



**T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FREKANS KESTİRİCİLERİN PERFORMANS ANALİZİ

ERSEN YILMAZ

**DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

BURSA-2007

ÖZET

Bu tez çalışması frekans kestiricilerin performans analizi ve çözümsel Cramér-Rao sınırları ile ilgidir. Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüs (reel sönümlü model) ve kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümlü sinüsten (kompleks sönümlü model) oluşan iki zaman serisi veri modeli ele alınmıştır.

Her iki veri modeli için genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin çözümsel C-R sınır ifadeleri türetilmiştir. İfadeler sınırları toplam örnek sayısı, sinyal gürültü oranı ve sinüsler arası frekans farkının ve sinüslerin sönüm katsayılarının (reel sönümlü model için ayrıca sinüsler arası faz farkının) bir fonksiyonu cinsinden vermektedir.

Reel sönümlü modele ait çözümsel C-R sınır ifadeleri sinüsün fazı değişirken incelenmiş ve en kötü ve en iyi durum C-R sınırları ile bu sınırlara karşılık gelen kritik faz değerlerini veren basit ifadeler elde edilmiştir. İfadeler frekans farkının Fourier limitinin altında olduğu durum (alçak frekans durumu) için incelenmiş yeterince büyük toplam örnek sayısı ve küçük sönüm katsayısı varsayımları altında basit kapalı-biçim ifadeler biçiminde sunulmuştur. Basit kapalı-biçim ifadeler alçak frekans durumu için geçerlidir.

Kompleks sönümlü modele ait çözümsel C-R sınır ifadeleri frekans farkının Fourier limitinin altında olduğu durum (yakın frekans durumu) için incelenmiş, yeterince büyük toplam örnek sayısı ve küçük sönüm katsayısı varsayımları altında basit kapalı-biçim ifadeler biçiminde sunulmuştur. Basit kapalı-biçim ifadeler sinüsler arasındaki frekans farkının bütün aralığı için geçerlidir.

Her iki model için frekans parametrelerinin kestirimi Maksimum Olabilirlik Kestirici (MLE) ve Sönümlü MUSIC (DMUSIC) kestiricisi kullanılarak, özellikle alçak/yakın frekans durumu için, karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Yeterince büyük toplam örnek sayısı ve yüksek sinyal gürültü oranlarında DMUSIC kestiricisinin MLE'ye yakın bir performans sergilediği sayısal örnekler yardımıyla gösterilmiştir.

DMUSIC kestiricisi için birinci derece analizi yapılarak frekans kestirimine ilişkin teorik yan ve varyans ifadeleri türetilmiştir. Teorik sonuçlar sayısal örnekler yoluyla desteklenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Sönümlü sinüs, frekans kestirimi, Cramér-Rao sınırı, alçak/yakın frekans, Fourier limiti, MUSIC, DMUSIC, MLE, performans analizi, birinci derece analizi

PERFORMANCE ANALYSIS OF FREQUENCY ESTIMATORS

ABSTRACT

This thesis deals with performance analysis of frequency estimators and analytical Cramér-Rao (C-R) bounds. Two time-series data models are considered, a real damped sinusoid in real white Gaussian noise (real damped model) and two damped sinusoids in complex white Gaussian noise (complex damped model).

Analytical C-R bounds are derived for estimating the amplitude, phase, damping factor and frequency parameters of both two models. The expressions give the bounds in terms of signal-to-noise ratio, total number of data samples, and a function dependent on the frequency difference between the sinusoids and the damping factors of the sinusoids (it is also dependent on phase difference between the sinusoids for real damped model).

The analytical C-R bounds for real damped model are examined as the phase of the sinusoid varies, and simple expressions are obtained for the worst case and the best case C-R bounds and for the corresponding critical phase values. Expressions are then presented as simple closed-form expressions for the case of frequency difference is smaller than Fourier limit (low frequency case) and under the assumptions of low damping and sufficiently large number of data samples. The simple closed-form expressions are valid for low frequency case.

The analytical C-R bounds for complex damped model are examined for the case of frequency difference is smaller than Fourier limit (close frequency case) and under the assumptions of low damping and sufficiently large number of data samples, and then presented as simple closed-form expressions, which are valid for whole range of frequency difference between the sinusoids.

Estimation of frequency parameters of both two models is performed by using Maximum Likelihood Estimator (MLE) and Damped MUSIC (DMUSIC) estimator. The performances of both two estimators are comparatively investigated, especially for the low/close frequency case. It is demonstrated numerically that performance of DMUSIC is close to performance of MLE in the case of low damping and sufficiently large number of data samples.

First order analysis are provided for DMUSIC estimator and theoretical bias and variance expressions are derived for estimating the frequency parameters. The theoretical results are supported by numerical examples.

KEYWORDS: Damped sinusoid, frequency estimation, Cramér-Rao bound, low/close frequency, Fourier limit, MUSIC, DMUSIC, MLE, performance analysis, first order analysis

İÇİNDEKİLER	<u>Sayfa No</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xix
1. GİRİŞ	1
1.1. Kestirim Teorisi	1
1.2. Frekans Kestirimi	5
1.3. Tezin Motivasyonu	6
1.4. Tezin Amaç ve Kapsamı	8
1.5. Tezin Katkıları	8
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	10
2.1. Giriş	10
2.2. Cramér-Rao Sınırı	10
2.3. Kestirim Yöntemi	11
3. MATERYAL ve YÖNTEM	14
3.1. Veri Modelleri	14
3.1.1. Giriş	14
3.1.2. Bir Reel Sönümsüz Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli	14
3.1.3. İki Kompleks Sönümsüz Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli	14
3.1.4. Bir Reel Sönümlü Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli	15
3.1.5. İki Kompleks Sönümlü Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli	15
3.2. Gürültü Modeli ve Sinyal Gürültü Oranı	16

3.2.1. Giriş	16
3.2.2. Beyaz Gauss Gürültü	16
3.2.3. Sinyal Gürültü Oranı	17
3.3. En Küçük Varyanslı Yansız Kestirici	17
3.3.1. Giriş	17
3.3.2. Yansız Kestirici	17
3.3.3. En Küçük Varyans Kriteri	18
3.3.4. Vektör Parametre Durumuna Genişletilmesi	19
3.4. Cramér-Rao (C-R) Sınırı	19
3.4.1. Giriş	19
3.4.2. Kestirici Doğruluğu	19
3.4.3. Cramér-Rao Sınırı	20
3.4.4. Beyaz Gauss Gürültü İçindeki Sinyaller için Genel C-R Sınırı	22
3.4.5. Parametrelerin Dönüşümü	23
3.4.6. Vektör Parametre Durumuna Genişletilmesi	23
3.4.7. Vektör Parametrelerin Dönüşümü	25
3.4.8. Genel Gauss Durumu için C-R Sınırı	26
3.5. Maksimum Olabilirlik Kestirici (MLE)	27
3.5.1. Giriş	27
3.5.2. MLE'nin Bulunması	28
3.5.3. MLE'nin Özellikleri	29
3.5.4. MLE'nin Sayısal Olarak Elde Edilmesi	30
3.5.5. Vektör Parametre Durumuna Genişletilmesi	31
3.6. MUSIC Kestirici	33
3.6.1. Giriş	33
3.6.2. MUSIC Algoritması	34
3.7. Sönümlü MUSIC (DMUSIC) Kestirici	37
3.7.1. Giriş	37
3.7.2. DMUSIC Algoritması	38
3.8. Bir Reel Sönümlü Sinüs için C-R Sınır İfadeleri	41
3.8.1. Giriş	41
3.8.2. Çözümsel C-R Sınır İfadeleri	41

