



T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAPLE İLE KOMPLEKS ANALİZ

Mehmet Zekeriya DÖKMEN

Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA 2010



T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAPLE İLE KOMPLEKS ANALİZ

Mehmet Zekeriya DÖKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 12/03/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK
(Danışman)

Doç. Dr. Basri ÇELİK

Doç. Dr. İlhan TAPAN

ÖZET

Bu çalışma esas olarak, kompleks analizin temel konularına ait uygulamaların Maple 9 programıyla çözümü üzerine kurulmuştur. Konular Mathews 2001'deki sırayı takip ederek, Maple 9 programını uygulamak için Basri 2004 ve <http://math.fullerton.edu/mathews/c2001/contents.html> adlı kaynaklardan önemli ölçüde yararlanılmıştır. Normalde çok uzun işlemler sonunda çözülebilen kompleks analizin bazı problemleri, program yardımıyla çok daha kısa sürede çözülebilir hale gelmektedir.

Çalışmamızın birinci bölümünde, kompleks sayıların cebir ve geometrisi, kutupsal gösterimi ve bir kompleks sayının n . kuvvetten kökü ile ilgili bilgi verilerek, bu kavramlara ait örnekler program yardımıyla çözüldü.

İkinci bölümde kompleks değişkenli fonksiyonların dönüşüm özellikleri, limit ve sürekliliği incelenerek, program yardımıyla lineer, n . kuvvet ve n . kuvvetten kök fonksiyonları altında birim daire ve eksenlere paralel doğruların oluşturduğu kümenin resimleri bulundu.

Üçüncü bölümde, kompleks değişkenli bir fonksiyonun türevi ve türev özellikleri, Cauchy-Riemann denklemleri ve harmonik fonksiyonlar üzerinde durularak, örneklerde programdan yararlanıldı.

Dördüncü bölümde kompleks sayılarda tanımlı üstel, logaritma, trigonometrik ve ters trigonometrik gibi kompleks değerli fonksiyonlar tanımlandı. Daha sonra bu fonksiyonların bazı özellikleri ve belli kümelerin bu fonksiyonlar altındaki resimleri Maple programı kullanılarak gösterildi.

Beşinci ve altıncı bölümlerde kompleks integral hesabında, kompleks fonksiyonların, Taylor ve Laurent açılımında, aykırı noktaların bulunmasında ve bu noktalardaki rezidülerin hesabında, ayrıca bazı kompleks ve reel integrallerin hesabında Maple 9 programı kullanıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Kompleks Analiz, Maple ile Kompleks Analiz, Maple 9.

ABSTRACT

This study is mainly based on applications belonging to the central issues of complex analysis which solved by Maple 9 program. Issues by following the order in Mathews 2001, is benefited from the sources named Basri 2004 and <http://math.fullerton.edu/mathews/c2001/contents.html> to implement the program Maple 9 significantly. Normally some problems of complex analysis that can be solved at the end of a long process, can be solved by the program much more quickly.

In the first part of our study, by giving information related to algebra and geometry of complex numbers, polar representation of complex numbers, and n . root of a complex number, from the root, samples corresponding to these concepts have been solved by the help of the program.

In the second part, by examining the transformation properties of functions of complex variable, limit and continuity, mappings of the sets were formed under the linear, exponential and n . root functions by unit circle and lines parallel to the axis were found.

In the third section, in the examples emphasizing on the derivative and properties of derivative of a complex function, Cauchy-Riemann equations and harmonic functions was benefited from the program.

In the fourth section complex valued functions like exponential, logarithm, trigonometric and inverse trigonometric functions which are defined in the complex numbers will be defined. Then some properties of these functions and images of certain sets under these functions were shown using the Maple program.

In the fifth and sixth chapters; The Maple 9 Program was used in complex integral calculus, Taylor and Laurent expansions of complex functions, in finding singularities and residues at these points and also evaluations of some complex and real integrals.

KEYWORDS: Complex Analysis, Complex Analysis with Maple, Maple 9.

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
KOMUTLAR DİZİNİ	ix

1. KOMPLEKS SAYILAR

1.1 Kompleks Sayıların Cebiri ve Geometrisi.....	1
1.2 Kutupsal Gösterimi ve De Moivre Formülü.....	3
1.3 Bir kompleks sayının n . kuvvetten kökü.....	5

2. KOMPLEKS FONKSİYONLAR

2.1 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar.....	7
2.2 Dönüşüm Olarak Fonksiyonlar ve Lineer Dönüşümler	8
2.3 $w = z^n$ ve $w = z^{1/n}$ Dönüşümleri.....	13
2.4 Fonksiyonların Dalları	15
2.5 Limit ve Süreklilik.....	16

3. ANALİTİK VE HARMONİK FONKSİYONLAR

3.1 Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar	20
3.2 Cauchy-Riemann Denklemleri	23
3.3 Harmonik Fonksiyonlar.....	26

4. TEMEL FONKSİYONLAR

4.1 Kompleks Üstel Fonksiyon.....	28
4.2 Kompleks Logaritma Fonksiyonu.....	29
4.3 Kompleks Üsler	31
4.4 Trigonometrik Fonksiyonlar ve Özellikleri.....	34
4.5 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	36
4.6 Konform Dönüşümler.....	38
4.7 Temel Fonksiyonları Bulunduran Dönüşümler	44

5. KOMPLEKS İNTEGRAL

5.1 Kompleks İntegral.....	59
5.2 Yol Boyunca İntegral.....	60
5.3 Cauchy Teoremi.....	64
5.4 İntegralin Temel Teoremleri.....	70
5.5 Analitik Fonksiyonlar için İntegral Temsili.....	72

6. TAYLOR VE LAURENT SERİLERİ

6.1 Taylor Serileri.....	76
6.2 Laurent Serisi.....	78
6.3 Aykırılıklar, Sıfır ve Kutup Yerleri.....	79
6.4 Rezidü Hesabı.....	83
6.5 Bazı Reel İntegrallerin Rezidü Yardımıyla Hesabı.....	87

KAYNAKLAR.....	91
----------------	----

TEŞEKKÜR.....	92
---------------	----

ÖZGEÇMİŞ.....	93
---------------	----

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	$z^8 = 1$ denkleminin çözüm kümesinin resmi	5
Şekil 1.2	$z^2 + (1+i)z + 5i = 0$ denkleminin çözüm kümesinin resmi.....	5
Şekil 2.1	$\operatorname{Re} z > 1$ yarı düzleminin $f(z) = iz + i$ dönüşümü altındaki resmi.....	9
Şekil 2.2	$\{z : z + 1 + i \leq 1$ daresinin $f(z) = (3 - 4i)z + 6 + 2i$ dönüşümü altındaki resmi	10
Şekil 2.3	$\operatorname{Re} z = 2$ doğrusunun $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki resmi	10
Şekil 2.4	$\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ yarı düzleminin $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki resmi	11
Şekil 2.5	$ z - \frac{1}{2} < 1$ daresinin $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki resmi	11
Şekil 2.6	$x=a$ ve $y=b$ doğrularının $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki resmi.....	13
Şekil 2.7	$w = \sqrt{z}$ dönüşümü altında yatay ve dikey doğruların resmi.....	14
Şekil 2.8	$w = \sqrt[3]{z}$ dönüşümü altında birim dairenin resmi	14
Şekil 2.9	z -düzleminde $ z \leq 4$ daresinin $f(z) = \sqrt{z}$ fonksiyonu altındaki resmi	15
Şekil 2.10	z -düzleminde $ z \leq 4$ daresinin $g(z) = -\sqrt{z}$ fonksiyonu altındaki resmi	16
Şekil 4.1	$2^{\left(\frac{1}{9} + \frac{i}{50}\right)}$ ifadesinin bazı değerlerinin düzlemdeki resmi	33
Şekil 4.2	$f(z) = (3 - 4i)z + 6 + 2i$ dönüşümü altında birim çemberin resmi	39
Şekil 4.3	$ z < 1$ birim daresinin $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ dönüşümü altındaki resmi	41
Şekil 4.4	$ z+1 < 1$ daresinin $s(z) = \frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$ dönüşümü altındaki resmi	42
Şekil 4.5	$ z-2 =2$ çemberi içinde ve $ z-1 =1$ çemberi dışında yer alan hilal şeklindeki bölgenin resmi	43
Şekil 4.6	$f(z) = e^z$ dönüşümü altında $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \text{ ve } -\frac{\pi}{3} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$ dikdörtgeninin resmi	44
Şekil 4.7	$f(z) = e^z$ dönüşümü altında birim dairenin resmi	45
Şekil 4.8	$\{x + iy : 0 < y < \pi\}$ yatay şeridinin $w = f(z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}$ dönüşümü altındaki resmi	46
Şekil 4.9	z -düzleminde $A = \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : y = 0, x \leq 0\}$ kümesinin $w = \operatorname{Log} z$ dönüşümü altındaki resmi.....	46
Şekil 4.10	$ z \leq 100$ daresinin $w = \operatorname{Log} z$ dönüşümü altındaki resmi	47
Şekil 4.11	$ z < 1$ birim diskinin $w = \operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ dönüşümü altındaki resmi	47
Şekil 4.12	$f(z) = z/(1-z)^2$ dönüşümü altında birim dairenin resmi	48

Şekil 4.13	$ z < 1$ dairesinin üst yarı düzlemde kalan kısmının $w = f(z) = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$ dönüşümü altındaki resmi	49
Şekil 4.14	$ z < 1$ birim dairesinin $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ fonksiyonu altındaki resmi.....	50
Şekil 4.15	$f(z) = z^2$ dönüşümü altında $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \text{ ve } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ dikdörtgeninin resmi	50
Şekil 4.16	$f(z) = z + 1/3\bar{z}^3$ konform olmayan dönüşümü altında kapalı birim dairenin resmi	51
Şekil 4.17	$f(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{z}{1-z} \right) + \frac{i}{2} \operatorname{Im} \left(\log \frac{1+z}{1-z} \right)$ dönüşümü altında açık birim dairenin resmi.....	51
Şekil 4.18	$f(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{z}{(1-z)^2} \right)$ harmonik Koebe dönüşümü altında açık birim dairenin resmi	52
Şekil 4.19	$\{z = x + iy : x < \frac{\pi}{4}\}$ dikey şeridinin $w = f(z) = \sin z$ dönüşümü altındaki resmi.....	52
Şekil 4.20	$f(z) = \sin z$ dönüşümü altında eksenlere paralel doğruların resmi.....	53
Şekil 4.21	$f(z) = \sin z$ dönüşümü altında $ z \leq 1$ dairesinin görüntü kümesi	53
Şekil 4.22	$w = f(z) = \arcsin z$ dönüşümü altında üst yarı düzlemin resmi	54
Şekil 4.23	$f(z) = \arcsin z$ dönüşümü altında birim çemberin resmi	54
Şekil 4.24	$f(z) = \arccos z$ dönüşümü altında üst yarı düzlemde eksenlere paralel doğruların resmi	55
Şekil 4.25	$f_1(z) = e^{i2z}$ fonksiyonu altında $ x < \frac{\pi}{4}$ dikey şeridinin resmi	55
Şekil 4.26	$ x < \frac{\pi}{4}$ dikey şeridinin $w = \tan z$ dönüşümü altındaki resmi.....	56
Şekil 4.27	$f(z) = \tan z$ dönüşümü altında eksenlere paralel doğruların resmi.....	56
Şekil 4.28	$f(z) = \tan z$ dönüşümü altında birim dairenin resmi.....	57
Şekil 4.29	$f(z) = \arctan z$ fonksiyonu altında birinci bölgede eksenlere paralel doğruların resmi.....	57
Şekil 4.30	$f(z) = \arctan z$ dönüşümü altında birim dairenin resmi	58

KOMUTLAR DİZİNİ

abs(z): z sayısının mutlak değerini alır.
 apply: 'uygula' komutu
 applyrule: belli bir kuralın başka bir ifade içinde uygulanmasını sağlar.
 argument(z); z sayısının argümentini verir.
 array(1..nops(Zn)):
 assume(t,real): t yi reel sayı olarak atar.
 axes: eksenlerin biçimini belirlemeyi sağlar.
 color: çizimde renk seçimini sağlar.
 conjugate(z)': z sayısının eşleniğini alır.
 Contourplot: Kapalı eğri çizdirme komutu
 convert(f(z),parfrac,z):f(z) fonksiyonunu z ye bağlı çarpanlara dönüştürür.
 convert: dönüştürme komutu
 defint: Belirsiz integral alır.
 denom: kesrin paydasını verir.
 diff: fonksiyonun türevini alır.
 eliminate: bir denklemdeki bir değişkenin çekilmesini sağlar.
 evalb: verilen eşitlik veya eşitsizliğin doğruluğunu kontrol etmeyi sağlar.
 evalc: kompleks sayının hesaplanmasını sağlar.
 evalf:sayının on en çok haneli ondalıklı değerini verir
 exp: e sayısı yerine kullanılır.
 expand: cebirsel ifadenin açılımını verir.
 factor: argüman olarak verilmiş ifadeyi çarpanlarına ayırır.
 grid:grafik çiziminde ızgara
 Im: karmaşık sayının imajiner kısmını verir.
 Int: bir fonksiyonun belirsiz integralinin sembolik gösterimini verir.
 int: fonksiyonun belirsiz integralini hesaplar.
 labels:etiketler.
 normal: sadeleştirmeyi sağlar.
 numer: kesrin payını verir.
 numxy: x,y değerlerinin sıklığını belirler.
 plot:çizdirme komutu
 style: grafiğin çizgi ile mi karakterle mi çizileceğini belirler.
 print: yazdır komutu
 proc(x,y)local z end: z de x ve y değerlerini yerine koyar.
 Re: karmaşık sayının reel kısmını verir.
 residue: rezidü değerini hesaplar.
 scaling=constrained: eksenlerin eşit ölçekli olmasını sağlar.
 series: seri yazdırır.
 simplify: işlemleri yapar ve denklemi sade biçimde yazdırır
 solset: çözüm kümesi
 solve: bir denklemin istenilen değişkene göre çözümünü verir
 sort: düzensiz verilen polinomun terimlerini sıralar.
 sqrt: karekök almayı sağlar.
 subs: değişkeni değiştirmeyi veya değer atamayı sağlar.

sum: bir fonksiyonun bir değişkene bağlı değerler toplamını verir.
symbol=circle: çizimde kullanılacak karakter=çember
taylor: Taylor seri açılımını verir.
tickmarks: eksenleri ölçekleme komutu
title: başlık yazılmasını sağlar.
unapply: 'uygulama' komutu.
view: 'göster' komutu.
with(plots):çizdirme prosedürünü açma komutu.

1. KOMPLEKS SAYILAR

Bu bölümde kompleks sayıların cebir ve geometrisi, kutupsal gösterimi ve bir kompleks sayının n . kuvvetten kökü ile ilgili özet bilgi verilerek, bu kavramlara ait örnekler Maple programı kullanılarak sonuçlandırılmıştır.

1.1. Kompleks Sayıların Cebiri ve Geometrisi

\mathbb{R} reel sayılar kümesi olmak üzere $\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ sıralı ikililerinin kümesini göz önüne alalım. Bu küme üzerinde eşitlik, toplama ve çarpma işlemleri sırayla

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \text{ ve } y = v$$

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

biçiminde tanımlanmış olsun. Üzerindeki bu işlemlerle birlikte \mathbb{C} kümesi bir cisim oluşturur. Bu cisme *kompleks sayılar cismi* veya *kümesi* denir. \mathbb{C} kümesinin her bir elemanına da *kompleks sayı* denir. Eğer $i = (0, 1)$ denirse

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

olur. Yani karesi -1 olan sayı \mathbb{C} cisminde mevcut olur. Böylece herhangi bir $z = (x, y)$ kompleks sayısı

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (0, y) = x + iy$$

biçiminde yazılabilir. Bir $z = (x, y) = x + iy$ kompleks sayısındaki x reel sayısına z kompleks sayının *reel kısmı*, y reel sayısına *imajiner* (sanal) *kısmı* denir. Bu durum sırasıyla $\text{Re } z = x$ ve $\text{Im } z = y$ biçiminde gösterilir.

Örnek 1.1.1. $z = -3 + 7i$ ise $\text{Re } z$ ve $\text{Im } z$ sayılarını bulunuz.

$$> z := 'z': Z := -3 + 7*I: \text{Re}(z) = \text{Re}(Z), \text{Im}(z) = \text{Im}(Z);$$

$$\Re(z) = -3, \Im(z) = 7$$

Tanım 1.1.2. $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ ise bu iki kompleks sayının toplamı

$$z + w = x + u + i(y + v)$$

ve farkı

$$z - w = x - u + i(y - v)$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 1.1.3. $z = 5 + 7i$ ve $w = 2 - 3i$ sayılarının toplamını ve farkını bulunuz.

$$> z='z':w='w':z=5+7*I:w=2-3*I:'z+w'=z+w,'z-w'=z-w;$$

$$z + w = 7 + 4 I, z - w = 3 + 10 I$$

Tanım 1.1.4. $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ iki kompleks sayı olsun. Bu iki sayının çarpımı

$$z \cdot w = xu - yv + i(xv + yu),$$

$w \neq 0$ olmak üzere bu iki sayının bölümü

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = (x + iy) \left(\frac{u}{u^2 + v^2} - \frac{v}{u^2 + v^2} i \right) = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \frac{yu - xv}{u^2 + v^2} i$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre sıfırdan farklı $z = x + iy$ kompleks sayısının çarpmaya göre tersi

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

biçimindedir.

Örnek 1.1.5. $z = 3 - 2i$ ve $w = 5 + 3i$ iki kompleks sayı olsun. Bu iki sayının $z \cdot w$ ve z/w işlemlerinin sonucunu bulunuz.

$$> z='z':z:=3-2*I:w='w':w:=5+3*I:'z*w'=z*w:'z*w'=expand(z*w); 'z/w'=z/w;$$

$$z w = 21 - I$$

$$\frac{z}{w} = \frac{9}{34} - \frac{19}{34} I$$

Tanım 1.1.6. $z = (x, y) = x + iy$ kompleks sayısının eşleniği $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ biçiminde tanımlanır.

Örnek 1.1.7. $z = 9 - 2i$ sayısının eşleniğini bulunuz.

$$> z='z':z:=9-2*I:'z'=z,'conjugate(z)'=conjugate(z);$$

$$z = 9 - 2I, \bar{z} = 9 + 2I$$

Tanım 1.1.8. $z = x + iy$ kompleks sayısının modülü (veya mutlak değeri), $|z|$ ile gösterilir ve $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ biçiminde tanımlanır. Geometrik olarak, $|z|$ sayısı, (x, y) noktasının orijine olan uzaklığını gösterir.

Eğer z ve w herhangi iki kompleks sayı ise; $|z + w| \leq |z| + |w|$ üçgen eşitsizliği geçerlidir.

Örnek 1.1.9. $z = 7 + i$ ve $w = 3 + 5i$ sayıları için $|z + w| \leq |z| + |w|$ üçgen eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

```
>z:=7+I: `z`=z:w:=3+5*I: `w`=w: `z+w`=z+w, `|z|`=abs(z),
`|w|`=abs(w), `|z+w|`=abs(z+w);abs(z+w)<=abs(z)+abs(w);
evalf(abs(z+w)<=abs(z)+abs(w));evalb(evalf(abs(z+w)<=abs(z)+abs(w))):
`|z+w|<=|z|+|w|`;
```

$$z + w = 10 + 6I, |z| = 5\sqrt{2}, |w| = \sqrt{34}$$

$$|z + w| = 2\sqrt{34}, 2\sqrt{34} \leq 5\sqrt{2} + \sqrt{34}$$

$$11.66190379 \leq 12.90201970$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

1.2. Kutupsal Gösterimi ve De Moivre Formülü

Bir $z = x + iy$ kompleks sayısı kompleks düzlemde, başlangıç noktası orijin ve bitiş noktası (x, y) olan bir konum vektörüne karşılık gelir. Bu durumun tersi de doğrudur. Ayrıca bir vektör, boyu ve pozitif x -ekseni ile yaptığı açısı verilerek de tam olarak belirlenebilir. Sıfırdan farklı bir z kompleks sayısının pozitif x -ekseni ile yapmış olduğu açı θ ve modülü $r = |z|$ olsun. Bu takdirde $z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ olur. Buna z sayısının kutupsal gösterimi denir. Buradaki θ değerlerine $z \neq 0$ kompleks sayısının *argümenti* denir ve $\arg z$ ile gösterilir. θ , z sayısının bir argümenti ise k herhangi bir tam sayı olmak üzere $\theta + 2k\pi$ de aynı z sayısının argümentini gösterir. Bu yüzden $-\pi < \arg z = \theta \leq \pi$ özelliğindeki θ değerine z kompleks sayısının *esas argümenti* denir ve $\text{Arg } z = \theta$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.1. $z = 1 + i$ sayısını kutupsal biçimde yazınız.

> z:=1+I: `z` =z: 'r'=r:r:=abs(z);theta:=argument(z);(1+I)='r*exp(I*theta)';

$$r := \sqrt{2} \quad \theta := \frac{1}{4} \pi \quad 1 + I = r e^{I\theta}$$

Örnek 1.2.2. $\text{Arg}(-1-i)$ değerini hesaplayınız.

> Arg(-1-I):=argument(-1-I);

$$\text{Arg}(-1 - I) := -\frac{3}{4} \pi$$

Kutupsal biçimde verilen $z = r e^{i\theta}$ kompleks sayısının n . kuvveti $z^n = r^n e^{in\theta}$ dir. $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ eşitliği kutupsal biçimde yazılırsa,

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

olur. Bu eşitlik *De Moivre Formülü* olarak bilinir.

Örnek 1.2.5. $(\sqrt{3} - i)^{-11}$ sayısı için De Moivre Formülünü doğrulayınız.

> z:=-sqrt(3)-I: `z` =z:w:=z^(-11): `w` :=w;w:=evalc(z^(-11));

`w` :=w;r:=abs(z):t:=argument(z):r:=r;theta:=t;

v:=r^(-11)*exp(-I*11*t):v:=v;

$$w := \frac{1}{(-\sqrt{3} - I)^{11}} \quad w := -\frac{1}{4096} \sqrt{3} - \frac{1}{4096} I$$

$$r := 2 \quad \theta := -\frac{5}{6} \pi \quad v := -\frac{1}{4096} \sqrt{3} - \frac{1}{4096} I$$

Örnek 1.2.6. De Moivre Formülünü kullanarak

$$\cos(5\theta) = \cos(\theta)^5 - 10 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 + 5 \cos(\theta) \sin(\theta)^4$$

olduğunu gösteriniz.

```

>t:='t':z1:=cos(5*t)+I*sin(5*t):z[2]:=(cos(t)+I*sin(t))^5:
z2:=evalc(z2):assume(t,real): u1:=Re(z1):u2:=Re(z2):
`Re(z1)=Re(z2)` :subs(t='t',u1)=subs(t='t',u2);

$$\cos(5t) = \cos(t)^5 - 10 \cos(t)^3 \sin(t)^2 + 5 \cos(t) \sin(t)^4$$


```

1.3. Bir kompleks sayının n . kuvvetten kökü

z sıfırdan farklı bir kompleks sayı ve n pozitif bir tamsayı olsun. Bu takdirde z sayısının n . kuvvetten kökü tam n tane farklı kompleks sayıdır. Bu sayılar

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\text{Arg } z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\text{Arg } z + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

biçiminde kutupsal koordinatlarla belirlenmiştir (Palka 1991).

Örnek 1.3.1. $z^8 = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz ve köklerini düzlemde gösteriniz.

```

>z:='z':`Ç.K.z^8=1.` :solset:={solve(z^8=1,z)}:`Ç.K.` =solset;
pts:=map(w->[Re(w),Im(w)], solset):plot(pts,style=point,symbol=circle,
scaling=constrained,color=red,labels=[`x`,`y`],
view=[-1.1..1.1,-1.1..1.1]);

```

$$\text{Ç.K.} = \left\{ -1, 1, I, -I, \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2} \right\}$$

Denklemin kökleri Şekil 1.1 de gösterilmiştir.

$az^2 + bz + c = 0$ denklemin kökleri; $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ifadesinin iki kökü olduğu göz önüne alındığında, $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ biçiminde olduğu görülür.

Örnek 1.3.2. $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz ve kökleri düzlemde gösteriniz.

```

>z:='z':`Ç.K.=z^2+(1+i)z+5i=0.` :solset:={solve(z^2+(1+I)*z+5*I,z)}:

```

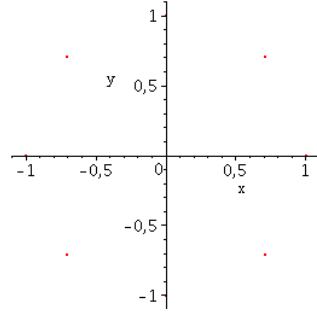
```

Ç.K. = solset; pts:=map(w->[Re(w),Im(w)],solset):plot(pts,style=point,
symbol=circle,scaling=constrained,color=red,labels=[`x`,`y`],
view=[-2.1..2.1,-2.1..2.1]);

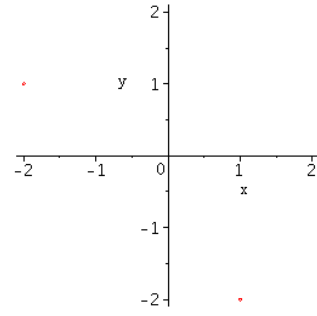
```

$$\text{Ç.K.} = \{-2 + I, 1 - 2I\}$$

Denklemin kökleri Şekil 1.2 de gösterilmiştir



Şekil 1.1



Şekil 1.2

2. KOMPLEKS FONKSİYONLAR

Bu bölümde kompleks değişkenli fonksiyonların dönüşüm özellikleri, limit ve sürekliliği incelenecek. Özellikle Maple programı yardımıyla lineer, n . kuvvet ve n . kuvvetten kökü fonksiyonları altında birim daire ve eksenlere paralel doğruların oluşturduğu kümenin (ızgara) resimlerinin bulunmasıyla ilgilenilecek.

2.1. Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar

Kompleks düzlemde bir A kümesinin her bir z elemanına sadece ve sadece bir w kompleks sayısı karşılık getiren f bağıntısına kompleks değişkenli ve kompleks değerli bir fonksiyon denir ve $w = f(z)$ biçiminde yazılır. w sayısına z sayısının f fonksiyonu altındaki görüntüsü, A kümesine fonksiyonun tanım kümesi, $\{w = f(z) : z \in A\}$ kümesine de f fonksiyonunun görüntü kümesi denir. $z = x + iy$ için $u = u(x, y)$ ve $v = v(x, y)$ olmak üzere $w = f(z) = f(x, y) = u + iv$ olarak yazılabilir. Eğer $z = re^{i\theta}$ biçiminde kutupsal olarak verilmiş ise $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ şeklinde olur. Ayrıca $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ve $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ olduğundan f fonksiyonu $f(z, \bar{z}) = u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z})$ biçiminde de ifade edilebilir.

