.52) denkleminin çok gizli tabakalı nöral ağ modeli



Şekil 3.2. (3.52) denkleminin tek gizli tabakalı nöral ağ modeli

3.4. Basitleştirilmiş Hirota Metodu

Hirota'nın yöntemi, bilineer olmayan ancak bilineer forma dönüştürülebilen KDD'lerin tam çözümlerini bulmak için kullanılabilir. Lineer olmayan KDD'ler için eğer varsa bilineer formlar bulmak, oldukça önemsizdir. Bu zorluğun üstesinden gelmek için, Hirota'nın yönteminin basitleştirilmiş bir versiyonu ele alınır (Wazwaz A.M., 2016, Hereman, W. ve Nuseir, A. 1997). Yalnız gezen ve soliton çözümler oluşturmak için kullanılır.

Bilineer formlar olmadan, bilgisayarda bir pertürbasyon şemasını sembolik bir işlem paketi kullanarak çözerek tam çözümler oluşturulabilir. Yöntemi göstermek için, KdV denklemi ele alınsın:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.53}$$

İlk olarak, bağımlı değişkenindeki

$$u(x,t) = 2(\ln f(x,t))_{xx} = 2\frac{(ff_{xx} - f_x^2)}{f^2} \tag{3.54}$$

dönüşüm, (3.53) 'ü f ve türevlerinde ikinci dereceden bir denkleme dönüştürmemizi sağlar. Dönüşüm aracılığıyla dönüştürülen denklem şu şekildedir:

$$f(f_{xt} + f_{xxx}) - f_x f_t - 4f_x f_{xxx} + f_{xx}^2 = 0. \tag{3.55}$$

Hirota'nın tekniğini bilineer formun bilinmeyebileceği denklemlere uygulanabilir kılmak için, Hirota'nın bilineer operatörleri kasten dikkate alınmaz ve (3.55) denklemi şu şekilde yazılır:

$$fL(f) + N(f,f) = 0. \tag{3.56}$$

Burada

$$L(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \tag{3.57}$$

lineer diferensiyel operatörleri ve

$$N(f,f) = -f_x f_t - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx} f_{xx} \tag{3.58}$$

ise lineer olmayan operatörleri ifade etmektedir.

İkinci olarak şu şekilde bir çözüm elde edilmelidir:

$$f(x,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}(x,t). \tag{3.59}$$

burada ε bir parametre işlevi görür. Hirota'nın yönteminde olduğu gibi devam ederek, (3.59) çözüm formu (3.56) denkleminde yerine koyulur ve ε'nun farklı kuvvetleri sıfıra eşitlenir.

$$O(\varepsilon^1) : Lf^{(1)} = 0, \tag{3.60}$$

$$O(\varepsilon^2): Lf^{(2)} = -N(f^{(1)}, f^{(1)}), \tag{3.61}$$

$$O(\varepsilon^3): Lf^{(3)} = -f^{(1)}Lf^{(2)} - N(f^{(1)}, f^{(2)}) - N(f^{(2)}, f^{(1)}), \tag{3.62}$$

.

.

.

$$O(\varepsilon^n): Lf^{(n)} = -\sum_{j=1}^{n-1} \left(f^{(j)}Lf^{(n-j)} + N(f^{(j)}, f^{(n-j)}) \right) \tag{3.63}$$

KdV denkleminin N-soliton çözümü

$$f^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \exp(\theta_i) = \sum_{i=1}^{N} \exp(c_i x - r_i t + \alpha_i), \tag{3.64}$$

burada c_i, r_i ve α_i reel sabitlerdir. (3.64) çözüm formunun (3.60)'da ikame edilmesi $P(c_i, r_i) = 0$ sonucunu verir. Burada

$$P(c_i, r_i) = -r_i c_i + c_i^4, \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{3.65}$$

Dispersiyon bağıntısı gereği $r_i = c_i^3$ olur. (3.64) çözümünün (3.61)'in sağ tarafında ikame edilmesi ile

$$-\sum_{i,j=1}^{N} 3c_i c_j^2 (c_i - c_j) \exp(\theta_i + \theta_j) = \sum_{1 \le i \le j \le N} 3c_i c_j^2 (c_i - c_j) \exp(\theta_i + \theta_j) \tag{3.66}$$

elde edilir. Soliton çözümleri kabul eden f 'deki ikinci dereceden denklemler için tipik olan, $\exp(2\theta_i)$'deki terimlerin eksik olduğu gözlemlenir. Ayrıca, (3.66), $f^{(2)}$'nin biçimini şu şekilde tayin eder:

$$f^{(2)} = \sum_{1 \le i \le j \le N} B(i,j) \exp(\theta_i + \theta_j) = \sum_{1 \le i \le j \le N} B(i,j) \exp((c_i + c_j)x - (r_i + r_j)t + (\alpha_i + \alpha_j)). \tag{3.67}$$

(3.57),(3.65) ve (3.67) ifadelerinin (3.61)'in sol tarafında ikame edilmesi ile

$$\begin{aligned} L^{f(2)} &= \sum_{1 \le i \le j \le N} P(c_i + c_j, r_i + r_j) B(i,j) \exp(\theta_i + \theta_j) \\ &= \sum_{1 \le i \le j \le N} 3c_i c_j (c_i + c_j)^2 B(i,j) \exp(\theta_i + \theta_j). \end{aligned} \tag{3.68}$$

elde edilir. (3.66) ve (3.68) eşitlenir. Bu eşitlik sonucunda

$$B(i,j) = \frac{(c_i - c_j)^2}{(c_i + c_j)^2}, \quad 1 \leq i \leq j \leq N \tag{3.69}$$

sonucuna ulaşılır.

(3.62) ile benzer şekilde ilerlemek, $f^{(3)}$'ün açık biçimine ulaştırır. Örneğin $N = 3$ alınırsa $f^{(3)}$ şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} f^{(3)} &= B(1,2)B(1,3)B(2,3)\exp(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ &= B(1,2)B(1,3)B(2,3)\exp((c_1 + c_2 + c_3)x \\ &\quad -(r_1 + r_2 + r_3)t + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)). \end{aligned} \tag{3.70}$$

$N = 3$ için, şemanın geri kalanının hesaplanmasıyla $n > 3$ için $f^{(n)} = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu nedenle (3.59)'daki açılım burada kesilir ve

$$\begin{aligned} f \;=\; & 1 + \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3) + \\ & B(1,2)\exp(\theta_1 + \theta_2) + B(1,3)\exp(\theta_1 + \theta_3) + \\ & B(2,3)\exp(\theta_2 + \theta_3) + B(1,2)B(1,3)B(2,3)\exp(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \tag{3.71}$$

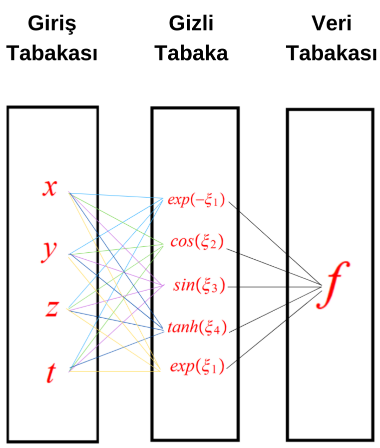
elde edilir. Burada $\varepsilon = 1$ alınır. f'nin $\exp(2\theta_1)$, $\exp(2\theta_2)$, $\exp(2\theta_1 + \theta_2)$ ve $\exp(\theta_1 + 2\theta_2)$ içeren hiç terimi olmadığına dikkat edilir. (3.71)'in (3.54)'e ikame edilmesi üzerine, KdV denkleminin iyi bilinen üç soliton çözümü bulunur. Herhangi bir $N > 3$ için N-soliton çözümü de benzer şekilde oluşturulabilir. Bununla birlikte, hesaplamalar çok uzar ve matematiksel tümevarım yoluyla N-soliton çözümünün şeklini bulmak daha şık olur.

4. BULGULAR

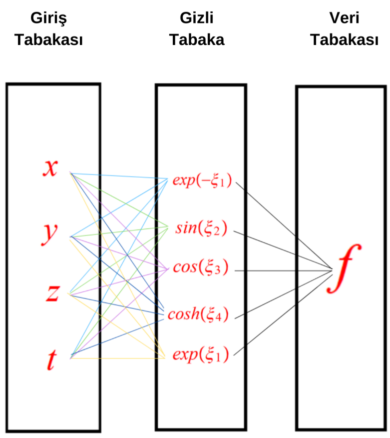
Bu bölümde 3.bölümde tasvir edilen matematiksel metotların çeşitli oluşum tipi denklemlere uygulanması ayrıntılı bir şekilde sunulacaktır. Bu minvalde ilk iki alt bölümde BNAM'nin tek ve çok tabakalı halleri için (3+1) boyutlu YHBD incelendi. Son alt bölümde ise basitleştirilmiş Hirota bilineer metodu Sadawa-Kotera (SK) denklemine uygulandı ve her iki metot için ele alınan modellere karşılık gelen grafik analizi ve sayısal simülasyonlar sunulmuştur. Böylelikle fiziksel fenomenlerin dinamik analizleri gözlenmiştir.

4.1. Model Denklemin Tek Gizli Tabakalı Nöral Ağ Çözüm Formları

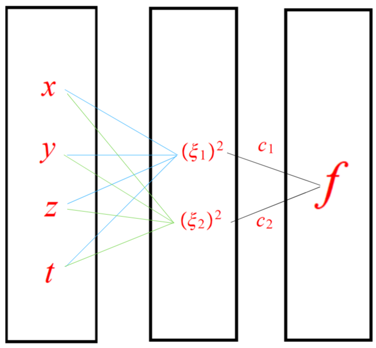
Bu alt bölümde tek gizli katman seçilerek iki farklı periyodik (Periyodik tip I, Periyodik tip II) çözüm formu (Şekil 4.1 ve Şekil 4.2), genelleştirilmiş lump çözüm formu (Şekil 4.3) ve klasik lump çözüm formu (Şekil 4.4) elde edilecektir (Shen, J. L., ve Wu, X. Y. 2021, Zhang, R. F., Li, M. C., Albishari, M., Zheng, F. C., ve Lan, Z. Z., 2021 Zeynel, M. ve Yaşar E. 2022).



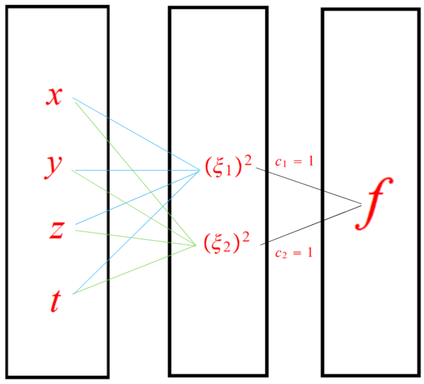
Şekil 4.1. (4.1) denkleminin periyodik tip I nöral ağ modeli



Şekil 4.2. (4.4) denkleminin periyodik tip II nöral ağ modeli



Şekil 4.3. (4.7) denkleminin genelleştirilmiş lump nöral ağ modeli



Şekil 4.4. (4.10) denkleminin klasik lump nöral ağ modeli

4.1.1. Periyodik tip-1 çözüm formu

Bu çözüm formunun giriş katmanında 4, gizli katmanında 5 nöron bulunmaktadır (Şekil 4.1). Periyodik çözüm-I'in varsayılan aktivasyon fonksiyonu şu şekildedir:

$$f = e^{-\xi_1} + \Theta_1 \cos(\xi_2) + \Theta_2 \sin(\xi_3) + \Theta_3 \tanh(\xi_4) + \Theta_4 e^{\xi_1} + b, \tag{4.1}$$

burada

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t + a_5, \\
\xi_2 &= a_6 x + a_7 y + a_8 z + a_9 t + a_{10}, \\
\xi_3 &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} t + a_{15}, \\
\xi_4 &= a_{16} x + a_{17} y + a_{18} z + a_{19} t + a_{20}
\end{aligned}$$

dır. Burada kullanılan Θ_i $(i = 1,2,3,4)$ ve a_i'ler $(i = 1,...,20)$ gerçel sabitlerdir. (4.1) ifadesi (3.51) denkleminde yerine koyularak ve her bir elementer fonksiyonun katsayıları toplanarak lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu lineer olmayan denklem sisteminin maple yazılımı yardımıyla çözümlesi suretiyle aşağıdaki katsayı çözümleri elde edilmiştir:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= 0, a_{12}=-\frac{3a_{18}a_{13}}{a_{19}}, a_{14}=\frac{a_{13}a_{19}}{a_{18}}, a_{16}=0, a_{17}=-\frac{3a_{18}^2}{a_{19}},\\
a_3 &= a_1,\ a_4=\frac{a_1(a_1^2a_{18}+2a_{19})}{a_{18}},\\
a_2 &= 0,\ a_7=0, a_8=a_6, a_9=-\frac{a_6(a_{18}a_6^2-2a_{19})}{a_{18}}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Elde edilen katsayı çözümleri önerilen çözüm formuna yerleştirilerek (3+1) boyutlu YHBD’nin analitik çözümüne ulaşılır. Diğer bir deyişle (4.2) katsayı çözümleri ve (4.1) ifadesi, (3.49)’da ikame edilirse aşağıdaki tam çözüm elde edilir:

$$
u=\frac{-2\Theta_1 a_6\Xi_2\sin(\Xi_1)+2\Theta_4 a_1\Xi_2-2a_1}{\Theta_4\Xi_2+\Theta_1\Xi_2\cos(\Xi_1)-\Theta_2\Xi_2\sin(\Xi_3)-\Theta_3\tanh(\Xi_4)\Xi_2+b\Xi_2+1}
\tag{4.3}
$$

burada

$$
\Xi_1=\frac{(-a_6^3t+(x+z)a_6+a_{10})a_{18}+2a_6ta_{19}}{a_{18}},
$$

$$
\Xi_2=e^{\frac{(a_1^3t+(x+z)a_1+a_5)a_{18}+2a_1ta_{19}}{a_{18}}},
$$

$$
\Xi_3=\frac{3a_{18}^2a_{13}y-a_{19}(a_{13}z+a_{15})a_{18}-a_{13}a_{19}^2t}{a_{19}a_{18}},
$$

$$
\Xi_4=\frac{-a_{19}^2t+(-a_{18}z-a_{20})a_{19}+3a_{18}^2y}{a_{19}}
$$

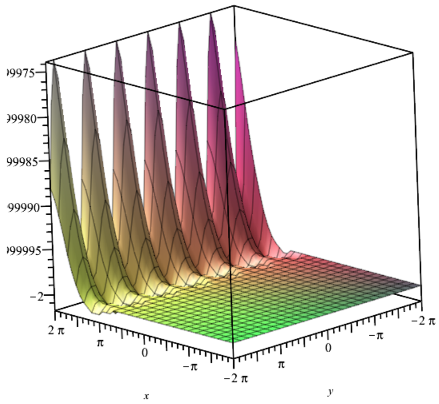
dır. (4.3) çözüm formunda parametreler aşağıdaki gibi seçilirse

$$
a_1=a_6=a_{10}=a_{18}=a_{19}=a_5=a_{13}=a_{15}=a_{20}=b=\Theta_1=\Theta_2=\Theta_3=\Theta_4=1
$$

