T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
SINIF ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

İLKÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNDE MUHAKEME ETME ve İSPATLAMA DÜŞÜNCESİNİN GELİŞİMİ

(DOKTORA TEZİ)

Çiğdem ARSLAN

Danışman

Doç. Dr. Murat ALTUN

BURSA 2007

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Anabilim Dalı, Matematik Bilim Dalı'nda U2004194 numaralı Çiğdem ARSLAN'nın hazırladığı "İlköğretim Öğrencilerinin Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi" konulu Doktora ile ilgili tez savunma sınavı, 22/10/ 2007 günü 10.00 – 12.00 saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin başarılı olduğuna oybirliği ile karar verilmiştir.

Sınav Komisyonu Başkanı
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi
Prof.Dr. Kadri ARSLAN
Uludağ Üniversitesi

Tez Danışmanı
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi
Doç.Dr. Murat ALTUN
Uludağ Üniversitesi

Üye
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ
Uludağ Üniversitesi

Üye
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi
Doç.Dr. Sinan OLKUN
Ankara Üniversitesi

Üye
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi
Doç. Dr. Asude BİLGİN
Uludağ Üniversitesi

22/10/ 2007

ÖZET

Yazar : Çiğdem ARSLAN

Üniversite : Uludağ Üniversitesi

Anabilim Dalı : İlköğretim

Bilim Dalı : Matematik

Tezin Niteliği : Doktora Tezi

Sayfa Sayısı : IX + 79

Mezuniyet Tarihi : .... /.... / 2007

Tez Danışmanı : Doç.Dr.Murat ALTUN

İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi

Bu araştırma; ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişiminin incelenmesi amacıyla hazırlanmıştır. İspatlama düşüncesinin gelişimi matematik içinde önemli bir konudur. Öyle ki matematiğin örüntüleri bulma ve ispatlama çalışması olarak bile nitelendirildiği olur. Matematiğin ispatlamayla ilgili iki aşamalı yöntemi bulunmaktadır. İlki bir özellik ya da ilişkiyi bulma veya ortaya çıkarma çabasını; ikincisi ise bulunan ilişkinin ispatlanma sürecini içermektedir. İspatlama süreci genellemelerin üretilmesinde izlenen yoldur.

Araştırma Bursa ili merkez ilçelerinde bulunan ve rasgele seçilen yedi ilköğretim okulunda okuyan 679 öğrenci ile 2005-2006 öğretim yılının ikinci yarıyılında gerçekleştirilmiştir.

Tarama modelinde düzenlenen çalışmanın öğrencilerin zihinsel gelişim basamaklarına uygun düşen ispat düzeylerinin belirlenmesi kısmı nicel, yargılarının arkasında yatan sebeplerin incelenmesi kısmı nitel olarak yapılmıştır. Beş sorudan oluşan veri toplama aracı, araştırmanın nicel boyutunu gerçekleştirmek için öğrencilere kendi sınıflarında uygulanmış, nitel boyutunu gerçekleştirmek için seçilen 36 öğrenci ile özel görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerin tüm düşüncelerini açıklamalarına yetecek süre verilmiştir.

Veri analizi sonucunda, ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme düzeylerinin literatürce desteklenen ortalama verilere göre düşük olduğu ve bu süreçte kullanılması beklenen stratejilerden yeterli düzeyde kullanamadıkları; verilen ifadenin doğruluğunu göstermede tercih ettikleri ispat türünün sınıf seviyesi ile birlikte belli oranda değiştiği (görsel ve örnekle doğrulamadan cebirsel ispata yönelme) görülmüştür. Özellikle 8. sınıf öğrencileri ile 6 ve 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ispatı tercih etme düzeyleri arasında anlamlı farklılık bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Muhakeme, İspat, Doğrulama, Genelleme

ABSTRACT

Author	: Çiğdem ARSLAN
University	: Uludag University
Main Department	: Primary School Teacher Training
Sub Department	: Mathematics
Kind of thesis	: Doctoral Dissertation
Number of page	: IX + 79
Graduation date	: …. /…. / 2007
Supervisor	: Assist. Prof..Dr. Murat ALTUN

The Development of Elementary School Students on Their Reasoning and Proof Ideas

This study was aimed to investigate sixth, seventh and eighth grade students' development of reasoning and proof ideas. Development of proof idea is such an important subject in mathematics that sometimes mathematics is described as study of finding patterns and proving. In mathematics, there is a method on proving with two stages. The first one includes effort to find or reveal a characteristic or a pattern; the second one includes process of proving of relationship that have been found. Proving process is the way which is followed to produce generalizations.

The study were carried out in 2005-2006 school year with 679 students from seven different primary schools that were randomly selected in Bursa.

The current research has two sections. The first part has quantitative data which measured the levels of proof of the participants according to cognitive development levels. The second part which has qualitative data that has analyzed the reasons of the students decisions. The data source which is consisted of five questions was given to the participants in their regular lesson hour for the quantitative part of research; private interviews were made with 36 students for the qualitative section of this research. During interviews, sufficient time was given to each participant in order to explain their reasoning.

As results of data analyses, according to average data supported by literature it was observed that 6th, 7th and 8th grade students have a low level of reasoning, they couldn't utilize expected strategies at an enough level and kind of proof which they have preferred to show correctness of given expression have changed in proportion of grade level (from visual and empirical to algebraic). It was found that there was a significant difference between eighth graders and the other students.

Key Words: Mathematical Reasoning, Proof, Justification, Generalization

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR VE ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR

ŞEKİLLER

BÖLÜM I

GİRİŞ

Matematiğin insan hayatındaki yeri ve önemi artık tartışma konusu olmaktan çıkmıştır. Son onlu yıllarda, matematikten en çok ne şekilde yararlanılabileceği tartışılmış ve buna bağlı olarak dış dünyada, arkasından ülkemizde matematik programlarında ciddi değişiklikler meydana gelmiştir. Bunların başında 1960 ve 1970'li yıllarda modern matematik adı altındaki program değişiklikleri, 1980 ve 1990'lı yıllarda matematik öğretim yöntemlerindeki değişiklikler sayılabilir. Gerek içerik, gerek yöntemler (içeriğin öğrenciye sunum şekli) üzerindeki bu tür çalışmalarda önemli referans noktalarından biri kuşkusuz ki matematiğin önemli ayrıntısının ne olduğu ve buna bağlı olarak öğretimde neyin öne çıkarılması gerektiğidir.

Öğretimin planlanmasında çocuğun gelişim düzeyleri (somut ve soyut düşünebilme dönemleri), matematik konularının önşartlılık ilişkisi, öğrenme ile ilgili kuramlardaki değişiklikler ve matematikten ne anlaşıldığı, matematik öğretiminin güncellenmiş amaçları başlıca faktörlerdir. Bu bağlamdaki konular ve bunların alt alanları alan araştırmalarını oluşturmaktadır. Matematik deneyle doğrulanabilen ancak deneye dayanmayan doğrulamanın yeterli olmadığı ispatlamaya dayanan bir bilgidir. Bu yönüyle ispatın matematik eğitiminde büyük bir önemi vardır. Matematiksel bilginin oluşumundaki öneminden ötürü ispatın ve ispatlama becerisinin öğretimi de önem taşımaktadır. Artık matematik öğretimi soyut formül ve kurallar kazandırmaktan ziyade bilginin elde ediliş yolları ile daha çok ilgilidir. Matematiksel bilgiyi üretmede en temel bir yol olarak ispat sonucunda elde edilen bilginin yanı sıra, sürecin, (bilginin elde ediliş şeklinin) tanınması bakımından önemi geçmiştekine göre daha da artmıştır. Ancak Hanna (2000) matematiksel teori ve uygulamadaki önemine rağmen lise matematik programında ispata her geçen gün daha az yer verildiğini bildirmektedir. Çalışmasında ispatın matematik programındaki gerilemesine hız veren üç etken incelenmektedir: a) ispatın sadece yükseköğretime devam edecek öğrencilere öğretilmesi gerektiği fikri; b) kendi kendine öğrenmeye dayanan (heuristic) tekniklerin muhakeme etme ve doğrulama becerilerinin geliştirilmesinde daha kullanışlı olduğu için tümdengelimsel ispatlamanın öğretimine artık gerek olmadığı görüşü; c) matematiksel doğrulamada dinamik görsel yaklaşımların lehine olduğu düşüncesi ile sınıfta tümdengelimsel ispat kullanımının azalması. Bu etkenlerden hareketle Hanna (2000) ispatın matematik eğitiminin her düzeyinde gerekli bir bileşen olduğu ve hem kendi kendine öğrenmeye dayanan teknikler hem de dinamik görsel yaklaşımlarla bir arada olması gerektiği sonucuna ulaşmıştır. İspat kavramı üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmanın konusu olarak da, ispat kavramı ve ispatlama düşüncesinin gelişimi seçilmiştir. İspat kavramı okulların matematik programlarında hemen her düzeyde yer alan matematiksel kavramlardan biridir. Okul programlarının, bir matematik genellemenin ispatına yer verme şekli, ispatla ilgili öğretmen alışkanlıkları, ispatlama düşüncesinin gelişiminde önemli birer faktördürler. Bunların düzenlenmesi ve eksikliklerinin giderilmesi, ispatın ne olduğu, matematik eğitimindeki yeri, zihinsel gelişim basamaklarına uygun düşen ispat düzeylerinin belirlenmesi ve bu belirlemelere uygun programların geliştirilmesi ile mümkündür. Bu çalışma matematikte ispatlama düşüncesinin gelişimini incelemekle, bu konulardan birine odaklanmaktadır. Bu çalışmaya olan ihtiyacı daha net olarak ortaya koymak için, aşağıda matematik, muhakeme, ispat ve ispatın matematik içindeki yeri tartışılmaktadır.

1. Matematik

Değişik kaynaklarda matematik için verilen birkaç tanım şöyledir:

- Matematik, "düşüncenin tümdengelimli bir işletim yolu ile sayılar, geometrik şekiller, fonksiyonlar uzaylar gibi soyut varlıkların özelliklerini ve bunların arasında kurulan ilişkileri inceleyen bilimler grubuna verilen genel addır" (Türk Ansiklopedisi 1966).

- Matematik örüntülerin ve ilişkilerin bir çalışması, bir düşünme yolu, diziliş ve iç uyum ile karakterize edilen bir sanat, tanımlanmış terimleri ve sembolleri dikkatlice kullanan bir dil, bir alettir (Reys , Suydam, Lindquist ve Smith 1995).

- Biçimlerin, sayıların ve niceliklerin yapılarını, özelliklerini, aralarındaki bağıntıları tümdengelimli akıl yürütme yoluyla inceleyen ve aritmetik, geometri, cebir gibi dallara ayrılan bilimdir (Püsküllüoğlu 1994).

-Matematik yaşamın bir soyutlanmış biçimidir (De Corte 2004).

Bu tanımlar matematiğin bir düşünme yolu olduğunu, varlıkların özelliklerini ve bunların arasındaki ilişkileri inceleyen ve soyutlamaya dayanan bir bilim dalı olduğunu ortaya koymaktadır.

İnsanın uğraşı kendi yaşamını garanti altına almak ve yaşam kalitesini yükseltmek için çevreye uyma, onu kontrol altında tutma ve ondan yararlanma amacına dönüktür. Bu noktada matematik çevredeki olayların özünü oluşturan ilişkileri niceleme, bağıntıları çıkarma ve bu bağıntılardan yararlanarak, mevcut durum ve gelecek hakkında karar vermede yararlanılan bir kaynak olarak algılanabilir.

De Corte (2004)'un tanımından anlaşılacağı üzere, matematik bir soyutlama bilimidir. Yaşanan ya da tasarlanan her şeyin bir matematik modeli vardır ve birçok olayın matematiksel modeli aynılık veya benzerlik gösterir. Bu matematiksel modeller bir dereceye kadar bulunabilir ve bulunabildiği takdirde modelden faydalanarak birçok başka olayın açıklanabilmesi mümkün olur. Ulaşılan bu bağıntılar, oluşmalarında esin kaynağı oluşturan olaylardan bağımsız olarak birer matematik kavram haline gelirler. Böylece matematik yapılmış olur ve bu oluşum biçiminden ötürü matematik bir soyutlama bilimidir. Elde edilen matematik kavram ya da bağıntılar artık başka birtakım olay ve olguların açıklanması için de muhtemel birer modeldirler. Bu noktada matematik insan zihninde, olayların davranım kurallarını ortaya koyan, onların açıklanması için bilinmesi gereken esaslı bir yol olarak görünmektedir.

Matematiği ilişkileri bulma ve ispatlama çalışması olarak niteleyen Yıldırım (1996)'a göre bu nitelemede matematiğin iki aşamalı yöntemi bulunmaktadır: İlk aşama, bir özellik ya da ilişkiyi bulma, ortaya çıkarma çabasını; ikinci aşama bulunan, ilişkiyi ispatlama sürecini içermektedir. Bir ilişkiyi bulma ya da sezinleme daha çok yaratıcı imge, sezgi ve deneyim gerektiren psikolojik bir olaydır; ispatlama ise, kural ve ölçütleri belli "mantıksal yargılama" diyebileceğimiz bir akıl yürütmedir. Buna göre matematiği, sayı, nokta, küme, fonksiyon türünden soyut nesnelere özgü özellikleri ortaya çıkarma, belirleme ve mantıksal olarak kanıtlama (ispatlama) bilimi diye tanımlamıştır. Bu tanımda ispat kavramı matematiğin tanımında bir ana unsur olarak görünmektedir.

Matematik sadece neyin doğru olduğu veya neyin işe yaradığını belirleme ile değil, neden doğru olduğunu veya neden işe yaradığını açıklama ve diğerlerini doğru olduğuna veya işe yaradığına ikna etme ile de ilgilidir. Yani, matematik esas olarak ispatla ilgilidir (Almedia 1996).

2. Muhakeme, ispat ve problem çözme

Fen bilimleri olgu ve olayları gözlemler yoluyla doğrularken matematik mantıksal muhakeme ile doğrulamaktadır (Ross 1998). Örneğin "buharlaşma" olayı hemen her fen programı düzeyinde incelenebilir ve kavranması buharlaşma olayının gerçekleştiği doğal durumları gözlemek veya buharlaşmayı gözlemlemeyi sağlayacak deneysel ortamı kurup gözlem yapmak suretiyle olur. Bir matematik örnek olarak "iki tek sayının çarpımı da tektir" yargısına ulaşmak için sayıların sonsuzluğu içinde hiçbir örneği dışarıda bırakmayacak şekilde bir muhakeme (ispat) gerekir. Bu önermenin doğruluğu

k, k′ ,K birer doğal sayı, x ve y birer tek sayı olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{l} x = 2k + 1 \\ y = 2k' + 1 \end{array}\right\} \quad x.y = 2K+1$$

olduğu gösterilmek suretiyle yapılır.

Bu yüzden matematikte muhakeme ve onun alt ve daha özelleşmiş bir kavramı olarak ispat öne çıkmaktadır. Dolayısıyla matematiğin özü ispatlarda yatmaktadır ve açıklayıcı örnek, doğrulama, varsayım ve ispat kavramları arasındaki ayırım ve bunların birbirleri ile ilişkisi vurgulanmalıdır.

Muhakeme ve ispat kavramları ilgili literatürde hep birlikte, birbirinin tamamlayıcısı olarak ele alınmıştır. Bundan ötürü aşağıda öncelikle muhakeme ile ilgili bilgi verilmiştir.

Muhakeme kavramına ilişkin birkaç tanım şöyledir:

"Gerçeklerden veya ön önermelerden kararlar, yargılar veya sonuçlar çıkarma süreci...Bu süreçten doğan sebepler, tartışmalar, ispatlar vs .... Gerçeklerden veya ön önermelerden kararlar, yargılar veya sonuçlar biçimlendirme ... muhakeme ile ikna etme, inandırma." (Merriam-Webster Online Dictionary).

"Matematiksel muhakeme, dünyayı yorumlamada, kullanılabilir bilgiyi sentezlemede, sesli karar verme ve soru sormada kullanılır (akt. Goggins 2001:Stiff 1999; Wilkins 2000)."

"Muhakeme edildiği zaman, varsayımın, ayırmanın, doğru olmadığını kanıtlamanın veya akıl yürütmenin temel kavramları kullanılmış olur (akt. Fitzgerald 1996: Bruner, 1962)."

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) tarafından verilen en son amaçlarda, "Matematik muhakeme etmedir." ifadesine yer verilmiştir (NCTM 1989). NCTM Curriculum and Evaluation Standarts" ın (1989) yazarları, muhakeme etmeyi tüm sınıf düzeylerinde matematik eğitiminin dört ana ve ortak hedefinden biri olarak almaktadır.

Muhakeme etme yetenekleri geliştirilmediği takdirde matematik, öğrenciler için sadece belirli kurallar ve ne olduklarını düşünmeden, onları izlemekle gerçekleştirilen hesaplamalar, çizimler topluluğu olarak kalır (Ross 1998). Fawcett (1938) ispatı sadece matematiği değil aynı zamanda ulaşılacak sonuçlar ve verilecek kararlar içeren her durumu kaplayan bir kavram olarak tanımlamıştır.

Gardiner (1993) sebepler ve muhakemenin matematiği bir arada tutan her bir tuğlayı bağlayan harç olduğuna inanarak, okul matematiğinin esas bir bileşeni olarak ispatın önemini vurgular (akt. Waring 2000).

Slomson (1996), ispatın farklı çağlarda farklı anlamlara sahip olduğunu, hatta her hangi bir zamanda farklı insanlar için farklı anlamları olduğunu belirtmiştir. Babilliler döneminde ispat olanın yirminci yüzyılda ispat olmayabileceğini, beş yaşındaki bir çocuğa göre ispat olanın muhtemelen çocuk için ispat değilken; onun için ispat olanın üniversitedeki bir akademisyen için ispat olmayacağını söylemiştir.

Altun (2007) orta öğretim programlarında yer verilen ispat yöntemlerini

1. Tümdengelim ile ispat

- Doğrudan ispat: p=>q önermesinin doğruluğunun gösterilmesi

- Dolaylı ispat:

*Olmayana ergi ile ispat: p=>q yerine q'=>p' üzerine çalışmak ve bu önermenin doğruluğunun gösterilmesi

*Çelişki yöntemi ile ispat: p=>q yerine p≠>q önermesinin üzerine çalışılması ve bilinen doğrularla çelişen bir sonuca varma şeklinde

*Deneme yöntemi ile ispat: sonlu kümelerde tanımlı matematikte çok başvurulan bu yöntemde tüm işlem sonuçlarının görülebilmesi gerekir.

*Aksine örnek vererek ispat: bir savı çürütmek için başvurulan kanıtlama yolu

2. Tümevarım ile ispat: Bir önermenin sonlu örnekler için doğruluğunu gösterip, n. için doğruluğunu kabul etmek ve bu verilere dayanarak n+1. için doğruluğunu kanıtlama şeklinde gerçekleşen bir ispat türü olarak tanıtmıştır.

Ancak ispatlama fikri ve becerisi bir anda ortaya çıkmamakta, çocukların zihinsel gelişimlerine paralel olarak ispatlama fikri de gelişip, olgunlaşmaktadır. Bu gelişme sürecinden ötürü çocukların ispatlama düşüncesi değerlendirilirken, bu alandaki düşüncelerin ön aşamaları dikkate alınmalıdır. Buna bağlı olarak ispatlamayla ilgili bu çalışmada içinde çizimleri ve somut sayıları içeren ve tümevarımsal muhakemenin üstün olduğu bir açıklama bulunduğunda o formal olmayan ispat, diğer taraftan, bir ispat ne kadar çok tümdengelimsel muhakeme ve cebirsel dil içerirse, o ölçüde formal kabul edilecektir (Santigo ve Martinez 2005). Muhakeme ve ispat arasında yukarıda bahsedilen ilişkiden dolayı ispatı, bir olayı açıklamak için kanıt göstermeden oluşan muhakeme sürecinin formal kısmı olarak adlandırmak mümkündür.

İspat ve problem çözme kavramları arasında da yakın bir ilişki vardır. Weber (2005) ispatlama ve problem çözme arasındaki ilişkiye dikkat çektiği çalışmasında, ispat yapılandırılması ile ilgili etkinliklerin verilen bir ifadenin mantıksal doğruluğunun gösteriminde öğrenciler için problem çözme olarak görülebileceğini belirtmiştir. Üniversite öğrencilerinin ispat yapılandırma çalışmaları sırasında ispatlama deneyimlerinden öğrendikleri fırsatlar (durumlar) ile muhakemeleri arasındaki ilişkiyi dikkate alarak, bu ispatlamalarda kullandıkları muhakemenin farklı çeşitlerini ve problem çözme süreçlerini incelemiştir. Weber, Alcock ve Radu (2005), çalışmalarında ispat yapılandırmalarında öğrencilerin örnekleri kullanımını incelemiş ve problem çözme yaklaşımları ile ispat yapılandırma arasındaki ilişkiyi vurgulamışlardır.

Tall (1991), birçok üniversite öğrencisi için, problem çözmenin bir takım ders notlarının içeriğini öğrenme ve bu bilgileri, ilgili özel problemlerde kullanma anlamına geldiğini belirtmiştir. Matematik araştırmacıları için ise problem çözmeyi, muhtemel varsayımları formüle etme, etkinlikler dizisini test etme, belirli bir teoremin formal bir ispatını oluşturana kadar değiştirme ve yeniden tanımlama işlemlerini içeren daha yaratıcı bir etkinlik olarak tanıtmıştır.

Polya (1997: 179) problem çözme ile ilgili "Nasıl Çözmeli?" adlı çalışmasında sonuç bulma problemleri ile kanıt problemleri arasındaki paralellikten bahsetmiştir. Sonuç bulma problemlerinin kuramsal ya da uygulamalı, soyut ya da somut, ciddi problem ya da yalnızca bulmaca olabileceğini belirten Polya bu tür problemlerde her çeşit nesneyi arayabilir, bulmaya, elde etmeye, oluşturmaya çalışabilirsiniz derken bilinmeyenin bulmacalardaki bir sözcük, cebir problemlerinde bir sayı veya geometri çizim problemlerinde bir şekil olabileceğini ifade etmiştir. Kanıt probleminin amacını ise açıkça ifade edilmiş bir iddianın doğru ya da yanlış olduğunu kesin bir biçimde göstermek olarak belirtmiştir. Sonuç problemlerinin temel matematikte kanıt problemlerinin ise ileri matematikte daha önemli olduğunu vurgulamıştır.

Baki ve Bell (1997) ortaöğretimde klasik problem çözme ve ispatların, doğruluğundan emin olunan bilgilerin ve işlemlerin, problemlere uygulanmasına dayandığını belirtmişlerdir. Yeni bir durumla karşılaşıldığında, öğrencilerdeki sistematik olmayan ve bütünlük arz etmeyen bilgi birikiminin, yanlış kavrayışları ortaya çıkardığını ve öğretmenlerin bu yanlış kavrayışlar üzerinde durmadıklarından yakınmışlardır. Matematik eğitiminin amacını, problem çözme, iletişim ve akıl yürütme olarak belirtmiş ve çalışmalarında problem çözme ile ispatı ilişkilendirmişlerdir.

Knipping ve Reid (2002) matematiksel muhakemeye dünya çapında matematik eğitiminde merkezi bir rol verilmesine karşın farklı ülkelerin eğitim programlarında ve uygulamalarında önemli farklılıkların varlığından bahsetmişlerdir. Örneğin Almanya'da farklı okullar için farklı programların olduğunu ve her programın ispat ve ispat öğretimini içermediğini, Kanada'da herkese aynı programın uygulandığını ama düşük başarılı öğrencilerden ispat yapmalarının beklenmediğini, Fransa'da tek bir program olduğunu fakat matematiksel muhakeme ve ispatın öneminde ve şeklinde okullara göre farklılıklar olduğunu belirtmişlerdir.

NCTM Standartları'nda muhakeme ve ispat ile ilgili olarak belirlenen hedefler ve bu hedeflere ulaşmak için yapılması gereken çalışmalar şöyle ifade edilmiştir:

- Muhakeme ve ispatın matematiğin temel yönlerinden biri olduğunun farkına varmak: Bu hedefe göre, daha önceki deneyimlerinden de faydalanarak, çocuklara iddialarının her zaman sebepleri olduğunu anlamalarına yardım etmek önemlidir. Bu nedenle "Niçin doğru olduğunu düşünüyorsun?" veya "Cevabın farklı olduğunu düşünen var mı?" gibi sorular ifadelerin kanıtlarla desteklenmesi veya reddedilmesi gerektiğini görmelerini sağlar.

- Matematiksel tahminleri yapmak ve soruşturmak: Tüm sınıf düzeyindeki öğrenciler, tahminler ortaya atabilir, onları geliştirebilir ve tahminlerini somut materyalleri, hesap makinesini ve diğer araçları, ilerleyen sınıflarda matematiksel sunumları ve sembolleri kullanarak test edebilirler.