Örnek 2.1.1. $f(z) = z^4$ fonksiyonunu $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ biçiminde yazınız ve $f(1 + 2i)$ değerini hesaplayınız.

```
> f:='f':x='x':y='y':z='z':f:=proc(x,y)localz,w;z:=x+I*y;w:=expand(z^4);
end:`f(z)`=z^4:`f(x,y)`=f(x,y);`f(1,2)`=f(1,2);Z:=X+I*Y
      f(x,y) = x^4 + 4 I x^3 y - 6 x^2 y^2 - 4 I x y^3 + y^4
      f(1,2) = -7 - 24 I
```

Örnek 2.1.2 $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re}(z) + z^2 + \operatorname{Im}(z)$ fonksiyonunu $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ biçiminde yazınız ve $f(1, 2)$ değerini hesaplayınız.

```
> f:='f':x='x':y='y':f:=proc(x,y)local w;w:=(x-I*y)*x+(x+I*y)^2+y;
end:`f(x,y)`=f(x,y);`f(x,y)`=evalc(f(x,y));`f(1,2)`=f(1,2);
```

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x - I y) x + (x + I y)^2 + y \\
f(x,y) &= 2 x^2 - y^2 + y + I x y \\
f(1,2) &= 2 I
\end{aligned}$$

Örnek 2.1.3. $f(z) = 4x^2 + i4y^2$ fonksiyonunu z ve \bar{z} değişkenlerine göre ifade ediniz ve $f(1+2i)$ değerini hesaplayınız.

```

> F:='F':w:='w':z:='z':Z:='Z':w:=subs({x=(Z+conjugate(Z))/2,
y=(Z-conjugate(Z))/(2*I)},f(x,y)):F:=z->subs(Z=z,expand(w)):
`f(x,y)`=f(x,y),`F(z)`=F(z);`F(1+I2)`=F(1+I*2):`F(1+I2)`=evalc(F(1+I*2));

```

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x - I y) x + (x + I y)^2 + y \\
F(z) &= \frac{1}{2} \bar{z} z + \frac{1}{2} \bar{z}^2 + z^2 - \frac{1}{2} I z + \frac{1}{2} I \bar{z} \\
F(1 + I2) &= 2 I
\end{aligned}$$

Örnek 2.1.4. $f(z) = z^5 + 4z^2 - 6$ ifadesini kutupsal biçimde yazınız.

```

>F:='F':f:='f':r:='r':t:='t':z:='z':F:=proc(z)local w;w:=z^5+4*z^2-6;end:
f:=proc(r,t)local w;w:=subs({z^2=r^2*cos(2*t)+I*r^2*sin(2*t),
z^5=r^5*cos(5*t)+I*r^5*sin(5*t)},F(z));end:`f(r,t)`=f(r,t);

```

$$\begin{aligned}
f(r,t) &= r^5 \cos(5 t) + I r^5 \sin(5 t) + 4 r^2 \cos(2 t) \\
&+ 4 I r^2 \sin(2 t) - 6
\end{aligned}$$

2.2. Dönüşüm Olarak Kompleks Fonksiyonlar

Kompleks düzlemin bir A alt kümesinde tanımlı bir $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu z düzleminden, w düzlemine bir dönüşüm tanımlar. Eğer $f(A)$ görüntü kümesi tamamen bir S kümesi içinde kalıyorsa, $w = f(z)$ dönüşümüne A kümesinden S kümesi içine dönüşüm denir. Bir $f(A) = S$ kümesinin ters görüntüsü; $f^{-1}(S) = \{z \in A : f(z) \in S\}$ biçimindedir. Eğer bir f fonksiyonu farklı z_1 ve z_2 noktalarını farklı noktalar üzerine resmediyorsa f fonksiyonuna bire-bir (ünivalent) fonksiyon denir. Eğer $w = f(z)$ fonksiyonu, A kümesini S kümesi üzerine bire-bir

olarak resmediyorsa, S kümesindeki herhangi bir w noktası için A da $f(z) = w$ denklemini sağlayan bir tek z noktası vardır. Örneğin $z_0 = a + ib$ sabit bir kompleks sayı olmak üzere $w = f(z) = z + z_0$ dönüşümü, z -düzleminde w düzlemi üzerine bire-bir bir dönüşüm olup öteleme dönüşümü diye adlandırılır. $z = f^{-1}(w) = w - z_0$ da f dönüşümünün ters dönüşümüdür ve bu dönüşüm de bire-bir ve örtendir.

Örnek 2.2.1. $f(z) = iz$ fonksiyonu altında $y = x + 1$ doğrusunun resminin, $v = -u - 1$ doğrusu olduğunu gösteriniz.

```
>f:='f':x:='x':X:='X':y:='y':Y:='Y':z:='z':Z:='Z':assume(X,real);
assume(Y,real);Z:=X+I*Y:f:=z->I*z:`f(z)`=f(z);
eqns:={u=Re(f(Z)),v=Im(f(Z)),y=x+1}:
eqns2:=(subs(X=x,Y=y,eqns)):eqns2;eliminate(eqns2,{x,y});
```

$$f(z) = I z$$

$$\{v = x, u = -y, y = x + 1\}$$

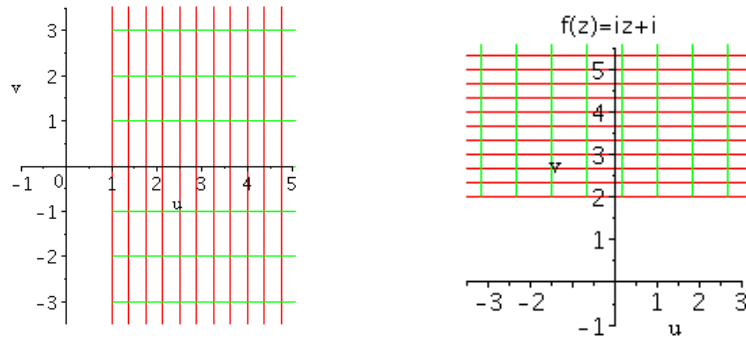
$$[\{y = -u, x = v\}, \{-u - v - 1\}]$$

Burada $\{u + v + 1\}$ ifadesi $u + v + 1 = 0$ anlamındadır.

Örnek 2.2.2. $f(z) = iz + i$ dönüşümünün $\text{Re } z > 1$ sağ yarı düzlemini, $\text{Im } w > 2$ üst yarı düzlemi üzerine resmettiğini gösteriniz.

```
>f:='f':z:='z':f:=z->I*z+I:conformal(f(z),z=16*I..5+4*I,title=`f(z)=iz+i`,
grid=[13,13],numxy=[9,11],scaling=constrained,labels=[`u`,`v`],
view=[-3.5..3,-1..5.5]);
```

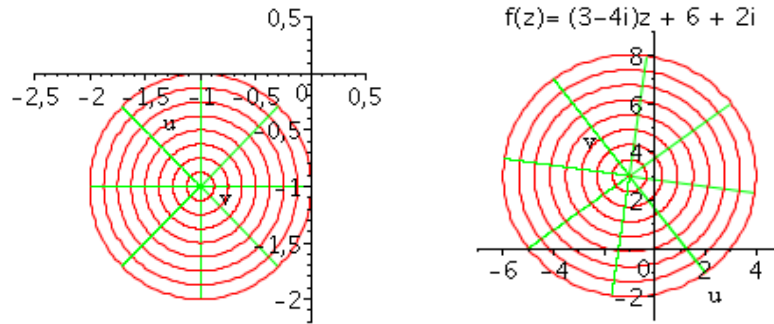
Görüntü bölgesi Şekil 2.1 de gösterilmiştir.



Şekil 2.1

Örnek 2.2.3. $\{z : |z + 1 + i| \leq 1$ dairesinin $f(z) = (3 - 4i)z + 6 + 2i$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz.

```
> f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->(3-4*I)*z+6+2*I:F:=z->subs(Z=z-1-I,f(Z)):
conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),z=0.01..1+I*2*Pi,
title='f(z)=(3-4i)z+6+2i',grid=[9,9], numxy=[363,363],
scaling=constrained,labels=['u ','v '],view=[-7..5,-3..9]);
```

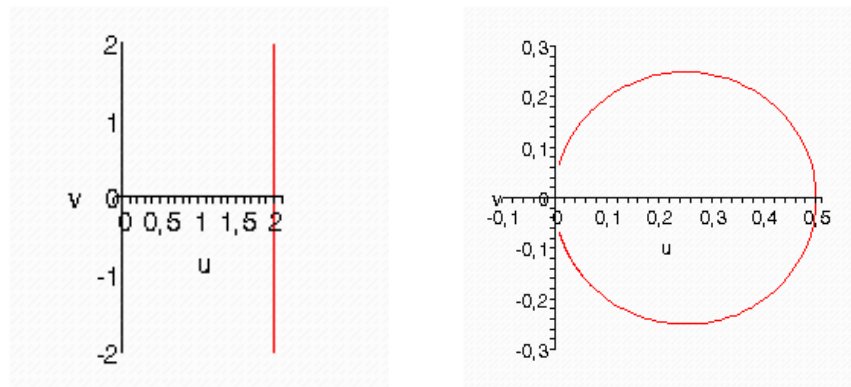


Şekil 2.2

Örnek 2.2.4. $\text{Re } z = 2$ doğrusunun $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz.

```
>f='f':z='z':f:=z->1/z:`f(z)`=f(z);conformal(f(z),z=2-15*I..2+15*I,
grid=[20,10], numxy=[330,330],scaling=constrained,labels=['u ','v '],
tickmarks=[5,5],view=[-0.1..0.51,-0.3..0.3]);
```

$$f(z) = \frac{1}{z}$$



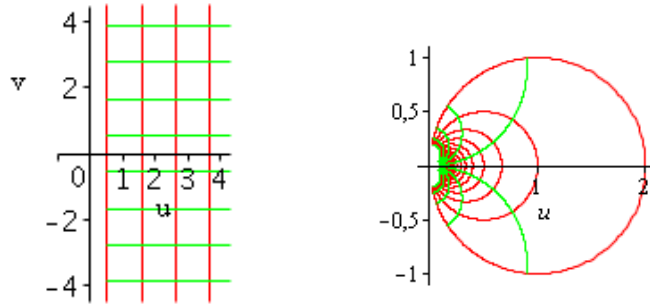
Şekil 2.3

Örnek 2.2.5. $\text{Re } z > \frac{1}{2}$ sağ yarı düzleminin $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki görüntüsünü

bulunuz.

```
> f:='f':z:='z':f:=z->1/z: `f(z)`=f(z);conformal(f(z),z=0.5-5*I..10+5*I,
grid=[20,10],numxy=[330,330],scaling=constrained,labels=[`u`,`v`],
tickmarks=[5,5],view=[-0.1..2.1,-1.1..1.1]);
```

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

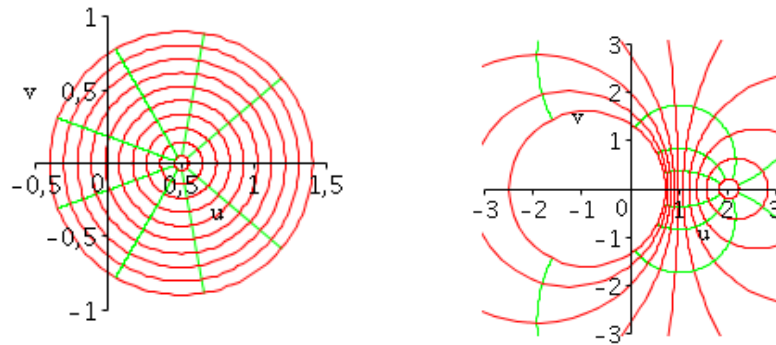


Şekil 2.4

Örnek 2.2.6. $|z - \frac{1}{2}| < 1$ daresinin $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz.

```
> f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->1/z: `f(z)`=f(z);F:=z->subs(Z=z+1/2,f(Z)):
`F(z)`=F(z):conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),z=0.05..0.9+I*2*Pi,
grid=[10,10],numxy=[125,125],scaling=constrained,labels=[`u`,`v`],
tickmarks=[5,5],view=[-3..3,-3..3]);
```

$$f(z) = \frac{1}{z}$$



Şekil 2.5

Örnekteki sonuç ve yukarıdaki veriler dikkate alındığında; $|z - \frac{1}{2}| < 1$ daresi içinde kalan kısmının $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki görüntüsünün; w -düzleminde, $|w + \frac{2}{3}| = \frac{4}{3}$ daresi dışında kalan bölge olduğu görülür.

Örnek 2.2.7. $x=a$ dikey ve $y=b$ yatay doğrusunun $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki görüntü kümesini kartezyen koordinatlarda ifade ederek düzlemde gösteriniz.

> a:='a': u:='u':v:='v': x:='x':

y:='y':eq1:=x=a:eq2:=subs({x=u/(u^2+v^2)},

y=-v/(u^2+v^2)},eq1):eq3:=(u^2+v^2)/a*eq2:eq4:=(-u/a=-u/a)+eq3:

eq5:=(1/(2*a)^2=1/(2*a)^2)+eq4:eq1, eq2, eq3; eq4, eq5;

$$x = a, \frac{u}{u^2 + v^2} = a, \frac{u}{a} = u^2 + v^2$$

$$0 = -\frac{u}{a} + u^2 + v^2, \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{u}{a} + u^2 + v^2$$

Buna göre, $x=a$ doğrusunun $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki görüntüleri, merkezi

$w_0 = \frac{1}{2a}$ ve yarıçapı $\frac{1}{|2a|}$ olan $|w - \frac{1}{2a}| = \frac{1}{|2a|}$ çemberidir.

> b:='b':u:='u':v:='v':x:='x':y:='y':eq1:=y=b:eq2:=subs({x=u/(u^2+v^2)},

y=-v/(u^2+v^2)},eq1):eq3:=(u^2+v^2)/b*eq2:eq4:=(v/b=v/b)+eq3:

eq5:=(1/(2*b)^2=1/(2*b)^2)+eq4:eq1,eq2,eq3;eq4, eq5;

$$y = b, -\frac{v}{u^2 + v^2} = b, -\frac{v}{b} = u^2 + v^2$$

$$0 = \frac{v}{b} + u^2 + v^2, \frac{1}{4b^2} = \frac{1}{4b^2} + \frac{v}{b} + u^2 + v^2$$

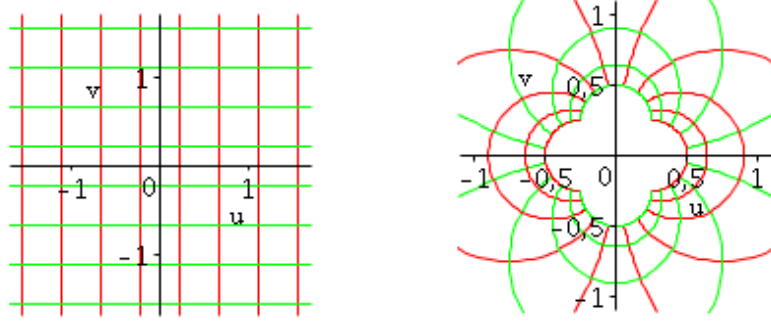
$y=b$ yatay doğrusunun $w = \frac{1}{z}$ dönüşümü altındaki görüntüleri, merkezi $w_0 = -\frac{i}{2b}$

ve yarıçapı $\frac{1}{|2b|}$ olan $|w + \frac{i}{2b}| = \frac{1}{|2b|}$ çemberidir. Verilen bu doğruların resimleri

Şekil 2.6 da gösterilmiştir.

```
>f='f':z='z':f:=z->1/z:`f(z)`=f(z);conformal(f(z),z=-2-2*I..2+2*I,
grid=[10,10], numxy=[70,70],scaling=constrained,
labels=[`u`,`v`],tickmarks=[5,5],view=[-1.1..1.1,-1.1..1.1]);
```

$$f(z) = \frac{1}{z}$$



Şekil 2.6

2.3. $w = z^n$ ve $w = z^{1/n}$ Dönüşümleri

$z = re^{i\theta} \neq 0$ ve n pozitif tamsayısı için $f(z) = r^n e^{in\theta}$ biçiminde kutupsal olarak ifade edilen $w = f(z) = z^n$ fonksiyonu

$$A = \{re^{i\theta} : r > 0, -\pi/n < \theta \leq \pi/n\}$$

bölgesini

$$B = \{r^n e^{in\theta} : r > 0, -\pi < \theta \leq \pi\}$$

bölgesi üzerine bire-bir olarak dönüştürür. f fonksiyonunun g ile gösterilen ters fonksiyonu $w \in B$ olmak üzere $z = g(w) = w^{1/n} = |w|^{1/n} e^{i\text{Arg}(w)/n}$ biçimindedir. g fonksiyonuna *esash* n . *kök fonksiyonu* denir. $n = 2$ için g fonksiyonuna *esash karekök fonksiyonu* adı verilir.

Örnek 2.3.1. $w = z^2$ dönüşümü altında $x=a$ dikey doğrusu w - düzleminde ne gösterir?

```
>x='x':y='y':u='u':v='v':U='U':V='V':eqns1:={u=x^2-y^2,v=2*x*y}:
eqns2:=subs(x=a,eqns1):eqns3:=eliminate(eqns2,y):solset:
=[solve(eqns3[2][1],u)]:`u`=solset[1]:u1:=v->expand(solset[1]):'u'=u1(v);
```

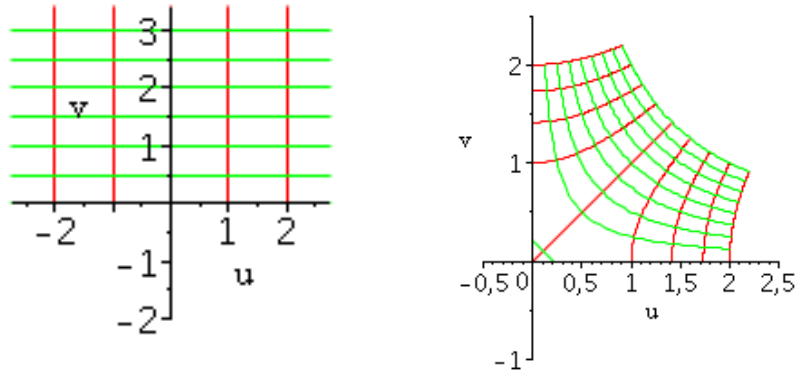
$$u = a^2 - \frac{1}{4} \frac{v^2}{a^2}$$

Böylece görüntü kümesi $\{(u, v) : u = a^2 - \frac{1}{4a^2} v\}$ parabolünden oluşur.

Örnek 2.3.2. $w = \sqrt{z}$ dönüşümü eksenlere paralel doğruları, doğrular veya hiperboller üzerine resmettiğini gösteriniz.

```
> f:='f':z:='z':f:=z->z^(1/2):`f(z)`=f(z);conformal(f(z),z=-4..4*I,
grid=[9,9], numxy=[90,90],scaling=constrained,labels=[`u`,`v`],
view=[-0.5..2.5,-0.5..2.5]);
```

$$f(z) = \sqrt{z}$$

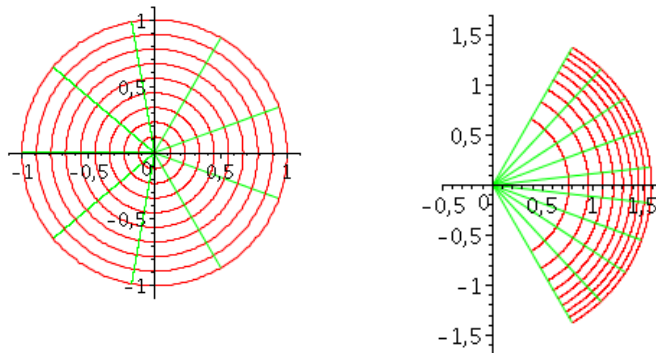


Şekil 2.7

Örnek 2.3.3. $w = \sqrt[3]{z}$ dönüşümü altında birim dairenin görüntüsünü bulunuz.

```
>f='f':z:='z':f:=z->z^(1/3):`f(z)`=f(z);conformal(f(Re(z)*exp(I*Im(z))),
z=0-I*3.14..4+I*3.14,grid=[10,10],numxy=[330,330],scaling=constrained,
view=[-0.5..1.7,-1.7..1.7]);
```

$$f(z) = z^{1/3}$$



Şekil 2.8

2.4. Fonksiyonların Dalları

Tanım kümesi A ve görüntü kümesi B olan bir fonksiyon $w = f(z)$ olsun. Eğer w görüntü kümesinde bir değer ise, her bir w değerine $w = f(z)$ denklemini sağlayacak şekilde $z = g(w)$ biçiminde ters bir bağıntı vardır. Ancak f fonksiyonunun w değerini A kümesinde en çok bir kere almaması durumunda, g ters bağıntısı çok değerli olmak zorundadır. Bu durumda g fonksiyonuna *çok değerli fonksiyon* denir. Örneğin, $w = f(z) = z^2$ fonksiyonunun tersi $z = g(w) = w^{1/2}$ karekök fonksiyonudur. f fonksiyonu, sıfırdan farklı her bir z değeri için, z ve $-z$ iki noktalarını aynı $w = f(z)$ noktası üzerine resmeder. Bu durumda g fonksiyonu genelde iki-değerli bir fonksiyondur. Ters fonksiyonu tanımlayabilmek için çok değerli tek değere indirgenmesi gerekir. $w = f(z)$ çok değerli fonksiyonu verildiğinde, belli bir tanım kümesinde sürekli olan ve tanım kümesindeki her bir z noktasını $f(z)$ değerlerinin biri ile eşleştiren tek değerli bir fonksiyon f_0 olsun. Bu durumda f_0 fonksiyonuna f fonksiyonunun bir *dalı* denir.

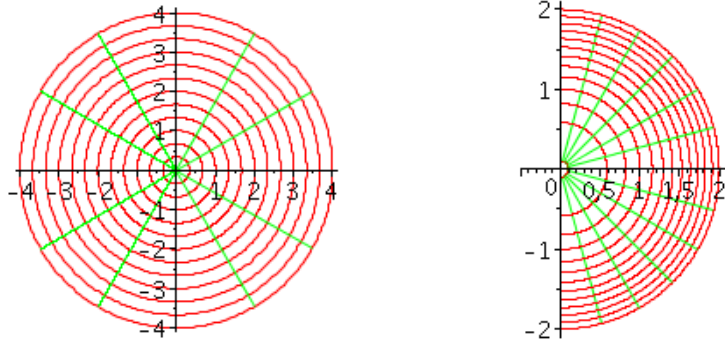
Örnek 2.4.1. z -düzleminde $|z| \leq 4$ dairesinin karekök fonksiyonunun

$$w = f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}) \text{ ve } w = g(z) = -\sqrt{z} = \sqrt{r}(\cos \frac{2\pi + \theta}{2} + i \sin \frac{2\pi + \theta}{2})$$

dalları altındaki resimlerini bulunuz.

```
> f='f':z='z':f:=z->z^(1/2):`f(z)`=f(z);conformal (f(Re(z)*exp(I*Im(z))),
z=0.01-I*3.14..4+I*3.14,grid=[13,13],numxy=[330,330],scaling=constrained,
view=[-0.5..2.1,-2.1..2.1]);
```

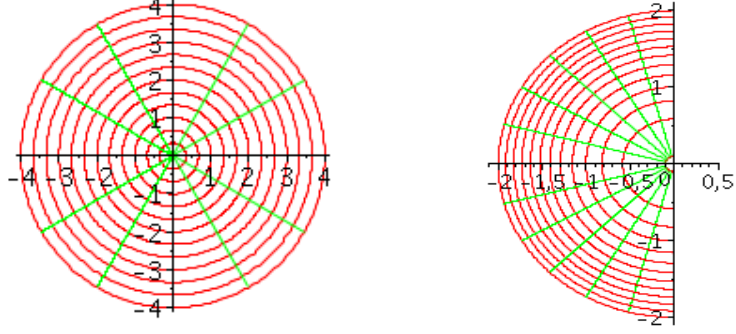
$$f(z) = \sqrt{z}$$



Şekil 2.9

```
> g='g':z='z':g:=z->-z^(1/2):`g(z)`=g(z);conformal
(g(Re(z)*exp(I*Im(z))), z=0.01-I*3.14..4+I*3.14,grid=[13,13],
numxy=[330,330], scaling=constrained, view=[-2..0.5,-2..2]);
```

$$g(z) = -\sqrt{z}$$



Şekil 2.10

2.5. Limit ve Süreklilik

$u = u(x, y)$ iki değişkenli reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ özelliğindeki her (x, y) noktaları için $|u(x, y) - u_0| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa, $u(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki limiti u_0 dır denir ve bu durum $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ biçiminde gösterilir. Söyle ifade etmek gerekirse, $u(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki limitinin u_0 olması demek; (x, y) noktaları (x_0, y_0) noktasına her yönden yeterince yaklaştığında $u(x, y)$ değerlerinin u_0 değerine istenildiği kadar yaklaşması demektir.

Örnek 2.5.1. $u(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.

Önce $(0,0)$ noktasına y ekseninden yaklaşalım. Bu durumda

```
>t='t':u='u':x='x':y='y':u:=proc(x,y)y*x/(x^2+y^2)end:lim1:=limit(u(x,y),
x=0):lim2:=limit(lim1,y=0):`y ekseninden` ; `y->0 iken limit u(x,y) `=lim2;
```

y ekseninden

$$y \rightarrow 0 \text{ iken limit } u(x, y) = 0$$

olur. Şimdi aynı noktaya $y=mx$ doğruları üzerinden yaklaşırsa

$$\begin{aligned} & \text{> `u(x,y)` =u(x,y); `y=mx dogrusu } \text{üzerinden` ;U:=subs(\{x=x,y=m*x\},u(x,y))}; \\ & \text{`u(x,mx)` =U;lim1:=limit(U,x=0):`x->0 iken limit u(x,mx)` =lim1; \end{aligned}$$

$$u(x, y) = \frac{y x}{x^2 + y^2}$$

$y=mx$ dogrusu üzerinder

$$u(x, mx) = \frac{m x^2}{x^2 + m^2 x^2}$$

$$x \rightarrow 0 \text{ iken limit } u(x, mx) = \frac{m}{1 + m^2}$$

elde edilir. Bu da gösteriyor ki limit yaklaşma yönüne bağlı olarak değişmektedir. Bu ise limitin tekliği prensibine aykırıdır. O halde $(0,0)$ noktasında $u(x, y)$ fonksiyonunun limiti yoktur.

Örnek 2.5.2. $u(x, y) = \frac{2x^3}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulunuz.

$(0,0)$ noktasına kutupsal koordinatları kullanarak yaklaşalım. Bu durumda sıfırdan farklı her t reel sayısı için r değişkenini sıfıra götürmek yeterlidir. Buna göre

$$\begin{aligned} & \text{>t:='t':u:='u':x:='x':y:='y':u:=proc(x,y)2*x^3/(x^2+y^2)end:} \\ & \text{lim1:=limit(u(x,y),x=0):lim2:=limit(lim1,y=0):U:=subs(\{x=r*cos(t),} \\ & \text{y=r*sin(t)\}, u(x,y)):`u(rcost,rsin t)` =U;lim1:=limit(U,r=0):} \\ & \text{`her t için r->0 iken limit u(rcost,rsin t)` =lim1; \end{aligned}$$

$$u(r \cos t, r \sin t) = \frac{2 r^3 \cos(t)^3}{r^2 \cos(t)^2 + r^2 \sin(t)^2}$$

$$\text{her t için } r \rightarrow 0 \text{ iken limit } u(r \cos t, r \sin t) = 0$$

elde edilir. Böylece t ne olursa olsun $\lim_{r \rightarrow 0} u(r \cos t, r \sin t) = 0$ olduğundan $u(x, y)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limiti 0 dir.

Teorem 2.5.3. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu, belki $z_0 = x_0 + iy_0$ noktası hariç, z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \text{ ve } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

dır (Başkan 1996).

Bu teorem kompleks fonksiyonların limitinin, reel ve imajiner kısımlarının limiti yardımıyla belirlenebileceğini gösterir. Buradan hareketle kompleks fonksiyonların toplamı, farkı, çarpımı ve bölümünün limitleri sırası ile limitlerin toplamı, farkı, çarpımı ve bölümüne eşit olduğu söylenebilir.

Örnek 2.5.4. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ fonksiyonu için $\lim_{z \rightarrow 1+i} f(z)$ değerini bulunuz.

$$f(z) = z^2 - 2z + 1$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 - 2z + 1) = (1+i)^2 - 2(1+i) + 1 = -1$$

$$f(z) = z^2 - 2z + 1$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} f(z) = -1$$

$$f(1+i) = -1$$

Tanım 2.5.5. $u = u(x, y)$ iki değişkenli reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

ise $u(x, y)$ fonksiyonuna (x_0, y_0) noktasında süreklidir denir. Benzer şekilde

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks fonksiyonu için

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

ise f fonksiyonuna z_0 noktasında süreklidir denir (Başkan 1996).

Örnek 2.5.6. $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ kompleks polinom fonksiyonunun, kompleks düzlemin her a noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

$n=5$ almak genelliği bozmayacaktır.

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5$$

$$\lim_{z \rightarrow a} p(z) = \lim_{z \rightarrow a} (a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + a_3a^3 + a_4a^4 + a_5a^5 = p(a)$$

$$p(a) = \lim_{z \rightarrow a} p(z) = p(a)$$

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5$$

$$z \rightarrow a \text{ ya giderken limit } P(z) = a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + a_4 a^4 + a_5 a^5$$

$$P(a) = a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + a_4 a^4 + a_5 a^5$$

$$z \rightarrow a \text{ ya giderken } P(a) = \text{limit } P(z)$$

Örnek 2.5.7. $f(z) = \frac{z^2 - 2i}{z^2 - 2z + 2}$ için, $\lim_{z \rightarrow 1+i} f(z)$ değerini bulunuz.