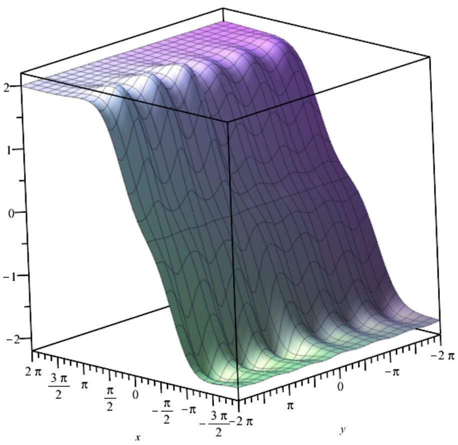
YHBD'nin dinamik davranışını ve karakterlerini elde etmek mümkündür.

Dalga görüntüsünü daha iyi gözlemleyebilmek için aralıkları değiştirerek farklı dalga görünümleri elde edebiliriz. Elde edilen sonuçlara göre bazı 3 boyutlu grafikler aşağıda sunulmuştur.

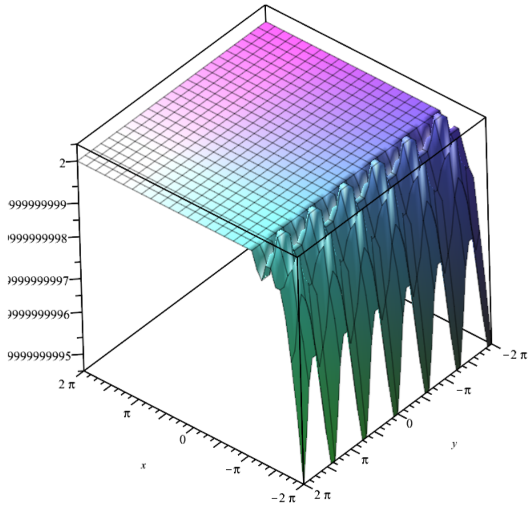
Aşağıdaki Şekil 4.5'de $t = z = -10$, Şekil 4.6'da $t = z = 0$ ve Şekil 4.7'de $t = z = 1$ alınarak çözümlerin 3 boyutlu grafikleri sunulmaktadır. Şekil 4.8'de yoğunluk grafiği takdim edilmiştir. Ayrıca Şekil 4.9 ve Şekil 4.10, (4.3) çözümünün eşyükselti eğrisi grafiklerini sunar.



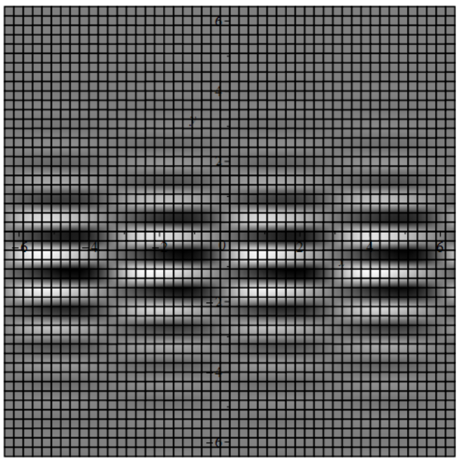
Şekil 4.5. (4.3) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = -10$, $z = -10$)



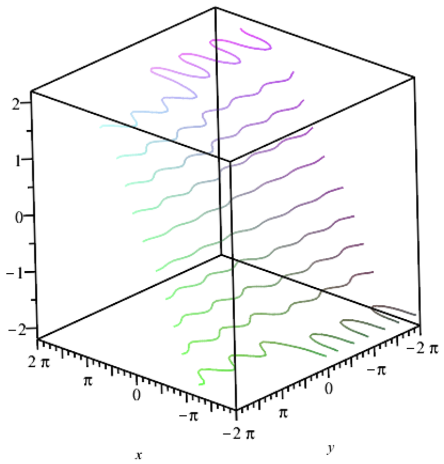
Şekil 4.6. (4.3) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = 0$, $z = 0$)



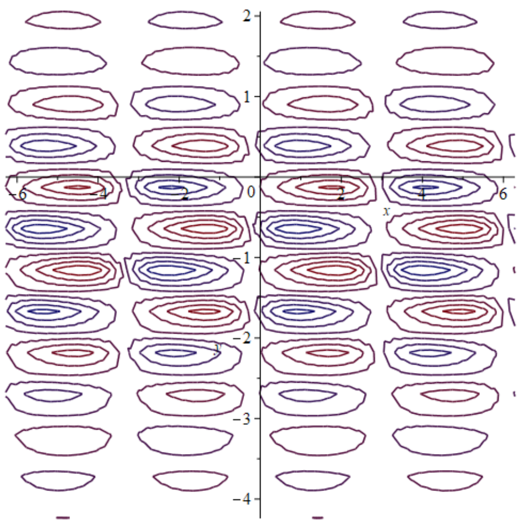
Şekil 4.7. (4.3) çözümü için 3 boyutlu grafik (t = 1, z = 1)



Şekil 4.8. (4.3) çözümü için yoğunluk grafiği (t = 0, z = 0)



Şekil 4.9. (4.3) çözümü için 3 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0, z = 0$)



Şekil 4.10. (4.3) çözümü için 2 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0, z = 0$)

4.1.2. Periyodik tip-2 çözüm formu

Bu çözüm formunun giriş katmanında 4, gizli katmanda 5 nöron bulunmaktadır (Şekil 4.2). Periyodik çözüm II tipinin varsayılan formu şu şekildedir:

$$f = e^{-\xi_1} + \Theta_2 \sin(\xi_2) + \Theta_1 \cos(\xi_3) + \Theta_4 e^{\xi_1} + \Theta_3 \cosh(\xi_4) + b, \qquad (4.4)$$

burada

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t + a_5, \\
\xi_2 &= a_6x + a_7y + a_8z + a_9t + a_{10}, \\
\xi_3 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + a_{15}, \\
\xi_4 &= a_{16}x + a_{17}y + a_{18}z + a_{19}t + a_{20}
\end{aligned}$$

olup. Burada kullanılan Θ_i (i = 1,2,3,4) ve a_i'ler (i = 1,...,20) gerçel sabitlerdir. (4.4) ifadesi (3.51) denkleminde yerine yazılarak ve her bir elementer fonksiyonun katsayı-ları toplanarak lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Aşağıdaki katsayı çözümleri, bu lineer olmayan cebirsel denklem sistemininin Maple yazılımı yardımıyla çözülmesiyle elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0, a_{12} = 0, a_{13} = a_{11}, a_{14} = -\frac{a_{11}(a_{11}^2a_6 - a_6^3 - a_9)}{a_6}, a_{17} = 0, \\
a_{18} &= a_{16}, a_{19} = \frac{a_{16}(a_{16}^2a_6 + a_6^3 + a_9)}{a_6}, b = 0, a_3 = -\frac{a_2(a_6^3 + a_9)}{6a_6}, \\
a_4 &= -\frac{a_2(a_6^6 + 2a_6^3a_9 + a_9^2)}{12a_6^2}, a_7 = 0, a_8 = a_6.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Elde edilen katsayı çözümler önerilen çözüm formuna yerleştirilerek (3+1) boyutlu YHBD'nin analitik çözümü elde edilir. Diğer bir deyişle (4.5) katsayı çözümleri ve (4.4) ifadesi, (3.49)'da ikame edilirse aşağıdaki tam çözüm elde edilir:

$$u = \frac{2(\Theta_1a_{11}\sin(\Xi_1) + \Theta_2a_6\cos(\Xi_2) + \Theta_3a_{16}\sinh(\Xi_3))\Xi_4}{(\Theta_2\sin(\Xi_2) + \Theta_3\cosh(\Xi_3) + \Theta_1\cos(\Xi_1)\Xi_4) + \Theta_4 + \Xi_4^2} \tag{4.6}$$

burada

$$\Xi_1 = \frac{-a_{11}ta_6^3 + (a_{11}^3t + (-x-z)a_{11} - a_{15})a_6 - a_{11}ta_9}{a_6},$$

$$\Xi_2 = (x+z)a_6 + a_9t + a_{10},$$

$$\Xi_3 = \frac{a_{16}ta_6^3 + (a_{16}^3t + (x+z)a_{16} + a_{20})a_6 + a_{16}ta_9}{a_6},$$

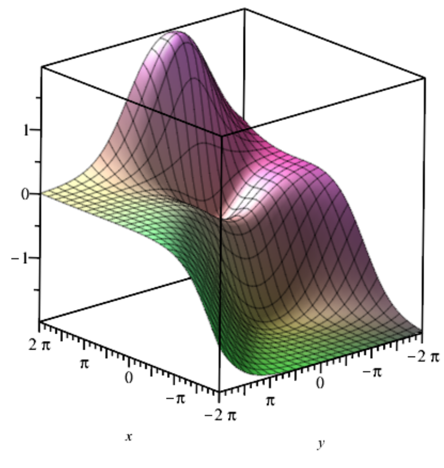
$$\Xi_4 = e^{\frac{a_6^6 t + 2a_6^4 z + 2a_6^3 a_9 t - 12a_6^2 y + 2a_6 a_9 z + a_9^2 t) a_2 - 12 a_5 a_6^2}{12 a_6^2}}$$

dır. (4.6) çözüm formunda parametreler aşağıdaki gibi seçilirse,

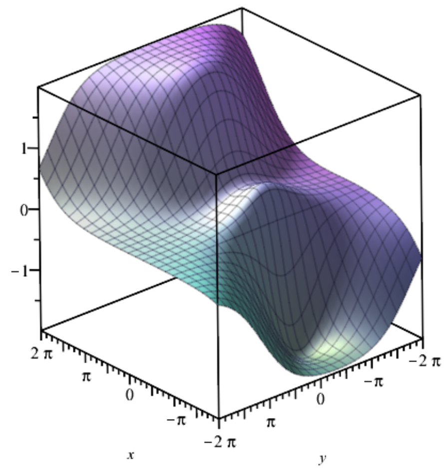
$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_4 = a_{11} = a_6 = a_{15} = a_9 = a_{10} = a_{16} = a_{20} = a_5 = a_2 = 1$$

YHBD'nin dinamik davranışını ve karakterlerini elde etmek mümkündür. Dalga profillerini daha iyi gözlemleyebilmek için aralıkları değiştirerek farklı dalga görünümleri elde edebiliriz. Elde edilen sonuçlara göre aşağıda bazı 3 boyutlu grafikler sunulmuştur.

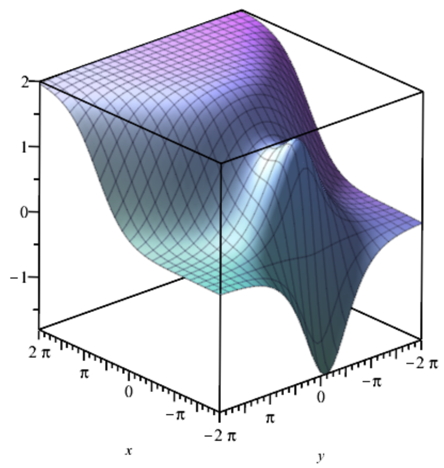
Aşağıdaki Şekil 4.11'de $t = z = -1$, Şekil 4.12'de $t = z = 0$ ve Şekil 4.13'de $t = z = 1$ alınarak çözümlerin 3 boyutlu grafikleri sunulmaktadır. Şekil 4.14'de yoğunluk grafiği takdim edilmiştir. Ayrıca Şekil 4.15 ve Şekil 4.16, (4.6) çözümünün eşyükselti eğrisi grafiklerini sunar.



