GRAFLARIN KARAKTERİSTİK POLİNOMLARININ HESAPLANMASINDA YENİ YÖNTEMLER

Fikriye ZİHNİ

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN KARAKTERİSTİK POLİNOMLARININ HESAPLANMASINDA YENİ YÖNTEMLER

Fikriye ZİHNİ
0009-0006-2126-9959

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2023

TEZ ONAYI

Fikriye ZİHNİ tarafından hazırlanan “Grafların Karakteristik Polinomlarının Hesaplanmasında Yeni Yöntemler” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Başkan	:	Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL 0000-0002-0700-5774 Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye	:	Prof. Dr. Musa DEMİRCİ 0000-0002-6439-8439 Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye	:	Prof. Dr. Saliha ŞAHİN 0000-0003-2887-5688 Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Kimya Anabilim Dalı	İmza
Üye	:	Prof. Dr. Recep ŞAHİN 0000-0002-4407-2028 Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye	:	Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ 0000-0003-2924-5397 Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali KARA
Enstitü Müdürü
../../….

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

28/07/2023

İmza

Fikriye ZİHNİ

TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL 28/07/2023	Fikriye ZİHNİ 28/07/2023
İmza Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.	İmza Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Doktora Tezi

GRAFLARIN KARAKTERİSTİK POLİNOMLARININ HESAPLANMASINDA YENİ YÖNTEMLER

Fikriye ZİHNİ

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu çalışmanın amacı, bazı graf türlerinde omega invaryantı yardımıyla graf enerjisi ile ilgili yeni sonuçlar elde etmektir. Aynı zamanda bir grafın $n \times n$ boyutlu komşuluk matrisinden yararlanarak elde edilen karakteristik polinomuyla ilgili yeni bulgulara ve lineer cebir yöntemleri kullanılarak bulunan karakteristik polinom aracılığıyla grafın özdeğerlerine ulaşmaktır.

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. Bu bölümde grafın tarihçesinden ve kullanım alanlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde kuramsal temeller ve graf teoride kullanılan genel tanımlar ve tez içinde sıkça kullanacağımız graf türlerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde tezde kullanılacak materyal ve yöntemlerden bahsedilmiştir ve bazı özel grafların omega invaryantı, spektrumu, graf enerjisi ve karakteristik polinomları bulunmuştur. Dördüncü bölümde döngü(ler), katlı kenar(lar) veya bir sallanan kenar eklenmiş graflar üzerinde durulmuştur. Bir grafa döngü, katlı kenar veya bir sallanan kenar eklendiğinde oluşan grafın karakteristik polinomu ile ilk grafın karakteristik polinomu arasında bir ilişki olduğu saptanmıştır. Yeni bir işlem olarak manyetik ayırma işlemi tanımlanmış ve belli graf türlerine manyetik ayırma işlemi uygulanarak karakteristik polinomlar incelenmiştir. Bir graftan bir kopma köşesi, bir köprü veya bir köprü olmayan kenar silindiğinde grafın karakteristik polinomunda gerçekleşen değişim incelenmiştir. Beşinci ve son bölümde ise bulduğumuz sonuçlardan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: graf, omega invaryant, graf enerjisi, komşuluk matrisi, karakteristik polinom, özdeğer, spektrum, döngü, katlı kenar, sallanan kenar, kopma köşesi, köprü

2023, vii + 87 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

NEW METHODS IN CALCULATING THE CHARACTERISTIC POLYNOMIALS OF GRAPHS

Fikriye ZİHNİ

Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL

The aim of this study is to obtain new results about graph energy in some graph types by means of omega invariant. At the same time, it is to reach new findings about the characteristic polynomial obtained by using the $n \times n$-dimensional adjacency matrix of a graph and to reach the eigenvalues of the graph through the characteristic polynomial by means of linear algebra methods.

This thesis consists of 5 chapters. The first part is the introduction part. In this section, the history of graph and its usage areas are mentioned. In the second chapter, theoretical foundations and general definitions used in graph theory and graph types that we will be used frequently in the thesis are mentioned. In the third chapter, the materials and methods to be used in the thesis are mentioned and omega invariant, spectrum, graph energy and characteristic polynomials of some special graphs are found. The fourth chapter focused on graphs with added loop(s), multiple edge(s) or a single pendant edge. It has been found that when a loop, multiple edges, or a pendant edge is added to a graph, there is a relationship between the characteristic polynomial of the obtained graph and the characteristic polynomial of the first graph. Magnetic separation operation is defined as a new operation and the characteristic polynomials of some known graph types were investigated using magnetic seperation. The change in the characteristic polynomial of the graph when a cut vertex, a bridge or a non-bridge is deleted from a graph is examined. In the fifth and last chapter, our results are mentioned.

Keywords: graph, omega invariant, graph energy, adjacency matrix, characteristic polynomial, eigenvalue, spectrum, loop, multiple edges, pendant edge, cut vertex, bridge

2023, vii + 87 pages

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca bana her türlü yardımcı olan, samimi, güler yüzlü, olumlu tavrıyla beni cesaretlendiren, bilgi birikimiyle, öğrettiği yöntemlerle çalışmama farklı yaklaşımlarda bulunmamı sağlayan, birlikte çalışmaktan ve öğrencisi olmaktan gurur duyduğum çok kıymetli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e,

Doktora eğitimim sürecinde her anımda yanımda olan, gösterdiği sınırsız sabrı, sevgisi ve desteği sayesinde buralara kadar gelebildiğim sevgili eşim Onur Zihni'ye, biricik kızıma,

Kızım için yanımızda olan ve bize her türlü destek olan kayınvalideme ve bu durumdan dolayı yalnız kalan kayınpederime,

Hayatım boyunca beni destekleyen annem ve babama en içten teşekkürlerimi sunmak isterim.

Son olarak Bursa Uludağ Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine KUAP (F) 2022/1049 numaralı Bilimsel Araştırma Projemize vermiş oldukları destekten dolayı teşekkür ederim.

Fikriye ZİHNİ
28/07/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

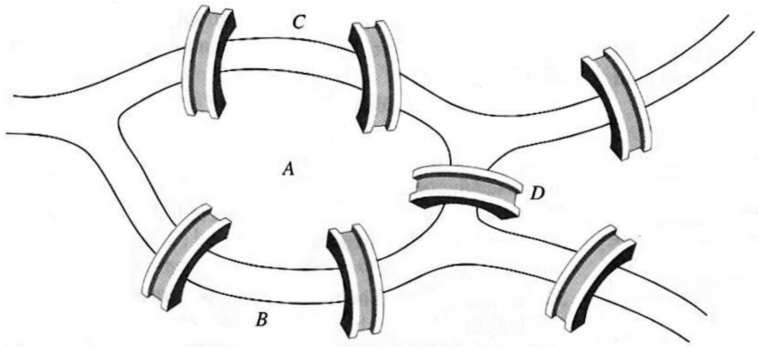
SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
G	Graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
E(G)	G grafının kenar kümesi
$deg(v)$	v köşesinin derecesi
N_n	n köşeli sıfır graf
P_n	n köşeli patika graf
C_n	n köşeli devir graf
S_n	n köşeli yıldız graf
L_q	Tek bir köşede q döngüye sahip graf
$B_{r,s}$	Bir köşesinde r diğerinde s döngü olan tek bir kenardan oluşan graf
$F_{r,s}$	Çiçek graf
$C_{3,(k,r,t)}$	Döngülü üçgensel graf
$S(G)$	G grafının spektrumu
$E(G)$	G grafının enerjisi
$MS(G,v)$	Manyetik ayırma
$D(G)$	G grafının derece dizisi
Ω(G)	G grafının omega değeri
$r(G)$	G grafının bölge sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

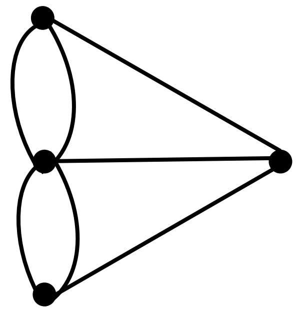
1. GİRİŞ

Çok daha eski yıllarda çeşitli bilim insanlarınca farklı isimler verilerek kullanıldığı bilinse de, 1736 yılında Leonhard Euler tarafından Königsberg'in yedi köprüsü problemi modern graf teorinin başlangıcı olarak kabul edilmiştir. Königsberg kasabasının içinden akan Pregel nehrinin ortasında nehrin kıyılarına ve birbirine Şekil 1.1'deki gibi köprüler ile bağlı kara parçaları bulunmaktadır.



Şekil 1.1. Pregel Nehri

Bu kara parçalarını birbirine ve kıyılara bağlayan köprüleri birer kez kullanma koşulu ile, başlanılan yere geri dönebilmeyi amaçlayan bir problem ortaya atılmış ve çözümü yıllarca tartışılmıştır. Leonhard Euler, çözümü biraz daha kolaylaştırmak ve şekli gereksiz bileşenlerden arındırmak amacıyla kara parçalarının noktalar, köprülerin ise bu noktaları birleştiren çizgiler olarak gösterildiği Şekil 1.2.'deki gibi ikinci bir şekil yani Königsberg grafını oluşturmuştur. 1736'da Euler'in incelemeleri böyle bir gezintinin mümkün olmadığını kanıtlamıştır. Bu kapsamda Euler'in yayımladığı makale ise graf teorinin ilk makalesi olarak kabul edilmiş. Aynı zamanda Euler teoremi, Euler turu ve Euler grafı ifadelerini de literatüre kazandırmıştır.



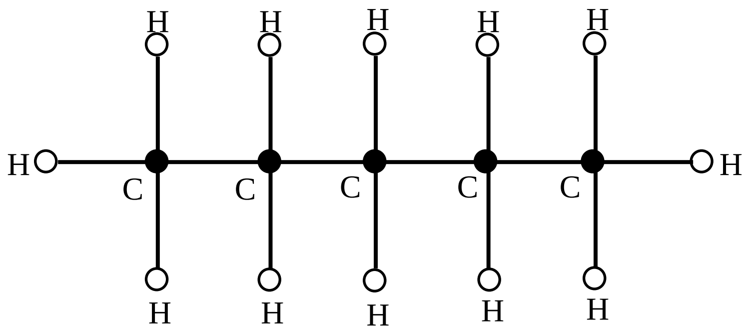
Şekil 1.2. Königsberg grafı

Birçokları için graf teorinin başlangıcı sayılsa da bu tarihten çok önceleri de insanlar grafları kullanmaktaydı. Özellikle astronomide günümüzden 2000-3000 yıl öncesinde gök cisimlerini birer üç boyutlu matematiksel cisim olarak kullanmış olan bilim insanları mevcuttur. Yapıları itibarıyla ilk bakışta kolay görülen fakat derine inildikçe karmaşıklaşan ve yeni faydaları ve uygulama alanları ortaya çıkan grafların bu kadar popüler bir çalışma alanı haline gelmesinin sebebi, gündelik hayatta veya bilimin herhangi bir alanındaki neredeyse tüm olayları graflar yardımıyla çalışabilmemizdir. Eğer belli sayıda nesnenin arasında belli bir ilişkiler zinciri varsa bu nesneleri birer köşe ile modelleyebiliriz ve bu nesneler arasındaki ilişkileri de kenarlar yardımıyla gösterebiliriz. Bu sayede herhangi bir olayı bir grafa dönüştürerek bu grafı matematiksel yöntemlerle çalışabilir, çeşitli graf parametreleri yardımıyla graf hakkında matematiksel bilgi elde edebilir ve bu bilgileri yorumlayarak gerçek olay hakkında arzu edilen bilgileri elde edebiliriz. Bu nesneler kişiler, firmalar, bayiler, araçlar, bir okuldaki sınıflar, şehirler, dünya haritasındaki ülkeler, güneş sistem, evrendeki bilinen gök cisimleri, atom ve moleküller, sinir sistemimizdeki nöronlar, sosyal medyadaki platformlara üye olan kişiler, aynı internet ağına veya telekomünikasyon ağına bağlı olan kişiler veya firmalar olabilir. Örneğin kişiler arasında birbirini tanıma, aynı cinsiyetten olma, aynı semtte oturma, aynı gelir düzeyine sahip olma, aynı şehirde doğmuş olma, aynı meslekten olma, aynı okulun mezunu olma, aynı yaşta olma vb. daha birçok ilişki kurulabilir. Diğer nesneler için de benzer örnekler verilebilir. Bu sayede bir grafla örnekleyebildiğimiz günlük yaşam olaylarını yukarıda belirttiğimiz gibi matematiksel metodlarla çalışabilir ve kimyasal, fiziksel, tıbbi, sosyal, ekonomik, vs. özelliklerini sadece bu matematiksel metodlarla elde edilen sayılara bakarak elde edebiliriz (Gross ve Yellen, 2003).

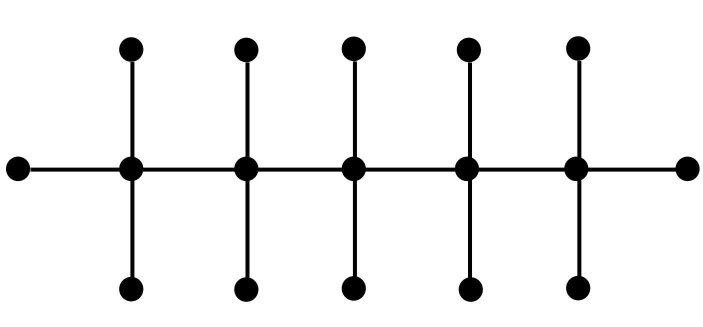
2. KURAMSAL TEMELLER

Graf teori, modelleme yoluyla günlük hayat problemlerinin zaman ve para gerektiren laboratuvar deneylerinden ya da uzun süren anket ve gözlemlere dayalı sosyal çalışmalardan kurtularak sadece matematiksel metotlar ile çalışılmasına olanak sağladığı için özellikle son yüzyılda matematiğin en hızlı gelişen dalı olmuştur.

Günlük hayattaki bir olayda mevcut nesneleri birer köşe, bu nesneler arasındaki bilinen veya araştırılan bir özelliğin varlığını da karşılık gelen köşeler arasına çizilecek bir kenarla göstererek bu olayı bir graf ile modellemiş oluruz. Örneğin Şekil 2.1.'de C_5H_{12} Pentan molekülü ve Şekil 2.2.'de bu moleküle karşılık gelen graf verilmiştir. Bu graf gösteriminde Karbon ve Hidrojen atomu ayrımı kalmadığına ve 17 atomun da aynı şekilde birbirinden ayırt edilemeyen birer köşe ile temsil edildiğine dikkat ediniz.



Şekil 2.1. C_5H_{12} Pentan molekülü



Şekil 2.2. C_5H_{12} Pentan molekülünü modelleyen 17 köşeli graf

Modelleme sonucunda elde edilen grafın matematiksel yöntemlerle çalışılması ve bazı değerlerin elde edilmesi, grafların matematiksel yönüdür. Bu çalışmalar, adına topolojik graf indeksleri de denilen bazı formüller yardımıyla yapılabildiği gibi, graf matrisleri, lineer cebir metodları veya diğer graf parametreleri kullanılarak da yapılabilir. Sonuçta matematiksel yöntemlerle elde edilen nümerik değerler, daha önceki gözlemler ve sonuçlarla kıyaslanarak yorumlanır ve bu matematiksel değerlere anlamlar yüklenerek günlük hayat probleminin bulunduğu alanla ilgili bazı değerlendirmeler yapılabilir. Böylece örneğin bir molekülün izomerlerinin kaynama noktalarını belirlemek istediğimizde adına Wiener indeksi denilen (Wiener, 1947) bir formülden faydalanarak hangi izomerin daha düşük, hangisinin daha yüksek sıcaklıkta kaynadığını ya da donduğunu belirlemek mümkündür. Bu tür uygulamalar da bize zaman ve para kazandırdıklarından giderek yaygınlaşmaktadırlar (Balaban, 1976; Trinajstic, 1992; Saoub, 2021).

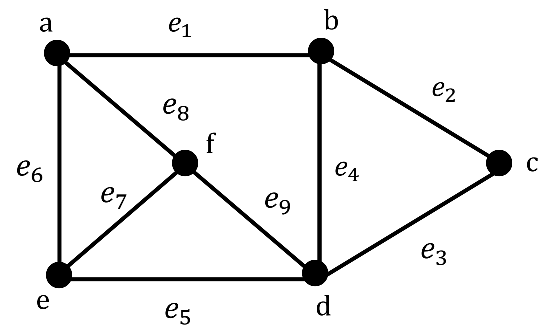
Aşağıdaki kısımda bu tezde kullanılacak olan bazı temel kavramları tanıyacağız. Bu kavramlarla ilgili daha geniş bilgi için bu kaynaklara bakılabilir:

(Deo, 1974), (Chen, 1976), (Capobianco ve Molluzzo, 1978), (Chartrand, 1985), (Biggs ve diğerleri, 1986), (Wilson ve Watkins, 1990), (Trudeau, 1993), (Harary, 1994), (Wilson, 1998), (West, 2001), (Vasudev, 2007), (Wallis, 2007), (Bondy ve Murty, 2008), (Diestel, 2010), (Balakrishnan, 2012), (Chartrand ve Zhang, 2012), (Benjamin ve diğerleri, 2015).

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım. ***Köşe (vertex)*** adı verilen noktalar ile ***kenar (edge)*** adı verilen ve köşelerden bazılarını birleştiren çizgilerden oluşan şekle ***graf (graph)*** denir.

Bir G grafında grafın köşe kümesi $V(G)$, kenar kümesi ise $E(G)$ ile gösterilir. Buna göre bir G grafı, $G = (V(G), E(G))$ şeklinde de gösterilir.



Şekil 2.3. 6 köşeli ve 9 kenarlı bir graf örneği

Şekil 2.3.'de verilen graf örneğinin köşe kümesi $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve kenar kümesi ise $E(G) = \{e_{1,}e_{2,}e_{3,}e_{4,}e_{5,}e_{6,}e_{7,}e_{8,}e_9\}$ şeklindedir.

Bir grafın köşe ve kenar sayıları, en önemli graf parametreleri arasındadır. Grafların farklı özelliklerine göre sınıflandırılmasında sıklıkla kullanılırlar. Bunlar dışında da özellikle topolojik graf indekslerinin hesaplanmasında köşe ve kenarlarla yapılan işlemler çok önemlidir (Todeschini ve Consonni, 2008; Hosoya, 2019).

2.1.2. Tanım. Bir G grafında köşe kümesinin eleman sayısına grafın ***mertebesi (order)*** denir ve n ile gösterilir. Kenar kümesinin eleman sayısı ise grafın ***boyutu (size)*** olarak adlandırılır ve m ile gösterilir.

Yukarıda belirtildiği gibi bir grafın köşeleri ve kenarları, bize grafla ilgili bilgi veren en önemli parametrelerdir. Adına mertebe ve boyut dediğimiz bu iki sayı ile sıkça karşılaşacağız. Köşeler ve kenarlar, sadece sayılarıyla değil, aralarındaki ilişkilerle de bize yararlı olmaya devam ederler.

2.1.3. Tanım. Bir G grafında v köşesini uç kabul eden tüm kenarların sayısına $\boldsymbol{v}$ ***köşesinin derecesi (degree)*** denir ve $deg(v)$ veya $d(v)$ ile gösterilir. Örnek olarak Şekil 2.3.'de $deg(d) = 4$ ve $deg(e) = 3$'tür.

2.1.4. Tanım. Bir G grafında bulunan bir v köşesi için $deg(v) = 1$ ise bu köşeye ***asılı veya sallanan köşe (pendant vertex)***; buna bitişik olan kenara da ***asılı veya sallanan kenar (pendant edge)*** denir.

Bazen, çok istenmese de çalıştığımız grafta bazı özel kenarlara da yer vermemiz gerekebilir. Bunlardan ilk akla gelenleri sıradaki iki tanımda hatırlayalım:

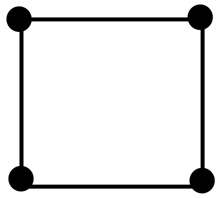
2.1.5. Tanım. Başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olan bir kenara ***döngü (loop)*** adı verilir.

2.1.6. Tanım. Bir grafta aynı köşelere sahip iki veya daha fazla kenarın birleşimine ***katlı (çoklu) kenar (multiple edges)*** denilir.