3.8.3. En Kötü ve En İyi C-R Sınırları ve Kritik Faz Değerleri	47
3.8.4. Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ve Kritik Faz Değerleri için Basit İfadeler	49
3.8.5. Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ile Kritik Faz Değerleri için Basit Kapalı-Biçim İfadeler	51
3.9. İki Kompleks Sönümlü Sinüs için C-R Sınır İfadeleri	56
3.9.1. Giriş	56
3.9.2. Çözümsel C-R Sınır İfadeleri	56
3.9.3. Yakın Frekans Durumu: Basit Kapalı-Biçim C-R Sınır İfadeleri	60
3.10. Bir Reel Sönümsüz Sinüsün Frekans Parametresinin Kestirimi	68
3.10.1. Giriş	68
3.10.2. MLE ile Frekans Kestirimi	68
3.10.3. MUSIC ile Frekans Kestirimi	70
3.10.4. MLE ve MUSIC Kestiricilerin Performans Analizi	72
3.11. İki Kompleks Sönümsüz Sinüsün Frekans Parametrelerinin Kestirimi	79
3.11.1. Giriş	79
3.11.2. MLE ile Frekans Kestirimi	79
3.11.3. MUSIC ile Frekans Kestirimi	81
3.11.4. MLE ve MUSIC Kestiricilerin Performans Analizi	83
3.12. Bir Reel Sönümlü Sinüsün Frekans Parametresinin Kestirimi	90
3.12.1. Giriş	90
3.12.2. MLE ile Frekans Kestirimi	90
3.12.3. DMUSIC ile Frekans Kestirimi	92
3.12.4. MLE ve DMUSIC Kestiricilerin Performans Analizi	93
3.13. İki Kompleks Sönümlü Sinüsün Frekans Parametrelerinin Kestirimi	107
3.13.1. Giriş	107
3.13.2. MLE ile Frekans Kestirimi	108
3.13.3. DMUSIC ile Frekans Kestirimi	109
3.14.4. MLE ve DMUSIC Kestiricilerin Performans Analizi	110
3.14. DMUSIC Kestiricisinin Birinci Derece Analizi	125
3.14.1. Giriş	125
3.14.2. Birinci Derece Analizi	126

3.14.3. Birinci Derece Teorik Yan İfadesi için Performans İncelemesi	128
3.14.4. Birinci Derece Teorik Varyans İfadesi için Performans İncelemesi	133
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA	139
4.1. Bir Reel Sönümsüz Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli	139
4.1.1. MLE ve MUSIC Kestiricilerin Performans Analizi	139
4.2. İki Kompleks Sönümsüz Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli	140
4.2.1. MLE ve MUSIC Kestiricilerin Performans Analizi	140
4.3. Bir Reel Sönümlü Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli	140
4.3.1. Çözümsel C-R Sınır İfadeleri	140
4.3.2. Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ve Kritik Faz Değerleri için Basit İfadeler	141
4.3.3. Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ile Kritik Faz Değerleri için Basit Kapalı-Biçim İfadeler	142
4.3.4. MLE ve DMUSIC Kestiricilerin Performans Analizi	142
4.4. İki Kompleks Sönümlü Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli	143
4.4.1. Çözümsel C-R Sınır İfadeleri	143
4.4.2. Yakın Frekans Durumu: Basit Kapalı-Biçim C-R Sınır İfadeleri	144
4.4.3. MLE ve DMUSIC Kestiricilerin Performans Analizi	145
4.5. DMUSIC için Birinci Derece Analizi	145
5. KAYNAKLAR	146
EK-1	150
EK-2	160
TEŞEKKÜR	
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER DİZİNİ

A	Öngörü matrisi
\arg	Argüman
α_0	Reel sinüsün genlik parametresi
$\hat{\alpha}_0$	Genlik parametresinin yansız kestiricisi
α_i	i . kompleks sinüsün genlik parametresi
$\hat{\alpha}_i$	i . kompleks sinüse ait genlik parametresinin yansız kestiricisi
$bias$	yan
β_0	Reel sinüsün sönüm katsayısı parametresi
$\hat{\beta}_0$	Sönüm katsayısının yansız kestiricisi
β_i	i . kompleks sinüsün sönüm katsayısı parametresi
$\hat{\beta}_i$	i . kompleks sinüse ait sönüm katsayısının yansız kestiricisi
B_{α_0}	Genlik parametresi için C-R sınırı
B_{φ_0}	Faz parametresi için C-R sınırı
B_{β_0}	Sönüm katsayısı parametresi için C-R sınırı
B_{ω_0}	Frekans parametresi için C-R sınırı
B_{α_i}	i . kompleks sinüse ait genlik parametresi için C-R sınırı
B_{φ_i}	i . kompleks sinüse ait faz parametresi için C-R sınırı
B_{β_i}	i . kompleks sinüse ait sönüm katsayısı parametresi için C-R sınırı
B_{ω_i}	i . kompleks sinüse ait frekans parametresi için C-R sınırı
C	Otokovaryans matrisi
δ	Kronecker delta
$\delta\omega$	Frekans farkı
e	Gürültü vektörü
E	Beklenen değer
φ_0	Reel sinüsün faz parametresi
$\hat{\varphi}_0$	Faz parametresinin yansız kestiricisi

φ_i	i . kompleks sinüsün faz parametresi
$\hat{\varphi}_i$	i . kompleks sinüse ait faz parametresinin yansız kestiricisi
\mathbf{g}_i	Gürültü altuzayı ile ilgili i . özvektör
\mathbf{G}	\mathbf{g}_i 'lerden oluşan matris
λ_i	i . özdeğer
J	Fisher bilgisi
\mathbf{J}	Fisher bilgi matrisi
K_0	sinüsün ω_0 frekansına, β_0 sönüm katsayısına ve N örnek sayısına bağlı katsayı
K_C	sinüsün ω_0 frekansına, β_0 sönüm katsayısına ve N örnek sayısına bağlı katsayı
K_S	sinüsün ω_0 frekansına, β_0 sönüm katsayısına ve N örnek sayısına bağlı katsayı
K'_0	sinüsün ω_0 frekansına, β_0 sönüm katsayısına ve N örnek sayısına bağlı katsayı
K'_C	sinüsün ω_0 frekansına, β_0 sönüm katsayısına ve N örnek sayısına bağlı katsayı
K'_S	sinüsün ω_0 frekansına, β_0 sönüm katsayısına ve N örnek sayısına bağlı katsayı
\ln	Doğal logaritma
L	Öngörü matrisi \mathbf{A} 'nın boyutu ($L \times L$)
M	Otokorelasyon matrisi \mathbf{R} 'nin boyutu ($M \times M$)
\max	Maksimum
N	Toplam örnek sayısı
$\Omega = \frac{2\pi}{N}$	Fourier limiti
p	Sinüs sayısı
\mathbf{R}	Otokorelasyon matrisi
s	Kompleks frekans
\mathbf{s}_i	Sinyal altuzayı ile ilgili i . özvektör

\mathbf{S}	\mathbf{s}_i 'lerden oluşan matris
t	Zaman indisi
θ	Bilinmeyen parametre
$\hat{\theta}$	θ 'nın kestiricisi
σ^2	Gürültünün varyansı
\mathbf{v}_k	k . tekil değer ile ilişkili vektör
\mathbf{V}_n	\mathbf{v}_k 'lardan oluşan matris
var	Varyans
ω_0	Reel sinüsün frekans parametresi
$\hat{\omega}_0$	Frekans parametresinin yansız kestiricisi
ω_i	i . kompleks sinüsün frekans parametresi
$\hat{\omega}_i$	i . kompleks sinüse ait frekans parametresinin yansız kestiricisi
\mathbf{y}	Veri vektörü
$(\cdot)_{\min}$	En iyi (en küçük) değer
$(\cdot)_{\max}$	En kötü(en büyük) değer
+	Kompleks eşlenik
T	Devrik
*	Kompleks eşlenik devrik