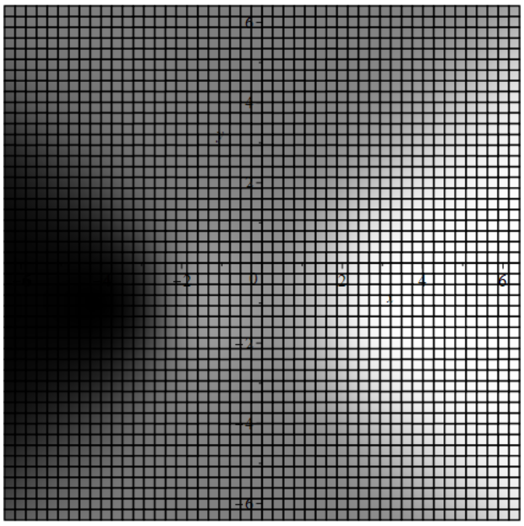
Şekil 4.11. (4.6) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = -1$, $z = -1$)



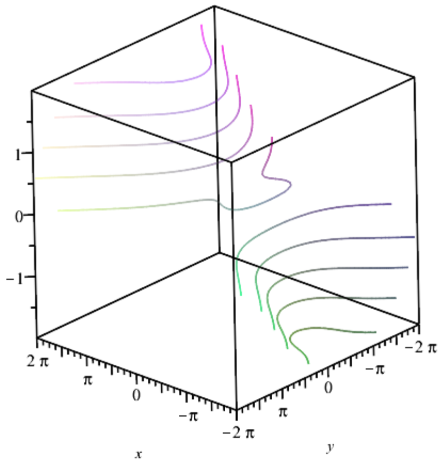
Şekil 4.12. (4.6) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = 0$, $z = 0$)



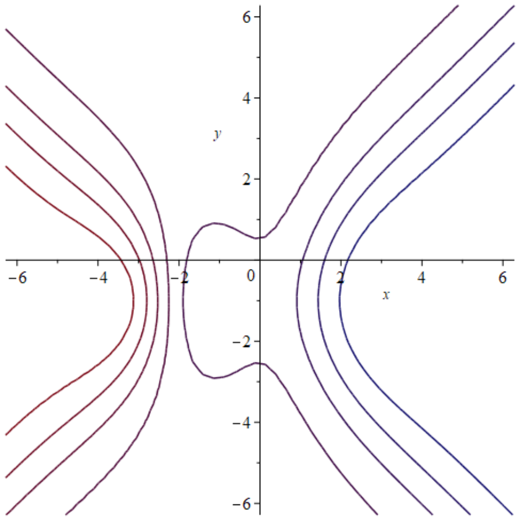
Şekil 4.13. (4.6) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = 1$, $z = 1$)



Şekil 4.14. (4.6) çözümü için yoğunluk grafiği ($t = 0$, $z = 0$)



Şekil 4.15. (4.6) çözümü için 3 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0$, $z = 0$)



Şekil 4.16. (4.6) çözümü için 2 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0, z = 0$)

4.1.3. Genelleştirilmiş lump çözüm formu

Bu çözüm formunun giriş katmanında 4, gizli katmanda 2 nöron bulunmaktadır (Şekil 4.3). Genelleştirilmiş lump çözümünün varsayılan formu şu şekildedir:

$$f = c_1(te_1 + xe_2 + ye_3 + ze_4)^2 + c_2(te_5 + xe_6 + ye_7 + ze_8)^2 + b. \tag{4.7}$$

Burada kullanılan c_1, c_2, b ve e_i'ler ($i = 1, 2, ..., 8$) gerçel sabitlerdir. (4.7) ifadesi (3.51) denkleminde yerine koyularak ve her bir elementer fonksiyonun katsayıları toplanarak lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Aşağıdaki katsayı çözümleri, bu lineer olmayan cebirsel denklem sistemininin Maple yazılımı yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilmiştir:

$$e_1 = -\frac{6e_6(-e_8 + e_6)\sqrt{-\frac{c_2}{c_1}}}{e7}, e_2 = e_4 - e_6\sqrt{-\frac{c_2}{c_1}}, e_3 = 0, e_5 = \frac{3(e_6^2 - e_8^2)}{e_7} \tag{4.8}$$

Elde edilen katsayı çözümleri önerilen çözüm formuna yerleştirilerek (3+1) boyutlu YHBD'nin analitik çözümü elde edilir. Diğer bir deyişle (4.8) ve (4.7) katsayı çözümleri, (3.49)'da ikame edilirse aşağıdaki tam çözüm elde edilir:

$$u=\frac{2(-2c_1(\varpi_1)e_6\sqrt{-\frac{c_2}{c_1}}+2c_2e_6(\varpi_2))}{c_1(\varpi_1)^2+c_2(\varpi_2)^2+b} \tag{4.9}$$

burada

$$\varpi_1=-\frac{6e_6\sqrt{-\frac{c_2}{c_1}}(-e_8+e_6)t}{e7}-e_6x\sqrt{-\frac{c_2}{c_1}}-e_6z\sqrt{-\frac{c_2}{c_1}}$$

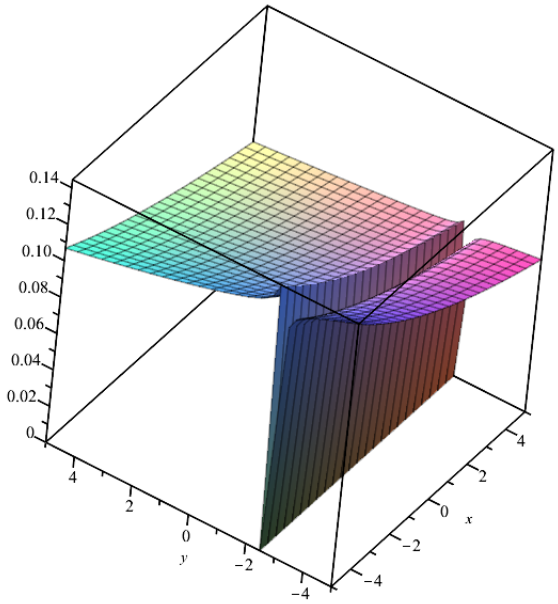
$$\varpi_2=\frac{3(e_6^2-e_8^2)}{e_7}+xe_6+ye_7+ze_8$$

dir. (4.9) çözümünde parametreler aşağıdaki gibi seçilirse,

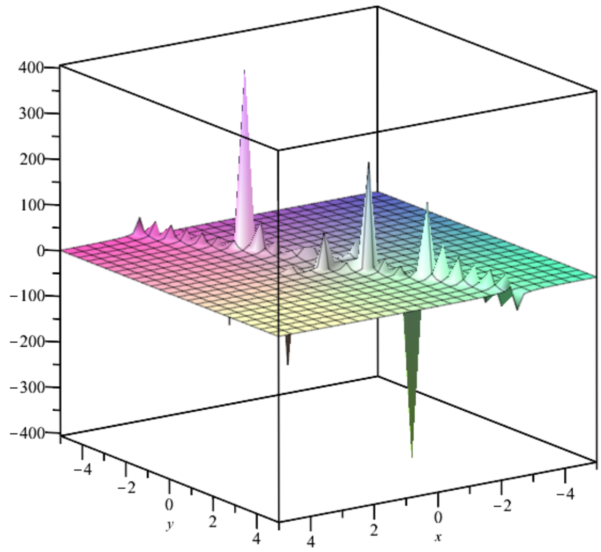
$$c_1=0{,}3, c_2=-0{,}5, e_6=2, e_7=2, e_8=3, b=1$$

YHBD'nin dinamik davranışını ve karakterlerini elde etmek mümkündür. Dalga profille-rini daha iyi gözlemleyebilmek için aralıkları değiştirerek farklı dalga görünümleri elde edebiliriz. Elde edilen sonuçlara göre aşağıda bazı 3 boyutlu grafikler verilmiştir.

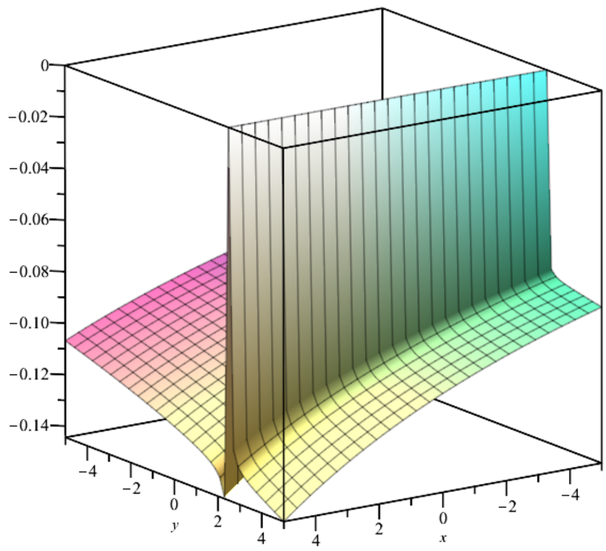
Aşağıdaki Şekil 4.17'de $t=z=-10$, Şekil 4.18'de $t=z=0$ ve Şekil 4.19'da $t=z=10$ alınarak çözümlerin 3 boyutlu grafikleri sunulmaktadır. Şekil 4.20'de yoğunluk grafiği ve Şekil 4.21'de eşyükselti eğrileri grafiği takdim edilmiştir. Ayrıca Şekil 4.22 ve Şekil 4.23, (4.9) çözümünün y eğrileri ve x eğrileri grafiklerini sunar.



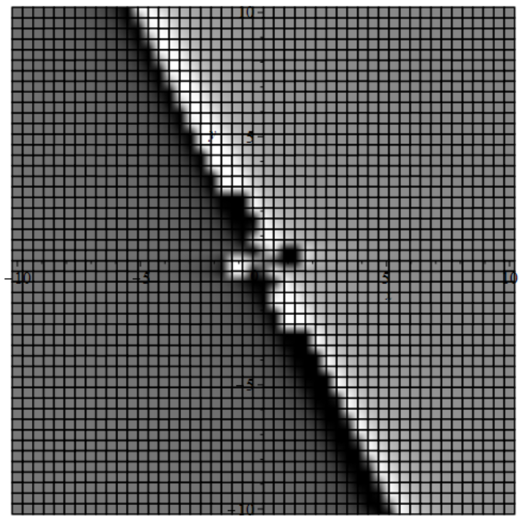
Şekil 4.17. (4.9) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = -10$, $z = -10$)



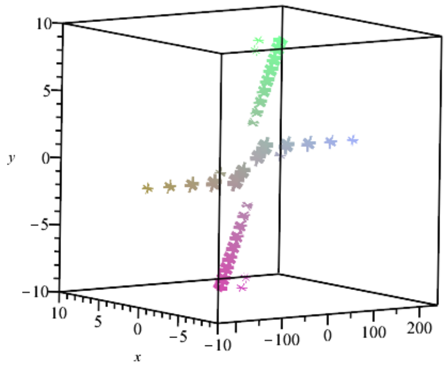
Şekil 4.18. (4.9) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = 0$, $z = 0$)



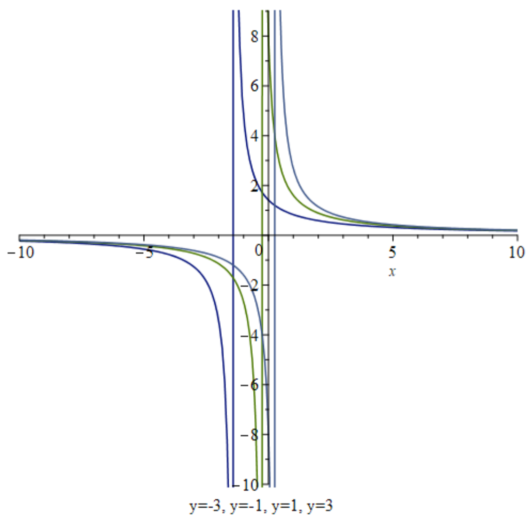
Şekil 4.19. (4.9) çözümü için 3 boyutlu grafik (t = 10, z = 10)



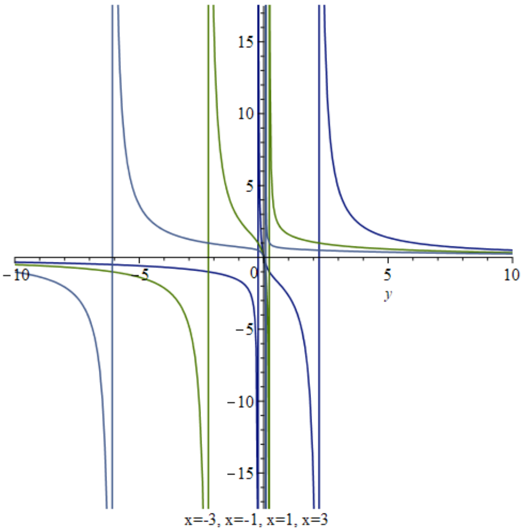
Şekil 4.20. (4.9) çözümü için yoğunluk grafiği (t = 0, z = 0)



Şekil 4.21. (4.9) çözümü için 3 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0$, $z = 0$)



Şekil 4.22. (4.9) çözümü için y eğrileri grafiği ($t = 0$)



Şekil 4.23 (4.9) çözümü için x eğrileri grafiği ($t = 0$)