> f:='f':z:='z':F:='F':Z:='Z':f:=z->(z^2-2*I)/(z^2-2*z+2):

fun:=f(1+I):lim:=limit(f(z),z=1+I):f:=z->(z^2-2*I)/(z^2-2*z+2):

fact:=factor(f(Z)):F:=z->subs(Z=z,fact):`f(z)`=f(z);`F(z)`=F(z);

`Evaluate F(z) at z=1+i`:`F(1+i)`=F(1+I);`z->1+i iken limit f(z)`=lim;

$$f(z) = \frac{z^2 - 2I}{z^2 - 2z + 2}$$

$$F(z) = \frac{z + 1 + I}{z - 1 + I}$$

$$F(1+i) = 1 - I$$

$$z \rightarrow 1+i \text{ iken limit } f(z) = 1 - I$$

3. ANALİTİK VE HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde kompleks değişkenli bir fonksiyonun türevi ve türev özellikleri, Cauchy-Riemann denklemleri ve harmonik fonksiyonlar üzerinde durulacak. Konuyla ilgili örnekler Maple programı yardımıyla çözülecek.

3.1. Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar

$A \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $z_0 \in A$ olmak üzere

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{veya} \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* veya *türevlenebilir* denir. Limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* adı verilir ve $f'(z_0)$ biçiminde gösterilir.

Örnek 3.1.1. $f(z) = z^5 + z^2$ fonksiyonunun bir a noktasındaki türevini tanımdan faydalanarak bulunuz.

> df:='df':dz:='dz':f:='f':z:='z':a:='a':f:=z->z^5+z^2: `f(z)` =f(z):
dfd:=(f(z)-f(a))/(z-a):df/dz=dfdz:Limit(df/dz,z=a)= limit(dfdz,z=a);

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{df}{dz} = 5a^4 + 2a$$

Tanım 3.1.2. $A \subset \mathbb{C}$ açık kümesinin her $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi mevcut ise f fonksiyonuna A kümesinde *analitiktir* denir. Eğer f fonksiyonu kompleks düzlemin tamamında analitik ise f fonksiyonuna *tam fonksiyon* adı verilir. Eğer f fonksiyonunun bir z_0 noktasında analitikliğinden bahsedilirse, bu her $z \in D(z_0, r)$ için $f'(z)$ mevcut olacak şekilde $r > 0$ sayısının var olduğu anlamındadır.

Teorem 3.1.3. $A \subset \mathbb{C}$ ve $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları bir $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda c bir sabit sayı olmak üzere $c \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$, $f(g)$ ve $g(z_0) \neq 0$ için f/g fonksiyonları da z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir ve bu noktadaki türevleri;

$$(cf)'(z_0) = cf'(z_0),$$

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0),$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

$$(f(g(z_0)))' = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$$

bağıntıları ile verilir.

Aşağıda bu bağıntıların Maple programı kullanılarak yazılışları verilmiştir.

```
>c:='c':f:='f':F:='F':z:='z':F:=z->c*f(z):`F'(z)`=diff(F(z),z);
```

$$F'(z) = c \left(\frac{d}{dz} f(z) \right)$$

```
>a:='a':b:='b':f:='f':g:='g':H:='H':z:='z':H:=z->a*f(z)+b*g(z):
```

```
`H'(z)`=diff(H(z),z);
```

$$H'(z) = a \left(\frac{d}{dz} f(z) \right) + b \left(\frac{d}{dz} g(z) \right)$$

```
>f:='f':g:='g':P:='P':z:='z':P:=z->>f(z)*g(z):`P'(z)`=diff(P(z),z);
```

$$P'(z) = \left(\frac{d}{dz} f(z) \right) g(z) + f(z) \left(\frac{d}{dz} g(z) \right)$$

```
>f:='f':g:='g':H:='H':z:='z':H:=z->>f(g(z)):
```

```
`H(z)`=H(z);`H'(z)`=diff(H(z),z);
```

$$H(z) = f(g(z)), H'(z) = D(f)(g(z)) \left(\frac{d}{dz} g(z) \right)$$

```
>f:='f':F:='F':g:='g':Q:='Q':z:='z':Q:=z->>f(z)/g(z):
```

```
`Q(z)`=Q(z);`Q'(z)`=normal(diff(Q(z),z));
```

$$Q(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

$$Q'(z) = \frac{\left(\frac{d}{dz} f(z)\right) g(z) - f(z) \left(\frac{d}{dz} g(z)\right)}{g(z)^2}$$

Örnek 3.1.4. $f(z) = \cos(z)$, $g(z) = z^2$ ve $h(z) = f(z)/g(z)$ olmak üzere $h'(z)$ türevini hesaplayınız.

> f:='f':g:='g':h:='h':z:='z':f:=z->cos(z):g:=z->z^2:

h:=z->f(z)/g(z):`h'(z)`=diff(h(z),z);

$$h'(z) = -\frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{2 \cos(z)}{z^3}$$

Örnek 3.1.5. $f(z) = z^3 + 3iz^2 + 5z + 1$, $g(z) = z^5$ ve $h(z) = (g \circ f)(z)$ olmak üzere $h'(z)$ türevini hesaplayınız.

> f:='f':g:='g':h:='h':w:='w':z:='z':f:=z->z^3+I*3*z^2+5*z+1:

g:=z->z^5:h:=z->g(f(z)):`h'(z)`=diff(h(z),z);

$$h'(z) = 5 (z^3 + 3Iz^2 + 5z + 1)^4 (3z^2 + 6Iz + 5)$$

Teorem 3.1.6 (L'Hopital Kuralı). f ve g fonksiyonları bir z_0 noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, ve $g'(z_0) \neq 0$ ise,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

dir (Palka 1991).

Örnek 3.1.7. $\lim_{z \rightarrow (1+i)} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow (1+i)} \frac{z^2 + z - 1 - 3i}{z^2 - 2z + 2}$ limitini hesaplayınız.

> f:='f':g:='g':z:='z':f:=z->z^2+z-1-3*I:g:=z->z^2-2*z+2:

`f(z)`=f(z):Limit(f(z)/g(z),z=1+I)=limit(f(z)/g(z),z=1+I);

$$\lim_{z \rightarrow 1+I} \frac{z^2 + z - 1 - 3I}{z^2 - 2z + 2} = 1 - \frac{3}{2}I$$

L'Hopital kuralı ile hesaplandığında da aynı sonuç elde edilir.


```
>f1:='f1':g1:='g1':Z:='Z':f1:=z->subs(Z=z,diff(f(Z),Z)):
g1:=z->subs(Z=z,diff(g(Z),Z)): `f'(z)/g'(z)`=f1(z)/g1(z), `f'(1+I)`=f1(1+I); `g
'(1+I)`=g1(1+I), ` ` , `f'(1+I)/g'(1+I)`=f1(1+I)/g1(1+I);
```

$$f'(z)/g'(z) = \frac{2z+1}{2z-2}, \quad f'(1+I) = 3 + 2I$$

$$g'(1+I) = 2I, \quad f'(1+I)/g'(1+I) = 1 - \frac{3}{2}I$$

3.2. Cauchy-Riemann Denklemleri

$f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde u ve v fonksiyonlarının (x_0, y_0) noktasında kısmi türevleri mevcuttur ve

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) + iu_y(x_0, y_0) \quad (3.1)$$

dır. Bu ifadenin reel ve sanal kısımlarının eşitliğinden *Cauchy-Riemann denklemleri* denilen

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \text{ ve } u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \quad (3.2)$$

denklemleri elde edilir. Ancak bu denklemler z_0 noktasında sağlandığında, f fonksiyonunun z_0 noktasında diferansiyellenebilir olduğu söylenemez. O halde f , z_0 noktasında diferansiyellenebilir ise, bu noktada (3.2) denklemleri sağlanır. $f'(z_0)$ değerini bulmak için (3.1) eşitliğinden herhangi biri kullanılabilir. Tersine, eğer z_0 noktasında (3.2) denklemlerinden herhangi biri sağlanmıyorsa f , z_0 noktasında türevlenemez (Başkan 1996).

Örnek 3.2.1. $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ fonksiyonunun türevini bulunuz ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığını gösteriniz.

```
>f:='f':U:='U':V:='V':x:='x':y:='y':z:='z': `f(x+Iy)`=f(x+I*y):
`f(x+Iy)`=evalc(f(x+I*y)): U:=proc(x,y)x^3-3*x*y^2 end:
V:=proc(x,y)3*x^2*y-y^3 end:'f(x+I*y)'=U+I*V;
`U(x,y)`=U(x,y): `V(x,y)`=V(x,y): f1:=z->subs(Z=z,diff(f(Z),Z)):
`f'(z)=Ux(x,y)+iVx(x,y)`=diff(U(x,y),x)+I*diff(V(x,y),x);
```

$$f'(z) = V_y(x,y) - iU_y(x,y) = \text{diff}(V(x,y),y) - i \cdot \text{diff}(U(x,y),y);$$

$$f(x + Iy) = U + IV$$

$$f'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 6Ixy$$

$$f'(z) = V_y(x,y) - iU_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 6Ixy$$

bulunur. Buradan Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlandığı görülür.

Örnek 3.2.2.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{x^2 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2} & ; z \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun (0,0) noktasında Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığını fakat, bu noktada türevlenemediğini gösteriniz.

```
> f:='f':F:='F':U:='U':V:='V':x:='x':y:='y':z:='z':f:=z->conjugate(z)^2/z:
`f(z)`=f(z):`f(x+Iy)`=f(x+I*y):assume(x,real); assume(y,real);
w1:=simplify(evalc(f(x+I*y))):`f(x+Iy)`=subs({x='x',y='y'},w1):x:='x':
y:='y':U:=proc(x,y)(x^3-3*x*y^2)/(x^2+y^2) end:
V:=proc(x,y)(-3*x^2*y+y^3)/(x^2+y^2)end:F:=proc(x,y)U(x,y)+I*V(x,y)
end:`F(x,y)`=subs({x='x',y='y'},F(x,y)):
`Ux(0,0)`=limit((U(x,0)-0)/(x-0),x=0),`Vy(0,0)`=limit((V(0,y)-0)/(y-0),y=0),
`Uy(0,0)`=limit((U(0,y)-0)/(y-0),y=0),`-Vx(0,0)`=-limit((V(x,0)-0)/(x-0),x=0);
Ux(0,0) = 1, Vy(0,0) = 1, Uy(0,0) = 0, -Vx(0,0) = 0
```

Böylece, $z=0$ noktasında Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlandığı görülür. Şimdi f fonksiyonun, (0,0) noktasında türevlenebilir olup olmadığına bakalım. Bunun için (0,0) noktasında değişim oranının limitini iki farklı yönden hesaplayalım.

```
> `x-ekseni boyunca`,Limit(df/dz,z=0)=limit((F(x,0)-0)/(x-0),x=0);
`x=t,y=t dogrusu boyunca`,Limit(df/dz,z=0)=limit((F(t,t)-0)/(t+I*t-0),t=0);
```

$$x\text{-ekseni boyunca, } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{df}{dz} = 1$$

$$x=t, y=t \text{ dogrusu boyunca } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{df}{dz} = -1$$

elde edilir. O halde f fonksiyonu (0,0) noktasında türevlenemez.

Örnek 3.2.3. Her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğunu Cauchy-Riemann denklemlerini kullanarak gösteriniz ve türevini bulunuz.

```

>U:='U':V:='V':x:='x':y:='y':U:=proc(x,y)exp(-y)*cos(x)end:
V:=proc(x,y)exp(-y)*sin(x)end:`U(x,y)`=U(x,y),
`V(x,y)`=V(x,y);`Ux(x,y)`=diff(U(x,y),x),`Vy(x,y)`=diff(V(x,y),y);
`Ux(x,y)=Vy(x,y)';`Uy(x,y)`=diff(U(x,y),y),`Vx(x,y)`=diff(V(x,y),x);
`Uy(x,y)=-Vx(x,y)';`f'(x+iy)`=diff(U(x,y),x)+I*diff(V(x,y),x);
      U(x,y) = e-y cos(x), V(x,y) = e-y sin(x)
      Ux(x,y) = -e-y sin(x), Vy(x,y) = -e-y sin(x),    Ux(x,y) = Vy(x,y)
      Uy(x,y) = -e-y cos(x), Vx(x,y) = e-y cos(x),    Uy(x,y) = -Vx(x,y)
      f'(x+iy) = -e-y sin(x) + I e-y cos(x)

```

Böylece, Cauchy-Riemann denklemleri her $z \in \mathbb{C}$ için sağlandığından $f(z)$ fonksiyonu tam fonksiyondur.

Örnek 3.2.4. $f(z) = x^3 + 3xy^2 + i(3x^2y + y^3)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğu noktaların kümesini bulunuz.

```

> U:='U':V:='V':x:='x':y:='y':U:=proc(x,y) x^3+3*x*y^2 end:
V:=proc(x,y) y^3+3*x^2*y end:`U(x,y)`=U(x,y),`V(x,y)`=V(x,y);
`Ux(x,y)`=diff(U(x,y),x),`Vy(x,y)`=diff(V(x,y),y);
print(`Ux-Vy=0`,0=diff(U(x,y),x)-diff(V(x,y),y),
evalb(0=diff(U(x,y),x)-diff(V(x,y),y)));
`Uy(x,y)`=diff(U(x,y),y),`Vx(x,y)`=diff(V(x,y),x);
print(`Uy+Vx=0`,diff(U(x,y),y)+diff(V(x,y),x)=0,
evalb(0=diff(U(x,y),y)+diff(V(x,y),x)));

```

$$U(x,y) = x^3 + 3xy^2, V(x,y) = y^3 + 3x^2y$$

$$Ux(x,y) = 3x^2 + 3y^2, Vy(x,y) = 3x^2 + 3y^2$$

$$Ux-Vy=0, 0=0, true$$

$$Uy(x,y) = 6xy, Vx(x,y) = 6xy$$

$$Uy+Vx=0, 12xy=0, false$$

Böylece, Cauchy-Riemann denklemleri $xy=0$ ya da $x=0$ veya $y=0$ için sağlanır. Bu noktaların kümesi açık olmadığından f fonksiyonu hiçbir yerde analitik değildir.

3.3. Harmonik Fonksiyonlar

$\phi(x, y)$, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesi üzerinde tanımlı iki değişkenli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer ϕ fonksiyonu A kümesinde ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve

$$\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0$$

Laplace denklemini sağlıyorsa, $\phi(x, y)$ fonksiyonuna A kümesinde *harmonik fonksiyon* denir. Harmonik fonksiyonlar uygulamalı matematik, mühendislik ve matematiksel fizik alanlarında önemli yer tutar. Bu fonksiyonlar sabit sıcaklık durumunu, iki-yönlü elektrostatik ve ideal sıvı akımını içeren problemlerin çözümünde ortaya çıkar.

Teorem 3.3.1. $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, A kümesinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu taktirde u ve v fonksiyonları A kümesinde harmoniktir (Palka 1991).

Tanım 3.3.2. $u(x, y)$, D tanım kümesinde harmonik bir fonksiyon olsun. Eğer u ve v fonksiyonları D bölgesinde Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayacak şekilde bir $v(x, y)$ harmonik fonksiyonu bulunabiliyorsa, v fonksiyonuna u fonksiyonunun *harmonik eşleniği* denir. Bu durumda $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu D de analitik olur (Palka 1991).

Örnek 3.3.3. $u(x, y) = x^2 - y^2$ fonksiyonunun harmonik olduğunu gösteriniz.

```
> U:='U':x:='x':y:='y':U:=proc(x,y) x^2-y^2 end:
`Uxx(x,y)`=diff(U(x,y),x$2), `Uyy(x,y)`=diff(U(x,y),y$2);
print(`Uxx+Uyy=0`,0=diff(U(x,y),x$2)+diff(U(x,y),y$2),
evalb(0=diff(U(x,y),x$2)+diff(U(x,y),y$2)));
Uxx(x,y) = 2, Uyy(x,y) = -2
```

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 = 0, \quad \text{true}$$

Teorem 3.3.4. $u(x, y)$, (x_0, y_0) noktasının bir ε -komşuluğunda harmonik olsun. Bu takdirde, $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik fonksiyon olacak şekilde bu komşulukta tanımlı $v(x, y)$ harmonik eşlenik fonksiyonu vardır (Palka 1991).

Örnek 3.3.5. $u(x, y) = xy^3 - x^3y$ harmonik fonksiyonunun $v(x, y)$ harmonik eşleniğini bulunuz.

$$\begin{aligned} >U := \text{proc}(x, y) \ x*y^3 - x^3*y \ \text{end}; \quad `U_x(x, y)` = \text{diff}(U(x, y), x), \\ `U_y(x, y)` = \text{diff}(U(x, y), y); \quad V_x(x, y) := -\text{diff}(U(x, y), y); \\ `V(x, y)' = \text{int}(V_x(x, y), x) + g(y); \quad `V_y(x, y)' = `diff(U(x, y), x) = \text{diff}(V(x, y), y); \\ `g(y) = \text{int}(g'(y))` = \text{int}(y^3, y); \quad `V(x, y)' = \text{int}(V_x(x, y), x) + (y^4)/4; \end{aligned}$$

$$U_x(x, y) = y^3 - 3x^2y, \quad U_y(x, y) = 3xy^2 - x^3$$

$$V_x(x, y) := -3xy^2 + x^3$$

$$V(x, y) = -\frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + g(y)$$

$$V_y(x, y) = y^3 - 3x^2y = -3x^2y + \frac{d}{dy}g(y)$$

$$g(y) = \text{int}(g'(y)) = \frac{1}{4}y^4$$

$$V(x, y) = -\frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4$$

4. TEMEL FONKSİYONLAR

Bu bölümde kompleks sayılarda tanımlı üstel, logaritma, trigonometrik ve ters trigonometrik gibi kompleks değerli fonksiyonlar tanımlanacak. Daha sonra bu fonksiyonların bazı özellikleri ve belli kümelerin bu fonksiyonlar altındaki resimleri Maple programı kullanılarak gösterilecek.

4.1 Kompleks Üstel Fonksiyon

Herhangi bir x reel sayısı için $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğundan y reel sayısı için

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) = \cos y + i \sin y$$

olur. Buna göre e sayısının $z = x + iy$ kompleks üssü

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, kompleks sayılardan kompleks sayılara $f(z) = e^z$ şeklinde bir fonksiyon tanımlanmış olur. Buna kompleks üstel fonksiyon denir ve $f(z) = e^z$ biçiminde gösterilir. Eğer z bir reel sayı ise bu fonksiyon reel üstel fonksiyon ile çakışır.

Teorem 4.1.1. $f(z) = e^z$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i)** $f'(z) = e^z$
- ii)** $f(z+w) = f(z)f(w)$
- iii)** $f(z) = 1 \Leftrightarrow z = 2n\pi i$
- iv)** $f(z) = f(w) \Leftrightarrow z = w + 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}$

Teoremin (ii) nin doğruluğunu Maple programı yardımıyla gösterelim.

```
>x:='x':y:='y':z:='z':w1:=evalc(exp(x[1]+I*y[1]));
w2:=evalc(exp(x[2]+I*y[2]));w3:=w1*w2:exp(z[1])*exp(z[2])=w3:
w3:= evalc(w1*w2): exp(z[1])*exp(z[2])=w3:w3:=expand(w3):
exp(z[1])*exp(z[2])=w3;z4:=(x[1]+I*y[1])+(x[2]+I*y[2]):
w4:=exp(z4):exp(z[1]+z[2])=w4:w4:=evalc(exp(z4)):exp(z[1]+z[2])=w4;
w4:=expand(w4,trig):exp(z[1]+z[2])=w4;
```

$\exp(z[1]+z[2])=\exp(z[1])*\exp(z[2]);\text{evalb}(\text{expand}(w3=w4)):$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} \cos(y_1) e^{x_2} \cos(y_2) - e^{x_1} \sin(y_1) e^{x_2} \sin(y_2)$$

$$+ I e^{x_1} \sin(y_1) e^{x_2} \cos(y_2) + I e^{x_1} \cos(y_1) e^{x_2} \sin(y_2)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2} \cos(y_1+y_2) + I e^{x_1+x_2} \sin(y_1+y_2)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1} \cos(y_1) e^{x_2} \cos(y_2) - e^{x_1} \sin(y_1) e^{x_2} \sin(y_2)$$

$$+ I e^{x_1} \sin(y_1) e^{x_2} \cos(y_2) + I e^{x_1} \cos(y_1) e^{x_2} \sin(y_2)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Örnek 4.1.2. $z_k = \frac{5}{4} + i(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi)$ olmak üzere $k = 0, 1, 2, 3$ için $w_k = e^{z_k}$ değerlerini bulunuz.

$>Z0:=5/4+I*11*Pi/6;\text{for } k \text{ from } 0 \text{ to } 3 \text{ do}$

$\exp(Z0+I*2*Pi*k)=\text{evalc}(\exp(Z0+I*2*Pi*k));\text{od};$

$$e^{\frac{5}{4} + \frac{11}{6} I \pi} = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{4}} \sqrt{3} - \frac{1}{2} I e^{\frac{5}{4}}$$

$$e^{\frac{5}{4} + \frac{23}{6} I \pi} = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{4}} \sqrt{3} - \frac{1}{2} I e^{\frac{5}{4}}$$

$$e^{\frac{5}{4} + \frac{35}{6} I \pi} = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{4}} \sqrt{3} - \frac{1}{2} I e^{\frac{5}{4}}$$

$$e^{\frac{5}{4} + \frac{47}{6} I \pi} = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{4}} \sqrt{3} - \frac{1}{2} I e^{\frac{5}{4}}$$

4.2 Kompleks Logaritma Fonksiyonu

Herhangi bir t pozitif reel sayısının logaritması $e^s = t$ denklemini sağlayan s değeri olduğu reel analizden biliniyor. Benzer şekilde, sıfırdan farklı herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ sayısının logaritması, $e^w = z$ eşitliğini sağlayan w kompleks sayısı olarak bakılabilir. Ancak, $e^s = t$ eşitliğini sağlayan bir tek s reel sayısı olmasına rağmen,

Teorem 4.1.1 gereği $e^w = z$ eşitliğini sağlayan sonsuz çoklukta w kompleks sayısı mevcuttur. Örneğin, $e^w = 1$ eşitliği $k=0, \mp 1, \dots$ olmak üzere $w = 2k\pi i$ sayıları için sağlanır. Yani, her bir $w = 2k\pi i$ sayısı 1 sayısının bir kompleks logaritmasıdır. Bunu tek çözüme indirmek istiyoruz. $w = \ln |z| + i \text{Arg } z$ sayısını göz önüne alalım.

$$e^w = e^{\ln|z| + i \text{Arg } z} = |z| e^{i \text{Arg } z} = z$$

olup bu ise z sayısının bir logaritmasının w olduğunu gösterir. w sayısının bu değerine z sayısının *esash logaritması* denir ve $\text{Log } z$ ile gösterilir. Böylece, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sayısı için

$$\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$$

olur. Dikkat edilirse, $\text{Arg } z$ değerinin tek değerli olduğundan $\text{Log } z$ değeri de tektir. Böylece $f(z) = \text{Log } z$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kümesinden $\{w : -\pi < \text{Im } w \leq \pi\}$ şeridi üzerine bire-bir bir fonksiyon tanımlar. Eğer $z=x$ pozitif bir reel sayı ise bu fonksiyon bilinen $\text{Log } x = \ln x$ fonksiyonudur. z sayısının keyfi bir logaritması $e^w = z = e^{\text{Log } z}$ denklemini sağlayan w değeri olduğundan k bir tam sayı olmak üzere,

$$w = \ln |z| + i \arg z = \ln |z| + i(\text{Arg } z + 2k\pi)$$

biçimindedir. Bu eşitliği sağlayan w değerlerinin her birine z sayısının *logaritması* denir ve

$$\log z = \ln |z| + i \arg z = \ln |z| + i(\text{Arg } z + 2k\pi); \quad k \in \mathbb{Z}$$

biçiminde gösterilir. $\arg z$ çok değerli olduğundan, bir kompleks sayının logaritması sonsuz çoklukta değere sahip olup ardışık değerler birbirlerinden $2\pi i$ kadar fark ederler.

Örnek 4.2.1. $\text{Log}(1+i)$ ve $\log(1+i)$ değerlerini bulunuz.

$$> w := 'w':w := \text{evalc}(\text{log}(1+I)): \text{`Log}(1+I)\` = w;$$

$$\text{Log}(1+I) = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{4} I \pi$$

$$> w := 'w':w := \text{log}(1+I) + I * 2 * \pi * n: w := \text{evalc}(\text{log}(1+I) + I * 2 * \pi * n): \text{`log}(1+I)\` = w;$$

$$\log(1+I) = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{4} I \pi + 2 I \pi n$$

Örnek 4.2.2. $\text{Log}(-e)$ ve $\text{Log}(-1)$ değerlerini bulunuz.

> w:='w':w:=log(-exp(1)):w:=evalc(log(-exp(1))):`Log(-e)`=w;

$$\text{Log}(-e) = 1 + I \pi$$

> w:='w':w:=log(-1):w:=evalc(log(-1)):`Log(-1)`=w;

$$\text{Log}(-1) = I \pi$$

Örnek 4.2.3. $\text{Log}(z_1 z_2) \neq \text{Log} z_1 + \text{Log} z_2$ olduğunu gösteriniz.

> z:='z':z1:=-sqrt(3)+I;z2:=-1+I*sqrt(3):z[1]=z1,z[2]=z2;

w1:=log(z1)+log(z2):log(z1)=evalc(log(z1)),log(z2)=evalc(log(z2));

Log(z[1])+Log(z[2])=w1:w1:=evalc(w1):Log(z[1])+Log(z[2])=w1;z3:=z1*z2:

w3:=log(z3):Log(z[1]*z[2])=w3;z4:=evalc(z3):w4:=log(z4):w4:=evalc(w4):

Log(z[1]*z[2])=w4,Log(z[1]*z[2])=w4:w1=w4;evalb(w1=w4);

$$z_1 = -\sqrt{3} + I, z_2 = -1 + I \sqrt{3}$$

$$\ln(-\sqrt{3} + I) = \ln(2) + \frac{5}{6} I \pi, \ln(-1 + I \sqrt{3}) = \ln(2) + \frac{2}{3} I \pi$$

$$\text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2) = \ln(-\sqrt{3} + I) + \ln(-1 + I \sqrt{3})$$

$$\text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2) = 2 \ln(2) + \frac{3}{2} I \pi$$

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \ln((- \sqrt{3} + I) (-1 + I \sqrt{3}))$$

$$\text{Log}(z_1 z_2) = 2 \ln(2) - \frac{1}{2} I \pi, \text{Log}(z_1 z_2) = 2 \ln(2) - \frac{1}{2} I \pi$$

$$2 \ln(2) + \frac{3}{2} I \pi = 2 \ln(2) - \frac{1}{2} I \pi$$

false

4.3. Kompleks Üsler

a pozitif bir reel sayı ve b herhangi bir reel sayı olmak üzere a^b sayısının $a^b = e^{b \ln a}$ biçiminde tanımlandığı biliniyor. Benzer şekilde, z sıfırdan farklı ve λ herhangi bir kompleks sayı olmak üzere z sayısının *esaslı λ kuvveti*

$$z^\lambda = e^{\lambda \text{Log} z}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $f(z) = z^\lambda$, $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ kümesinden kompleks sayılara bir fonksiyon tanımlar. z^λ sayısının bütün değerleri istenildiğinde $z^\lambda = e^{\lambda \log z}$ dikkate

alınır ve logz değerine bakarak z^{λ} sayısının sonsuz çoklukta değerinin olduğu söylenebilir.