KISALTMALAR

C-R	Cramér-Rao
DMUSIC	Sönümlü MUSIC (Damped MUSIC)
MLE	Maksimum olabilirlik kestirici (Maximum Likelihood Estimator)
MSE	Ortalama karesel hata (Mean Square Error)
MUSIC	Çoklu sinyal sınıflandırma (Multiple Signal Classification)
MVU	En küçük varyanslı yansız (Minimum Variance Unbiased)
PDF	Olasılık yoğunluk fonksiyonu (Probability Density Function)
SNR	Sinyal gürültü oranı (Signal to Noise Ratio)

ŞEKİLLER DİZİNİ	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1.1. PDF'in bilinmeyen parametreye olan bağıllığı	2
Şekil 1.1.2. Doğru akımın gürültü içinde gerçekleşmesi	3
Şekil 1.1.3. Örnek ortalaması ve birinci örnek değeri için histogramlar	4
Şekil 3.5.1. MLE prensibi	28
Şekil 3.5.2. MLE için ızgara arama	30
Şekil 3.8.1. Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N=10$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$ alınmıştır.	45
Şekil 3.8.2. Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N=10$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$ alınmıştır.	46
Şekil 3.8.3. Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansı ve sönüm katsayısı β_0 ile değişimi. Örnek adeti $N=10$ alınmıştır.	46
Şekil 3.8.4. Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansı ve sönüm katsayısı β_0 ile değişimi. Örnek adeti $N=10$ alınmıştır.	47
Şekil 3.8.5. Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin gerçek ve asimtotik en kötü ve en iyi durumlardaki C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N=100$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.15$ 'tir.	54
Şekil 3.8.6. Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin gerçek ve asimtotik en kötü ve en iyi durumlardaki C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N=100$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.15$ 'tir.	55
Şekil 3.8.7. Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durumlardaki gerçek ve yaklaşık faz değerlerinin sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N=60$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.3$ 'dür.	55
Şekil 3.8.8. Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durumlardaki gerçek ve yaklaşık faz değerlerinin sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N=60$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.3$ 'dür.	56

- Şekil 3.9.1.** İki kompleks sinüsten birincisinin genlik kestirimine ilişkin C-R sınırının sinüsler arasındaki frekans farkı ile değişimi. Örnek adeti $N = 128$ alınmıştır ve sinüslerin sönüm katsayıları için dört farklı durum seçilmiştir. 59
- Şekil 3.9.2.** İki kompleks sinüsten birincisinin frekans kestirimine ilişkin C-R sınırının sinüsler arasındaki frekans farkı ile değişimi. Örnek adeti $N = 128$ alınmıştır ve sinüslerin sönüm katsayıları için dört farklı durum seçilmiştir. 60
- Şekil 3.9.3.** İki kompleks sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin gerçek ve asimtotik C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N = 100$: (a) sönüm katsayısı $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$; ve (b) sönüm katsayısı $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.15$. 66
- Şekil 3.9.4.** İki kompleks sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin gerçek ve asimtotik C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N = 100$: (a) sönüm katsayısı $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$; ve (b) sönüm katsayısı $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.15$. 67
- Şekil 3.10.1.** $N = 10$ ve $\delta\omega = 0.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 72
- Şekil 3.10.2.** $N = 10$ ve $\delta\omega = 1.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 73
- Şekil 3.10.3.** $N = 100$ ve $\delta\omega = 0.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 73
- Şekil 3.10.4.** $N = 100$ ve $\delta\omega = 1.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 74
- Şekil 3.10.5.** $N = 10$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 74
- Şekil 3.10.6.** $N = 10$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 75
- Şekil 3.10.7.** $N = 100$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 75
- Şekil 3.10.8.** $N = 100$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 76

Şekil 3.10.9. $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi	76
Şekil 3.10.10. $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi	77
Şekil 3.10.11. $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi	77
Şekil 3.10.12. $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi	78
Şekil 3.11.1. $N = 10$ ve $\delta\omega = 0.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	83
Şekil 3.11.2. $N = 10$ ve $\delta\omega = 1.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	84
Şekil 3.11.3. $N = 100$ ve $\delta\omega = 0.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	84
Şekil 3.11.4. $N = 100$ ve $\delta\omega = 1.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	85
Şekil 3.11.5. $N = 10$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi	85
Şekil 3.11.6. $N = 10$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi	86
Şekil 3.11.7. $N = 100$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi	86
Şekil 3.11.8. $N = 100$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi	87
Şekil 3.11.9. $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi	87
Şekil 3.11.10. $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi	88
Şekil 3.11.11. $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi	88

Şekil 3.11.12. $\delta\omega/\Omega=1.5$ ve $SNR=40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi	89
Şekil 3.12.1. $N=10$, $\delta\omega=0.5\Omega$ ve $N\beta_0=0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	93
Şekil 3.12.2. $N=10$, $\delta\omega=0.5\Omega$ ve $N\beta_0=1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	94
Şekil 3.12.3. $N=10$, $\delta\omega=1.5\Omega$ ve $N\beta_0=0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	94
Şekil 3.12.4. $N=10$, $\delta\omega=1.5\Omega$ ve $N\beta_0=1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	95
Şekil 3.12.5. $N=100$, $\delta\omega=0.5\Omega$ ve $N\beta_0=0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	95
Şekil 3.12.6. $N=100$, $\delta\omega=0.5\Omega$ ve $N\beta_0=1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	96
Şekil 3.12.7. $N=100$, $\delta\omega=1.5\Omega$ ve $N\beta_0=0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	96
Şekil 3.12.8. $N=100$, $\delta\omega=1.5\Omega$ ve $N\beta_0=1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi	97
Şekil 3.12.9. $N=10$, $SNR=20dB$ ve $N\beta_0=0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi	97
Şekil 3.12.10. $N=10$, $SNR=20dB$ ve $N\beta_0=1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi	98
Şekil 3.12.11. $N=10$, $SNR=40dB$ ve $N\beta_0=0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi	98

- Şekil 3.12.12.** $N = 10$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 99
- Şekil 3.12.13.** $N = 100$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 99
- Şekil 3.12.14.** $N = 100$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 100
- Şekil 3.12.15.** $N = 100$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 100
- Şekil 3.12.16.** $N = 100$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 101
- Şekil 3.12.17.** $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_0$ ile değişimi 101
- Şekil 3.12.18.** $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_0$ ile değişimi 102
- Şekil 3.12.19.** $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_0$ ile değişimi 102
- Şekil 3.12.20.** $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_0$ ile değişimi 103
- Şekil 3.12.21.** $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 103
- Şekil 3.12.22.** $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 104
- Şekil 3.12.23.** $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 104

- Şekil 3.12.24.** $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 105
- Şekil 3.12.25.** $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 105
- Şekil 3.12.26.** $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 106
- Şekil 3.12.27.** $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 106
- Şekil 3.13.1.** $N = 10$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 111
- Şekil 3.13.2.** $N = 10$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 111
- Şekil 3.13.3.** $N = 10$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 112
- Şekil 3.13.4.** $N = 10$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 112
- Şekil 3.13.5.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 113
- Şekil 3.13.6.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 113
- Şekil 3.13.7.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 114

- Şekil 3.13.8.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 114
- Şekil 3.13.9.** $N = 10$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 115
- Şekil 3.13.10.** $N = 10$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 115
- Şekil 3.13.11.** $N = 100$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 116
- Şekil 3.13.12.** $N = 100$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi 116
- Şekil 3.13.13.** $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi 117
- Şekil 3.13.14.** $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi 117
- Şekil 3.13.15.** $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi 118
- Şekil 3.13.16.** $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi 118
- Şekil 3.13.17.** $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi 119
- Şekil 3.13.18.** $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi 119
- Şekil 3.13.19.** $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi 120
- Şekil 3.13.20.** $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi 120