4.1.4. Klasik lump çözüm formu

Bu çözüm formunun yine giriş katmanında 4, gizli katmanda 2 nöron bulunmaktadır (Şekil 4.4). Klasik lump çözümünün varsayılan formu şu şekildedir:

$$f = (te_1 + xe_2 + ye_3 + ze_4)^2 + (te_5 + xe_6 + ye_7 + ze_8)^2 + b, \tag{4.10}$$

Burada kullanılan c_1, c_2, b ve e_i'ler ($i = 1,2,...,8$) gerçel sabitlerdir. (4.10) ifadesi (3.51) denkleminde yerine koyularak ve her bir elementer fonksiyonun katsayıları toplanarak lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Aşağıdaki katsayı çözümleri, bu lineer olmayan cebirsel denklem sistemininin Maple yazılımı yardımıyla çözülmesiyle elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{6e_6(e_2e_6 - e_4e_8)(e_2^2 + e_6^2)}{b(e_2^2 - e_4^2)},\ e_3 = 0, \\ e_5 &= \frac{3e_6(e_2^2 - e_4^2 - e_6^2 + e_8^2)}{b(e_2^2 - e_4^2)},\ e_7 = -\frac{b(e_2^2 - e_4^2)}{e_6(e_2^2 + e_6^2)}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Elde edilen katsayı çözümleri önerilen çözüm formuna yerleştirilerek (3+1) boyutlu YHBD'nin analitik çözümü elde edilir. Diğer bir deyişle (4.11) katsayı çözümleri ve (4.10) ifadesi, (3.49)'da ikame edilirse aşağıdaki tam çözüm elde edilir:

$$u=\frac{4e_2(\varpi_1)+4e_6(\varpi_2))}{\varpi_1^2+\varpi_2^2+b} \tag{4.12}$$

burada

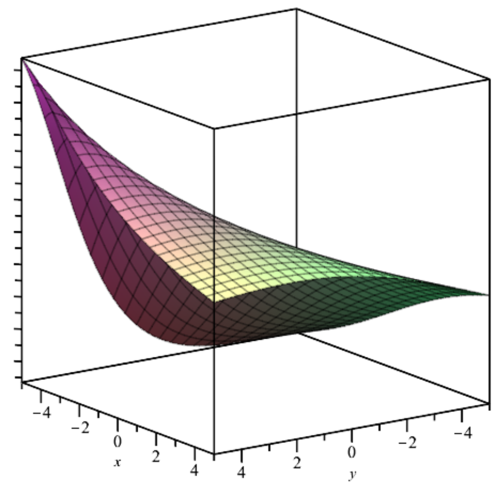
$$\varpi_1=-\frac{6e_6t(e_2e_6-e_4e_8)(e_2^2+e_6^2)}{b(e_2^2-e_4^2)}+xe_2+ze_4$$
$$\varpi_2=\frac{3e_6t(e_2^2-e_4^2-e_6^2+e_8^2)(e_2^2+e_6^2)}{b(e_2^2-e_4^2)}+xe_6-\frac{yb(e_2^2-e_4^2)}{e_6(e_2^2+e_6^2)}+ze_8$$

dır. (4.12) çözümünde parametreler aşağıdaki gibi seçilirse,

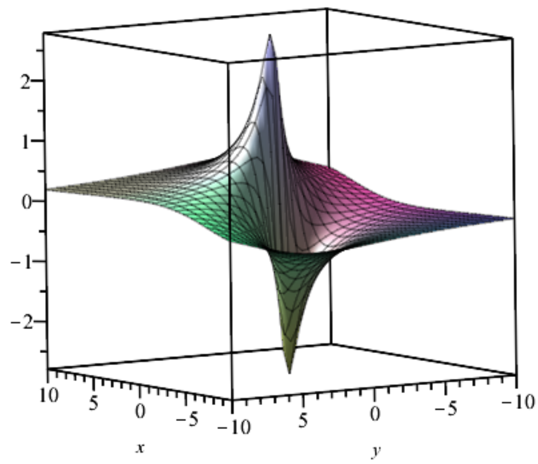
$$e_2=1, e_4=2, e_6=1, e_8=2, b=1$$

YHBD'nin dinamik davranışını ve karakterlerini elde etmek mümkündür. Dalga profille-rini daha iyi gözlemleyebilmek için aralıkları değiştirerek farklı dalga görünümleri elde edebiliriz. Elde edilen sonuçlara göre aşağıda bazı 3 boyutlu grafikler verilmiştir.

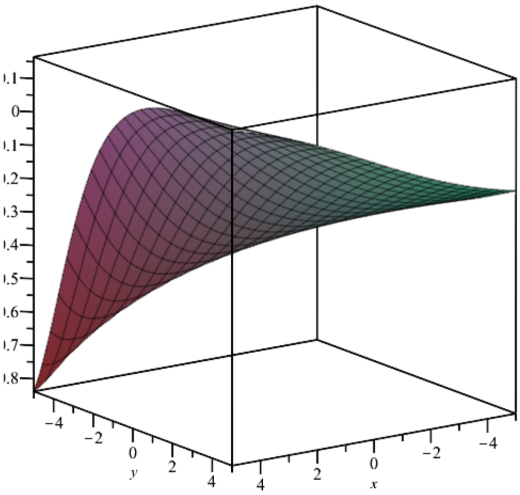
Aşağıdaki Şekil 4.24'de $t=z=-1$, Şekil 4.25'de $t=z=0$ ve şekil 4.26'de $t=z=1$ alınarak çözümlerin 3 boyutlu grafikleri sunulmaktadır. Şekil 4.27'de yoğunluk grafiği takdim edilmiştir. Ayrıca Şekil 4.28 ve Şekil 4.29, (4.12) çözümünün eşyükselti eğrisi grafiklerini sunar.



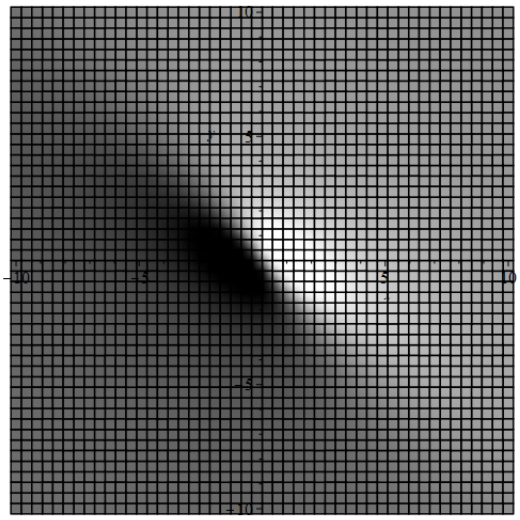
Şekil 4.24. (4.12) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = -1$, $z = -1$)



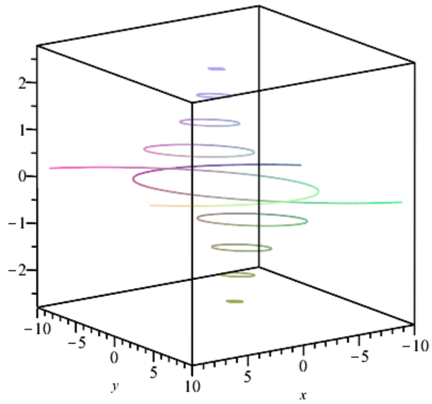
Şekil 4.25. (4.12) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = 0$, $z = 0$)



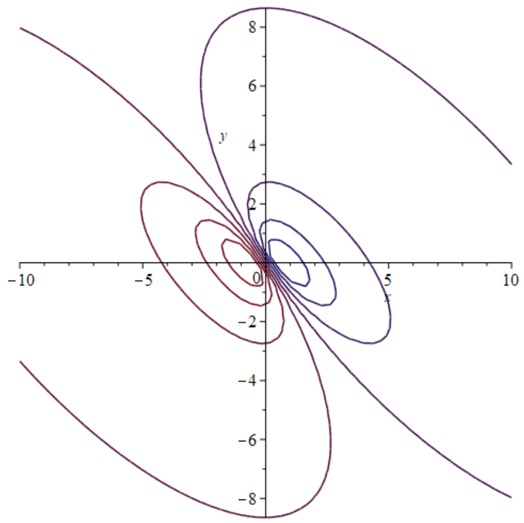
Şekil 4.26. (4.12) çözümü için 3 boyutlu grafik (t = 1, z = 1)



Şekil 4.27. (4.12) çözümü için yoğunluk grafiği (t = 0, z = 0)



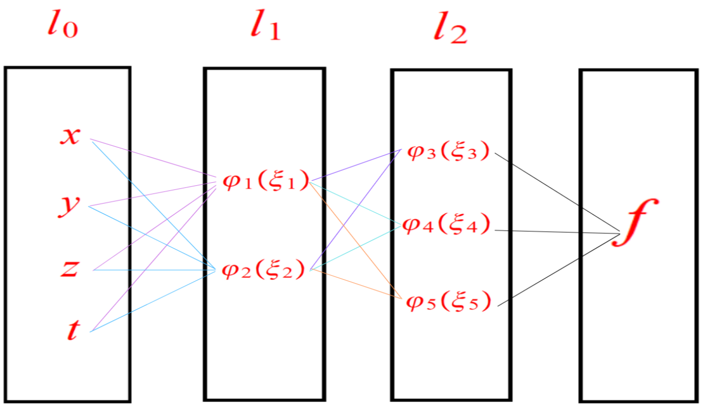
Şekil 4.28. (4.12) çözümü için 3 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği (t = 0, z = 0)



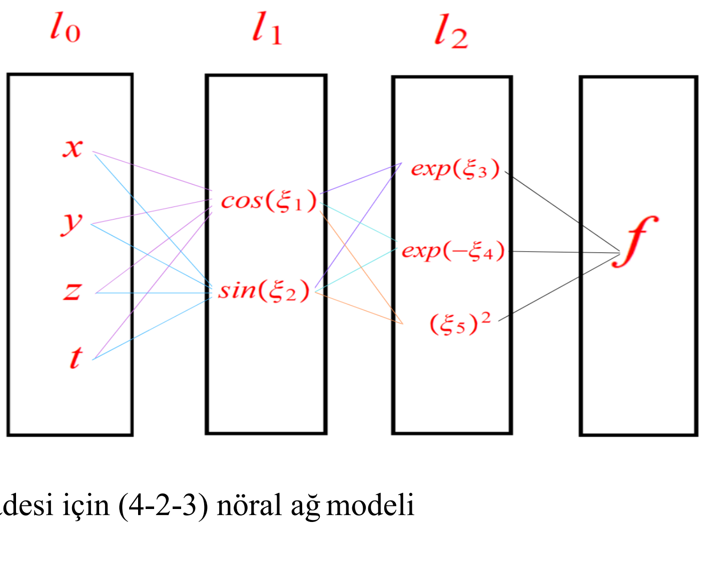
Şekil 4.29. (4.12) çözümü için 2 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği (t = 0, z = 0)

4.2. Model Denklemin Çok Gizli Tabakalı Nöral Ağ Çözüm Formları

Bu kısımda birden çok gizli tabaka bulunması durumu incelenmiştir (bkz Şekil 4.30 ve Şekil 4.31).



Şekil 4.30. (4-2-3) nöral ağ modeli



Şekil 4.31. (4.18) ifadesi için (4-2-3) nöral ağ modeli

4.2.1. (4-3-1) Nöral ağ tipi haydut dalga çözüm formu

Bu çözüm formunda giriş katmanı l_0'da 4 nöron, l_1 gizli katmanında 3 nöron ve l_2 gizli katmanında 1 nöron bulunmaktadır (Zhang, R. F., Li, M. C., Gan, J. Y., Li, Q., ve Lan, Z. Z. 2022, Zeynel, M. ve Yaşar E., 2022). "4-3-1" haydut dalga çözümünün varsayılan aktivasyon fonksiyonu şu şekildedir:

$$f = b_4 + w_{1,u}(\xi_1)^2 + w_{2,u}(\xi_2) + w_{3,u} JacobiCN(\xi_3, \frac{2}{5}) \tag{4.13}$$

burada

$$\begin{aligned} \xi_1 &= tw_{t,1} + xw_{x,1} + yw_{y,1} + zw_{z,1} \\ \xi_2 &= tw_{t,2} + xw_{x,2} + yw_{y,2} + zw_{z,2} \\ \xi_3 &= tw_{t,3} + xw_{x,3} + yw_{y,3} + zw_{z,3} \end{aligned}$$

dır. Burada kullanılan b_4, $w_{i,j}$ $(i = x,y,z,t)$, $(j = 1,2,3)$ ve $w_{i,u}$'ler $(i = 1,2,3)$ gerçel sabitlerdir. (4.13) ifadesi (3.51) denkleminde yerine koyularak ve her bir elementer fonksiyonun katsayıları toplanarak lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Aşağıdaki katsayı çözümleri, bu doğrusal olmayan cebirsel denklem sisteminin Maple yazılımı yardımıyla çözülmesi ile elde edilir.