- Matematiksel tartışmaları ve ispatları geliştirmek ve değerlendirmek: Çocukların düşüncelerini sunmaya teşvik edildiği ve herkesin birbirlerinin fikirlerini değerlendirerek katkıda bulunduğu sınıflar matematiksel muhakemeyi öğrenmek için zengin ortamlar sağlar.

- Çeşitli muhakeme tiplerini ve ispat yöntemlerini seçmek ve kullanmak: Küçük sınıflarda çocukların matematik dersinde öğrendiği ve kullandığı muhakemeler matematikçiler tarafından kullanılan tümdengelimle karşılaştırıldığında informaldir. Okul yılları boyunca öğrencilerin ulaşılabileceği muhakeme türleri dağarcığı genişletilmelidir.

NCTM Standartları'na göre, okul öncesinden ikinci sınıfa kadarki öğrenciler bile, kendi deneyimlerine dayanarak muhakeme yapabilmektedirler. Bunu yaparken de algılama, empirik kanıt ve daha önceki gerçeklere dayanan basit tümdengelimi kullanabilir ve kendi bakış açılarından mantıklı ve savunulabilir varsayımlar oluşturabilirler. Bu dönemde öğretmenler, onları genellemelerinin uygun olup olmadığını test etmeleri için örnekleri ve karşıt örnekleri kullanmaya teşvik etmelidir. Bunun yanında muhakemenin gelişimi, öğrencilerin dil gelişimine ve sadece cevabı vermekten ziyade muhakemelerini açıklama yeteneklerine de bağlıdır. Bu yüzden, "hayır", "ve", "veya", "hepsi", "bazısı", "eğer....o zaman", "çünkü" kelimelerini de içeren temel mantık kelimelerini de kazanmalarına yardım edilmelidir.

3-5. sınıflarda, öğrenciler yine karşıt örneklerin ve başkalarını ikna edici bir tartışmayı nelerin oluşturduğunun üzerinde dururlar. Bunlara ek olarak, çözümleri karşılaştırma ve birbirlerinin muhakemelerini soruşturma vasıtasıyla, birçok örnekle devam eden ilişkileri tanımlamayı ve neden ilişkilerin genellenebileceği ve hangi durumlara uygulanabileceği ile ilgili fikirleri geliştirmeyi ve savunmayı öğrenmeye başlarlar. Bir başka deyişle, tümevarım yöntemini tanımaya başlarlar. Öğretmen burada sınıftan beklenenin sürekli matematiksel ilişkilerle ilgili varsayımları geliştirme, test etme ve uygulama olduğunu çocuklara iyice sezdirmeli ve açık uçlu, meydan okuyucu sorularla uygun bir ortam yaratmalıdır.

6-8. sınıflarda, öğrenciler iddia ve varsayımlarının değerlendirmelerini derinleştirmek ve matematiksel tartışmaları biçimlendirmek için tümevarım ve tümdengelimi kullanarak mantık yürütme becerilerini iyice geliştirmelidir. Bu sınıflarda, tümevarımın olanakları kadar sınırlılıklarının da olduğu ve doğru bir ifadenin tersinin her zaman doğru olmayacağı örneklerle açıklanmalıdır.

NCTM'de matematiksel muhakeme ve ispat çok çeşitli olaylar hakkında fikirler geliştirmenin ve ifade etmenin güçlü bir yolu olarak gösterilmektedir. Analitik olarak düşünen ve muhakeme eden insanlar yapıları ve ilişkileri veya hem gerçek hayat durumlarında hem de sembolik konularda düzenlilikleri fark edebilirler; o ilişkilerin kaza ile mi yoksa bir sebeple mi meydana geldiğini sorabilirler ve varsayar ve ispatlarlar. Aslında, matematiksel bir ispat belirli türdeki muhakemenin ve doğrulamanın ifade edilişinin formal bir yoludur. O halde NCTM tarafından da önerildiği gibi öğretimine ve öğrenimine erken sınıflarda başlanması ispatlama düşüncesinin gelişimini o denli ilerletecektir. Muhakeme ve ispatın erken yaşlarda öğrenilebildiğine dair çalışmalar literatürde yer almaktadır (Maher ve Martino 1996; Fitzgerald 1996; Zack 1999; Reid 2002; Styliandes ve Ball 2004). Ayrıca Goggins'in (2001) sınıf öğretmenliği öğrencileri ile yaptığı çalışmada da öğrencilerin çoğunluğu matematiksel muhakeme ve ispatın K-12 sınıflarında mümkün olduğu kadar erken tanıtılması ve araştırılması (keşfedilmesi) gerektiğine inandıklarını belirtmişlerdir.

Matematiksel muhakeme ve ispatla ilgili birçok ülkede yapılmış detaylı çalışmalara ulaşılmasına rağmen ülkemizde konu ile ilgili yeterli çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmanın amacı, ülkemizde muhakeme, ispat ve problem çözme arasındaki ilişkiyi incelemek, farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerin muhakeme ve ispat gelişimlerini saptamak, muhakeme süreçlerindeki önemli unsurları ve ilişkileri açığa çıkarmak, öğrencilerin muhakemelerini detaylı ve açık bir şekilde tanımlayabilmek, muhakeme ve ispatı hangi düzeylerde gerçekleştirebildiklerini ve ne tür muhakeme ve ispat kullandıklarını gözlemlemektir. Araştırmanın tanıtılmasına geçmeden önce çalışmanın konusu olan ispat kavramı aşağıda daha ayrıntılı olarak tanıtılmaktadır.

2.1. İspatın Karşılaşıldığı Değişik Durumlar:

Araştırmacılar, ispatın matematikte karşılaşıldığı değişik durumları; bir ifadenin geçerliliğini doğrulama, matematiksel bilgiyi nakletme, yeni matematik bilgiyi keşfetme veya yaratma veya bir aksiyomatik sistemdeki ifadeleri sistematikleştirme şeklinde önermişlerdir (Bell 1976; De Villiers 1999; Hanna 1990). Bu roller Hanna (1990) tarafından aşağıda verildiği şekilleri ile tanımlanmışlardır.

Doğrulama: İspatın, konu hakkında fikir sahibi kişileri ikna etmek ve ispat konusunun onlarca da onanmasını sağlamak konusunda yeterli katılıkta tartışmalar dizisini gerektiren temel ve geleneksel fonksiyonudur. Hipotez bir sonuç takip ettiği sürece ne olursa olsun şeklinin doğrusu veya estetik çekiciliğidir.

Açıklama: Bir ispat eğer sadece doğruluğunu göstermekle kalmaz, aynı zamanda iddianın niçin doğru olduğunu da anlamaya yardımcı olursa daha tatmin edici olur. Öyle yaparak, açıklayıcı bir ispat, içerilen matematiksel nesnelerin iyi-bilinen ve iyi-anlaşılan özelliklerinin kullanımını sağlar. Açıklayıcı olduğu zaman ispat aynı zamanda, sonucu daha geniş bağlamına yerleştiren ilişkilerin altında yatanlara açıklık getirerek sistemleştirmeye katkıda bulunur. Ek olarak, açıklayıcı bir ispat okuyucuya ispatın sonucunun niçin doğru olduğunu bilmenin değerini göstermede yardımcı olabilir. Öyle bir ispatın avantajı vardır, çünkü bizim ikna düzeyimiz, bir ispatı daha ikna edici yapma anlayışımız ile doğrudan ilgilidir. Açıklayıcı gücü arama sık sık sadece tamamen gerekli hipotezleri kullanarak bir ispatta ekonomik olmayla sonuçlanır.

İkna: Gösteri doğrulama için gereklidir, fakat içinde hiçbir kusur bulunmayan bir gösteri bile mutlaka ikna oluşturmaz. Eğer bir ispat aynı zamanda okuyucusunu da gösterdiği şeyi ispat ettiğine ikna ederse bu en iyisidir. İkna amacı için, bir ispat genellikle katı bir tartışma ve mantıksal çıkarsamaların bir taslağı arasında bir orta alana dikkat çeker.

Sistematikleştirme: İspatın diğer bir rolü matematiksel bir sonucu daha geniş bir bilgi bütünü ile birleştirmektir. Bu fonksiyonu uygularken, bir ispat paylaşılan tahminlere dayanan büyük ortak bir yapının başlangıçta ilgisiz bir parçası olarak düşünülen sonuçlara yer verebilir. Böyle yaparak, bir ispat altı çizilen aksiyomatik yapıyı gösterebilir (ve hatta o yapının başka bir yerindeki mantıksal veya matematiksel kusurları temizlemeye yardımcı olur). İspatın sistematik yönlerini araştırmak, görüldüğü gibi alternatif aksiyomatik sistemlerin ve genel olarak aksiyomatik sistemlerin kavrayışlarının gelişimine neden olur. Sistematikleştirme, sonuçları daha geniş bir bağlama götürerek onların iletişimini kolaylaştırır.

Keşif: Matematikçiler genellikle yeni matematiksel gerçeklerle ispatla çok az ilişkili yollarla karşılaşırlar. Bununla birlikte, bir ispatın inşası keşfe giden yolu döşeme ve açma şeklinde olur. Bazı durumlarda, asıl mesele sezgisel olmadığı için, ispat boyunca beklenmedik bir sonucu genellemenin tek yolu mantıksal çıkarsamaların bir serisi ile hemen hemen kör gibi ilerlemek olabilir. Fakat bir ispatı yaratmak matematikçiyi hemen her zaman yeni gerçeklere götürür, çünkü ispat içerilen nesnelerin altında yatan önemli özelliklerine yeni anlayışlar önerir. Sonuç olarak, belirli bir ispat yazmaya teşebbüs, araştırma için tamamen yeni alanları açığa çıkarabilir.

İletişim: İspatları sunma ve yayınlama bir matematikçinin diğerleri ile iletişim kurduğu başlıca yollardır. İspat bu rolde kullanışlıdır, çünkü gerçek doğasıyla yapılan öngörüleri, kullanılan tanımları ve çıkarsamaların kurallarını ve ispatlanacak teoremi belirtir. Matematikçiler arasında bile bir ispat eğer asıl konusunun açıklayıcısı ise iletişim için daha kullanışlıdır. Ek olarak, ispatlar yazarlarının zihinlerinin alışkanlıklarını, zihinsel araçlarını ve kullandıkları kaynakları gösterir. Bu nedenle, yaratılışına yol açan düşünme süreçlerinin bir anlayışı olan gösterimin daha dar amacı için gerekmeyen bir ilke sağladığında, ispat matematikçiler arasında iletişimin en kullanışlı halini alır. Matematik tarihinde korunmuş farklı ispat stilleri ve katılığın farklı düzeyleri bize matematiksel bilgi iletişiminin sosyal süreci hakkında daha büyük bir anlama olanağı sağlar.

Zevk: İspatlar güzel sanatların uyandırdığına benzer bir duygu uyandırır. Matematikçiler özellikle matematiksel bilgide önemli boşlukları dolduran önemli ispatlardan hoşlanırlar. Eskiden beri süregelen bir varsayımın doğrulanması ile zihinsel bir meydan okuma ile karşılaşılan ispat, ispatlanan önerme matematiksel manada önemli olmasa dahi, matematikçiler tarafından bilmeye değer olarak düşünülür. Onların asıl meselelerinden ayrı olduğu halde, matematikçiler bazı ispatların diğerlerinden doğal olarak daha iyi olduğunu düşünürler. Bu öncelikle, ispatın sadece gösterim yeteneği ile değil aynı zamanda ortaya koyma, açıklama ve sonunda ikna yetenekleri ile ilgilidir. Ek olarak, matematikçiler kısa (özlü) bir ispatı özellikle kişinin düşünebileceğinden daha az kabulü içerme anlamında ekonomik olanı takdir ederler. Matematikçiler sık sık güzellik veya sadelik olarak bilinen kolay bulunmazlık ve akla gelmezlik özelliğini konuşurlar. Tecrübeli matematikçilerin gözlerinde, en zevk veren ispat muhtemelen önemli, açıklayıcı, özlü ve beklenmedik olanıdır.

2.2. Süreç Olarak İspat

Bu bölümde süreç olarak ispatı inceleyen araştırmacıların bu konu ile ilgili görüşlerine yer verilmiştir. Geleneksel eğitim sisteminde ispat kavramı teorem kavramı ile birlikte anılmaktadır. Teorem ispatı gereken bir önermedir ve dolayısıyla ispatla bir teoremle uğraşıldığında karşılaşılır.

Hanna (1983), matematikçilerin çoğunun aşağıdaki faktörlerden bazılarının kombinasyonu olduğu zaman yeni bir teoremi dolayısıyla bir ispatı kabul ettiğini belirtmiştir:

1. Teoremi, içinde somutlaştırılmış kavramları, mantıksal geçmişini ve onun içeriklerini anlarlar;
2. Teorem matematiğin bir veya daha fazla branşını içerecek kadar önemlidir (ve bu nedenle detaylı çalışma ve analizi garanti etmeye yetecek kadar önemli ve kullanışlıdır);
3. Teorem kabul edilen matematiksel sonuçların gövdesi ile tutarlıdır;
4. Yazar teoremin ana konusunun uzmanı olarak şüphe götürmez isimdir;
5. Onun için ikna edici bir tartışma vardır (katı (rigorous) veya aksi), onların daha önceden karşılaştığı bir tip.

Eğer, kabul edilebilirlik için ölçütün konum düzeni varsa, o zaman bu beş ölçütün hepsi katı bir ispattan daha yüksek konumdadır.

Boero (1999), teoremler içeren matematik etkinliklerinde tartışmanın rolü ele alındığında bu etkinliklerin farklı yönlerinin dikkate alınması gerektiğini belirterek varsayımlar oluşturma ve matematiksel ispatlar yapmada matematikçilerin etkinliklerinin farklı safhalarını tanımlamıştır. Model, bir uzmanın ispatlama sürecini tanımlayan altı safhadan oluşmaktadır, fakat bu onun doğrusal bir model olduğu anlamına gelmez. Varsayımda bulunma, keşif yapma sonuçları test etme ve formal bir ispat yapma süreç boyunca rol alan aktiviteler olarak ele alınabilir.

1. Bir varsayımın oluşturulması: Bu problem de altı çizilen durumun açıklamasına ek olarak kanıtı destekleyecek tartışmanın tanınmasını içermektedir. Boero (1999) bu safhayı genellikle matematik topluluğu ile paylaşılmayan "matematikçinin çalışmasının kişisel yanı" olarak isimlendirmiştir.
2. İfadenin paylaşılan metne ait geleneksel tarza göre formüle edilmesi: Bu safha daha sonraki tüm etkinlikler için temel oluşturacak tam olarak hazırlanmış bir varsayım sağlamayı amaçlamaktadır.

3. Tam olarak ifade edilmiş varsayımın keşfi ve onun geçerliliği için uygun tartışmaların belirlenmesi: Bu aynı zamanda "kişisel çalışma"nın da bir parçasıdır, çünkü keşif hatalara veya ispatlarda karmaşık formülasyonlara yol açabilir. Sadece bundan sonraki üç safha ortak iletişime göredir.
4. Tümdengelimsel bir zincirdeki tutarlı tartışmaların seçimi ve birleşimi: Boero bu safhayı matematikçinin çalışmasını meslektaşlarına informal bir yolla sunma ve açıklama kısmının başlangıcı olarak vermektedir.
5. Bu tartışmaların matematiksel standartlara göre düzenlenmesi: bu safha basım için bir metnin oluşumudur.
6. Formal bir ispatın teklifi.

Bu safha modeli bir uzmanın ispatlama sürecinin basamak basamak değil birbirine geçmiş etkinliklerin bir serisi olduğunu gösterir ve ispatlamanın kompleks bir bilişsel etkinlik olduğunu resmeder. Sadece mantıksal tartışma tarafından değil aynı zamanda keşfedilebilir, tümdengelimsel ve tümevarımsal süreçler arasında bir değişim olarak tanımlanır. Matematikçi bu süreç tarafından içerilen öğelerden uygun bir seçim belirlemeli ve onları mantıksal olarak tutarlı bir şema içerisinde düzenlemelidir.

Tall (1998), öğrencilerin kullandığı ispatın çeşidi ile öğrencinin düzeyini ilişkilendirmiştir. Bu tartışmaları aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

-Temsili (fiziksel modelleme ile) ispat: Tall (1998)'a göre, bu en temel düzeyin bir tartışmasıdır. Verilen bir ifadenin doğruluğunu göstermek için fiziksel bir hareketi yürütmeyi içerir. Fiziksel hareketteki ilişkiyi gösterebilmek için ise görsel ve sözel desteğe ihtiyaç vardır.

-Görsel ispat: Görsel ispat, ispata konu olan materyalin çizimini ve genellikle sözlü desteği içerir.

- Sayısal ve cebirsel ifadelerin grafik ispatı: Belirli aritmetik ifadelerin altında yatan fikirler genel bir yöntemin prototipi görsel bir şekilde kullanılarak doğrulanabilir. (Buradaki grafik teriminden kastedilen semboller ve şekillerin birlikteliğidir.)

-Özel ve genel (generic) hesaplama ile aritmetikte ispat: Hesaplama ve hesaplamaları kontrol içeren etkinlikler.

-Cebirsel işlem gerektiren (manipulative) ispat: Cebirin aritmetik fikirleri genel gösterimle ifade edebilme özelliği ispata genel aritmetikten daha fazla kullanım alanı sağlar.

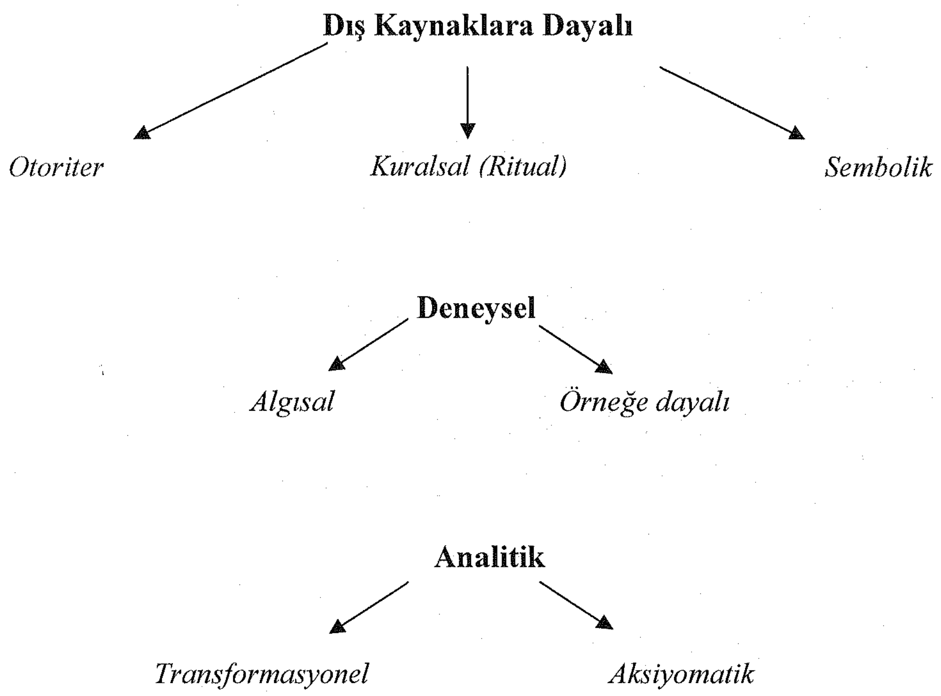
-Genel görsel ispatların sözel dönüştürücüsü olarak Euclidean ispat: Euclidean ispat sıklıkla mantıksal ispat için gereken katılığı geliştirmenin başlangıç noktası olarak görülür. Teoreme eşlik etmek için çizilen şekil ifadeye karşılık gelen her düzenlemeyi temsil eden genel bir resimdir. Sözel ispat sadece daha sonra çizilen özel resme değil genel olarak teorem tarafından temsil edilen şekillerin tüm sınıfına uygulanır.

2.3. İspatın Sınıflandırılması

Bu bölümde matematik eğitimi ile ilgili literatürde önemli yer tutan ispat sınıflandırmalarına/ düzenlemelerine yer verilmektedir.

Balacheff (1988) ispatı gerçekçi ve kavramsal doğrulamalar olarak adlandırdığı iki kategoriye ayırmıştır. Gerçekçi ispatlar örneklerin kullanımına, davranışlara veya gösterimlere dayanırken kavramsal ispatlar özelliklerin soyut formülasyonları ve özellikler arasındaki ilişkilere dayanır. Gerçekçi ispatlar üç çeşit içerir. Basit deneyimcilik, ispatlanacak ifadenin (rasgele seçilen) birkaç örnekte denendiği; kesin deney, ifadenin dikkatle seçilmiş bir örnek üzerinde denendiği; genel örnek, bir sınıfın karakteristik temsilcisi olarak seçilen bir örnek üzerindeki işlemlere ve dönüşümlere dayanan ispatlar. Bu durumda, örnek üzerindeki işlemler ve dönüşümlerin tüm sınıf üzerinde yapılması istenir. Kavramsal ispatlar kategorisi, davranışların kabul edilen özel örneklerden ayrıldığı ve içselleştirildiği düşünme deneyini ve deneyin olmadığı ve ispatın somutlaştırılmış sembolik anlatımların kullanımına ve dönüşümüne dayandığı ifadelerle sembolik hesaplamayı içerir.

Harel ve Sowder (1998) bir kişinin matematiksel bir ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını kendini veya diğerlerini ikna için kullandığı tartışmalardan bir ispat sınıflaması yapmışlardır. Sınıf gözlemleri, testler ve görüşmeler kullanarak kolej öğrencilerinin ispat çeşitlerini araştırmışlardır. Özelliklerine göre belirledikleri yedi ispat çeşidini üç ana kategori altında toplamışlardır.



Şekil 1. Harel ve Sowder'a ait ispat düzenlemesi

*Otoriter ispat*ta, sadece bir kitaba, bir öğretmenin ifadesine veya daha bilgili bir sınıf arkadaşının doğrulamasına inanma varken, *"kuralsal"(ritual) ispat*ta ise bir tartışmanın doğruluğunu içerilen muhakemenin doğruluğundan ziyade sadece tartışmanın şekli ile yargılama vardır. *Sembolik ispat* ise sadece sembollere dayalı olarak doğrulamadır. *Algısal ispat*, birkaç çizime veya tek bir algıya dayalı doğrulamayı içerir. Bir kişinin kendisini veya diğerlerini, bir veya daha fazla örnekle ikna etmede *örneğe dayalı ispat* kullanılır. *Transformasyonel ispat*ın özelliği, öğrencilerin doğrulamalarının durumun genel yönleri ile ilgili olması ve varsayımı genellemeye doğru yöneltilen muhakemeyi içermesidir. Eğer bir öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri ve teoremleri içeren bir sistemle rahat çalışabiliyorsa *aksiyomatik ispat*ı kullanabiliyor demektir.

3.Araştırmanın Amacı ve Önemi

İlköğretimdeki öğrencilerin uluslar arası düzeydeki matematik ve fen bilgisi başarısının ölçülmesinin amaçlandığı Uluslar Arası Matematik ve Fen Bilgisi Araştırması (Third International Mathematics and Sciences Study/TIMSS)'nın üçüncüsüne katılan Türkiye (1999) 38 ülke arasında matematik testi sonuçlarına göre 31. sırada yer almıştır. Bu çalışmada matematik çalışma tanımlarında en üst %10 karşılaştırma noktası olarak "öğrencilerin verilen bilgiyi düzenleyebilmekte, genelleme yapabilmekte ve sıradan olmayan problemlerin çözümünde stratejilerini açıklayabilmekte" olduğu belirlenmiştir. Oysa bu araştırmaya katılan ilköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin yalnızca %1'i bu dilimde yer almıştır.

Sonuçlar bu denli düşük olmasına karşın, 2006-2007 eğitim öğretim yılına kadar uygulanan 1998 İlköğretim Okulu matematik Dersi Öğretim Programı (6-7-8. Sınıflar)'nda, bu araştırmanın %10 luk başarı diliminde yer alan "...verilen bilgiyi düzenleyebilme, genelleme yapabilme ve sıradan olmayan problemlerin çözümünde stratejilerini açıklayabilme..." konularına sadece 7.sınıfların "Denklemler ve Doğru Grafikleri" ünitesi ile "Açılar ve Çokgenler" ünitesinde çok sınırlı olarak yer verildiği belirlenmiştir. Söz konusu sonuçlar 1998 Matematik Programının öğrencileri, verilen bilgiyi düzenleyebilme, genelleme yapabilme ve sıradan olmayan problemlerin çözümünde stratejiler açıklayabilme becerileri yönünden yeterince geliştiremediğini göstermektedir. Bu durum yerel olarak ilköğretim öğrencilerinin ispat ve muhakeme becerilerinin gelişiminin incelenmesi ihtiyacını doğurmuştur.

Bu tür çalışmalar matematik programlarının geliştirilmesinde ve yenilenmesinde ciddi fırsatlar sunar. Literatürün geliştirilmesi amacıyla bu ve benzeri çalışmaların önemi büyüktür.