Belirttiğimiz gibi bir grafta döngü veya katlı kenarların olması çeşitli sorunlara neden olabilmektedir. Örneğin bir döngünün bulunduğu köşe derecesine katkısının 1 mi yoksa 2 mi olacağı, komşuluk matrisinde bu köşenin katkısının 1 mi yoksa 2 mi olacağı, aralarında bir kenar olan iki köşe ile aralarında 3 tane katlı kenar olan iki köşe arasında bir fark olup olmadığı ve bunun graftan elde edilecek çeşitli matrislere yansımaları arasında ne gibi benzerlikler veya farklar olacağı gibi belirsizlikler bulunmaktadır ve bunlar, yapılan hesaplamaların farklı yorumlanmasına neden olmaktadır. Bu nedenle bu iki kenar türünü içermeyen graflar oldukça önemlidir ve özel bir isimle anılırlar:

2.1.7. Tanım. Döngü içermeyen ve katlı kenara sahip olmayan graflara ***basit (simple) graf*** denir.

2.1.8. Tanım. Bir G grafında bütün köşe dereceleri eşit ise bu grafa ***düzenli (regular) graf*** denir. $v \in V(G)$ için $\deg(v) = r$ ise bu grafa ***r-düzenli (r-regular) graf*** denir.



Şekil 2.4. 2-düzenli graf

Şekil 2.4.'de dört kenarı ve dört köşesi olan ve köşe derecelerinin tümü 2 olduğu için 2-düzenli olarak sınıflandırılan bir graf görülmektedir.

2.1.9. Tanım. Bir G grafında bir $e \in E(G)$ alındığında bu kenar $v \in V(G)$ köşesi ile birleşiyorsa e kenarı ile v köşesi ***bitişiktir (incident)*** denir.

2.1.10. Tanım. Bir G grafında iki köşe arasında bir kenar varsa bu köşelere ***komşu (adjacent) köşeler***, ortak bir köşeye sahip olan kenarlara da ***komşu kenarlar*** denir.

Örneğin, Şekil 2.3.'de a ile b, a ile e, a ile f köşeleri komşu köşelerdir; e_1 ile e_2, e_1 ile e_4, e_1 ile e_6 kenarları ise komşu kenarlardır.

Grafların günlük hayattaki olayları modelleyerek bize matematiksel bilgiler sunduğunu ve bu bilgilerin yorumlanmasıyla da, örneğin bir molekülün fiziksel veya kimyasal özelliklerini elde edebileceğimizi belirtmiştik. Bu aşamada kullanılan matematiksel metodlardan birisi de graflara karşılık gelen matrislerdir. Günümüzde yüzden fazla graf matrisi bilinmektedir. Bunlardan en çok çalışılanlar komşuluk, bitişiklik ve Laplace matrisleridir. Aşağıda ilgili kavramları tanımlayacağımız komşuluk matrisleri, muhtemelen grafların en önemli uygulaması olan graf enerjisi kavramını doğurmaktadır. Grafların lineer cebir metodları ile çalışılmasıyla elde edilen bazı değerler sayesinde graf teorinin spektral graf teori adı verilen ve oldukça önemli uygulamaları olan bir alt dalı ortaya çıkmıştır(Cvetkovic ve diğerleri, 1995; Brezin ve Hikami, 2000). Şimdi graf enerjisi ile ilgili kavramları sırasıyla görelim:

2.1.11. Tanım. n köşeli bir G grafının köşeleri $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ olsun.

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 1, & v_i \ ve \ v_j \text{ komşu (adjacent) köşeler ise} \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olacak şekilde oluşturulan $n\,x\,n$ boyutlu $[A]_{\mathrm{i,j}}$ kare matrisine ***G grafının komşuluk (adjacency) matrisi*** denir ve ***A*** ile gösterilir. Şekil 2.3.'deki grafın komşuluk matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

2.1.12. Tanım. Bir G grafına ait komşuluk matrisi A olmak üzere $|A - \lambda I_n| = 0$ denkleminin kökleri olan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sayılarına A matrisinin özdeğerleri denir. $|A - \lambda I_n|$ determinantı ile elde edilen polinoma G grafının ***karakteristik polinomu*** denir.

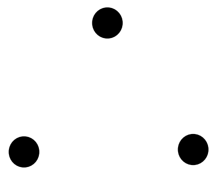
2.1.13. Tanım. Bir G grafına ait komşuluk matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesine ***G grafının spektrumu*** denir**.**

2.1.14. Tanım. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ bir G grafının komşuluk matrisinin özdeğerleri olmak üzere, bu özdeğerlerin mutlak değerlerinin toplamına ***G grafının enerjisi*** denir ve $\boldsymbol{E(G)}$ ile gösterilir (Gutman, 1978; Balakrishnan, 2004; Nikiforov, 2007).

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

şeklindedir.

2.1.15. Tanım. Hiçbir kenarı olmayan, sadece köşelerden oluşan graflara ***sıfır (null) graf*** denir ve n köşeli bir sıfır graf N_n ile gösterilir. Derecesi 0 olan köşelere de ***izole (isolated) köşeler*** denir.

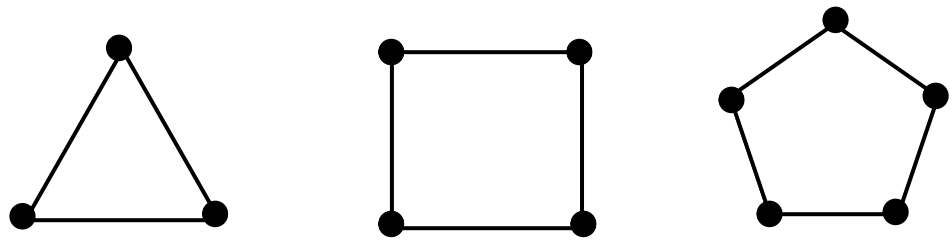


Şekil 2.5. N_3 sıfır grafı

2.1.16. Tanım. İki köşeyi birleştiren tek bir yoldan oluşan grafa ***patika (path) graf*** denir ve n köşeli bir patika graf, P_n ile gösterilir.

Şekil 2.6. P_6 patika grafı

2.1.17. Tanım. Bir patika grafının iki uç köşesini bir kenar ile birleştirerek elde edilen grafa ***devir (cycle) grafı*** denir ve n köşeli bir devir graf C_n ile gösterilir.



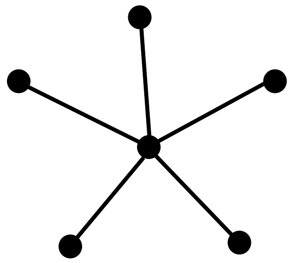
Şekil 2.7. C_3, C_4, C_5 devir grafları

$n = 1$ ve $n = 2$ için $C_n = P_n$ olduğundan tez boyunca devir graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 3$ alınacaktır.

Graf teorinin, yukarıda bahsi geçen Königsberg Köprüleri Problemi de dahil birçok uygulamasında patika ve devir graflarına ihtiyaç duyulur. Bu sebeple diğer graf türlerinden farklı olarak patika ve devirlerden hem birer graf olarak, hem de grafın birer bileşeni olarak bahsetmek mümkündür.

2.1.18. Tanım. Bir grafta biri hariç tüm köşeler bu köşeye komşu ise bu grafa ***yıldız (star) graf*** denir ve S_n ile gösterilir.

n köşeye sahip bir S_n grafında merkezdeki köşenin derecesi $n-1$, diğer köşelerin dereceleri 1'dir.



Şekil 2.8. S_6 yıldız grafı

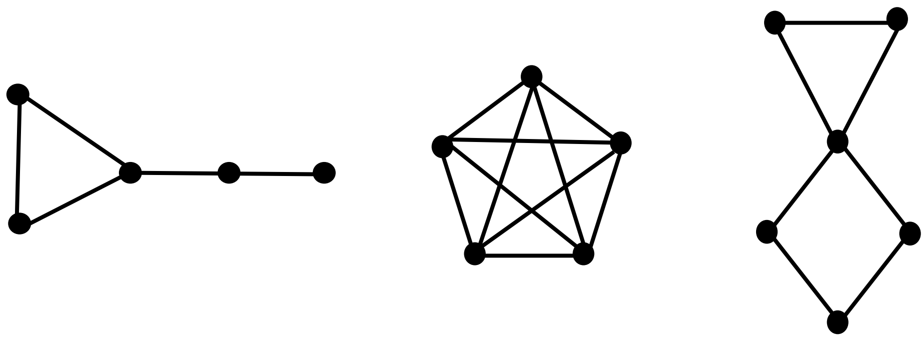
$n = 1, 2, 3$ için $S_n = P_n$ olduğundan tez boyunca yıldız graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 4$ alınacaktır. Şunu da belirtmeliyiz ki burada S_n ile toplam n köşesi olan bir yıldız grafı göstereceğiz. Ancak bazı kaynaklarda yıldız grafın isimlendirmesi yapılırken S_n ile toplam $n+1$ köşesi olan bir yıldız graf gösterilmektedir. Yani S_n gösterimindeki n, burada yaptığımız gibi toplam köşe sayısını değil, merkezdeki köşeye birleştirilen köşe sayısını göstermektedir. Dolayısıyla Şekil 2.8.'deki yıldız grafını biz burada S_6 olarak adlandırsak ta bazı kaynaklarda bu graf S_5 olarak da adlandırılmaktadır. Dolayısıyla herhangi bir kaynakta S_n sembolünü gördüğümüzde bunlardan hangisinin kastedildiğine dikkat edilmelidir.

2.1.19. Tanım. Bir G grafında her iki köşe arasında bir kenar mevcutsa bu grafa ***tam(complete) graf*** denir ve n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir.

Aşağıda Şekil 2.9.'daki bağlantılı graf örneklerinden G_2 grafı 5 köşeli bir K_5 grafına örnektir.

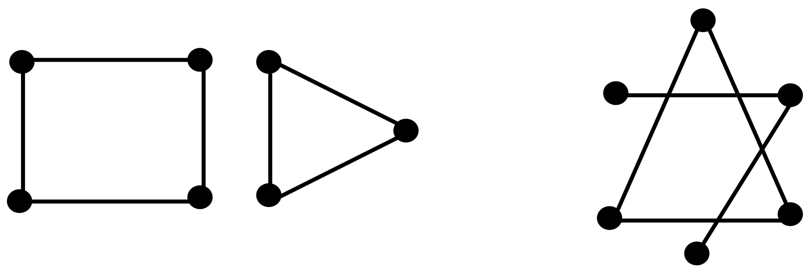
n köşe sayısı olmak üzere $n = 1$ ve $n = 2$ için $K_n = P_n$ ve $n = 3$ için $K_n = C_n$ olduğundan tez içerisinde tam graf için $n \geq 4$ alınacaktır.

2.1.20. Tanım. Bir G grafında iki köşe arasında bir yol bulunuyorsa bu köşelere ***bağlantılı köşeler*** denir. G grafının her köşe çifti bağlantılı bir köşe çifti ise bu grafa ***bağlantılı graf*** denir. Bağlantılı olmayan bir grafa da ***bağlantısız graf*** denir.



G_1 G_2 G_3

Şekil 2.9. Bağlantılı graf örnekleri



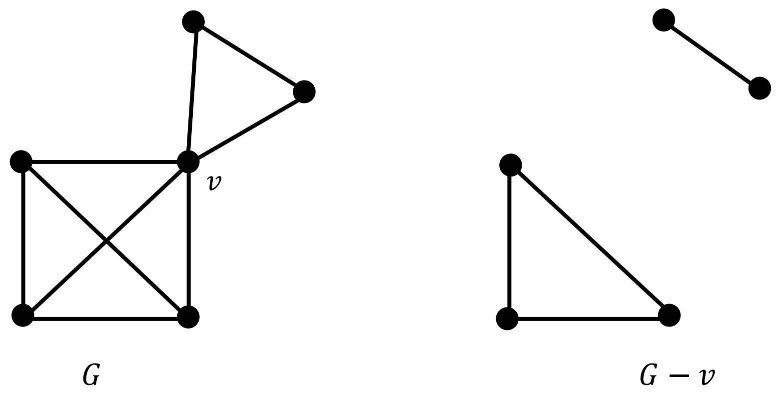
G_1 G_2

Şekil 2.10. Bağlantısız graf örnekleri

Graflar da matematikteki kümeler, uzaylar veya cebirsel yapılar gibidir. Alt kümeleri, alt uzayları veya alt yapıları tanımlanabilir, birleşimleri, kesişimleri, farkları, tümleyenleri alınabilir, kısaca matematikteki diğer yapılar ile yapılan birçok işlem, graflarla da yapılabilir. Sıradaki üç tanımda bu işlemlerden oldukça faydalı olan üç tanesini, köşe silme, kenar silme ve kenar ekleme işlemlerini hatırlayacağız. Tabii akla gelebilecek ilk soru neden dördüncü bir işlem olarak köşe ekleme işleminin yapılmadığı sorusudur. Bu işlem çok farklı ihtimaller bulundurduğundan bir standart kabule sahip değildir ve biz çalışmamızda bu işleme yer vermeyeceğiz.

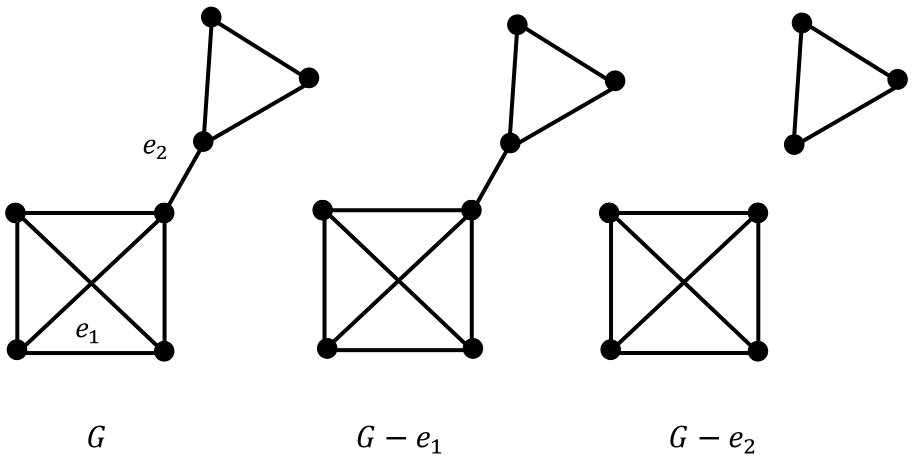
Bu üç işlemin çalışılmasının amacı, bu işlemleri uygulayarak verilen ve çalışılması zor olan bir grafın istenen bir özelliğini bulmak yerine bu graftan daha basit ya da daha karmaşık olsa da iyi bilinen bir graf sınıfına dahil olan bir grafın aynı özelliğini elde etmek ve bu bilgiden hareketle daha önceden verilmiş olan formüller yardımıyla aranan grafın özelliğine ulaşmak mümkün olmaktadır.

2.1.21. Tanım. Bir G grafında v herhangi bir köşe ise v köşesini ve bu köşeye komşu tüm kenarları silme işlemine ***köşe silme*** işlemi denir ve elde edilen yeni graf $G - v$ ile gösterilir.



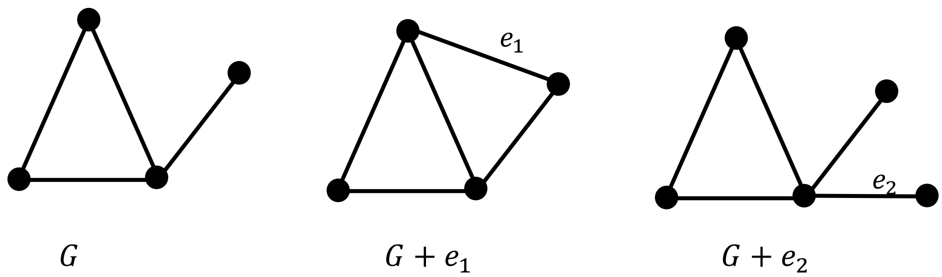
Şekil 2.11. G grafı ve G grafında v köşesi silindiğinde oluşan $G - v$ grafı

2.1.22. Tanım. G bir graf ve $e \in E(G)$, G grafının herhangi bir kenarı olsun. G grafından e kenarının silinmesi işlemine ***kenar silme*** işlemi denir. Burada elde edilen yeni graf da $G - e$ ile gösterilir.



Şekil 2.12. G grafı, G grafından sırasıyla e_1 ve e_2 kenarlarının silinmesiyle oluşan $G - e_1$ ve $G - e_2$ grafları

2.1.23. Tanım. Bir G grafının mevcut iki köşesine ya da grafa ait olmayan bir köşeden grafın bir köşesine bir kenar eklenmesi; grafa ait olmayan iki köşenin birleşmesiyle oluşan bir kenar (K_2) eklenmesi ya da döngü veya katlı kenar eklenmesi işlemlerinin her birisine ***kenar ekleme*** işlemi denir. e eklenen yeni kenar olmak üzere elde edilen yeni graf $G + e$ ile gösterilir.



Şekil 2.13. G grafı ve G grafına sırasıyla e_1 ve e_2 kenarlarının eklenmesiyle oluşan $G + e_1$ ve $G + e_2$ grafları

Verilen bir derece dizisine ait bir graf çizilebildiğinde derece dizisini de kullanarak grafın üzerinde farklı işlemler uygulayabiliriz(Tyshkevich ve diğerleri, 1987; Kim ve diğerleri, 2009). Bu tezin içinde sıkça kullanacağımız omega invaryantından bahsedebilmemiz için öncelikle derece dizisini tanımlayacağız. Ardından bir G grafının omega invaryantını ve bölge(yüz) sayısını tanımlayacağız(Delen (2019)).

2.1.24. Tanım. Bir G grafının köşe derecelerinden oluşan kümeye ***grafın derece dizisi (degree sequence)*** denir.

$0 \leq i \leq \triangle$ için $a_i \geq 0$ olmak üzere genel olarak bir G grafının derece dizisi

$$D(G) = \left\{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \triangle^{(a_\triangle)}\right\}$$

şeklindedir.

2.1.25. Tanım. G grafı, $D = \left\{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \triangle^{(a_\triangle)}\right\}$ derece dizisine sahip bir graf olsun. G grafının ***omega invaryantı*** $\boldsymbol{\Omega(G)}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \Omega(G) &= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (\triangle - 2)a_\triangle - a_1 \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{\triangle} (i - 2)\, a_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.26. Tanım. c bileşenli G grafının ***kapalı bölge (yüz veya devir) sayısı*** $\boldsymbol{r}$ ile gösterilir ve G grafının kapalı bölge sayısı omega invaryantından yararlanarak

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$

şeklinde tanımlanır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Matematiğin önemli çalışma alanlarından biri olan Lineer cebir probleme doğrusal bir açıdan bakıp, matris ile ifade ettikten sonra onu matris işlemleriyle çözer. Graf teoride de komşuluk matrisleri kullanılarak lineer cebirde bulunan determinantın özellikleri, satır-sütun işlemleriyle grafın karakteristik polinomuna ve bu karakteristik polinomun köklerine yani özdeğerlerine ulaşılır (Mowshowitz, 1972). Bu özdeğerler kullanılarak da özdeğerlerin mutlak değerlerinin toplamı olan ve graf enerjisi adı verilen kavram açığa çıkmıştır.

Aynı zamanda graf enerjisi ile ilgili elde edilen sonuçlarda graf teori ve kombinatorik teori yöntemlerinden de yararlanılmıştır (Zverovich, 1992; Vasudev, 2007).

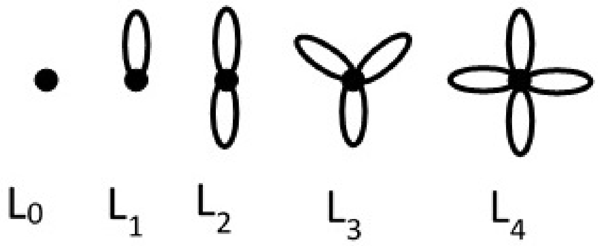
Derece dizilerinin çizilebilirlik durumuyla ilgili en bilinen Havel-Hakimi olmak üzere pek çok yöntem bulunmaktadır. Burada derece dizisi yardımıyla omega invaryantı bulunarak bir grafın çizilip çizilemediği anlaşılabilir (Havel, 1955; Hakimi,1962). Yine bir grafın kapalı bölge sayısına, grafın bağlantılılığına omega invaryantı sayesinde ulaşılabilir.

Graf teoride, verilen bir graftan yeni graflar elde etmenin birçok yolu vardır. Bunlardan tez içinde kullanacağımız köşe silme, kenar silme, kenar ekleme yöntemleridir. Bunları bir grafa ayrı ayrı uyguladığımızda ve her birinde farklı ek işlemler daha yapıldığında oluşan grafların karakteristik polinomları ile ilk grafın karakteristik polinomu arasında ilişki olduğu görülür.