Durum 1 :

$$w_{3,u} = 0, w_{t,1} = -\frac{6w_{z,1}(w_{x,2} + w_{z,2})}{w_{y,2}}, w_{t,2} = \frac{3(w_{x,2}^2 - w_{z,2}^2)}{w_{y,2}}, w_{x,1} = -w_{z,1}, w_{y,1} = 0. \tag{4.14}$$

Durum 2:

$$\begin{aligned} w_{t,1} &= -\frac{3w_{z,1}^2}{w_{y,1}}, w_{t,2} = \frac{-3w_{z,1}(2w_{y,1}w_{z,2} - w_{y,2}w_{z,1})}{w_{y,1}^2}, w_{t,3} = -\frac{3w_{z,1}^2 w_{y,3}}{w_{y,1}^2}, \\ w_{x,1} &= 0, w_{x,2} = -\frac{w_{y,1}w_{z,2} - w_{y,2}w_{z,1}}{w_{y,1}}, w_{x,3} = 0, w_{z,3} = \frac{w_{y,3}w_{z,1}}{w_{y,1}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Durum 3:

$$
\begin{aligned}
w_{1,u} &= 0, w_{t,2} = \frac{3w_{z,3}(w_{y,2}w_{z,3} - 2w_{y,3}w_{z,2})}{w_{y,3}^2}, \\
w_{t,3} &= -\frac{3w_{z,3}^2}{w_{y,3}}, w_{x,2} = -\frac{w_{y,2}w_{z,3} - w_{y,3}w_{z,2}}{w_{y,3}}, w_{x,3} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Elde edilen katsayı çözümleri önerilen çözüm formuna yerleştirilerek (3+1) boyutlu YHBD'nin analitik çözümü elde edilir. Hesaplamaların benzer olması ve fazla yer kaplamaması endişesinden dolayı sadece durum 1'e karşılık gelen çözümü sunmayı tercih ettik. Yani, (4.13) ifadesi ve (4.14) katsayı çözümleri, (3.49)'da ikame edilirse aşağıdaki analitik çözüm elde edilir:

$$
u = \frac{24w_{y,2}\left(\left(\frac{w_{z,1}^2(x-z)w_{1,u}}{6} + \frac{w_{2,u}w_{x,2}}{12}\right)w_{y,2} + tw_{1,u}w_{z,1}^2(w_{x,2}+w_{z,2})\right)}{yw_{2,u}w_{y,2}^3 + \eta_1 w_{y,2}^2 + 12(w_{x,2}+w_{z,2})\eta_2 t w_{y,2} + 36t^2 w_{1,u}w_{z,1}^2(w_{x,2}+w_{z,2})^2}
\tag{4.17}
$$

burada

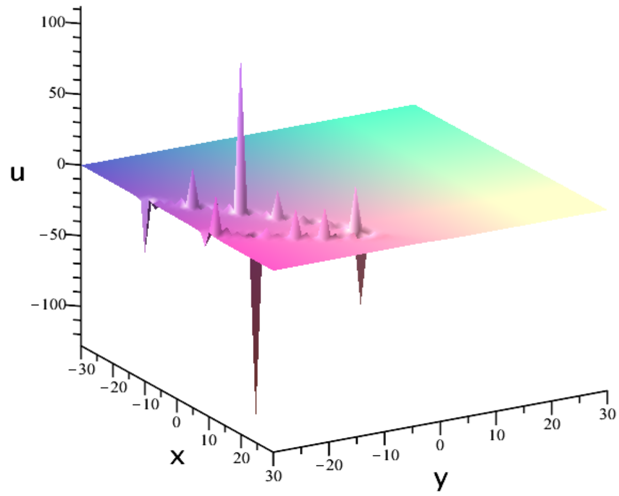
$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= (w_{z,1}^2(x-z)^2 w_{1,u} + w_{2,u}xw_{x,2} + w_{2,u}zw_{z,2} + b_4) \\
\eta_2 &= w_{z,1}^2(x-z)w_{1,u} + \frac{w_{2,u}(w_{x,2} - w_{z,2})}{4}
\end{aligned}
$$

dır. (4.17) çözümünde parametreler aşağıdaki gibi seçilirse

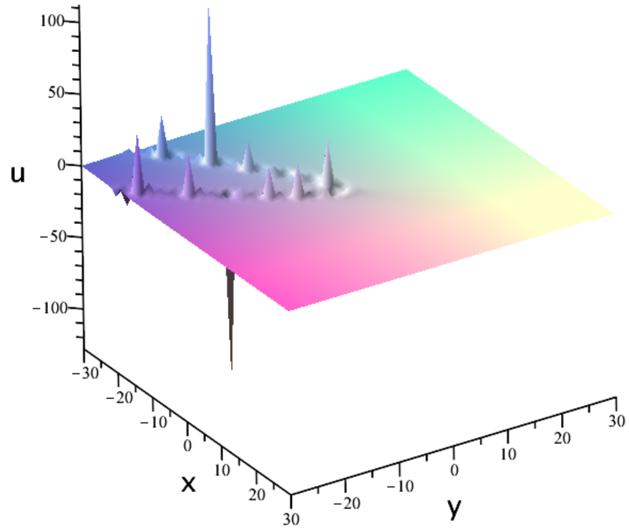
$$
w_{2,u} = 1, w_{z,2} = 1, w_{y,2} = 2, w_{t,2} = 1, w_{x,2} = 1, w_{1,u} = 1, w_{z,1} = 1, b_4 = 1
$$

YHBD'nin dinamik davranışını ve karakterlerini elde etmek mümkündür. Dalga görüntü-sünü daha iyi göstermek için aralıkları değiştirerek farklı dalga görünümleri elde etmek mümkün olacaktır. Elde edilen sonuçlara göre bazı 3 boyutlu grafikler sunulmuştur.

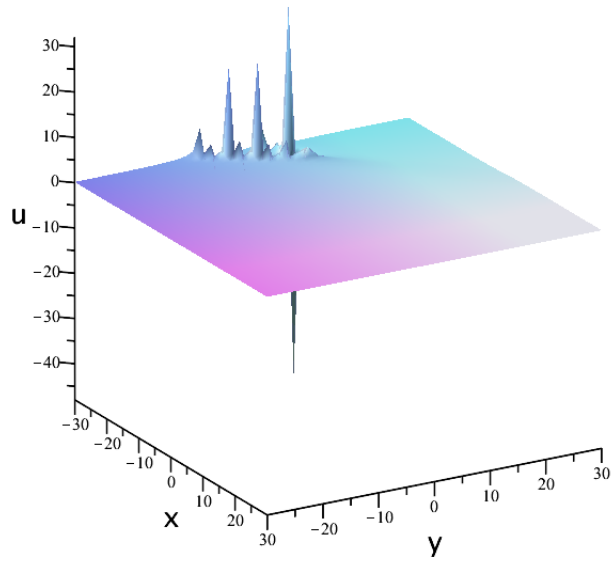
Aşağıdaki Şekil 4.32'de t = −5, z = y, Şekil 4.33'de t = 0, z = y ve Şekil 4.34'de t = 5, z = y alınarak çözümlerin 3 boyutlu grafikleri sunulmaktadır. Şekil 4.35'de yoğunluk grafiği takdim edilmiştir. Ayrıca Şekil 4.36, (4.17) çözümünün eşyükselti eğrisi grafiğini sunar.



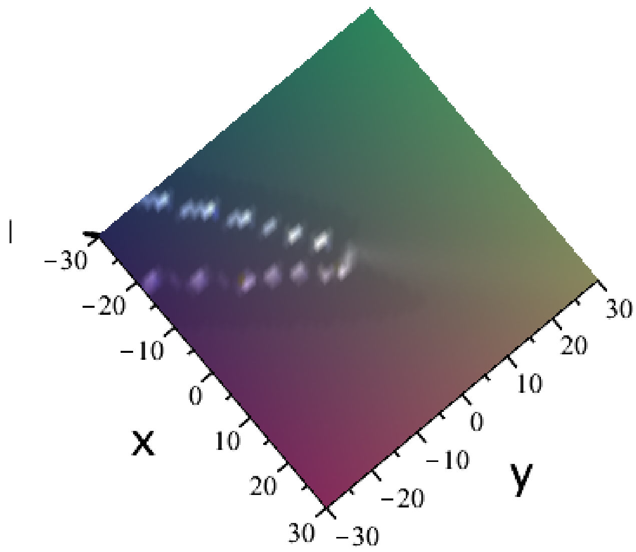
Şekil 4.32. (4.17) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = -5$, $z = y$)



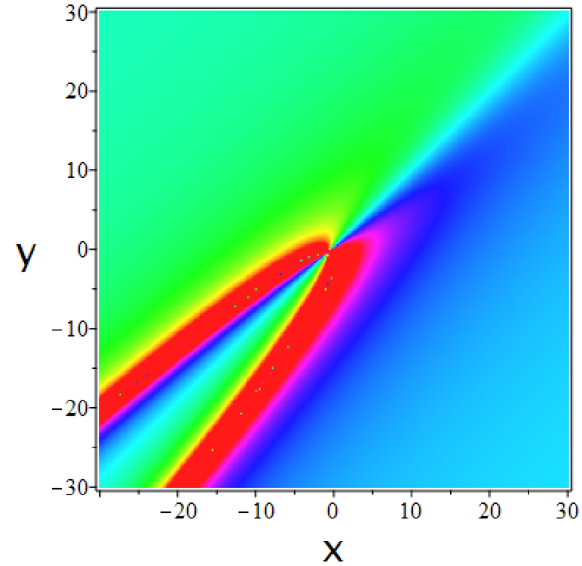
Şekil 4.33. (4.17) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = 0$, $z = y$)



Şekil 4.34. (4.17) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = 5$, $z = y$)



Şekil 4.35. (4.17) çözümü için yoğunluk grafiği ($t = 0$, $z = y$)



Şekil 4.36. (4.17) çözümü için 2 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0$, $z = y$)

4.2.2. (4-2-3) Nöral ağ tipi çözüm formu

Bu çözüm formunda giriş katmanı l_0'da 4 nöron, l_1 gizli katmanında 2 nöron ve l_2 gizli katmanında 3 nöron bulunmaktadır (Zhang, R. F., Li, M. C., & Yin, H. M. 2021). $\phi_1(\xi_1) = \cos(\xi_1)$, $\phi_2(\xi_2) = \sin(\xi_2)$, $\phi_3(\xi_3) = \exp(\xi_3)$, $\phi_4(\xi_4) = \xi_4^2$, $\phi_5(\xi_5) = \xi_5^2$ seçerek "4-2-3" ağ tipinin aktivasyon fonksiyonu şöyledir:

$$f = \omega_{15}\phi_3(\xi_3) + \omega_{16}\phi_4(\xi_4) + \omega_{17}\phi_5(\xi_5) \tag{4.18}$$

burada

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \omega_1 t + \omega_2 x + \omega_3 y + \omega_4 z + b_1,\\
\xi_2 &= \omega_5 t + \omega_6 x + \omega_7 y + \omega_8 z + b_2,\\
\xi_3 &= \omega_9\phi_1(\xi_1) + \omega_{10}\phi_2(\xi_2) + b_3,\\
\xi_4 &= \omega_{11}\phi_1(\xi_1) + \omega_{12}\phi_2(\xi_2) + b_4,\\
\xi_5 &= \omega_{13}\phi_1(\xi_1) + \omega_{14}\phi_2(\xi_2) + b_5,
\end{aligned}$$

dir. Burada kullanılan b_i $(i = 1,2...5)$ ve ω_i'ler $(i = 1,2..17)$ gerçel sabitlerdir. (4.18) ifadesi (3.51) denkleminde yerine koyularak ve her bir elementer fonksiyonun katsayıları toplanarak lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu lineer olmayan cebirsel denklem sistemi maple yazılımı yardımıyla çözümlenerek aşağıdaki katsayı çözümleri üretilmiştir.