- Şekil 3.13.21.** $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 20dB$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 121
- Şekil 3.13.22.** $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 20dB$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 121
- Şekil 3.13.23.** $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 122
- Şekil 3.13.24.** $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 122
- Şekil 3.13.25.** $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 20dB$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 123
- Şekil 3.13.26.** $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 20dB$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 123
- Şekil 3.13.27.** $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 124
- Şekil 3.13.28.** $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi 124
- Şekil 3.14.1.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 129
- Şekil 3.14.2.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 130
- Şekil 3.14.3.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 130
- Şekil 3.14.4.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 131
- Şekil 3.14.5.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 131

- Şekil 3.14.6.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 132
- Şekil 3.14.7.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 132
- Şekil 3.14.8.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 133
- Şekil 3.14.9.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 134
- Şekil 3.14.10.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 135
- Şekil 3.14.11.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 135
- Şekil 3.14.12.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 136
- Şekil 3.14.13.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 136
- Şekil 3.14.14.** $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 137
- Şekil 3.14.15.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 137
- Şekil 3.14.16.** $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi 138

ÇİZELGELER DİZİNİ**Sayfa No**

Çizelge 3.9.1. Genlik ve frekans sınırlarının (3.9.12) ve (3.9.13) ifadeleriyle verilen yaklaşık değerlerindeki mutlak bağıl hataların ortalama ve standart sapması (yüzde olarak). 62

Çizelge 3.9.2. Genlik ve frekans sınırlarının (3.9.12) ve (3.9.13) ifadeleriyle verilen yaklaşık değerlerindeki mutlak bağıl hataların maksimum değeri (yüzde olarak). 63

1. GİRİŞ

1.1. Kestirim Teorisi

Modern kestirim teorisi bilgi edinimi için tasarlanmış pek çok elektronik sinyal işleme sisteminin kalbini oluşturur. Bu sistemlere örnek olarak radar, sonar, ses, görüntü işleme, biyomedikal, haberleşme, kontrol ve sismoloji sistemleri verilebilir. Bilgi edinimi amacıyla tasarlanmış sistemlerin paylaştıkları ortak problem bir grup parametrenin kestirimine olan ihtiyaçlarıdır. Parametre değerlerinin kestirimi sürekli zaman dalga biçimlerinden örneklenen veri kümeleri kullanılarak gerçekleştirilir. Matematiksel olarak ifade edilirse, bilinmeyen θ parametresine bağlı N adet veriden oluşan $\{y(0), y(1), \dots, y(N-1)\}$ kümesi kullanılarak $\hat{\theta}$ kestiricisi aracılığıyla θ 'nın değeri elde edilmek istenir:

$$\hat{\theta} = g(y(0), y(1), \dots, y(N-1)) \quad (1.1.1)$$

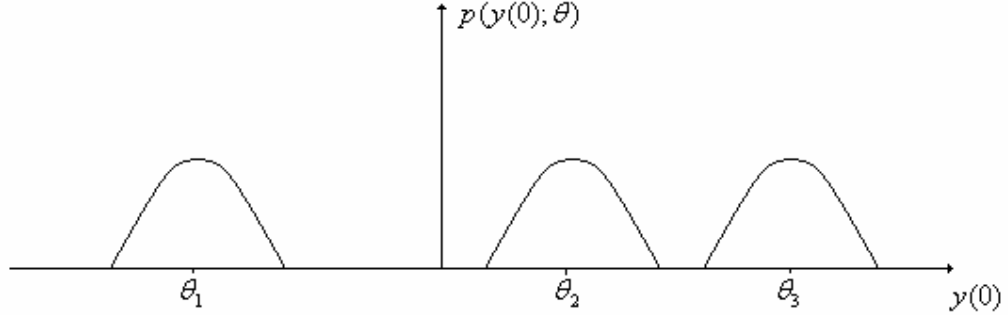
Burada g kestiriciyi tanımlayan fonksiyondur. Kestirimin başarısı bu fonksiyonun seçimine bağlıdır.

Başarılı kestiricilerin tanımlanmasında ilk adım bilinmeyen parametreye bağlı veri kümesinin modellenmesidir. Veriler doğal olarak rasgele oldukları için olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) yoluyla tanımlanırlar. PDF, bilinmeyen parametre θ 'nın bir fonksiyonu biçiminde düzenlenirse farklı θ değerleri için farklı değerler alan PDF kümesine sahip oluruz. Bir örnek verecek olursak; $N=1$ ve θ parametresi ortalama değer olsun. Bu durumda verinin PDF'i aşağıdaki gibi olabilir:

$$p(y(0); \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y(0) - \theta)^2\right) \quad (1.1.2)$$

Şekil 1.1.1'de θ 'nın farklı değerleri için PDF fonksiyonunun değişimi gösterilmiştir. Şekilden açıkça görüldüğü üzere θ parametresi $y(0)$ 'nin olasılığını

etkilemektedir. Dolayısıyla θ 'nın değeri $y(0)$ gözlemlenerek elde edilebilir. Örnek olarak eğer $y(0)$ negatif ise $\theta = \theta_2$ olması şüphelidir, $\theta = \theta_1$ olması daha muhtemeldir.



Şekil 1.1.1. PDF'in bilinmeyen parametreye olan bağılılığı

PDF fonksiyonunun bu özelliği başarılı kestiricilerin tasarımı için çok önemlidir. Gerçek problemlerde PDF fonksiyonu bize verilmez. Problemin şartlarına ve sınırlamalarına uygun, aynı zamanda matematiksel olarak kolay bir tanesinin seçilmesi gerekir.

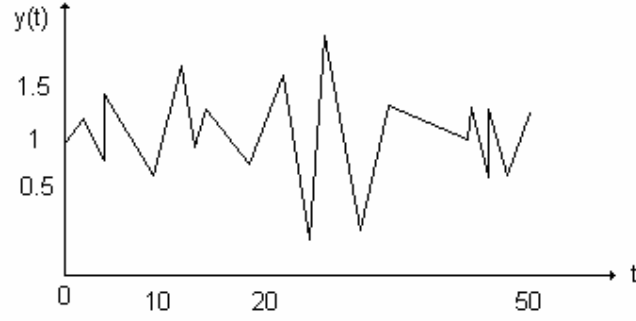
Uygun PDF fonksiyonu seçildikten sonra, problem en iyi kestiricinin belirlenmesi problemine dönüşür. Kestirici, veri kümesinin her bir gerçekleşmesinde θ 'ya bir değer atayan kural gibi düşünülebilir. Verilen bir gerçekleşme için elde edilen θ değeri ise θ 'nın bir kestirim değeridir. Kestirici ve kestirim değeri arasındaki ilişki rasgele değişken ve onun aldığı bir değer arasındaki ilişkiye benzetilebilir.