Yurttaş Güneş ve diğerleri (2020) çalışmasında graflarla ilgili kombinatorik özelliklerin hesaplanmasında kullanılan bazı yeni graf türleri tanımladılar. Aşağıda bu graflardan bazılarını hatırlayıp karakteristik polinomlarını, spektrumlarını ve özdeğerlerini elde edeceğiz. Bu özdeğerlerden faydalanarak bu graf türlerinin graf enerjileri kolayca hesaplanabilir (Walikar ve diğerleri, 1999).

3.1. L_q Grafının Spektrumu

İlk olarak özel bir graf ile başlayacağız. Bu graf türünde tüm kenarlar sadece döngü şeklindedir. Şimdi bu grafın tanımını hatırlayalım. Tek bir köşede q döngüye sahip olan bir graf L_q ile gösterilir. Bazı L_q grafları Şekil 3.1'deki gibidir.



Şekil 3.1. Bazı L_q grafları

L_q grafının derece dizisi $D(L_q) = \{2q^{(1)}\}$ şeklindedir. Burada bu grafın omega invaryantı $\Omega(L_q) = 2q - 2$ olarak elde edilir. Buradan da L_q grafının bölge sayısının $r(L_q) = \frac{2q-2}{2} + 1 = q$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.1. Bir L_q grafının spektrumu $S(L_q) = \{2q\}$ şeklindedir.

İspat. L_q grafının komşuluk matrisi 1×1 boyutlu olup $A = A(L_q) = [2q]$ şeklinde bir tek elemandan oluşmaktadır. Dolayısıyla bu grafın karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= |2q - \lambda I| \\ &= 2q - \lambda \end{aligned}$$

şeklindedir ve buradan da tek öz değerinin $\lambda = 2q$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.2. L_q grafının enerjisi

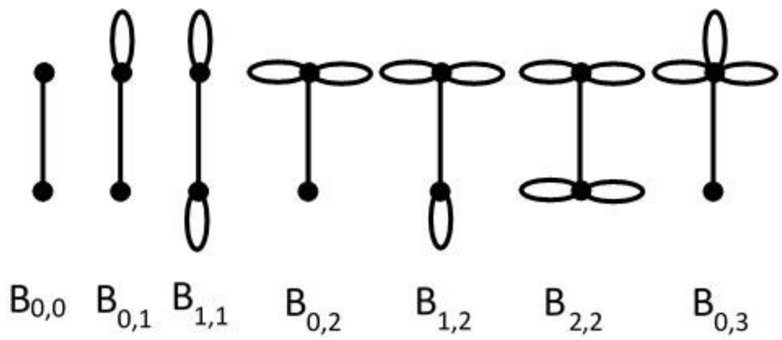
$$E(L_q) = 2q$$

şeklindedir.

İspat. Bir L_q grafı tek bir özdeğere sahip olacağından enerjisinin de o özdeğere eşit olacağı kolayca görülür.

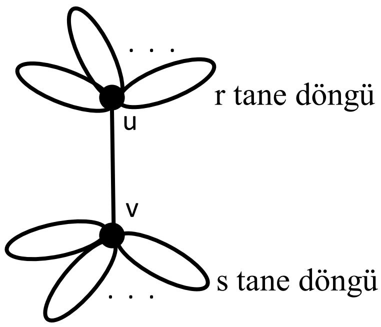
3.2. $B_{r,s}$ Grafının Spektrumu

İkinci olarak L_q grafına oldukça benzeyen ve farklı olarak her iki ucuna belli sayılarda döngüler eklenmiş bir kenardan oluşan bir graf türünü hatırlayalım. $r,\ s \in \mathbb{N}$ olsun. İki köşesi farklı olan bir kenarın bir ucuna r döngü, diğer ucuna s döngü eklenerek elde edilen graf $B_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 3.2. Bazı $B_{r,s}$ grafları

Şekil 3.2.'de bazı $B_{r,s}$ grafları grafı örnekleri verilmiştir. Şekil 3.3.'de üzerinde çalışabileceğimiz genel bir $B_{r,s}$ grafı örneği verilmiştir.



Şekil 3.3. Genel bir $B_{r,s}$ grafı

Bir $B_{r,s}$ grafında iki köşe ve $r+s+1$ kenar bulunmaktadır. Bu grafın bir köşesinin derecesi $d_u = 2r+1$, diğer köşesinin derecesi ise $d_v = 2s+1$'dir. Dolayısıyla bu grafın derece dizisi de

$$D(B_{r,s}) = \{2r+1^{(1)},\ 2s+1^{(1)}\}$$

olur. Bu grafın omega invaryantı ise

$$\begin{aligned} \Omega(B_{r,s}) &= 2r+1-2+2s+1-2 \\ &= 2(r+s-1) \end{aligned}$$

olur ve bölge sayısının da

$$\begin{aligned} r(B_{r,s}) &= \frac{\Omega}{2}+1 \\ &= \frac{2(r+s-1)}{2}+1 \\ &= r+s \end{aligned}$$

yani döngü sayısına eşit olduğu görülür.

Teorem 3.2.1. Bir $B_{r,s}$ grafının spektrumu

$$S = \{r + s + \sqrt{(r - s)^2 + 1}, r + s - \sqrt{(r - s)^2 + 1}\}$$

şeklindedir.

İspat. $B_{r,s}$ grafının komşuluk matrisi 2×2 boyutludur ve $A = A(B_{r,s}) = \begin{bmatrix} 2r & 1 \\ 1 & 2s \end{bmatrix}$ şeklindedir. Buna göre

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2r - \lambda & 1 \\ 1 & 2s - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

denklemi elde edilir ve buradan

$$(2r - \lambda)(2s - \lambda) - 1 = 0$$

ve böylece de $B_{r,s}$ grafının karakteristik polinomu

$$\lambda^2 - (2r + 2s)\lambda + 4rs - 1 = 0$$

olarak elde edilir. Polinomu kullanarak diskriminant yardımıyla da özdeğerleri bulabiliriz.

$$\begin{aligned} \Delta &= (2r + 2s)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4rs - 1) \\ &= 4r^2 + 4s^2 + 8rs - 16rs + 4 \\ &= 4((r - s)^2 + 1) \end{aligned}$$

olur ve buradan $B_{r,s}$ grafının özdeğerleri

$$\lambda_1 = \frac{2r + 2s + 2\sqrt{(r - s)^2 - 1}}{2}$$

$$= r + s + \sqrt{(r-s)^2 + 1}$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{2r + 2s - 2\sqrt{(r-s)^2 - 1}}{2}$$

$$= r + s - \sqrt{(r-s)^2 + 1}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2.2. Özel olarak $B_{r,s}$ grafında $r = s$ ise bu grafın özdeğerleri

$$\lambda_1 = r + s + 1$$

$$= 2r + 1$$

ve

$$\lambda_2 = r + s - 1$$

$$= 2r - 1$$

olur.

İspat. Teorem 3.2.1.'den kolayca görülür.

Teorem 3.2.3. Bir $B_{r,s}$ grafının enerjisi

$$E(B_{r,s}) = 2r + 2s$$

şeklindedir.

İspat. Bir $B_{r,s}$ grafının iki köşesi olduğundan iki özdeğere sahiptir. Bu özdeğerlerin Teorem 3.2.1.'de

$$\lambda_1 = r + s + \sqrt{(r-s)^2 + 1}$$

$$\lambda_2 = r + s - \sqrt{(r-s)^2 + 1}$$

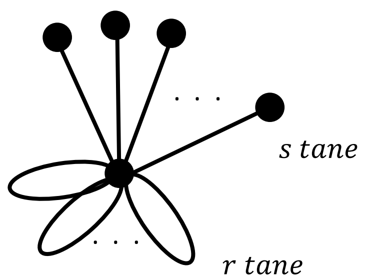
olduğu gösterildi. Buradan $B_{r,s}$ grafının enerjisini bulmak için bu iki özdeğerin mutlak değerini topladığımızda

$$E(\,B_{r,s}) = 2r + 2s$$

olduğu kolayca görülür.

3.3. $F_{r,s}$ Grafının Spektrumu

Tanım 3.3.1. Bir köşesinde r tane döngü bulunan ve yine aynı köşeye birleşen s tane sallanan kenarı ve $s+1$ köşesi bulunan bir graf çiçek grafı adını alır ve $F_{r,s}$ ile gösterilir. Aşağıdaki Şekil 3.4.'de genel bir $F_{r,s}$ grafı örneği verilmiştir.



Şekil 3.4. Genel bir $F_{r,s}$ grafı

Bir $F_{r,s}$ grafının s tane köşesinin derecesi bire eşittir. Döngü bulunan köşesinin derecesi ise $2r + s$'dir. Buradan $F_{r,s}$ grafının derece dizisi de

$$D(F_{r,s}) = \{1^{(s)},\ 2r + s^{(1)}\}$$

olur. Omega invaryantı ise

$$\begin{aligned}\Omega(F_{r,s}) &= s(1-2) + 2r + s - 2\\ &= 2r - 2\end{aligned}$$

olup, bölge sayısının da döngü sayısına yani r'ye eşit olduğu görülür.

Teorem 3.3.2. Bir $F_{r,s}$ grafının karakteristik polinomu

$$P\big(F_{r,s}\big) = \lambda^{s-1}(\lambda^2 - 2r\lambda - s)$$

şeklindedir.

İspat. Bir $F_{r,s}$ grafının komşuluk matrisi $(s+1)\times(s+1)$ boyutludur ve

$$A = A(F_{r,s}) = \begin{bmatrix} 2r+s & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre bu matrisin determinantı

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2r+s-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0-\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0-\lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0-\lambda\end{vmatrix}$$

şeklindedir. Buradan satır-sütun işlemleri ve determinant özellikleri kullanılarak sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.3. Bir $F_{r,s}$ grafının spektrumu ise

$$S = \left\{r + \sqrt{r^2 + s}, r - \sqrt{r^2 + s}, 0^{(s-1)}\right\}$$

şeklindedir.

İspat. Bir $F_{r,s}$ grafının polinomu

$$P(F_{r,s}) = \lambda^{s-1}(\lambda^2 - 2r\lambda - s)$$

olarak elde edilmişti. Buradan $F_{r,s}$ grafının özdeğerlerine ulaşabilmek için ilk olarak

$$\lambda^2 - 2r\lambda - s = 0$$

yazıldığında polinomun diskriminantı

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2r)^2 - 4(-s)\\ &= 4r^2 + 4s\\ &= 4(r^2 + s)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Diskriminant yardımıyla da $F_{r,s}$ grafının özdeğerleri

$$\lambda_1 = \frac{2r + 2\sqrt{r^2 + s}}{2}$$

$$\lambda_1 = r + \sqrt{r^2 + s}$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{2r - 2\sqrt{r^2 + s}}{2}$$

$$\lambda_2 = r - \sqrt{r^2 + s}$$

şeklinde bulunur. İkinci olarak da

$$\lambda^{s-1} = 0$$

yazıldığında $F_{r,s}$ grafının diğer özdeğerlerinin de

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_{s+1} = 0$$

şeklinde olduğu görülür.

Teorem 3.3.4. Bir $F_{r,s}$ grafının enerjisi

$$E(F_{r,s}) = 2\sqrt{r^2 + s}$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 3.3.3.'de bir $F_{r,s}$ grafının özdeğerlerinin

$$\lambda_1 = r + \sqrt{r^2 + s}$$

$$\lambda_2 = r - \sqrt{r^2 + s}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_{s+1} = 0$$

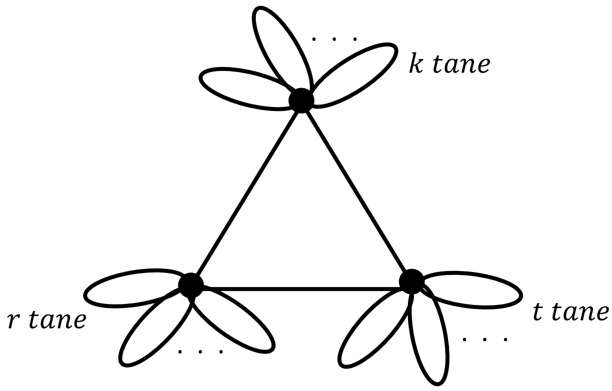
olduğu gösterildi. Buradan $F_{r,s}$ grafının enerjisini bulmak için bu özdeğerlerin mutlak değerlerini topladığımızda

$$E(F_{r,s}) = 2\sqrt{r^2 + s}$$

olduğu kolayca görülür.

3.4. $C_{3,(k,r,t)}$ Grafının Karakteristik Polinomu

Tanım 3.4.1. Bir üçgenin köşelerinden birine k, birine r, birine de t tane döngü eklenmesiyle elde edilen graf $C_{3,(k,r,t)}$ ile gösterilir ve döngülü üçgensel graf adını alır.



Şekil 3.5. $C_{3,(k,r,t)}$ döngülü üçgensel grafı

Bir $C_{3,(k,r,t)}$ grafının bir köşesinin derecesi $2k + 2$, ikincinin derecesi $2r + 2$ ve sonuncu köşenin derecesi de $2t + 2$'dir. Derece dizisi de

$$D\left(C_{3,(k,r,t)}\right) = \left\{2k + 2^{(1)}, 2r + 2^{(1)},\ 2t + 2^{(1)}\right\}$$

olur. Omega invaryantı ise

$$\begin{aligned}\Omega\left(C_{3,(k,r,t)}\right) &= (2k + 2 - 2) + (2r + 2 - 2) + (2t + 2 - 2) \\ &= 2(k + r + t)\end{aligned}$$

olarak bulunur ve bölge sayısının ise $k + r + t + 1$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.4.2. Bir $C_{3,(k,r,t)}$ grafının karakteristik polinomu

$$P\left(C_{3,(k,r,t)}\right) = -\lambda^3 + 2(k+r+t)\lambda^2 - 4\left(kt + kr + tr - \frac{3}{4}\right)\lambda + 8krt$$
$$- 2(k+r+t-1)$$

şeklindedir.

İspat. Bir $C_{3,(k,r,t)}$ grafının komşuluk matrisi 3×3 boyutludur ve

$$A = A\left(C_{3,(k,r,t)}\right) = \begin{bmatrix} 2k & 1 & 1 \\ 1 & 2r & 1 \\ 1 & 1 & 2t \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2k-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2r-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2t-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2k-\lambda)[\lambda^2 - 2(r+t)\lambda + 4rt - 1] \\
&\quad -(2t - \lambda - 1) + (1 - 2r + \lambda) \\
&= -\lambda^3 + 2(r+t)\lambda^2 - (4rt-1)\lambda + 8krt \\
&\quad -4(rk + tk)\lambda + 2k\lambda^2 - 2k - 2r + \lambda + 1 + 1 \\
&\quad -2t + \lambda \\
&= -\lambda^3 + 2(k+r+t)\lambda^2 - 4\left(kt + kr + tr - \tfrac{3}{4}\right)\lambda \\
&\quad +8krt - 2(k+r+t-1)
\end{aligned}$$

sağlanır.

Aşağıda $C_{3,(k,r,t)}$ grafının iki köşesine ait döngü sayısı eşit, diğer köşenin döngü sayısının onlardan farklı olduğu durumu inceleyeceğiz:

Teorem 3.4.3. $C_{3,(k,k,k+d)}$ grafının karakteristik polinomu

$$P\big(C_{3,(k,k,k+d)}\big) = -\lambda^3 + 2(3k+d)\lambda^2 - 4\left(3k^2 + 2kd - \frac{3}{4}\right)\lambda + 8k^2(k+d)$$
$$-2(3k+d-1)$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 3.4.2'de $k,\ k,\ k+d$ değerleri yerine yerleştirilirse yukarıdakilere benzer işlemler sonucunda $C_{3,(k,k,k+d)}$ grafının karakteristik polinomu elde edilir.

Teorem 3.4.4. $P(d) = 4d^2 - 4d + 9$ olmak üzere $C_{3,(k,k,k+d)}$ grafının spektrumu

$$S = \left\{2k-1, \frac{\sqrt{P(d)} + 2(2k+d) + 1}{2}, \frac{-\sqrt{P(d)} + 2(2k+d) + 1}{2}\right\}$$

şeklindedir.

İspat. Bir $C_{3,(k,k,k+d)}$ grafının komşuluk matrisi 3×3 boyutludur ve

$$A = A\big(C_{3,(k,k,k+d)}\big) = \begin{bmatrix} 2k & 1 & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ 1 & 1 & 2k+2d \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matris yardımıyla Wolfram alpha kullanılarak aşağıdaki özdeğerler elde edilmiştir.

$$\lambda_1 = 2k - 1$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{4d^2 - 4d + 9} + 2d + 4k + 1)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{4d^2 - 4d + 9} + 2d + 4k + 1)$$

Burada $C_{3,(k,k,k+d)}$ grafında d sayısının alabileceği değerlerin pozitif, negatif veya sıfır olabileceğine dikkat ediniz.

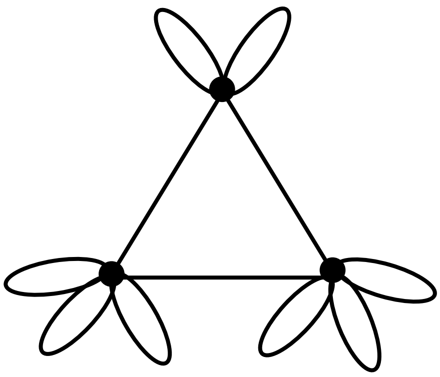
Teorem 3.4.5. Bir $C_{3,(k,k,k+d)}$ grafının enerjisi

$$E\left(C_{3,(k,k,k+d)}\right) = 2k - 1 + \sqrt{4d^2 - 4d + 9}$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 3.4.4.'de $C_{3,(k,k,k+d)}$ grafının verilen özdeğerlerinin mutlak değerlerini toplarsak bu grafın enerjisine kolayca ulaşırız.

Örnek 3.4.6.



Şekil 3.6. $C_{3,(3,3,2)}$ döngülü üçgensel grafı

Şekil 3.6.'daki $C_{3,(3,3,2)}$ grafında $k = 3$ ve $d = -1$'dir. Bu değerleri kullanarak $C_{3,(3,3,2)}$ grafının karakteristik polinomunu, spektrumunu ve enerjisini bulalım:

$C_{3,(3,3,2)}$ grafının karakteristik polinomu Teorem 3.4.3'ten

$$P\left(C_{3,(3,3,2)}\right) = -\lambda^3 + 2(3\cdot 3 - 1)\lambda^2 - 4\left(3\cdot 3^2 + 2\cdot 3\cdot(-1) - \frac{3}{4}\right)\lambda + 8\cdot 3^2(3-1)$$
$$-2(3\cdot 3 - 1 - 1)$$
$$= -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 81\lambda + 130$$

olarak bulunur.

$C_{3,(3,3,2)}$ grafının özdeğerleri Teorem 3.4.4. yardımıyla

$$\lambda_1 = 2\cdot 3 - 1 = 5$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4(-1)^2 - 4(-1) + 9} + 2(-1) + 4\cdot 3 + 1\right) = \frac{\sqrt{17} + 11}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{4(-1)^2 - 4(-1) + 9} + 2(-1) + 4\cdot 3 + 1\right) = \frac{-\sqrt{17} + 11}{2}$$

şeklinde bulunur. Buradan $C_{3,(3,3,2)}$ grafının spektrumu

$$S = \left\{5, \quad \frac{\sqrt{17} + 11}{2}, \quad \frac{-\sqrt{17} + 11}{2}\right\}$$

şeklindedir.

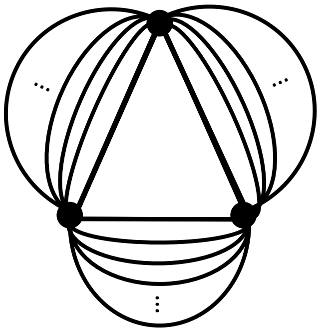
$C_{3,(3,3,2)}$ grafının enerjisi ise Teorem 3.4.5.’ten

$$E\left(C_{3,(3,3,2)}\right) = 2\cdot 3 - 1 + \sqrt{4(-1)^2 - 4(-1) + 9} = 5 + \sqrt{17}$$

olarak bulunur. Ya da yukarıda bulduğumuz özdeğerlerin mutlak değerlerini toplayarak da $C_{3,(3,3,2)}$ grafının enerjisini bulabiliriz.