Araştırmanın problemi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

4. Problem Cümlesi:

İlköğretim 6, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi nasıldır?

Problem çözme ve ispat arasındaki ilişki göz önüne alınarak, bu probleme cevap vermek için alt problemler aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

5. Alt Problemler:

1. İlköğretim 6, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin problemleri çözerken başvurdukları muhakeme şekilleri nelerdir?

2. İlköğretim 6, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin ispat yaparken başvurdukları ispat şekilleri nelerdir?

6. Sayıltılar:

1. Öğrencilerin sorulan sorulara cevap verirken gerçek güçlerini ve tercihlerini ortaya koydukları varsayılmıştır.

7. Sınırlamalar:

Bu araştırma;

1. Bursa iline bağlı yedi ilköğretim okulu 6, 7 ve 8. sınıfından seçilmiş 679 öğrenci,

2. Çalışmada kullanılan beş soru ile sınırlıdır.

8. Tanımlar:

Bu çalışmanın konusunu oluşturan muhakeme ve ispat kavramları giriş bölümünde açıklandığından aşağıda doğrulama, tartışma ve genelleme kavramlarının tanımları verilmiştir.

Doğrulama: Bir ifadenin geçerliliğine bir başkasını ikna etmeyi amaçlayan tartışma (Waring 2000).

Tartışma: Gerekçeler oluşturma davranışı, delil gösterme ve bunları gösterilen duruma uygulama (Webster 1932).

Genelleme: Bir kümede geçerli olan bir bağıntının, o kümeyi kapsayan en geniş kümede geçerli olduğunun gösterilmesi veya bağıntının geçerli olduğu en geniş kümenin bulunması durumu (Polya 1957/1997).

İnceleme konusu bir ya da daha fazla nesne veya ilişkinin gözlemine dayanarak o nesne veya ilişkinin dahil olduğu tüm sınıf hakkında doğruluk savı taşıyan bir yargıdır (Yıldırım 1996:49).

9. İlgili Araştırmalar:

Muhakeme ve ispat konusu ile ilgili yakın dönemde yapılan araştırmalar aşağıda özetlenmektedir.

Becker ve Owens (1992), Amerikalı ve Japon öğrencilerin problem çözme performansları ve bu süreçteki muhakeme becerilerini karşılaştıran bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Araştırma sekizinci ve on birinci sınıfa devam eden 614 (368 8.sınıf; 246 11.sınıf) Amerikalı ve 423 (189 8.sınıf; 234 11.sınıf) Japon öğrenci ile yürütülmüştür. Çalışmada öğrencilerden verilen iki problemi (gizli sayılar sorusu) farklı yöntemlerle çözmeleri istenerek altı farklı çözüm için alan bırakılmıştır. Araştırmanın bulguları iki ülke öğrencilerinin performansları arasında büyük farklılıklar olduğunu ortaya koymuştur. Yöneltilen probleme Amerikalı öğrenciler sadece iki farklı yolla cevap verirken (sistematik deneme yanılma, rasgele deneme yanılma), Japon öğrenciler aynı soruyu altı farklı yolla (sistematik deneme yanılma, rasgele deneme yanılma, iki değişkenli lineer denklem, üç değişkenli lineer denklem, tek değişkenli lineer denklem, veri toplamının ikiye bölünmesi) cevaplandırmışlardır. Amerikalı öğrencilerin matematikten hoşlanma oranları Japon öğrencilere göre daha yüksek olmasına karşın (%51-%54 U.S., %24-%18 Japon) Japon öğrencilerin başarı oranı daha yüksek çıkmıştır. İki ülke öğrencilerinin gizli sayılar sorusuna verdikleri doğru cevap oranlarına bakıldığında (U.S. 8.sınıf: %15; 11.sınıf: %46, Japon 8.sınıf: %39; 11.sınıf: %90) her iki sınıf düzeyinde de Japon öğrencilerin Amerikalı öğrencilere göre neredeyse iki kat daha başarılı oldukları belirlenmiştir.

Reid (1995), ispatlamaya yönelik öğretimin yönünü belirlemek ve öğrencilerin ispatlamaya olan ihtiyaçlarını daha iyi anlayabilmek amacıyla bir araştırma yapmıştır. Araştırma, problem çözme çalışmaları sırasında izlenen, lise ve üniversite öğrencileri ile yapılan görüşmeleri ve onlarla ilgili gözlemleri içermektedir. Çalışma sırasında geliştirilen bir kelime bilgisi ile (1) muhakemeyi teşvik eden ihtiyaçlar, (2) muhakeme çeşitleri ve (3) ispatlama ve yapılan ispatların formüle edilişinin derecelerini belirleyen matematiksel aktiviteler tanımlanmıştır. Muhakemeyi teşvik eden ihtiyaçlar, açıklama (explanation), araştırma (exploration) ve doğrulama (verification) şeklinde, muhakeme çeşitleri ise tümevarımsal, tümdengelimsel veya benzeşim kurma (analojik) şeklinde kategorilenmiştir. İspat etme; düşünülmemiş, düşünülmüş, mekanik veya sonuçları formüle edilebilen durumlar şeklinde belirlenirken, ispatlar ise formal öncesi veya yarı formal şeklinde adlandırılmıştır. Araştırma çalışmalarından üç ana gözlem sonucu çıkarılmıştır. Bunlardan birincisinde katılımcılar soruları tümdengelimsel olarak muhakeme edebilmekte ve yardım ile ispatlarını formüle edebilmektedirler. İkincisinde öğrencilerin yaptıklarından ispat etmenin temelde araştırma ve açıklamaya uygulanabildiği, doğrulamanın ise ispat etmede çok düşük bir motivasyonunun olduğu görülmüştür. Üçüncüsü katılımcıların sorulara yönelik muhakemelerinin, gözlemcilerin ve diğer katılımcıların aktivitelerinden etkilendiği belirlenmiştir. Bu gözlemlere dayanılarak öğrenme için iki öneri sunulmuştur: (1) ifadeleri doğrulamak için tümdengelimsel muhakeme olarak ispatın mevcut sunumları, açıklama ve araştırma için ispatlamanın kullanımını içermek için genişletilmelidir. (2) sınıf etkinlikleri, matematiksel muhakemede, tümevarımın uygun bir yol olduğunu düşünen öğrencilerin "ispatlama kültürü" nü geliştirecek şekilde düzenlenmelidir.

Maher ve Martino (1996), Stephanie adlı bir çocuğun matematiksel doğrulama fikrinin gelişimini belirlemek amacıyla 1.sınıftan 5.sınıfa kadar izlemişlerdir. Bu çalışmanın verilerini, videokasetler, öğrenci portföyleri ile araştırmacının derslerindeki notlar, öğrenci ile yapılan görüşmeler ve küçük grup değerlendirmeleri oluşturmaktadır. Çalışmalar sırasında, öğrencinin üzerinde çalıştığı bir problemin (kule problemi) cevabını doğrulamak için, *örnek olayla* ispatı "keşfetti"ği belirlenmiştir. Bu keşifle Stephanie problem için "örnek olayla ispat" formunda matematikçiler tarafından kullanılan ispatın mantıklı bir yolunu geliştirmiştir. Bir sonraki aşamada Stephanie fikirlerinin sınırlı düzenlemelerini daha global bir noktaya getirerek bilginin çok yönlü parçalarını koordine etmeyi de geliştirmiştir. Bu bulgunun araştırmacılar tarafından Lester (1980)'ın birkaç yaş daha büyük çocuklar için rapor ettiği önceki bir çalışmanın bulgularıyla tutarlılık gösterdiği bildirilmiştir. Stephanie'nin ispat fikrini nasıl geliştirdiğini anlamak için fikirlerinin gelişimini gösteren problem çözme davranışları izlenmiştir. Gözlemler sonucunda, problemleri sunmak için birçok fırsata sahip olan Stephanie'nin, problemlerle çalışırken, karşılaştığı durumlardan anlam çıkarmayı denediği, anlam çıkaramadığı durumlarda yılmadan problemini dile getirdiği ve daha önceki düşüncelerini sınıf arkadaşları ile tartışıp gözden geçirerek yeniden inşa ettiği görülmüştür. Çalışmanın planı, Stephanie'ye orijinal fikirlerini değiştirme, genişletme ve diğerlerinden aldığı bilgileri göz önünde bulundurarak, onlar üzerinde kafa yormak için mümkün olan birçok fırsatın kendisine verildiği bir ortam sağlamıştır. Araştırmacılar Stephanie'nin başarılı olmasında sunulan bu ortamın etkili olduğunu ileri sürmektedir. Hazırlanan bu ortam ile Stephanie'ye yeni ve sık sık daha güçlü stratejiler geliştirmesi için olanak sağlamıştır. Bu çalışma, öğretmenin sadece rehberlik ettiği bir ortamda, öğrencinin matematik düşüncelerini etkin olarak yapılandırdığı süreci ortaya koyması bakımından önemlidir.

Fitzgerald (1996), muhakemeyi bir bilgiden başka bir bilgi elde etme süreci olarak tanımlamış ve muhakeme etme yeteneğinin geliştirilmesinin eğitimin temel fonksiyonlarından biri olduğunu belirtmiştir. Muhakemenin ispat yönü ile ilgili bu çalışmada muhakeme yeteneğinin geliştirilmesi için öğretmenlere şu tavsiyelerde bulunulmuştur:

-Öğretmenlerin sadece gerçeklere dayalı doğru cevapları kabul etmemesi aynı zamanda bu cevapları öğrencilerden doğrulamalarını da istemeleri.

- Çocuklar için "veya" ifadeleri "ve" ifadelerinden daha zor olduğundan öğretmenler alıştırmaların seçiminde "ve" ve "veya" nın kullanıldığı alıştırmalara yer vermelidir. Örneğin, öğrencilerden "kare ve kırmızı" olan ve "kırmızı ve kare" olan nesneleri belirlemeleri istenebileceği gibi "kare veya kırmızı" olan nesneleri de belirlemeleri istenebilir.

-Dört ve beşinci sınıfta olan çocuğa, evrensel ve var oluşla ilgili "bütün" ve "bazı" niceleyicileri vurgulayan basit alıştırmalar ve onların zıtları da verilmelidir.

İfade	Zıddı
Bütün elmalar kırmızıdır.	Bazı elmalar kırmızı değildir.
Bütün elmalar kırmızı değildir.	Bazı elmalar kırmızıdır.

-Ortaokul düzeyinde öğrenciler, tümdengelim ve özellikle de hipotetik tümdengelim gerektiren alıştırmalar yapmaya başlamalıdırlar. Örneğin Euler diyagramı ile savunulabilen basit karşılaştırmalar yapılması uygundur. Kategorik kıyaslamaya bir örnek verilecek olursa:

Ana önerme:	Tüm insanlar ölümlüdür.
Ara önerme:	Sokrates bir insandır.
Sonuç:	Sokrates ölümlüdür.

-Lise düzeyine gelindiğinde ise öğrencilerden yaptıkları genellemeler için düzenli olarak sebepler göstermeleri beklenmelidir.

Fitzgerald (1996) bunların yanı sıra, öğrencilerin olabildiğince erken bir dönemde, geometri dersinde muhakeme hakkında ne öğrendikleri ile ilgili olarak değerlendirilmelerinin, kıyaslamalar, çıkarım şemaları ve ispat biçimlerinin formal olarak özetlenmesinin uygun olacağını belirtmiştir. Sonuç olarak araştırmacı, öğrencilerin hem muhakeme yeteneği hem de matematiksel içeriği kazanmalarından matematik öğretmenlerinin sorumlu olduğunu ortaya koymuştur.

Healy ve Hoyles (1999), öğrencilerin sayı örüntülerini genelleme ve aralarındaki bağlantıları ifade etmek için geliştirdikleri görsel ve sembolik stratejileri analiz etmişlerdir. Birbirine paralel konular üzerinde çalışan öğrencilerin yaklaşımları, örnek olaylar üzerinde incelenerek karşılaştırılmıştır. Çalışmanın amacı, öğrencilerin görsel muhakemeyi sembolik muhakeme ile birleştirebilmeleri için nasıl cesaretlendirmeleri gerektiği üzerine öneriler getirmek ve sonuçları programa dahil etmektir. Bu amaçla öğrencilerin matematiksel örüntülerden çıkarılan sayı dizilerindeki ilişkileri tanımayı öğrenecekleri ve sembolik dille ifade edebilecekleri sorular düzenlenmiştir. Örüntüleri fark etmekten cebirsel sunumları yapılandırmaya kadar giden bu sürecin kolay olmadığını ve "örüntüyü fark etme"nin cebirsel olarak uygun bir örüntü bulmaktan farklı olduğunu belirten Lee (1996)'nin görüşlerine yer vermişlerdir. Bu çalışmanın sonucunda görsel ve sembolik muhakeme ile bağlantılı etkinlikler düzenlemenin gerekli olduğunu önermişlerdir. Bunun yanı sıra, derslerde görsel yaklaşımın olmasının, dizilerin cebirsel sunumu ve fonksiyonların kavramsal yapısının gelişimi için güçlü destek sağlayacağını belirtmişlerdir.

Steen (1999), matematiksel muhakemenin matematiğe nasıl hizmet ettiğini ortaya koymak amacıyla yirmi adet soru belirleyerek bunları cevaplandırmıştır. Bu sorular: Matematiksel muhakeme matematiksel midir? Matematiksel muhakeme faydalı mıdır? Matematiksel muhakeme okul matematiği için uygun bir amaç mıdır?

Öğretmenler mantıksal muhakemeyi öğretebilir mi? Matematiksel muhakeme öğretilebilir mi? Matematik becerileri muhakemenin gelişimini etkiler mi? Alıştırmalar matematiksel muhakemeyi geliştirmeye yardımcı olur mu? Matematik için ispat gerekli midir? İspatları öğrenme matematiksel muhakemeyi arttırır mı? "Matematik kaygısı" matematiksel muhakemeyi engeller mi? İşbirlikçi etkinlikler bireysel kavramayı arttırır mı? Hesap makinesi ve bilgisayar matematiksel muhakemeyi arttırır mı? Neden birçok öğrenci matematiği yabancı bir kültür gibi hisseder? Matematiksel muhakeme için bağlam gerekli midir? Öğrenciler gerçekten kendi bilgilerini oluşturmalı mıdır? Kaç tür matematik vardır? Beynimiz matematiği nasıl yapar? Beynimiz bilgisayar gibi midir? Matematik yeteneği doğuştan mıdır? Matematiksel muhakemenin geliştirilmesi için okul çok geç midir? şeklindedir.

Healy ve Hoyles (2000), 14-15 yaşlarındaki İngiliz ve Galli 2459 öğrenci (ulusal sınavda başarılı gruba giren) ile doğrulama ve ispat performansları üzerine bir araştırma yapmışlardır. İngiliz-Gal ulusal programı, varsayım yapma, sonuçları açıklama/doğrulamaya önem vermeyi cebir ve geometri ile bütünleştirdiğinden dolayı, araştırmada kullanılan sorular 9. sınıf öğrencilerinin gelişim düzeylerine uygun bulunmuştur. Öğrencilerden ispatın anlamı ve amacının ne olduğunu açıklamaları, verilen ispatları yorumlamaları, doğruluklarına veya yanlışlıklarına karar vermelerinin yanı sıra iki geometri ve iki cebir sorusu için kendi ispatlarını yapılandırmaları istenmiştir. Ulusal sınavda başarılı gruba giren bu öğrencilerin ¼'ünden daha fazlasının ispatın amacı veya anlamı hakkında herhangi bir fikrinin olmadığı belirlenmiştir. Öğrenciler ispatları yapılandırmada, doğru ispatı seçmekten daha başarılı olmuştur. Amaç daha yüksek not almak olduğunda ise, öğrenciler ilk sırada cebirsel tartışmaları tercih etmişlerdir. Bu bulgu, otoriter ve kuralsal ispatın göstergesi olarak yorumlanmıştır.

Waring (2000) "İspatlayabilir misin? (İspat Kavramının İlköğretim Düzeyinde Gelişimi)" kitabında öğrencilerin ispat kavramlarının gelişimini altı düzeyde tanımlamıştır. Araştırmacının ilk defa " Ondört-onaltı yaşlarındaki öğrencilerin ispat ve örüntüleri öğrenmesi ve öğretimi" (Waring 1997) adlı doktora tezinde önerdiği bu altı düzey, araştırma süresince gözlenen öğrenci tepkilerinin Balacheff, Bell ve Fischbein'in önerileri ile birleştirilmesine dayandırılmıştır. Bu düzeyler sırasıyla şu şekildedir:

İspat düzeyi 0: Bu düzey öğrencilerin ispatın gerekliliğinden ve hatta varlığından habersiz oldukları düzeydir.

İspat düzeyi 1: Bu düzeydeki öğrenciler ispat fikrinden haberdardırlar ancak yalnızca birkaç belirli durumu kontrol etmenin ispat olarak yeterli olduğunu düşünürler.

İspat düzeyi 2: Bu düzeyde öğrenciler, birkaç durumu kontrol etmenin ispat anlamına gelmediğinin farkındadırlar ancak;

a) daha değişik ve/veya rasgele seçilen örnekleri kontrol etmenin ispat olduğunu ve

b) bir genel örneği kullanmanın bir sınıf için bir ispatı biçimlendirdiğini düşünürler.

İspat düzeyi 3: Bu düzeydeki öğrenciler genelleştirilmiş bir ispata olan ihtiyacın farkındadırlar, ancak yardımsız geçerli bir ispat oluşturamamalarına rağmen, uygun bir zorluk düzeyindeki ispatın oluşturulmasını anlayabilirler.

İspat düzeyi 4: Öğrenciler bu düzeyde, genelleştirilmiş ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, onların oluşturulmasını anlayabilirler, sınırlı sayıda ve muhtemelen tanıdık bağlamlarda böyle ispatları oluşturabilirler.

İspat düzeyi 5: İspat kavramının son aşaması olan bu düzeyde, öğrenciler genelleştirilmiş bir ispata olan ihtiyacın farkındadırlar, bazı formal ispatların oluşturuluşunu anlayabilirler ve daha önce karşılaşmadıkları değişik bağlamlarda ispatlar yapabilirler.

Bu altı ispat düzeyi üç aşamadan oluşan ispat öğretim programını desteklemiştir. Birinci aşama, ispata olan ihtiyacı (İspat Düzeyi 1) ve onun doğasını (İspat Düzeyi 3) anlayabilmeleri için öğrencilere ispatın öğretimidir. İkinci aşama, öğrencinin ispatlamayı öğrendikçe ispat etkinlikleri hakkında yazmakta bağımsızlık düzeyinin yükseleceğine dayandırılmıştır (İspat Düzeyi 4). Yetenekli öğrenciler için düzenlenen üçüncü ve son aşama boyunca ise, daha formal ispatları içeren ispat deneyimlerinin geniş bir alanıyla karşılaştırılırlar.

Küchemann ve Hoyles (2001) 8. sınıfa devam eden 2799 öğrenciye matematiksel muhakemelerini test etmek için çoktan seçmeli geometri sorusu yöneltmişlerdir. Araştırmadaki soruların temel özellikleri, ispatlama konusu ile ilgili olmaları, bu konu ile ilgili literatürü kapsamaları ve programda ispatlamayı içeren bütün konuları tarayacak şekilde olmalarıdır. Bu çalışmada araştırmada sorulan dokuz sorudan yalnızca birine ait sonuçlar verilmiştir. Matematiksel bir varsayımın sunulmasının ardından öğrencilere bu varsayımla ilgili dört tartışma verilerek bunlardan kendi yaklaşımlarına en yakın olan ve öğretmenlerinden en yüksek notu alabileceğini düşündükleri tartışmaları seçmeleri istenmiştir. Öğrencilerin kendilerine en yakın buldukları seçenek %40 ile *örneklerin kullanımına dayanan gerçekçi tartışma* olurken, öğretmenden en yüksek notu alacak seçenek olarak ise %50 ile kavramsal tartışma seçeneği olmuştur. Araştırma öğrencilerin kendilerine yakın buldukları tartışmalar ile öğretmenlerinden en yüksek notu alacak tartışmaları tercihleri arasında anlamlı farklılıklar olduğunu ortaya koymuştur.

Reid (2001) son on yılda, matematik eğitiminin psikolojisi ile ilgilenen araştırmacıların yaptığı çalışmalarda ve NCTM'nin İlke ve Standartları (NCTM 2000) gibi belgelerde ispat ve ispatlamaya daha fazla yer verildiğini bildirmiştir. Literatür taramasında:

-Ortaokul öğrencisinin ispat yapmadığı iddiaları (örneğin, Fischbein ve Kedem 1982; Senk 1985; Healy & Hoyles 2000) ile ilkokul öğrencisinin ispat yaptığı iddialarını (örneğin Zack 1997; Maher ve Martino 1996; NCTM 2000);

-"İkna edici tartışma"yı (Hanna, Balacheff ve Pimm 1991),

-"Kavrayışa ulaşmanın bir aracı"nı (Schoenfeld 1982),

- "Tümdengelimsel muhakemeyi kullanarak araştırma"yı (Reid 1995),

-"Belirli sosyal amaçlara ulaşmak için yazarın okuyucularıyla yaptığı dansı biçimlendiren müziği" (Davis 1972) ve

-"Hipotezlerden elde edilen sonuçların mantıksal çıkarımlarını oluşturan tartışmalar"ı (NCTM 2000)

içeren ispat ve ispatlama tanımlarını yan yana koymanın baş döndürücü bir deneyim olabileceğini belirtmiştir. Bu tanımlamalardan hareketle hem geçmiş araştırmaların sonuçlarını düzenlemenin bir yolu olarak, hem de özellikle daha ileri araştırmalara ihtiyaç duyan alanlara bir rehber olarak matematik eğitimi araştırmalarında ispat ve ispatlamanın birçok anlamını açıklamış ve sınıflandırmıştır. Araştırmacı "ispat" ve "ispatlama" kelimelerinin dördü matematiğe özel, biri günlük kullanıma ait beş kullanımını tanımlamıştır. Bunlar sırasıyla ispat kavramı, ispatlar, ispatlama, inceleme ve ispatlamanın günlük kullanımıdır. İspat kavramı, matematiksel ispatların tam doğruyu ve onların kanıtladığı ifadelere atfettiği inancı; ispatlar, matematik dergilerinde ve ders kitaplarında ortaya çıkan metinleri; ispatlama, tümdengelimsel muhakemeyi; inceleme, ispatlama ve ispatları içeren bir süreci kullanarak matematiksel ifadeleri test etme ve arıtmayı ve ispatlamanın günlük kullanımı ise her türlü araçla kanıtlamayı içermektedir.

Recio ve Godino (2001), üniversite birinci sınıf öğrencileri ile (Cordoba Üniversitesi) ispat düşünceleri üzerine çalışarak bu düşünceleri -günlük yaşam, deneysel bilim, profesyonel matematik, mantık ve matematiğin temelleri- gibi farklı kuramsal bağlamlarda matematiksel ispatın anlamları ile ilişkilendirmişlerdir. Çalışmalarının ana sonucu, matematiksel tümdengelimin bu öğrenciler için zor olmasıdır. Ayrıca, ispatın farklı kuramsal anlamlarının bu zorluğu açıklamaya yardım edebileceğini önermişlerdir. Öğrencilerin matematiksel ispat düşüncelerini tanımlamak amacıyla 1994-1995 akademik yılı başlangıcında 429 öğrenciye bir geometrik ve bir aritmetik problemi içeren bir anket uygulanmıştır. Önceki sonuçları doğrulamak amacıyla aynı anket 1997-1998 akademik yılı başında da ikinci bir örneklem grubu olarak 193 öğrenciye daha uygulanmıştır. Bu uygulamaya katılan öğrencilerin cevapları beş farklı kategoride sınıflandırılmıştır:

1. Çok yetersiz cevap verdi (karmakarışık, tutarsız).
2. Öğrenci önermeyi ciddi hatalar olmaksızın örneklerle kontrol etti.

3. Öğrenci önermeyi örneklerle kontrol ederek, onun genel geçerliliğini ileri sürdü.

4. Öğrenci önermenin geçerliliğini diğer iyi bilinen teorem veya önermeler kullanarak, kısmen doğru prosedürlerle doğruladı ve

5. Öğrenci esas itibarıyla uygun sembolizasyon içeren doğru ispat verdi.

Her bir probleme önemli derecede doğru matematiksel ispat veren öğrencilerin oranı %50 nin altındadır. Her iki problem aynı anda ele alındığında ise bu oran % 32,9 a kadar düşmektedir. Bu düşüşün nedeni, 1994-1995 akademik yılında 429 öğrencinin %32.8'i (141) her iki problemi de doğru olarak çözmesine karşın 1997-1998 akademik yılında ise 193 öğrencinin sadece %23'ünün (44) her iki problemi doğru olarak yanıtlamasıdır.