Şekil 1.1.2'de verilen veri kümesini ele alalım. İlk bakışta gürültü içindeki bir doğru akım bileşeni A 'dan oluştuğu kolayca görülebilir. Veriyi aşağıdaki gibi modelleyebiliriz:

$$y(t) = A + e(t), \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.1.3)$$

burada $e(t)$ sıfır ortalamalı gürültü işlevidir. Veri kümesi $\{y(0), y(1), \dots, y(N-1)\}$ kullanılarak A 'yı kestirmek istiyoruz. A , $y(t)$ 'nin ortalama değeri olduğu için ($e(t)$ sıfır ortalamalı gürültü bileşeni), A 'yı aşağıdaki biçimde kestirmek uygun olabilir (veri kümesinin ortalama değeri):

$$\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t) \quad (1.1.4)$$



Şekil 1.1.2. Doğru akımın gürültü içinde gerçekleşmesi

Bu durumda bazı sorular aklımıza gelir:

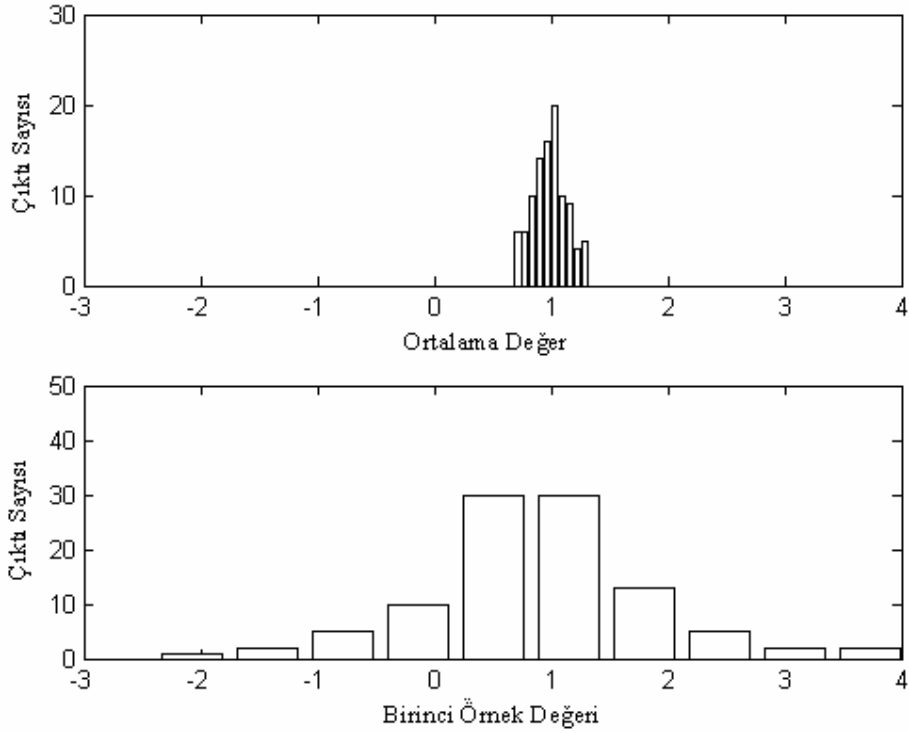
1. \hat{A} , A 'ya ne kadar yakın olacak?
2. Ortalama değer hesabından daha iyi bir kestirici var mıdır?

Şekil 1.1.2'de yer alan veri kümesi için ortalama değer $\hat{A} = 0.9$ olur, bu değer A 'nın gerçek değeri olan $A = 1$ 'e yakındır. Bir başka kestirici aşağıdaki biçimde olabilir:

$$\tilde{A} = y(0) \quad (1.1.5)$$

Bu kestiricide veri kümesinin bütün elemanları kullanılmadığından performansının yüksek olmayacağını ilk bakışta söyleyebiliriz. Gürültü etkisini azaltacak herhangi bir ortalama değer alınmamaktadır. Fakat, Şekil 1.1.2'deki veri kümesi için $\tilde{A} = 0.95$ olur, bu değer A 'nın gerçek değerine ortalama değer kestiricisinden daha yakındır. Bu sonuçlardan hareketle \tilde{A} 'nın \hat{A} 'dan daha iyi bir kestirici olduğu kanısına varabilir miyiz? Cevap kesinlikle hayırdır. Çünkü kestirici, veri kümesinin bir fonksiyonudur; bir rasgele değişkendir. \tilde{A} kestiricisi sadece bir gerçekleşme için gerçek değere yakın bir sonuç vermiştir. Kestirici performansının belirlenmesi işlemi istatistiksel olarak yapılmalıdır.

İncelediğimiz veri modelinde $A = 1$ değeri sabit tutularak, gürültü bileşeni $e(t)$ 'in farklı değerlerinin eklenmesi yoluyla $y(t)$ için bir gerçekleşme kümesi elde edelim. Daha sonra her bir veri kümesi için iki kestiricinin değerlerini belirleyerek histogramlarını çizelim. 100 gerçekleşme için elde edilen histogramlar Şekil 1.1.3'te verilmiştir.



Şekil 1.1.3. Örnek ortalaması ve birinci örnek değeri için histogramlar

Şekilden de görüleceği gibi \hat{A} , daha iyi bir kestiricidir, gerçek değer $A = 1$ civarında daha fazla yoğunlaşmıştır. \hat{A} 'nın daha iyi bir kestirici olduğunu kanıtlayabilmemiz için varyansının daha az olduğunu göstermeliyiz. Bunu yapmadan önce modelde yer alan gürültü bileşeni $e(t)$ için daha önce yaptığımız varsayıma (sıfır ortalamalı olması) ek olarak ilişkisiz ve eşit σ^2 varyansa sahip olduğu varsayımlarını yapalım. Daha sonra ilk olarak her iki kestiricinin ortalama değerlerini elde edelim:

$$E(\hat{A}) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t)\right) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} E(y(t)) = A$$

$$E(\tilde{A}) = E(y(0)) = A$$

Ortalama değerde her iki kestiricide gerçek değeri vermektedir.

Daha sonra kestiricilerin varyanslarını elde edelim:

$$\text{var}(\hat{A}) = \text{var}\left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t)\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{t=0}^{N-1} \text{var}(y(t)) = \frac{\sigma^2}{N}$$

$$\text{var}(\tilde{A}) = \text{var}(y(0)) = \sigma^2 > \text{var}(\hat{A})$$

\hat{A} kestiricisinin varyansı toplam veri sayısı ile ters orantılı iken, \tilde{A} kestiricisinin varyansı veri uzunluğu ne olursa olsun sabittir, σ^2 'dir.

Sonuç olarak bir kestiricinin iyi bir kestirici olabilmesi için ortalama değerde gerçek değeri vermesi (yansız olması) tek başına yeterli değildir. Yansız bir kestiricinin performansı varyansının küçük olması ile ilişkilidir. Pratik uygulamalarda öne çıkan bir diğer özellik ise hesaplama karmaşıklığıdır. Kestirici performansı ve hesaplama karmaşıklığı arasında kabul edilebilir bir denge kurulmalıdır.

1.2. Frekans Kestirimi

Sinyal işleme alanında karşılaşılan pek çok önemli problem gürültü içindeki bir ya da daha fazla sönümlü veya sönümsüz sinüsün parametrelerinin kestirimine dayanmakta veya bu probleme dönüştürülebilmektedir. Çoklu yol ortamında katlı zaman gecikmesi kestirimi problemi, veri Fourier bölgesine taşındıktan sonra, sinüsün parametre kestirimi problemine dönüşür. Zayıflama parametresi genlik parametresinin, zaman gecikmesi frekans parametresinin rolünü üstlenir (Kay 2000). Vektörel sinyal işleme alanında karşılaşılan varış yönü kestirimi (DOA) problemi de çok sayıdaki sinüsün frekanslarının kestirimi problemine dönüşür (Van Veen ve Buckley 1988). Nükleer manyetik rezonans (NMR) sinyalleri güçlü ve zayıf sönüm katsayısına sahip sinüslerin bir karışımı olarak modellenir (Barkhauisen ve ark. 1985). Ses sinyallerinin analizinde (Steiglitz 1977) ve doğrusal sistem belirleme problemlerinde (Steiglitz ve McBride 1965) sönümlü sinüslerin parametre kestirimi problemi ile karşılaşırız.

Bir veri modelinde, modele doğrusal olmayan biçimde bağlı parametrelerin kestirimi yapıldıktan sonra doğrusal biçimde bağlı diğer parametrelerin kestirimi, model

doğrusal model biçiminde düzenlenebildiği için, en küçük kareler yöntemi ile kolaylıkla gerçekleştirilir.