3.5. $C_3^{(k,r,t)}$ Grafının Karakteristik Polinomu

Tanım 3.5.1. Bir üçgenin kenarlarından birine k, birine r, birine de t tane katlı kenar eklenmesiyle elde edilen graf $C_3^{(k,r,t)}$ ile gösterilir ve katlı üçgensel graf adını alır.



Şekil 3.7. $C_3^{(k,r,t)}$ katlı üçgensel grafı

Burada $C_3^{(k,r,t)}$ grafının kenar sayısı $k+r+t+3$; bir köşesinin derecesi $k+r+2$, bir köşesinin derecesi $k+t+2$ ve diğerinin köşe derecesi ise $r+t+2$'dir. Derece dizisi

$$D\left(C_3^{(k,r,t)}\right) = \left\{k+r+2^{(1)}, k+t+2^{(1)},\ r+t+2^{(1)}\right\}$$

olur. Omega invaryantı ise

$$\begin{aligned}\Omega\left(C_3^{(k,r,t)}\right) &= (k+r+2-2)+(k+t+2-2)+(k+t+2-2)\\ &= 2(k+r+t)\end{aligned}$$

olarak bulunur ve bölge sayısının ise $k+r+t+1$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.5.2. Bir $C_3^{(k,r,t)}$ grafının karakteristik polinomu

$$P\left(C_3^{(k,r,t)}\right) = -\lambda^3 + ((k+1)^2 + (r+1)^2 + (t+1)^2)\lambda + 2(k+1)(r+1)(t+1)$$

şeklindedir.

İspat. Bir $C_3^{(k,r,t)}$ grafının komşuluk matrisi 3×3 boyutludur ve

$$A = A\left(C_3^{(k,r,t)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & k+1 & r+1 \\ k+1 & 0 & t+1 \\ r+1 & t+1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin determinantı ise

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & k+1 & r+1 \\ k+1 & -\lambda & t+1 \\ r+1 & t+1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= 0$$

şeklindedir. Buradan satır-sütun işlemleri ve determinant özellikleri kullanılarak sonuç elde edilir.

Burada özel olarak $C_3^{(k,k,0)}$ grafını inceyelim:

Teorem 3.5.3. $C_3^{(k,k,0)}$ grafının karakteristik polinomu

$$P\left(C_3^{(k,k,0)}\right) = -\lambda^3 + (2(k+1)^2 + 1)\lambda + 2(k+1)^2$$

şeklindedir.

İspat. Verilen ifadeler Teorem 3.5.2.'de yerine yazıldığında $C_3^{(k,k,0)}$ grafının karakteristik polinomuna ulaşılır.

Teorem 3.5.4. $C_3{}^{(k,k,0)}$ grafının spektrumu $P(k) = 8(k+1)^2 + 1$ olmak üzere

$$S = \left\{-1, \frac{\sqrt{P(k)}+1}{2}, \frac{-\sqrt{P(k)}+1}{2}\right\}$$

şeklindedir.

İspat. Bir $C_3{}^{(k,k,0)}$ grafının komşuluk matrisi 3×3 boyutludur ve

$$A = A\left(C_3{}^{(k,k,0)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & k+1 & k+1 \\ k+1 & 0 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matris yardımıyla Wolfram alpha kullanılarak özdeğerler elde edilmiştir.

Teorem 3.5.5. Bir $C_3{}^{(k,k,0)}$ grafının enerjisi

$$E\left(C_3{}^{(k,k,0)}\right) = 1 + \sqrt{8(k+1)^2 + 1}$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 3.5.4.'de $C_3{}^{(k,k,0)}$ grafının özdeğerlerinin mutlak değerlerini toplarsak bu grafın enerjisine kolayca ulaşırız.

4. BULGULAR

Bir graf verildiğinde bu graftan yeni grafların elde edilmesi, sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bu anlamda en sık kullanılan yollardan birisi başlangıçtaki graftan bir köşe veya kenar silinmesidir. Benzer şekilde köşe ve kenar ekleme, kenar büzme veya daha birçok türde yöntemler uygulanmaktadır. Tabii bu ekleme veya çıkarma yöntemleri dışında da daha birçok benzer yöntemler mevcuttur. Örnek verecek olunursa verilen başlangıç grafının doğru grafı, tam grafı, alt bölme grafı, orta grafı, Mycielskian grafı, r-alt bölme grafı ilk akla gelenler arasındadır. Bu şekilde bir graftan elde edilen yeni graflara türetilmiş graflar denilir.

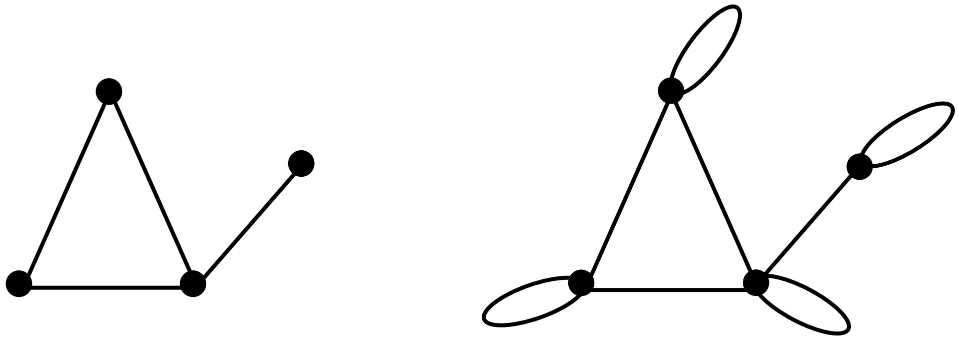
Türetilmiş grafları çalışmanın doğal bazı avantajları vardır. Aynen kümelerle, alt uzaylarla, gruplarla, halkalarla, vb. diğer matematiksel yapılarla yapılan işlemlerde olduğu gibi, çalışılmakta olan grafı çalışılması daha kolay olan yeni bir grafa ya da graflara dönüştürdüğümüzde işlemlerin boyutu küçülür ve kolaylaşır.

Köşe ve kenar eklemenin veya silmenin de benzer avantajları bulunmaktadır. Silme işleminde elde edilen yeni graf daha küçük bir graf olacaktır ve silinen köşe veya kenarın uygun bir şekilde seçilmesiyle elde edilecek olan bu türetilmiş grafın bilinen bir grafa dönüştürülmesi ve bu graf türü için var olan formül veya yöntemlerden faydalanılabilecek olması bir avantajdır. Ya da aynı türetme işlemi ard arda uygulanarak birden fazla adımda arzu edilen bir grafa ulaşılabilir ve bu ara işlemleri etkileri hesaplanarak çalışılması zor olan başlangıç grafının özellikleri belirlenebilir (Chartrand ve Zhang, 2012).

Bu bölümde bir G grafına farklı şekillerde döngü(ler), katlı kenar(lar) ve bir sallanan kenar ekleyeceğiz ve her bir durumda oluşan yeni grafı yerine göre G' veya $G+e$ ile göstereceğiz. Bu grafların bazı köşe ve kenarlarının silinmesiyle oluşan G'', $(G+e)'$, $(G+e)''$ graflarının nasıl tanımlandığını alt bölümlerde açıklayacağız. Daha sonra da her alt bölümde G grafının karakteristik polinomunun bu grafların karakteristik polinomuna bağlı olan değişimini inceleyeceğiz (Fulkerson ve diğerleri, 1963; Delen ve Cangul, 2019).

4.1. Tüm Köşelere Eşit Sayıda Döngü Ekleme

Burada bir G grafınının her bir köşesine döngü ekleyip grafın omega invaryantı, karakterististik polinomu ve özdeğerlerindeki değişimi inceleyeceğiz (Parlett, 1980). Bir G grafında her bir köşeye eşit sayıda döngü eklendiğinde yeni oluşan graf G' olsun. Örnek olarak,



G $\qquad\qquad\qquad$ G'

Şekil 4.1. G grafı ve G grafının her bir köşesine döngü eklenmesiyle oluşan G' grafı

grafları verilebilir.

Delen (2019) çalışmasında $D(G) = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \cdots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bir G grafının omega invaryantını

$$\begin{aligned} \Omega(G) &= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (\triangle - 2)a_\triangle - a_1 \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{\triangle} (i - 2)\, a_i \end{aligned}$$

olarak tanımlamıştı.

G grafının her bir köşesine s tane döngü eklendiğinde oluşan G' grafının derece dizisi

$$D(G') = \{(1+2s)^{(a_1)}, (2+2s)^{(a_2)}, (3+2s)^{(a_3)}, \cdots, (\Delta+2s)^{(a_\Delta)}\}$$

olur. G' grafının omega invaryantı ise

$$\Omega(G') = (2s-1)a_1 + 2s\,a_2 + (2s+1)a_3 + \cdots + (2s+\Delta-2)a_\Delta$$
$$= 2s(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\Delta) + \Omega(G)$$
$$= 2s\textstyle\sum_{i=1}^{\triangle} a_i + \Omega(G)$$

olarak elde edilir. Buradan G ve G' grafların omega invaryantları arasındaki ilişki

$$\Omega(G) = \Omega(G') - 2s\textstyle\sum_{i=1}^{\triangle} a_i$$
$$\Omega(G) = \Omega(G') - 2sn$$

şeklinde olur. Bölge sayıları arasındaki ilişkinin ise

$$r(G) = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$
$$r(G) = \frac{\Omega(G') - 2sn}{2} + c$$
$$r(G) = \frac{\Omega(G')}{2} + c - sn$$
$$r(G) = r(G') - sn$$

olduğu görülür. Aynı zamanda G' grafının bölge sayısının G grafının bölge sayısından eklenen döngü sayısı kadar fazla olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 4.1.1. Şekil 4.1.'deki G grafının derece dizisi $D(G) = \{1^{(1)}, 2^{(2)}, 3^{(1)}\}$ şeklindedir. Buradan G grafının omega invaryantı

$$\Omega(G) = 1(1-2) + 2(2-2) + 1(3-2) = 0$$

ve bölge sayısı da graf bağlantılı olduğundan

$$r(G) = \frac{0}{2} + 1 = 1$$

olarak bulunur. Şekil 4.1.'deki G' grafına birer döngü eklendiğinden derece dizisi $D(G') = \{3^{(1)}, 4^{(2)}, 5^{(1)}\}$ şeklindedir. Buradan G' grafının omega invaryantı

$$\Omega(G') = 1(3-2) + 2(4-2) + 1(5-2) = 8$$

ve bölge sayısı da

$$r(G') = \frac{8}{2} + 1 = 5$$

olarak bulunur. G grafının köşe sayısı da $n = 4$ olmak üzere bulunan değerler yerine yerleştirildiğinde

$$\Omega(G) = \Omega(G') - 2n$$

ve

$$r(G) = r(G') - n$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Teorem 4.1.2. Bir G grafında her bir köşeye s tane döngü eklendiğinde elde edilen G' grafının her bir özdeğeri, G grafının karşılık gelen özdeğerinin $2s$ fazlasına eşit olur. Yani λ_i'ler G grafının özdeğerleri ve λ_i' 'ler G' grafının özdeğerleri olmak üzere

$$\lambda_i' = \lambda_i + 2s$$

şeklindedir.

İspat. Herhangi bir G grafının komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

olsun. Buna göre bu matrisin karakteristik polinomu

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

şeklindedir. G grafının her bir köşesine s tane döngü eklediğimizde oluşan G' grafının komşuluk matrisi de

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}+2s & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+2s & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+2s & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}+2s & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}+2s \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve bu matrisin karakteristik polinomu da

$$\det(A' - \lambda' I) =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-(\lambda'-2s) & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-(\lambda'-2s) & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-(\lambda'-2s) & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-(\lambda'-2s) & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-(\lambda'-2s) \end{vmatrix} = 0$$

şeklindedir. Bu da A' komşuluk matrisinin özdeğerlerinin λ' parametresinin bir polinomu olarak elde edilebileceğini gösterir. G grafının her bir λ özdeğerine G' grafının bir λ' özdeğeri karşılık geleceğinden

$$\lambda_i' - 2s = \lambda_i$$

ise

$$\lambda_i' = \lambda_i \ + 2s$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 4.1.3. Şekil 4.1.'deki G grafının özdeğerleri Matrix calculator çevrimiçi programı yardımıyla

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 \approx -1{,}481, \qquad \lambda_3 \approx 0{,}311, \qquad \lambda_4 \approx 2{,}170$$

olarak bulunur. G grafının her bir köşesine bir döngü eklendiğinde oluşan Şekil 4.1.'deki G' grafının özdeğerleri Matrix calculator yardımıyla

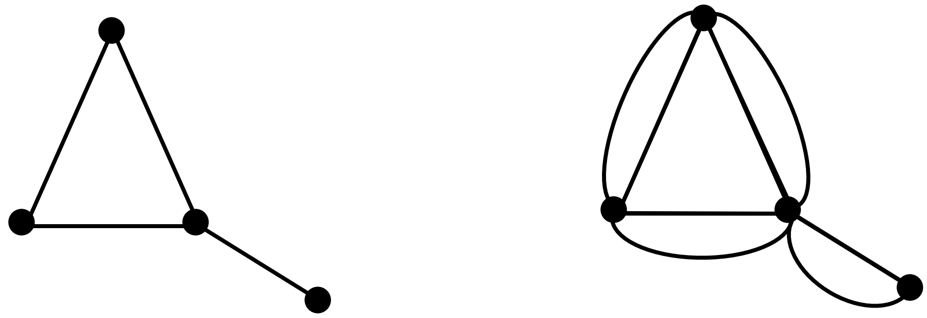
$$\lambda_1' = 1, \qquad \lambda_2' \approx 0{,}519, \qquad \lambda_3' \approx 2{,}311, \qquad \lambda_4' \approx 4{,}170$$

olarak bulunur. Burada özdeğerler incelendiğinde G grafının her bir köşesine bir döngü eklendiğinde oluşan G' grafının her bir özdeğerinin, G grafının karşılık gelen özdeğerinin 2 fazlasına eşit olduğu görülür.

4.2. Tüm Kenarlara Eşit Sayıda (Katlı) Kenar Ekleme

Bir G grafında her bir kenara s tane kenar ekleyelim ve oluşan yeni grafı da G'ile gösterelim. Burada G grafı herhangi bir graf olabilir. Burada dikkat edilecek husus, G grafında katlı kenar mevcutsa bu kenar grubundaki kenarlardan her birisi için s tane yeni kenar ekleyip katlılığı s katına çıkarmamız gerektiğidir. Benzer şekilde eğer G grafında döngüler varsa o köşelere var olan döngü sayısı kadar yeni döngü eklenmelidir.

Örnek olarak,



G $\qquad\qquad\qquad\qquad$ G'

Şekil 4.2. G grafı ve her bir kenara yeni bir katlı kenar eklenerek elde edilen G' grafı

grafları verilebilir.

G grafında her bir kenara s tane kenar eklendiğinde oluşan G' grafının derece dizisi

$$D(G') = \{(1+s)^{(a_1)}, (2+2s)^{(a_2)}, (3+3s)^{(a_3)}, \cdots, (\Delta+\Delta s)^{(a_\Delta)}\}$$

şeklindedir. G' grafının omega invaryantı ise

$$\begin{aligned} \Omega(G') &= (1+s-2)a_1 + (2+2s-2)s\,a_2 + (3+3s-2)a_3 + \cdots \\ &\quad +(\Delta+\Delta s-2)a_\Delta \\ &= s\sum_{i=1}^{\Delta} i\,a_i + \Omega(G) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan G ve G' graflarının omega invaryantları arasındaki ilişkinin

$$\Omega(G) = \Omega(G') - s\sum_{i=1}^{\Delta} i a_i$$

$$\Omega(G) = \Omega(G') - 2sm$$

olduğu görülür. Bölge sayıları arasındaki ilişki ise

$$r(G) = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$

$$r(G) = \frac{\Omega(G') - 2sm}{2} + c$$

$$r(G) = \frac{\Omega(G')}{2} + c - sm$$

$$r(G) = r(G') - sm$$

şeklinde bulunur. Bu da her bir kenara s tane katlı kenar eklememizin sonucu olarak artan bölge sayısının kenar sayısının s katı kadar olduğunu belirtir.

Örnek 4.2.1. Şekil 4.2.'deki G grafının derece dizisi $D(G) = \{1^{(1)}, 2^{(2)}, 3^{(1)}\}$ şeklindedir. Buradan G grafının omega invaryantı

$$\Omega(G) = 1(1-2) + 2(2-2) + 1(3-2) = 0$$

ve bölge sayısı da

$$r(G) = \frac{0}{2} + 1 = 1$$

olarak bulunur. G grafının her bir kenarına yeni bir katlı kenar eklenerek elde edilen Şekil 4.2.'deki G' grafının derece dizisi $D(G') = \{2^{(1)}, 4^{(2)}, 6^{(1)}\}$ şeklindedir. Buradan G' grafının omega invaryantı

$$\Omega(G') = 1(2-2) + 2(4-2) + 1(6-2) = 8$$

ve bölge sayısı da

$$r(G') = \frac{8}{2} + 1 = 5$$

olarak bulunur. G grafının kenar sayısı da $m = 4$ olmak üzere bulunan değerler yerine yerleştirildiğinde

$$\Omega(G) = \Omega(G') - 2m$$

ve

$$r(G) = r(G') - m$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Teorem 4.2.2. G grafında her bir kenara s tane kenar daha eklendiğinde oluşan graf G'; G grafının öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ve G' grafının öz değerleri $\lambda_1{}', \lambda_2{}', \cdots, \lambda_n{}'$ olsun. G' grafının öz değerleri G grafının öz değerlerinin $s+1$ katına eşittir. Yani,

$$\lambda_1{}' = (s+1)\lambda_1,\ \lambda_2{}' = (s+1)\lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n{}' = (s+1)\lambda_n$$

şeklindedir.

İspat. Herhangi bir G grafının komşuluk matrisi (1) ifadesinde verildiği gibidir. G grafında her bir kenara s tane kenar daha eklendiğinde oluşan G' grafının komşuluk matrisi ise eklemenin yapısı nedeniyle her bir a_{ij} $s+1$ katına çıkacağından

$$A' = \begin{pmatrix} (s+1)a_{11} & (s+1)a_{12} & (s+1)a_{13} & \cdots & (s+1)a_{1(n-1)} & (s+1)a_{1n} \\ (s+1)a_{21} & (s+1)a_{22} & (s+1)a_{23} & \cdots & (s+1)a_{2(n-1)} & (s+1)a_{2n} \\ (s+1)a_{31} & (s+1)a_{32} & (s+1)a_{33} & \cdots & (s+1)a_{3(n-1)} & (s+1)a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (s+1)a_{(n-1)1} & (s+1)a_{(n-1)2} & (s+1)a_{(n-1)3} & \cdots & (s+1)a_{(n-1)(n-1)} & (s+1)a_{(n-1)n} \\ (s+1)a_{n1} & (s+1)a_{n2} & (s+1)a_{n3} & \cdots & (s+1)a_{n(n-1)} & (s+1)a_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $A' = (s+1)A$ eşitliği kolayca görülür. G' grafının karakteristik polinomu

$$|A' - \lambda' I| = 0$$

şeklindedir. Burada A' yerine $(s+1)A$ yazılırsa

$$|(s+1)A - \lambda' I| = 0$$

olur. Her iki taraf ikiye bölündüğünde

$$\left|A - \frac{\lambda'}{(s+1)} I\right| = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik aynı zamanda G grafının karakteristik polinomuna eşit olduğundan

$$|A - \lambda I| = \left|A - \frac{\lambda'}{s+1} I\right| = 0$$

olur. Buradan da

$$\lambda = \frac{\lambda'}{s+1}$$
$$\lambda' = (s+1)\lambda$$

elde edilir.

Örnek 4.2.3. Şekil 4.2.'deki G grafının özdeğerleri Matrix calculator yardımıyla

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 \approx -1{,}481, \qquad \lambda_3 \approx 0{,}311, \qquad \lambda_4 \approx 2{,}170$$

olarak hesaplanır. G grafında her bir kenara birer kenar daha eklendiğinde oluşan Şekil 4.2.'deki G' grafının özdeğerleri Matrix calculator yardımıyla

$$\lambda_1' = -2, \qquad \lambda_2' \approx -2{,}962, \qquad \lambda_3' \approx 0{,}622, \qquad \lambda_4' \approx 4{,}340$$

olarak hesaplanır. Burada özdeğerler incelendiğinde G' grafının özdeğerlerinin G grafının özdeğerlerinin 2 katına eşit olduğu görülür.