Knuth, Slaughter, Chooppin ve Sutherland (2002), yürüttükleri çalışmada, ortaokul öğrencilerinin doğrulama ve ispatlamadaki yeterliliklerinin gelişiminin belirlenmesi ve bu gelişim düzeyinin arttırılması için gerekli eğitimin nasıl olması gerektiğini araştırmışlardır. Bu amaçla 6-8. sınıfa devam eden 350 öğrenciye Healy ve Hoyles (2000)'in çalışmalarından uyarlanan 15 soru sorulmuştur. Çalışmaya katılan öğrencilerin %70'i verilen ifadelerden ikisinin (ardışık iki sayının toplamı her zaman tek sayıdır; iki çift sayının toplamı her zaman çift sayıdır) doğruluğunu göstermek için örnekle doğrulamayı kullanmışlardır. Ayrıca sınıf düzeyi ile paralel olarak öğrencilerin verilen tanıma bağlı duyarlılıklarında artış belirlenmiştir.

Özer (2002) tarafından yapılan çalışmada, Miyazaki ve Balacheff'in ispat konusunda yapmış olduğu çalışmalarda belirledikleri düzeylerden faydalanılarak, Lise 2. sınıf öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerileri tespit edilmiş ve ispat düzeyleri incelenmiştir. Ayrıca, öğrencilerin materyal kullanarak ispat yapıp yapamadıkları da gözlenmiştir. Bu amaçla 2000-2001 öğretim yılında 110 öğrenciye 6 adet açık uçlu soru (Örn: İki tek sayının toplamının bir çift sayı olduğunu gösteriniz.) yöneltilmiş, öğrencilerin bu sorulara verdikleri yanıtlar sonucunda aldıkları puanlar tablolaştırılmıştır. 3 öğrenci ile de ayrıca görüşme yapılmıştır. Araştırma sonucunda elde edilen bulgularla, öğrencilerin hemen hemen tamamının amaçlanan düzeyde tümdengelim ve tümevarım yoluyla ispat yapamadıkları ortaya çıkmıştır. Öğrenciler, verilen bir ifadenin doğruluğunu gösterebilmek için bu ifadeye sayısal değerler vermenin yeterli olduğuna inanmaktadırlar. Balacheff'in ispat seviyelerine göre öğrenciler pragmatik ispat düzeyinde görünmektedirler. Ayrıca 3 öğrenci ile yapılan görüşmede öğrencilerin materyal kullanarak ispat yapamadıkları gözlenmiştir.

Zack (2002)'ın aynı 5. sınıf öğrencileri ile ardışık iki öğretim yılı içerisinde (1999-2000 öğretim yılında 20, 2000-2001 öğretim yılında 23 öğrenci) yaptığı çalışmada, öğrencilerin muhakeme ve ispatlama içeren konuşmalarındaki karşıt (bir ifadenin yanlış olduğunu gösteren) tartışmalar incelenmiştir. Çalışmada, önce öğrencilere bir problem verilmiş ve daha önceden aynı problemle uğraşan öğrencilerden biri tarafından önerilen bir çözüm açıklanmış, sonra da onlardan bu önerinin doğru olup olmadığını küçük gruplar içinde tartışmaları ve ispatlamaları istenmiştir. Çalışmanın sonucunda, verilen çözüm önerisinin yanlışlığını gösteren 5 tür açıklama öğrenciler tarafından ortaya çıkarılmıştır. Ayrıca, bu açıklamaların öğrencilerin matematiği kavrayışlarını aydınlattığı ve hatta çocukların açıklamalarının bazen öğretmenlerin görüş açılarını genişlettiği gözlenmiştir.

Heinze ve Reiss (2003) ispat yeteneğinin bileşenlerinden metodolojik bilginin genellikle birbirinden bağımsız olan üç yönünün olduğunu belirtmiştir: ispat şeması, ispat yapısı ve mantıksal zincir. Araştırmacılar metodolojik bilginin incelenmesi amacı ile Healy ve Hoyles (1998) tarafından geliştirilen çoktan seçmeli bir test kullanmıştır. Bu test, her birini en az dört farklı "ispat"ın izlediği matematiksel ifadelerden oluşmaktadır. Bu dört farklı ispat, bir empirik-tümevarımsal çözüm, bir dolaylı tartışmalı formal biçimde çözüm ve biri formal biçimde, diğeri hikâye şeklinde olan iki doğru çözümden oluşmaktadır. Öğrencilerden bu "ispat"ları onaylamaları ve çoktan seçmeli olan soruları cevaplamaları istenmiştir. Örneğin, öğrencilere verilen çözümün hatalı olup olmadığı, çözümün soruda belirtilen ifadenin evrensel olarak geçerli olup olmadığını veya sadece özel durumlar için geçerli olup olmadığını gösterip gösteremediği sorulmuştur. Bunların yanı sıra öğrencilere en çok hangi çözümden hoşlandıkları ve öğretmenden en iyi puanı hangi çözümün alacağı sorulmuştur. Yaklaşık olarak 2500 yüksek başarılı 10. sınıf öğrencisinin katıldığı ulusal çaptaki bu araştırmada, öğrencilerin çoğunun doğru ispatları tanıyabildikleri görülmüştür. Bununla birlikte, ispatın değerlendirmesinin ise argümanların formal olarak sunulması gibi farklı faktörlere bağlı olduğu belirlenmiştir. Öğrenciler, öğretmenden iyi bir not almak için hikâye biçimdeki doğru bir ispatın, formal bir çözümden daha düşük bir şansı olduğunu varsayarken, doğru olmadığını bilmelerine rağmen örnekle doğrulama tartışmalarını kullanmışlardır. Bir öğrencinin belirli bir cevabı neden seçtiği ile ilgili neredeyse hiç bilgi olmaması ve öğrencilerin çoktan seçmeli soruyu, araştırmacının beklediği gibi anlayıp anlamadıklarının açık olmaması nedeniyle, Heinze ve Reiss araştırma sorularını:

- Öğrencilerin metodolojik bilgilerinde ana eksiklikler nelerdir?
- Metodolojik bilgi alanında çoktan seçmeli soruları çözdükleri sırada öğrencilerin fikirleri ve düşünceleri nelerdir?

şeklinde belirlemişlerdir. 700 öğrencilik bir örneklemden geometri dersi ile ilgili bir yazılı testteki başarılarına göre 11 sekizinci sınıf öğrencisi seçerek görüşme yöntemi ile araştırma soruları üzerinde çalışmışlardır. Görüşmede her öğrenciden bir geometrik ispat maddesi için verilen dört çözümü değerlendirirken yüksek sesle düşünmeleri istenmiştir. Görüşme sonuçları, çoktan seçmeli soruların daha ziyade yüzeysel bilgi verme eğiliminde olduğunu, öğrencilerin ispatları onaylarken metodolojik bilginin üç yönünün de önemli olduğunu ve bunların matematik dersinde öğretilmesi gerektiğini göstermiştir.

Lucast (2003), çalışmasında cevabın doğru olduğunu ispatlayarak problem çözmenin NCTM nin ve kendini mesleğine adamış öğretmenlerin istediği "anlama"yı yaratabilmek için gereken bilişsel beceriyi geliştirdiğini iddia etmiştir. Bu tür anlamanın neden istenilir olduğunun sebeplerine dikkat çekerken bir disiplin olarak matematikte ispatın rolü ile ilgili tartışmalar sunmuştur. Amacının bilişsel becerinin tartışması ile birleştiğinde ispatın matematik programının değerli ve gerekli bir parçası olduğu tartışması için sıkı ve kesin temeller sağlayacak olan sınıf-uyumlu ispatın felsefi değerini vermek olduğunu ifade etmiş ve tartışmasını dört madde halinde geliştirmiştir. Bunlar: problem çözmenin bilişsel ve bilişüstü modellerinin literatürü, sınıfta ispatın kullanımı ve geleneksel görünümü, ispatın ve problem çözmenin bir bakıma büyük ölçüde aynı süreçler olduğu ve bu süreçlerin öğretiminin NCTM'nin istediği "okur yazarlık" ve "anlama"ya götürdüğü ve sonuç: ispat öğretimi için bir reçetedir. Sonunda ispatlamanın matematik kitabındaki diğer konularından ayrı bir aktivite olmadığı ve sadece geometri ile de ilgili olmadığını belirtmiştir. Sebepler verme ve matematiksel problem çözmeye rehberlik edecek sebepler için araştırma yapmanın eğitim boyunca kullanıldığında öğrencilerin kendi kendilerine ispatlar yazmayı öğrenmelerinin kolay motive edilir bir aktivite olacağını ve öğrencilerin matematikte ispatın doğrudan ilgililiğini, önemini ve belki de en önemlisi yararlılığını göreceklerini dile getirmiştir.

Lovin, Cavey ve Whitenack (2004) ilköğretim öğretmen adaylarının matematiksel doğrulamayı nasıl oluşturduklarını ve değerlendirdiklerini belirlemek amacıyla bir çalışma yapmışlardır. Yönelttikleri iki probleme (ardışık sayılar ve sayı oyunu) 280 öğretmen adayının verdiği yanıtları, Waring (2000)'in ispat kavramının gelişimi için tanımladığı altı düzeye göre değerlendirmişlerdir. Bulgular öğretmen adaylarının matematiksel bir iddiayı doğrulamada genel bir tartışmanın gerekliliğine inanmalarına rağmen, örnek kullanımından vazgeçemediklerini göstermektedir. Bununla birlikte çalışmaya katılanların %67'sinin Waring (2000)'in tanımladığı altı düzeyden 3. düzeyde olduğu belirlenmiştir.

Francisco ve Maher (2005), öğrencilerin zaman içerisinde problem çözme tabanlı matematik deneyimlerini izleyerek, problem çözme ve matematiksel muhakeme arasındaki ilişkiyi inceleyen uzun zamanlı bir araştırma gerçekleştirmişlerdir. Farklı sınıf düzeyinde (1.sınıftan 12.sınıfa kadar) ve üç farklı okuldan 80 öğrencinin katıldığı araştırmada, öğrenciler 3-18 yıl arasında matematik etkinlikleri sırasında videoya kaydedilmişlerdir. Bu etkinlikler sırasında öğrenciler üç problemin (kule problemi, pizza problemi ve dünya serisi problemi) değişik çeşitleri ve genişletilmiş halleri ile meşgul olmuşlardır. Araştırmacılar öğrencilerin problem çözme etkinliklerinde daha başarılı ve dikkatli olmalarını sağlayacak koşulları (i) problem çözme etkinlikleri sırasında öğrencilere asgari düzeyde müdahale edilen; (ii) öğrencilerin örüntüleri keşfetmeye, varsayımlar yapmaya, hipotezleri test etmeye, öğrenilmiş kavramların uygulamalarını ve genişletilmesini düşünmeye, muhakemelerini açıklamaya ve doğrulamaya imkân sağlayacak işbirlikçi bir ortam şeklinde tanımlamışlardır. Ayrıca öğrencilerin matematiksel hareketlerini ve kararlarını nasıl açıklayacaklarını işaret eden *doğrulama* ile matematikçilerin fikirlerini açıklamalarına yardım eden tartışmaların formal ve katı şekli olan *ispat* arasındaki ilişkiye dikkat çekerek, öğrencilerin matematiksel muhakemelerini geliştirmenin bir yolu olarak katı (rigorous) ispatlara geçmeden önce *doğrulamayı* vurgulamanın önemi üzerinde durmuşlardır.

Küchemann ve Hoyles (2005), öğrencilerin zaman içerisinde matematiksel muhakemelerindeki değişimleri inceledikleri Uzun Zamanlı İspat Projesi'nin (Longitudinal Proof Project) bir çalışması olarak sekizinci sınıf öğrencilerinin iki cebir sorusuna verdikleri cevapların devam eden yıllar içerisindeki değişimi üzerine bir araştırma gerçekleştirmişlerdir. Elli dört okuldan 1512 öğrenciye sekizinci sınıflarının son döneminde uyguladıkları testi aynı öğrencilerle dokuzuncu ve onuncu sınıfta tekrarlamışlardır. Öğrencilerin deneysel muhakeme mi yoksa yapısal muhakeme mi kullandıklarını değerlendirmek için düzenledikleri iki soruya verilen cevaplar analiz edilmiştir. Yapısal muhakemenin kullanımının yıllar boyunca bir miktar artmasına rağmen, deneysel muhakemenin uygun olmayan sayı örüntülerini bulma veya hesaplamak yerine, oluşturmada tercih edilme şeklinde hala yaygın olduğunu görmüşlerdir. Buna rağmen, deneysel muhakemenin, yapısal bir tartışmanın geçerliliğini kontrol amacı ile daha gelişmiş kullanımını belirlemişlerdir.

Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006), matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla Almedia (2003)'den uyarladıkları tutum ölçeğini 337 öğretmen adayına (59 ortaöğretim, 278 ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencisine) uygulamışlardır. Araştırmadan elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin ya olmadığını ya da yetersiz olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Bu literatür taraması sonucunda, ispatla ilgili araştırmaların lise ve üniversite düzeyinde yoğunlaştığı ilköğretim düzeyinde ise daha az olduğu ve doksanlı yılların ikinci yarısından itibaren özellikle İngiltere (Healy ve Hoyles 1999, 2000; Küchemann ve Hoyles 2000, 2005; Waring 2000) ve Amerika Birleşik Devletleri'nde (Reid 1995, 2001, 2002; Maher ve Martino 1996; Knuth ve diğer. 2002; Zack 2002; Francisco ve Maher 2005) artış gösterdiği belirlenmiştir. Bu araştırmaların önerilerinde matematiksel muhakeme ve ispat kavramının öğretimine ilköğretimin ilk yıllarından itibaren başlanması gerektiği belirtilmektedir. Bu araştırma ilköğretim öğrencileri ile gerçekleştirilmiş olup alandaki bu eksikliği gidermeye katkı sağlanması amaçlamaktadır. Ayrıca ülkemizde bu alanda yapılmış çalışmaların çok az olması nedeniyle bu çalışma ülkemiz örneğinin çalışıldığı ilk çalışmalardan biri olacaktır. Araştırmanın sonuçlarından program geliştirme, ders düzenleme, ders kitabı yazma konularında yararlanılabileceği düşünülmektedir.

BÖLÜM II

YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın modeli, çalışma grubu, araştırmada kullanılan veri toplama araçları ve toplanan verilerin çözümlenmesinde kullanılan istatistiksel yöntem ve tekniklerle ilgili bilgiler yer almaktadır.

1. Araştırma Modeli:

Araştırma, ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişiminin incelenmesine yöneliktir ve araştırma konusuna uygun olarak tarama modeli seçilmiştir. Tarama modelleri, geçmişte ya da halen var olan bir durumu var olduğu şekliyle betimlemeyi amaçlayan araştırma yaklaşımlarıdır. Araştırmaya konu olan olay, birey ya da nesne, kendi koşulları içinde ve olduğu gibi tanımlanmaya çalışılır. Onları herhangi bir şekilde değiştirme, etkileme çabası gösterilmez (Karasar 1999: 77).

Araştırmanın ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin zihinsel gelişim basamaklarına uygun düşen ispat düzeylerinin belirlenmesi kısmı nicel, yargılarının arkasında yatan sebeplerin incelenmesi kısmı nitel veriler içermektedir. Nitel araştırmalar, gözlem, görüşme ve doküman analizi veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırmalardır.

Çalışmanın nitel kısmını desteklemek için Yıldırım ve Şimşek (1999: 124)'in herhangi bir ortamda ya da kurumda oluşan davranışı ayrıntılı olarak tanımlamak amacıyla kullanılan bir yöntem olarak tanımladığı gözlem yöntemi ile nitel araştırmalarda kullanılan diğer bir veri toplama yöntemi olan görüşme tekniği kullanılmıştır. Görüşme, sözlü iletişim yoluyla veri toplama tekniğidir. Karasar (1999: 165) görüşme tekniğini, bireylerin çeşitli konulardaki bilgi, düşünce, tutum ve davranışları ile bunların olası nedenlerinin öğrenilmesinde kullanılan yollardan biri olarak belirtmiştir.

Araştırmanın nitel kısmı ile ilgili örneklem seçiminde, nitel araştırmalarda örneklemin belirli bir amaç doğrultusunda belirlenmesine hizmet eden amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan, tipik durum örneklemesi yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde amaç, çalışmanın amacına uygun tipik durumları seçerek evrene genelleme yapmak değildir. Amaç, ortalama durumları çalışarak belirli bir alan hakkında fikir sahibi olmak veya bu alan, konu, uygulama veya yenilik konusunda yeterli bilgi sahibi olmayanları bilgilendirmektir (Patton 1987; Akt. Yıldırım ve Şimşek, 1999: 71,72).

2. Araştırmanın Yapıldığı Öğrenci Grubu:

Araştırma, Bursa ili merkez ilçeleri olan Nilüfer, Osmangazi ve Yıldırım ilçelerine bağlı ilköğretim okullarından rasgele seçilmiş yedi ilköğretim okulunda 2005-2006 öğretim yılı ikinci yarıyılında yapılmıştır. Araştırmanın nitel kısmının daha başarılı olabilmesi için okul yönetimi ve öğretmenlerinin akademik çalışmaların değerini bilen ve takdir eden iki ilköğretim okulu tercih edilmiştir. Aşağıda araştırmanın nicel kısmına katılan öğrencilerin okullara ve cinsiyete göre dağılımları Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Araştırmanın nicel kısmında yer alan öğrencilerin okullara ve cinsiyete göre dağılımları

	6.sınıflar		7.sınıflar		8.sınıflar		Toplam	
Okullar	Kız (N)	Erkek (N)	Kız (N)	Erkek (N)	Kız (N)	Erkek (N)	Kız (N)	Erkek (N)
A okulu	9	18	10	9	-	-	19	27
B okulu	16	17	11	16	15	13	42	46
C okulu	14	23	22	10	16	14	52	47
D okulu	17	16	15	15	28	15	60	46
E okulu	21	17	17	15	23	21	61	53
F okulu	13	10	15	17	15	17	43	44
G okulu	21	11	18	21	15	17	54	49
Toplam	111	112	108	103	112	97	331	312

Araştırmanın nitel kısmı ile ilgili çalışma grubu nitel araştırmalarda kullanılan "amaçlı örnekleme yöntemleri"nden "tipik durum örneklemesi yöntemi"ne göre seçilmiştir.

Çalışma grubunu belirlemek için öğrencilerin matematik derslerinde sergiledikleri davranışlar gözlenmiştir. Derslerde verdikleri yanıtlar ve muhakeme biçimleri seçilmelerinde en büyük rolü oynamıştır.

Otuz altı kişiden oluşan çalışma grubu öğrencilerin matematik derslerinde sergiledikleri muhakemeleri ve davranışları altı hafta boyunca gözlemlenerek oluşturulmuştur. Ayrıca çalışmadan önceki dönem karne notları, Bursa ili genelinde yapılan ortak sınav notları ve matematik öğretmenlerinin görüşleri dikkate alınmıştır. Çalışma grubunun belirlenmesinde gönüllülük esas alınmıştır. Bu bakımdan, gözlem ve görüşme yapılacak öğrencilere araştırmanın amacı ve süreci hakkında bilgi verilmiş ve araştırmaya katılmaya gönüllü olup olmadıkları sorulmuştur. Araştırmanın nitel kısmına katılan öğrencilerin okullara ve cinsiyete göre dağılımları aşağıda Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Araştırmanın nitel kısmında yer alan öğrencilerin okullara ve cinsiyete göre dağılımları

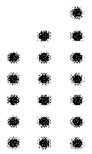
	6.sınıflar		**7.sınıflar**		**8.sınıflar**		**Toplam**	
Okullar	**Kız (N)**	**Erkek (N)**	**Kız (N)**	**Erkek (N)**	**Kız (N)**	**Erkek (N)**	**Kız (N)**	**Erkek (N)**
A okulu	2	4	2	4	4	2	8	10
B okulu	4	2	2	4	2	4	8	10
Toplam	6	6	4	8	6	6	16	20

3. Veri Toplama Aracı ve Verilerin Toplanması:

Bu araştırma için beş soruluk bir veri toplama aracı geliştirilmiştir (Ek 1). Veri toplama aracındaki sorular ilgili literatür göz önünde bulundurularak hazırlanmış ve çalışma öncesinde her sınıf düzeyinden çalışma grubunda yer almayan dört öğrenciye uygulanmak suretiyle uygulamada karşılaşılabilecek sorunlar tespit edilmiş ve giderilmiştir.

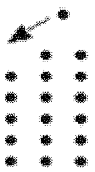
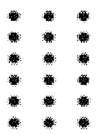
Birinci soruda öğrencilere ilk olarak matematiksel ispat gerektiren bir soru sorulmuş ve ek olarak bu soruya verilmiş farklı doğruluk derecelerindeki öğrenci cevapları sunulmuştur. Öğrencilerin ispatlama süreci için seçtikleri yaklaşımları ile ilgili bilgi toplamayı hedefleyen bu soru Healy ve Hoyles (2000) tarafından kullanılan sorulardan sınıf düzeylerimize ve eğitim programımıza uygun olarak uzman görüşü alınarak uyarlanmıştır.

Öğrencilerden sunulan cevaplardan en çok hangisinden hoşlandıklarını, hangisini en iyi anladıklarını, hangisini en ikna edici bulduklarını ve hangisinin öğretmenden en iyi notu alacağını belirlemeleri istenmiştir. Soru (a) ortak özelliklere veya genel bir duruma dayanan tartışma (Cem'in cevabı), (b) formal bir biçimde yazılmış öncül ve sonuçlar arasında açık bağlantılarla yapılmış mantıksal bir tartışmayı sunan tümdengelimsel bir ispat (Merve'nin cevabı) (c) deneysel, az açıklamalı ve somut gösterimli özellikte bir tartışma (Can'ın cevabı), içermektedir. Sorunun değerlendirilmesinde öğrencilerden en çok kimin cevabından hoşlandıkları, en iyi kimin cevabını anladıkları, sınıf arkadaşları için en ikna edici cevabın hangisi olduğu ve öğretmenden en yüksek notu hangi cevabın alacağını düşündüklerini belirtmeleri istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplar; cebirsel, görsel, örnekle doğrulama ve diğer olmak üzere dört kategoriden oluşmuştur. Fikrim yok veya hepsi şeklinde cevap verenler diğer olarak kodlandırılmıştır. Öğrencilerin verdiği bu cevapların sınıf düzeylerine göre farklılık gösterip göstermediğini, sınıf düzeyleri ile cebirsel, görsel veya örnekle doğrulama düzeyleri arasında ilişki olup olmadığını, varsa bu ilişkinin ne düzeyde olduğunu belirlemek için sorulara verilen cevapların sınıf düzeylerine göre ayrı ayrı frekans ve yüzdeleri hesaplanarak sınıflar arası karşılaştırma yapılmıştır. Şekil 2'de çalışmanın birinci sorusu görülmektedir.

<table>
<tr><td colspan="2">Soru 1: Üç öğrenci aşağıdaki ifadenin <u>her zaman</u> doğru olup olmadığını tartışıyorlar. Onların fikirlerini okuduktan sonra aşağıdaki soruları yanıtlayarak kendi fikirlerinizi belirtiniz.
Her hangi üç ardışık tam sayının toplamı ortadaki sayının üç katına eşittir. Örneğin, 4,5 ve 6 ardışık sayılar ve 4+5+6, 15'e eşit bu da ortadaki sayı 5'in üç katına eşittir.</td></tr>
<tr><td> Şekil 1</td><td rowspan="3">Cem Şöyle demiş:

Ben boncukları kullanarak bir yol buldum. 5, 6 ve 7 boncuk içeren üç sütun yaptım (Şekil 1). Daha sonra en yüksek sütundaki boncuğu en kısa sütuna hareket ettirerek (Şekil 2), her sütundaki boncuk sayısını eşit yaptım (Şekil 3). Ne demek istediğimi anlamak için soldaki çizime bakın.

O halde toplam boncuk sayısı ortadaki sütunun sayısının üç katıdır.

O halde Cem ifadenin doğru olduğunu söylüyor.</td></tr>
<tr><td> Şekil 2</td></tr>
<tr><td> Şekil 3</td></tr>
<tr><td>Merve şöyle demiş:
n-1, n ve n+1'in üç ardışık sayı olduğunu farz edelim.
(n-1)+n+(n+1)=3n

O halde üç sayının toplamı, ortadaki sayı olan n'in üç katıdır.

O halde Merve ifadenin doğru olduğunu söylüyor.</td><td>Can şöyle demiş:
5+6+7=3x6
7+8+9=3x8
569+570+571=3x570

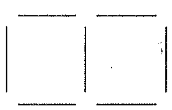
Böylece, üç ardışık sayının toplamı her zaman ortadaki sayının üç katıdır.