Frekans parametreleri sinüslere doğrusal olmayan biçimde bağlı iken faz ve genlik parametreleri (veya iki parametre birlikte ele alınırsa kompleks genlik parametresi) doğrusal biçimde bağlıdır. Frekans parametreleri kestirildikten sonra faz ve genlik parametrelerinin kestirimi kolay bir şekilde gerçekleştirilir.

Sonuç olarak frekans kestirimi problemi sinyal işleme alanında oldukça fazla ilgi çeken bir konudur ve bu tez çalışmasının temel ilgi alanını oluşturmaktadır.

1.3. Tezin Motivasyonu

Cramér-Rao (C-R) sınırı, bir takım zayıf koşulların sağlanması halinde herhangi bir yansız kestiricinin varyansı için bir alt sınır verir (Van Trees 1968). Dolayısıyla, C-R sınırı kullanılan kestiriciden bağımsız olarak veri modelleri için elde edilebilecek en yüksek performansı vermektedir. Bundan dolayı C-R sınırı pratik kestiricilerin performansını değerlendirmede bir ölçüt olarak sıkça kullanılmaktadır. C-R sınırı, modele ilişkin Fisher bilgi matrisinin evriği alınmak suretiyle bulunur. Bu matrisin birden fazla sinyal içeren modeller için karmaşık bir yapıya sahip olmasından dolayı C-R sınırı çözümsel yerine sayısal yoldan hesap edilmektedir (Rife ve Boorstyn 1976, Yao ve Pandit 1995). Dolayısıyla sınırların model parametrelerine olan bağlılıkları genellikle sayısal yoldan incelenmektedir. Çözümsel sınır ifadeleri performans limitlerinin kuramsal olarak incelenmesine ve en uygun kestirim senaryolarının hazırlanmasına olanak verdiği için önem arz ederler.

Sinüsler arası frekans farkının Fourier limitinin ($2\pi/N$) altında olduğu bölgede frekans parametrelerinin kestirimi klasik periodogram temelli kestiriciler ile gerçekleştirilemez (Stoica ve Moses 1997). Bu durumdaki frekans parametrelerinin kestirimi için önerilen kestiriciler “yüksek çözünürlüklü frekans kestiriciler” olarak isimlendirilir. Yüksek çözünürlüklü kestiricilerin tasarımı ve performans analizi sinyal işleme alanında yoğun ilgi görmektedir.

Sönümlü sinüslerden oluşan sinyallerin durağan olmaması nedeniyle korelasyon matrisi yazılamamaktadır. Bu nedenden dolayı pek çok iyi bilinen ve verimli kestirim

yöntemi, özellikle yüksek çözünürlüklü kestiriciler, sönümlü sinüslerden oluşan veri modellerinde parametre kestirimi için uygulanamamaktadır.

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sinüs ve kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sinüsten oluşan iki zaman serisi veri modeli birden fazla sinyal içeren modellerin birer prototipidirler ve bu modeller için tasarlanmış parametre kestiricilerin performans analizlerinde sıkça kullanılmaktadırlar.

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümsüz sinüs ve kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümsüz sinüsten oluşan iki zaman serisi veri modeli için frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınırlarının çözümsel ifadeleri (Dilaveroğlu 1998) kaynağında verilmiştir. Yazar, bu çalışmasında, her iki zaman serisi veri modeli için frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınırlarının model parametreleriyle değişimlerini incelemiş, en kötü ve en iyi durum C-R sınır ifadeleri ve bu sınırlara karşılık gelen kritik faz ifadelerini türetmiştir. Özellikle, frekans farkının Fourier limitinin altında olduğu bölge için C-R sınırlarının davranışlarını detaylı biçimde incelemiştir. Bu bölge için en kötü ve en iyi durum C-R sınırları ve bu sınırlara karşılık gelen kritik faz değerleri için basit ifadeler sunmuştur. Bu bölgede her iki veri modeline ait C-R sınır ifadelerinin faz farkına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, en kötü ve en iyi durum C-R sınırları ve bu sınır değerleri ile ilişkili kritik faz değerleri önem kazanmaktadır.

Yazar, incelemiş olduğu her iki zaman serisi veri modelindeki diğer parametrelerin, genlik ve faz parametreleri, kestirimine ilişkin C-R sınırları için benzer çalışmaları (Dilaveroğlu 1998,1999) kaynaklarında sunmuştur.

Özet olarak aktarılan bu bilgilerin yol göstericiliği sonucunda, tez çalışmasında, beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüs ve kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümlü sinüsten oluşan iki zaman serisi veri modeli ele alınmıştır. Dilaveroğlu (1998) tarafından kullanılan işlem adımları kullanılarak her iki model için de frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin çözümsel C-R sınır ifadelerinin elde edilmesi, frekans farkının Fourier limitinin altında olduğu bölge için frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin performans limitlerinin incelenmesi ve seçilecek olan yüksek çözünürlüklü bir frekans kestirim yöntemi ile asimtotik olarak en küçük varyansa sahip yansız kestirici olan MLE'nin performanslarının karşılaştırmalı olarak incelenmesi hedeflenmiştir.

1.4. Tezin Amaç ve Kapsamı

Tez çalışmasında reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüs ve kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümlü sinüsten oluşan iki zaman serisi veri modelinin ele alınması, her iki model için (özellikle frekans farkının Fourier limitinin altında olduğu bölge için) frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin performans limitlerinin belirlenmesi, model parametrelerine olan bağılıklarının incelenmesi ve seçilecek olan yüksek çözünürlüklü bir frekans kestirimi yöntemi ile asimtotik olarak en küçük varyansa sahip yansız kestirici olan MLE'nin performanslarının karşılaştırmalı olarak incelenmesi amaçlanmıştır.

1.5. Tezin Katkıları

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için;

Reel sönümlü sinüsün bütün parametrelerinin (frekans, sönüm katsayısı, genlik, faz) kestirimine ilişkin çözümsel C-R sınır ifadeleri türetilerek en kötü ve en iyi durum C-R sınır ifadeleri (Yılmaz ve Dilaveroğlu 2004) ve bu sınır değerleri ile ilişkili kritik faz ifadeleri elde edildi.

Frekans farkı Fourier limitinin altındayken, alçak frekans durumu için, en kötü ve en iyi durum C-R sınırları ve bu sınır değerleri ile ilişkili kritik faz değerleri için basit ifadeler sunuldu (Yılmaz ve Dilaveroğlu 2004).

Alçak frekanslı reel sönümlü sinüs için yeterince büyük toplam örnek sayısı ve düşük sönüm katsayısı varsayımları altında en kötü ve en iyi durum C-R sınırları ve bu sınırlar ile ilişkili kritik faz değerleri için basit kapalı-biçim (asimtotik) ifadeler elde edildi (Yılmaz ve Dilaveroğlu 2005,2006).

Reel sönümlü sinüsün frekans parametresinin kestirimi MLE ve sönümlü MUSIC kestiricileri kullanılarak gerçekleştirildi. Kestiricilerin performansı, özellikle alçak frekans durumu için, C-R sınırı performans ölçütü olarak seçilerek karşılaştırmalı olarak incelendi.

Kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için;

İki kompleks sönümlü sinüsün bütün parametreleri (frekans, sönüm katsayısı, genlik, faz) için çözümsel C-R sınır ifadeleri türetilerek toplam örnek sayısının yeterince büyük olduğu durum için yaklaşık C-R sınır ifadeleri elde edildi (Yılmaz ve Dilaveroğlu 2005).

Frekans farkı Fourier limitinin altındayken, yakın frekans durumu için, yeterince büyük toplam örnek sayısı ve düşük sönüm katsayısı varsayımları altında C-R sınır ifadeleri için basit kapalı-biçim (asimtotik) ifadeler elde edildi (Yılmaz ve Dilaveroğlu 2006).