Teorem 4.2.4. Bir G grafının karakteristik polinomu

$$P(G) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

olsun. G grafında her bir kenara s tane kenar eklendiğinde oluşan G' grafının karakteristik polinomu

$$P(\,G') = \lambda^n + (s+1)a_{n-1}\lambda^{n-1} + (s+1)^2 a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + (s+1)^{n-1}a_1\lambda \\ +(s+1)^n a_0$$

şeklindedir.

İspat. Herhangi bir G grafının komşuluk matrisi (1)'deki gibidir. Buna göre bu matrisin karakteristik polinomu (2) denklemindeki gibidir. Her bir kenara s tane katlı kenar daha eklendiğinde oluşan G' grafının komşuluk matrisi de

$$A' = \begin{pmatrix} (s+1)a_{11} & (s+1)a_{12} & (s+1)a_{13} & \cdots & (s+1)a_{1(n-1)} & (s+1)a_{1n} \\ (s+1)a_{21} & (s+1)a_{22} & (s+1)a_{23} & \cdots & (s+1)a_{2(n-1)} & (s+1)a_{2n} \\ (s+1)a_{31} & (s+1)a_{32} & (s+1)a_{33} & \cdots & (s+1)a_{3(n-1)} & (s+1)a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (s+1)a_{(n-1)1} & (s+1)a_{(n-1)2} & (s+1)a_{(n-1)3} & \cdots & (s+1)a_{(n-1)(n-1)} & (s+1)a_{(n-1)n} \\ (s+1)a_{n1} & (s+1)a_{n2} & (s+1)a_{n3} & \cdots & (s+1)a_{n(n-1)} & (s+1)a_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. G' grafının karakteristik polinomu ise

$$\det(A' - \lambda' I) \\ = \begin{vmatrix} (s+1)a_{11}-\lambda' & (s+1)a_{12} & (s+1)a_{13} & \cdots & (s+1)a_{1(n-1)} & (s+1)a_{1n} \\ (s+1)a_{21} & (s+1)a_{22}-\lambda' & (s+1)a_{23} & \cdots & (s+1)a_{2(n-1)} & (s+1)a_{2n} \\ (s+1)a_{31} & (s+1)a_{32} & (s+1)a_{33}-\lambda' & \cdots & (s+1)a_{3(n-1)} & (s+1)a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (s+1)a_{(n-1)1} & (s+1)a_{(n-1)2} & (s+1)a_{(n-1)3} & \cdots & (s+1)a_{(n-1)(n-1)}-\lambda' & (s+1)a_{(n-1)n} \\ (s+1)a_{n1} & (s+1)a_{n2} & (s+1)a_{n3} & \cdots & (s+1)a_{n(n-1)} & (s+1)a_{nn}-\lambda' \end{vmatrix} \\ = 0$$

şeklindedir.

$$P(G) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

polinomunda λ yerine $\frac{\lambda'}{s+1}$ yazıldığında G' grafının karakteristik polinomu

$$P(G') = \frac{1}{(s+1)^n}[(\lambda')^n + (s+1)a_{n-1}(\lambda')^{n-1} + (s+1)^2 a_{n-2}(\lambda')^{n-2} + \cdots + (s+1)^{n-1}a_1\lambda' + (s+1)^n a_0]$$

olarak bulunur. Özdeğerleri bulmak için bu ifade sıfıra eşitleneceğinden polinomun ortak çarpanı olan sabit $\frac{1}{(s+1)^n}$ değeri sadeleştirildiğinde ve λ' yerine λ konulduğunda, G' grafının karakteristik polinomu teoremdeki gibi elde edilir.

Örnek 4.2.5. Şekil 4.2.'deki G grafının karakteristik polinomu Matrix calculator yardımıyla

$$P(G) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

olarak bulunur. G grafında her bir kenara birer kenar daha eklendiğinde oluşan Şekil 4.2.'deki G' grafının karakteristik polinomu Matrix calculator yardımıyla

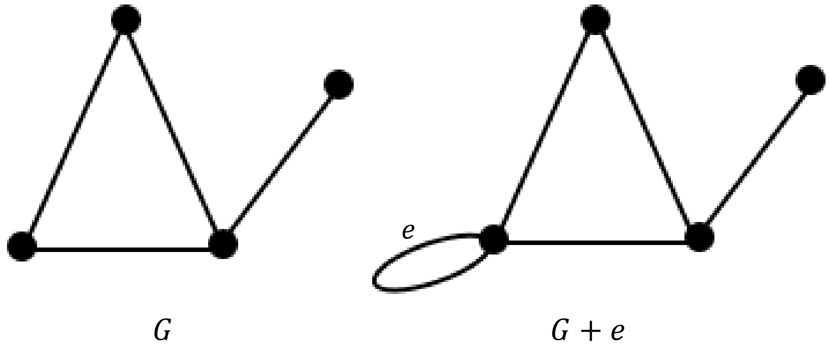
$$P(G') = \lambda^4 - 16\lambda^2 - 16\lambda + 16$$

olarak bulunur. Burada G' grafının karakteristik polinomunun G grafının karakteristik polinomunun her bir teriminin sırasıyla $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ sayılarının katı olduğu kolayca görülebilir.

4.3. G Grafına Bir Döngü Eklemenin Karakteristik Polinoma Etkisi

Bir G grafındaki herhangi bir köşeye bir döngü eklendiğinde elde edilen graf $G + e$ olsun.

Örnek olarak,



Şekil 4.3. G grafı ve G grafına bir döngü eklenmesiyle oluşan $G+e$ grafı

grafları verilebilir.

G grafının derece dizisi

$$D(G) = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \cdots, k^{(a_k)}, \cdots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$$

olsun. G grafında döngü eklenen köşenin derecesi k olsun. k derecesine sahip başka köşeler de olabileceğinden bu köşelerin sayısını da a_k ile gösterelim. G grafında herhangi bir köşeye bir döngü eklendiğinde döngü eklenen köşenin derecesi 2 artar ve $k+2$ olur ve $k+2$ köşe derecesine sahip köşe sayısı 1 artar. Aynı zamanda k köşe derecesine sahip köşe sayısı 1 azalır. Bu durumda G grafındaki herhangi bir köşeye bir döngü eklendiğinde oluşan $G+e$ grafının derece dizisi

$$D(G+e) = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \cdots, k^{(a_k-1)}, (k+1)^{(a_{k+1})}, (k+2)^{(a_{k+2}+1)}, \cdots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$$

şeklinde olur. $G+e$ grafının omega invaryantı ise

$$\begin{aligned}\Omega(G+e) &= -a_1 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (k-2)(a_k-1) + (k-1)a_{k+1} \\ &\quad + k(a_{k+2}+1) + \cdots + (\triangle - 2)a_\triangle \\ &= -a_1 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (k-2)a_k + (k-2)(-1)\end{aligned}$$

$$+(k-1)a_{k+1} + ka_{k+2} + k + \cdots + (\triangle -2)a_{\triangle}$$

şeklinde bulunur. $G + e$ grafının omega invaryantı incelendiğinde G grafının omega invaryantından $(k-2)(-1)+k$ kadar fazla olduğu görülür. Burada işlem yapıldığında

$$\Omega(G) = \Omega(G+e) - 2$$

sonucuna ulaşılır. Bölge sayıları arasındaki ilişkinin ise

$$r(G) = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$

$$r(G) = \frac{\Omega(G+e)-2}{2} + c$$

$$r(G) = \frac{\Omega(G+e)}{2} + c - 1$$

$$r(G) = r(G+e) - 1$$

olduğu görülür.

Bir G grafındaki herhangi bir köşeye bir döngü eklendiğinde elde edilen graf $G + e$ olsun. Bu döngüyü, eklendiği köşeyi ve köşeye bitişik kenarları sildiğimizde elde edilen grafı $(G+e)'$ ile gösterelim. Bu üç graf arasında aşağıdaki ilginç ve faydalı bağlantı bulunmaktadır:

Teorem 4.3.1. $G, G+e,\ (G+e)'$graflarının karakteristik polinomları arasında

$$P(G) = P(G+e) - 2P(\,(G+e)')$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. Herhangi bir G grafının komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

olsun. Buna göre bu matrisin karakteristik polinomu

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

şeklinde elde edilir. İlk olarak bu determinantı birinci satıra göre açarsak

$$(a_{11}-\lambda)\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{n+1}.a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

denklemi elde edilir. İkinci olarak birinci satır ve sütuna karşılık gelen v_1 köşesine bir döngü eklediğimizde oluşan $G + e$ grafının komşuluk matrisi de

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}+2 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matristen elde edilecek karakteristik polinom ise

$$\det(A' - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}+2-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= 0$$

şeklinde olup bu determinant birinci satıra göre açıldığında

$$(a_{11}+2-\lambda) \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{n+1}.a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

denklemi elde edilir. Buradan elde edilecek olan karakteristik polinom G grafının karakteristik polinomuna oldukça benzemektedir. Bu polinomu düzenlediğimizde G, $G+e$ ve $(G+e)'$ graflarının karakteristik polinomları arasında

$$P(G) = P(G+e) - 2P((G+e)')$$

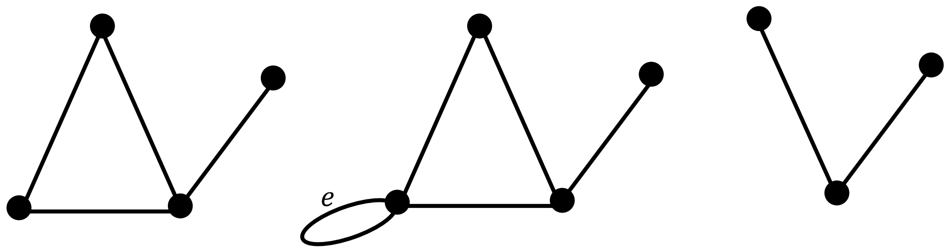
bağıntısının bulunduğu sonucuna ulaşırız. Burada

$$\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

determinantına dikkatle bakıldığında bu determinantın aslında G grafından v_1 köşesini ve bağlı olduğu tüm kenarları silerek elde edilen $(G+e)'$ grafının determinantı olduğunu görürüz. Bu determinantın $G+e$ grafında döngü sayısından dolayı iki kat fazla olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Burada iki detaya dikkat etmek gereklidir. İlk olarak döngünün eklendiği köşenin sonuca hiçbir etkisi yoktur. v_1 köşesi yerine herhangi bir köşe seçip bu köşeye bir döngü eklediğimizde de basit determinant işlemleriyle aynı bağıntının sağlandığı görülür. İkinci olarak da $G+e$ grafının köşe sayısı G ile aynı olup karakteristik polinomlarının derecelerinin eşit olacağına; $(G+e)'$ grafının köşe sayısının ise G grafından bir eksik olması nedeniyle karakteristik polinomunun derecesinin G grafının karakteristik polinomunun derecesinden bir düşük olacağına dikkat edilmelidir.

Örnek 4.3.2.



G $\quad$ $G+e$ $\quad$ $(G+e)'$

Şekil 4.4. G grafı, G grafına bir döngü eklenmesiyle oluşan $G+e$ grafı ve bu döngüyü, eklendiği köşeyi ve köşeye bitişik kenarları sildiğimizde elde edilen $(G+e)'$ grafı

Buradan Matrix calculator yardımıyla

$$P(G) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$P(G+e) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$P((G+e)') = -\lambda^3 + 2\lambda$$

polinomları bulunur. Teorem 4.3.1.'den

$$P(G) = P(G+e) - 2P((G+e)')$$

olduğundan,

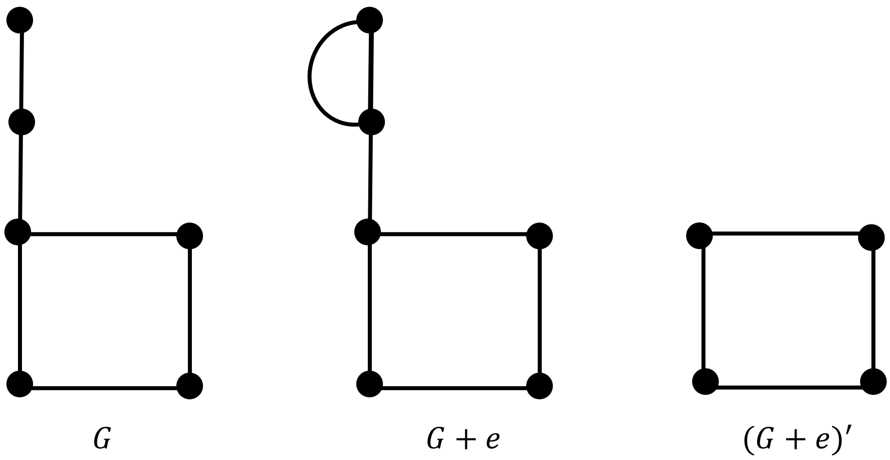
$$\begin{aligned} P(G) &= \lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2(-\lambda^3 + 2\lambda) \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 2\lambda^3 - 4\lambda \\ &= \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

polinomunun doğru olduğu görülür.

4.4. G Grafına Bir Katlı Kenar Eklemenin Karakteristik Polinoma Etkisi

Bu bölümde bir grafa bir katlı kenar oluşacak şekilde yeni bir kenar eklemenin karakteristik polinoma etkisini ele alacağız. Burada iki durum söz konusudur. Yeni kenarı herhangi bir grafta bulunan köprü kenarlardan birine aynı uç köşelere sahip iki katlı kenar oluşacak şekilde eklemek veya devir içeren bir grafta devir üzerinde bulunan bir kenara aynı uç köşelere sahip iki katlı kenar oluşacak şekilde eklemek. Her iki durumda da karakteristik polinomlar arasında farklı bağıntılar elde edilmektedir. Bu bağıntılar aşağıdaki iki teoremde ifade edilmiştir.

İlk olarak bir G grafındaki köprü kenarlardan birine ikinci bir kenar ekleyip katlı kenar oluşturularak elde edilen graf $G+e$ olsun. Bu katlı kenarı, köşelerini ve köşelerine bitişik kenarları birlikte sildiğimizde elde edilen grafı da $(G+e)'$ ile gösterelim. Örnek olarak,



Şekil 4.5. G grafı, G grafına bir katlı kenar eklenmesiyle oluşan $G+e$ grafı ve bu katlı kenarı, köşelerini ve köşelerine bitişik kenarları birlikte sildiğimizde elde edilen $(G+e)'$ grafı

grafları verilsin. G grafının derece dizisi

$$D(G) = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \cdots, k^{(a_k)}, \cdots, t^{(a_t)}, \cdots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$$

olsun. G grafında u ve v köşeleri birbirine komşu köşeler ve bu köşelerin derecesi sırasıyla k ve t olsun. k ve t derecelerine sahip başka köşeler de olabileceğinden bu köşelerin sayısını da a_k ve a_t ile gösterelim. u ve v komşu köşelerini birbirine bağlayan bir kenar daha eklendiğinde köşelerin derecesi bir artar. Aynı zamanda k ve t köşe derecesine sahip köşe sayısı 1 azalır. Bu durumda oluşan $G+e$ grafının derece dizisi

$$\begin{aligned} D(G+e) = \{&1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \cdots, k^{(a_k-1)}, (k+1)^{(a_{k+1}+1)}, \cdots, t^{(a_t-1)}, \\ &(t+1)^{(a_{t+1}+1)}, \cdots, \Delta^{(a_\Delta)}\} \end{aligned}$$

şeklinde olur. $G+e$ grafının omega invaryantı ise

$$\begin{aligned} \Omega(G+e) &= -a_1 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (k-2)(a_k-1) + (k-1)(a_{k+1}+1) \\ &\quad + \cdots + (t-2)(a_t-1) + (t-1)(a_{t+1}+1) + \cdots + (\triangle-2)a_\triangle \\ &= -a_1 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (k-2)a_k + (k-2)(-1) \\ &\quad + (k-1)a_{k+1} + (k-1) + \cdots + (t-2)a_t + (t-2)(-1) \\ &\quad + (t-1)a_{t+1} + (t-1) + \cdots + (\triangle-2)a_\triangle \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $G+e$ grafının omega invaryantı incelendiğinde G grafının omega invaryantından $(k-2)(-1)+(k-1)+(t-2)(-1)+(t-1)$ kadar fazla olduğu görülür. Burada işlem yapıldığında

$$\Omega(G) = \Omega(G+e) - 2$$

sonucuna ulaşılır. Yine aynı şekilde bölge sayıları arasındaki ilişkinin

$$r(G) = r(G+e) - 1$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.4.1. $G,\ G+e,\ (G+e)'$ graflarının karakteristik polinomları arasında

$$P(G) = P(G+e) + 3P((G+e)')$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. Yukarıdakilere benzer şekilde yapılır.

Örnek 4.4.2. Şekil 4.5'deki G, $G+e$ ve $(G+e)'$ graflarının karakteristik polinomları Matrix calculator yardımıyla

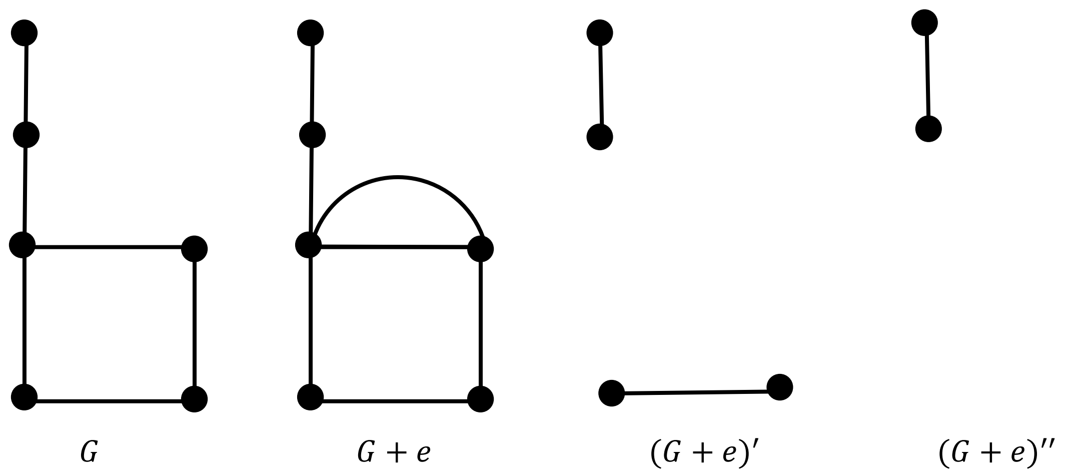
$$P(G) = \lambda^6 - 6\lambda^4 + 6\lambda^2$$
$$P(G+e) = \lambda^6 - 9\lambda^4 + 18\lambda^2$$
$$P((G+e)') = \lambda^4 - 4\lambda^2$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeleri Teorem 4.4.1.'de yerine yerleştirirsek

$$\begin{aligned} P(G) &= \lambda^6 - 9\lambda^4 + 18\lambda^2 + 3(\lambda^4 - 4\lambda^2) \\ &= \lambda^6 - 9\lambda^4 + 18\lambda^2 + 3\lambda^4 - 12\lambda^2 \\ &= \lambda^6 - 6\lambda^4 + 6\lambda^2 \end{aligned}$$

şeklinde G grafının karakteristik polinomu elde edilir.

İkinci olarak, devir içeren bir G grafındaki herhangi bir devir üzerinde olan bir kenara ikinci bir kenar ekleyip katlı kenar yaparak elde edilen graf $G+e$ ile gösterilsin. Bu katlı kenarları, köşelerini ve köşelerine bitişik kenarları birlikte sildiğimizde elde edilen grafı $(G+e)'$ ile ve katlı kenarın bulunduğu deviri ve bu devire bitişik olan tüm kenarları silerek elde edilen grafı da $(G+e)''$ ile gösterelim. Ayrıca katlı kenarın bulunduğu devir de C_n olsun. Örnek olarak, Şekil 4.6'da görülen G, $G+e$, $(G+e)'$ ve $(G+e)''$ graflarını verebiliriz.



Şekil 4.6. G grafı, G grafındaki devire bir katlı kenar eklenmesiyle oluşan $G+e$ grafı ve bu katlı kenarı, köşelerini ve köşelerine bitişik kenarları birlikte sildiğimizde elde edilen $(G+e)'$ grafı ve katlı kenarın bulunduğu deviri ve bu devire bitişik olan tüm kenarları silerek elde edilen $(G+e)''$ grafı

Teorem 4.4.3. n , katlı kenarın eklendiği devirin köşe sayısı olmak üzere, $G, G+e, (G+e)', (G+e)''$ graflarının karakteristik polinomları arasındaki bağıntı

$$P(G) = P(G+e) + 3P((G+e)') + (-1)^n 2P((G+e)'')$$

şeklindedir.