O halde Can ifadenin doğru olduğunu söylüyor.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En çok kimin cevabından hoşlandınız?</td></tr>
<tr><td colspan="2">En iyi kimin cevabını anladınız?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sınıf arkadaşlarınız için en ikna edici cevap hangisidir?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Öğretmenden en yüksek notu hangi cevabın alacağını düşünüyorsunuz?</td></tr>
</table>

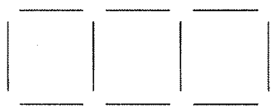
Şekil 2. Çalışmada kullanılan birinci soru (ardışık sayılar sorusu)

Çalışmanın ikinci sorusu matematiksel örüntülerden elde edilen sayı dizilerinin ilişkilerini tanımlayabilme ve onları doğal dille ve sembolik genellemelerle ifade edebilme düzeylerini belirlemek amacıyla sorulmuştur. Waring (2000: 60)'den uyarlanan sorunun ifadesi Şekil 3'de görülmektedir.

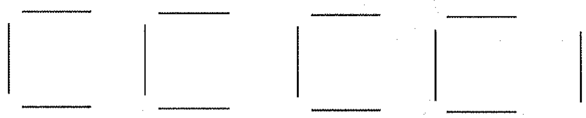
Soru 2: Eğer aşağıdaki şekildeki karenin her bir kenarındaki bir kürdan ise, o halde bir sırada iki kare yapmak için 7 kürdana ihtiyaç var.



Bir sırada üç kare yapmak için kaç tane kürdana ihtiyaç var?



10 tane saydınız mı?
Başka bir sınıftaki bir öğrenci bir sırada bulunan herhangi bir sayıdaki kare için gerekli kürdan sayısını anlayabileceğini söylüyor. Örneğin, farz edelim ki bir sırada 4 karemiz var ve kaç tane kürdana ihtiyacımız olduğunu anlamak istiyoruz. Her karenin "C" şekline benzeyen 3 kürdanla başladığını düşündüğünü ve en sonunda da 1 kürdan kullanıldığını söylüyor.



Bir sırada 4 kare yapmak için gerekli kürdan sayısını anlamak için kare sayısının üç katını alıp daha sonra en sondaki 1 kürdanı ekliyoruz.
Öğrenci kuralını şu şekilde yazıyor: (3 x 4) +1 =13. Bu durumda 13 kürdan ediyor.

Lütfen aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

Verilen kuralı kullanarak bir sırada altı kare yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz.

Öğrencinin kuralının her zaman çalışacağını düşünüyor musunuz?

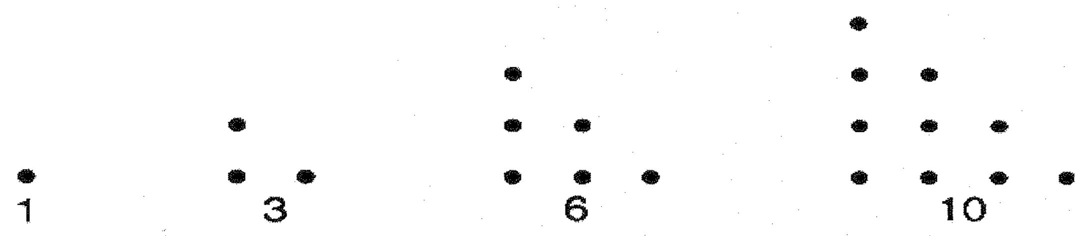
Şekil 3. Çalışmada kullanılan ikinci soru (kibrit sorusu)

Kibrit sorusunun değerlendirilmesinde sorunun birinci kısmı için öğrencilerin verdikleri cevaplar; cevap vermeyenler, yanlış cevap verenler, sadece şekil çizip (üzerinde kibritleri) sayarak doğru sonuca ulaşanlar, verilen kuralı kullanarak doğru sonucu bulanlar ve hem şekil çizip hem de kuralı kullanarak doğru sonucu bulanlar olmak üzere beş kategoriden oluşmuştur. İkinci kısmı için ise cevap vermeyenler, fikrinin olmadığını belirtenler, hayır ve evet olmak üzere dört kategoriden oluşmuştur.

Öğrencilerin verdiği cevapların sınıf düzeyleri ile ilişkili olup olmadığına cevapların sınıflara göre ayrı ayrı frekans ve yüzdeleri hesaplanarak bakılmıştır.

Üçüncü soru ise çalışmanın kibrit sorusunu bir adım ileri götürmeyi hedefleyen örüntünün farkına varıp cebir ile ilişkilendirerek örüntüyü cebirsel olarak ifade edip edemediklerini araştırmak istediğimiz ve Waring (2000)'in çalışmasından uyarladığımız üçgen sayılar sorusudur. Soru Şekil 4'de verilmiştir.

Soru 3: İlk dört üçgen sayı aşağıda görülmektedir.



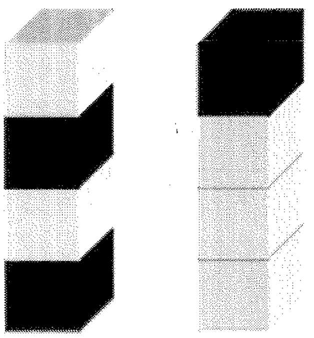
1. üçgen sayı:1 2. üçgen sayı: 3 3. üçgen sayı: 6 4. üçgen sayı: 10

Benzer şekilleri çizerek bunlardan sonra gelecek olan üç üçgen sayıyı bulabilir misiniz?
20. üçgen sayıyı nasıl elde edebileceğinizi açıklar mısınız?
Bulduğunuz yol her zaman işe yarayacak mı?

Şekil 4. Çalışmada kullanılan üçüncü soru (üçgen sayılar sorusu)

Üçgen sayılar sorusunun değerlendirmesinde "Benzer şekilleri çizerek bunlardan sonra gelecek olan üç üçgen sayıyı bulabilir misiniz?" sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplar, cevap vermeyenler, yanlış cevap verenler, şekil çizerek doğru cevaba ulaşanlar, örüntü kullanarak doğru cevaba ulaşanlar ve örüntü ve şekli birlikte kullanarak doğru cevaba ulaşanlar olmak üzere beş kategoriden oluşmuştur. Şekil çizerek veya örüntü kullanarak doğru cevaba ulaşan öğrencilerin bu seçimleri ile sınıf düzeyleri arasında ilişki olup olmadığını, varsa bu ilişkinin ne düzeyde olduğunu belirlemek için sorulara verilen cevapların sınıflara göre ayrı ayrı frekans ve yüzdeleri hesaplanarak sınıflar arası karşılaştırma yapılmıştır. Sorunun ikinci kısmında yer alan "20. üçgen sayıyı nasıl elde edebileceğinizi açıklar mısınız?" sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplar, cevap vermeyenler, yanlış cevap verenler, "şekil çizerek yaparım" ifadesini kullananlar, sadece örüntünün sözlü ifadesini yazanlar, toplama işlemi ile doğru sonuca ulaşanlar ve bu toplama işleminde hata yapanlar olmak üzere altı kategoriden oluşmuştur. Sorulara verilen cevaplar birinci kısımda olduğu gibi sınıflara göre ayrı ayrı frekans ve yüzdeler hesaplanarak sınıflar arası karşılaştırma yapılmıştır. Öğrenciler "Bulduğunuz yol her zaman işe yarayacak mı?" sorusuna yönelik cevaplarını, "yorum yok, hayır veya evet" şeklinde belirtmişlerdir ve bu cevaplar onların düşüncelerinin doğruluğuna ilişkin kendilerine olan güvenlerinin belirlenmesinde kullanılmıştır. Sorunun üçüncü bölümüne cevap vermeyen öğrenciler bu aşamada değerlendirilmeye alınmamıştır.

Maher ve Martino (1996) tarafından matematiksel doğrulama fikrinin ilköğretim öğrencilerindeki gelişimini incelemek için kullandığı kule problemi çalışmanın dördüncü sorusudur. Bu soru öğrencilerin aşina olmadığı türden bir soru olup onların muhakeme etme becerilerinin düzeyini görmek amacıyla sorulmuştur. Sorunun ifadesi Şekil 5'de verilmiştir.



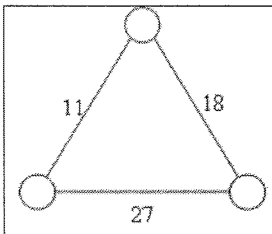
Soru 4: Elinizde istediğiniz sayıda şekildeki siyah ve beyaz küplerden olduğunu düşünün. Öğretmeniniz sizden bu küpleri kullanarak dört küp yüksekliğinde kuleler yapmanızı istiyor. Yapacağınız kuleler için size yanda iki örnek verilmiştir. (Bunlar sadece örnektir.)

Siyah ve beyaz küplerin **her ikisinden de** kullanarak dört küp yüksekliğinde kaç farklı kule yapabilirsiniz? (Aşağıdaki boşluğu cevap için kullanabilirsiniz, cevabınızı DAİRE içine alın.)

Şekil 5. Çalışmada kullanılan dördüncü soru (kule sorusu)

Sorunun değerlendirilmesinde öğrencilerin verdikleri cevaplar; sistematik şekil ve doğru cevap, sistematik şekil ve işlem hatası, şekil sistematik değil ama cevap doğru, şekil sistematik değil çizim doğru fakat cevap eksik ve cevap yok veya yanlış olmak üzere beş kategoriden oluşmuştur. Öğrencilerin verdiği cevapların sınıf düzeyleri ile ilişkili olup olmadığına cevapların sınıflara göre ayrı ayrı frekans ve yüzdeleri hesaplanarak bakılmıştır.

Çalışmanın diğer bir sorusu açık uçlu olarak verilmiş ve öğrencilerin çözümlerinde öncelikli olarak hangi stratejiye (deneme yanılma, sistematik liste, cebir) yönelecekleri gözlenmek istenmiştir. Bu amaçla Reid (1995)'in çalışmasından uyarlanan sorunun ifadesi Şekil 6'da görülmektedir.



Soru 5: Bu üçgenin **kenarlarındaki** sayılar **köşelerindeki** sayıların toplamlarıdır. Köşelerdeki gizli sayıları bulunuz.

Şekil 6. Çalışmada kullanılan beşinci soru (gizli sayılar sorusu)

Sorunun değerlendirilmesinde öğrencilerin verdikleri cevaplar; cevap vermeyenler, yanlış cevap verenler, denklem kurarak doğru cevaba ulaşanlar ve deneme yanılma yoluyla doğru cevaba ulaşanlar olmak üzere dört kategoriden oluşmuştur. Öğrencilerin verdiği cevapların sınıf düzeyleri ile ilişkili olup olmadığına cevapların sınıflara göre ayrı ayrı frekans ve yüzdeleri hesaplanarak bakılmıştır.

Araştırma 2005-2006 öğretim yılının bahar yarı yılı Mayıs ayı içerisinde yapılmıştır. Araştırmacı tarafından gerçekleştirilen çalışmanın nicel kısmı öğrencilerin sınıflarında bir ders saati içinde uygulanırken nitel kısmın uygulamaları için okullarında ayrılan özel odalar kullanılmıştır. İkişer kişilik gruplar halinde odaya alınan öğrencilere aynı uygulama yapıldıktan sonra cevaplarının sebepleri ile ilgili detaylı açıklamaları sözlü olarak istenmiş, yönlendirici sorular sorulmuş, birbirlerini ikna için konuşmaları sağlanmış ve bu çalışmalar sırasında verdikleri cevaplar ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Gruplar oluşturulurken öğrencilerin rahat iletişim kurabilecekleri arkadaşlarını tercih etmelerine fırsat verilmiştir.

2.4 Verilerin Analizi

Verilerin özetlenmesinde yüzde ve frekans değerleri hesaplanmış, sonuçlar tablo ve grafikler halinde sunulmuştur. Sınıflar arasındaki farklılık ve öğrencilerin tercih ettiği ispat kategorileri arasındaki fark için ANOVA, Ki-Kare ve Tukey testine başvurulmuştur.

Verilerin analizinde Sosyal Bilimler İçin İstatistiksel Paket (SPSS 10.0 for Windows) programından yararlanılmıştır.

BÖLÜM III

BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde, araştırma verilerinin analizi sonucunda elde edilen bulgu ve yorumlara alt problemlerin sırasıyla yer verilmiştir.

1. Birinci Alt Probleme İlişkin Bulgular

Birinci alt problem "İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin problemleri çözerken başvurdukları muhakeme şekilleri nelerdir?" şeklinde ifade edilmişti.

Bu alt probleme çözüm aranırken öğrencilerin çalışmada kullanılan kibrit sorusu, üçgen sayılar sorusu, kule sorusu ve gizli sayılar sorusu olmak üzere dört soruya verdikleri cevapların yüzde ve frekansları hesaplanmıştır.

Çalışmanın bu bölümünde öncelikle ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin problemleri çözerken başvurdukları muhakeme şekillerinin neler olduğunu belirlemek için araştırma kapsamında sorulan sorulardan kibrit sorusuna (soru 2) ve üçgen sayılar sorusuna (soru 3) verilen cevaplara ilişkin bulgu ve yorumlara yer verilmiştir.

Tablo 3. Kibrit sorusunun birinci kısmına verilen cevapların sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekansları

	6.sınıf		7.sınıf		8.sınıf	
	n	%	n	%	n	%
Verilen kuralı kullanarak doğru cevap	80	35.8	102	48.4	129	61.7
Verilen kural ve şekli kullanarak doğru cevap	36	16.1	19	9.0	23	11.0
Şekil üzerinde sayarak doğru cevap	35	15.7	17	8.1	5	2.4
Yanlış cevap	49	22.0	38	18.0	26	12.4
Cevap yok	23	10.3	35	16.6	26	12.4
	223	100	211	100	209	100

Öğrencilerin kibrit sorusunun "Verilen kuralı kullanarak bir sırada altı kare yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz" şeklindeki birinci kısmına verdikleri cevapların sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekansları Tablo 3'de verilmiştir. Sorunun bu kısmında kural verilmesine rağmen altıncı sınıf öğrencilerinin %15.7'sinin şekil çizip sonra kullanılan kibritleri sayarak cevaba ulaştıkları görülmektedir. Şekil çizerek doğru cevaba ulaşma oranı sınıf düzeyi ile ters orantılı olarak azalmıştır. Bu durum "Şekil üzerinde sayarak" ve "Verilen kural ve şekli kullanarak" kategorilerinin oranları ile birleştirildiğinde, bu oranın altıncı sınıf düzeyinde %31.8 iken yedinci sınıf düzeyinde %17.1'e ve sekizinci sınıf düzeyinde ise %13.4'e kadar gerilemesiyle daha net olarak görülmektedir. Öğrencilerin şekil kullanmaya yönelmeleri onların görsel doğrulamaya eğilimleri olarak yorumlanabilir.

Sınıf düzeyi arttıkça verilen kuralı kullanarak doğru cevaba ulaşma yüzdelerinin de arttığı (6.sınıf: %35.8; 7.sınıf: %48.4; 8.sınıf: %61.7) görülmektedir. Bu artışın gruplar arasında farka yol açacak düzeyde olup olmadığını belirlemek amacıyla Ki-Kare bağımsızlık testi yapılmıştır. Test sonuçlarına göre 6-7 (X^2= 6.92, $p<0.01$), 6-8 (X^2= 28.86, $p<0.001$) ve 7-8. (X^2= 7.60, $p<0.01$) sınıfların verilen kuralı kullanarak doğru cevaba ulaşma oranları arasındaki farkın anlamlı düzeyde olduğu görülmektedir. Araştırmanın bu bulgusu öğrencilerin sınıf düzeylerinin artışına paralel olarak verilen kuralın daha yüksek oranlarda kullanıldığını göstermektedir. Diğer yandan sorunun çözümü için gerekli olan kuralın verilmesine rağmen soruyu cevaplandırmayan veya yanlış cevaplandıranların oranlarının oldukça yüksek düzeyde olması öğrencilerin cebirsel ifadeleri tam olarak kavrayamadıkları fikrini uyandırmaktadır.

Öğrencilere verilen kuralın her zaman geçerli olup olmayacağına dair görüşlerinin sorulduğu kibrit sorusunun ikinci kısmına ait yüzde ve frekanslar Tablo 4'de görülmektedir.

Tablo 4. Kibrit sorusunun ikinci kısmına verilen cevapların sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekansları

	6.sınıf		7.sınıf		8.sınıf	
	n	%	N	%	n	%
Evet	134	60.1	136	64.5	139	66.5
Hayır	37	16.6	22	10.4	22	10.5
Fikrim yok	13	5.8	12	5.7	13	6.2
Cevap yok	39	17.5	41	19.4	35	16.7
	223	100	211	100	209	100

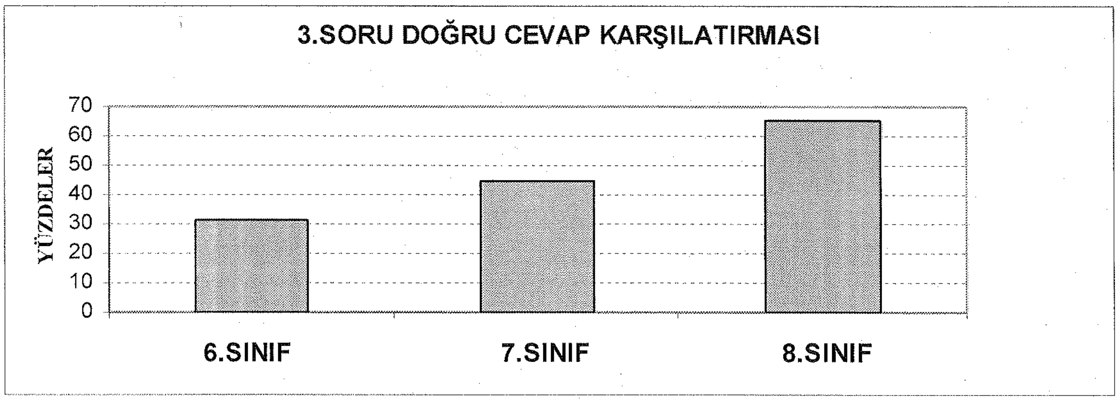
Öğrencilerin sorunun bu kısmına verdikleri yanıtlar, evet, hayır, fikrim yok ve cevap yok olmak üzere dört kategoride ele alınmıştır. Tablo 4 incelendiğinde bu kısmın cevaplandırılmasında öğrencilerin tercihlerinin sınıf düzeylerine göre farklılıklar göstermesine rağmen kuralın geçerliliği konusunda altı, yedi ve sekizinci sınıf öğrencilerinin düşüncelerinin bütün kategorilerde birbirine oldukça yakın düzeyde olduğu görülmektedir.

Kibrit sorusundan daha ileri bir basamak olarak fark edilen örüntünün öğrenciler tarafından ne derece genellenebileceğini görmek için öğrencilere üçgen sayılar sorusu yöneltilmiştir. Bu soruda verilen şekilleri izleyecek sıralı üç şekli çizerek üçgen sayıları bulmaları istenmiştir. Sorunun ilk bölümüne ait öğrenci cevaplarının sınıf düzeylerine göre yüzdeleri Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 5. Üçgen sayılar sorusunun birinci kısmına verilen cevapların sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekansları

	6.sınıf		7.sınıf		8.sınıf	
	n	%	n	%	n	%
Şekil, örüntü ve doğru cevap	3	1.3	11	5.2	7	3.3
Örüntü ve doğru cevap	14	6.3	18	8.5	40	19.1
Şekil ve doğru cevap	53	23.8	65	30.8	90	43.1
Yanlış cevap	90	40.4	66	31.3	27	12.9
Cevap yok	63	28.3	51	24.2	45	21.5
	223	100	211	100	209	100

Öğrencilerin üçgen sayılar sorusunun birinci kısmına verdiği yanıtlar şekil, örüntü ve doğru cevap; örüntü ve doğru cevap; şekil ve doğru cevap; yanlış cevap ve cevap yok olmak üzere beş kategoride ele alınmıştır. Öğrencilerin sınıf düzeyleri arttıkça doğru cevaba ulaşma yüzdelerinin de arttığı (6.sınıf: %31.4; 7.sınıf: %44.5; 8.sınıf: %65.5) görülmektedir. Bu farklılaşmanın anlamlı düzeyde olup olmadığını belirlemek amacı ile yapılan Ki-Kare testi sonuçlarına göre 6-7 (X^2= 7.99, $p<0.005$), 6-8 (X^2= 50.45, $p<0.0001$), 7-8 (X^2= 18.71, $p<0.0001$) sınıfların soruyu doğru cevaplama yüzdeleri arasında anlamlı düzeyde farklılık bulunmuştur. Öğrencilerin verdiği doğru cevapların sınıf düzeylerine göre yüzdeleri Şekil 7'de görülmektedir.



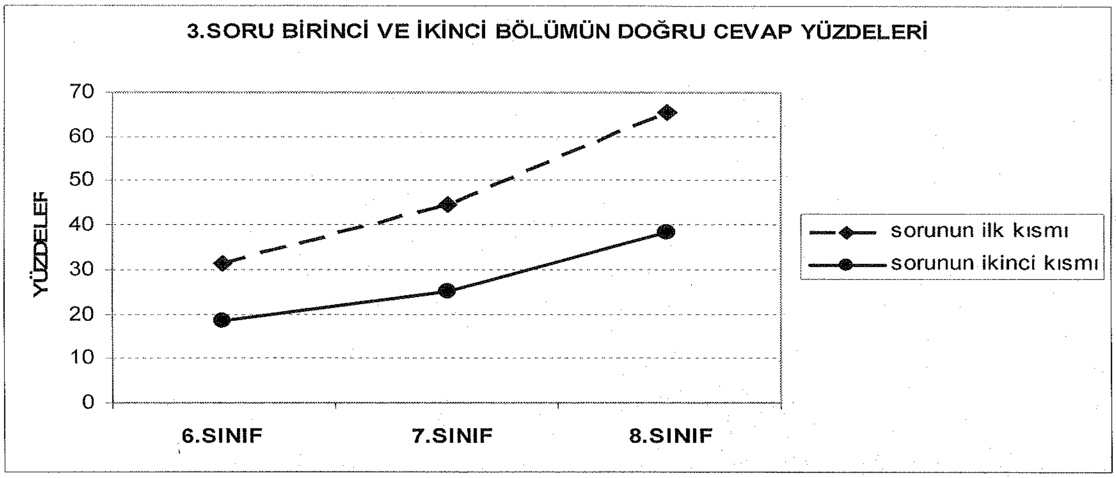
Şekil 7. Üçgen sayılar sorusunun birinci kısmını doğru cevaplandıran öğrencilerin sınıf düzeylerine göre yüzdeleri

Soruda verilen ilk dört üçgen sayının şekillerini takip ederek sonraki üç üçgen sayıyı bulan öğrencilerin sorunun devamında aynı başarıyı göstermedikleri görülmüştür. Tablo 6 üçgen sayılar sorusunun 20.üçgen sayıyı nasıl elde edebileceklerinin sorulduğu ikinci kısmına verilen öğrenci cevaplarının sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekanslarını göstermektedir.

Tablo 6. Üçgen sayılar sorusunun ikinci kısmına verilen cevapların sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekansları

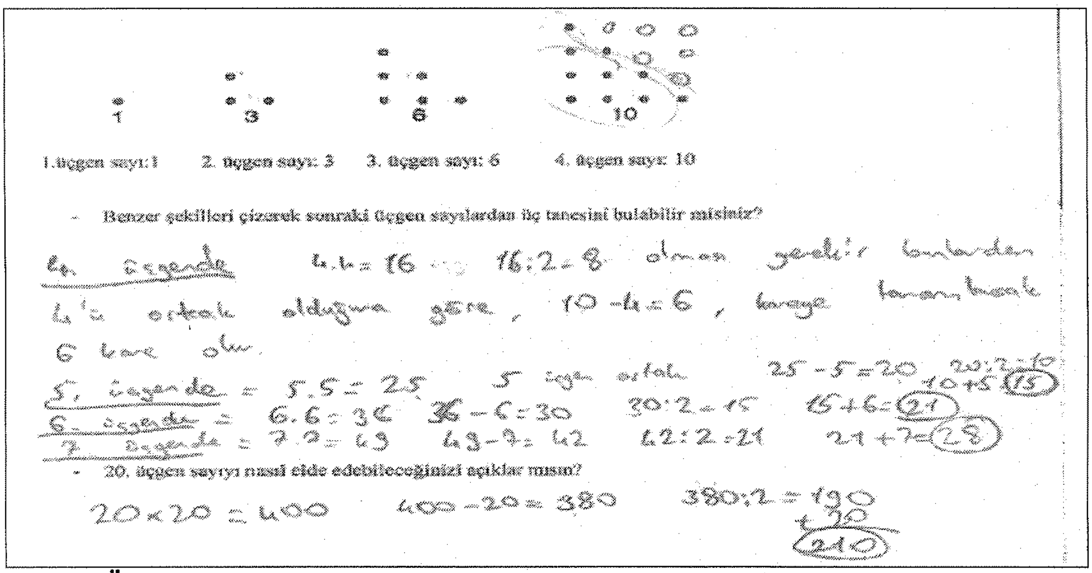
	6.sınıf		7.sınıf		8.sınıf	
	n	%	n	%	n	%
Toplayarak doğru cevap	1	.4	8	3.8	9	4.3
Toplayarak yanlış cevap (işlem hatası)	2	.9	4	1.9	10	4.8
Sadece örüntü ifadesi	22	9.9	29	13.7	49	23.4
Şekil çizerek bulunur	18	8.1	16	7.6	22	10.5
Yanlış cevap	58	26.0	56	26.5	26	12.4
Cevap yok	122	54.7	98	46.4	93	44.5
	223	100	211	100	209	100

Öğrencilerin üçgen sayılar ile ilgili sorunun bu kısmına verdiği cevaplar, toplayarak doğru cevap, toplayarak yanlış cevap (işlem hatası), sadece örüntünün ifadesi, şekil çizerek bulunur diyenler, yanlış cevap ve cevap yok şeklinde altı kategoride ele alınmıştır. Tablodan da görüldüğü gibi sorunun birinci kısmında cevap vermeyen veya yanlış cevap veren öğrencilerin toplam yüzdeleri altıncı sınıflardan sekizinci sınıflara doğru %68.7; %55.5 ve %34.4 iken sorunun ikinci kısmında %81.6; %74.8 ve %61.7 şeklinde olmuştur. Öğrencilerin sınıf düzeyleri ile doğru cevap yüzdeleri arasında anlamlı düzeyde ilişki olup olmadığına Ki-Kare testi ile bakılmıştır. Test sonuçlarına göre altıncı ve yedinci sınıflar arasında (X^2= 3.65, p<0.055) anlamlı düzeyde fark bulunmazken, altıncı ve sekizinci sınıf (X^2= 28.63, p<0.0001) ile yedinci ve sekizinci sınıflar (X^2= 11.89, p<0.001) arasındaki farklar anlamlı düzeydedir. Sorunun ilk iki bölümü için doğru cevap yüzdelerini gösteren grafik Şekil 8'de verilmiştir.