Örnek 4.3.1. $\sqrt{1+i}$ ve $(-1)^i$ sayılarının esas değerini bulunuz.

```
> w:='w':w:=exp((1/2)*log(1+I)):(1+I)^(1/2)=w:w:=evalc(w):
(1+I)^(1/2)=w;w:=exp((1/2)*evalc(log(1+I))):(1+I)^(1/2)=w;
w:=evalf(w):(1+I)^(1/2)=w;
```

$$\sqrt{1+I} = \frac{1}{2} \sqrt{2+2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} I \sqrt{-2+2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1+I} = e^{\frac{1}{4} \ln(2) + \frac{1}{8} I \pi}$$

$$\sqrt{1+I} = 1.098684113 + 0.4550898607 I$$

```
> w:='w':w:=(-1)^I:w:=exp(I*log(-1)):(-1)^I=w;w:=evalf(w):(-1)^I=w;
```

$$(-1)^I = e^{-\pi}$$

$$(-1)^I = 0.04321391825$$

Örnek 4.3.2. $2^{\left(\frac{1+i}{9+50i}\right)}$ ifadesinin esas değerlerini bulunuz.

```
> c:='c':C:='C':w:='w':z:='z':Z:='Z':Z:=2:C:=1/9+I/50:w:=Z^C:z^c=w;
w:=exp(C*log(Z)):z^c=w; w:=evalc(w):z^c=w;w:=evalf(w):z^c=w;
```

$$z^c = 2^{\frac{1}{9} + \frac{1}{50} I}, \quad z^c = e^{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{50} I\right) \ln(2)}$$

$$z^c = 2^{1/9} \cos\left(\frac{1}{50} \ln(2)\right) + I 2^{1/9} \sin\left(\frac{1}{50} \ln(2)\right)$$

$$z^c = 1.079955957 + 0.01497232768 I$$

$2^{\left(\frac{1+i}{9+50i}\right)}$ ifadesinin diğer bazı değerleri şunlardır:

```
> n:='n':z:='z':Z:='Z':Z:=n->evalf(exp((1/9+I/50)*(log(2)+2*Pi*I*n))):
z[n] = exp((1/9+I/50)*(log(2)+2*Pi*I*n));for n from -1 to 1 do print(Z(n)) od;
```

$$z_n = e^{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{50} I\right) (\ln(2) + 2 I \pi n)}$$

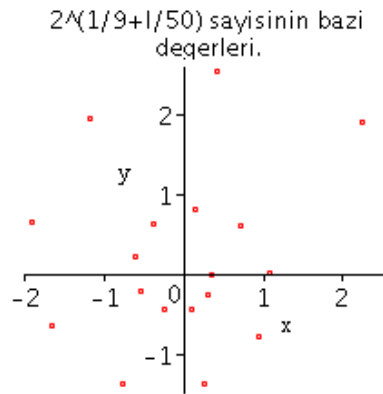
$$0.9489822980 - 0.7741286217 I$$

$$1.079955957 + 0.01497232768 I$$

$$0.7211126821 + 0.6223223308 I$$

Şimdi bu değerleri düzlemde gösterelim.

```
> pts:=[[Re(Z(j)),Im(Z(j))]]$j=-9..9]:plot(pts,x=-2..3, title='2^(1/9+I/50)
sayisinin bazı degerleri.', scaling=constrained,labels=['x','y'], style=point,
symbol=circle,tickmarks=[5,4],view=[-2.0..2.6,-1.5..2.6]);
```



Şekil 4.1

Örnek 4.3.3. $(i^2)^i$ ve i^{2i} ifadesinin değerlerini bulunuz.

```
> c:='c':C:='C':w:='w':z:='z':Z:='Z':Z:=I^2:C:=I:w:=Z^C:
z^c=w;w:=exp(C*log(Z)):z^c=w;w:=evalf(w):z^c=w;
```

$$z^c = (-1)^I, \quad z^c = e^{-\pi}, \quad z^c = 0.04321391825$$

ve

```
> c:='c':C:='C':w:='w':z:='z':Z:='Z':Z:=I:C:=2*I:w:=Z^C:
z^c=w;w:=exp(C*log(Z)):z^c=w;w:=evalf(w):z^c=w;
```

$$z^c = I^{2I}, \quad z^c = e^{-\pi}, \quad z^c = 0.04321391825$$

Bu iki sayının diğer bazı değerleri aşağıda verilmiştir.

```
> Z1:=n->evalf(exp(I*(log(I^2)+2*Pi*I*n))):
Z2:=n->evalf(exp(2*I*(log(I)+2*Pi*I*n))):
Z1s:={[Re(Z1(j)),Im(Z1(j))]}$j=-2..1}:(i^2)^i=Z1s;
Z2s:={[ Re(Z2(j)),Im(Z2(j))]}$j=-2..1}:i^(2*i)=Z2s;
```

$$(i^2)^i = \{[12391.64787, 0.], [23.14069264, 0.], [0.04321391825, 0.], [0.00008069951747, 0.]\}$$

$$i^2 = \{[0.04321391825, 0.], [3.553321298 \cdot 10^9, 0.], [12391.64782, 0.], [1.507017272 \cdot 10^{-7}, 0.]\}$$

4.4. Trigonometrik Fonksiyonlar ve Özellikleri

$t \in \mathbb{R}$ için daha önce $e^{it} = \cos t + i \sin t$ ve $e^{-it} = \cos t - i \sin t$ olduğunu görmüştük. Bu iki eşitlikten

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \text{ ve } \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$$

özdeşlikleri elde edilir. Bundan faydalanarak herhangi bir z kompleks sayısının cosinüsü ve sinüsü

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ ve } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

olarak tanımlanır. Böylece $f(z) = \cos z$ ve $f(z) = \sin z$ kompleks sayılardan kompleks sayılara bir fonksiyon tanımlar.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}; (\cos z \neq 0), \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; (\sin z \neq 0),$$

olarak tanımlanırsa tanjant ve cotanjant fonksiyonları benzer şekilde tanımlanır.

Örnek 4.4.1. Herhangi bir n tamsayısı için $\cos z = 0$ ise $z = (n + \frac{1}{2})\pi$ olduğunu gösteriniz.

$$> x := 'x':y := 'y':\cos(x+I*y) = '0'; \text{evalc}(\cos(x+I*y)) = '0';$$

$$\text{eqns} := \{\cos(x) \cdot \cosh(y) = 0, -\sin(x) \cdot \sinh(y) = 0\};$$

$$\text{eqns}; \text{solset} := \text{solve}(\text{eqns}, \{x, y\}); \text{solset};$$

$$\cos(x + I y) = 0$$

$$\cos(x) \cosh(y) - I \sin(x) \sinh(y) = 0$$

$$\{\cos(x) \cosh(y) = 0, -\sin(x) \sinh(y) = 0\}$$

$$\left\{x = -\frac{1}{2}\pi, y = 0\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}\pi, y = 0\right\}, \left\{y = \frac{1}{2}I\pi, x = 0\right\}$$

x ve y değerleri reel sayı olduğundan bu çözümden, sadece $x = \frac{\pi}{2}$, $y=0$ ve $x = -\frac{\pi}{2}$, $y=0$ çözümleri geçerlidir. Diğer çözümler, buradaki x değerlerine $n\pi$ ekleyerek elde edilir.

Örnek 4.4.2.

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\tan(x+iy) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 x} + i \frac{\sinh y \cosh y}{\cos^2 x + \sinh^2 x}$$

$$|\sin(x+iy)| = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x}$$

olduğunu gösteriniz.

```
> `cos(x+Iy)` = evalc(cos(x+I*y)); `sin(x+Iy)` = evalc(sin(x+I*y));
`tan(x+Iy)` = evalc(tan(x+I*y)); `|sin(x+Iy)|` = evalc(abs(sin(x+I*y)));
`|sin(x+Iy)|` = simplify(evalc(abs(sin(x+I*y))));
```

$$\sin(x+iy) = \sin(x) \cosh(y) + I \cos(x) \sinh(y)$$

$$\tan(x+iy) = \frac{\sin(x) \cos(x)}{\cos(x)^2 + \sinh(y)^2} + \frac{I \sinh(y) \cosh(y)}{\cos(x)^2 + \sinh(y)^2}$$

$$|\sin(x+iy)| = \sqrt{\sin(x)^2 \cosh(y)^2 + \cos(x)^2 \sinh(y)^2}$$

$$|\sin(x+iy)| = \sqrt{\cosh(y)^2 - \cos(x)^2}$$

Örnek 4.4.3. $f(z) = \cos z$ fonksiyonunun türevinin $f'(z) = -\sin z$ olduğunu gösteriniz.

```
> f:='f':F:='F':p:='p':P:='P':z:='z':Z:='Z':f:=z->cos(z):
F:=series(f(Z),Z=0,12):P:=convert(F,polynomial):p:=z->subs(Z=z,P):
`f(z)` = f(z), `f'(z)` = diff(f(z),z); `p'(z)` = diff(p(z),z);
g:=z->sin(z):`g(z)` = series(g(z),z=0,12); `f'(z)` = -g(z);
```

$$f(z) = \cos(z), f'(z) = -\sin(z)$$

$$p'(z) = -z + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{5040}z^7 - \frac{1}{362880}z^9$$

$$g(z) = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7 + \frac{1}{362880} z^9 - \frac{1}{39916800} z^{11} + O(z^{12})$$

$$f'(z) = -g(z)$$

4.5. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Tanım 4.5.1. $S = \{z : |x| < \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \text{ ve } y \leq 0, x = -\frac{\pi}{2} \text{ ve } y \geq 0\}$ olmak üzere kompleks düzlemin her bir w sayısı için $\sin z = w$ denklemini sağlayan bir ve yalnız bir $z \in S$ vardır. Bu z sayısına w sayısının esaslı *arcsiniüsü* denir ve $\arcsin w$ ile gösterilir. $f(z) = \arcsin z$ ile gösterilen $f: \mathbb{C} \rightarrow S$ fonksiyonuna *esaslı arcsiniüs* kısaca *arcsiniüs fonksiyonu* denir.

Şimdi verilen $w \in \mathbb{C}$ sayısı için

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \quad (4.1)$$

denklemini sağlayan yegane $z \in S$ sayısını bulalım. (4.1) eşitliğinin her iki yanını e^{iz} ile çarpılıp elde edilen ikinci derece denklemi çözümlerse

$$e^{iz} = \mp \sqrt{1-w^2} + iw$$

bulunur. Bu bize (4.1) denkleminin $-\frac{\pi}{2} < \text{Re} z < \frac{\pi}{2}$ bağıntısını sağlayan

$$z_1 = -i \text{Log} \left[\sqrt{1-w^2} + iw \right], z_2 = -i \text{Log} \left[-\sqrt{1-w^2} + iw \right]$$

gibi iki çözümünün olduğunu gösterir. Çözümün tekliği bunlardan birinin S bölgesinin dışında olmasını gerektirir. Gerçekten $|\text{Re} z_2| > \frac{\pi}{2}$ olduğundan $z_1 \in S$

(4.1) denkleminin yegane çözümüdür. O halde

$$\arcsin w = -i \text{Log} \left[\sqrt{1-w^2} + iw \right] \quad (4.2)$$

dır. (4.2) yardımıyla bazı sayıların Arcsinüsünü hesaplayabiliriz.

$$\text{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}, \text{Arcsin} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}, \text{Arcsin} i = -i \text{Log}(-1 + \sqrt{2})$$

Örnek 4.5.2. $\arcsin\sqrt{2}$ değerini bulunuz.

> w:='w': z:='z': Z:='Z': Z := sqrt(2):

w:=-I*log(I*Z+(1-Z^2)^(1/2)): -I*log(I*z+(1-z^2)^(1/2))=w:

w:=evalc(w):-I*log(I*z+(1-z^2)^(1/2))=w:w:=arcsin(Z):

`arcsin(z)`=w:w:=evalc(w):`arcsin(z)`=w;

$$\arcsin(z) = \arcsin(\sqrt{2})$$

$$\arcsin(z) = \frac{1}{2} \pi - I \ln(1 + \sqrt{2})$$

Örnek 4.5.3. $\arcsin(1+i)$ ifadesinin esas değerini bulunuz.

> `arcsin(1+I)` = evalc(arcsin(1+I)); `arcsin(1+I)` = evalf(arcsin(1+I));

$$\arcsin(1+I) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right) + I \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)^2 - 1}\right)$$

$$\arcsin(1+I) = 0.6662394325 + 1.061275062 I$$

Tanım 4.5.4. $S = \{z: |x| < \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \text{ ve } y \leq 0, x = -\frac{\pi}{2} \text{ ve } y \geq 0\}$ olmak üzere kompleks düzlemin her bir w sayısı için $\sin z = w$ denklemini sağlayan bir ve yalnız bir $z \in S$ vardır. Bu z sayısına w sayısının esaslı *arcsinüsü* denir ve $\arcsin w$ ile gösterilir. $f(z) = \arcsin z$ ile gösterilen $f: \mathbb{C} \rightarrow S$ fonksiyonuna *esaslı arcsinüs* kısaca *arcsinüs fonksiyonu* denir ve

$$\arccos z = -i \log\left(+i\sqrt{1-z^2}\right),$$

eşitliği ile verilir.

Tanım 4.5.5. $T = \{z = x + iy: |x| < \frac{\pi}{2}; z = \frac{\pi}{2}\}$ olmak üzere kompleks düzlemin $\mp i$ değerlerinden başka bütün w sayıları için $\tan z = w$ denklemini sağlayan bir ve yalnız bir $z \in T$ sayısı vardır. Bu z sayısına w sayısının esaslı *arctanjantı* denir ve $\arctan w$ ile gösterilir. $f(z) = \arctan z$ ile gösterilen $f: \mathbb{C} \setminus \{\mp i\} \rightarrow T$ fonksiyonuna *esaslı*

arctanjant kısaca *arctanjant fonksiyonu* denir. Arcsinz fonksiyonunda olduğu gibi $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mp i\}$ için

$$\arctan z = -\frac{i}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

olduğu görülür.

4.6. Konform Dönüşümler

Bu kesimde, bir noktada açılarm ölçüsünü ve yönünü koruyan fonksiyonların görüntü kümelerinin Maple yardımıyla bulunmasıyla ilgilenilecek.

Tanım 4.6.1. $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasından geçen yönlendirilmiş iki eğri arasındaki açının ölçüsünü ve yönünü koruyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *konformdur* denir. Eğer her $z \in B$ noktası için f konform ise f fonksiyonuna B bölgesinde *konform dönüşüm* denir (Nehari 1952).

Teorem 4.6.2. f , B bölgesinde analitik bir fonksiyon ve z_0 , B bölgesinde bir nokta olsun. Eğer $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu z_0 noktasında konformdur (Nehari 1952).

Örnek 4.6.3. $w = f(z) = \cos z$ fonksiyonunun i noktasında konform olduğunu gösteriniz. $\alpha = \arg f'(z)$ dönme açısını bulunuz.

> f:='f':z:='z':Z:='Z':f:=z->cos(z):df:=diff(f(Z),Z):Df:=z->subs(Z=z,df):
`f(z)`=f(z), `f'(z)`=Df(z);f1:=Df(I):`f'(I)`=f1, `donme acisi`=argument(f1);

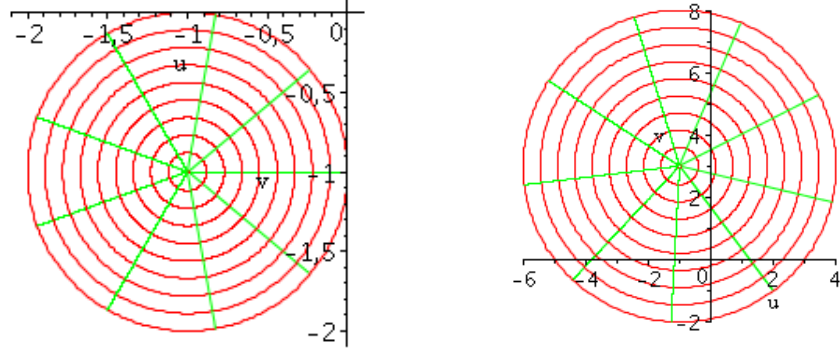
$$f(z) = \cos(z), f'(z) = -\sin(z)$$

$$f'(I) = -I \sinh(1), \text{ donme acisi} = -\frac{1}{2} \pi$$

Örnek 4.6.4. $f(z) = (3-4i)z + 6 + 2i$ dönüşümü altında birim dairenin resmini bulunuz.

> f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->(3-4*I)*z+6+2*I: `f(z)`=f(z);


```
F:=z->subs(Z=z-1-I,f(Z)):conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),
z=0.01..1+I*2*Pi,grid=[10,10],numxy=[333,333],
scaling=constrained,labels=[`u`,`v`],view=[-6..4,-2..8]);
f(z) = (3 - 4 I) z + 6 + 2 I
```



Şekil 4.2

Tanım 4.6.5. a, b, c ve d kompleks sayılar ve $ad \neq bc$ olmak üzere

$$w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.3)$$

fonksiyonuna *Möbius dönüşümü* veya *lineer kesirsel dönüşüm* denir. Eğer (4.3) ifadesinden z çekilirse $w \neq \frac{c}{a}$ olmak üzere ters dönüşüm

$$z = S^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

biçiminde verilir. Eğer $S(z_1) = w_1, S(z_2) = w_2$ ve $S(z_3) = w_3$ değerleri bilinirse lineer kesirsel dönüşümün tek olarak hesaplanması mümkündür.

Teorem 4.6.6. z_1, z_2 ve z_3 gibi üç farklı noktayı, sırasıyla, w_1, w_2 ve w_3 gibi üç farklı nokta üzerine resmeden tek bir lineer kesirsel dönüşüm vardır. Bu dönüşüm

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \quad (4.4)$$

kapalı ifadesiyle bellidir. Özel olarak eğer $z_3 = \infty$ ise (4.4) ifadesi

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

biçimine, $w_3 = \infty$ ise (4.4) ifadesi

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w_2 - w_1}$$

biçimine dönüşür (Başkan 1996).

Örnek 4.6.7. $w = S(z)$ lineer kesirsel dönüşümünü; $z_1 = -i, z_2 = 1$ ve $z_3 = i$ noktalarını sırasıyla $w_1 = -1, w_2 = 0$ ve $w_3 = 1$ noktaları üzerine resmedecek şekilde oluşturunuz.

```
>w:='w':w1:='w1':w2:='w2':w3:='w3':z:='z':z1:='z1':z2:='z2':z3:='z3':s:='s':
formula:=(z-z1)*(z2-z3)/(z-z3)/(z2-z1)=(w-w1)*(w2-w3)/(w-w3)/(w2-w1):
S:='S':W:='W':Z:='Z':formula:=subs({z=Z,w=W},formula):
z1:=-I;z2:=1;z3:=I:w1:=-1:w2:=0:w3:=1:sol:=solve(formula,W):
S:=z->subs(Z=z,sol):`w=S(z)`=S(z);
```

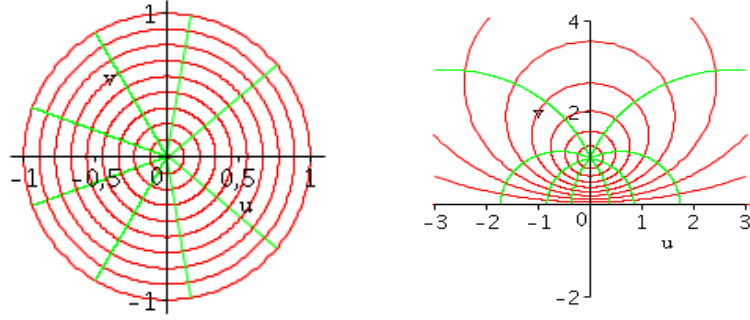
$$w=S(z) = \frac{Iz + z - 1 - I}{Iz - z - 1 + I}$$

Örnek 4.6.8. $w = S(z) = \frac{i(1-z)}{1+z}$ dönüşümünün $|z| < 1$ birim dairesini bire-bir ve örten olarak $\text{Im}(w) > 0$ üst yarı düzlemine resmettiğini gösteriniz.

Önce $S(z) = \frac{i(1-z)}{1+z}$ fonksiyonunun bire-bir olduğunu göstermek için ters fonksiyonun bulunmasından faydalanacağız. Örtenlik için iç içe çemberler ve radyal doğruların resimlerini kullanacağız.

```
>f:='f':s:='s':w:='w':z:='z':f:=z->I*(1-z)/(1+z):`w=S(z)`=f(z),
`z`=solve(w=f(z),z);conformal(f(Re(z)*exp(I*Im(z))),z=0.01..1+I*2*Pi,
labels=[`u`,`v`],tickmarks=[7,4],grid=[10,10],numxy=[325,325],
scaling=constrained,view=[-3..3,-2..4]);
```

$$w = S(z) = \frac{I(1-z)}{1+z}, \quad z = -\frac{w-I}{w+I}$$



Şekil 4.3

Örnek 4.6.9. $w = S(z) = \frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$ dönüşümünün; $|z+1|<1$ dairesini bire-bir ve örten olarak $\text{Im}(w) > 0$ üst yarı düzlemine resmettiğini gösteriniz.

Önceki örnekte olduğu gibi, $S(z)$ fonksiyonunun bire bir olduğunu göstermek için ters fonksiyonu bulalım.

```
>s='s':S='S':w='w':z='z':S=z->((1-I)*z+2)/((1+I)*z+2);
`w=S(z)`=S(z),`z`=solve(w=S(z),z);
```

$$w = S(z) = \frac{(1-I)z+2}{(1+I)z+2}, \quad z = -\frac{2(w-1)}{w+Iw-1+I}$$

Sonra çember üzerinde z_1, z_2 ve z_3 gibi üç farklı noktanın, $S(z)$ fonksiyonu altındaki resimleri sırasıyla, w_1, w_2 ve w_3 olsun.

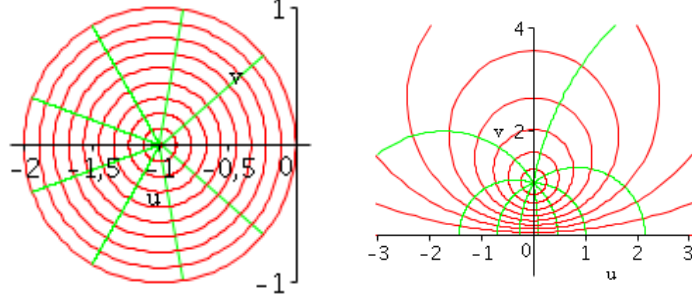
```
>w='w':w1='w1':w2='w2':w3='w3':z='z':z1='z1':z2='z2':z3='z3':
z1=-2:z2=-1-I:z3=0:w1=-1:w2=0:w3=1:z[1]=z1,z[2]=z2,z[3]=z3;
s(z[1])=S(z1),s(z[2])=S(z2),s(z[3])=S(z3);w[1]=w1,w[2]=w2,w[3]=w3;
z1 = -2, z2 = -1 - I, z3 = 0
s(z1) = -1, s(z2) = 0, s(z3) = 1
w1 = -1, w2 = 0, w3 = 1
```

Daha sonra $|z+1|<1$ dairesinin $w=S(z)$ altındaki görüntüsünü bulmak için $|z|<1$ dairesinin $w=S(z-1)$ altındaki görüntüsü bulmak yeterli olacaktır.

```
>g='g':S='S':z='z':Z='Z':S=z->((1-I)*z+2)/((1+I)*z+2);
g:=z->subs(Z=z,S(Z-1)):`g(z)`=g(z);conformal(g(Re(z)*exp(I*Im(z))),
```

```
z=0.01..1+I*2*Pi,labels=['u','v'],tickmarks=[7,4],grid=[10,10],
numxy=[125,125],scaling=constrained,view=[-3..3,0..3]);
```

$$g(z) = \frac{(1 - I)(z - 1) + 2}{(1 + I)(z - 1) + 2}$$



Şekil 4.4

Böylece, $|z+1| < 1$ daresinin resminin $\text{Im}(w) > 0$ üst yarı düzlem olduğu görülür.

Örnek 4.6.10. $|z-2|=2$ çemberinin içinde ve $|z-1|=1$ çemberi dışında yer alan hilal şeklindeki bölgeyi yatay bir şerit üzerine resmeden lineer kesirsel dönüşümünü bulunuz.

Önce dış çember üzerindeki $z_1 = 4$, $z_2 = 2 + 2i$ ve $z_3 = 0$ noktalarının görüntülerini sırasıyla $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ ve $w_3 = \infty$ olacak şekilde lineer kesirsel dönüşümünü bulalım.

```
>w:='w':w1:='w1':w2:='w2':w3:='w3':z:='z':z1:='z1':z2:='z2':z3:='z3':
s:='s':S:='S':W:='W':Z:='Z':formula:=(w-w1)/(w2-w1)=
(z-z1)*(z2-z3)/(z-z3)/(z2-z1): formula:=subs({z=Z,w=W},formula):z1:=4:
z2:=2+2*I:z3:=0:w1:=0:w2:=1:w3:=infinity:
sol:=expand(solve(formula,W)):S:=z->subs(Z=z,sol):`w=S(z)`=S(z);
```

$$w=S(z) = -I + \frac{4I}{z}$$

Şimdi aynı lineer kesirsel dönüşümün içteki çember üzerindeki $z_4 = 1 - i$, $z_5 = 2$, $z_6 = 1 + i$ noktalarını sırasıyla $w_4 = -2 + i$, $w_5 = i$, $w_6 = 2 + i$ noktalarına dönüştürdüğünü görelim.

```
> z4:=1-I:z5:=2:z6:=1+I:z[4]=z4,z[5]=z5,z[6]=z6;`w=s(z)`=S(z);
s(z[4])=S(z4),s(z[5])=S(z5),s(z[6])=S(z6);
```

$$z_4 = 1 - I, z_5 = 2, z_6 = 1 + I, w = s(z) = -I + \frac{4I}{z}$$

$$s(z_4) = -2 + I, s(z_5) = I, s(z_6) = 2 + I$$

Böylece istenilen dönüşümün $s(z) = -i + \frac{4i}{z}$ olduğu görülür. Bu dönüşümün

ters dönüşümü;

```
> sol:=solve(formula,Z):`z=T(w)`=subs(W=w,sol);
```

$$z = T(w) = \frac{4I}{w + I}$$

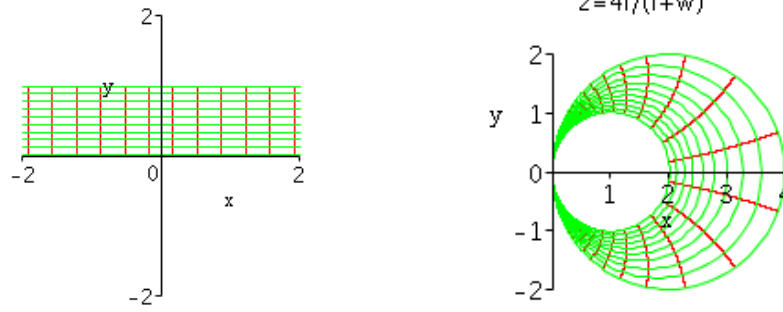
dir. Şimdi $T(w) = \frac{4i}{i+w}$ ters dönüşümünün $\{w : 0 < \text{Im } w < 1\}$ yatay şeridini hilal şeklindeki bölge üzerine konform olarak dönüştürdüğünü gösterelim.

```
> T:='T':w:='w':T:=w->4*I/(I+w):
```

```
conformal(T(w),w=-26+I*0.01..26+I*0.99, title=`z=4i/(i+w)` ,
```

```
labels=[`x`,`y`], tickmarks=[5,5],grid=[150,10],
```

```
numxy=[725,725],scaling=constrained,view=[-2..2,-2..2]);
```



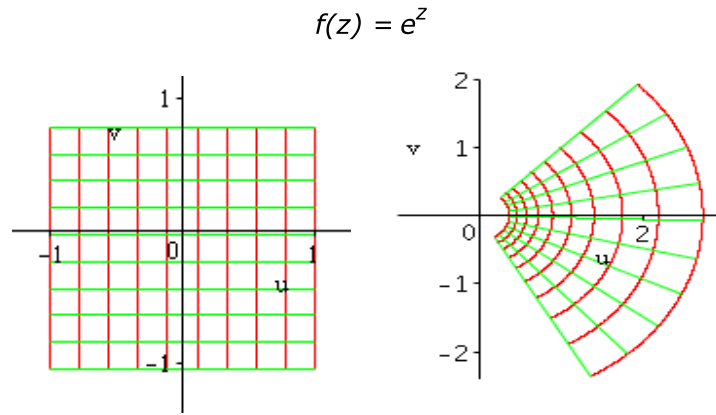
Şekil 4.5

4.7. Temel Fonksiyonları Bulunduran Dönüşümler

Bu kesimde daha önce incelenen temel fonksiyonlar ve onlarla elde edilen bileşke fonksiyonlar ile yalınkat analitik ve yalınkat harmonik fonksiyonlarda önemli yere sahip olan bazı fonksiyonların dönüşüm özellikleri üzerinde durulacak.