İspat. Burada da ilk olarak $G, G+e, (G+e)', (G+e)''$ graflarının komşuluk matrisleri oluşturulur ve bunlardan faydalanarak karakteristik polinomları elde edilir. Daha sonra Teorem 4.4.2.'de verilen iddianın doğruluğu bu polinomlar yerine yazılarak görülebilir.

Örnek 4.4.4. Şekil 4.6.'daki G , $G+e$, $(G+e)'$, $(G+e)''$ graflarının karakteristik polinomları Matrix calculator yardımıyla

$$P(G) = \lambda^6 - 6\lambda^4 + 6\lambda^2$$

$$P(G+e) = \lambda^6 - 9\lambda^4 + 10\lambda^2 - 1$$

$$P((G+e)') = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$$

$$P((G+e)'') = \lambda^2 - 1$$

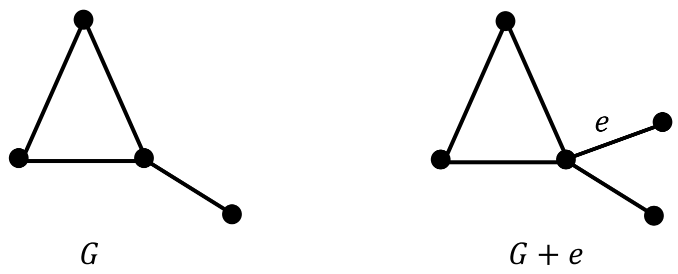
şeklinde bulunur. Yine G grafının polinomunun diğer grafların polinomlarını kullanarak elde etmek için Teorem 4.4.3.'de yerine yerleştirirsek

$$\begin{aligned} P(G) &= \lambda^6 - 9\lambda^4 + 10\lambda^2 - 1 + 3(\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1) + (-1)^4 2(\lambda^2 - 1) \\ &= \lambda^6 - 9\lambda^4 + 10\lambda^2 - 1 + 3\lambda^4 - 6\lambda^2 + 3 + 2\lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^6 - 6\lambda^4 + 6\lambda^2 \end{aligned}$$

şeklinde G grafının karakteristik polinomu elde edilir.

4.5. G Grafına Bir Sallanan Kenar Eklemenin Karakteristik Polinoma Etkisi

Bir G grafına bir sallanan kenar eklendiğinde oluşan grafı $G + e$ ile gösterelim. Örnek olarak,



Şekil 4.7. G grafı ve G grafına bir sallanan kenar eklendiğinde oluşan $G + e$ grafı

graflarını verebiliriz. G grafının derece dizisi

$$D(G) = \left\{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \cdots, k^{(a_k)}, \cdots, \Delta^{(a_\Delta)}\right\}$$

olsun. G grafının herhangi bir v köşesinin derecesi k olsun. k derecesine sahip başka köşeler de olabileceğinden bu köşelerin sayısını da a_k ile gösterelim. v köşesine bir sallanan kenar eklendiğinde oluşan $G + e$ grafının derece dizisi

$$D(G + e) = \left\{1^{(a_1+1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \cdots, k^{(a_k-1)}, (k+1)^{(a_{k+1}+1)}, \cdots, \Delta^{(a_\Delta)}\right\}$$

şeklinde olur. $G+e$ grafının omega invaryantı ise

$$\begin{aligned}\Omega(G+e) &= -(a_1+1)+\ a_3\ +\ 2a_4\ +\ 3a_5+\cdots+(k-2)(a_k-1)\\ &\quad +(k-1)(a_{k+1}+1)+\ \cdots\ +\ (\triangle\ -2)a_{\triangle}\\ &= -\,a_1-1+\ a_3\ +\ 2a_4\ +\ 3a_5+\cdots+(k-2)a_k+(k-2)(-1)\\ &\quad +(k-1)a_{k+1}+(k-1)+\cdots\ +\ (\triangle\ -2)a_{\triangle}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada işlem yapıldığında $G+e$ grafının omega invaryantı ile G grafının omega invaryantının eşit olduğu görülür. Yani

$$\Omega(G)=\Omega(G+e)$$

olur. Omega invaryantı değişmediği için bölge sayısı da aynı kalır.

Örnek 4.5.1. Şekil 4.7.'deki G grafının derece dizisi

$$D=\{1^1,2^2,3^1\}$$

şeklindedir. G grafı bir tek döngü içerdiğinden omega invaryantı $\Omega(G)=0$ (Delen ve Cangül, 2018 ve 2019) olur. G grafına bir sallanan kenar eklendiğinde oluşan Şekil 4.7.'deki $G+e$ grafının derece dizisi ise

$$D=\{1^2,2^2,4^1\}$$

şeklinde olur. Yine döngü sayısı değişmediğinden $G+e$ grafının omega invaryantı $\Omega(G+e)=0$ 'dır. G ve $G+e$ graflarının döngü sayısı da aynı olduğundan bölge sayılarıyla ilgili de

$$r(G)=\ r(G+e)=1$$

yazarız.

Aşağıdaki teoremde de bir G grafının karakteristik polinomunu, G grafının herhangi bir köşesine bir sallanan kenar eklediğimizde oluşan $G + e$ grafı ve eklenen kenara ait köşenin ve bu köşeye bitişik olan tüm kenarların silinmesiyle oluşan $(G + e)'$ grafları yardımıyla elde edildiğini göreceğiz.

Teorem 4.5.2. Bir G grafına bir sallanan kenar eklendiğinde G, $G + e$ ve $(G + e)'$ graflarının karakteristik polinomları arasındaki ilişki

$$(-\lambda)P(G) = P(G + e) + P((G + e)')$$

şeklindedir.

İspat. Herhangi bir G grafının komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

olsun. Buna göre bu matrisin karakteristik polinomu

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} - \lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

şeklindedir. G grafına bir sallanan kenar eklendiğinde kenar eklenen köşeyi 1. köşe ve eklenen sallanan kenarın köşesini de $(n + 1)$. köşe olarak numaralandırıp oluşturduğumuz $G + e$ grafının komşuluk matrisi ise

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}-1 & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} & 1 \\ a_{21}-1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Bu matrisin karakteristik polinomu da

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}-1 & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} & 1 \\ a_{21}-1 & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

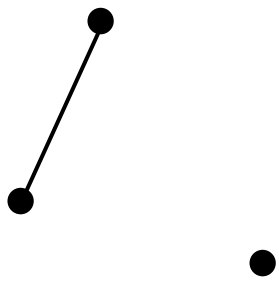
$$= 0$$

şeklindedir. Burada gerekli satır ve sütun işlemleri uygulanarak teorem ispatlanır.

Örnek 4.5.3. Şekil 4.7.'deki $G+e$ grafının karakteristik polinomu Matrix calculator yardımıyla

$$P(G+e) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda$$

şeklinde bulunur. Şekil 4.7.'deki G grafına eklenen kenara ait köşeyi ve bu köşeye bitişik olan tüm kenarların sildiğimizde oluşan $(G+e)'$ grafı Şekil 4.8.'deki gibidir:



$(G+e)'$

Şekil 4.8. Şekil 4.7.'deki G grafına eklenen kenara ait köşeyi ve bu köşeye bitişik olan tüm kenarların sildiğimizde oluşan $(G+e)'$ grafı

Bu grafın karakteristik polinomu ise

$$P((G+e)') = -\lambda^3 + \lambda$$

olarak bulunur. Bulduğumuz karakteristik polinomları Teorem 4.5.2.'de yerleştirirsek G grafının karakteristik polinomunu

$$(-\lambda)P(G) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda - \lambda^3 + \lambda$$
$$(-\lambda)P(G) = -\lambda^5 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$$
$$P(G) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

olarak buluruz.

4.6. Graflarda Manyetik Ayırma

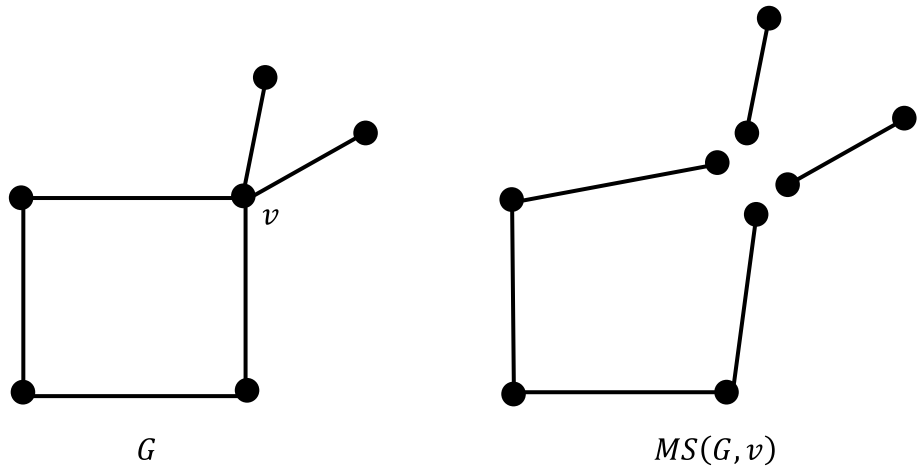
Graflarda farklı amaçlarla köşe ve kenarlarla yapılan işlemler mevcuttur. Bunlardan başlıcaları köşe silme, kenar silme, köşe ekleme, kenar ekleme, kenar büzme şeklindedir. Örneğin bir grafın renklendirme polinomunu ve bundan faydalanarak renklendirme sayısını hesaplamada kullanılan en pratik yöntemlerden biri olan Birkhoff-Lewis Teoremi'nde verilen grafın renklendirme polinomunu ve sayısını hesaplamak için kenar silme ve kenar büzme operasyonları uygulanır ve bunlara karşılık gelen polinomların farkı bize başlangıçta verilen grafın renklendirme polinomunu verir. Tabii ki bu işlemi her seferinde daha küçülen graflar için defalarca tekrarlayabiliriz ve renklendirme polinomunu kolayca söyleyebileceğimiz küçük küçük graflar yardımıyla sonuca ulaşabiliriz (Maritz ve Mouton, 2012).

Köşe ve kenar silme ya da ekleme işlemlerinden daha birçok alanda faydalanılır. Örneğin grafların topolojik graf indekslerinin hesaplanmasında büyük bir grafın indekslerini hesaplamak istediğimizde köşe veya kenar silerek elde edeceğimiz daha küçük grafların indekslerinden faydalanabiliriz. Bu mantık yürütmeyle hareket edildiğinde herhangi bir graf özelliğini çalışmak ya da herhangi bir graf parametresini hesaplamak istediğimizde verilen grafa bu operasyonları uygulayarak daha küçük graflara dönüştürür ve bu graflardan faydalanarak da istenilen sonucu elde ederiz (Hosoya, 2019; Mahalank ve diğerleri, 2022; Wiener, 1947).

Bu bölümde literatürde yer almayan yeni bir graf operasyonu tanımlayacağız ve bu operasyon yardımıyla grafların karakteristik polinomlarını bulacağız. Manyetik ayırma adını verdiğimiz bu operasyonda bir köşede bitişen tüm kenarları birer mıknatıs çubuğu gibi düşünüp bu köşede buluşan uçlarına aynı elektrik yükünü vererek birbirinden ayırmış olacağız. Şimdi manyetik ayırma operasyonunu tanımlayabiliriz:

Tanım 4.6.1. Bir G grafı ve bu grafa ait bir v köşesi verilsin. G grafını, v köşesinde buluşan tüm kenarları v köşesi ayrılan her bir parçada kalmak ve köşeye bağlı her kenar birbirinden ayrılmak üzere parçalara ayırma işlemine ***manyetik ayırma*** denir. G grafına manyetik ayırma uygulandığında ayrılan köşe v olmak üzere elde edilen graf $\boldsymbol{MS(G,v)}$ ile gösterilir.

Örnek 4.6.2. Şekil 4.9.'daki G grafında v köşesine manyetik ayırma işlemi uygulandığında v köşesinde birleşen dört kenarın, birbirini iterek v köşesi uzaklaşan her bir kenarda kalacak şekilde ayrılmasıyla Şekil 4.9.'daki $MS(G,v)$ grafının elde edildiği görülür. Graflar incelendiğinde $MS(G,v)$ grafının köşe sayısının G grafının köşe sayısından 3 fazla yani köşe sayısında v köşesinin derecesinin 1 eksiği kadar artış olduğu sonucuna ulaşılır. Kenar sayısında ise bir değişiklik olmaz.



Şekil 4.9. G ve v köşesine manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(G,v)$ grafı

Örnekteki grafa bakıldığında derecesi dört olan v köşesinde manyetik ayırma yaptığımız için bu köşe artık birbirinden ayrılan dört kenarın her birisinde kalacaktır. G grafında v köşesine komşu olan bu dört kenardan iki tanesi bir devir üzerinde bulunduklarından manyetik ayırma sonrasında bu iki kenar yine aynı bileşende kalacaktır. Ancak diğer iki kenar sallanan kenarlar olduklarından bu kenarlar birbirlerinden uzaklaşınca bağımsız birer kenar haline dönüşmüştür. Yani grafın bileşen sayısı iki artarak birden üçe çıkmıştır.

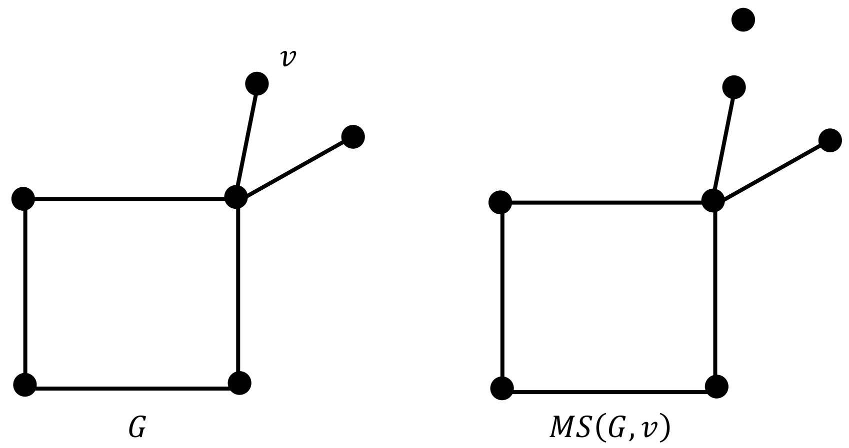
Tabii ki bu durum bu graf için geçerlidir. Eğer G grafında v köşesine komşu olan köşeler başka kenarlar ile de birbirlerine bağlı olsalardı bu durumda v köşesinde manyetik ayırma yaptığımızda bileşen sayısı artmayabilirdi.

Sonuç 4.6.3. Bir G grafının köşe sayısı n olsun. G grafına v köşesinde manyetik ayırma işlemi uygulandığında oluşan graf $MS(G,v)$ olsun. Bu köşenin derecesi d ise $MS(G,v)$ grafının köşe sayısı da $n+d-1$ olur.

İspat. Manyetik ayırma işlemi uygulandığında G grafının v köşesine ait bütün kenarlar birbirinden ayrılacağından ispat kolayca görülür.

Ayrıca sık karşılaşacağımız iki durum da izole ve sallanan köşelerde manyetik ayırma yapılması durumlarıdır. Bir G grafında derecesi 0 olan izole bir köşede manyetik ayırma yapıldığında grafa sadece graftan bağımsız yeni bir izole köşe eklenecektir. Benzer şekilde bir G grafında derecesi 1 olan bir (sallanan) köşeye manyetik ayırma uygulandığında $MS(G,v)$ grafının G grafından ve bir sıfır grafından oluştuğu görülür. Şekil 4.10.'da bu duruma bir örnek verilmiştir:

Örnek 4.6.4.



Şekil 4.10. G grafı ve v köşesine manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(G,v)$ grafı

Bağlantısız grafların karakteristik polinomunun bileşenlerin karakteristik polinomlarının çarpımından elde edildiği iyi bilinmektedir. Bu durumdan yola çıkarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.6.5. Bir G grafında derecesi 0 veya 1 olan bir köşeye manyetik ayırma uygulandığında G grafı ile $MS(G,v)$ grafının karakteristik polinomları arasındaki ilişki

$$P\big(MS(G,v)\big) = (-\lambda)P(G)$$

şeklindedir. Yani her iki durumda da grafın karakteristik polinomu $-\lambda$ ile çarpılır.

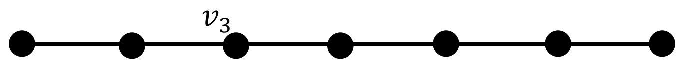
İspat. Her iki durumda da $MS(G,v)$ grafının bileşenlerinden biri tek köşeli bir sıfır grafıdır. Sıfır grafının karakteristik polinomu $P(N_1) = -\lambda$ ve diğer bileşen de G grafı olduğundan teorem sağlanır.

Aşağıda sık kullanılan bazı özel grafların herhangi bir köşesine manyetik ayırma uygulandığında grafların karakteristik polinomları arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

4.7. P_n Grafında Manyetik Ayırmanın Karakteristik Polinoma Etkisi

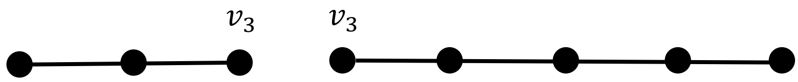
P_n grafının köşelerini bir uçtan başlayarak diğerine kadar $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ şeklinde adlandıralım. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere P_n grafına herhangi bir v_k köşesinden manyetik ayırma uygulandığında grafın iki parçaya ayrıldığı oluşan grafın köşe sayısının da P_n grafının köşe sayısından bir fazla olduğu görülür. Ayrıca baştan k-ıncı köşe olan v_k köşesini ayırma ile sondan v_{n+1-k} köşesini ayırma işlemleri aynı sonucu vereceğinden aşağıdaki teoremler uygulanırken her zaman küçük olan köşeyi baz alacağız.

Örnek 4.7.1. Manyetik ayırma uygulamak için P_7 grafını alalım.



Şekil 4.11. P_7 patika grafı

P_7 grafına v_3 köşesinden manyetik ayırma uygulandığında



Şekil 4.12. P_7 patika grafına v_3 köşesinden manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(P_7, v_3)$ grafı

şeklinde $MS(P_7, v_3)$ grafı oluşur. Bu grafın aynı zamanda $MS(P_7, v_5)$ grafı ile izomorfik olduğuna dikkat ediniz.

Teorem 4.7.2. $n \geq 4$ ve $k \geq 2$ veya $k \leq n-2$ olmak üzere P_n grafına v_k köşesinden manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(P_n, v_k)$ grafının karakteristik polinomu P_n grafının karakteristik polinomundan yararlanarak

$$P\big(MS(P_n, v_k)\big) = (-\lambda)P(P_n) + P(MS(P_{n-4}, v_{k-2}))$$

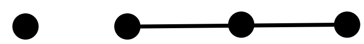
şeklinde elde edilir.

İspat. Burada $n = 2$, $k = 1$ veya $k = n$ alırsak Teorem 4.6.5'deki duruma döneriz. Ayrıca $n = 3$ alındığında da formülün $P(MS(P_{n-4}, v_{k-2}))$ kısmının bire eşit olduğu görülür.

Örnek 4.7.3. P_7 grafının karakteristik polinomu Matrix calculator yardımıyla

$$P(P_7) = -\lambda^7 + 6\lambda^5 - 10\lambda^3 + 4\lambda$$

olarak bulunur. P_7 grafına v_3 köşesinden manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(P_7, v_3)$ grafının karakteristik polinomunu bulmak için aşağıdaki işlemler uygulanır. $MS(P_{7-4}, v_{3-2})$ grafının P_3 grafına v_1 köşesinden manyetik ayırma uygulandığını ifade ettiğini yani



Şekil 4.13. P_3 patika grafına v_1 köşesinden manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(P_3, v_1)$ grafı

şeklinde gösterebiliriz. Buradan $MS(P_3, v_1)$ grafının karakteristik polinomu

$$P\big(MS(P_3, v_1)\big) = \lambda^4 - 2\lambda^2$$

olarak bulunur. Aynı zamanda

$$(-\lambda)P(P_7) = \lambda^8 - 6\lambda^6 + 10\lambda^4 - 4\lambda^2$$

olduğuna göre aranan $P\big(MS(P_7, v_3)\big)$ polinomu

$$P\big(MS(P_7, v_3)\big) = \lambda^8 - 6\lambda^6 + 10\lambda^4 - 4\lambda^2 + \lambda^4 - 2\lambda^2$$
$$= \lambda^8 - 6\lambda^6 + 11\lambda^4 - 6\lambda^2$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.7.2'de verilen formülü alternatif olarak tüm n ve k değerleri için şu şekilde de verebiliriz:

Teorem 4.7.4. $MS(P_n, v_k)$ grafının karakteristik polinomu

$$P\big(MS(P_n, v_k)\big) = P(P_k) \cdot P(P_{n+1-k})$$

şeklinde de elde edilir.