İki kompleks sönümlü sinüsün frekans parametrelerinin kestirimi MLE ve sönümlü MUSIC kestiricileri kullanılarak gerçekleştirildi. Kestiricilerin performansı, özellikle yakın frekans durumu için, C-R sınırı performans ölçütü olarak seçilerek karşılaştırmalı olarak incelendi.

Sönümlü MUSIC kestiricisi için birinci derece analizi yapılarak teorik yan ve varyans ifadeleri elde edildi. Teorik ifadelerin başarısı sayısal örnekler yardımıyla desteklendi.

Tez çalışmasında bütünlüğü sağlamak amacıyla incelenen her iki zaman serisi veri modelinin sönümsüz sinüs durumları için, Dilaveroğlu (1998,1998,1999) tarafından incelenen modeller, frekans parametrelerinin kestirimi MLE ve MUSIC kestiricileri kullanılarak gerçekleştirildi. Kestiricilerin performansı, özellikle alçak/yakın frekans durumu için, C-R sınırı performans ölçütü olarak seçilerek, karşılaştırmalı olarak incelendi.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Giriş

Gürültü içindeki sinüslerden oluşan veri modellerinin parametrelerinin kestirimi sinyal işleme alanında büyük ilgi görmekte ve yapılan çalışmalar literatürde çok geniş yer tutmaktadır. Tez çalışmasında ele alınan problemle ilgili literatürün gelişiminde yapı taşı olan temel çalışmaları, tez çalışmasının akışına uygun olarak, kestirici performans ölçütü C-R sınırı ve kestirim yöntemi (yeni yöntem önerilmesi, önerilmiş bir kestirim yönteminin iyileştirilmesi) üzerinde yapılan çalışmalar olarak iki ana başlıkta toplayabiliriz.

2.2. Cramér-Rao Sınırı

Sönümsüz sinüslerin parametre kestirimine ilişkin C-R sınırları ilk olarak Rife ve Boorstyn (1976) tarafından türetilmiş ve asimtotik olarak Stoica ve arkadaşları (1987) tarafından incelenmiştir. Stoica ve Nehorai (1989) çok sayıda kompleks sinüsün parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınırları için kullanışlı ifadeler türetmiştir. Lee (1992), Stoica ve Nehorai (1989)'nin ifadelerini küçük frekans farkı durumunda inceleyerek basit ifadeler biçiminde sunmuştur. Fakat, bu ifadeler, frekans küçüldükçe frekansları ayırt edebilmek için yüksek sinyal gürültü oranlarına ihtiyaç duymaktadırlar. Bu durum, ifadeleri, yüksek çözünürlüklü frekans kestiricilerinin performans incelemelerinde kullanışsız kılmaktadır. Dilaveroğlu (1998) reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümsüz sinüs ve kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümsüz sinüsün frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin çözümsel C-R sınırlarını türetmiştir. Daha sonra bu sınırları küçük frekans farkı durumunda inceleyerek en kötü ve en iyi durum C-R sınır değerleri ile bu sınır değerlerine ilişkin kritik faz değerleri için basit ifadeler sunmuştur. Her iki modelin frekans parametrelerinin dışındaki diğer parametrelerinin (genlik, faz) kestirimine ilişkin C-R sınırları için de benzer çalışmaları (Dilaveroğlu 1998,1999) kaynaklarında vermiştir.

Beyaz Gauss gürültü içindeki çok sayıda sönümlü sinüsün parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınır ifadeleri için, sinüsler arası frekans farklarının büyük

olduğu durumda, bazı yaklaşık sonuçlar Wigren ve Nehorai (1991) tarafından elde edilmiştir. Bu ifadeler, tez çalışmasında karşılaştırma amacıyla kullanılmıştır. Yao ve Pandit (1995) aynı problemi, vektörel parametre durumunu da içine katarak ve Wigren ve Nehorai (1991) tarafından yapılan varsayımları yapmadan daha genel durum için, ele almış ve sinüslerin parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınır ifadelerini türetmiştir. Bu ifadeler yardımıyla C-R sınırlarının sinüsün parametreleriyle değişimleri hakkında bazı çözümsel sonuçlara varılmıştır. Bu sonuçlar özetlenirse; reel sönümlü sinüslerin parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınırları sinüslerin frekansı Fourier limitinin altındayken sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlıdır, kompleks sönümlü sinüslerin parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınırları sinüslerin fazlarından bağımsız ve frekanslarına frekans farkları aracılığı ile bağlıdır, reel ve kompleks sönümlü sinüslerde genlik parametresi hariç diğer parametrelerin kestirimine ilişkin C-R sınırları sinyal gürültü oranı ile, genlik parametresine ilişkin C-R sınırı ise gürültünün varyansı ile ters orantılıdır. Fakat, bu ifadeler, C-R sınırlarının sinüsün parametrelerine olan bağlılıkları hakkında detaylı bilgi vermemektedir. Swingler (1999) kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki bir kompleks sönümlü sinüsün parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınırlarını, sınırların sinüsün parametrelerine olan bağlılıkları hakkında daha fazla bilgi veren, basit ifadeler biçiminde sunmuştur.

Tez çalışmasında reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüs ve kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümlü sinüsten oluşan iki zaman serisi veri modeli için frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin C-R sınırlarının çözümsel olarak elde edilmesi, özellikle, frekans farkının Fourier limitinin altında olduğu bölge için performans limitlerinin belirlenmesi ve bu bölgede frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırlarının model parametrelerine olan bağlılıklarının incelenmesi amaçlanmıştır.

2.3. Kestirim Yöntemi

MLE asimtotik olarak C-R sınırını yakalayan en küçük varyanslı yansız kestiricidir (Kay 1993). Hesaplama yükü oldukça ağır bir yöntem olduğundan dolayı pratikte genellikle tercih edilmemekte veya hesaplama yükünü hafifletici yöntemlerle birlikte kullanılmaktadır.

İlinti matrisi temelli kestiriciler yüksek sinyal gürültü oranlarında ve/veya büyük toplam örnek sayılarında C-R sınırlarına yaklaşarak mükemmel performans sağlarlar. Fakat, bir eşik sinyal gürültü oranı ve/veya toplam örnek veri sayısının altında, bu eşik değer en büyük olabilirlik kestiricisinin eşik değerinin oldukça üstündedir, performansları ciddi bir şekilde düşmektedir (Tufts ve Kumaresan 1982). İlinti temelli kestiricilere Prony, Pisarenko ve Yule-Walker yöntemleri örnek olarak verilebilir. Prony yöntemi tutarlı kestirimler yapamamaktadır. Prony yönteminde karşılaşılan bu sorun Pisarenko yöntemi tarafından giderilmiştir. Fakat, Pisarenko yöntemi tutarlı kestirimler yapmasına rağmen bazı durumlarda zayıf doğruluk derecesine sahiptir. Temel Yule-Walker yöntemleri Pisarenkonun bu güçsüz tarafını gideremez. Tutarlı kestirimler yapmasına rağmen zayıf doğruluk derecesine sahip olabilir (Kay ve Marple 1981).

İlinti temelli bu kestiriciler MLE ile birlikte kullanılarak performansları artırılmaktadır. İlinti temelli kestiriciler ile başlangıç kestirimi yapılarak daha sonra özyineli MLE kullanılmaktadır (Rife ve Boorstyn 1976, Tufts ve Kumaresan 1980, Stoica ve ark. 1989).