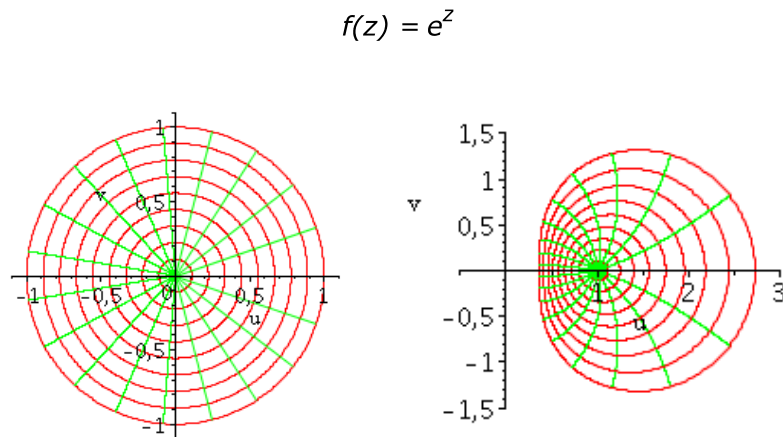
Örnek 4.7.1. $f(z) = e^z$ dönüşümü altında $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \text{ ve } -\frac{\pi}{3} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$ dikdörtgeni ile $U = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \text{ ve } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ birim dairesinin resmini bulunuz.

```
> f:='f':z:='z':f:=z->exp(z):`f(z)`=f(z);conformal(f(z),
z=-1-I*Pi/3..1+I*Pi/4,grid=[10,10],numxy=[535,535],
scaling=constrained, labels=[`u`,`v`],tickmarks=[3,5],
view=[-1..3,-2.4..2]);
```



Şekil 4.6

```
> f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->exp(z):`f(z)`=f(z);
F:=z->subs(Z=z,f(Z)):conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),
z=0..1+I*2*Pi,grid=[10,20], numxy=[535,535], scaling=constrained,
labels=[`u`,`v`],view=[-0.5..3,-1.5..1.5]);
```



Şekil 4.7

Örnek 4.7.2. $w = f(z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}$ dönüşümü, $\{x + iy : 0 < y < \pi\}$ yatay şeridinin $|w| < 1$ daresi üzerine bire-bir ve konform olarak dönüştürdüğünü gösteriniz.

Önce $w = (e^z - i)/(e^z + i)$ fonksiyonunun bire-bir olduğunu göstermek için ters fonksiyonun mevcut olduğunu gösterelim.

```
>f:='f':g:='g':z:='z':Z:='Z':f:=z->(exp(z)-I)/(exp(z)+I):g:='g':i:='i':Z:='Z':
sol:=solve((exp(Z)-i)/(exp(Z)+i)=w,Z):g:=w->log((I+I*w)/(1-w)):
`z`=subs(i=I,sol),`g(w)`=g(w);`g(f(z))`=simplify(g(f(z))),
`f(g(w))`=simplify(f(g(w)));
```

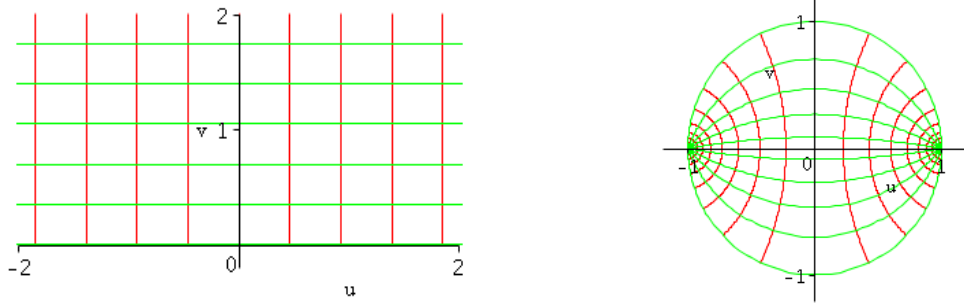
$$z = \ln\left(\frac{-I(1+w)}{-1+w}\right), g(w) = \ln\left(\frac{I+Iw}{1-w}\right)$$

$$g(f(z)) = \ln(e^z), f(g(w)) = w$$

Şimdi $f(z)$ dönüşümü altında yatay şeridin resmini bulalım.

```
>f:='f':z:='z':f:=z->(exp(z)-I)/(exp(z)+I):`f(z)`=f(z);conformal(f(z),
z=-6+I*0.01..6+I*3.14,labels=['u`,`v`],tickmarks=[3,3],grid=[27,10],
numxy=[177,177],scaling=constrained,view=[-1.2..1.2,-1.2..1.2]);
```

$$f(z) = \frac{e^z - I}{e^z + I}$$

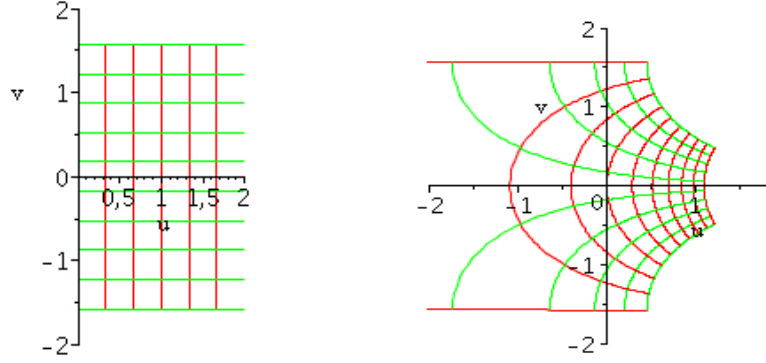


Şekil 4.8

Böylece, $0 < y < \pi$ yatay şeridin görüntüsünün $|w| < 1$ daresi olduğu görülür.

Örnek 4.7.3. $w = \text{Log} z$ dönüşümü; z -düzleminde $A = \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : y = 0, x \leq 0\}$ kümesini, w -düzlemindeki yatay $\{w : -\pi < \text{Im} w < \pi\}$ şeridi üzerine bire-bir olarak resmettiğini gösteriniz.

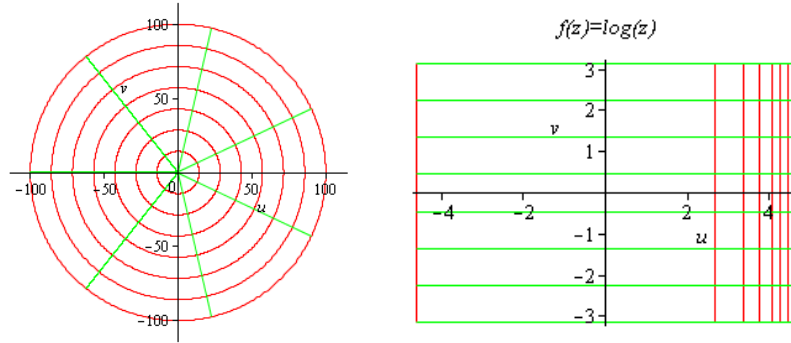
```
> `f(z)=log(z)` ; conformal(log(z),z=0.001-I*Pi/2..3+I*(Pi/2), grid=[10,10],
numxy=[160,160],scaling=constrained,labels=[`u`,`v`],view=[-2..2,-2..2]);
f(z)=log(z)
```



Şekil 4.9

Örnek 4.7.4. $|z| \leq 100$ daresinin $w = \text{Log}z$ dönüşümü altındaki resmini bulunuz.

```
> f:='f': z:='z': f := z -> log(z): conformal(f(Re(z)*exp(I*Im(z))),
z=0.01-I*3.14..100+I*3.14,title=`f(z)=log(z)`,grid=[8,8],numxy=[130,130],
scaling=constrained,labels=[`u`,`v`], tickmarks=[5,5],view=[-4.7..4.7,-3.2..3.2]);
```



Şekil 4.10

Örnek 4.7.5. $w = f(z) = \text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ dönüşümü, $|z| < 1$ birim daresini

$\{w : |\text{Im } w| < \frac{\pi}{2}\}$ yatay şeridi üzerine bire-bir ve konform olarak dönüştürdüğünü gösteriniz.

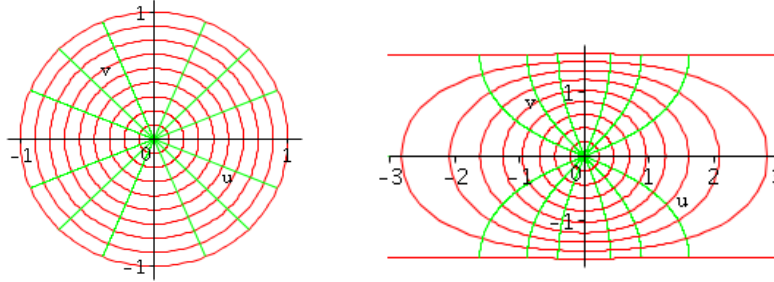
Önceki örneklerde kullanılan yöntemi kullanalım.

```
> f:='f':g:='g':z:='z':Z:='Z':W:='W':Z:='Z':f:=z->log((1+z)/(1-z)):
```



```
sol:=simplify(solve(f(Z)=W,Z)):g:=w->subs(W=w,sol):`f(z)`=f(z),`g(w)`
`=g(w),`g(f(z))`=simplify(g(f(z)));conformal(f(Re(z)*exp(I*Im(z))),
z=0.001..0.999+I*2*Pi,labels=[`u`,`v`],tickmarks=[7,3],grid=[10,17],
numxy=[177,177],scaling=constrained,view=[-3..3,-1.7..1.7]);
```

$$f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), g(w) = \frac{e^w - 1}{e^w + 1}, g(f(z)) = z$$



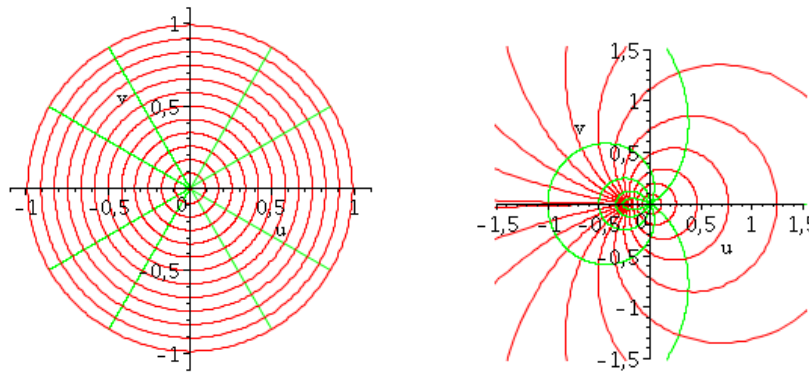
Şekil 4.11

Böylece, $|z| < 1$ birim daüresinin f altındaki görüntüsünün $\{w : |\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}\}$ yatay şeridi olduğu görülür.

Örnek 4.7.6. $f(z) = z/(1-z)^2$ Koebe fonksiyonu altında birim dairenin resmini bulunuz (Goodman 1983).

```
>f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->Z/(1-Z)^2:`f(z)`=f(z);
F:=z->subs(Z=z,f(Z)):conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),
z=0.01..0.99+I*2*Pi,grid=[13,13],numxy=[350,350],
scaling=constrained,labels=[`u`,`v`],view=[-1.5..1.5,-1.5..1.5]);
```

$$f(z) = \frac{Z}{(1-z)^2}$$



Şekil 4.12

Örnek 4.7.7. $w = f(z) = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$ dönüşümü, $|z| < 1$ dairesinin üst yarı düzlemde kalan kısmını, $\{w : \text{Im}(w) > 0\}$ üst yarı düzlemi üzerine konform olarak dönüştürdüğünü gösteriniz.

Önce, $w = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$ fonksiyonunun bire-bir olduğunu göstermek için uygun bir dalda geçerli olan ters fonksiyonunu bulalım.

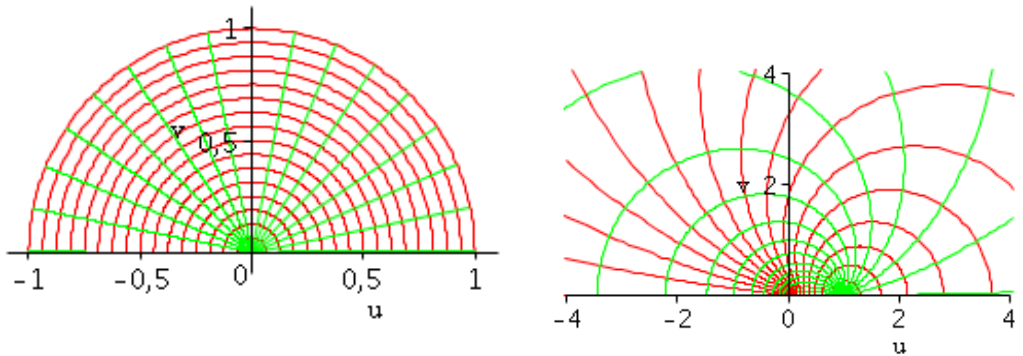
```
>f:='f':z:='z':f:=z->(1+z)^2/(1-z)^2:g:='g':w:='w':W:='W':Z:='Z':
sol:=solve(f(Z)=W,Z):g:=w->subs(W=w,simplify(sol[1])):gfz:=g(f(z)):
gfz:=subs(sqrt((1+z)^2/(1-z)^2)=-(1+z)/(1-z),gfz):gfz:=simplify(gfz):
`w=f(z)`=f(z),`g(w)`=g(w),`g(f(z))`=gfz;
```

$$w=f(z) = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}, \quad g(w) = \frac{1+w+2\sqrt{w}}{-1+w}, \quad g(f(z)) = z$$

Sonra görüntü bölgesini belirleyelim.

```
>f:='f':z:='z':f:=z->(1+z)^2/(1-z)^2:`f(z)`=f(z);
conformal(f(Re(z)*exp(I*Im(z))),z=0.001+I*0.01..0.999+I*3.14,
labels=[`u`,`v`],tickmarks=[5,3],grid=[17,17],numxy=[177,177],
scaling=constrained,view=[-4..4,0..4]);
```

$$f(z) = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$$



Şekil 4.13

Örnek 4.7.8. $w = f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ fonksiyonunun, $|z| < 1$ birim dairesinin üst yarısını $u = 0$, $0 < v \leq 1$ doğru parçası hariç $\text{Im} w > 0$ üst yarı düzlemi üzerine bire-bir olarak dönüştürdüğünü gösteriniz.

Önceki örnekte kullanılan teknikle bire-birliği ve görüntü bölgesini gösterelim.

```
>f:='f':z:='z':f:=z->(z^2-1)^(1/2):g:='g':w:='w':W:='W':Z:='Z':
```

```
sol:=solve((Z^2-1)^(1/2)=W,Z):g:=w->(w^2+1)^(1/2):
```

```
g:=w->subs(W=w,sol[1]):`w=f(z)`=f(z),`g(w)`=g(w),
```

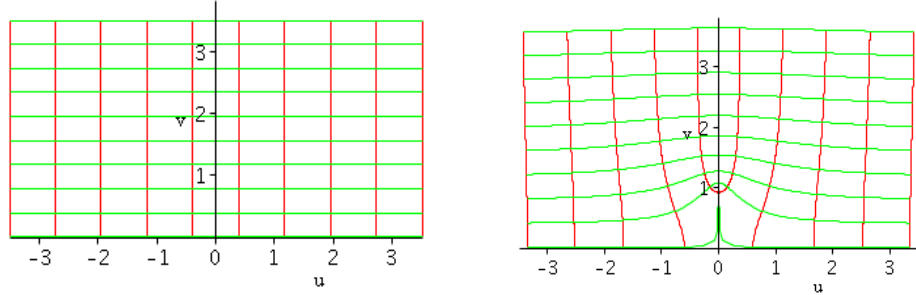
```
`g(f(z))`=simplify(g(f(z)),assume=positive);
```

$$w=f(z) = \sqrt{z^2 - 1}, \quad g(w) = \sqrt{1 + w^2}, \quad g(f(z)) = z$$

```
>f:='f':z:='z':g:='g':z:='z':Z:='Z':f:=z->I*(1-z^2)^(1/2):`f(z)`=f(z);
```

```
conformal(f(z),z=-3.5+I*0.01..3.5+I*3.5,labels=[`u`,`v`],tickmarks=[5,4],  
grid=[10,10],numxy=[177,177],scaling=constrained,view=[-3.5..3.5,0..3.8]);
```

$$f(z) = I \sqrt{1 - z^2}$$

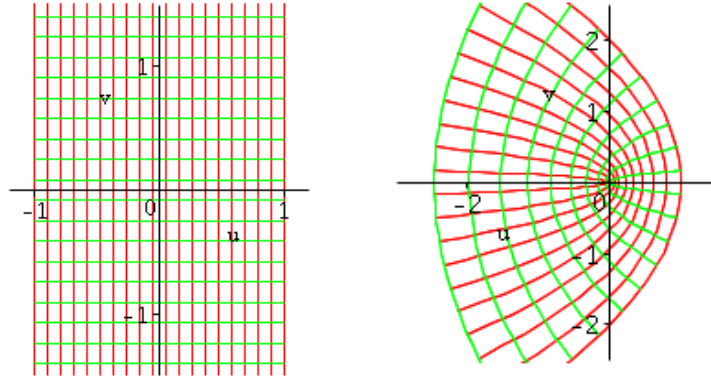


Şekil 4.14

Örnek 4.7.9. $f(z) = z^2$ dönüşümü altında $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \text{ ve } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ kapalı dikdörtgeninin resmini bulunuz.

```
>f:='f':z:='z':f:=z->z^2:`f(z)`=f(z);conformal(f(z),z=-1-I*Pi/2..1+I*Pi/2,  
grid=[20,20],numxy=[30,30],scaling=constrained,labels=[`u`,`v`],  
tickmarks=[3,5],view=[-3..1.5,-2.5..2.5]);
```

$$f(z) = z^2$$

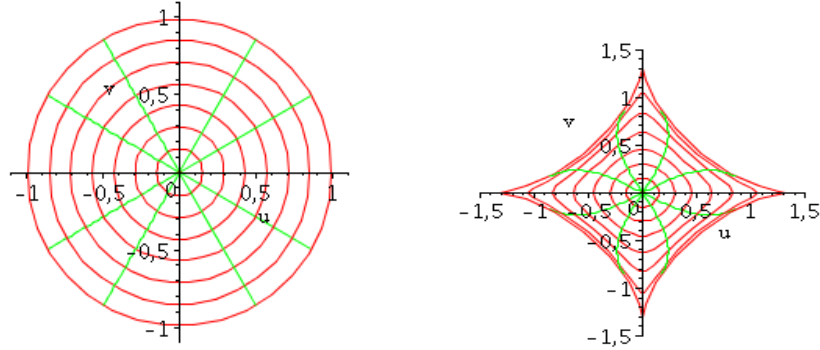


Şekil 4.15

Örnek 4.7.10. $f(z) = z + 1/3\bar{z}^3$ konform olmayan dönüşümü altında kapalı birim dairenin resmini bulunuz (Duren 2004).

```
>f='f':F='F':z='z':f:=z->z+(1/3)*(conjugate(z^3)):`f(z)`=f(z);
F:=z->subs(Z=z,f(Z)):conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),z=0.01..0.99+I*2*Pi,
grid=[8,13],numxy=[35,35], scaling=constrained,labels=[`u`,`v`],
view=[-1.5..1.5,-1.5..1.5]);
```

$$f(z) = z + \frac{1}{3} \bar{z}^3$$



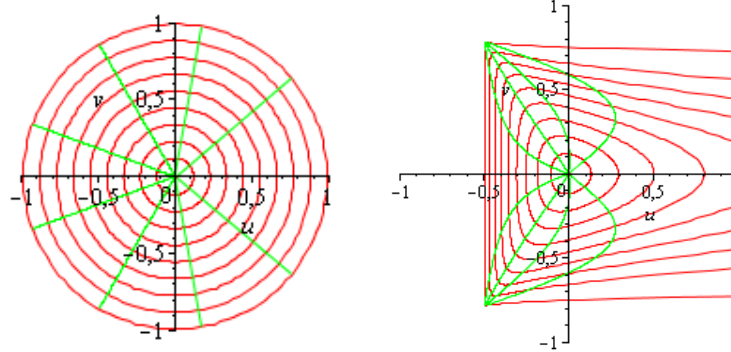
Şekil 4.16

Örnek 4.7.11. $f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right) + \frac{i}{2} \operatorname{Im}\left(\log\frac{1+z}{1-z}\right)$ dönüşümü altında açık birim dairenin resmini bulunuz (Duren 2004).

```
>f='f':F='F':z='z':f:=z->Re(z/(1-z))+I*Im(1/2*log((1+z)/(1-z))):
`f(z)`=f(z);F:=z->subs(Z=z,f(Z)):conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),
z=0.01..0.99+I*2*Pi,grid=[13,20], numxy=[135,135],scaling=constrained,
```

```
labels=['u ','v '],view=[-1..1,-1..1]);
```

$$f(z) = \Re\left(\frac{z}{1-z}\right) + \frac{1}{2} I \operatorname{argument}\left(-\frac{1+z}{-1+z}\right)$$



Şekil 4.17

Örnek 4.7.12. $f(z) = \Re\left(\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right) + i \operatorname{Im}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)$ harmonik Koebe dönüşümü

altında açık birim dairenin resmini bulunuz (Duren 2004).

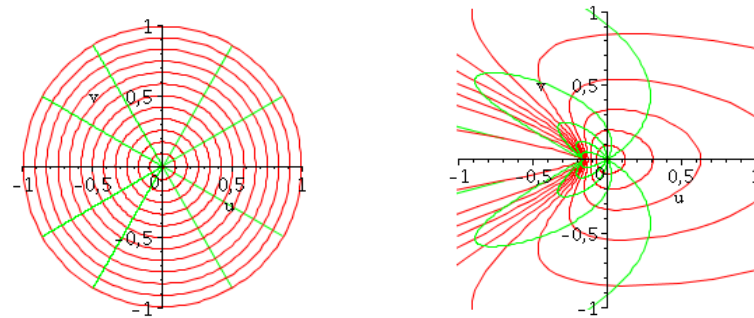
```
>f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->Re((z+(1/3)*z^3)/((1-z)^3))+I*Im(Z/(1-z)^2):
```

```
`f(z)`=f(z);F:=z-> subs(Z=z,f(Z)):conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),
```

```
z=0.01..0.99+I*2*Pi,grid=[13,13], numxy=[135,135],scaling=constrained,
```

```
labels=['u ','v '],view=[-1..1,-1..1]);
```

$$f(z) = \Re\left(\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right) + I \Im\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)$$

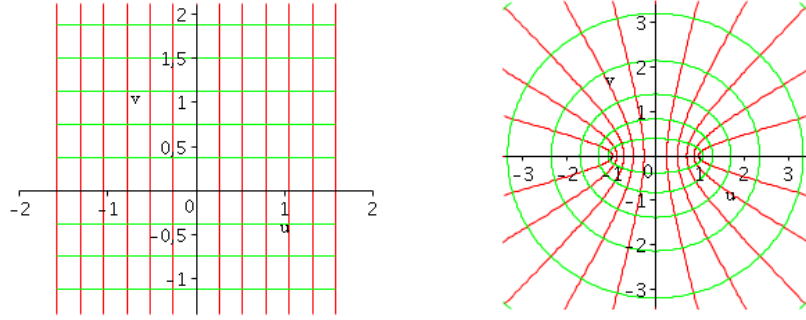


Şekil 4.18

Örnek 4.7.13. $w = f(z) = \sin z$ dönüşümü; $\{z = x + iy : |x| < \frac{\pi}{4}\}$ dikey şeridini, w -düzleminde $u \leq -1, v = 0$ ve $1 \leq u, v = 0$ ışınları hariç bütün kompleks düzlem üzerine bire-bir ve konform olarak dönüştürdüğünü gösteriniz.

```
>f:='f':z:='z':f:=z->sin(z):`f(z)`=f(z);conformal(f(z),z=-Pi/2-
I*2.25..Pi/2+I*2.25,labels=[`u`,`v`],tickmarks=[7,7],grid=[13,13],
numxy=[173,173],scaling=constrained,view=[-3.4..3.4,-3.4..3.4]);
```

$$f(z) = \sin(z)$$

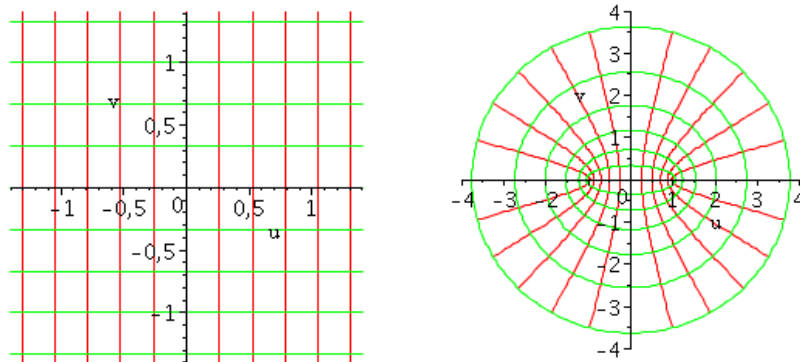


Şekil 4.19

Örnek 4.7.14. $f(z) = \sin z$ dönüşümü altında reel ve imajiner eksnelere paralel doğruların resmini bulunuz.

```
>f:='f':z:='z':f:=z->sin(z):`f(z)`=f(z);conformal(f(z),z=-Pi/2-I*2..Pi/2+I*2,
grid=[13,13],numxy=[119,119],scaling=constrained,
labels=[`u`,`v`],view=[-4..4,-4..4]);
```

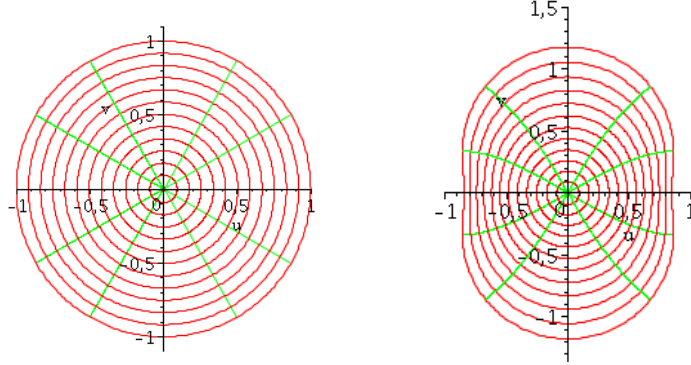
$$f(z) = \sin(z)$$



Şekil 4.20

Örnek 4.7.15. $f(z) = \sin z$ dönüşümü altında $|z| \leq 1$ dairesinin görüntü kümesini bulunuz.

```
>f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->sin(z):`f(z)`=f(z);F:=z->subs(Z=z,f(Z)):
conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),z=0.01..1+I*2*Pi,grid=[13,13],
numxy=[30,30],scaling=constrained,labels=['u`,`v`],view=[-1..1,-1.5..1.5]);
f(z) = sin(z)
```

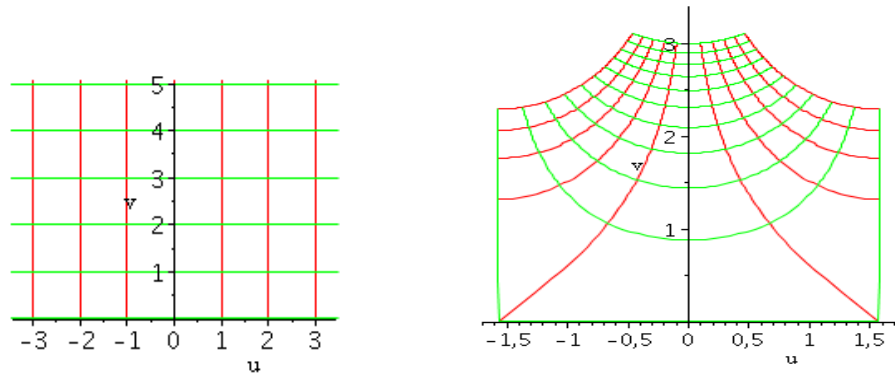


Şekil 4.21

Örnek 4.7.16. $w = f(z) = \arcsin z$ dönüşümünün üst yarı düzlemi $\{w : \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} w \geq 0\}$ yarı sonsuz şerit üzerine konform olarak dönüştürdüğünü gösteriniz.

```
>`f(z)=arcsin(z)`;conformal(arcsin(z),z=-5+I*0.0001..5+I*10,
grid=[11,11],numxy=[101,101],scaling=constrained,labels=['u`,`v`],
view=[-1.7..1.7,0..3.4]);
```

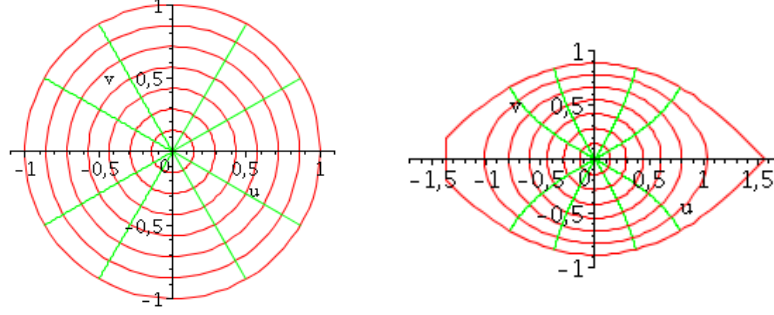
$$f(z) = \arcsin(z)$$



Şekil 4.22

Örnek 4.7.17. $f(z) = \arcsin z$ dönüşümü altında birim çemberin resmini bulunuz.

```
>f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->arcsin(z):`f(z)`=f(z);F:=z->subs(Z=z,f(Z)):
conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),z=0..1+I*2*Pi,scaling=constrained,
grid=[8,13],numxy=[80,80], labels=['u','v'],view=[-1.7..1.7,-1..1]);
f(z)=arcsin(z)
```

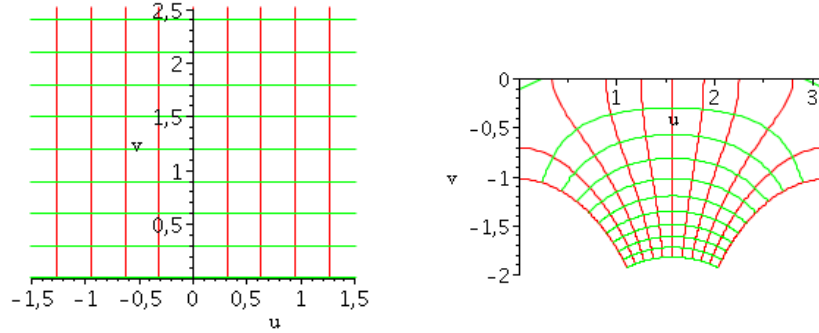


Şekil 4.23

Örnek 4.7.18. $f(z) = \arccos z$ dönüşümü altında üst yarı düzlemindeki eksenlere paralel doğruların resmini bulunuz.

```
>`f(z)=arccos(z)`;conformal(arccos(z),z=-Pi/2+I*0.0001..Pi/2+I*3,
grid=[11,11],numxy=[101,101],scaling=constrained,labels=['u','v'],
view=[0..3.15,-2..0]);
```

$f(z) = \arccos(z)$



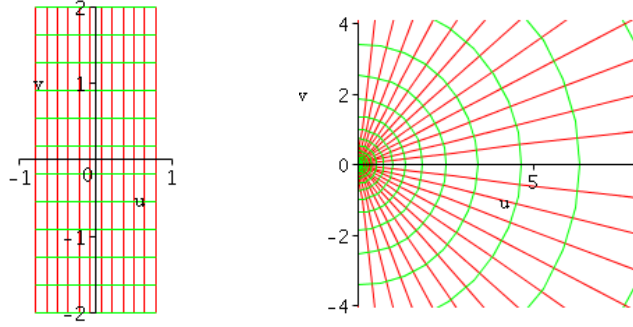
Şekil 4.24

Örnek 4.7.19. $w = \tan z$ dönüşümü; $|x| < \frac{\pi}{4}$ dikey şeridinin $|w| < 1$ dairesi üzerine bire-bir ve konform olarak dönüştürdüğünü gösteriniz.