Durum 1:

$$\begin{aligned}
b_4 &= 0, b_5 = 0, \omega_5 = -\frac{\omega_7(16\omega_4^6 + 8\omega_1\omega_4^3 + \omega_1^2)}{12\omega_4^2}, \omega_9 = 0, \omega_{11} = 0,\\
\omega_{12} &= 0, \omega_{14} = 0, \omega_2 = \omega_4, \omega_6 = 0, \omega_3 = 0, \omega_8 = -\frac{\omega_7(4\omega_4^3 + \omega_1)}{6\omega_4}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Durum 2:

$$b_5 = 0, \omega_1 = -\frac{3\omega_4^2}{\omega_3}, \omega_{13} = 0, \omega_{10} = 0, \omega_{12} = 0, \omega_2 = 0, \omega_7 = 0$$

Durum 3:

$$\begin{aligned}
b_4 &= 0, \omega_1 = -\frac{3\omega_4^2}{\omega_3}, \omega_5 = \frac{2\omega_8(2\omega_3\omega_8^2 - 3\omega_4)}{\omega_3},\\
\omega_{11} &= 0, \omega_{13} = 0, \omega_{10} = 0, \omega_2 = 0, \omega_6 = -\omega_8, \omega_7 = 0
\end{aligned}$$

(3+1) boyutlu YHBD'nin analitik çözümü, elde edilen katsayılı çözümün önerilen çözüm formuna eklenmesiyle sağlanır. Yani, (4.18) ifadesi ve (4.19) katsayı çözümleri, (3.49)'da ikame edilirse aşağıdaki analitik çözüm elde edilir:

$$u = -\frac{4\omega_{17}\omega_{13}^2\omega_4 cos(\eta_1)sin(\eta_1)}{\omega_{15}e^{b_3+\omega_{10}sin(\eta_2)} + \omega_{17}\omega_{13}^2 cos(\eta_1)^2} \tag{4.20}$$

burada

$$\eta_1 = (x+z)\omega_4 + \omega_1 t + b_1,$$

$$\eta_2 = \frac{(-16\omega_4^6 t - 8\omega_1 t\omega_4^3 - 8z\omega_4^4 - t\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_4 z + 12y\omega_4^2)\omega_7 + 12b_2\omega_4^2}{12\omega_4^2}$$

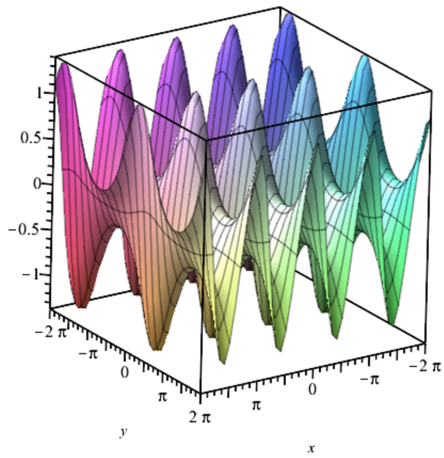
dir. (4.20) çözümünde parametreler aşağıdaki gibi seçilirse

$$\omega_{17} = \omega_{13} = \omega_4 = \omega_1 = \omega_{10} = \omega_7 = \omega_{15} = b_1 = b_3 = b_2 = 1$$

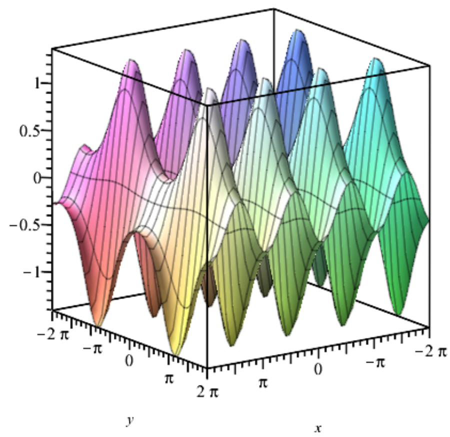
modelin dinamik davranışını ve karakterlerini elde etmek mümkündür. Üç boyutlu grafikler, kontur grafikleri ve yoğunluk grafikleri aracılığıyla, (4.20) denkleminin parlak ve karanlık solitonlarını görebiliriz.

Dalga görüntüsünü daha iyi gözlemleyebilmek için aralıkları değiştirerek farklı dalga görünümleri elde edebiliriz. Elde edilen sonuçlara göre aşağıda bazı 3D grafikler sunulmuştur.

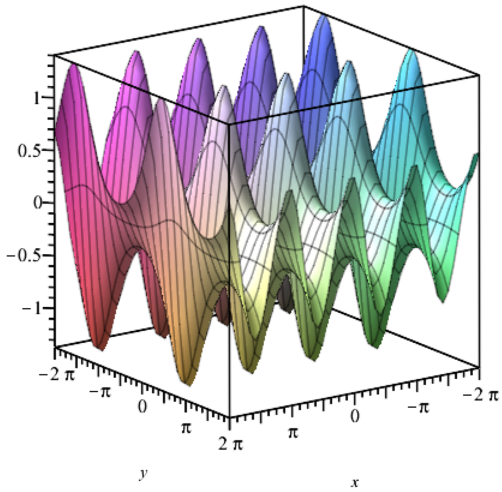
Aşağıdaki Şekil 14.37'de $t = z = -1$, Şekil 4.38'de $t = z = 0$ ve Şekil 4.39'da $t = z = 10$ alınarak çözümlerin 3 boyutlu grafikleri sunulmaktadır. Şekil 4.40'da yoğunluk grafiği takdim edilmiştir. Ayrıca Şekil 4.41 ve Şekil 4.42, (4.20) çözümünün eşyükselti eğrisi grafiğini sunar.



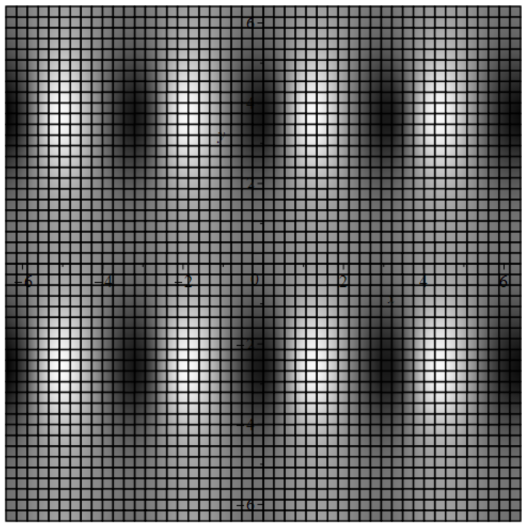
Şekil 4.37. (4.20) çözümü için 3 boyutlu grafik $(t=-1, z=-1)$



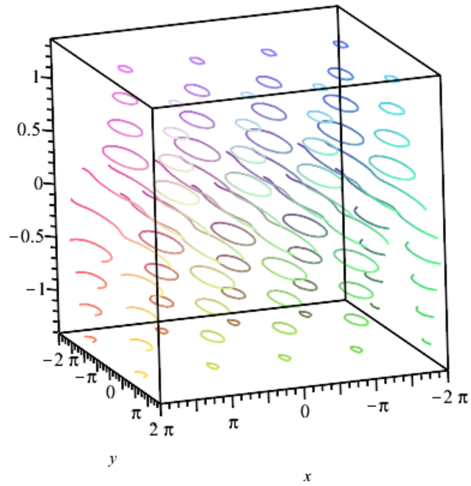
Şekil 4.38. (4.20) çözümü için 3 boyutlu grafik $(t=0, z=0)$



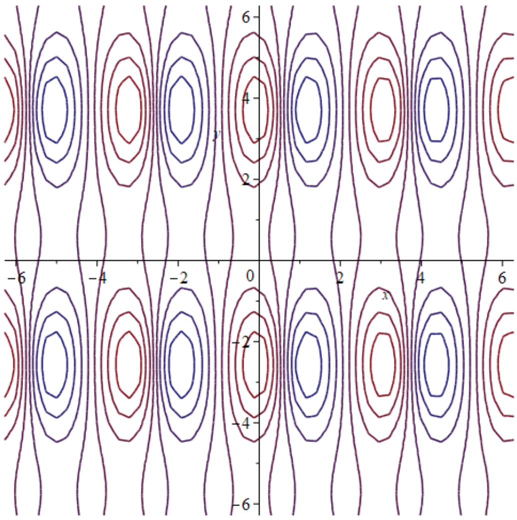
Şekil 4.39. (4.20) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = 10, z = 10$)



Şekil 4.40. (4.20) çözümü için yoğunluk grafiği ($t = 0, z = 0$)



Şekil 4.41. (4.20) çözümü için 3 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0, z = 0$)



Şekil 4.42. (4.20) çözümü için 2 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0, z = 0$)

4.2.3. (4-2-2) Nöral ağ tipi çözüm formu

Bu çözüm formunda giriş katmanı l_0'da 4, gizli katman l_1'de 2 ve l_2'de 2 nöron bulun-maktadır. Varsayılan çözüm profili aşağıdaki gibidir:

$$f = \mu_1 \phi_3(\Phi_3) + \mu_{12} \phi_4(\Phi_4) + b \tag{4.21}$$

burada

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= t\mu_3 + x\mu_4 + y\mu_5 + z\mu_6, \\
\Phi_2 &= t\mu_8 + x\mu_9 + y\mu_{10} + z\mu_{11}, \\
\Phi_3 &= \mu_2\phi_1(\Phi_1) + \mu_7\phi_2(\Phi_2), \\
\Phi_4 &= \mu_{13}\phi_1(\Phi_1) + \mu_{14}\phi_2(\Phi_2)
\end{aligned}
$$

dir. $\phi_1(\Phi_1) = \Phi_1^2,\ \phi_2(\Phi_2) = \Phi_2^2,\ \phi_3(\Phi_3) = e^{(-\Phi_3)}$ ve $\phi_4(\Phi_4) = e^{(\Phi_4)}$, seçilirse "4-2-2" model çözümü şu şekilde elde edilir:

$$
\begin{aligned}
f &= \mu_1 e^{-\mu_2(t\mu_3+x\mu_4+y\mu_5+z\mu_6)^2-\mu_7(t\mu_8+x\mu_9+y\mu_{10}+z\mu_{11})} \\
&\quad + \mu_{12} e^{\mu_{13}(t\mu_3+x\mu_4+y\mu_5+z\mu_6)^2+\mu_{14}(t\mu_8+x\mu_9+y\mu_{10}+z\mu_{11})} + b
\end{aligned}
$$

Burada kullanılan b ve μ_i'ler (i = 1,2..14) gerçel sabitlerdir. (4.21) ifadesi (3.51) denkleminde yerine koyularak ve her bir elementer fonksiyonun katsayıları toplanarak lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu lineer olmayan cebirsel denklem sistemi maple yazılımı yardımıyla çözülerek aşağıdaki katsayı çözümleri bulunur.

$$
\begin{aligned}
\mu_{13} &= 0, \mu_{14} = -\mu_7, \mu_3 = 0, \mu_4 = 0, \\
\mu_5 &= 0, \mu_6 = 0, \mu_8 = \frac{\mu_{10}\mu_7^2\mu_9^3 - 3\mu_{11}^2 + 3\mu_9^2}{\mu_{10}}
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Elde edilen katsayı çözümü önerilen çözüm formuna konularak (3+1) boyutlu YHBD'nin analitik çözümü elde edilir. Yani, (4.21) ifadesi ve (4.22) katsayı çözümleri, (3.49)'da ikame edilirse aşağıdaki analitik çözüm elde edilir:

$$
u = \frac{-2e^{-\Theta_1}\mu_7\mu_9(\mu_1+\mu_{12})}{(\mu_1+\mu_{12})e^{\Theta_1}+b} \tag{4.23}
$$

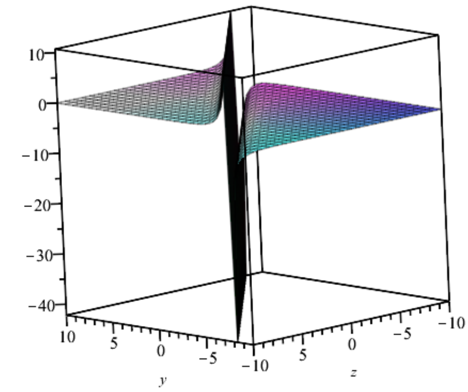
burada

$$
\Theta_1 = \frac{(y\mu_{10}^2 + (\mu_7^2\mu_9^3 t + \mu_{11}z + \mu_9 x)\mu_{10} + 3\mu_9^2 t - 3t\mu_{11}^2)\mu_7}{\mu_{10}}
$$

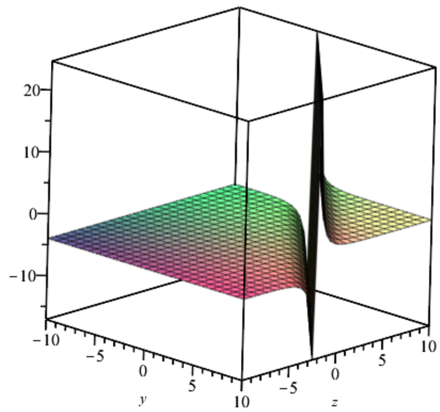
dır. (4.23) çözümünde parametreler aşağıdaki gibi seçilirse

$$\mu_1 = 1{,}5,\ \mu_7 = 1,\ \mu_9 = 2,\ \mu_{10} = 1,\ \mu_{11} = 1,\ \mu_{12} = 1,\ b = -1$$

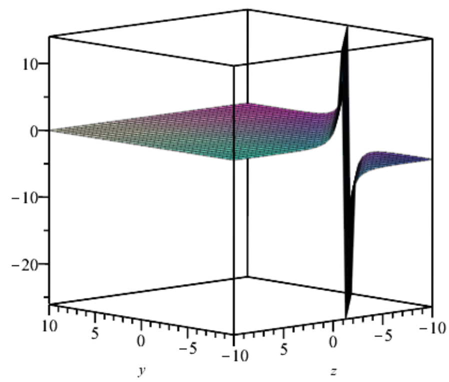
denklemin dinamik davranışını ve karakterlerini elde etmek mümkündür. Dalga örüntüsünü daha iyi gözlemleyebilmek için aralıkları değiştirerek farklı dalga görünümleri elde edebiliriz. Elde edilen sonuçlara göre bazı 3 boyutlu grafikler elde edilmektedir. Aşağıdaki Şekil 4.43'de $t = -0.05$, $x = 0$, Şekil 4.44'de $t = -0.05$, $x = -3$ ve Şekil 4.45'de $t = 0.8$, $x = -0.8$ alınarak çözümlerin 3 boyutlu grafikleri sunulmaktadır. Şekil 4.46'da yoğunluk grafiği takdim edilmiştir. Ayrıca Şekil 4.47 ve Şekil 4.48, (4.23) çözümünün eşyükselti eğrisi grafiğini sunar.