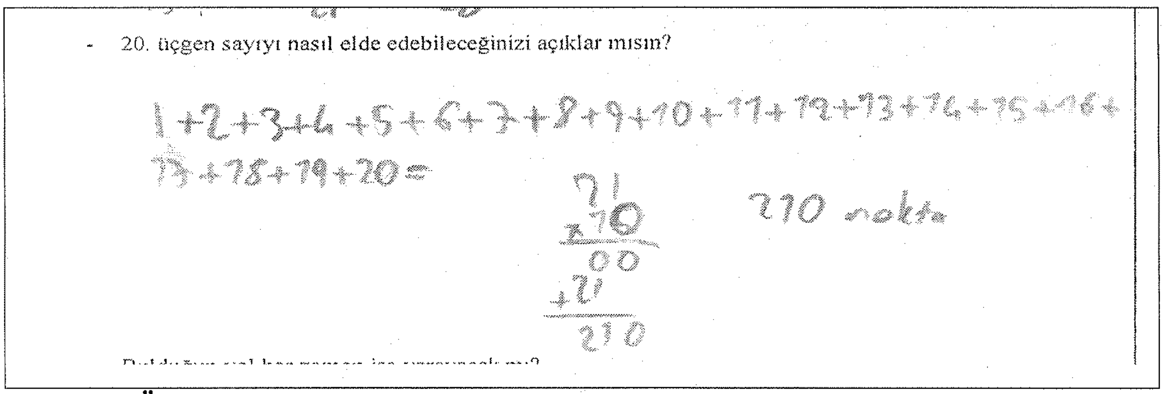
Şekil 8. Üçgen sayılar sorusunun birinci ve ikinci bölümünü doğru cevaplandıran öğrencilerin sınıf düzeylerine göre yüzdeleri

Nitel çalışma sırasında üçgen sayılar sorusunun ikinci kısmını farklı bir kural bularak çözen bir altıncı sınıf öğrencisinin verdiği cevap Şekil 9'da görülmektedir.



Şekil 9. Üçgen sayılar sorusunu farklı bir yolla çözen altıncı sınıf öğrencisine ait cevap

Bu soruyu farklı yanıtlayan diğer bir öğrenci nitel çalışmaya katılan yedinci sınıf öğrencilerinden biriydi. Görüşme sırasında cevabını "1, 2, 3, 4, 5 artarak gidiyor. Burada 3 artmış 6'ya ulaşmış, 4 artmış 10'a ulaşmış...Bize 20 vermiş. Biz eğer ardışık sayıları topluyorsak ve topladığımız sayılar çift sayı yani burada 20 sayı topluyoruz. 20 ile 1'i toplarız 21 eder, 19 ile 2'yi toplarız 21 eder... 20'nin yarısı 10 eder. 21 ile 10'u çarparız..."şeklinde ifade etmiştir. Öğrencinin cevabı Şekil 10'da görülmektedir.



Şekil 10. Üçgen sayılar sorusuna bir yedinci sınıf öğrencisinin cevabı

Üçgen sayılar sorusunun ikinci kısmını cevaplayan öğrencilerin "Bulduğunuz yol her zaman işe yarayacak mı?" şeklindeki üçüncü kısmı için verdikleri cevapların yüzde ve frekansları Tablo 7'de görülmektedir.

Tablo 7. Üçgen sayılar sorusunun üçüncü kısmına verilen cevapların sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekansları

	6.sınıf		7.sınıf		8.sınıf	
	n	%	n	%	n	%
Evet	64	63.4	66	58.4	84	72.4
Hayır	15	14.9	24	21.2	12	10.3
Yorum yok	19	18.8	12	10.6	9	7.8
Cevap yok	3	3.0	11	9.7	11	9.5
	101	100.0	113	100.0	116	100.0

Üçgen sayılar sorusunun ikinci kısmına öğrencilerin doğru cevap verme oranı %19.3-43.1 (Tablo 6) olmasına karşın, öğrencilerin buldukları cevabın her zaman işe yarayıp yaramayacağına dair verdikleri cevaplar arasında "evet" diyenlerin oranının (%58.4-72.4) oldukça yüksek olduğu görülmektedir. Bu soruya ilişkin elde edilen bulgu öğrencilerin büyük çoğunluğunun yanlış yaptıklarının farkında olmadığını göstermektedir.

İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin problemleri çözerken başvurdukları muhakeme şekillerinin neler olduğunu belirlemek için araştırma kapsamında sorulan sorulardan kule sorusu (soru 4) ve gizli sayılar sorusuna (soru 5) öğrencilerin verdikleri cevapların yüzde ve frekansları Tablo 8 ve Tablo 9'da gösterilmiştir.

Tablo 8. Kule sorusuna verilen cevapların sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekansları

	6.sınıf		7.sınıf		8.sınıf	
	n	%	n	%	n	%
Sistematik şekil ve doğru cevap	5	2.2	9	4.3	13	6.2
Sistematik şekil ve işlem hatası	6	2.7	3	6.2	4	8.6
Şekil sistematik değil ama doğru cevap	6	2.7	13	1.4	18	1.9
Şekil sistematik değil çizim doğru ama cevap eksik	75	33.6	58	27.5	25	12.0
Cevap yok veya yanlış	131	58.7	128	60.7	149	71.3
	223	100	211	100	209	100

Tablo 8'de de görüldüğü gibi öğrencilerin kule sorusuna verdiği yanıtlar, sistematik şekil ve doğru cevap, sistematik şekil ve işlem hatası, şekil sistematik değil ama doğru cevap, şekil sistematik değil çizim doğru fakat cevap eksik ve cevap yok veya yanlış olmak üzere beş kategoride ele alınmıştır.

Öğrencilerin muhakeme şekillerinin belirlenmesinin amaçlandığı bu soruda, araştırmaya katılan öğrencilerin doğru cevaba ulaşmak için sadece şekil çizme ve sistematik liste yapma yöntemlerini kullandıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin doğru cevap yüzdeleri, altıncı sınıflarda %4.9, yedinci sınıflarda %5.7 ve sekizinci sınıflar da ise %8.1 olup bu oranlar oldukça düşüktür.

Çalışmanın nitel kısmında da aynı soru için benzer sonuçlar elde edilmiş olup doğru cevap yüzdesi yine oldukça düşüktür. Ancak bu düşük orana rağmen nitel çalışmalar sırasında soruyu farklı yöntem kullanarak çözen iki öğrenci olmuştur. Bu öğrencilerden birisi altıncı sınıfta olup öğrenci çözümünü "Beyazın 0, siyahın 1 olduğunu varsayalım. Bu durumda seçeneklerimiz 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 olur." şeklinde ifade etmiştir. Öğrenciye "Hepsini bulduğundan nasıl emin olacaksın?" sorusu yöneltildiğinde ise cevabı "Küçükten büyüğe doğru sıraladığım için başka seçenek olma ihtimali yok." şeklinde olmuştur.

Farklı bir yöntemi kullanan diğer öğrenci sekizinci sınıfta olup cevabını "Tüm olasılıklar $2^4=16$ tane, tamamının siyah ya da beyaz olma olasılığını çıkardığımızda 14 kalır (16-2=14)." şeklinde açıklamıştır.

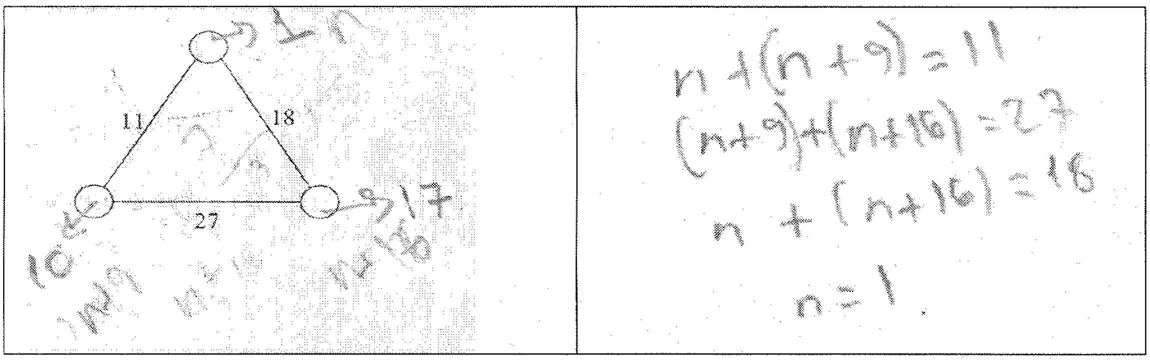
Öğrencilerin muhakeme şekillerini belirlemeye yönelik sorulardan bir diğeri *gizli sayılar* sorusudur. Verilen üçgenin köşelerine yazılabilecek sayıların bulunmasını gerektiren bu soru da öğrencilerin matematik derslerinden aşina olmadıkları bir soru türüdür. Öğrenciler tarafından bu soruya verilen cevapların sınıflara göre yüzde ve frekansları Tablo 9'da görülmektedir.

Tablo 9. Gizli sayılar sorusuna verilen cevapların sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekansları

	6.sınıf		7.sınıf		8.sınıf	
	n	%	n	%	n	%
Denklem ve doğru cevap	3	1.3	1	0.5	5	2.4
Deneme yanılma ve doğru cevap	111	49.8	56	26.6	100	47.8
Yanlış cevap	75	33.6	103	48.8	62	29.7
Cevap yok	34	15.2	51	24.2	42	20.1
	223	100	211	100	209	100

Tablo 9'da da görüldüğü gibi öğrencilerin gizli sayılar sorusuna verdiği yanıtlar, denklem ve doğru cevap, deneme yanılma ve doğru cevap, yanlış cevap ve cevap yok olmak üzere dört kategoride ele alınmıştır. Altıncı ve sekizinci sınıfların deneme yanılma yöntemini kullanma oranlarının yaklaşık olarak %50 civarında olduğu, yedinci sınıflarda ise bu oranın %26.6 olduğu görülmektedir. Yedinci sınıfların deneme yanılma yöntemini kullanma oranı altıncı sınıfların oranı ile karşılaştırıldığında neredeyse yarı yarıya bir fark göstermiştir. Bununla birlikte gizli sayılar sorusuna denklem kullanarak doğru cevap veren öğrenci sayısı ise yok denecek kadar azdır.

Nitel çalışma sırasında gizli sayılar sorusunu cebirsel olarak ifade eden öğrencilerden bir sekizinci sınıf öğrencisinin bu yöntemi kullanan diğer öğrencilerden farklı bir yol kullanarak verdiği cevap Şekil 11'de görülmektedir. Öğrenci metodunda önce 11 ve 18 arasındaki farkın 7, 18 ile 27 arasındaki farkın 9 olduğunu belirtmiştir. 27'nin karşısındaki köşeyi n olarak adlandırarak, n+(n+9)=11, (n+9)+(n+16)=27 ve n+(n+16)=18 denklemlerini kurmuş ve önce n=1 değerine ulaşarak sonra diğer gizli sayıları bulmuştur.



Şekil 11. Gizli sayılar sorusuna bir sekizinci sınıf öğrencisi tarafından verilen cevap

Bu soruyu farklı bir şekilde çözen bir diğer sekizinci sınıf öğrencisi cevabını şu şekilde açıklamıştır: “Ben deneyerek bulmadım. Şöyle 11+18, 29’a eşit olacak. Şimdi 27 ve 29 birbirine yakın sayılar. Şuraya bir koyduğumuzu düşünürsek, bir tane 1 buna ekler (kenarda yazan 11 sayısını göstererek), bir tane bir de buna ekler (diğer kenardaki 18 sayısını göstererek) bunun için kalanların toplamı 27 olur diye düşündüm. Buraya 1 koyduğumda (11 ile 18 yazılı kenarların birleştiği köşeyi işaret ederek) burası 10 olmak zorunda burası da 17.” Öğrenciye bu soruyu başka bir yöntemle çözüp çözemeyeceği sorulduğunda denklemle çözüme ulaşmıştır.

Araştırmaya katılan ve çalışmanın yürütüldüğü dönemde olasılık konusunu görmüş olan 221 sekizinci sınıf öğrencisi içinde nitel olarak çalışılan 12 öğrenciden sadece bir öğrenci daha önce aşina olmadığı kule sorusu ile olasılık konusunu ilişkilendirerek doğru cevaba ulaşmıştır. Benzer şekilde birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin yedinci sınıf, iki bilinmeyenli eşitsizliklerin sekizinci sınıf konuları içinde yer almasına rağmen gizli sayılar sorusunda denkleme başvurma oranının çok düşük olması öğrencilerin öğrendikleri konuları farklı konulara uyarlamada yeterli olmadıkları fikrini uyandırmaktadır.

2. İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgular:

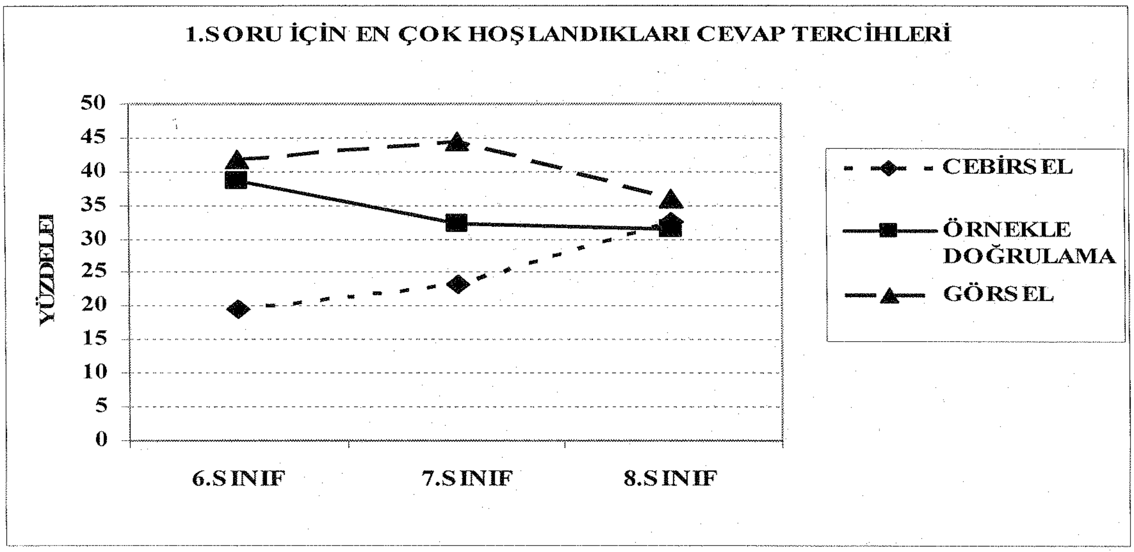
"İlköğretim 6, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinin ispat yaparken başvurdukları ispat şekilleri nelerdir?" şeklinde ifade edilen ikinci alt probleme cevap aranırken, öğrencilerin çalışmanın birinci sorusu olan ardışık sayılar sorusuna verdikleri cevapların sınıf düzeylerine göre yüzde ve frekansları hesaplanmış, öğrencilerin tercih ettiği ispat kategorileri arasındaki fark için ANOVA ve Tukey testleri uygulanmıştır.

Öğrencilerin ardışık sayılar sorusuna verdikleri cevapların yüzdeleri sınıf düzeylerine göre Tablo 10'da gösterilmiştir.

Tablo 10. Ardışık sayılar (1.soru) sorusuna ait öğrenci cevaplarının sınıf düzeylerine göre yüzdeleri

	En çok hoşlandığı %			En iyi anladığı %			En ikna edici %			En yüksek not %		
	6.	7.	8.	6.	7.	8.	6.	7.	8.	6.	7.	8.
CEBİRSEL	19.7	23.2	32.5	19.7	18,5	28.7	16.1	19.0	22.5	38.1	48.8	45.9
ÖRN.DOĞ.	38.6	32.2	31.6	35.4	37,0	39.2	42.2	31.8	39.2	30.0	23.7	25.4
GÖRSEL	41.7	44.5	35.9	43.5	43,6	31.1	38.1	42.7	34.9	29.1	23.7	22.5
DİĞER				1.3	.9	1	3.6	6.7	3.3	2.6	3.7	6.2
TOPLAM	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Çalışmanın birinci sorusunda, öğrencilere sunulan üç farklı tartışma örneğinden sonra yöneltilen "En çok kimin cevabından hoşlandınız?" sorusuna ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin verdiği cevaplara ait grafik Şekil 12'de verilmiştir.



Şekil 12. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin "En çok kimin cevabından hoşlandınız?" sorusuna verdikleri cevapların sınıf düzeylerine göre yüzdeleri

Şekil 12 incelendiğinde, sınıf düzeyinin artmasına paralel olarak öğrencilerin cebirsel ispatı tercih etme düzeyinin de arttığı (6.sınıflarda bu düzey %19.7 iken, 8. sınıfa gelindiğinde ise %32.5'e yükselmiştir) görülmektedir. Görsel ispat ise her üç sınıf düzeyinde de *hoşlanılan cevap olarak* en çok tercih edilen *ispat* çeşidi olmuştur. Sınıf düzeyinin artmasıyla öğrencilerin hoşlandıkları ispat türleri arasında istatistiksel olarak anlamlı farklılık olup olmadığını belirlemek için tek yönlü varyans analizi yapılmıştır. Elde edilen bulgular Tablo 11'de verilmiştir.

Tablo 11. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin en çok hoşlandıkları cevap tercihlerinde sınıf düzeylerine göre farklılaşma olup olmadığını gösteren ANOVA sonuçları

	Kareler toplamı	Sd.	Kareler ortalaması	F	p
			CEBİRSEL		
Gruplar arası	1.580	2	.790	3.995	.019
Gruplar içi	126.591	640	.198		
Toplam	128.171	642			
			ÖRNEKLE DOĞRULAMA		
Gruplar arası	2.602	2	1.301	1.445	.237
Gruplar içi	576.309	640	.900		
Toplam	578.911	642			
			GÖRSEL		
Gruplar arası	7.376	2	3.688	1.698	.184
Gruplar içi	1389.821	640	2.172		
Toplam	1397.198	642			

Tek yönlü varyans analizi sonuçları, öğrencilerin görsel ve örnekle doğrulama tercihleri bakımından sınıflar arasında anlamlı bir farklılık olmadığını gösterirken, cebirsel cevabı tercih etmeleri bakımından ise sınıflar arasında anlamlı bir farklılık olduğunu ortaya koymaktadır ($F(2,640)=3,995$ $p=0,019<0,05$). Farklılığın hangi sınıflar arasında olduğunu belirlemek amacıyla yapılan Tukey testinin sonuçları Tablo 12'de görülmektedir.

Tablo 12. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin en çok hoşlandıkları cevap olarak cebirsel doğrulamayı tercihlerinde sınıflar arası farkı gösteren Tukey testinin sonuçları

	(I) Sınıf	(J) Sınıf	Ortalama fark (I-J)	Standart hata	p
Tukey HSD	6,00	7,00	-.0215	.04271	.870
		8,00	-.1146(*)	.04282	.021
	7,00	6,00	.0215	.04271	.870
		8,00	-.0931	.04340	.082
	8,00	6,00	.1146(*)	.04282	.021
		7,00	.0931	.04340	.082

* .05 düzeyinde anlamlıdır.

Tukey testi sonuçlarına göre, altıncı sınıflar ile sekizinci sınıflar arasında cebirsel doğrulamayı tercih etme açısından ($p=0.021<0.05$) anlamlı bir farklılık vardır. Bir başka deyişle bu sonuç sekizinci sınıfların altıncı sınıflara göre cebirsel ispattan daha çok hoşlandıklarını göstermektedir.

Öğrencilerin en çok hoşlandıkları cevap tercihlerinde sınıflar arası farklılaşmalar karşılaştırıldıktan sonra her bir sınıf düzeyinin kendi içindeki farklılaşmaların anlamlı düzeyde olup olmadığını belirlemek için Ki-Kare bağımsızlık testi yapılmıştır.

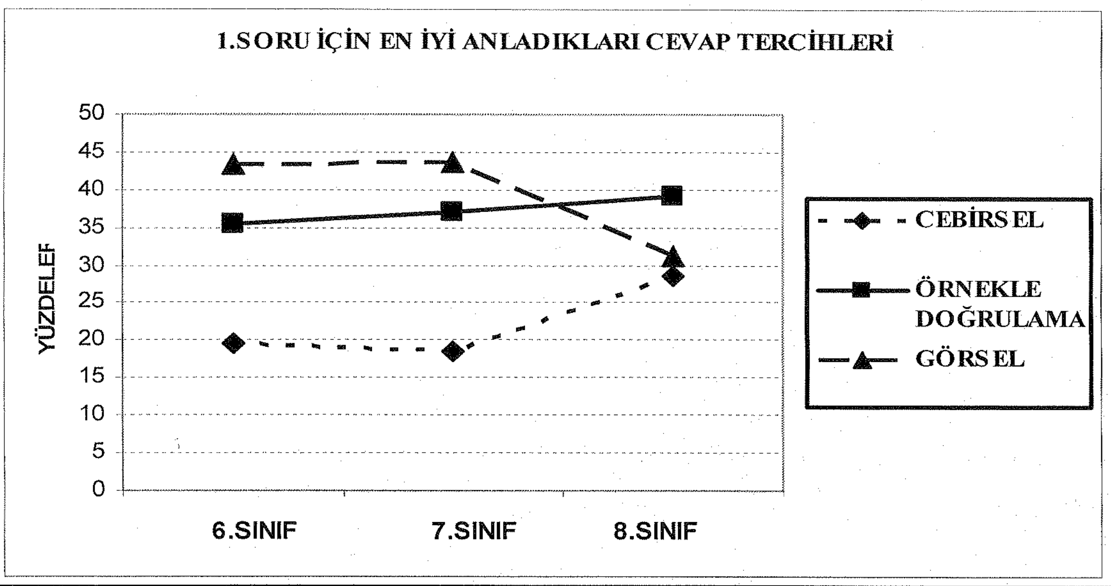
Altıncı sınıf öğrencilerinin Şekil 12'den de izlenebilen en çok hoşlandıkları cevap tercihleri arasındaki istatistiksel analizler, öğrencilerin görsel ve örnekle doğrulama tercihleri arasında gözlenen farkın anlamlı olmadığını, cebirsel ve örnekle doğrulama ($X^2= 19.15$, $p<0.001$) ile görsel ve cebirsel ($X^2= 25.30$, $p<0.001$) arasında gözlenen farkların ise anlamlı olduğunu göstermiştir.

Sonuç olarak altıncı sınıf öğrencileri en çok hoşlandıkları cevap olarak cebirseli, görsel ve örnekle doğrulamadan anlamlı düzeyde daha az tercih etmişlerdir.