İspat. $MS(P_n, v_k)$ grafı P_k ve P_{n+1-k} şeklinde iki ayrı yol grafı olarak ayrılır. O halde $MS(P_n, v_k)$ grafının karakteristik polinomu bu iki bileşenin karakteristik polinomlarının çarpımından elde edilebilir. Böylece teorem sağlanır.

Örnek 4.7.5. P_7 grafına v_3 köşesinden manyetik ayırma uygulandığında bir P_3 bir tane de P_5 grafı oluşur. $MS(P_7, v_3)$ grafının karakteristik polinomunu bulmak için teoremden yararlanırsak

$$P\big(MS(P_7, v_4)\big) = P(P_3) \cdot P(P_5)$$
$$= (-\lambda^3 + 2\lambda)(-\lambda^5 + 4\lambda^3 - 3\lambda)$$
$$= \lambda^8 - 6\lambda^6 + 11\lambda^4 - 6\lambda^2$$

sonucunu elde ederiz. $MS(P_n, v_k)$ grafının spektrumunu P_k ve P_{n+1-k} graflarının spektrumlarını kullanarak yazabiliriz.

Teorem 4.7.6. $MS(P_n, v_k)$ grafının spektrumu

$$S(MS(P_n, v_k)) = S(P_k) \cup S(P_{n+1-k})$$

$$= \left\{\lambda_i : \lambda_i = 2\cos\frac{\pi i}{k+1} \; veya \; \lambda_i = 2\cos\frac{\pi i}{n+2-k}, i = 1,2,3, \dots, n\right\}$$

şeklindedir.

İspat. P_n polinomunun kökleri $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için

$$\lambda_i = 2\,cos\frac{\pi i}{n+1}$$

şeklindedir (Brouwer ve Haemers, 2012; Li ve diğerleri, 2012). Dolayısıyla P_k ve P_{n+1-k} polinomlarının kökleri yazılarak $MS(P_n, v_k)$ grafının spektrumuna kolayca ulaşılır.

Örnek 4.7.7. $MS(P_7, v_3)$ grafının bir P_3 bir tane de P_5 grafından oluştuğunu söylemiştik. Burada P_3 grafının spektrumu

$$S(P_3) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

şeklindedir. P_5 grafının spektrumu ise

$$S(P_5) = \{0, 1, -1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

şeklindedir. O halde $MS(P_7, v_3)$ grafının spektrumu

$$S(MS(P_7, v_3)) = \{0^2, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

şeklinde olur.

Teorem 4.7.8. $MS(P_n, v_k)$ grafının enerjisi

$$E\big(MS(P_n, v_k)\big) = 2\sum_{i=1}^{k}\left|\cos\frac{\pi i}{k+1}\right| + 2\sum_{i=1}^{n+1-k}\left|\cos\frac{\pi i}{n+2-k}\right|$$

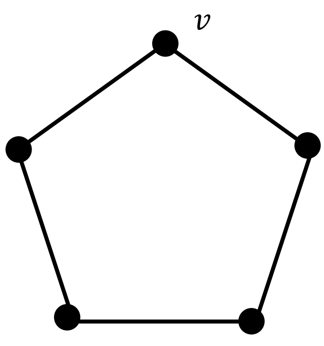
şeklindedir.

İspat. $MS(P_n, v_k)$ grafının Teorem 4.7.6.'da elde edilen özdeğerlerini enerji formülünde yerine yazdığımızda teorem sağlanır.

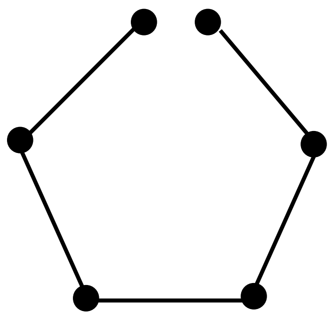
4.8. C_n Grafında Manyetik Ayırmanın Karakteristik Polinoma Etkisi

C_n grafında v köşesinden manyetik ayırma uygulandığında oluşan graf $MS(C_n, v)$ ile gösterilsin. Burada $MS(C_n, v)$ grafının P_{n+1} grafına eşit olduğu görülür.

Örnek 4.8.1.



C_5



$MS(C_5, v)$

Şekil 4.14. C_5 devir grafı ve C_5 devir grafına v köşesinden manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(C_5, v)$ grafı

Şekil 4.14.'teki C_5 grafına v köşesinden manyetik ayırma uygulandığında Şekil 4.14.'teki $MS(C_5, v)$ grafının elde edildiği aynı zamanda bu grafın da P_6 grafına eşit olduğu görülür.

Teorem 4.8.2. $n \geq 4$ olmak üzere $MS(C_n, v)$ grafının karakteristik polinomu

$$P\big(MS(C_n, v)\big) = (-\lambda)P(C_n) + P(P_{n-3}) + (-1)^{n+1}2\lambda$$

şeklindedir

İspat. Burada $MS(C_n, v)$ ile P_{n+1} grafları eşit olduğundan patika graflarla ilgili sonuçlardan faydalanarak aranan formülü

$$P\big(MS(C_n, v)\big) \; = \; P(P_{n+1}) = (-\lambda)P(C_n) + P(P_{n-3}) + (-1)^{n+1}2\lambda$$

şeklinde elde ederiz.

Örnek 4.8.3. Şekil 4.14.'teki C_5 grafına v_1 köşesinden manyetik ayırma uygulayalım. C_5 grafının karakteristik polinomu

$$P(C_5) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2$$

olarak bulunur. P_2 grafının karakteristik polinomu ise

$$P(P_2) = \lambda^2 - 1$$

olur. Teorem 4.8.2.'deki manyetik ayırma formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} P\big(MS(C_5, v)\big) &= (-\lambda)(-\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2) + \lambda^2 - 1 + (-1)^{5+1}2\lambda \\ &= \lambda^6 - 5\lambda^4 + 5\lambda^2 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 + 2\lambda \\ &= \lambda^6 - 5\lambda^4 + 6\lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

Dolayısıyla $MS(C_n, v)$ grafının spektrumu yerine P_{n+1} grafının spektrumunu alabiliriz.

Sonuç 4.8.4. $MS(C_n, v)$ grafının spektrumu

$$S\big(MS(C_n, v)\big) = S(P_{n+1})$$
$$= \left\{\lambda_i : \lambda_i = 2\cos\frac{\pi i}{n+2} \text{ , } i = 1,2,3, \dots, n\right\}$$

şeklindedir.

İspat. P_n grafının karakteristik polinomunun kökleri

$$\lambda_i = 2\,cos\frac{\pi i}{n+1} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

olduğundan P_{n+1} grafının karakteristik polinomunun kökleri buradan yazılabilir. Buradan $MS(C_n, v)$ grafının spektrumu elde edilir.

Teorem 4.8.5. $MS(C_n, v)$ grafının enerjisi

$$E\big(MS(C_n, v)\big) = E(P_{n+1}) = 2\sum_{i=1}^{n+1}\left|cos\frac{\pi i}{n+1}\right|$$

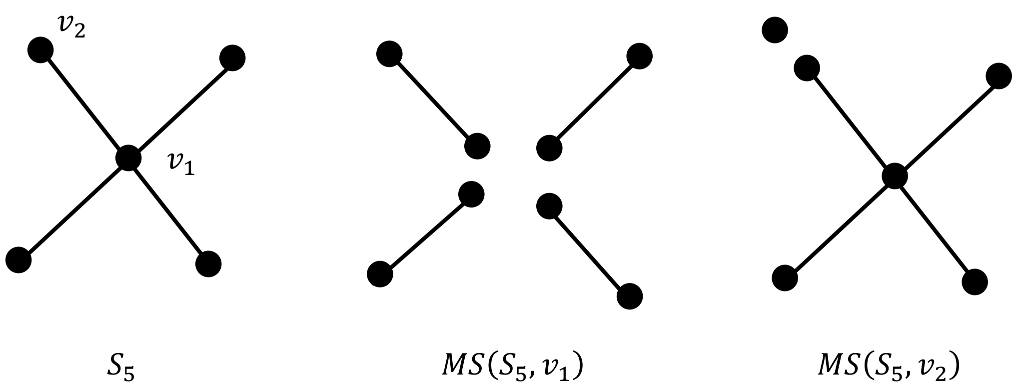
şeklindedir.

İspat. $MS(C_n, v)$ ile P_{n+1} grafının spektrumu aynı olduğundan bunları enerji formülünde yerleştirirsek teorem sağlanır.

4.9. S_n Grafında Manyetik Ayırmanın Karakteristik Polinoma Etkisi

S_n grafında v_k köşesinden manyetik ayırma uygulandığında oluşan graf $MS(S_n, v_k)$ ile gösterilir. Burada iki ayrı durum oluşur. Sallanan köşelerden herhangi birine ya da merkezdeki köşeye manyetik ayırma uygulanabilir.

Örnek 4.9.1.



Şekil 4.15. S_5 yıldız grafı, S_5 yıldız grafına sırasıyla v_1 ve v_2 köşelerinden manyetik ayırma uygulanmasıyla oluşan $MS(S_5, v_1)$ ve $MS(S_5, v_2)$ grafları

Şekil 4.15.'deki S_5 grafına merkezdeki v_1 köşesinden manyetik ayırma uygulandığında $MS(S_5, v_1)$ grafı, v_2 sallanan köşesinden manyetik ayırma uygulandığında da $MS(S_5, v_2)$ grafı elde edilir.

Teorem 4.9.2. Bir S_n grafında sallanan köşelerden herhangi birine manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(S_n, v_k)$ grafının karakteristik polinomu

$$P\big(MS(S_n, v_k)\big) = (-\lambda)P(S_n)$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 4.6.5.'ten eşitliğin doğru olduğu görülür.

Teorem 4.9.3. Bir S_n grafının merkezi köşesine manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(S_n, v_1)$ grafının karakteristik polinomu

$$P\big(MS(S_n, v_1)\big) = (-1)^n \lambda^{n-2} P(S_n) + \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{2(n-1)-2i} (-1)^i$$

şeklindedir.

İspat. Teoremde verilen bağıntıda adı geçen polinomlar yerine konulduğunda eşitliğin doğru olduğu görülür.

Örnek 4.9.4. Şekil 4.15.'deki $MS(S_5, v_1)$ grafının karakteristik polinomunu elde edelim. Bunun için $P(S_5) = -\lambda^5 + 4\lambda^3$ olduğu hatırlanırsa

$$\begin{aligned} P\big(MS(S_5, v_1)\big) &= (-1)^5\lambda^{5-2}P(S_5) + \sum_{i=2}^{5-1}\binom{5-1}{i}\lambda^{2(5-1)-2i}(-1)^i \\ &= -\lambda^3(-\lambda^5 + 4\lambda^3) + \binom{4}{2}\lambda^4 - \binom{4}{3}\lambda^2 + \binom{4}{4} \\ &= \lambda^8 - 4\lambda^6 + 6\lambda^4 - 4\lambda^2 + 1. \end{aligned}$$

Buradan teorem sağlanır.

Bir S_n grafının merkezi köşesine manyetik ayırma uygulandığında $n-1$ tane P_2 grafı oluşur. Buna göre bu grafın karakteristik polinomu, alternatif ve daha kısa bir şekilde aşağıdaki gibi de verilebilir:

Teorem 4.9.5. $MS(S_n, v_1)$ grafının karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} P\big(MS(S_n, v_1)\big) &= P(P_2)^{n-1} \\ &= (\lambda^2 - 1)^{n-1} \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $MS(S_n, v_1)$ grafının karakteristik polinomu oluşan P_2 graflarının çarpımı şeklinde yazılabileceğinden teorem sağlanır.

Örnek 4.9.6. Şekil 4.15.'deki $MS(S_5, v_1)$ grafının karakteristik polinomunu Teorem 4.9.5. yardımıyla elde edelim:

$$P\big(MS(S_5, v_1)\big) = (\lambda^2 - 1)^4.$$

Buradan sağ taraftaki ifadeyi açarsak

$$P\big(MS(S_5, v_1)\big) = \lambda^8 - 4\lambda^6 + 6\lambda^4 - 4\lambda^2 + 1$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.9.7. Bir S_n grafının merkezi köşesine manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(S_n, v_1)$ grafının spektrumu

$$\begin{aligned} S\big(MS(S_n, v_1)\big) &= S(P_2\,)^{n-1} \\ &= \{-1^{n-1}, 1^{n-1}\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $S(P_2\,)^{n-1}$ ifadesi $S(P_2\,)$ spektrumundaki her bir elemandan $n-1$ tane alınacağını göstermektedir.

İspat. $MS(S_n, v_1)$ grafı $n-1$ tane P_2 grafından oluştuğundan bu grafın kökleri P_2 grafının köklerinden oluşur. O halde spektrumu da teoremdeki gibi yazılabilir. Teorem sağlanır.

Teorem 4.9.8. $MS(S_n, v_1)$ grafının enerjisi

$$E\big(MS(S_n, v_1)\big) = 2(n-1)$$

şeklindedir.

İspat. $MS(S_n, v_1)$ grafı $n-1$ tane P_2 grafından oluşur. Yani P_2 grafının özdeğerlerine baktığımızda $n-1$ tane 1 ve $n-1$ tane -1 olduğu görülür. Enerji özdeğerlerin mutlak değerlerinin toplamı olduğundan teorem sağlanır.

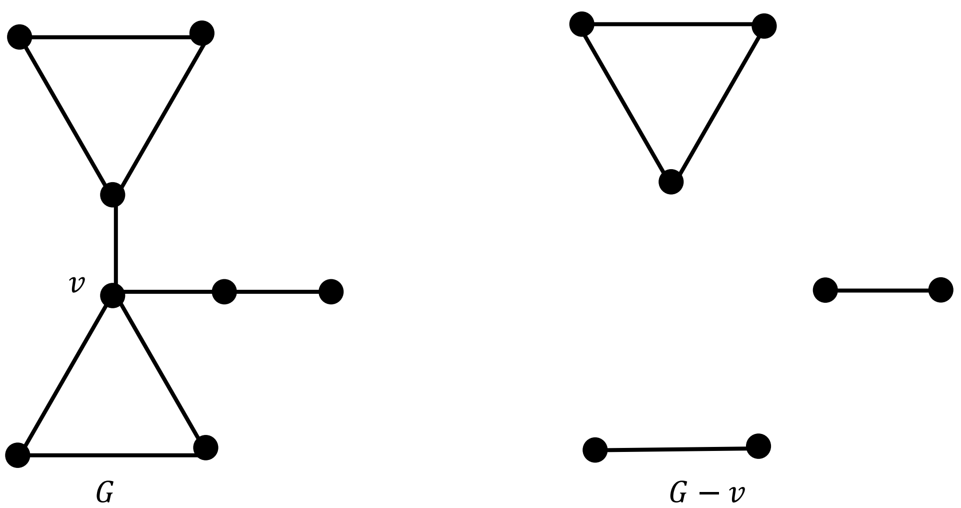
Graflar çeşitli özelliklerine göre sınıflandırıldığında bunların en önemlilerinden biri grafın bağlantılı olup olmamasıdır. Bir grafta seçilen her iki nokta arasında bir yol bulunabiliyorsa graf bağlantılı bir graftır. Bağlantılı bir grafta bazı köşelerin veya bazı kenarların silinmesi sonucunda graf bağlantısız hale gelebilir. Bir graftan bir köşe sildiğimizde graf bağlantısız hale geliyorsa bu köşe grafın kopma köşesidir. Bir kenar sildiğimizde graf bağlantısız hale geliyorsa da bu kenar bir köprü kenar veya köprü adını alır (Yurttaş Güneş ve diğerleri, 2019).

Aşağıdaki bölümlerde bir graftan bir kopma köşesi, bir köprü veya bir köprü olmayan kenar silindiğinde grafın karakteristik polinomunda gerçekleşen değişimi inceleyeceğiz. Bunları yaparken manyetik ayırma işleminden de yararlanacağız.

4.10. Bir Graftan Bir Kopma Köşesini Silmenin Karakteristik Polinoma Etkisi

Bir grafın bir kopma köşesi silindiğinde tanım gereği bu köşeye bağlı kenarlar da silinir ve graf bağlantısız hale gelir. Bir G grafında v kopma köşesi silindiğinde oluşan grafı $G - v$ ile gösterelim.

Örnek 4.10.1.



Şekil 4.16. G grafı ve G grafında v köşesinin silinmesiyle oluşan $G - v$ grafı

Şekil 4.16.'daki G grafının v kopma köşesi silindiğinde bu köşeye komşu bütün kenarlar da silinerek $G - v$ grafı oluşur.

Aşağıdaki işlemlerde G grafında v kopma köşesini silerken iki ayrı durum oluştuğunu göreceğiz. Burada ilk durumda v köşesi komşu kenarlarıyla birlikte silinir ve $G - v$ grafı oluşur. İkinci durumda ise daha önce tanımladığımız v köşesinden manyetik ayırma işlemi uygulanır ve $MS(G, v)$ grafı oluşur. Bu her iki durumu kullanıp G grafının karakteristik polinomuna ulaşacağız.

Teorem 4.10.2. Bir G grafında v kopma köşesi silindiğinde oluşan grafın bileşen sayısı n, varsa kopma köşesine ait döngü sayısı ise r ile gösterilsin. G grafında bir v kopma köşesi silindiğinde oluşan $G - v$ grafının bileşenleri $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ olsun. Yine v köşesine manyetik ayırma uygulandığında oluşan bileşenler $G_1{}', G_2{}', G_3{}', \dots, G_n{}'$ olsun. Bu durumda G grafının karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} P(G) = {} & P(G_1{}').P(G_2).P(G_3)\dots P(G_n) + P(G_1).P(G_2{}').P(G_3)\dots P(G_n) \\ & + P(G_1).P(G_2).P(G_3{}')\dots P(G_n) + \cdots + P(G_1).P(G_2).P(G_3)\dots P(G_n{}') \\ & + (n-1).(\lambda - 2r).P(G_1).P(G_2).P(G_3)\dots P(G_n) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. Tümevarım ile görülür.

Örnek 4.10.3. Örnek 4.10.1.'deki G grafının karakteristik polinomunu Teorem 4.10.2.'deki formülü kullanarak aşağıdaki gibi bulabiliriz:

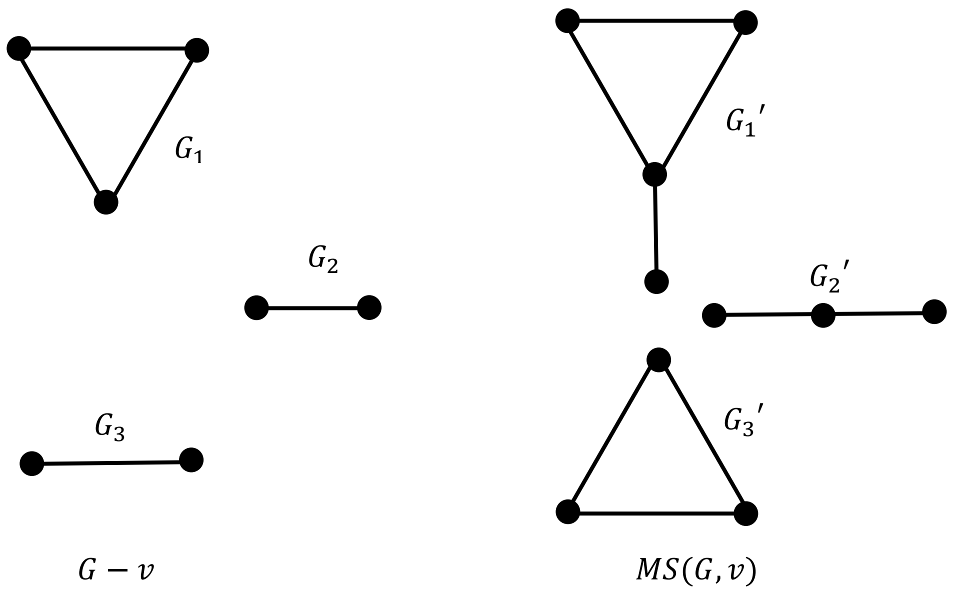
$G - v$ grafı üç bileşenden oluştuğundan bunları G_1, G_2, G_3 olarak adlandıralım. O halde bu grafların karakteristik polinomları

$$P(G_1) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$P(G_2) = \lambda^2 - 1$$

$$P(G_3) = \lambda^2 - 1$$

şeklindedir.