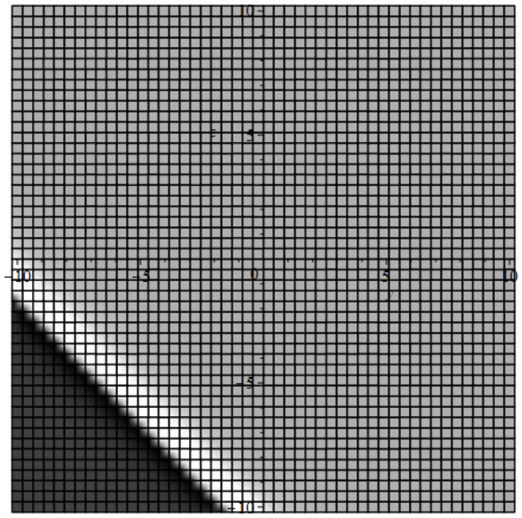
Şekil 4.43. (4.23) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = -0{,}05, x = 0$)



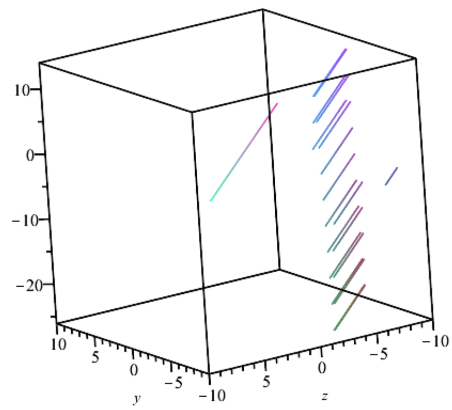
Şekil 4.44. (4.23) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = -0{,}05, x = -3$)



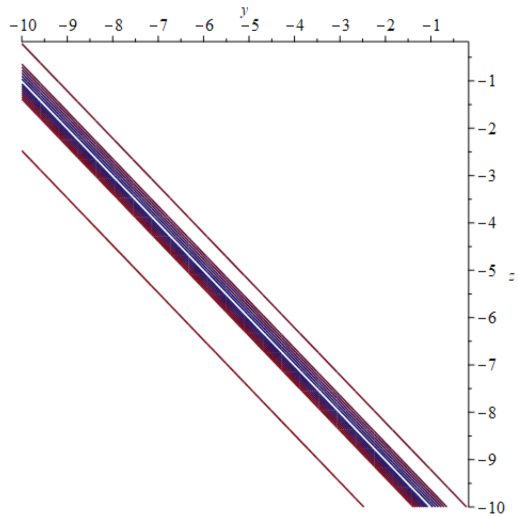
Şekil 4.45. (4.23) çözümü için 3 boyutlu grafik ($t = 0{,}08, x = -0.8$)



Şekil 4.46. (4.23) çözümü için yoğunluk grafiği ($t = 0{,}8, x = -0{,}8$)



Şekil 4.47. (4.23) çözümü için 3 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0{,}8, x = -0{,}8$)



Şekil 4.48. (4.) çözümü için 2 boyutlu eşyükselti eğrisi grafiği ($t = 0{,}8, x = -0{,}8$)

4.3. Genişletilmiş Sadawa-Kotera Denklemi için Basitleştirilmiş Hirota Metodu

Bu alt bölümde, genişletilmiş Sadawa-Kotera (SK) denkleminin 1, 2, 3 ve N-soliton çözümleri oluşturulmuştur. (Wazwaz A.M., 2016). Soliton çözümleri oluşturulacak SK denklemi şu şekildedir:

$$u_t + u_x + \alpha(6uu_x + u_{3x}) + \alpha^2\beta(45u^2u_x + 15u_xu_{2x} + 15uu_{3x} + u_{5x}) = 0 \qquad (4.24)$$

Saçılım bağıntısını belirlemek için denklem (4.24)'ün lineer terimlerinde

$$u(x,t) = \exp(\theta_i),\ \theta_i = k_ix - c_it \qquad (4.25)$$

yazılır. Buradan elde edilen saçılım bağıntısı şu şekildedir:

$$c_i = k_i + \alpha k_i^3 + \alpha^2\beta k_i^5\ , i = 1,2,3. \qquad (4.26)$$

Sonuç olarak elde edilen faz değişkenleri

$$\theta_i = k_ix - (k_i + \alpha k_i^3 + \alpha^2\beta k_i^5)t \qquad (4.27)$$

halini alır. Tek soliton çözümü belirlemek için

$$u = R(\ln(f(x))_{xx} \tag{4.28}$$

cole hopf dönüşümü kullanılır. Burada

$$f(x,t) = 1 + \exp(k_1 x - (k_1 + \alpha k_1^3 + \alpha^2 \beta k_1^5)t) \tag{4.29}$$

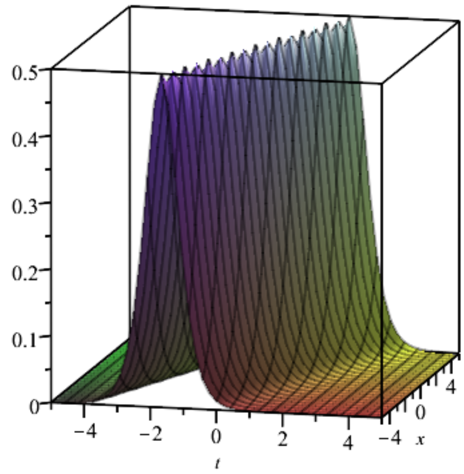
formundadır. (4.29) ve (4.28), (4.24)' de yazılırsa $R = 2$ dönüşüm katsayısı elde edilir. Elde edilen dönüşüm ile beraber

$$u(x,t) = \frac{2k_1^2 \exp(-k_1((\alpha^2 \beta k_1^4 + \alpha k_1^2 + 1)t - x))}{(1 + \exp(-k_1((\alpha^2 \beta k_1^4 + \alpha k_1^2 + 1)t - x)))^2} \tag{4.30}$$

çözüm grafiğini gözlemlemek amacıyla $k_1 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ olarak seçilirse SK denkleminin 1-soliton çözümü şu şekildedir:

$$u(x,t) = \frac{2\exp(-3t + x)}{(1 + \exp(-3t + x))^2} \tag{4.31}$$

Aşağıdaki şekil 4.49 elde edilen çözüm için $-5 \leq x \leq 5$ ve $-5 \leq t \leq 5$ aralığındaki grafiği göstermektedir.



Şekil 4.49. (4.31) çözümü için 1-soliton çözümü

2-soliton çözümü için yardımcı fonksiyon

$$f(x,t) = 1 + \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + A(1,2)\exp(\theta_1 + \theta_2) \qquad (4.32)$$

yapısındadır. Burada θ_i, $(i = 1,2,3)$ faz değişkenidir. $A(1,2)$ ise belirlenecek olan faz kaymasıdır. (4.32) ve (4.28), (4.24)' de yazılırsa elde edilen faz kayması

$$A(1,2) = \frac{(\alpha\beta k_1^2 - \alpha\beta k_1 k_2 + \alpha\beta k_2^2 + \frac{3}{5})(k_1 - k_2)^2}{(\alpha\beta k_1^2 + \alpha\beta k_1 k_2 + \alpha\beta k_2^2 + \frac{3}{5})(k_1 + k_2)^2} \qquad (4.33)$$

olarak elde edilir. Faz kayması$(\alpha\beta k_i^2 + \alpha\beta k_i k_j + \alpha\beta k_j^2 + \frac{3}{5})(k_i + k_j)^2 \neq 0$ olması şartıyla

$$A(i,j) = \frac{(\alpha\beta k_i^2 - \alpha\beta k_i k_j + \alpha\beta k_j^2 + \frac{3}{5})(k_i - k_j)^2}{(\alpha\beta k_i^2 + \alpha\beta k_i k_j + \alpha\beta k_j^2 + \frac{3}{5})(k_i + k_j)^2}, \quad 1 \leq i \leq j \leq 3 \qquad (4.34)$$

biçiminde genelleştirilir. Faz kaymalarının α ve β parametrelerinden etkilendiği açıktır. Elde edilen faz kaymaları, standart SK denkleminin faz kaymalarından farklıdır. (4.32) ve (4.33), (4.24)' de yerine yazılırsa SK denkleminin 2-soliton çözümü şu şekilde elde edilir:

$$u(x,t) = \frac{2M_1M_2(k_1-k_2)^2 + M_3M_4M_1(k_1+k_2)^2}{(M_1M_5+M_1M_6)^2}. \tag{4.35}$$

Burada

$$M_1 = \alpha\beta k_1^4 + (4\alpha\beta k_2^2 + \frac{3}{5})k_1^2 + \alpha\beta k_2^4 + \frac{3k_2^2}{5},$$

$$M_2 = \exp\Big(((-\beta k_1^5 - \beta k_2^5)\alpha^2 + (-k_1^3 - k_2^3)\alpha - k_1 - k_2)t + x(k_1+k_2)\Big),$$

$$M_3 = \alpha\beta k_1^2 + \alpha\beta k_1k_2 + \alpha\beta k_2^2 + \frac{3}{5},$$

$$M_4 = k_1^2\exp(-((\alpha^2\beta k_1^4 + \alpha k_1^2 + 1)t - x)k_1) + k_2^2\exp(-((\alpha^2\beta k_2^4 + \alpha k_2^2 + 1)t - x)k_2),$$

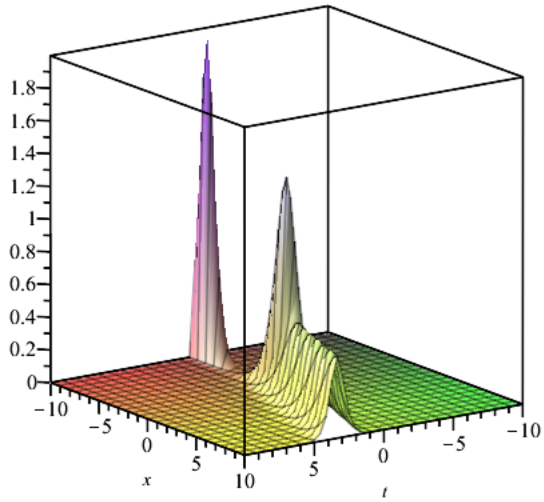
$$M_5 = \exp\left(-((\alpha^2\beta k_1^4 + \alpha k_1^2 + 1)t - x)k_1\right),$$

$$M_6 = \exp\left((-((\alpha^2\beta k_2^4 + \alpha k_2^2 + 1)t - x)k_2) + \frac{(k_1+k_2)^2(\alpha\beta k_1^2 + \alpha\beta k_1k_2 + \alpha\beta k_2^2 + \frac{3}{5})}{2}\right)$$

şeklindedir. Çözüm grafiğini gözlemlemek amacıyla $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ olarak seçilirse SK denkleminin 2-soliton çözümü şu şekildedir:

$$u(x,t) = \frac{(800\exp(-45t+3x) + 760\exp(-3t+x) + 3040\exp(-42t+2x))}{(20\exp(-3t+x) + 20\exp(-42t+2x) + 19)^2}. \tag{4.36}$$

Aşağıdaki şekil 4.50 elde edilen çözüm için $-10 \le x \le 10$ ve $-10 \le t \le 10$ aralığındaki grafiği göstermektedir.



Şekil 4.50. (4.36) çözümü için 2-soliton çözümü

3-soliton çözümü için yardımcı fonksiyon

$$f(x,t) = 1 + \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3) + A(1,2)\exp(\theta_1+\theta_2) + \qquad (4.37)$$
$$A(1,3)\exp(\theta_1+\theta_3) + A(2,3)\exp(\theta_2+\theta_3) +$$
$$B(1,2,3)\exp(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

biçimindedir. (4.37) ve (4.28), (4.24)' de yazılırsa $B(1,2,3) = A(1,2)A(1,3)A(2,3)$ elde edilir. Burada $A(i,j)$ ise

$$A(1,2) = \frac{(\alpha\beta k_1^2 - \alpha\beta k_1 k_2 + \alpha\beta k_2^2 + \frac{3}{5})(k_1-k_2)^2}{(\alpha\beta k_1^2 + \alpha\beta k_1 k_2 + \alpha\beta k_2^2 + \frac{3}{5})(k_1+k_2)^2}$$

$$A(1,3) = \frac{(\alpha\beta k_1^2 - \alpha\beta k_1 k_3 + \alpha\beta k_3^2 + \frac{3}{5})(k_1-k_3)^2}{(\alpha\beta k_1^2 + \alpha\beta k_1 k_3 + \alpha\beta k_3^2 + \frac{3}{5})(k_1+k_3)^2} \qquad (4.38)$$

$$A(2,3) = \frac{(\alpha\beta k_2^2 - \alpha\beta k_2 k_3 + \alpha\beta k_3^2 + \frac{3}{5})(k_2-k_3)^2}{(\alpha\beta k_2^2 + \alpha\beta k_2 k_3 + \alpha\beta k_3^2 + \frac{3}{5})(k_2+k_3)^2}$$

şeklindedir. Faz kaymalarının α ve β parametrelerinden etkilendiği açıktır. Elde edilen faz kaymaları, standart SK denkleminin faz kaymalarından farklıdır. (4.37) ve (4.38), (4.24)' de yazılırsa SK denkleminin 3-soliton çözümü şu şekilde elde edilir:

$$u(x,t) = 2\left(\frac{E_1 + E_2 + E_{1,2} + E_{1,3} + E_{2,3}}{\chi_1} - \frac{(E_4 + E_2 + \frac{E_{1,2}}{(k_1+k_2)^2} + \frac{E_{1,3}}{(k_1+k_3)^2} + \frac{E_{2,3}}{(k_2+k_3)^2})^2}{(\chi_1)^2}\right). \tag{4.39}$$