Bunun için bileşke fonksiyon özelliklerinden faydalanalım. Önce, $f_1(z) = e^{i2z}$ fonksiyonu altında $|x| < \frac{\pi}{4}$ dikey şeridinin görüntüsü bulalım.

```
> z:='z':h:='h':h := z -> exp(I*2*z):`h(z)` = h(z);conformal(h(z),
z=-Pi/4-I*2..Pi/4+I*2, labels=[`u`,`v`], tickmarks=[3,5],grid=[27,27],
numxy=[17,17],scaling=constrained, view=[0..8,-4..4]);
```

$$h(z) = e^{2Iz}$$

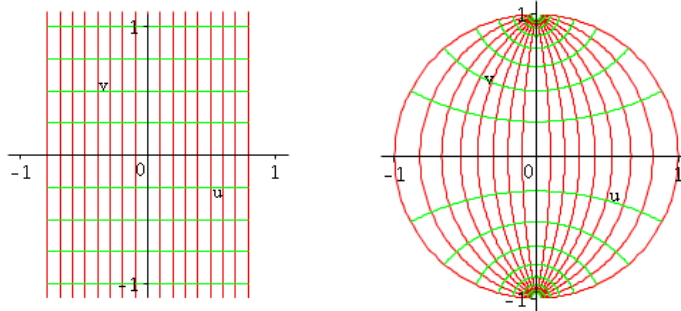


Şekil 4.25

Sonra, elde edilen görüntü bölgesinin $g(z) = \frac{1-z}{1+z}$ dönüşümü altında görüntüsünü bulalım.

```
> g:='g':f:='f':z:='z':f:=z->tan(z):`f(z)` = f(z);
g:=z-> I*(1-exp(I*2*z))/(1+exp(I*2*z)): conformal(f(z),
z=-Pi/4-I*2..Pi/4+I*2, labels=[`u`,`v`], tickmarks=[3,3],grid=[17,17],
numxy=[177,177],scaling=constrained,view=[-1.1..1.1,-1.1..1.1]);
```

$$f(z) = \tan(z)$$

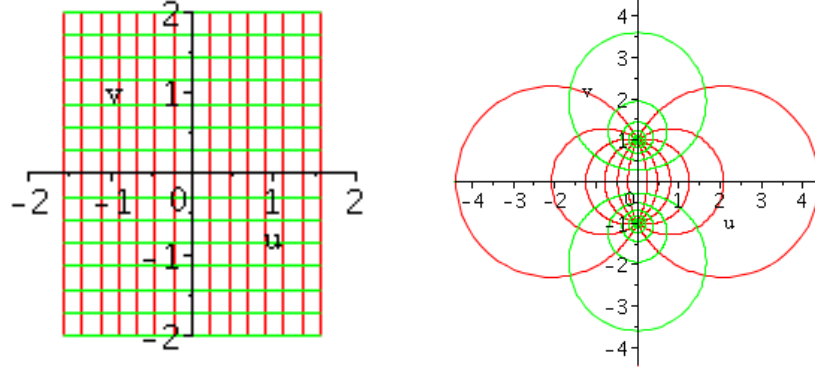


Şekil 4.26

Örnek 4.7.20. $f(z) = \tan z$ dönüşümü altında reel ve imajiner eksenlere paralel doğruların resmini bulunuz.

```
> f:='f':z:='z':f:=z->tan(z):`f(z)`=f(z);conformal(f(z),z=-Pi/2-I*2..Pi/2+I*2,
grid=[15,15],numxy=[250,250],scaling=constrained,labels=['u`,`v`'],
view=[-4.4..4.4,-4.4..4.4])
```

$$f(z) = \tan(z)$$

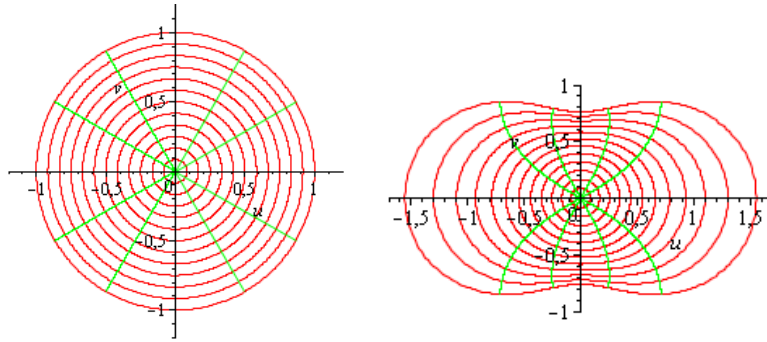


Şekil 4.27

Örnek 4.7.21. $f(z) = \tan z$ dönüşümü altında birim dairenin görüntüsünü bulunuz.

```
> f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->tan(z):`f(z)`=f(z);F:=z->subs(Z=z,f(Z)):
conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),z=0..1+I*2*Pi,grid=[13,13],
numxy=[60,60],scaling=constrained,labels=['u`,`v`'],
view=[-1.7..1.7,-1..1]);
```

$$f(z) = \tan(z)$$



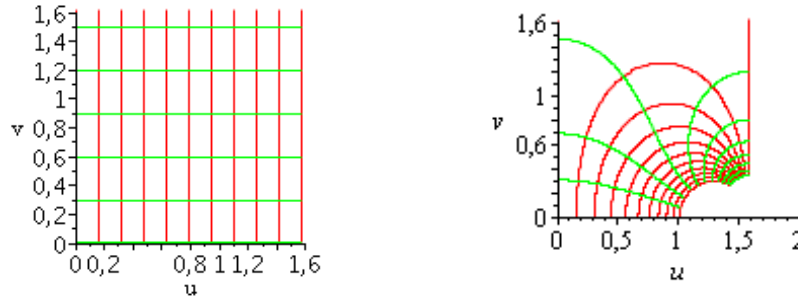
Şekil 4.28

Örnek: 4.7.22. $f(z) = \arctan z$ fonksiyonu altında birinci bölgede eksenlere paralel doğruların resmini bulunuz.

```
> `f(z)=arctan(z)`;conformal(arctan(z),z=0.0001+I*0.0001..1.5706+I*3,
```

```
grid=[11,11], numxy=[101,101],scaling=constrained,
labels=['u','v'],view=[0..2,0..1.6]);
```

$$f(z)=\arctan(z)$$

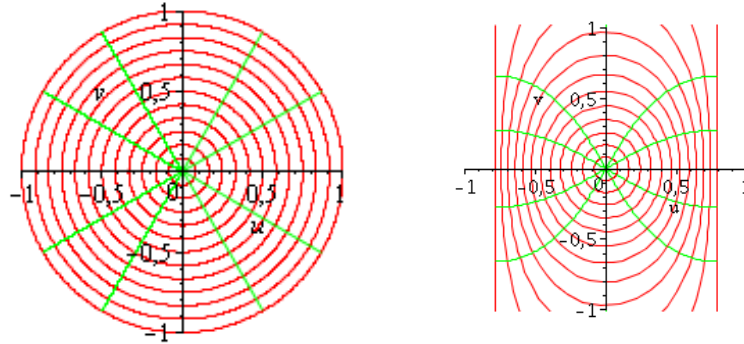


Şekil 4.29

Örnek 4.7.23. $f(z) = \arctan z$ dönüşümü altında birim dairenin resmini bulunuz.

```
>f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->arctan(z):`f(z)`=f(z);F:=z->subs(Z=z,f(Z)):
conformal(F(Re(z)*exp(I*Im(z))),z=0..1+I*2*Pi,grid=[13,13],
numxy=[80,80], scaling=constrained,labels=['u','v'],view=[-1..1,-1..1]);
```

$$f(z)=\arctan(z)$$



Şekil 4.30

5. KOMPLEKS İNTEGRAL

Bu bölümde kompleks fonksiyonların düzlemde eğri boyunca integralinin her türlü hesabında Maple 9 programından faydalanılacak.

5.1. Kompleks İntegral

Tanım 5.1.1. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $u(t)$ ve $v(t)$ reel değişkenli fonksiyonları için

$f(t) = u(t) + iv(t)$ olsun. $\int_a^b f(t)dt$ integrali

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

biçiminde tanımlanır. $a \leq t \leq b$ için $U'(t) = u(t)$ ve $V'(t) = v(t)$ ise

$$\int_a^b f(t)dt = U(b) - U(a) + i (V(b) - V(a))$$

dir.

Örnek 5.1.2. $\int_0^1 (t - i)^3 dt$ integralini hesaplayalım.

`>f:='f':t:='t':u:='u':v:='v':f:=t->(t+I)^3:`f(t)`=evalc(f(t));`

`u:=u->t^3-3*t:v:=v->-3*t^2+1:`u(t)`=u(t),`v(t)`=v(t);`

`Int(u(t)+I*v(t),t)=int(u(t),t)+I*int(v(t),t);defint:=int(u(t),`

`t=0..1)+I*int(v(t),t=0..1):Int(f(t),t=0..1)=defint;`

$$f(t) = t^3 - 3t + I(3t^2 - 1), \quad u(t) = t^3 - 3t, \quad v(t) = -3t^2 + 1$$

$$\int (t^3 - 3t + I(-3t^2 + 1)) dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + I(-t^3 + t)$$

$$\int_0^1 (t + I)^3 dt = -\frac{5}{4}$$

Şimdi integrali doğrudan hesaplayalım.

`>f:='f':g:='g':t:='t':T:='T':f:=t->(t+I)^3:g:=t->subs(T=t, int(f(T),T)):`

``g(t)`=`,Int(f(t),t)=g(t);`g(1)`=g(1),`g(0)`=g(0),`

``g(1)-g(0)`=g(1)-g(0);defint := int(f(t), t=0..1):Int(f(t),t=0..1) = defint;`

$$g(t) = \int (t + I)^3 dt = \frac{1}{4} (t + I)^4$$

$$g(1) = -1, g(0) = \frac{1}{4}, g(1) - g(0) = -\frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 (t + I)^3 dt = -\frac{5}{4}$$

Örnek 5.1.3. $\int_0^{\pi/2} e^{t+it} dt$ integralini hesaplayınız.

```
>f:='f': t:='t':u:='u':v:='v':f:=t->exp(t+I*t):`f(t)`=evalc(f(t));
u:=u->exp(t)*cos(t):v:=v->exp(t)*sin(t):`u(t)`=u(t),`v(t)`=v(t);
Int(u(t)+I*v(t),t) = int(u(t),t) + I*int(v(t),t);defint:=int(u(t),
t=0..Pi/2)+I*int(v(t),t=0..Pi/2):Int(f(t),t=0..pi/2)=defint;
```

$$f(t) = e^t \cos(t) + I e^t \sin(t), \quad u(t) = e^t \cos(t), \quad v(t) = e^t \sin(t)$$

$$\int (e^t \cos(t) + I e^t \sin(t)) dt = \frac{1}{2} e^t \cos(t) + \frac{1}{2} e^t \sin(t) + I \left(-\frac{1}{2} e^t \cos(t) + \frac{1}{2} e^t \sin(t) \right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{t+It} dt = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\pi} - \frac{1}{2} + I \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{2} \right)$$

5.2. Yol Boyunca İntegral

Tanım 5.2.1. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna kompleks düzleminde bir *eğri* (yol), $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırayla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları denir. Eğer $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise eğriye *kapalı eğri*, sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa eğriye *basit eğri* adı verilir. Bazen basit eğrilere *Jordan eğrisi* de denir. Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ eğrisine *diferansiyellenebilir eğri* denir. Diferansiyellenebilir bir γ eğrisi için $\gamma'(t) \neq 0$ ise, γ eğrisine *düzgün eğri* denir. Eğer γ eğrisi $[a, b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç, diferansiyellenebiliyor ve bu noktalarda $\gamma(t)$ fonksiyonunun sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar γ' nün bu

noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse γ eğrisine parçalı diferansiyellenebilir eğri denir.

Kompleks düzlemde bir eğri

$$C : \gamma(t) = x(t) + iy(t); a \leq t \leq b$$

biçiminde parametrik olarak verilebilir. Eğrinin diferansiyellenebilir olması durumunda

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t); a \leq t \leq b$$

dir.

$$-C : \gamma(-t) = x(-t) + iy(-t); -b \leq t \leq -a$$

eğrisine C eğrisinin ters eğrisi denir ve $-C$ ile gösterilir.

Örnek 5.2.2. $-1+i$ noktası ile $3-i$ noktasını birleştiren yolunun parametrik ifadesini bulunuz.

$$\begin{aligned} > t := 't': x0 := 'x0': x1 := 'x1': y0 := 'y0': y1 := 'y1': z := 'z': Z := 'Z': Z3 := 'Z3': \\ z0 := 1+I: z1 := 3-I: x0 := \text{Re}(z0): y0 := \text{Im}(z0): x1 := \text{Re}(z1): y1 := \text{Im}(z1): \\ Z := t \rightarrow x0 + (x1-x0)*t + I*(y0+(y1-y0)*t): z(t) = Z(t); \\ z(t) = 1 + 2 t + I (1 - 2 t) \end{aligned}$$

Tanım 5.2.3. C kompleks düzlemde parçalı düzgün bir yol, $f(z)$ de C eğrisini bulunduran bölgede tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $f(z)$ fonksiyonunun C boyunca kompleks integrali,

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 5.2.4. C , $a=0$ noktasını $b=2+i\frac{\pi}{4}$ noktasına birleştiren yol olmak üzere

$\int_C e^z dz$ integralini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} > f := 'f': F := 'F': g := 'g': t := 't': T := 'T': z := 'z': z1 := 'z1': f := z \rightarrow \exp(z): \\ F := t \rightarrow \exp((2 + I*Pi/4)*t): a := 0: b := 2+I*Pi/4: z := t \rightarrow a+(b-a)*t: \\ `C: z(t)` = z(t); F(t) = evalc(F(t)): z1 := t \rightarrow \text{subs}(T=t, \text{diff}(z(T), T)): \\ \text{Int}(f(z), z=C..)` `)=Int(F(t)*diff(z(t),t),t=0..1); \end{aligned}$$

g:=t->subs(T=t,int(F(T)*z1(T),T)):`g(t)`=g(t):g1:=g(1):g0:=g(0):
 Int(f(z),z=C..` `)=g1-g0:Int(f(z),z=C..` `)=evalc(g1-g0);

$$C: z(t) = \left(2 + \frac{1}{4} I \pi \right) t$$

$$\int_C e^z dz = \int_0^1 e^{\left(2 + \frac{1}{4} I \pi \right) t} \left(2 + \frac{1}{4} I \pi \right) dt$$

$$\int_C e^z dz = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2} I e^2 \sqrt{2}$$

Örnek 5.2.5. C , merkezi $z_0 = 2$ ve yarıçapı 1 olan çemberin üst yarısı ise $\int_C \frac{1}{z-2} dz$

integralini hesaplayınız.

> dz := 'dz':f:='f':F:='F':g:='g':t:='t':T:='T':z:='z':Z:='Z':z1:='z1':
 f:=z->1/(z-2):`f(z)`=f(z):z:=t->2+exp(I*t):`C: z(t)`=z(t);
 z1:=t->subs(T=t,diff(z(T),T)):`dz=z'(t)dt`=z1(t),`dt`;
 Int(f(z),z=C..` `)=Int(f(z(t))*diff(z(t),t),t=0..pi);
 g:=t->simplify(subs(T=t,int(f(z(T))*z1(T),T))):`g(t)`=g(t):g1:=g(Pi):
 g0:=g(0):`g(Pi)-g(0)`=expand(g1-g0):Int(f(z),z=C..` `)=expand(g1-g0);

$$C: z(t) = 2 + e^{I t}, \quad dz = z'(t) dt = I e^{I t}, dt$$

$$\int_C \frac{1}{z-2} dz = \int_0^\pi I dt, \quad \int_C \frac{1}{z-2} dz = I \pi$$

Örnek 5.2.6. C yolu $x = y^2 + 2y$ parabolünün $(-1,-1)$ noktası ile $(3,1)$ noktası

arasında kalan parçası olmak üzere $\int_C \bar{z} dz$ integralini hesaplayınız.

>dz:= 'dz':f:='f':F:='F':g:='g':t:='t':T:='T':z:='z':Z:='Z':z1:='z1':
 f:=z->conjugate(z):z:=t->t^2+2*t+I*t:`C:z(t)`=z(t);
 `f(z(t))`=evalc(f(z(t))):z1:=t->subs(T=t,diff(z(T),T)):
 Int(f(z),z=C..` `)=Int(expand(evalc(f(z(t))*z1(t))),t=-1..1);
 g:=t->simplify(subs(T=t,int(evalc(f(z(T))*z1(T)), T))):

```
`g(t)` = evalc(g(t)):g1:=g(1):g0:=g(-1):`g(1)-g(-1)` =
expand(g1-g0):Int(f(z),z=C..` `)=expand(g1-g0);
```

$$C: z(t) = t^2 + 2t + I t$$

$$\int_C \bar{z} dz = \int_{-1}^1 (2t^3 + 6t^2 + 5t - I t^2) dt$$

$$\int_C \bar{z} dz = 4 - \frac{2}{3} I$$

Örnek 5.2.7. C , -1 den $-1+i$ noktasına, $-1+i$ den $1+i$ noktasına, $1+i$ den 1 noktasına giden yol olmak üzere $\int_C \bar{z} dz$ integralini hesaplayınız.

```
> t:='t':x0:='x0':x1:='x1':y0:='y0':y1:='y1':z:='z':z0:='z0':z1:='z1':
Z1:='Z1':Z2:='Z2':Z3:='Z3':z0:=-1:z1:=-1+I:x0:=Re(z0):y0:=Im(z0):
x1:=Re(z1):y1:=Im(z1):Z1:=x0+(x1-x0)*t+I*(y0+(y1-y0)*t):
z0:=-1+I:z1:=1+I: x0:=Re(z0):y0:=Im(z0): x1:=Re(z1):y1:=Im(z1):
Z2:=x0+(x1-x0)*t+ I*(y0+(y1-y0)*t):z0:=1+I:z1:=1:x0:=Re(z0):
y0:=Im(z0):x1:=Re(z1):y1:=Im(z1):Z3:=x0+(x1-x0)*t+
I*(y0+(y1-y0)*t):C[1],z[1](t)=Z1;C[2], z[2](t)=Z2;C[3],z[3](t)=Z3;
C1, z1(t) = -1 + I t
C2, z2(t) = 2 t - 1 + I
C3, z3(t) = 1 + I (1 - t)
```

```
> f:='f':F:='F':g:='g':t:='t':z:='z':f:=z->conjugate(z):
F(z[1](t))= evalc(f(Z1)):diff(z[1](t),t)=evalc(diff(Z1,t)):
w1:=evalc(f(Z1)*diff(Z1,t)):F(z[1](t))*diff(z[1](t),t)=w1:
F(z[2](t))=evalc(f(Z2)),diff(z[2](t),t)=evalc(diff(Z2,t)):
w2:=evalc(f(Z2)*diff(Z2,t)):F(z[2](t))*diff(z[2](t),t)=w2:
F(z[3](t))=evalc(f(Z3)),diff(z[3](t),t)=evalc(diff(Z3,t)):
w3:=evalc(f(Z3)*diff(Z3,t)): F(z[3](t))*diff(z[3](t),t)=w3:
s1:=int(w1,t): Int(F(z[1](t))*diff(z[1](t),t),t)=s1: s2:=int(w2,t):
Int(F(z[2](t))*diff(z[2](t),t),t)=s2:s3:=int(w3,t):
Int(F(z[3](t))*diff(z[3](t),t),t)=s3:s:=int(w1,t)+int(w2,t)+int(w3,t):
Int(F(z(t))*diff(z(t),t),t)=s:z1:='z1':z2:='z2':z3:='z3':
S1:=Int(w1,t=0..1):s1:=int(w1,t=0..1):Int(F(z[1](t))*diff(z[1](t),t),t=0..1),
`= ` ,S1=s1;S2:=Int(w2,t=0..1):s2:=int(w2,t=0..1):
```


$\int_0^1 (F(z_1(t)) \cdot \frac{d}{dt} z_1(t)) dt = \int_0^1 0 dt = 0$
 $\int_0^1 (F(z_2(t)) \cdot \frac{d}{dt} z_2(t)) dt = \int_0^1 0 dt = 0$
 $\int_0^1 (F(z_3(t)) \cdot \frac{d}{dt} z_3(t)) dt = \int_0^1 0 dt = 0$
 $\int_0^1 (F(z(t)) \cdot \frac{d}{dt} z(t)) dt = \int_0^1 0 dt = 0$

$$\int_0^1 F(z_1(t)) \left(\frac{d}{dt} z_1(t) \right) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

$$\int_0^1 F(z_2(t)) \left(\frac{d}{dt} z_2(t) \right) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

$$\int_0^1 F(z_3(t)) \left(\frac{d}{dt} z_3(t) \right) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

$$\int_0^1 F(z(t)) \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

$$\int_C \bar{z} dz = 0$$

5.3. Cauchy Teoremi

Basit kapalı C bir eğrisi düzlemi iki bölgeye ayırdığını gördük. Bu bölgelerden biri sınırlı olup, C nin *iç bölgesi* olarak adlandırılır. Diğeri ise sınırsızdır ve C nin *dış bölgesi* olarak adlandırılır. Bu sonuç, Jordan Eğrisi Teoremi olarak bilinir [Başkan 1996].

Bir D bölgesi bağlantılı açık bir kümedir. Özellikle, eğer z_1 ve z_2 , D de herhangi iki nokta ise; bu noktalar, tamamen D içinde bulunan bir eğri ile birleştirilebilir. Bir D bölgesinde yer alan herhangi basit kapalı bir C yolunun *iç bölgesi* D de kalıyorsa D bölgesine basit bağlantılıdır denir . Diğeri bir deyişle, basit bağlantılı bir bölgede "delik" yoktur. Basit bağlantılı olmayan bölgeye katlı *bağlantılı bölge* denir. Basit kapalı bir C eğrisi

$$C : z(t) = x(t) + iy(t); \quad a \leq t \leq b$$

parametrik ifadesiyle verilmiş olsun. Eğer C , saat yönünün tersi yönünde yönlendirilmiş ise *pozitif* yönlü, aksi takdirde *negatif* yönlüdür. Eğer C pozitif yönlü ise, $-C$ negatif yönlüdür.

Teorem 5.3.1. (Cauchy Teoremi). $f(z)$; basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer C , D bölgesinde basit kapalı bir yol ise $\int_C f(z)dz=0$ dir (Mathews 2001).

Örnek 5.3.2. C eğrisi $|z|=1$ birim çemberi olsun. Cauchy Teoremi gereği

$$\int_C e^z dz = 0 \quad \text{ve} \quad \int_C \cos z dz = 0,$$

olduğunu gerçekleyiniz.

Önce $\int_C e^z dz = 0$ olduğunu hesaplayarak görelim.

```
> dz := 'dz':f:='f':F:='F':g:='g':t:='t':T:='T':z:='z':Z:='Z':z1:='z1':
f:=z->exp(z):`f(z)`=f(z);z:=t->exp(I*t):`C:z(t)`=z(t);`f(z(t))`=f(z(t)):
z1:=t->subs(T=t,diff(z(T),T)):Int(f(z),z=C..` `)=Int(f(z(t))*z1(t),
t=0..2*pi);g:=t->simplify(subs(T=t,int(f(z(T))*z1(T),T)):g1:=
g(2*pi):g0:=g(0):`g(t)`=g(t),`g(2*pi)-g(0)`=expand(g1-g0);
Int(f(z),z=C..` `)=expand(g1-g0);
```

$$f(z) = e^z, \quad C: z(t) = e^{It}, \quad \int_C e^z dz = \int_0^{2\pi} I e^{e^{It}} e^{It} dt$$

$$g(t) = e^{e^{It}}, \quad g(2\pi) - g(0) = 0, \quad \int_C e^z dz = 0$$

İkinci olarak $\int_C \cos z dz = 0$ olduğunu gösterelim.

```
> dz:= 'dz':f:='f':F:='F':g:='g':t:='t':T:='T':z:='z':Z:='Z': f:=z->cos(z):
z1:='z1':z:=t->exp(I*t):z1:=t->subs(T=t,diff(z(T),T)):
Int(f(z),z=C..` `)=Int(f(z(t))*z1(t),t=0..2*pi); g1:=g(2*pi):
g:=t->simplify(subs(T=t,int(f(z(T))*z1(T),T)): g0:=g(0):`g(t)`=g(t),
`g(2*pi)-g(0)`=expand(g1-g0); Int(f(z),z=C..` `)=expand(g1-g0);
```

$$\int_C \cos(z) dz = \int_0^{2\pi} I \cos(e^{It}) e^{It} dt$$

$$g(t) = \sin(e^{It}), \quad g(2\pi) - g(0) = 0$$

$$\int_C \cos(z) dz = 0$$

Şimdi, daha karmaşık bir kapalı yol üzerinden integraller ile hesaplanması kolay integralleri değiştirebilmek istiyoruz.