Yedinci sınıf öğrencilerinin en çok hoşlandıkları cevap tercihleri arasındaki istatistiksel analizler öğrencilerin görsel ve örnekle doğrulama ($X^2= 6.77$, $p<0.\ 01$) cebirsel ve örnekle doğrulama ($X^2= 4.27$, $p<0.05$) ile görsel ve cebirsel ($X^2= 21.42$, $p<0.001$) tercihleri arasında gözlenen farkların hepsinin anlamlı düzeyde olduğunu göstermiştir. Bu sonuç yedinci sınıf öğrencilerinin en çok hoşlandıkları cevap tercihlerinin en düşük yüzdeden en yüksek olana doğru sırasıyla cebirsel, örnekle doğrulama ve görsel şeklinde olduğunu göstermektedir.

Sekizinci sınıf öğrencilerinin, en çok hoşlandıkları doğrulama tercihleri arasında yapılan karşılaştırmalar (Şekil 12), öğrencilerin her üç cevabı da birbirine oldukça yakın oranlarda tercih ettiklerini göstermektedir.

Ardışık sayılar sorusundaki tartışmalardan "En iyi kimin cevabını anladınız?" sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplar ile ilgili yüzdeler Şekil 13'de görülmektedir.



Şekil 13. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için "En iyi kimin cevabını anladınız?" sorusuna öğrencilerin verdikleri cevapların sınıf düzeylerine göre yüzdeleri

Şekil 12 ile Şekil 13'ün karşılaştırılmasından da anlaşılabileceği gibi öğrencilerin en çok hoşlandıkları cevap ile en iyi anladıkları cevap tercihlerinin yüzdeleri birbirine yakın düzeydedir. Sınıfların ilerlemesiyle öğrencilerin anladıkları ispat türleri arasında istatistiksel olarak anlamlı farklılık olup olmadığını belirlemek için tek yönlü varyans analizi yapılmıştır. Elde edilen bulgular Tablo 13'de verilmiştir.

Tablo 13. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin en iyi anladıkları cevap tercihlerinde sınıf düzeylerine göre farklılaşma olup olmadığını gösteren ANOVA sonuçları

	Kareler toplamı	Sd.	Kareler ortalaması	F	p
			CEBİRSEL		
Gruplar arası	1.313	2	.656	3.822	.022
Gruplar içi	109.885	640	.172		
Toplam	111.198	642			
			ÖRNEKLE DOĞRULAMA		
Gruplar arası	.631	2	.316	.337	.714
Gruplar içi	600.028	640	.938		
Toplam	600.659	642			
			GÖRSEL		
Gruplar arası	21.215	2	10.607	4.992	.007
Gruplar içi	1359.858	640	2.125		
Toplam	1381.073	642			

Tablo 13 incelendiğinde, öğrencilerin örnekle doğrulama tercihlerinde sınıflar arasında anlamlı bir farklılık olmadığı, cebirsel ($F(2,640)=3.822$, $p=0.022<0.05$) ve görsel ($F(2,640)=4.992$, $p=0.007<0.05$) cevabı tercihlerinde ise sınıflar arasında anlamlı bir farklılık olduğu görülmektedir. Bu farkın hangi sınıflar arasında olduğunu belirlemek amacıyla yapılan Tukey testi sonuçları Tablo 14 ve Tablo 15'de verilmiştir.

Tablo 14. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin anladıkları cevap olarak cebirsel ispatı tercihlerinde sınıflar arası farkı gösteren Tukey testinin sonuçları

	(I) Sınıf	(J) Sınıf	Ortalama fark (I-J)	Standart hata	p
Tukey HSD	6,00	7,00	.0125	.03980	.947
		8,00	-.0898	.03989	.064
	7,00	6,00	-.0125	.03980	.947
		8,00	-.1022(*)	.04044	.031
	8,00	6,00	.0898	.03989	.064
		7,00	.1022(*)	.04044	.031

* .05 düzeyinde anlamlıdır.

Tukey testi sonuçlarına göre yedinci sınıflar ile sekizinci sınıflar arasında cebirsel ispatı tercih etme açısından ($p=0.031<0.05$) anlamlı bir farklılık olduğu anlaşılmaktadır. Yani sekizinci sınıflar yedinci sınıflara göre cebirsel ispatı en iyi anladıkları cevap olarak daha fazla tercih etmişlerdir.

Tablo 15. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin anladıkları cevap olarak görsel ispatı tercihlerinde sınıflar arası farkı gösteren Tukey testinin sonuçları

	(I) Sınıf	(J) Sınıf	Ortalama fark (I-J)	Standart hata	p
Tukey HSD	6,00	7,00	-.0031	.13999	1.000
		8,00	.3863(*)	.14034	.017
	7,00	6,00	.0031	.13999	1.000
		8,00	.3894(*)	.14225	.017
	8,00	6,00	-.3863(*)	.14034	.017
		7,00	-.3894(*)	.14225	.017

* .05 düzeyinde anlamlıdır.

Tablo 15'e göre öğrencilerin en iyi anladıkları cevap olarak görsel ispatı tercih etme açısından altı ve yedinci sınıflar arasında anlamlı bir farklılık yokken, altıncı ve sekizinci sınıflar arasında ($p=0.017<0.05$) ve yedinci ve sekizinci sınıflar arasında ($p=0.017<0.05$) anlamlı düzeyde farklılık olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar altı ve yedinci sınıfların en iyi anladıkları cevap olarak görsel ispatı sekizinci sınıflara göre anlamlı düzeyde daha fazla tercih ettikleri göstermektedir.

Nitel çalışma sırasında ardışık sayılar sorusunda en iyi anladığı cevap olarak görsel cevabı tercih eden bir öğrenci, seçim sebebini şu sözlerle ifade etmiştir. "...Görsellikle daha iyi anlaşılır. Şekille kanıtlarız. Formülü bilen de var bilmeyen de. Bu yüzden arkadaşıma anlatırken Cem'in yöntemini kullanırım."

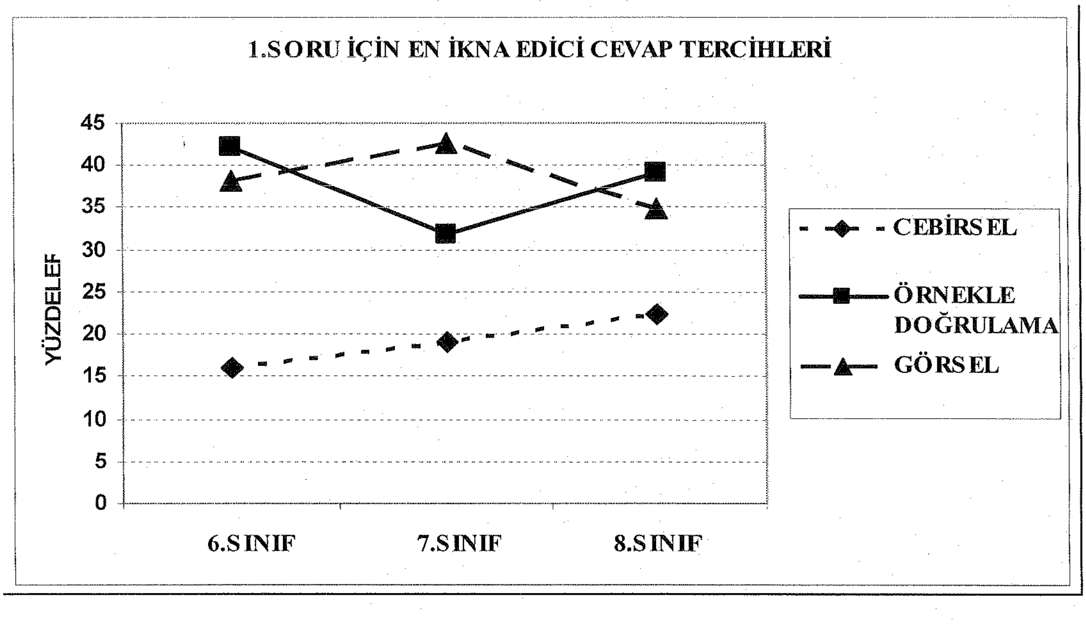
Öğrencilerin en iyi anladıkları cevap tercihlerinde sınıflar arası farklılıkların karşılaştırılmasından sonra her bir sınıf düzeyinin kendi içindeki farklılaşmaları belirlemek için Ki-Kare bağımsızlık testi yapılmıştır.

Altıncı sınıf öğrencilerinin en iyi anladıkları cevap tercihleri arasındaki istatistiksel analizler, öğrencilerin görsel ve örnekle doğrulama tercihleri arasında gözlenen farkın anlamlı olmadığını, cebirsel ve örnekle doğrulama ($X^2= 13.75$, $p<0.001$) ile görsel ve cebirsel ispat ($X^2= 27.66$, $p<0.001$) arasında gözlenen farkların ise anlamlı düzeyde olduğunu göstermiştir. Bu sonuçlar altıncı sınıf öğrencilerinin en iyi anladıkları cevap olarak cebirsel ispatı görsel ve örnekle doğrulamadan anlamlı düzeyde daha az tercih ettiklerini ortaya koymaktadır.

Yedinci sınıf öğrencilerinin en iyi anladıkları cevap tercihleri arasındaki istatistiksel analizler, altıncı sınıflarda olduğu gibi görsel ve örnekle doğrulama tercihleri arasında anlamlı değilken, cebirsel ve örnekle doğrulama ($X^2= 17.97$, p<0.001) ile görsel ve cebirsel ispat (X^2= 31.10, p<0.001) arasında gözlenen farkların anlamlı olduğunu göstermiştir. Elde edilen bu sonuçlara göre yedinci sınıfların en iyi anladıkları cevap olarak cebirsel ispatı tercih oranları altıncı sınıflarla paralellik gösterdiği gibi görsel ve örnekle doğrulamayı tercih etme oranlarından da anlamlı düzeyde daha düşüktür.

Sekizinci sınıf öğrencilerinin en çok hoşlandıkları doğrulama tercihleri arasında yapılan karşılaştırmalarda anlamlı farklılık bulunmazken, en iyi anladıkları cevap tercihlerinde ise cebirsel ispat ile örnekle doğrulama arasında (X^2= 4.53, p<0.05) anlamlı düzeyde farklılık bulunmaktadır. Bu durum sekizinci sınıf öğrencilerinin örnekle doğrulamayı cebirsel ispattan daha iyi anladıklarını göstermektedir.

Aynı sorunun "Sınıf arkadaşlarınız için en ikna edici cevap hangisidir?" kısmına ait verilen cevapların sınıflara göre yüzdelerini gösteren grafik Şekil 14'de verilmiştir.



Şekil 14. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin "Sınıf arkadaşlarınız için en ikna edici cevap hangisidir?" sorusuna verdikleri cevapların sınıf düzeylerine göre yüzdeleri

Sınıf arkadaşları için en ikna edici cevap sorulduğunda öğrencilerin en yüksek oranda tercih ettikleri cevap türleri altıncı ve sekizinci sınıflar için örnekle doğrulama, yedinci sınıflar için ise görsel ispat olmuştur. Öğrencilerin en ikna edici buldukları cevap tercihlerinde sınıflar arasında istatistiksel olarak farklılaşma olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan tek yönlü varyans analizi sonuçları Tablo 16'da görülmektedir.

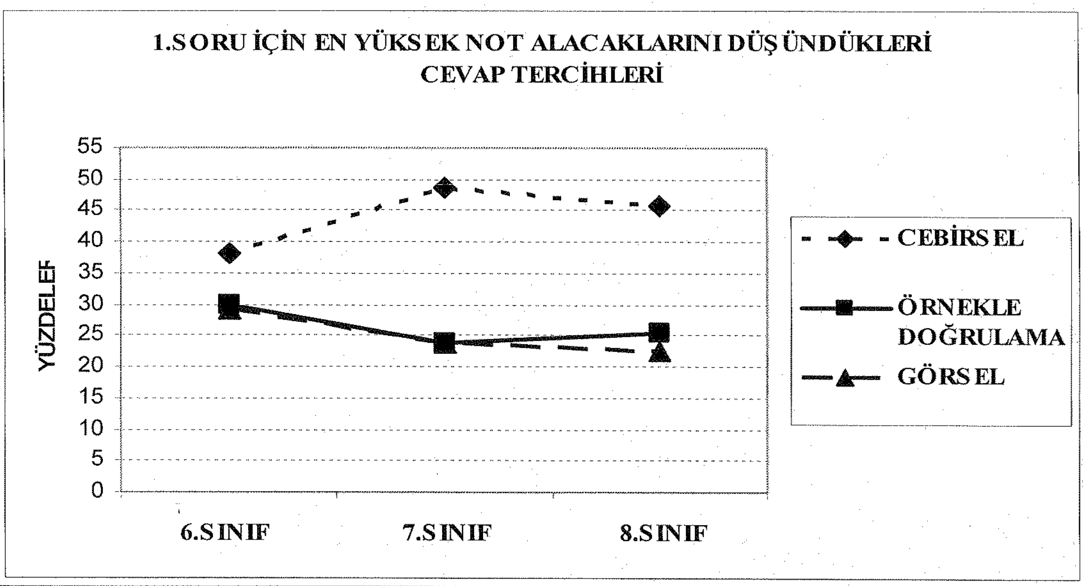
Tablo 16. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin en ikna edici buldukları cevap tercihlerinde sınıf düzeylerine göre farklılaşma olup olmadığını gösteren ANOVA sonuçları

	Kareler toplamı	Sd.	Kareler ortalaması	F	p
			CEBİRSEL		
Gruplar arası	,435	2	.218	1.406	.246
Gruplar içi	99,036	640	.155		
Toplam	99.471	642			
			ÖRNEKLE DOĞRULAMA		
Gruplar arası	4.947	2	2.474	2.640	.072
Gruplar içi	599.718	640	.937		
Toplam	604.666	642			
			GÖRSEL		
Gruplar arası	5.703	2	2.852	1.337	.263
Gruplar içi	1365.432	640	2.133		
Toplam	1371.135	642			

ANOVA sonuçlarına göre öğrencilerin en ikna edici buldukları cevap tercihleri sınıf düzeylerine göre anlamlı düzeyde bir farklılık göstermemektedir. Bununla birlikte ardışık sayılar sorusunun ilk üç bölümüne verilen cevaplar genel olarak değerlendirildiğinde, cebirsel ispatı en yüksek oranda sorunun her üç bölümünde de sekizinci sınıfların tercih ettiği görülmektedir. Ancak tüm sınıf düzeyinde bakıldığında en az tercih edilenin cebirsel doğrulama olduğu dikkat çekmektedir. Sekizinci sınıflar cebirsel doğrulamayı en yüksek oranda (%32.5) "En çok kimin cevabından hoşlandınız?" sorusunda tercih etmelerine karşın, "En iyi kimin cevabını anladınız?" sorusunda bu oran %28.7'ye ve "Sınıf arkadaşlarınız için en ikna edici cevap hangisidir?" sorusunda ise daha da düşerek %22.5'e kadar inmiştir.

Öğrencilerin en ikna edici olan cevabı tercihlerinde sınıf düzeylerinin kendi içindeki farklılaşmaların anlamlı olup olmadığını belirlemek için yapılan Ki-Kare testi sonuçlarına göre, altı ve sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel ve örnekle doğrulama tercihleri arasında anlamlı düzeyde farklılık bulunmazken, yedinci sınıf öğrencilerinin bu tercihleri arasında ise (X^2= 5.60, p<0.025) anlamlı düzeyde farklılık bulunmuştur. Altı, yedi ve sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel ile cebirsel ispat (altıncı sınıflar için: X^2= 33.50, p<0.001, yedinci sınıflar için: X^2= 28.70, p<0.001 ve sekizinci sınıflar için: X^2= 8.01, p<0.01) tercihleri arasında her üç sınıf düzeyinde de anlamlı farklılık olduğu belirlenmiştir. Aynı şekilde cebirsel ispat ve örnekle doğrulama (altıncı sınıflar için: X^2= 44.09, $p<0.001$, yedinci sınıflar için: X^2= 9.35, $p<0.01$ ve sekizinci sınıflar için: X^2= 13.95, $p<0.001$) tercihleri arasında da her üç sınıf düzeyinde istatistiksel olarak anlamlı farklılık bulunmaktadır. Araştırmaya katılan öğrencilerin en ikna edici cevabı tercihlerine ilişkin elde edilen bu sonuçlar ve bu sorunun sınıf düzeylerine göre oranlarını gösteren Şekil 14 cebirsel ispatın öğrenciler tarafından arkadaşlarını ikna etmek için *en az tercih edilen cevap şekli* olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin ardışık sayılar sorusundaki tartışmalardan "Öğretmenden en yüksek notu hangi cevabın alacağını düşünüyorsunuz?" sorusuna verdikleri cevapların yüzdeleri Şekil 15'de ve sınıf düzeylerine göre bu tercihleri arasında anlamlı düzeyde farklılık olup olmadığını belirlemek için yapılan tek yönlü varyans analizi sonuçları Tablo 17'de verilmiştir.



Şekil 15. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin "Öğretmenden en yüksek notu hangi cevabın alacağını düşünüyorsunuz?" sorusuna verdikleri cevapların sınıflara göre yüzdeleri

Tablo 17. Ardışık sayılar sorusu (1.soru) için öğrencilerin öğretmenden en yüksek notu alacak cevap tercihlerinde sınıflara göre farklılaşma olup olmadığını gösteren ANOVA sonuçları

	Kareler toplamı	Sd.	Kareler ortalaması	F	p
			CEBİRSEL		
Gruplar arası	1.337	2	.669	2.722	.067
Gruplar içi	157.226	640	.246		
Toplam	158.563	642			
			ÖRNEKLE DOĞRULAMA		
Gruplar arası	1.892	2	.946	1.215	.297
Gruplar içi	498.326	640	.779		
Toplam	500.218	642			
			GÖRSEL		
Gruplar arası	4.941	2	2.470	1.456	.234
Gruplar içi	1085.725	640	1.696		
Toplam	1090.666	642			

ANOVA sonuçlarına göre öğrencilerin öğretmenden en yüksek notu alacak cevap olarak düşündükleri seçenekler arasında sınıf düzeylerine göre anlamlı farklılık bulunmamaktadır (Tablo 17). Şekil 15'ten izlenebildiği gibi altıncı sınıf öğrencilerinin cevap türlerine dağılımı birbirine yakın iken yedi ve sekizinci sınıfta farklılaşmıştır. Daha ayrıntılı incelemek için her bir sınıf düzeyinin kendi içindeki farklılaşmaların anlamlı düzeyde olup olmadığını belirlemek amacıyla Ki-Kare bağımsızlık testi yapılmıştır. Buna göre görsel ve örnekle doğrulama tercihleri arasında her üç sınıf düzeyinde de anlamlı farklılık bulunmamaktadır. Bununla birlikte cebirsel ve örnekle doğrulama tercihleri arasında altıncı sınıf düzeyindeki farklılık anlamlı değilken, yedinci (X^2= 29.55, $p<0.001$) ve sekizinci (X^2= 20.02, $p<0.001$) sınıf düzeylerinde ise bu fark anlamlıdır. Her üç sınıf düzeyinde de sınıfların kendi içindeki görsel ve cebirsel ispat tercihleri arasındaki farkın anlamlı olduğu (altıncı sınıflar için: X^2= 4.08, $p<0.05$, yedinci sınıflar için: X^2= 29.55, $p<0.001$ ve sekizinci sınıflar için: X^2= 26.43, $p<0.001$) belirlenmiştir.

Her üç sınıf düzeyinde de ardışık sayılar sorusuna ilişkin öğrencilerin en çok hoşlandığı, en iyi anladığı ve en ikna edici cevap olarak en düşük oranlarda (%16.1-32.5) cebirsel ispatı tercih ederken "Öğretmenden en yüksek notu hangi cevabın alacağını düşünüyorsunuz?" sorusunda ise cebirsel ispatın en yüksek oranda (%38.1-48.8) tercih edildiği görülmektedir.

Çalışmanın nitel kısmında aynı soruya ilişkin olarak yapılan görüşmelerde öğrenciler, en yüksek notun cebirsel ispattan alınabileceğini düşünmelerinin nedenini "öğretmenlerinin cevapları formülle istemesi, kısa ve net cevaplara daha yüksek not vermesi" şeklinde ifade etmişlerdir. Bunların yanı sıra nitel çalışmaya katılan öğrencilerden yalnızca bir altıncı sınıf öğrencisi cebirsel ispatı tercih etmesinin sebebini "Merve'nin cevabında bilinmeyen olduğu için bütün sayılar için geçerli olur." şeklinde ifade etmiştir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Matematik, kimisine göre kuralları belli satranç türünden bir zekâ oyunu; kimisine göre sayı türünden soyut nesneleri konu alan bir bilim; kimisine göre bilim ve pratik yaşam için yararlı bir hesaplama tekniğidir. Matematikçilerin gözünde ise matematik bizi doğruya, kesin bilgiye götüren biricik düşünme yöntemidir (Yıldırım 1996). Matematiksel düşünme ve doğrulama arasındaki ilişkiyi Yıldırım (1996) şu şekilde ifade etmiştir:

> Hangi konuda ya da düzeyde olursa olsun, düşünme en belirgin biçimiyle bir sorun ya da problem çözme etkinliğidir. Düşünme sürecinde iki temel aşama ayırt edilebilir: (1) sorunu açıklayıcı ya da giderici çözümü bulma veya oluşturma; (2) bulunan ya da oluşturulan çözümün doğruluğunu yoklama. Birinci aşama genellikle "buluş", "icat" ya da "yaratma" diye nitelenmekte, ikinci aşama ise, "doğrulama", "kanıtlama" ya da "ispatlama" diye bilinmektedir.

İlköğretim öğrencilerinin muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişiminin incelenmesi amacıyla yapılan bu araştırma 347 kız, 332 erkek olmak üzere 679 (235 6.sınıf; 223 7.sınıf; 221 8.sınıf) ilköğretim öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın "İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin problemleri çözerken başvurdukları muhakeme şekilleri nelerdir?" şeklindeki birinci alt problemine cevap aramak için sorulan kibrit sorusu, üçgen sayılar sorusu, kule sorusu ve gizli sayılar sorusuna verilen cevaplar literatür kısmında verilen araştırma bulguları ile karşılaştırıldığında şu sonuçlara varılmıştır:

Görsel bir örüntü ile basit sayısal bir örüntü arasındaki bağlantıyı sağlayarak öğrencilere açıklama deneyimi kazandırılması amacıyla Waring (2000) tarafından da kullanılan kibrit sorusunun "Verilen kuralı kullanarak bir sırada altı kare yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz" kısmına araştırmaya katılan öğrencilerin kuralı kullanarak doğru cevap verme oranı %35.8-%61.7 arasındadır. Bu oran 6.sınıflardan 8.sınıflara doğru gidildikçe artış göstermektedir. Ancak bu öğrencilerin %13.4-31.8 oranında hala verilen kural ve şekli kullanarak ve şekil üzerinde sayarak doğru cevabı bulmaları, öğrencilerin kural verildiği halde sorunun çözümünü cebirsel olarak yeterince ifade edemediklerini göstermektedir. Öğrencilerin bu düzeyde şekil kullanmaya yönelmeleri onların görsel doğrulamaya eğilimli oldukları şeklinde yorumlanabilir.

Kibrit sorusunun bir üst basamağı olarak fark edilen örüntünün öğrenciler tarafından ne derece genellenebileceğini görmek amacıyla sorulan üçgen sayılar sorusunda, verilen ilk dört üçgen sayının şekillerini takip ederek sonraki üçgen sayıyı bulan öğrencilerin (%31.4-65.5) bu sorunun devamında aynı başarıyı gösteremedikleri (19.3-43.1) belirlenmiştir. Araştırmaya katılan öğrenciler (n=679) arasında sorunun bu kısmının çözümünde cebirsel ifade kullanarak çözüme ulaşan hiçbir öğrencinin olmaması bu yaştaki öğrencilerin genelleme düzeyine ulaşamadığı düşüncesini doğurmuştur.

Waring (2000) tarafından öğrencilerin birkaç durumu kontrol etmenin ispat anlamına gelmediğinin farkında oldukları "ispat düzeyi 2" içinde tanıtılan üçgen sayılar sorusundaki başarı oranı sadece 8. sınıf düzeyinde %50 nin üzerine çıkabilmiştir. Bu durum 6 ve 7. sınıf öğrencilerinin Waring (2000)'in tanımladığı ikinci düzeye henüz ulaşamadıkları şeklinde yorumlanabilir.

Küchemann ve Hoyles (2005)'in sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakemelerindeki değişimi incelemek amacı ile yaptıkları çalışmada öğrencilerin başarı oranları bu çalışmadan düşük olmasına rağmen öğrencilerden bir kısmı (%9) değişkenleri adlandırıp cebirsel olarak ifade edebilmiştir.