Burada

$$\chi_1 = 1 + E_3 + \frac{E_2}{(k_1+k_2+k_3)^2} + \frac{E_{1,2}}{(k_1+k_2)^2} + \frac{E_{1,3}}{(k_1+k_3)^2} + \frac{E_{2,3}}{(k_2+k_3)^2}$$

$$E_1 = k_1^2 \exp(\theta_1) + k_2^2 \exp(\theta_2) + k_3^2 \exp(\theta_3)$$

$$E_2 = \frac{\rho_1\rho_2\rho_3(k_1-k_2)^2(k_1-k_3)^2(k_2-k_3)^2(k_1+k_2+k_3)^2 \exp(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}{(k_1+k_2)^2(k_1+k_3)^2(k_2+k_3)^2}$$

$$E_3 = \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2) + \exp(\theta_3)$$

$$E_4 = k_1 \exp(\theta_1) + k_2 \exp(\theta_2) + k_3 \exp(\theta_3)$$

$$E_{1,2} = \rho_1(k_1-k_2)^2 \exp(\theta_1+\theta_2)$$

$$E_{1,3} = \rho_2(k_1-k_3)^2 \exp(\theta_1+\theta_3)$$

$$E_{2,3}=\rho_3(k_2-k_3)^2\exp(\theta_2+\theta_3)$$

$$\rho_1=\frac{5\alpha\beta(k_1^2-k_1k_2+k_2^2)+3}{5\alpha\beta(k_1^2+k_1k_2+k_2^2)+3}$$

$$\rho_2=\frac{5\alpha\beta(k_1^2-k_1k_3+k_3^2)+3}{5\alpha\beta(k_1^2+k_1k_3+k_3^2)+3}$$

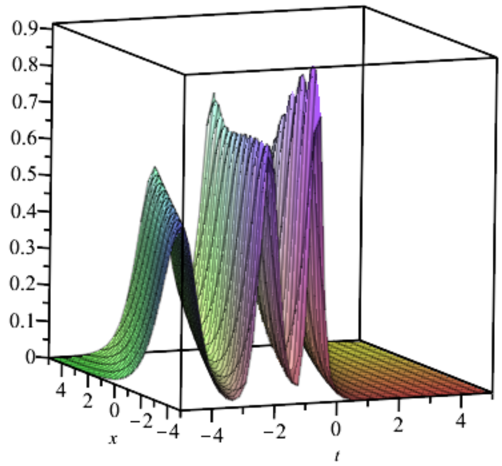
$$\rho_3=\frac{5\alpha\beta(k_2^2-k_2k_3+k_3^2)+3}{5\alpha\beta(k_2^2+k_2k_3+k_3^2)+3}$$

$$\theta_1=k_1x-t(\alpha^2\beta k_1^5+\alpha k_1^3+k_1)$$

$$\theta_2=k_2x-t(\alpha^2\beta k_2^5+\alpha k_2^3+k_2)$$

$$\theta_3=k_3x-t(\alpha^2\beta k_3^5+\alpha k_3^3+k_3)$$

şeklindedir. Çözüm grafiğini gözlemlemek amacıyla $k_1=1,\ k_2=1.2,\ k_3=1.4,\ \alpha=1,\ \beta=1$ olarak seçilir. $-5\leq x\leq 5$ ve $-5\leq t\leq 5$ aralığında SK denkleminin 3-soliton grafiği elde edilir.



Şekil 4.51. (4.39) çözümü için 3-soliton çözümü

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, oluşum tipi denklemlerin Hirota bilineer metodu ile tam çözümleri araştırılmıştır. Bu araştırma için (3+1) boyutlu YHBD ele alınmıştır.
Tez çalışmasının üçüncü bölümünde KdV denklemi için 1-2-3-*N* soliton çözümleri tekrar gözden geçirilmiştir. Yine üçüncü bölümde lineer terkip prensibinin KP ve BKP denklemlerine uygulanışı sunulmuştur. Bunların yanı sıra BNAM ve basitleştirilmiş Hirota metodu takdim edilmiştir.
Tez çalışmasının dördüncü bölümünde BNAM, (3+1) boyutlu YHBD'ye uygulanmıştır. Mevcut yöntemin literatürdeki yaklaşımlara göre en büyük avantajı, sıradan test fonksiyonları yerine bazı çok katmanlı derin aktivasyon fonksiyonlarının oluşturulabilmesidir. Polinom fonksiyonların, $exp(\xi)$, $sin(\xi)$, $cos(\xi)$, $tanh(\xi)$, $cosh(\xi)$, $JacobiCN(\xi, 2/5)$ ve karelerini içeren çeşitli formlarda aktivasyon fonksiyonları oluşturuldu. Çalışmada ele alınan bu yeni aktivasyon fonksiyonlarının diğer oluşum tipi denklemlere de uygulanabileceği aşikâr bir gerçektir. YHBD'nin tüm çözüm biçimlerinin 3 boyutlu, eşyükselti eğrisi, yoğunluk ve 2 boyutlu grafikleri çizilmiş, karakterleri ve dinamik davranışları sunulmuştur.
BNAM, Hirota'nın bilineer yaklaşımına ve sinir ağı modeline odaklanan oluşum tipi denklemlerin tam çözümlerini açıklamaya yönelik en son yaklaşımdır. Bu yaklaşım, periyodik çözüm, üç dalga çözümü, parlak, karanlık soliton çözümleri, lump çözümü, lump ile çift üstel fonksiyon veya hiperbolik tanjant fonksiyonu arasındaki etkileşim çözümü, Jacobi eliptik fonksiyonları, breather çözümleri, breather tipi kink soliton çözümü, yumru tipi çözümler, rasyonel fonksiyon çözümleri gibi çeşitli tam test fonksiyonları yaklaşımlarını etkili bir şekilde tasarlayabilir.

Bu şekilde, oşinografi, deniz mühendisliği, doğrusal olmayan optik, hidrodinamik, nükleer, fizik gibi doğrusal olmayan bilim alanlarındaki zorlu fiziksel olayların temel dalga yapılarını tanımlamak için kullanılabilecek çeşitli tam dalga çözümleri üretilmiştir. Çalışmada BNAM ile modelin tam çözüm profilleri gözlemlenmiştir. Elde edilen çözüm şekillerinden biri haydut dalgalar şeklindedir. Elde edilen çözüm biçimlerinin kısaca fiziksel anlamı için çok iyi bilinmesine rağmen aşağıdaki hususlar dikkate alınmalıdır. Araştırmacılar tarafından ’en yüksek fırtına dalgaları’ olarak adlandırılan haydut dalgalar, çevreleyen dalgaların iki katından daha büyük olan, öngörülemez olan ve genellikle ikna rüzgâr ve dalgalar dışındaki yönlerden aniden gelen dalgalardır. Elde edilen diğer çözüm profilleri parlak soliton ve periyodik çözüm biçimleridir. Parlak soliton, karşılıklı bir dalga genliğinde geçici bir artış oluşturan bölgesel bir yüzey solitonudur. Periyodik soliton çözümü uzamsal olarak lokalizedir ve N-soliton çözümü olarak da adlandırılan zaman periyodik, N farklı solitonun üst üste binmesi olarak düşünülebilir. Bu tür dalga çözümleri, açık literatürde oldukça kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır. BNAM, akışkanlar dinamiği, doğrusal olmayan optik, malzeme bilimleri, ısı transferi, kuantum elektroniği gibi uygulamalı bilimlerdeki pek çok büyüleyici doğrusal olmayan olayı izah etmek için kullanılabilir. Yine dördüncü bölümün son kısmında basitleştirilmiş Hirota metodu kullanılarak genişletilmiş SK denkleminin 1-2-3 soliton çözümleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Ablowitz, M. J., & Segur, H. (1981). *Solitons and the inverse scattering transform.* Soci-ety for Industrial and Applied Mathematics.

Çağlıyan, M., Ç Çelebi, O. (2010). *Kısmi Çiferensiyel Çenklemler.* Dora Çayınları.

Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M., & Miwa, T. (1981). KP hierarchies of orthogonal and symplectic type–Transformation groups for soliton equations VI–. *Journal of the Physi-cal Society of Japan, 50(11),* 3813-3818.

Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M., & Miwa, T. (1982). Transformation groups for soli-ton equations: IV. A new hierarchy of soliton equations of KP-type. *Physica D: Nonlinear Phenomena, 4(3),* 343-365.

Fan, E. (2009). Quasi-periodic waves and an asymptotic property for the asymmetrical Nizhnik-Novikov-Veselov equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoreti-cal, 42(9)*, 095206.

Fan, E. (2010). Supersymmetric KdV-Sawada-Kotera-Ramani equation and its quasi-periodic wave solutions. *Physics Letters A, 374(5),* 744-749.

Fordy, A. P. (Ed.). (1990). *Soliton theory: a survey of results.* Manchester University Press.

Hirota, R. (1971). Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisi-ons of solitons. *Physical Review Letters, 27(18),* 1192.

Hirota, R. (2004). *The direct method in soliton theory* (No. 155). Cambridge University Press.

Hietarinta, J. (2005). Hirota's bilinear method and soliton solutions. *Physics AUC, 15(1),* 31-37.

Hereman, W., & Nuseir, A. (1997). Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation, 43(1),* 13-27.

Gao, L. N., Zhao, X. Y., Zi, Y. Y., Yu, J., & Lü, X. (2016). Resonant behavior of multiple wave solutions to a Hirota bilinear equation. *Computers & Mathematics with Applicati-ons, 72(5),* 1225-1229..

Musette, M. (1999). Painleve analysis for nonlinear partial differential equations. *The Pa-inleve Property: One Century Later,* 517-572.

Ma, W. X. (2022). Soliton solutions by means of Hirota bilinear forms. *Partial Differen-tial Equations in Applied Mathematics, 5,* 100220.

Ma, W. X., Zhang, Y., Tang, Y., & Tu, J. (2012). Hirota bilinear equations with linear subspaces of solutions. *Applied Mathematics and Computation, 218(13),* 7174-7183.

Ma, W. X., & Fan, E. (2011). Linear superposition principle applying to Hirota bilinear equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(4), 950-959.

Ma, W. X., Zhou, R., & Gao, L. (2009). Exact one-periodic and two-periodic wave solutions to Hirota bilinear equations in (2+ 1) dimensions. *Modern Physics Letters A, 24(21),* 1677-1688.

Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie groups to differential equations* (Vol. 107). Springer Science & Business Media.

Pekcan, A. (2005). *The Hirota direct method (Doktora Tezi,* Bilkent Üniversitesi (Türkiye)).

Sezer, M,, Daşçıoğlu, A. 2016. Diferansiyel Denklemler 1: Teori ve Problem Çözümleri. Dora Yayıncılık, Türkiye, 292 s.

Shen, J. L., & Wu, X. Y. (2021). Periodic-soliton and periodic-type solutions of the (3+ 1)-dimensional Boiti–Leon–Manna–Pempinelli equation by using BNNM. *Nonlinear Dynamics, 106(1), 831-840.*

Strauss, W. A. (2007). *Partial differential equations: An introduction.* John Wiley & Sons.

Yıldırım, Y. (2019). *Oluşum Tipi Lineer Olmayan Parça Türevli Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri* (Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi (Türkiye)).

Zeynel, M., & Yaşar, E. (2022). A new (3+ 1) dimensional Hirota bilinear equation: Periodic, rogue, bright and dark wave solutions by bilinear neural network method. *Journal of Ocean Engineering and Science,* 2022 (in press). doi:10.1016/j.joes.2022.04.017

Zhang, R. F., Li, M. C., Gan, J. Y., Li, Q., & Lan, Z. Z. (2022). Novel trial functions and rogue waves of generalized breaking soliton equation via bilinear neural network method. *Chaos, Solitons & Fractals, 154,* 111692.

Zhang, R. F., Li, M. C., & Yin, H. M. (2021). Rogue wave solutions and the bright and dark solitons of the (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation. *Nonlinear Dynamics, 103,* 1071-1079.

Zhang, R. F., Li, M. C., Albishari, M., Zheng, F. C., & Lan, Z. Z. (2021). Generalized lump solutions, classical lump solutions and rogue waves of the (2+ 1)-dimensional Caudrey-Dodd-Gibbon-Kotera-Sawada-like equation. *Applied Mathematics and Computation, 403,* 126201.

Wazwaz, A. M. (2016). The simplified Hirotas method for studying three extended higherorder KdV-type equations. *Journal of Ocean Engineering and Science, 1(3),* 181-185.

Wazwaz, A. M., & Wazwaz, A. M. (2009). Solitary waves theory. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory,* 479-502.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : MELİH ZEYNEL
Doğum Yeri ve Tarihi :
Yabancı Dili : İNGİLİZCE

Eğitim Durumu

Lise : GEMLİK GEMPORT ANADOLU LİSESİ (2010-2014)
Lisans : BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ (2015-2020)
Yüksek Lisans : ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ (2021-2023)

İletişim :

Akademik Çalışmalar : Zeynel, M., & Yaşar, E. (2022). A new (3+ 1) dimensional Hirota bilinear equation: Periodic, rogue, bright and dark wave solutions by bilinear neural network method.*Journal of Ocean Engineering and Science.* 2022 (in press). doi:10.1016/j.joes.2022.04.017