Teorem 5.3.3 C_1 ve C_2 pozitif olarak yönlendirilmiş basit kapalı iki eğri ve C_1 , C_2 eğrisinin iç bölgesinde kalsın. Eğer f , C_1 , C_2 ve bu ikisi arasında kalan bölgeyi içine alan bir D bölgesinde analitik ise

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

olur (Mathews 2001).

Örnek 5.3.4. C , basit, kapalı, pozitif olarak yönlendirilmiş bir eğri ve z_0 bu eğrinin iç bölgesinde sabit bir nokta olsun. Bu takdirde

$$(a) \int_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \quad (b) n \neq 1 \text{ tamsayısı için } \int_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Teorem 5.3.3 gereği $\int_C \frac{1}{z-z_0} dz = \int_{|z-z_0|=1} \frac{1}{z-z_0} dz$ olduğundan, $\int_{|z-z_0|=1} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$

olduğunu gösterelim.

$$z = z_0 + e^{it}, \quad dz = i e^{it} dt, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{e^{it}}, \quad C: z(t) = z_0 + e^{it}$$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

$$g(t) = \int_0^t i dt = i t, \quad g(2\pi) - g(0) = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}, \quad C: z(t) = z_0 + e^{it}$$

$$\int_C \frac{1}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} i dt$$

$$g(t) = i t, \quad g(2\pi) - g(0) = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$

Benzer şekilde $\int_C \frac{1}{(z-z_0)^5} dz = 0$ olduğunu gösterelim

```
> dz := 'dz':f := 'f':F := 'F':g := 'g':t := 't':T := 'T':z := 'z':Z := 'Z':z0 := 'z0':z1 := 'z1':
f := z -> 1/(z-z0)^5:z := t -> z0 + exp(I*t):z1 := t -> subs(T=t, diff(z(T), T)):
Int(f(z), z=C..` `) = Int(f(z(t))*z1(t), t=0..2*pi):g0 := g(0):
Int(f(z), z=C..` `) = Int(simplify(f(z(t))*z1(t)), t=0..2*pi):
g := t -> simplify(subs(T=t, int(f(z(T))*z1(T), T))):g1 := g(2*pi):` g(t) ` = g(t),
` g(2*pi) - g(0) ` = expand(g1 - g0):Int(f(z), z=C..` `) = expand(g1 - g0):
```

$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^5} dz = \int_0^{2\pi} \frac{I}{(e^{It})^4} dt$$

$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^5} dz = \int_0^{2\pi} I e^{-4It} dt$$

$$g(t) = -\frac{1}{4} e^{-4It}, g(2\pi) - g(0) = 0$$

$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^5} dz = 0$$

Örnek 5.3.5. $C: |z|=2$ olmak üzere $\int_C \frac{2z}{z^2+2} dz = 4\pi i$ olduğunu gösteriniz.

```
> f := 'f':F := 'F':z := 'z':f := z -> 2*z/(z^2+2):Zn := sort([solve(denom(f(z))=0,
z)]):Rn := array(1..nops(Zn)):Sn := array(1..nops(Zn)):F1 := 0:
for i from 1 to nops(Zn) do if i=1 then p:=1 fi; if 1<i and Zn[i-1]=Zn[i] then
p:=p+1 else p:=1 fi; Rn[i] := residue((z-Zn[i])^(p-1)*f(z), z=Zn[i]);
Sn[i] := Rn[i]/(z-Zn[i])^p; F1 := F1 + Rn[i]/(z-Zn[i])^p; od:
Z := array(1..nops(F1)):R := array(1..nops(F1)):S := array(1..nops(F1)):
p:=1: for i from 1 to nops(Zn) do if Sn[i]<>0 then Z[p] := Zn[i]; R[p] := Rn[i];
S[p] := Sn[i]; p:=p+1 fi; od: ` f(z) ` = f(z); ` f(z) ` = F1; print(` aykirimliklar: `, Z);
```

$$f(z) = \frac{2z}{z^2+2} \quad f(z) = \frac{1}{z-I\sqrt{2}} + \frac{1}{z+I\sqrt{2}}$$

$$\text{aykirimliklar}; \left[I\sqrt{2} \quad -I\sqrt{2} \right]$$

Bu aykırılıklardan hangilerinin $C:|z|=2$ çemberinin içinde kaldığını gösterelim.

```
> print(z[1]=Z[1], abs(z[1])<2, evalb(evalf(abs(Z[1]))<2));
print(z[2]=Z[2], abs(z[2])<2, evalb(evalf(abs(Z[2]))<2));
```

$$z_1 = I\sqrt{2}, |z_1| < 2, \text{ true}$$

$$z_2 = -I\sqrt{2}, |z_2| < 2, \text{ true}$$

Şimdi integrali hesaplayalım.

```
> val:=2*Pi*I*numer(S[1])+2*Pi*I*numer(S[2]):Int(f(z),z=C..`)=val;
```

$$\int_C \frac{2z}{z^2+2} dz = 4 I \pi$$

elde edilir.

Örnek 5.3.6. $C:|z-i|=1$ çemberi olmak üzere, $\int_C \frac{2z}{z^2+2} dz$ integralini hesaplayınız.

```
> f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->2*z/(z^2+2):
Zn:=sort([solve(denom(f(z))=0,z)]):Rn:=array(1..nops(Zn)):
Sn:=array(1..nops(Zn)):F1:=0:for i from 1 to nops(Zn) do if i=1 then p:=1
fi;if 1<i and Zn[i-1]=Zn[i] then p:=p+1 else p:=1 fi;
Rn[i]:=residue((z-Zn[i])^(p-1)*f(z), z=Zn[i]);
Sn[i]:=Rn[i]/(z-Zn[i])^p;F1:=F1+Rn[i]/(z-Zn[i])^p;od:
Z:=array(1..nops(F1)):R:=array(1..nops(F1)):S:=array(1..nops(F1)):p:=1:
for i from 1 to nops(Zn) do if Sn[i]<>0 then Z[p]:=Zn[i]; R[p]:=Rn[i];
S[p]:=Sn[i];p:=p+1 fi;od: `f(z)` =F1;print(z[1]=Z[1],abs(z[1]-I)<2,
evalb(evalf(abs(Z[1]-I))<1));print(z[2]=Z[2],abs(z[2]-I)<2,
evalb(evalf(abs(Z[2]-I))<1));val:=2*Pi*I*numer(S[1]):
Int(f(z),z=C..`)=val;
```

$$f(z) = \frac{1}{z - I\sqrt{2}} + \frac{1}{z + I\sqrt{2}}$$

$$z_1 = I\sqrt{2}, |z_1 - I| < 2, \text{ true}$$

$$z_2 = -I\sqrt{2}, |z_2 - I| < 2, \text{ false}$$

$$\int_C \frac{2z}{z^2 + 2} dz = -2 I \pi$$

5.4. İntegralin Temel Teoremleri

Teorem 5.4.1. $f(z)$ basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer z_0 , D de sabit bir nokta ve C , başlangıç noktası z_0 ve bitiş noktası z olan D de herhangi bir yol ise

$$F(z) = \int_C f(w)dw = \int_{z_0}^z f(w)dw$$

fonksiyonu D de iyi tanımlı ve analitik olup $F'(z) = f(z)$ dir (Mathews 2001).

Teorem 5.1.4 de $z = z_1$ alınır, bir analitik fonksiyonunun belirli integralinin hesaplanmasında kullanılışlı olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.4.2. $f(z)$ basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer z_0 ve z_1 , D de C eğrisi ile birleştirilen herhangi iki nokta ise bu takdirde F, f fonksiyonunun herhangi bir anti türevi olmak üzere

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

dir.

Örnek 5.4.3. $\int_4^{8+6i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$ integralini hesaplayınız.

```
> f:='f':F:='F':g:='g':z:='z':f:=z->1/(2*z^(1/2)):a:=4:b:=8+6*I:
g:=z->subs(Z=z,int(f(Z),Z)):`a`=a,`b`=b;`g(z)`=`,Int(f(z),z)=g(z);
`g(b)-g(a)`=g(b)-g(a):`g(b)-g(a)`=evalc(g(b)-g(a)),
`g(b)-g(a)`=simplify(g(b)-g(a),power);Int(f(z),z=a..b)=int(f(z),z=a..b);
```

$$a = 4, b = 8 + 6 I$$

$$g(z) = \int \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt{z}$$

$$g(b) - g(a) = 3 + I - \sqrt{4}, \quad g(b) - g(a) = 1 + I$$

$$\int_4^{8+6I} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = 1 + I$$

Örnek 5.4.4. $\int_1^i \cos z dz$ belirli integralini hesaplayınız..

```
> f:='f':F:='F':g:='g':z:='z':f:=z->cos(z):a:=1:b:=I:
g:=z->subs(Z=z,int(f(Z),Z)):`a`=a,`b`=b;`g(z)`=`Int(f(z),z)=g(z);
`g(b)-g(a)`=g(b)-g(a);`g(b)-g(a)`=evalc(g(b)-g(a));
Int(f(z),z=a..b)=int(f(z), z=a..b);
```

$$a = 1, \quad b = I$$

$$g(z) = \int \cos(z) dz = \sin(z)$$

$$g(b) - g(a) = \sin(I) - \sin(1)$$

$$g(b) - g(a) = -\sin(1) + I \sinh(1)$$

$$\int_1^I \cos(z) dz = -\sin(1) + I \sinh(1)$$

Örnek 5.4.5. C eğrisi $|z|=1$ birim çemberi olmak üzere, $\int_C \frac{1}{z} dz$ integralini

hesaplayınız.

```
> dz:='dz':f:='f':F:='F':t:='t':T:='T':z:='z':z1:='z1':f:=z->1/z:
z:=t->exp(I*t):`C:z(t)`=z(t);z1:=t->subs(T=t,diff(z(T),T)):
`dz=z'(t)dt`=z1(t),`dt`;Int(f(z),z=C..` `)=Int(f(z(t))*z1(t),t=0..2*pi);
g:=t->simplify(subs(T=t,int(f(z(T))*z1(T), T)):g1:=g(2*Pi):g0:=g(0):
`g(z)`=g(t),`g(2*Pi)-g(0)`=expand(g1-g0);
Int(f(z),z=C..` `)=expand(g1-g0);
```

$$C: z(t) = e^{It}, \quad dz = z'(t) dt = I e^{It}, dt$$

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} I dt$$

$$g(z) = I t, g(2\pi i) - g(0) = 2 I \pi$$

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2 I \pi$$

5.5. Analitik Fonksiyonlar için İntegral Temsili

Bu kısımda, basit bağlantılı bir bölgede analitik bir fonksiyonunun bir noktada ki değeri veya n . türevinin değeri, onu çevreleyen basit kapalı bir eğri boyunca integral yardımıyla belirlenebileceği gösterilecek. Bu durum, bazı integralinin hesaplanmasında uygun bir araç olarak kullanılacaktır.

Teorem 5.5.1. (Cauchy İntegral Formülü) f , basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik ve C, D de pozitif olarak yönlendirilmiş basit kapalı bir yol olsun. Eğer z_0, C içinde bir nokta ise

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (6.1)$$

dir (Mathews 2001).

Cauchy İntegral Formülü, basit bağlantılı bir bölgede analitik f fonksiyonu, bölge içinde yer alan basit kapalı pozitif yönlü C eğrisi ve z_0 noktası C eğrisi içinde olmak üzere $\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ integralinin hesaplanmasına imkan tanır. Gerçekten (6.1) bağıntısından

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

elde edilir.

Örnek 5.5.2. C pozitif yönlendirilmiş $|z|=2$ çemberi olmak üzere $\int_C \frac{e^z}{z-1} dz$ integralini hesaplayınız.

```
>f:='f':F:='F':z:='z':Z:='Z':Zn:='Zn':w:=exp(z)/(z-1):
Zn:=sort([solve(denom(w)=0,z)]):` Aykırılık `,z[0]=Zn[1];
```


f:=Z->subs(z=Z,w*(z-Zn[1])):'f(z)'=f(z),'f(z0)'=f(Zn[1]);
val:=2*Pi*I*f(Zn[1]):Int(w ,z=C..'')=val,'=2 Pi I f(z0)';

Aykirilik $z_0 = 1$ $f(z) = e^z$, $f(z_0) = e$

$$\int_C \frac{e^z}{z-1} dz = 2 I \pi e, = 2 Pi I f(z_0)$$

Örnek 5.5.3. C:|z|=1 olmak üzere $\int_C \frac{\sin z}{4z+\pi} dz$ integralini hesaplayınız.

> f:='f':F:='F':z:='z':Z:='Z':Zn:='Zn':w:=sin(z)/(4*z+Pi):
Zn:=sort([solve(denom(w)=0,z)]):'Aykirilik',z[0]=Zn[1],'noktasinda';
'Aykirilik',z[0]=evalf(Zn[1]):f:=Z->subs(z=Z,simplify(w*(z-Zn[1]))):
'f(z)'=f(z),'f(z0)'=evalc(f(Zn[1]));val:=2*Pi*I*f(Zn[1]):
Int(w ,z=C..'')=val,'=2 Pi I f(z0)';

Aykirilik $z_0 = -\frac{1}{4} \pi$, noktasinda

$$f(z) = \frac{1}{4} \sin(z), f(z_0) = -\frac{1}{8} \sqrt{2}$$

$$\int_C \frac{\sin(z)}{4z+\pi} dz = -\frac{1}{4} I \pi \sqrt{2}, = 2 Pi I f(z_0)$$

Örnek 5.5.4. C:|z|=1 olmak üzere $\int_C \frac{e^{i\pi z}}{2z^2-5z+2} dz$ integralini hesaplayınız.

> f:='f':F:='F':z:='z':Z:='Z':Zn:='Zn':w:=exp(I*Pi*z)/(2*z^2-5*z+2):
Zn:=sort([solve(denom(w)=0,z)]):'aykiriliklar:',Zn,'C icindeki
aykirilik',z[0]=Zn[1];f:=Z->subs(z=Z,simplify(w*(z-Zn[1]))):'f(z)'=f(z);
d3:=diff(f(z),z\$3):f3:=Z->subs(z=Z,d3):'f'''(z)'=f3(z);
'f'''(z0)'=f3(Zn[1]):Int(w ,z=C..'')=val,'=2 Pi I/3! f'''(z0)';

aykiriliklar:, $\left[\frac{1}{2}, 2 \right]$, C icindeki aykirilik $z_0 = \frac{1}{2}$

$$\text{aykiriliklar:}, \left[\frac{1}{2}, 2 \right], \text{C icindeki aykirilik } z_0 = \frac{1}{2} \quad f(z) = \frac{1}{2} \frac{e^{i\pi z}}{z-2}$$

$$f'''(z) = -\frac{\frac{1}{2} I \pi^3 e^{i\pi z}}{z-2} + \frac{3}{2} \frac{\pi^2 e^{i\pi z}}{(z-2)^2} + \frac{3 I \pi e^{i\pi z}}{(z-2)^3} - \frac{3 e^{i\pi z}}{(z-2)^4}$$

$$\int_C \frac{e^{I\pi z}}{2z^2 - 5z + 2} dz = \frac{1}{3} I\pi \left(-\frac{1}{3} \pi^3 + \frac{2}{3} I\pi^2 + \frac{8}{9} \pi - \frac{16}{27} I \right),$$

$$= 2\pi I/3! f'''(z_0)$$

Teorem 5.5.5 (Türev için Cauchy İntegral Formülü). f , basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik ve C , D de pozitif olarak yönlendirilmiş basit kapalı bir yol olsun. Eğer z_0 , C içinde bir nokta ise

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dir (Mathews 2001).

Cauchy İntegral Formülünde olduğu gibi teoremin hipotezi altında

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

dir.

Örnek 5.5.6. C pozitif olarak yönlendirilmiş $|z|=2$ çemberi olmak üzere $\int_C \frac{e^{(z^2)}}{(z-i)^4} dz$

integralini hesaplayınız.

```
> f:='f':F:='F':z:='z':Z:='Z':Zn:='Zn':w:=exp(z^2)/(z-I)^4:
Zn:=sort([solve(denom(w)=0,z)]):z[0]=Zn[1],` noktasında 4. mertebeden
aykırılık mevcut `;f:=Z->subs(z=Z,simplify(w*(z-Zn[1])^4)): `f(z)`=f(z);
d3:=diff(f(z),z$3):f3:=Z->subs(z=Z,d3): `f'''(z)`=f3(z): `f'''(z0)`=f3(Zn[1]);
val:=2*Pi*I/3!*f3(Zn[1]);Int(w,z=C..` `)=val,`=2 Pi I/3! f'''(z0)`;
```

$z_0 = I$, noktasında 4. mertebeden aykırılık mevcu

$$f(z) = e^{z^2}, \quad f'''(z_0) = 4 I e^{-1}$$

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{(z - I)^4} dz = -\frac{4}{3} \pi e^{-1}, = 2\pi I/3! f'''(z_0)$$

6. TAYLOR VE LAURENT SERİLERİ

Bu bölümde fonksiyonların, verilen bir nokta komşuluğunda Taylor serisine ve yine verilen bir halka bölgede Laurent serisine açılımında Maple programından faydalanılacak. Ayrıca aykırı noktalarda rezidülerin hesabında ve buna bağlı olarak bazı kompleks ve reel integrallerin hesabında yine bu programdan faydalanılacak.

6.1. Taylor Serileri

Analitik fonksiyonlar teorisinde bir fonksiyonun analitik olduğu bir noktada her mertebeden türevlerinin mevcut ve türev fonksiyonunun da analitik olduğu biliniyor (Başkan 1996). Bu kesimde analitik fonksiyonlar ile kuvvet serileri arasında ki önemli bir ilişki Taylor Teoremiyle verilecektir.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu açık bir $D(z_0, r)$ dairesinde analitik ise

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f^{(2)}(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}(z - z_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

serisine f fonksiyonunun z_0 merkezli *Taylor serisi* denir.

Teorem 6.1.1 (Taylor Teoremi). $f(z)$ fonksiyonu $D(z_0, r)$ dairesini bulduran bir B bölgesinde analitik olsun. Bu takdirde her $z \in D(z_0, r)$ için f fonksiyonunun (7.1) Taylor serisi $f(z)$ fonksiyonuna yakınsar. Üstelik bu yakınsama her bir $\bar{D}(z_0, \rho) = \{z : |z - z_0| \leq \rho < r\}$ dairesinde düzgündür (Mathews 2001).

Örnek 6.1.2. $D : |z| < 1$ dairesinde her z için $\text{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ olduğunu gösteriniz.

```
>f:='f':p:='p':n:='n':P:='P':S:='S':s:='s':t:='t':z:='z':Z:='Z':f:=z->log(1-z):
s:=taylor(f(z),z=0,11):`f(z)`=s;S:=z->sum(-1/n*z^n,n=1..infinity):
S(z)=Sum(-1/n*z^n,n=1..infinity);
```

$$f(z) = -z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{6} z^6 - \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{8} z^8 - \frac{1}{9} z^9 - \frac{1}{10} z^{10} + O(z^{11})$$

$$\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{z^n}{n} \right)$$

Örnek 6.1.3. $D: |z| < 1$ dairesinde $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

```
> f:='f':p:='p':P:='P':s:='s':t:='t':z:='z':Z:='Z':f:=z->1/(1-z)^2:s:=taylor(f(z),
z=0,10):p:=unapply(convert(taylor(f(z),z=0,10),polynom),z):
`f()`=s;P[9](z)=p(z);
```

$$f(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 6z^5 + 7z^6 + 8z^7 + 9z^8 + 10z^9 + O(z^{10})$$

$$P_9(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 6z^5 + 7z^6 + 8z^7 + 9z^8 + 10z^9$$

Örnek 6.1.4. Kompleks sayılarda $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ olduğunu gösteriniz.

Önce $f(z) = \cos z$ fonksiyonunu birkaç terimiyle yazalım.

```
> f:='f':p:='p':P:='P':z:='z':f:=z->cos(z):f:=series(f(z),z=0,12):`f()`=f;
```

$$f(z) = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{24z^8} - \frac{1}{120z^{10}} + O\left(\frac{1}{z^{12}}\right)$$

Şimdi $f(z) = \cos z$ fonksiyonunun seri açılımını genel terimiyle yazalım:

```
> a:='a':n:='n':S:='S':z:='z':a:=n->(-1)^n*z^(2*n)/(2*n)!:
```

```
S:=sum(a(n),n=0..infinity):S=Sum(a(n),n=0..infinity);
```

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Örnek 6.1.5. $f(z) = \sin z^3$ fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktası civarında Taylor serisine açınız.

>f:='f':p:='p':P:='P':s:='s':t:='t':z:='z':Z:='Z':f:=z->sin(z)^3:t:=taylor(f(Z),
Z=0,14):s:=subs(Z=z,t):p:=z->subs(Z=z,convert(t,polynomial)): `f(z)`=s;

$$f(z) = z^3 - \frac{1}{2} z^5 + \frac{13}{120} z^7 - \frac{41}{3024} z^9 + \frac{671}{604800} z^{11} - \frac{73}{1140480} z^{13} + O(z^{15})$$

6.2. Laurent Serisi

Bu kesimde, Taylor serileri için yapılanlar Laurent serileri için yapılacak. Seriyeye açma teknikleri için Taylor serilerinden faydalanılacak.

n bir tamsayı olmak üzere c_n kompleks sayısı için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

serisine *Laurent serisi* denir. Bu ifadenin ikinci kısmında bulunan birinci seriye Laurent serisinin esas kısmı, ikincisine analitik kısmı adı verilir.

Teorem 6.2.1 (Laurent teoremi). $f(z)$ fonksiyonu

$$A = A(z_0, r, R) = \{ z : 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty \}$$

halka bölgesinde analitik olsun. Her $z \in A(z_0, r, R)$ için $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - \alpha)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n \quad (6.2)$$

biçiminde bir Laurent serisine açılabilir. Burada ρ , $r < \rho < R$, özelliğinde herhangi bir sayı olmak üzere $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \quad \text{ve} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

dir. Üstelik (6.2) serisi her bir $\bar{A}(z_0, s, t)$, $r < s < t < R$, kapalı alt halka bölgesinde $f(z)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar (Mathews 2001).

Örnek 6.2.2. $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4}$ fonksiyonunu $|z| > 0$ halka bölgesinde Laurent serisine açınız.

```
>f:='f':z:='z':f:=z->(cos(z)-1)/z^4:L:='L':s:='s':S:='S':Z:='Z':
S:=series(cos(Z)-1,Z=0,12)/Z^4:s:=convert(series(cos(Z)-1,Z=0,12),
polynom)/Z^4:LS:=z->subs(Z=z,expand(s)):`f(z)`=subs(Z=z,S):
`f(z)`=series((cos(z) - 1)/z^4, z=0,12);
```

$$f(z) = -\frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} z^2 + \frac{1}{40320} z^4 - \frac{1}{3628800} z^6 + O(z^8)$$

Örnek 6.2.3. $f(z) = \frac{3}{2+z-z^2}$ fonksiyonunu $1 < |z| < 2$ halka bölgesinde seriye açınız.

```
> f:='f':z:='z':f:=z->3/(1+z)/(2-z):F:='F':f1:='f1':f2:='f2':
A:=convert(f(z),parfrac,z):`f(z)`=`,f(z)=A;f1:=z->1/(1+z):f2:=z->-1/(z-2):
F[1](z)=f1(z),F[2](z)=f2(z);S:='S': Z:='Z':S1:=series(f1(z),z=infinity,6):
S1:=series(f1(1/Z),Z=0,6):S1:=subs(Z=1/z,S1):S[1](z)=S1:
S2:=series(f2(z),z=0,4):S[2](z)=S2:s2:=subs(z=Z,S1+S2):
S:=z->subs(Z=z,s2):`S(z)`=S(z);
```

$$f(z) = \frac{3}{(1+z)(2-z)} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{z-2}$$

$$F_1(z) = \frac{1}{1+z}, F_2(z) = -\frac{1}{z-2}$$

$$S(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + O\left(\frac{1}{z^6}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} z + \frac{1}{8} z^2 + \frac{1}{16} z^3 + O(z^4)\right)$$

Örnek 6.2.4. $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ fonksiyonunu $|z| > 0$ halka bölgesinde Laurent serisine açınız.

```
>f:='f':S:='S':z:='z':f:=z->exp(-1/z^2):S:=series(f(z),z=infinity,12):`f(z)`=S;
```

$$f(z) = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{24z^8} - \frac{1}{120z^{10}} + O\left(\frac{1}{z^{12}}\right)$$

6.3. Aykırılıklar, Sıfır ve Kutup Yerleri

Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değil fakat z_0 noktasının $D^*(z_0, r)$ delinmiş komşuluğunda analitik olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun bir *ayrık aykırı noktası* denir. Çalışmamızda tamamen ayrık aykırılıkları çalışacağımızdan bundan böyle aykırılık deyince ayrık aykırılık anlaşılacaktır. $D^*(z_0, r) = A(z_0, 0, r)$ olduğundan z_0 noktasında aykırılığa sahip olan bir fonksiyon bu delinmiş dairede Laurent açılımına sahiptir. f fonksiyonunun $D^*(z_0, r) = A(z_0, 0, r)$ delik dairesindeki Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

olsun. Eğer bu açılımdaki negatif indisli bütün c_n katsayıları sıfır ise z_0 f fonksiyonunun *kaldırılabilir aykırı noktası*, en çok sonlu sayıda negatif indisli c_n katsayıları sıfırdan farklı ise z_0 f fonksiyonunun *kutup noktası* ve sonsuz çoklukta negatif indisli c_n katsayıları sıfırdan farklı ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *esaslı aykırı noktası* denir.

Örnek 6.3.1. $f(z) = \cot z$ fonksiyonu, $z_0 = 0$ da ne tür bir aykırılığa sahiptir?

```
> f:='f':L:='L':s:='s':S:='S':z:='z':Z:='Z':f:=z->cot(z): S:=series(f(Z),
Z=0,8):s:=convert(S,polynom):LS:=z->subs(Z=z,s):`f(z)`=subs(Z=z,S);
```

$$f(z) = z^{-1} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \frac{2}{945} z^5 - \frac{1}{4725} z^7 + O(z^8)$$

Bu açılıma bakarak f fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktasında bir kutup noktasına sahip olduğu görülür.

Örnek 6.3.2. $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$ fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasında kaldırılabilir bir aykırılığa sahip olduğunu gösteriniz.

```
> f:='f':L:='L':s:='s':S:='S':z:='z':Z:='Z':f:=z->(cos(z)-1)/z^2:
```

```
S:=series((cos(Z)-1),Z=0,11)/Z^2: `f(z)` =subs(Z=z,S):
S:=series(f(Z),Z=0,11): `f(z)` =subs(Z=z,S);s:=convert(S,polynomial):
LS:=z->subs(Z=z,s):
```

$$f(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} z^2 - \frac{1}{720} z^4 + \frac{1}{40320} z^6 - \frac{1}{3628800} z^8 + O(z^{10})$$

Bu açılımdan f fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasının delik komşuluğundaki açılımı bir Taylor açılımı olduğundan $z_0 = 0$ noktası f için bir kaldırılabılır aykırı noktadır.