Lee (1998, akt. Healy ve Hoyles 1999) sonuçları cebirsel ifadelerle sunmanın kolay olmadığını ve örüntüyü görmekle onu cebirsel olarak ifade etmenin farklı olduğunu belirtmiştir. Bu araştırmada da öğrenciler örüntüleri fark etmelerine rağmen cebirsel olarak ifade edememişlerdir. Dienes (1961, akt. Lannin 2005) öğrencilerin cebirsel genellemeleri kavramaları için cebirsel bir kuralın bir genelleme olduğunun farkında olmaları gerektiğini vurgulamıştır. Healy ve Hoyles (1999) kibrit, üçgen sorusu ve benzerlerinde görülen örüntülerle çalıştıklarında öğrencilerin genellemelerde daha başarılı olduklarını belirtmişlerdir. Sonuç olarak bu tür örneklerde başarılı olan öğrencilerin örüntülerden cebirsel ifadelere geçişlerinin daha kolay olacağı bunun da cebirsel ifadeleri öğrenmelerine katkı sağlayacağı beklenebilir.

Farklı muhakeme yaklaşımlarının kullanılabileceği sorulardan biri olan kule sorusuna, öğrenciler sadece %4.9-8.1 oranında doğru cevap vermiştir ve bu oran düşüktür. Çalışmanın bu sorusuna öğrenciler sadece iki farklı yolla (sistematik liste yapma, şekil çizme) cevap verirken Francisco ve Maher (2005), Zack (2002), Maher ve

Martino (1996), tarafından ilköğretimin farklı kademelerinde yapılan araştırmalarda öğrencilerin sistematik liste yapma, tümdengelimsel tartışma, karşıt örnekle muhakeme, tekrarlamalı (recursive) muhakeme ve elimine etme gibi farklı çözüm alternatiflerini kullandıkları belirlenmiştir. Bu sonuçlarla karşılaştırıldığında, mevcut araştırmaya katılan öğrencilerin farklı yöntemlere başvurmaması ve doğru cevap yüzdesinin çok düşük olması öğrencilerin ya muhakeme etmenin yeterli olgunluk düzeyine ulaşamadıklarını ya da eğitim sisteminin bu yeterliliği onlara kazandıramadığını göstermektedir.

Gizli sayılar sorusuna araştırmaya katılan öğrencilerin %26.6-49.8'i deneme yanılma yoluyla doğru cevabı vermekle birlikte öğrenciler arasında 8.sınıf düzeyinde bile denklem kullanarak doğru cevabı bulan öğrencilerin oranının sadece %2.4 olduğu dikkati çekmiştir. Oysaki birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin yedinci sınıf, iki bilinmeyenli eşitsizliklerin sekizinci sınıf konuları içinde yer almasına rağmen gizli sayılar sorusunda denkleme başvurma oranının bu denli düşük olması öğrencilerin öğrendikleri konuları farklı konulara uyarlamada yeterli olmadıklarını, ülkemizdeki matematik eğitiminin ezber ağırlıklı olduğunu göstermektedir.

Becker ve Owens (1992), Amerikalı ve Japon öğrencilerin problem çözme performansları ve bu süreçteki muhakeme becerilerini karşılaştırmak amacıyla yaptıkları çalışma sonucunda, 8.sınıf Japon öğrencilerin %39'unun Amerikalı öğrencilerin ise %15'nin gizli sayılar sorusuna doğru cevap verdikleri belirlenmiştir. Ancak bu cevapların içinde denklem kullanarak doğru cevap veren 8. sınıf Japon öğrencilerinin oranı %25 iken Amerikalı 8. sınıf öğrencileri arasında ise denklem kullanarak doğru cevap veren öğrenci olmadığı belirlenmiştir. Bu sonuçlar göz önünde bulundurulduğunda, bu çalışmaya katılan öğrencilerin Japon öğrencilerine göre bu denli düşük oranda denklem kullanarak doğru cevap vermelerine ve sadece iki farklı yöntemle çözüme ulaşmalarına rağmen Amerikalı öğrencilerden daha başarılı oldukları görülmektedir.

Araştırmanın "İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin ispat yaparken başvurdukları ispat şekilleri nelerdir? " şeklindeki ikinci alt problemine cevap aramak için sorulan ardışık sayılar sorusuna verilen cevaplar literatür kısmında verilen araştırma bulguları ile karşılaştırıldığında şu sonuçlara varılmıştır:

Ardışık sayılar sorusunun çözümü ile ilgili olarak verilen seçeneklerden, hem en çok hangi cevaptan hoşlandınız, hem en iyi kimin cevabını anladınız hem de en ikna edici cevap hangisi, sorularının üçünde de öğrencilerin büyük çoğunluğunun en yüksek oranlarda görsel ispatı tercih ettiği, buna karşın tüm sınıflarda en düşük düzeyde ise cebirsel ispatın tercih edildiği belirlenmiştir. Öğrencilerin örnekle doğrulama ve görsel ispatı daha iyi anlamalarına rağmen, öğretmenlerinden hangi çözümün en yüksek notu alacağı sorusunda ise tamamının cebirsel ispatın yüksek not alacağını düşünmeleri cebirsel ispatın matematikteki yerini bildiklerine işaret etmektedir.

Healy ve Hoyles (2000)'un 9. sınıf öğrencilerinin doğrulama ve ispat performanslarını değerlendirmeyi amaçladıkları çalışmalarının öğrencilerin öğretmenden en yüksek not almak amacı ile cebirsel tartışmaları ilk sırada tercih etmeleri şeklindeki bulgusu bu çalışmanın bulgusu ile parelellik göstermektedir.

Küchemann ve Hoyles (2001)'un ise 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakemelerini belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmanın araştırma bulgularıyla paralel olarak öğrencilerin daha yüksek not almak için ilk sırada cebirsel tartışmaları tercih ettikleri belirlenmiştir.

Knuth vd. (2002) tarafından 6-8. sınıf öğrencilerinin doğrulama ve ispatlamadaki yeterliliklerinin gelişimini belirlemek amacıyla yapılan çalışmanın sonucunda, öğrencilerin yüksek oranda (%70) örnekle doğrulamayı kullandıkları belirlenmiştir. Bu çalışmada da örnekle doğrulama özellikle "Sınıf arkadaşlarınız için en ikna edici cevap hangisidir?" sorusunun yanıtı olarak cebirsel ispattan daha çok (anlamlı düzeyde farklı) tercih edilmiştir.

Lovin vd. (2004)'nin ilköğretim öğretmen adaylarının matematiksel doğrulamayı nasıl oluşturdukları ve değerlendirdiklerini belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmanın sonucunda öğretmen adayları cebirsel olarak ifade edilen cevabın doğruluğuna %67 oranında katılmışlardır. Araştırmacılar tarafından öğretmen adaylarının matematiksel bir iddiayı doğrulamada genel tartışmanın kullanılması gerektiğinin farkında oldukları şeklinde yorumlanan sonuç bu çalışmada öğrencilerin cebirsel ispata verilen önemin farkında oldukları bulgusu ile tutarlılık göstermektedir.

Araştırma sonuçları, ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin muhakeme etme ve ispat düzeylerinin alan yazını ile karşılaştırıldığında oldukça düşük olmasına karşın, 6-

8. Sınıflar İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu (Milli Eğitim Bakanlığı 2005)'nda matematik örüntülerin ve düzenlerin bilimi olarak tanımlanmıştır. Matematikle ilgili kavramları, kavramların kendi aralarındaki ilişkileri, işlemlerin altında yatan anlamı ve işlem becerilerinin kazandırılmasını vurgulayan programda öğrencilerin somut deneyimlerinden, sezgilerinden matematiksel anlamları oluşturmalarına ve soyutlama yapabilmelerine yardımcı olma amaçlanmıştır. Konularının içerisinde muhakeme etmeyi gerektiren problem çözme ve bu süreçte kullanılacak stratejilere ağırlıklı olarak yer verilmesi mevcut sonuçların kısa vadede olmasa da uzun vadede olumlu yönde değişeceğinin bir göstergesi olarak kabul edilebilir. Ancak bu programlardan geçecek öğrenciler üzerinde yürütülecek araştırma sonuçları ve araştırmaya katılan öğrencilerin muhakeme düzeylerinin karşılaştırılması programın muhakeme etme ve ispat fikrinin gelişmesi bakımından işlevselliğini ortaya koyabilir ve bu yönüyle ayrı bir önem taşımaktadır.

KAYNAKLAR

Almedia, D. (1996). Justifying and Proving in The Mathematics Classroom, Philosophy of Mathematics Education, Exeter University, *Philosophy of Mathematical Education Journal 9*, UK,

Altun, M. (2007). Eğitim Fakülteleri ve Matematik Öğretmenleri İçin Ortaöğretimde Matematik Öğretimi, Bursa: Aktüel

Baki, A., Bell, A. (1997). Orta Öğretimde Matematik Öğretimi, Milli Eğitim Geliştirme Projesi, Bilkent, Ankara

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, in D.Pimm (ed)Mathematics, *Teachers and Children*, Hodder & Stoughton, London, 216-235.

Barnard, T. (1996). Mathematical Proof and Its Role in the Classroom, *Mathematics Teaching*, 155: 10-13

Becker, J.P., Owens, A. (1992). The Arithmagons Problems: Results of an Analysis of U.S. Students' Solutions and a Comparison With Japanese, Carbondale, ERIC Document Reproduction Sevice No.ED351204

Bell, A.W. (1976). A Study of Pupils' Proof Explanations in Mathematical Situations, *Educational Studies in Mathematics*, 7: 23-40

Boero, P. (1999). Argumentation and Mathematical Proof: A Complex, Productive, Unavoidable Relationship in Mathematics and Mathematics Education, *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*

De Corte, E. (2004). Mainstreams and Perspectives in Research on Learning Mathematics From Instruction, *Applied Pychology*, 2(53): 279-310

De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics, *Phythagoras* 24: 17-24

Fawcett, H.P. (1938). The Nature of Proof, The National Council of Teachers of Mathematics The Thirteenth Yearbook, New York

Fitzgerald, J.F. (1996). Proof in Mathematics Education, *Journal of Education*, 178(1)

Francisco, J.M., Maher, C.A. (2005). Conditions For Promoting Reasoning in Problem Solving: Insights From A Longitudinal Study, *Journal of Mathematical Behavior,* 24: 361-372

Goggins, L.L. (2001). Measuring Mathematical Reasoning: Is Everyone Wrong?, University of Delaware

Hanna, G. (1983). *Rigorous Proof in Mathematics Education*, OISE Press, Toronto

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof, *Interchange,* 21: 6-13

Hanna, G. (2000). A Critical Examination of Three Factors in the Decline of Proof, *Interchange,* 31(1): 21-33

Harel G., Sowder, L. (1998). Types of Students' Justifications, *Mathematics Teacher,* 91(8)

Healy , L., Hoyles, C. (1999). Visual and Symbolic Reasoning in Mathematics: Making Connections With Computers?, *Mathematical Thinking and Learning,* 1(1): 59-84

Healy , L., Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4): 396-428

Heinze, A., Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence, *Proceedings of the Thirth Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (CERME 3), Ballaria, Italien

Karasar, N. (1999). Bilimsel Araştırma Yöntemi (9. Baskı). Ankara: Nobel.

Knipping, C., Reid, D. (2002). Cultural Differences and Teaching of Proof, *Prooceedings of the Third International Mathematics Education and Society Conference*, Copenhagen

Knuth, E.J., Slaughter, M., Chooppin, J. ve Sutherland, J. (2002) Mapping The Conceptual Terrain of Middle School Students' Competencies in Justifying and Proving, In S. Mewborn, P.Sztajn, D.Y.White, H.G. Wiegel, R.L. Bryant & K.Nooney (Eds.) *Prooceedings of the 24th Meeting for PME-NA*, 4: 1693-1700. Athens, GA

Küchemann, D., Hoyles, C. (2001). Identifying Differences in Students Evaluations of Mathematical Reasons, *British Society for Research into Learning Mathematics Proceedings*, 21(1): 37-42

Küchemann, D., Hoyles, C. (2005). Pupils' Awareness of Structure on Two Number/Algebra Questions, *Proceedings of the Fourth Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (CERME 4)

Lovin, L.A., Cavey, L., ve Whitenack, J. (2004). Evidence and Justification: Prospective K-8 Teachers' Proof-Making and Proof-Evaluating, *North*

American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Canada

Lucast, E. K. (2003). Proof as Method: A New Case For Proof in Mathematics Curricula, MS Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh

Maher, C. A., Martino A. M. (1996). The development of the idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2): 194

MEB (2005). İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu 6-8. Sınıflar (Taslak basımı), Ankara

Merriam-Webster Online Dictionary , http://www.m-w.com/

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., Yeşildere, S. (2006). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1): 147-160

NCTM, (1989). Principles and Standarts for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics Pub., Reston/VA, (Çevrimci) http/standarts.nctm.org, 15 Şubat 2001

Özer, Ö. (2002). Orta Dereceli Okullarda Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyinin Matematik Eğitimi Açısından Önemi, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi

Polya, G. (1997). *Nasıl Çözmeli?* çev. Feryal Halatçı, Sistem Yayıncılık, İstanbul (Original work published 1957)

Püsküllüoğlu, A. (1994). *Arkadaş Türkçe Sözlük*, Arkadaş Yayınevi, Ankara.

Recio A. M., Godino J. D. (2001). Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof, *Educational Studies in Mathematics*, 48: 83-99

Reid, D. A. (1995). The Need to Prove , Unpublished Doctoral Dissertation

Reid, D. A. (2001). Proof, Proving and Probing: Research Related to Proof, Proceedings of the Twentieth-Fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,1: 360

Reid, D. A. (2002). Describing Reasoning in Early Elementary School Mathematics, *Teaching Children Mathematics*, 9(4):234

Reys, R., Suydam, M., Lindquist, M. (1995). *Helping Children Learning Mathematics*, Allyn and Bacon, Boston

Ross, K.A. (1998). Doing and Proving: The Place of Algorithms and Proof in School Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 252-255

Santigo, C.C., Martinez, E.C. (2005). Inductive Reasoning in The Justification of The Result of Adding Two Even Numbers, European Research in Mathematics Education IV

Slomson, A. (1996). Mathematical Proof and Its Role in The Classroom, *Mathematics Teaching*, 155: 10-13

Sowder, L., Harel G. (1998). Types of Students' Justifications, *Mathematics Teacher*, 91(8)

Steen, L. A. (1999). Twenty Questions About Mathematical Reasoning, *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12.* Lee Stiff, Editor. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 270-285.

Stylianides, A. J., Ball, D.L. (2004). Studying the Mathematical Knowledge Needed for Teaching: The Case of Teachers' Knowledge of Reasoning and Proof, 2004 Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, Advanced Mathematicaln Thinking, Kluwer,: Holland, 3-21,

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?, In Z.Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around The World*, 4: 117-136,

Türk Ansiklopedisi (1966). MEB Basımevi, 23: 327

Waring, S. (2000). *Can You Prove It? Developing Concept of Proof in Primary and Secondary School*, The Mathematical Association, UK

Weber,K. (2005). Problem Solving, Proving and Learning: The Relationship Between Problem-Solving Processes and Learning Opportunities in The Activitiy of Proof Construction, *Journal of Mathematical Behaviour* , 24: 351-360

Weber, K., Alcock, L., Radu, I. (2005). Undergraduates' Use of Examples in a Transition to Proof Course, *Procedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pshchology of Mathematics Education*

Webster's New International Dictionary, (1932). G.Bell & Sons, Ltd

Yıldırım, A. , Şimşek, H. (1999). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (1. Baskı). Ankara: Seçkin.

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel Düşünme*, Remzi Kitapevi

Zack,V. (1999). Everyday and Mathematical Language in Children's Argumentation about Proof, *Educational Review*, 51(2)

Zack,V. (2002). Learning From Learners: Robust Counterarguments in Fifth Graders' Talk About Reasoning and Proving, In Cockburn, A. & Nardi, E. (Eds.), *Procedings of the 26th Conference of the International Group for the Pshchology of Mathematics Education*, 4: 433-441

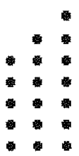
EK 1

ÇALIŞMADA KULLANILAN UYGULAMA SORULARI

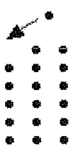
ADI SOYADI:
SINIFI:
OKULU:

1) *Üç öğrenci aşağıdaki ifadenin her zaman doğru olup olmadığını tartışıyorlar. Onların fikirlerini okuduktan sonra aşağıdaki soruları yanıtlayarak kendi fikirlerinizi belirtiniz.*

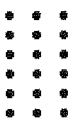
Her hangi üç ardışık tam sayının toplamı ortadaki sayının üç katına eşittir. Örneğin, 4,5 ve 6 ardışık sayılar ve 4+5+6, 15'e eşit bu da ortadaki sayı 5'in üç katına eşittir.



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

Cem Şöyle demiş:

Ben boncukları kullanarak bir yol buldum. 5, 6 ve 7 boncuk içeren üç sütun yaptım (Şekil 1). Daha sonra en yüksek sütundaki boncuğu en kısa sütuna hareket ettirerek (Şekil 2), her sütundaki boncuk sayısını eşit yaptım (Şekil 3). Ne demek istediğimi anlamak için soldaki çizime bakın.

O halde toplam boncuk sayısı ortadaki sütunun sayısının üç katıdır.

O halde Cem ifadenin doğru olduğunu söylüyor.

Merve şöyle demiş:

n-1, n ve n+1'in üç ardışık sayı olduğunu farz edelim.
(n-1)+n+(n+1)=3n

O halde üç sayının toplamı, ortadaki sayı olan n'in üç katıdır.

O halde Merve ifadenin doğru olduğunu

Can şöyle demiş:

5+6+7=3x6
7+8+9=3x8
569+570+571=3x570

Böylece, üç ardışık sayının toplamı her zaman ortadaki sayının üç katıdır.

O halde Can ifadenin doğru olduğunu

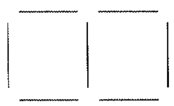
En çok kimin cevabından hoşlandınız? Böyle düşünmenizin nedenini açıklayınız.

En iyi kimin cevabını anladınız? Böyle düşünmenizin nedenini açıklayınız.

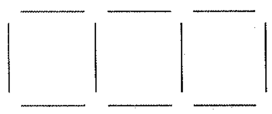
Sınıf arkadaşlarınız için en ikna edici cevap hangisidir? Böyle düşünmenizin nedenini açıklayınız.

Öğretmenden en yüksek notu hangi cevabın alacağını düşünüyorsunuz? Böyle düşünmenizin nedenini açıklayınız.

2) Eğer aşağıdaki şekildeki karenin her bir kenarındaki bir kürdan ise, o halde bir sırada iki kare yapmak için 7 kürdana ihtiyaç var.

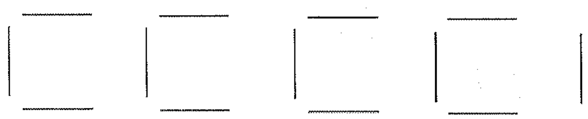


Bir sırada üç kare yapmak için kaç tane kürdana ihtiyaç var?



10 tane saydınız mı?

Başka bir sınıftaki bir öğrenci bir sırada bulunan herhangi bir sayıdaki kare için gerekli kürdan sayısını anlayabileceğini söylüyor. Örneğin, farz edelim ki bir sırada 4 karemiz var ve kaç tane kürdana ihtiyacımız olduğunu anlamak istiyoruz. Her karenin "C" şekline benzeyen 3 kürdanla başladığını düşündüğünü ve en sonunda da 1 kürdan kullanıldığını söylüyor.

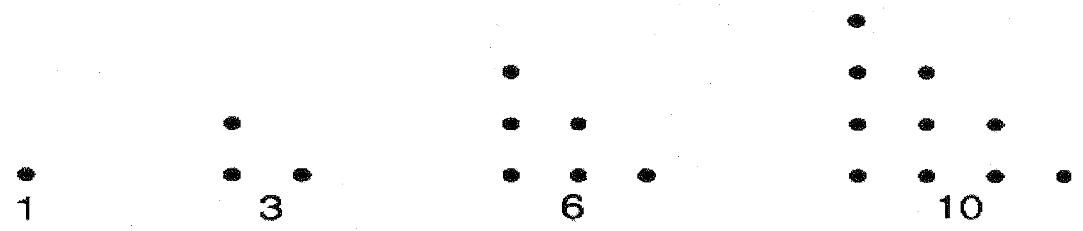


Bir sırada 4 kare yapmak için gerekli kürdan sayısını anlamak için kare sayısının üç katını alıp daha sonra en sondaki 1 kürdanı ekliyoruz.
Öğrenci kuralını şu şekilde yazıyor: (3 x 4) +1 =13. Bu durumda 13 kürdan ediyor.

Lütfen aşağıdaki soruları yanıtlayınız.
Verilen kuralı kullanarak bir sırada altı kare yapmak için kaç kürdan gerektiğini bulunuz.

Öğrencinin kuralının her zaman çalışacağını düşünüyor musunuz?

3) İlk dört üçgen sayı aşağıda görülmektedir.

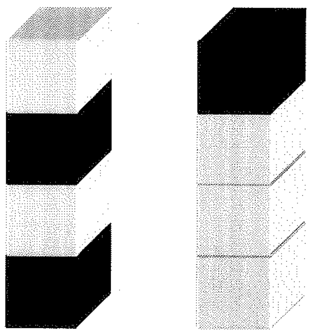


1. üçgen sayı:1 2. üçgen sayı: 3 3. üçgen sayı: 6 4. üçgen sayı: 10

- Benzer şekilleri çizerek bunlardan sonra gelecek olan üç üçgen sayıyı bulabilir misiniz?

- 20. üçgen sayıyı nasıl elde edebileceğinizi açıklar mısınız?

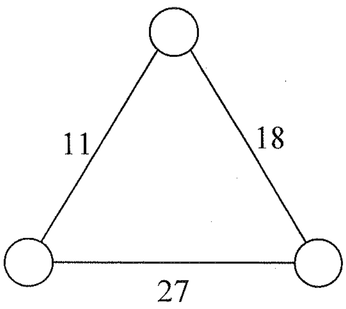
- Bulduğunuz yol her zaman işe yarayacak mı?



4) Elinizde istediğiniz sayıda şekildeki siyah ve beyaz küplerden olduğunu düşünün. Öğretmeniniz sizden bu küpleri kullanarak dört küp yüksekliğinde kuleler yapmanızı istiyor. Yapacağınız kuleler için size yanda iki örnek verilmiştir. (Bunlar sadece örnektir.)

Siyah ve beyaz küplerin **her ikisinden de** kullanarak dört küp yüksekliğinde kaç farklı kule yapabilirsiniz? (Aşağıdaki boşluğu cevap için kullanabilirsiniz, cevabınızı DAİRE içine alın.)

5) Bu üçgenin **kenarlarındaki** sayılar **köşelerindeki** sayıların toplamlarıdır. Köşelerde ki gizli sayıları bulunuz.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum Yeri ve Yılı : Üsküdar/ 06.01.1972

Öğr.Gördüğü Kurumlar :	**Başlama Yılı**	**Bitirme Yılı**	**Kurum Adı**
Lise :	1983	1990	Kadıköy Anadolu Lisesi
Lisans :	1990	1996	Akdeniz Ü. Fen Edebiyat Fak. Mat. Böl.
Yüksek Lisans :	2000	2002	U.Ü. Eğitim Fakültesi İlköğretim Böl.
Doktora :	2002		U.Ü. Eğitim Fakültesi İlköğretim Böl.

Medeni Durum : Evli ve iki çocuk annesi

Bildiği Yabancı Diller ve Düzeyi: :İngilizce/orta düzeyde

Çalıştığı Kurum (lar) :	**Başlama ve**	**Ayrılma Tarihleri**	**Çalışılan Kurumun Adı**
1.	1997	2001	Bursa Samanlı İlköğretim Okulu
2.	2001	2001	Bursa Yıldırım Kız Meslek Lisesi
3.	2001	....	Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Yurt İçi ve Yurt Dışında katıldığı Projeler : İlköğretim Çağındaki Çocuklarda Problem Çözmenin Gelişiminin İncelenmesi, Uludağ Üniversitesi Araştırma Fonu

Katıldığı Yurt İçi ve Yurt Dışı Bilimsel Toplantılar:

1. ***Lise Matematik Ders Kitaplarının Kullanım Şekli ve Sıklığı***, Matematikçiler Derneği Matematik Sempozyumu, 5-7 Mayıs 2004, Milli Kütüphane, Ankara (Murat ALTUN ve Yeliz YAZGAN ile)

2. ***Learning to Solve Non-routine Mathematical Problems***, ICME-10, 04-11 Temmuz 2004, Copenhagen, Denmark (Murat ALTUN ile)

Yayımlanan Çalışmalar :

1., ***Lise Matematik Ders Kitaplarının Kullanım Şekli ve Sıklığı***, Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, c:XVII, s.2, 2004 (Murat ALTUN ve Yeliz YAZGAN ile)

2. ***İlköğretim Öğrencilerinin Problem Çözme Stratejilerini Öğrenmeleri Üzerine Bir Çalışma***, Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, c.XIX, s:1,2006 (Murat ALTUN ile)

3. Çiğdem ARSLAN, ***Learning to Solve Non-routine Mathematical Problems***, Elementary Education Online, 6(1), 50-61,2007 (Murat ALTUN ile)

Çiğdem ARSLAN