Şekil 4.17. Şekil 4.16.'daki G grafında v köşesinin silinmesiyle oluşan $G - v$ grafı ve v köşesinden manyetik ayırma uygulandığında oluşan $MS(G, v)$ grafı

$MS(G, v)$ grafı da üç bileşenden oluştuğundan bu bileşenleri $G_1{}', G_2{}', G_3{}'$ olarak adlandıralım. Bileşenlerin karakteristik polinomlarını da

$$P(G_1{}') = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$P(G_2{}') = -\lambda^3 + 2\lambda$$

$$P(G_3{}') = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

şeklinde yazarız. Burada $G - v$ grafı ve $MS(G, v)$ grafı üç bileşenden oluştuğundan Teorem 4.10.2.'deki formülü

$$P(G) = P(G_1{}').P(G_2).P(G_3) + P(G_1).P(G_2{}').P(G_3) + P(G_1).P(G_2).P(G_3{}')$$
$$+2\lambda.P(G_1).P(G_2).P(G_3)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. O halde yukarıda bulduğumuz ifadeleri yerine yazarsak G grafının karakteristik polinomunu elde ederiz:

$$P(G) = \lambda^8 - 9\lambda^6 - 4\lambda^5 + 22\lambda^4 + 18\lambda^3 - 11\lambda^2 - 14\lambda - 3.$$

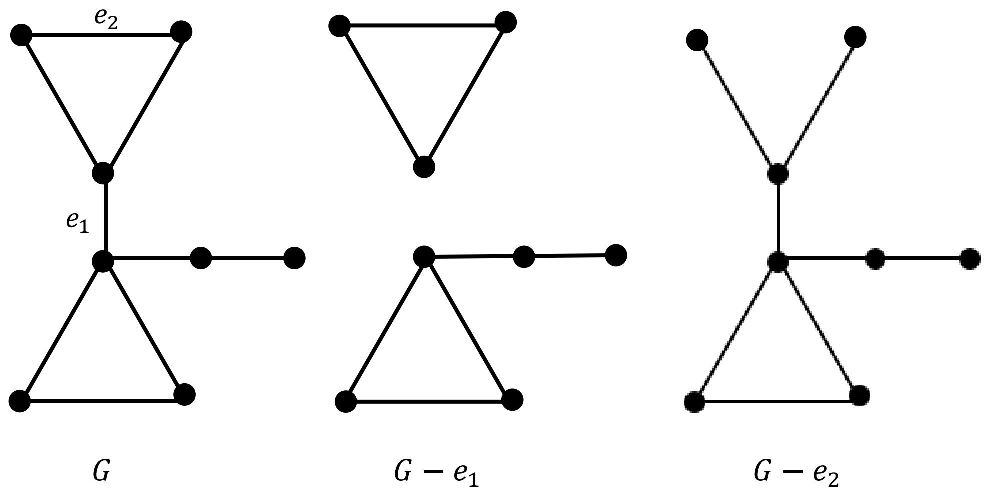
Bu G grafının karakteristik polinomu alternatif olarak Matrix calculator yardımıyla da elde edilebilir ve aynı sonuç bulunur.

Eğer G grafı bağlantısızsa silinen kopma köşesinin bulunduğu bileşene Teorem 4.10.2.'deki gibi işlemler uygulanıp bir formül elde edilir. Kopma köşesinin bulunmadığı bileşenler ise bu formüle çarpım olarak eklenir.

4.11. En Fazla Bir Yüze Ait Bir Kenar Silmenin Karakteristik Polinoma Etkisi

Herhangi bir grafın en fazla bir yüze ait bir kenarı silindiğinde grafın bağlantısı kopabilir veya kopmayabilir. Bir kenar sildiğimizde grafın bağlantısı kopuyorsa graf iki bileşenden oluşur. Bir G grafında en fazla bir yüze ait bir e kenarını sildiğimizde oluşan grafı $G - e$ ile gösterelim.

Örnek 4.11.1.



Şekil 4.18. G grafı, G grafında sırasıyla e_1 ve e_2 kenarlarının silinmesiyle oluşan $G - e_1$ ve $G - e_2$ grafları

Şekil 4.18.'deki G grafından e_1 kenarı silindiğinde $G - e_1$ grafı oluşur. Burada G grafının bağlantısının koptuğu ve sonuçta $G - e_1$ grafının iki bileşenden oluştuğu görülür. Şekil 4.18.'deki G grafında e_2 kenarı silindiğinde ise $G - e_2$ grafı oluşur. Burada G grafının bağlantısının kopmadığı görülür. Aşağıda grafın bağlantılılığının değiştiği ve değişmediği iki durumu ele alacağız.

Teorem 4.11.2. Bir G grafından bir e kenarı silindiğinde oluşan $G - e$ grafı bağlantısız hale geliyorsa silinen kenara ait köşelerin ve bu köşelere bitişik olan tüm kenarların silinmesiyle oluşan grafı $(G - e)'$ ile gösterelim. Verilen ifadelerden yola çıkarak G grafının karakteristik polinomu

$$P(G) = P(G - e) - P((G - e)')$$

şeklinde elde edilir.

İspat. Herhangi bir G grafının komşuluk matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

olsun. Buna göre bu matrisin karakteristik polinomu

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} - \lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

şeklindedir. Burada G grafının bağlantısı kopacak şekilde bir kenarını sildiğimizde silinen kenarın köşelerini daha önceki bölümlerde de yaptığımız gibi 1 ve 2 olarak numaralandırırsak oluşan $G-e$ grafının komşuluk matrisi

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}-1 & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21}-1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

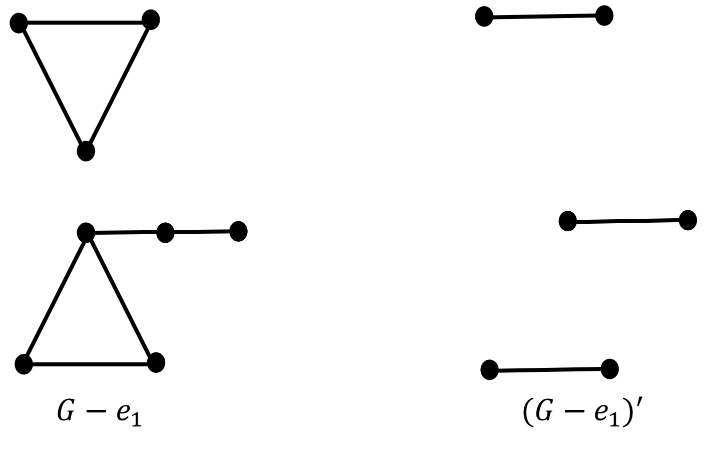
şeklinde olur. Bu matrisin karakteristik polinomu da

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}-1 & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21}-1 & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

şeklindedir. Burada gerekli satır ve sütun işlemleri uygulanarak teorem ispatlanır.

Örnek 4.11.3. Şekil 4.18.'deki G grafının e_1 kenarını sildiğimizde oluşan $G-e_1$ ve $(G-e_1)'$ grafları



Şekil 4.19. Şekil 4.18.'deki $G-e_1$ grafı ve G grafında silinen kenara ait köşelerin ve bu köşelere bitişik olan tüm kenarların silinmesiyle oluşan $(G-e_1)'$ grafı

şeklindedir. G grafının karakteristik polinomunu bulmak için öncelikle $G - e_1$ ve $(G - e_1)'$ graflarının karakteristik polinomlarını Matrix calculator yardımıyla

$$P(G - e_1) = \lambda^8 - 8\lambda^6 - 4\lambda^5 + 19\lambda^4 + 18\lambda^3 - 8\lambda^2 - 14\lambda - 4$$

$$P((G - e_1)') = \lambda^6 - 3\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1$$

şeklinde buluruz.

Teorem 4.11.4. Bir G grafından bir en fazla bir yüze ait e kenarı silindiğinde oluşan $G - e$ grafı hala bağlantılı ise silinen kenara ait köşelerin ve bu köşelere bitişik olan tüm kenarların silinmesiyle oluşan grafı $(G - e)'$ ile; silinen kenara ait köşelerin komşu olduğu diğer köşelerin ve bu köşelere bitişik olan tüm kenarların silinmesiyle oluşan grafı da $(G - e)''$ ile gösterelim. Verilen ifadelerden yola çıkarak G grafının karakteristik polinomu

$$P(G) = P(G - e) - P((G - e)') + 2P((G - e)'')$$

şeklinde elde edilir.

İspat. Teorem 4.11.2'ye benzer şekilde ispatlanır.

Örnek 4.11.5. Şekil 4.19.'daki G grafının karakteristik polinomunu bulmak için $G - e$, $(G - e)'$ ve $(G - e)''$ graflarının karakteristik polinomlarını Matrix calculator yardımıyla

$$P(G - e) = \lambda^8 - 8\lambda^6 - 2\lambda^5 + 16\lambda^4 + 6\lambda^3 - 9\lambda^2 - 4\lambda$$

$$P((G - e)') = \lambda^6 - 6\lambda^4 - 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

$$P((G - e)'') = -\lambda^5 + 5\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 2$$

olarak buluruz. Bu polinomları Teorem 4.11.4.'de yerine yerleştirirsek G grafının karakteristik polinomu

$$
\begin{aligned}
P(G) = {} & \lambda^8 - 8\lambda^6 - 2\lambda^5 + 16\lambda^4 + 6\lambda^3 - 9\lambda^2 - 4\lambda \\
& -(\lambda^6 - 6\lambda^4 - 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda - 1) \\
& +2(-\lambda^5 + 5\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 2) \\
= {} & \lambda^8 - 9\lambda^6 - 4\lambda^5 + 22\lambda^4 + 18\lambda^3 - 11\lambda^2 - 14\lambda - 3
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin ana bölümlerinde omega invaryantı, graf enerjisi ve grafların karakteristik polinomlarıyla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bunlardan bazılarında var olan sonuçlara yenileri eklenmiş; bazılarında ise üzerinde ilk defa çalışılan sonuçlar elde edilmiştir.

Bazı özel grafların omega invaryantı ve graf enerjisi bulunmuş ve döngü eklemenin üçgensel grafın karakteristik polinomuna etkisi hesaplanmıştır. Yine aynı şekilde katlı kenar, döngü eklemenin, bir kenar ekleme veya silmenin, bir köşe silmenin grafın karakteristik polinomuna etkisi araştırılmıştır.

Manyetik ayırma adı verilen yeni bir problem tanımlanmıştır. Patika, devir, yıldız graflarına manyetik ayırma uygulandığında karakteristik polinomlarındaki değişim incelenmiş ve graf enerjileri hesaplanmıştır.

Bu tezde elde edilen sonuçlar geliştirilebilir. Örneğin, diğer graf türlerinde de manyetik ayırma uygulanabilir veya genel sonuçlar da elde edilebilir. Döngü, katlı kenar içeren grafların karakteristik polinomlarına ve spektrumlarına ve enerjilerine bakılabilir. Bir kenar ekleme veya silme, bir köşe silme işlemi uygulanan grafların spektrumları üzerinde çalışılabilir.

Manyetik ayırma, kenar ekleme, silme, köşe silme işlemleri başka bilim dallarına da yön verecek şekilde tanıtılıp ve de özellikle bilgisayar programları ile desteklenerek uygulamalar yapılması amaçlanabilir.

KAYNAKLAR

Balaban, A. T. 1976. Chemical applications of graph theory. Academic Press, London, 389.

Balakrishnan, R., 2004. The energy of a graph, Linear Algebra and its Applications, 387, 287–295.

Biggs, N. L., Lloyd, E. K., & Wilson, R. J. (1999). Graph Theory 1736-1936. In *Oxford University Press*.

Benjamin, A., Chartrand, G., Zhang, P. 2015. The Fascinating World of Graph Theory, Princeton University Press, Princeton.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 2008. Graph Theory*, Springer, New York.*

Brezin, E., Hikami, S., 2000. Characteristic Polynomials of Random Matrices. Commun. Math. Phys. 214, 111-135.

Brouwer, A. E., Haemers, W. H., 2012. Spectra of Graphs, *Springer, New York.*

Capobianco, M., Molluzzo, J. C. 1978. Examples and Counterexamples in Graph Theory. North-Holland, NY.

Chartrand, G., Zhang, P., 2012. A First Course in Graph Theory. New York, Dover.

Chen, W. 1976. Applied Graph Theory, *North-Holland Publishing Company, New York.*

Cvetkovic, D., Doob, M., Sachs, H., 1995. Spectra of Graphs - Theory and Aplications, *Academic Press, Heidelberg.*

Delen, S., Cangul, I.N., 2019. Extremal Problems On Components And Loops İn Graphs. Acta Mathematica Sinica, English Series, - Springer, 35, 161–171. https://doi.org/10.1007/s10114-018-8086-6

Delen, S., Yurttaş, A., Togan, M., Cangul, I. N., 2019. Omega invariant of graphs and cyclicness, Balkan Society of Geometers, Geometry Balkan Press, 21, 91-95.

Deo, N. 1974. Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice-Hall, NJ.

Diestel, R. 2010. Graph Theory. Springer GTM.

Fulkerson, D. R., Hoffman, A. J., McAndrew, M. H., 1963. Some Propertıes Of Graphs Wıth Multıple Edges. Cambridge University Press, 166-177.

Golumbic, M. C., Hartman, I. B. 2005. Graph Theory, Combinatorics and Algorithms,78.

Gross, J. L., Yellen, J. 2003. Handbook of Graph Theory, CRC Press, Boca Raton, 1192.

Gutman, I., 1978. The Energy of a Graph. *Ber. Math. Statist. Sekt. Forshungsz. Graz* 103,1−22.

Hakimi, S. L. 1962. On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. *J. SIAM Appl. Math.,* 10, 496-506.

Harary, F. 1994. Graph Theory, *Addison-Wesley, USA.*

Havel, V., 1955. A remark on the existence of finite graphs (Czech). *Casopic Pest. Mat.*, 80, 477-480.

Hosoya, H. 2019. The most private features of the topological index. *MATI*, 1(1): 25-33.

Kim, H., Toroczkai, Z., Miklos, I., Erdös, P. L., Szekely, L. A. 2009. On Realizing all Simple Graphs with a Given Degree Sequence. *J. Phys. A: Math. Theor.* 42, 1-6.

Li, X., Shi, Y., Gutman, I., 2012. Graph Energy. *Springer, New York.*

Mahalank, P., Ozon Yildirim S., Ersoy Zihni F., Majhi B. K., Cangul I. N., 2022. Some topological indices of pentagonal double chains. ITM Web of Conferences 49. https://doi.org/10.1051/itmconf/20224901004

Maritz, P., Mouton, S. 2012. Francis Guthrie: A Colourful Life. *The Mathematical Intelligencer*, 34(3): 67-75.

Mowshowıtz, A., 1972. The Characteristic Polynomial of a graph. Journal Of Combınatorıal Theory 12, 177-193.

Nikiforov, V., 2007. The energy of graphs and matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 326, 1472-1475.

Parlett, B. N., 1980. The symmetric eigenvalue problem. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Saoub, K. R. 2021. Graph Theory: An Introduction to Proofs, Algorithms and Applications (Textbooks in Mathematics), CRC Press, Boca Raton, 437.

Todeschini, R., Consonni, V. 2008. Handbook of Molecular Descriptors, Wiley-VCH, Weinheim, 688.

Trinajstic, N. 1992. Chemical graph theory. CRC Press, USA, 352.

Trudeau, R. J. 1993. Introduction to Graph Theory. Dover, NY.

Tyshkevich, R. I., Chernyak, A. A., Chernyak, Zh. A. 1987. Graphs and Degree Sequences I, *Cybernetics* 23 (6), 734-745.

Vasudev, C. 2007. Combinatorics and Graph Theory. New Age International Publishers, India.

Walikar, H. B., Ramane, H. S., Hampiholi, P. R., 1999. On the energy of a graph, in:

Wallis, W. D. 2007. A Beginner's Guide to Graph Theory. Birkhauser, Boston.

West, D. B. 2001. Introduction to Graph Theory. Pearson, India.

Wiener, H. 1947. Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of the American Chemical Society*, 69(1): 17-20.

Wilson, R. J. 1998. Introduction to Graph Theory. Addison Wesley, Malaysia.

Wilson, R. J., Watkins, J. J. 1990. Graphs, An Introductory Approach. John Wiley and Sons, NY.

Yurttaş Güneş, A., Delen, S., Demirci M., Cevik, A. S., Cangül, İ. N., 2020. Fibonacci Graphs, Symmetry 2020, 12, 1383; 13 pages. https://doi.org/10.3390/sym12091383

Yurttaş Güneş, A., Togan, M., Çelik, F., Cangül, İ. N., 2019. Cut Vertex and Cut Edge Problem for the Topological Indices of Graphs, *Journal of Taibah University for Science*, 13 (1): 1175-1183. https://doi.org/10.1080/16583655.2019.1695520

Zverovich, I. E., Zverovich, V. E. 1992. Contributions to the Theory of Graphic Sequences, *Discrete Mathematics* 105, 293-303.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fikriye ZİHNİ
Doğum Yeri ve Tarihi : Kınık / 28.08.1989
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Bergama Akif Ersezgin Anadolu Lisesi / 2007
Lisans : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi/Matematik Bölümü / 2011
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü/Matematik Bölümü / 2013

Doktora : Bursa Uludağ Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik Anabilim Dalı / 2023

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Şebinkarahisar Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi/2013-2017
: İnegöl Nuh Mehmet Küçükçalık Anadolu Lisesi / 2017-halen

İletişim (e–posta) : 511811001@ogr.uludag.edu.tr

Yayınlar :

Ozden, H., Ersoy Zihni, F., Ozen Erdogan, F., Cangul, I. N., Srivastava, G., Srivastava, H. M., Independence Number of Graphs and Line Graphs of Trees by Means of Omega Invariant, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, (2020), 114:91

Delen, S., Ersoy Zihni, F., Ozen Erdogan, F., Ozden Ayna, H., Cangul, I. N., The effect of vertex and edge deletion on independence number of graphs, Far East Journal of Applied Mathematics, 112 (2022), 11-19,

Mahalank, P., Ozon Yildirim, S., Ersoy Zihni, F., Majhi, B. K., Cangul, I. N., Some Topological Indices of Pentagonal Double Chains, ITM Web of Conferences 49, 01004 (2022), Fourth ICAMNM 2022, 8 pages

Bildiriler :

Cangul, I. N., Ersoy Zihni, F., Ozon Yildirim, S., Realizability Properties of Degree Sequences, MICOPAM 2022-The 5th Mediterranean International Conference of Pure and Applied Mathematics and Related Areas, 27-30 October, 2022, Sherwood Exclusive Lara Otel, Antalya, Turkey

Cangul, I. N., Ersoy Zihni, F., Ozon Yildirim, S., Realizability of Degree Sequences, Departmental Seminar, Mathematics Department, 09th November, 2022, University of Kufa, Iraq

Cangul, I. N., Ersoy Zihni, F., Ozon Yildirim, S., New properties of degree sequences of Graphs, The Sixth International Conference Combinatorics, Graph Theory and Network Topology 2022, 15-16 November, 2022, University of Jember, Jember, Indonesia

Ozon Yildirim, S., Zihni, F., Cangul, I. N., Effect of Loops and Multiple Edges on Graph Energy, International Conference on Multidisciplinary Research, 21- 25 November, 2022, Sharnbasva University, Kalaburagi, Karnataka, India

Projeler :

Omega İnvaryantı Yardımıyla Verilen Bir Derece Dizisinden Elde Edilecek Graf Sayısının Belirlenmesi (Determination of the number of graphs which can be obtained from a given degree sequence by means of onega invariant), Project Leader, (joint work with Aysun Yurttaş Güneş, Fikriye Zihni, Hacer Özden Ayna, Şeyma Ozon Yıldırım) 10.06.2022-12.06.2023 (Bursa Uludağ University Research Fund (Project No: KUAP (F) 2022/1049)), 214.796,90 TL, continuing