Örnekler 6.3.3. $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$ fonksiyonu $z_0 = 0$ da ne tür bir aykırılığa sahiptir?

```
>f:='f':L:='L':p:='p':s:='s':z:='z':Z:='Z':f:=z->z^2*sin(1/z):
s:=convert(series(sin(z),z=0,12),polynomial):S:=subs(z=1/Z,s):
p:=z->subs(Z=z, expand(Z^2 * S)):L[9](z)=p(z);
```

$$L_9(z) = z - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^3} - \frac{1}{5040z^5} + \frac{1}{362880z^7} - \frac{1}{39916800z^9}$$

Bu açılımda z nin negatif üslerini bulunduran sonsuz çoklukta terim olduğundan $f(z)$ fonksiyonu, $z_0 = 0$ noktasında esaslı bir aykırılığa sahiptir.

Tanım 6.3.4. f fonksiyonu $D(z_0, r)$ dairesinde analitik olsun. Eğer $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$ için $f^{(n)}(z_0) = 0$ ve $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu $D(z_0, r)$ dairesinde z_0 noktasında k . mertebeden bir sıfıra sahiptir denir.

Teorem 6.3.5. f fonksiyonu $D(z_0, r)$ dairesinde analitik olsun. f fonksiyonunun z_0 noktasında k . mertebeden bir sıfıra sahip olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

biçiminde yazılmasıdır. Burada g fonksiyonu $D(z_0, r)$ de analitik ve $g(z_0) \neq 0$ dır (Mathews 2001).

Örnek 6.3.6. $f(z) = z \sin z^2$ fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktasında sıfırının mertebesini bulunuz.

```
> f:='f': p:='p': P:='P': s:='s': t:='t': z:='z': f := z -> z*sin(z^2):
s := series(f(z), z=0, 24): p:=unapply(convert(series(f(z), z=0, 20),
polynom),z): `f(z) ` = s; P[20](z) = p(z);
```

$$f(z) = z^3 - \frac{1}{6} z^7 + \frac{1}{120} z^{11} - \frac{1}{5040} z^{15} \\ + \frac{1}{362880} z^{19} - \frac{1}{39916800} z^{23} + O(z^{25})$$

$$P_{20}(z) = z^3 - \frac{1}{6} z^7 + \frac{1}{120} z^{11} - \frac{1}{5040} z^{15} \\ + \frac{1}{362880} z^{19}$$

Böylece, f fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktasında 3. mertebeden bir sıfır yerine sahip olduğu görülür.

Teorem 6.3.7. f fonksiyonu $D^*(z_0, r)$ delinmiş dairede analitik olsun. f fonksiyonunun z_0 noktasında k . mertebeden bir kutup yerine sahip olması için gerek ve yeter şart $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k}$ biçiminde yazılabilesidir. Burada $h(z)$, $D(z_0, r)$ de analitik ve $h(z_0) \neq 0$ özelliğinde bir fonksiyondur (Mathews 2001).

Sonuç 6.3.8. f fonksiyonu z_0 noktasında k . mertebeden bir sıfır yerine sahipse $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu da z_0 noktasında k . mertebeden bir kutup yerine sahiptir (Mathews 2001).

Örnek 6.3.9. $g(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{z^2}$ fonksiyonunun $z=0$ noktasında ne tür bir aykırılığa

sahip olduğunu bulunuz.

> g:='g':L:='L':p:='p':s:='s':S:='S':z:='z':Z:='Z':

g:=z->Pi*cot(Pi*z)/z^2: s:=series(Pi*cot(Pi*z),z=0,7)/z^2:

p:=convert(series(Pi*cot(Pi*Z),Z=0,7),polynom):S:=series(g(z),z=0,7):

L:=z->subs(Z=z,expand(p/z^2)): `g(z)`=S; 'S(z)'=L(z);

$$g(z) = z^{-3} - \frac{1}{3} \pi^2 \frac{1}{z} - \frac{1}{45} \pi^4 z - \frac{2}{945} \pi^6 z^3 + O(z^5)$$

$$S(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{z} - \frac{1}{45} z \pi^4 - \frac{2}{945} z^3 \pi^6$$

Böylece, g fonksiyonunun $z=0$ noktasında 3. mertebeden bir kutup yerine sahip olduğu görülür.

6.4. Rezidü Hesabı

f fonksiyonu z_0 noktasında kaldırılabilir olmayan bir aykırılığa sahip olsun.

Böylece f fonksiyonu belli bir $D^*(z_0, r)$ dairesinde $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

biçiminde Laurent serisine açılabilir. Bu açılımdaki a_{-1} katsayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki residüsü denir ve $a_{-1} = \text{Rez}[f, z_0]$ biçiminde gösterilir.

Örnek 6.4.1. $f(z) = e^{\frac{2}{z}}$ fonksiyonunun $z=0$ noktasındaki residüsünü Laurent serisinden faydalanarak bulunuz.

>f:='f':s:='s':z:='z':f:=z->exp(2/z):s:=series(f(z),z=infinity,7): `f(z)`=s;

$$f(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{3z^3} + \frac{2}{3z^4} + \frac{4}{15z^5} + \frac{4}{45z^6} + O\left(\frac{1}{z^7}\right)$$

$\frac{1}{z}$ nin katsayısı 2 olduğundan $\text{Rez}[f, 0] = 2$ olur.

Teorem 6.4.2. f fonksiyonunu z_0 noktasında k . mertebeden bir kutup yerine sahipse

$$\operatorname{Re} z[f, z_0] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$$

dir (Mathews 2001).

Örnek 6.4.3. $f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{z^2}$ fonksiyonunun $z=0$ noktasındaki rezidüsünü bulunuz.

>f:='f':z:='z':f:='z->Pi*cot(Pi*z)/z^2:' f(z) `=f(z);D1:=diff(z^3*f(z),z):

D2:=factor(diff(z^3*f(z),z\$2)):L:=1/2!*limit(D2,z=0):

Diff(z^3*f(z)`,z)=D1;Diff(z^3*f(z)`,z\$2)=D2;

Limit(Diff(z^3*f(z)`,z\$2),z=0)/2!=L; `Res[f,0]` = residue(f(z),z=0);

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (z^3 f(z)) = \pi \cot(\pi z) + z \pi^2 (-1 - \cot(\pi z)^2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (z^3 f(z)) = 2 \pi^2 (1 + \cot(\pi z)^2) (z \pi \cot(\pi z) - 1)$$

$$\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} (z^3 f(z)) \right) = -\frac{1}{3} \pi^2$$

$$\operatorname{Res}[f, 0] = -\frac{1}{3} \pi^2$$

Teorem 6.4.4 (Rezidü Teoremi). B basit bağlantılı bir bölge ve C de bu bölgede bulunan pozitif yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri olsun. Eğer f , C içinde yer alan z_1, z_2, \dots, z_n noktaları dışında C üzerinde ve içinde analitik ise

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z[f, z_k]$$

dir (Mathews 2001).

Örnek 6.4.5. $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^4 + z^3 - 2z^2}$ integralini Rezidü yardımıyla hesaplayınız.

Önce $f(z) = \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2}$ fonksiyonunun aykırılıklarını bulalım.

```
>f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->1/(z^4+z^3-2*z^2):
Zn:=sort([solve(denom(f(z))=0,z)]):`f(z)`=f(z);z1:=subs(z=Zn[1],z):
z2:=subs(z=Zn[2],z):z3:=subs(z=Zn[3],z):z4:=subs(z=Zn[4],z):
`Aykırılıklar:` ,z[1]=z1,z[2]=z2,z[3]=z3,z[4]=z4;
```

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2}$$

Aykırılıklar; $z_1 = -2, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = 1$

Sonra bu aykırılıklardan hangilerinin $|z| < 3$ daresi içinde yer aldığını test edelim.

```
>print(abs(z[1]),`<3`,abs(z1)<3,evalb(evalf(abs(z1))<3));
print(abs(z[2]),`<3`,abs(z2)<3,evalb(evalf(abs(z2))<3));
print(abs(z[3]),`<3`,abs(z3)<3,evalb(evalf(abs(z3))<3));
print(abs(z[4]),`<3`,abs(z4)<3,evalb(evalf(abs(z4))<3));
```

$$|z_1|, < 3, 2 < 3, true$$

$$|z_2|, < 3, 0 < 3, true$$

$$|z_3|, < 3, 0 < 3, true$$

$$|z_4|, < 3, 1 < 3, true$$

Daha sonra da daire içinde kalan aykırı noktalarda f fonksiyonunun rezidülerini hesaplayalım.

```
> r1:=residue(f(z),z=z1):`Res[f`,z1,` ]`=r1;r2:=residue(f(z), z=z2):
`Res[f`,z2,` ]`=r2;r4:=residue(f(z),z=z4):`Res[f`,z4,` ]`=r4;
```

$$\text{Res}[f, -2,] = -\frac{1}{12} \quad \text{Res}[f, 0,] = -\frac{1}{4} \quad \text{Res}[f, 1,] = \frac{1}{3}$$

Nihayet integrali hesaplayabiliriz.

```
>val:=2*Pi*I*(r1+r2+r4):Int(f(z),z=C..` `)=val;
```

$$\int_C \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2} dz = 0$$

Örnek 6.4.6. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4 + 4}$ integralini Rezidü yardımıyla hesaplayalım.

Önce $f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}$ fonksiyonunu aykırılıklarını bulalım.

```
> f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->1/(z^4+4):Zn:=sort([solve(denom(f(z))=0,z)]):
`f(z)`=f(z);z1:=subs(z=Zn[1],z):z2:=subs(z=Zn[2],z):z3:=subs(z=Zn[3],z):
z4:=subs(z=Zn[4],z):`Aykiriliklar:` ,z[1]=z1,z[2]=z2,z[3]=z3,z[4]=z4;
```

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}$$

$$\text{Aykiriliklar:}, z_1 = 1 - I, z_2 = 1 + I, z_3 = -1 + I, z_4 = -1 - I$$

Bu aykırılıkların hangilerinin $|z-1| < 2$ dairesi içinde kaldığına bakalım.

```
> print(abs(z[1]-1),`<2`,`abs(z1-1)<2, evalb(evalf(abs(z1-1))<2));
print(abs(z[2]-1),`<2`,`abs(z2-1)<2, evalb(evalf(abs(z2-1))<2));
print(abs(z[3]-1),`<2`,`abs(z3-1)<2, evalb(evalf(abs(z3-1))<2));
print(abs(z[4]-1),`<2`,`abs(z4-1)<2, evalb(evalf(abs(z4-1))<2));
```

$$|z_1 - 1|, < 2, 1 < 2, \text{true}$$

$$|z_2 - 1|, < 2, 1 < 2, \text{true}$$

$$|z_3 - 1|, < 2, \sqrt{5} < 2, \text{false}$$

$$|z_4 - 1|, < 2, \sqrt{5} < 2, \text{false}$$

z_1 ve z_2 noktalarındaki rezidü ve integral değeri hesaplayalım.

```
>r1:=residue(f(z),z=z1):`Res[f`,`z1`,`]=r1;r2:=residue(f(z),z=z2):
`Res[f`,`z2`,`]=r2;val:=2*Pi*(r1+r2):Int(f(z),z=C..`)=val;
```

$$\text{Res}[f, 1 - I,] = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} I$$

$$\text{Res}[f, 1 + I,] = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} I$$

$$\int_C \frac{1}{z^4 + 4} dz = -\frac{1}{4} \pi$$

6.5. Bazı Reel İntegrallerin Rezidü Yardımıyla Hesabı

Bazı belirli reel integrallerin bir kısmını rezidü teoremi yardımıyla hesaplamak mümkündür. Bunun için belirli integrali, basit kapalı bir eğri boyunca analitik bir fonksiyonun integrali biçiminde ifade etmek gerekir.

Teorem 6.5.1. $R(x,y)$, $|z|=1$ çemberini bulduran bir bölgede iki değişkenli bir fonksiyon, $f(z) = z^{-1}R[(z+z^{-1})/2, (z-z^{-1})/2i]$ ve z_1, z_2, \dots, z_p $|z|=1$ çemberi içinde f fonksiyonunun kutup noktaları ise

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = 2\pi \sum_{k=1}^p \operatorname{Re} z_k [f, z_k]$$

dır. Burada, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$, $\sin\theta = (z-z^{-1})/2i$ ve $d\theta = -z^{-1}i dz$ dir (Mathews 2001).

Örnek 6.5.2. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2\theta} d\theta$ integralini rezidü yardımıyla hesaplayınız.

Önce $f(z)$ fonksiyonunu ve aykırı noktalarını belirleyelim.

```
Zsub:=proc(F1) local f0;f0:=F1;
f0:=subs({cos(t)=(z+1/z)/2,sin(t)=-I*(z1/z)/2},f0);
f0:=subs({cos(2*t)=(z^2+1/z^2)/2,sin(2*t)=-I*(z^2-1/z^2)/2},f0);
f0:=subs({cos(3*t)=(z^3+1/z^3)/2,sin(3*t)=-I*(z^3-1/z^3)/2},f0);
f0:=f0/(I*z);f0:=normal(f0);end:f:='f':F:='F':t:='t':z:='z':
F:=1/(1+3*cos(t)^2):f1:=Zsub(F):`F(t)`=F;`f(z)`=f1;
Zn:=sort([solve(denom(f1)=0,z)]):z1:=subs(z=Zn[1],z):
z2:=subs(z=Zn[2],z):z3:=subs(z=Zn[3],z):z4:=subs(z=Zn[4],z):
`Aykirilıklar:` ,z[1]=z1,z[2]=z2,z[3]=z3,z[4]=z4;
```

$$F(t) = \frac{1}{1+3\cos^2(t)} \quad f(z) = -\frac{4Iz}{10z^2+3z^4+3}$$

$$\text{Aykirilıklar; } z_1 = \frac{1}{3} I \sqrt{3}, z_2 = I \sqrt{3}, z_3 = -\frac{1}{3} I \sqrt{3}, z_4 = -I \sqrt{3}$$

```
>print(abs(z[1]),`<1`,`abs(z1)<1,evalb(evalf(abs(z1))<1));
```

```
print(abs(z[2]),`<1`,abs(z2)<1,evalb(evalf(abs(z2))<1));
print(abs(z[3]),`<1`,abs(z3)<1,evalb(evalf(abs(z3))<1));
print(abs(z[4]),`<1`,abs(z4)<1,evalb(evalf(abs(z4))<1));
```

$$|z_1|, < 1, \frac{1}{3} \sqrt{3} < 1, \text{true}$$

$$|z_2|, < 1, \sqrt{3} < 1, \text{false}$$

$$|z_3|, < 1, \frac{1}{3} \sqrt{3} < 1, \text{true}$$

$$|z_4|, < 1, \sqrt{3} < 1, \text{false}$$

```
> r2:=residue(f1,z=z2):`Res[f`,z2,`]`=r2;r3:=residue(f1,z=z3):
`Res[f`,z3,`]`=r3;f(t)=F;val:=2*Pi*I*(r3+r2):print(int(f(t),t=0..2*pi)=val);
```

$$\text{Res}[f, I \sqrt{3},] = \frac{1}{4} I$$

$$\text{Res}[f, -\frac{1}{3} I \sqrt{3},] = -\frac{1}{4} I$$

$$f(t) = \frac{1}{1 + 3 \cos(t)^2}$$

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

$[0, \infty)$ üzerindeki f fonksiyonunun belirsiz integrali, limit olması durumunda, $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$ olduğunu reel analizde biliniyor. Eğer limit mevcut değilse integral de mevcut değildir. Benzer şekilde, eğer f fonksiyonu tüm reel sayılar için tanımlı ise; f fonksiyonunun $(-\infty, \infty)$ aralığı üzerindeki integrali, limit olması durumunda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

biçiminde olur. Şimdi bu tür reel integrallerin rezidü yardımıyla hesabını Maple programı kullanılarak yapalım.

Tanım 6.5.3. $f(x)$, her x reel değerleri için sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integralinin Cauchy Esas Değeri (E. D.); limitin mevcut olması durumunda,

$$P.D. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx$$

biçiminde tanımlanır (Mathews 2001).

Teorem 6.5.4. P ve Q , sırasıyla m ve n dereceli polinomlar olmak üzere $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ olsun. Eğer, bütün x reel değerleri ve $m+2 \leq n$ için $Q(x) \neq 0$ ise, z_1, z_2, \dots, z_k , $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki kutup yerleri olmak üzere

$$E.D. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Re} z_j \operatorname{Res} z_j \left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right]$$

dir (Mathews 2001).

Örnek 6.5.5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ integralinin Cauchy esas değerini hesaplayınız.

```
>f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->1/(z^2+1):Zn:=sort([solve(denom(f(z))=0,z)]):
`f(z)`=f(z);z1:=subs(z=Zn[1],z);z2:=subs(z=Zn[2],z):`Aykirilıklar:` ,z[1]=z1,
z[2]=z2;print(`0 < ` ,Im(z[1]), ` ` ,Im(z1)>0,evalb(evalf(Im(z1))>0));
print(`0 < ` ,Im(z[2]), ` ` ,Im(z2)>0,evalb(evalf(Im(z2))>0));
r1:=residue(f(z),z=z1): `Res[f` ,z1, ` ]`=r1, `F(x)`=f(x);val:=2*Pi*I*r1:
print(int(F(x),x=-infinity..infinity)=val);F:='F':g:='g':G:='G':
g:=z->subs(Z=z,int(f(Z),Z)):
```

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

$$\text{Aykirilıklar}; z_1 = I, z_2 = -I$$

$$0 < , \Im(z_1), , 0 < 1, \text{true}$$

$$0 < , \Im(z_2), , 0 < -1, \text{false}$$

$$\operatorname{Res}[f, I,] = -\frac{1}{2} I, F(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \pi$$

Örnek 6.5.6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)} dx$ integralini Rezidü yardımıyla hesaplayınız.

```
>f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->1/((z^2+1)*(z^2+4)):`f(z)`=f(z),
`F(x)`=F(x);Zn:=sort([solve(denom(f(z))=0,z)]:z1:=subs(z=Zn[1],z):
z2:=subs(z=Zn[2],z):z3:=subs(z=Zn[3],z):z4:=subs(z=Zn[4],z):
`Aykırılıklar:`z[1]=z1,z[2]=z2,z[3]=z3,z[4]=z4;r1:=residue(f(z),z=z1):
r3:=residue(f(z),z=z3):`Res[f`,z1,` ]`=r1,`Res[f`,z3,` ]`=r3;
val:=2*Pi*I*(r1+r3):print(int(F(x),x=-infinity..infinity)=val);
```

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}, \quad F(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

$$\text{Aykırılıklar}; z_1 = -2I, z_2 = 2I, z_3 = I, z_4 = -I$$

$$\text{Res}[f, -2I,] = -\frac{1}{12}I, \quad \text{Res}[f, I,] = -\frac{1}{6}I$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \frac{1}{2} \pi$$

Teorem 6.5.6. Her x reel değerleri için $Q(x) \neq 0$ ve $m+1 \leq n$ olmak üzere P ve Q , sırasıyla m ve n dereceli polinomlar olsun. Eğer $\alpha > 0$ ve $f(z) = \frac{e^{i\alpha z} P(z)}{Q(z)}$ ise, z_1, z_2, \dots, z_k noktaları f fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki kutup yerleri olmak üzere

$$P.D. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x) dx = -2\pi \sum_{j=1}^k \text{Im}(\text{Rez}[f, z_j])$$

ve

$$P.D. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\alpha x) dx = 2\pi \sum_{j=1}^k \text{Re}(\text{Rez}[f, z_j])$$

dir (Mathews 2001).

Örnek 6.5.7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx$ integralini Rezidü yardımıyla hesaplayınız.

```
> f:='f':F:='F':z:='z':F0:=z->z*sin(z)/(z^2+4):f:=z->z*exp(I*z)/(z^2+4):
`F(z)`=F0(z):`f(z)`=f(z),`F(x)`=F0(x);Zn := sort([solve(denom(f(z))=0, z)]:
z1:=subs(z=Zn[1],z):z2:=subs(z=Zn[2],z):`Aykırılıklar:`z[1]=z1,z[2]=z2;
```

```
r1:=residue(f(z),z=z1):`Res[f`,z1,`]`=r1;val:=2*Pi*Re(r1):
print(int(F(x),x=-infinity..infinity)=val);
```

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^3}, F(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)^3}$$

$$\text{Aykırılıklar; } z_1 = -2I, z_2 = -2I, z_3 = -2I$$

$$z_4 = 2I, z_5 = 2I, z_6 = 2I$$

$$\text{Res}[f, -2I,] = \frac{3}{512} I$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = -\frac{3}{256} \pi$$

Teorem 6.5.8. P ve Q , sırasıyla m ve n dereceli polinomlar, $m+2 \leq n$ ve $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ olsun. $Q(z)$ fonksiyonunun x -ekseni üzerindeki basit sıfır yerleri t_1, t_2, \dots, t_l ise, z_1, z_2, \dots, z_k , f fonksiyonunun üst yarı düzlemde yer alan kutup yerleri olmak üzere

$$E.D. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Re} \left[z \left[\frac{P}{Q}, z_j \right] \right] + \pi i \sum_{j=1}^l \text{Re} \left[z \left[\frac{P}{Q}, t_j \right] \right]$$

olur (Mathews 2001).

Teorem 6.5.9. P ve Q , sırasıyla m ve n dereceli polinomlar, $m+1 \leq n$ ve $f(z) = \frac{e^{iaz} P(z)}{Q(z)}$ olsun. $Q(z)$ fonksiyonunun x -ekseni üzerindeki basit sıfır yerleri t_1, t_2, \dots, t_l ise, z_1, z_2, \dots, z_k , f fonksiyonunun üst yarı düzlemde yer alan kutup yerleri olmak üzere

$$E.D. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x) \cos(ax)}{Q(x)} dx = -2\pi \sum_{j=1}^k \text{Im} \left[z \left[f, z_j \right] \right] + \pi \sum_{j=1}^l \text{Im} \left[z \left[f, t_j \right] \right]$$

ve

$$E.D. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x) \sin(ax)}{Q(x)} dx = 2\pi \sum_{j=1}^k \text{Re} \left[z \left[f, z_j \right] \right] + \pi \sum_{j=1}^l \text{Re} \left[z \left[f, t_j \right] \right]$$

dir (Mathews 2001).

Örnek 6.5.10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3 - 8} dx$ integralini Rezidü yardımıyla hesaplayınız.

```

> f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->z/(z^3-8):`f(z)`=f(z),`F(x)`=f(x);
Zn:=sort([solve(denom(f(z))=0,z)]):z1:=subs(z=Zn[1],z):z2:=subs(z=Zn[2],z):
z3:=subs(z=Zn[3],z):`Aykirimliklar:` ,z[1]=z1,z[2]=z2,z[3]=z3;
r1:=residue(f(z),z=z1):r2:=residue(f(z),z=z2):r3:=residue(f(z),z=z3):
`Res[f`,`z1`,`]=r1`,`Res[f`,`z2`,`]=r2`,`Res[f`,`z3`,`]=r3;
val:=evalc(Pi*I*r1+2*Pi*I*r3):print(int(F(x),x=infinity..infinity)=val);

```

$$f(z) = \frac{z}{z^3 - 8}, F(x) = \frac{x}{x^3 - 8}$$

$$\text{Aykirimliklar; } z_1 = 2, z_2 = -1 + I\sqrt{3}, z_3 = -1 - I\sqrt{3}$$

$$\text{Res}[f, 2,] = \frac{1}{6}, \text{Res}[f, -1 + I\sqrt{3},] = \frac{-1 + I\sqrt{3}}{-6I\sqrt{3} - 6},$$

$$\text{Res}[f, -1 - I\sqrt{3},] = \frac{-1 - I\sqrt{3}}{6I\sqrt{3} - 6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = -\frac{1}{6} \pi \sqrt{3}$$

Örnek 6.5.11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)} dx$ integralini Rezipü yardımıyla hesaplayınız.

```

>f:='f':F:='F':g:='g':z:='z':f:=z->exp(I*z)/((z-1)*(z^2+4)):
F0:=z->sin(z)/((z-1)*(z^2+4)):`f(z)`=f(z);
Zn:=sort([solve(denom(f(z))=0,z)]):z1:=subs(z=Zn[1],z):
z2:=subs(z=Zn[2],z):z3:=subs(z=Zn[3],z):`Aykirimliklar:` ,
z[1]=z1,z[2]=z2, z[3]=z3;r1:=residue(f(z),z=z1):r2:=residue(f(z),z=z2):
`Res[f`,`z1`,`]=r1`,`Res[f`,`z2`,`]=r2;`F(z)`=`F0(z);
val:=2*Pi*Re(r2)+Pi*Re(r1):print(int(F(x),x=-infinity..infinity)=val);

```

$$f(z) = \frac{e^{Iz}}{(z-1)(z^2+4)}$$

$$\text{Aykirimliklar; } z_1 = 1, z_2 = 2I, z_3 = -2I$$

$$\text{Res}[f, 1,] = \frac{1}{5} e^I, \text{Res}[f, 2I,] = \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{20} I \right) e^{-2}$$

$$F(z) = \frac{\sin(z)}{(z-1)(z^2+4)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = -\frac{1}{5} \pi e^{-2} + \frac{1}{5} \pi \cos(1)$$

Teorem 6.5.12. $P(z)$ ve $Q(z)$, sırasıyla m ve n dereceli iki polinom ve $m+2 \leq n$ olsun. Eğer, $x > 0$ için $Q(x) \neq 0$, Q orijinde en çok birinci mertebeden bir sıfır yerine sahip ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $f(z) = \frac{z^\alpha P(z)}{Q(z)}$ ise $z_1, z_2, \dots, z_k, \frac{p}{Q}$ nun sıfırdan farklı kutup yerleri olmak üzere

$$E.D. \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha P(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i\alpha 2\pi}} \sum_{j=1}^k (\operatorname{Re} z[\frac{p}{Q}, z_j])$$

olur (Mathews 2001).

Örnek 6.5.13. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^\alpha}{x(x+1)} dx$ integralini Rezidü yardımıyla hesaplayınız.

```
>a:='a':f:='f':F:='F':z:='z':f:=z->z^a/(z*(z+1)):`f(z)`=f(z),
`F(x)`=f(x);z1:=-1:r1:=residue(f(z),z=z1):`z=-1 noktasındaki aykırılık:`,
`Res[f`,z1,`]`=r1;r1:=-exp(I*a*Pi):`Res[f`,z1,`]`=r1;
val:=evalc(val):print(int(F(x),x=-infinity..infinity)=val);
```

$$f(z) = \frac{z^a}{z(z+1)}, F(x) = \frac{x^a}{x(x+1)}$$

$$z=-1 \text{ noktasındaki aykırılık; } \operatorname{Res}[f, -1,] = -e^{-I a \operatorname{csgn}(I(z-1)) \pi}$$

$$\operatorname{Res}[f, -1,] = -e^{I a \pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \frac{\pi}{\sin(a \pi)}$$

KAYNAKLAR

BAŞKAN, T. 1996. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi Basımevi, No:17. Bursa. 356s.

ÇELİK, B. 2004. Maple ve Maple ile Matematik. Nobel Yayın Dağıtım. No: 718. Ankara. 552s.

DUREN, P. 2004. Harmonic Mappings in the Plane. Cambridge University Press. p.1-54.

GOODMAN, A. W. 1983. Univalent Fonksiyonlar I. Mariner Publishing Company, Inc. p.1-20.

MATHEWS, J. H., R. W. HOWELL. 2001. Complex Analysis for Mathematics and Engineering 632p.

NEHARI, Z. 1952. Conformal Mapping. Mc Grow–Hill. New York. p.148-180.

PALKA, B. P. 1991. An introduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag. New York. p.62-101.

[Http://www.Maplesoft/applications](http://www.Maplesoft/applications)

<http://math.fullerton.edu/mathews/c2001/contents.html>

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince desteğini esirgemeyen ve bu tez çalışmasının ortaya çıkmasında büyük emeği geçen, danışman hocam Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK'e ve Maple Programı ile ilgili yardımlarından dolayı Doç. Dr. Basri ÇELİK'e teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca moral ve motivasyon anlamında sürekli desteğini esirgemeyen Edebiyat Öğretmeni Selahattin ÜNLÜ'ye ve matematik öğrenimime katkısı olan tüm hocalarıma ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Hatay'da doğan Mehmet Zekeriya DÖKMEN; ilköğrenimini Hatay'da orta ve lise öğrenimini Manisa'da; lisans öğrenimini ise 1999 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinde tamamladı. Halen Bursa Ticaret Borsası İlköğretim Okulunda İngilizce öğretmeni olarak görev yapmaktadır.