MUSIC yöntemi de korelasyon matrisine dayanan kestirim yöntemlerindedir. Pisarenko ve Yule-Walker ile birlikte aynı zamanda yüksek çözünürlüklü kestiriciler olarak bilinen yöntemler arasındadır. MUSIC ilk kez Schmidt (1979) ve Bienvenue (1979) tarafından eşzamanlı olarak önerilmiştir. MUSIC yönteminin performans analizi sayısal ve çözümsel olarak çok detaylı bir biçimde Stoica ve Nehorai (1989) tarafından gerçekleştirilmiştir. MUSIC yönteminin korelasyonsuz sinyallerde büyük toplam örnek sayısı ve büyük korelasyon matrisi boyutu için (veya yüksek sinyal gürültü oranlarında) C-R sınırını yakalayacağı, korelasyonlu sinyallerde C-R sınırını yakalayamayacağı, yüksek korelasyonlu sinyallerde ise bu şartlar sağlandığında bile verimsiz olacağı gösterilmiştir. MUSIC yöntemi kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki kompleks sönümsüz sinüslerin frekans kestirimi için önerilmiştir. Stoica ve Eriksson (1995) tarafından MUSIC yönteminin reel beyaz Gauss gürültü içindeki reel sönümsüz sinüslerin frekans parametrelerinin kestirimine, reel sinüslerin iki kompleks sinüsün toplamı biçiminde düşünülerek, uygulanabileceğini ve bu durumda kestirici doğruluğundaki düşüşün kabul edilebilir olduğu gösterilmiştir.

Sönümlü sinüslerden oluşan sinyallerin durağan olmaması nedeniyle korelasyon matrisi yazılamamaktadır. Bu nedenden dolayı pek çok iyi bilinen kestirim yöntemi

sönümlü sinüslerden oluşan veri modellerinde uygulanamamaktadır (Haykin 1991). Bu problemin çözümü için pek çok yöntem önerilmiştir. Bu yöntemlerden en ilgi çekenlerinden birisi Kumaresan ve Tufts (1982) tarafından önerilen geriye doğru doğrusal tahmin yöntemidir. Bu yöntem yüksek sinyal gürültü oranlarında ve düşük sönüm katsayısı durumunda C-R sınırını yakalayabilmektedir. Fakat sinyal gürültü oranı düşük olduğunda veya yüksek sönüm katsayısı durumunda sinyal parametrelerini verimli bir şekilde kestirememektedir. Kumaresan ve Tufts (1982) algoritmasındaki bu yüksek sinyal gürültü oranı eşik değerini düşürmek için pek çok yöntem önerilmiştir. Bunlardan iyi bilinen iki tanesi toplam en küçük kareler yöntemi (Rahman ve Yu 1987) ve özyineli MLE yöntemidir (Bresler ve Macovski 1986). Kumaresan-Tufts ve toplam en küçük kareler yöntemleri öngörü matrisinin rank eksiltme özelliğine dayanmaktadırlar ve bu matrisin Hankel özelliğini ihmal etmektedirler. Li ve Arkadaşları (1997) tarafından öngörü matrisinin Hankel özelliğinin kullanılmasıyla her iki yöntem için de kestirim performansının artırıldığı gösterilmiştir. Aynı zamanda Li ve ark. (1995,1995) öngörü matrisini özel bir biçimde ayrıştırarak iki özelliği birlikte kullanan ve algoritma yapısı olarak MUSIC kestiricisine benzeyen DMUSIC kestiricisini önermişler ve yöntemin performansını sayısal olarak incelemişlerdir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Veri Modelleri

3.1.1. Giriş

Bu bölümde tez çalışmasında ele alınan gürültü içindeki bir reel sönümsüz sinüs, iki kompleks sönümsüz sinüs, bir reel sönümlü sinüs ve iki kompleks sönümlü sinüsten oluşan dört farklı zaman serisi veri modelinin tanıtımı yapılmıştır. Bu modeller birden fazla sinyal içeren modellerin birer prototipidirler ve sinyal parametreleri için tasarlanmış kestiricilerin başarımını test etmede yaygın olarak kullanılmaktadırlar.

3.1.2. Bir Reel Sönümsüz Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli

Bir reel sönümsüz sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli aşağıda verilmiştir:

$$y(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + e(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.1)$$

Burada α_0 , ϕ_0 ve $\omega_0 \in (0, \pi)$ parametreleri sinüsün sırasıyla, genliğini, fazını ve frekansını göstermektedir. N toplam örnek sayısını ve $e(t)$ toplanır reel gürültü bileşenini temsil etmektedir.

3.1.3. İki Kompleks Sönümsüz Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli

İki kompleks sönümsüz sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli aşağıda verilmiştir:

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i e^{j(\omega_i t + \phi_i)} + e(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.2)$$

Burada α_i , ϕ_i ve $\omega_i \in (0, 2\pi)$ parametreleri i . sinüsün, sırasıyla, genliğini, fazını ve frekansını göstermektedir $i = (1, 2)$. N toplam örnek sayısını ve $e(t)$ toplanır kompleks gürültü bileşenini temsil etmektedir.

3.1.4. Bir Reel Sönümlü Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli

Bir reel sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli aşağıda verilmiştir:

$$y(t) = \alpha_0 e^{-\beta_0 t} \cos(\omega_0 t + \phi_0) + e(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.3)$$

Burada α_0 , ϕ_0 , β_0 ve $\omega_0 \in (0, \pi)$ parametreleri sinüsün sırasıyla, genliğini, fazını, sönüm katsayısını ve frekansını göstermektedir. N toplam örnek sayısını ve $e(t)$ toplanır reel gürültü bileşenini temsil etmektedir.

3.1.5. İki Kompleks Sönümlü Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli

İki kompleks sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli aşağıda verilmiştir:

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i e^{-\beta_i t} e^{j(\omega_i t + \phi_i)} + e(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.4)$$

Burada α_i , ϕ_i , β_i ve $\omega_i \in (0, 2\pi)$ parametreleri i . sinüsün, sırasıyla, genliğini, fazını, sönüm katsayısını ve frekansını göstermektedir $i = (1, 2)$. N toplam örnek sayısını ve $e(t)$ toplanır kompleks gürültü bileşenini temsil etmektedir.

3.2. Gürültü Modeli ve Sinyal Gürültü Oranı

3.2.1. Giriş

Bu bölümde tez çalışmasında gürültü bileşeni olarak seçilen gürültü modellerinin zaman bölgesi istatistiksel özellikleri verilmiş ve sinyal gürültü oranının tanımı yapılmıştır.

3.2.2. Beyaz Gauss Gürültü

Tez çalışmasında reel veri modellerinde, sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı reel toplanır beyaz Gauss gürültüsü, kompleks veri modellerinde ise sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı (reel ve sanal kısımları birbirleriyle korelasyonsuz ve eşit $\sigma^2/2$ varyansa sahip) kompleks toplanır beyaz Gauss gürültüsü gürültü bileşeni olarak seçilmiştir.

Beyaz gürültü bileşeni $e(t)$ 'nin zaman bölgesi istatistiksel özellikleri aşağıdaki gibidir:

Reel beyaz gürültü için $e(t)$:

$$E[e(t)] = 0 \quad (3.2.1)$$

$$E[e(t)e(s)] = \sigma^2 \delta_{ts} \quad (3.2.2)$$

Kompleks beyaz gürültü için $e(t)$:

$$E[e(t)] = 0 \quad (3.2.3)$$

$$E[e(t)e(s)] = 0 \quad (3.2.4)$$

$$E[e(t)e^*(s)] = \sigma^2 \delta_{ts} \quad (3.2.5)$$

burada δ kronecker delta fonksiyonu ve $t, s = 1, 2, \dots, N$.

Gürültü bileşeninin Gauss olması, gürültü örneklerinin genlik dağılımının Gauss biçiminde olduğunu ifade eder.

3.2.3. Sinyal Gürültü Oranı

Tez çalışmasında sinyal gürültü oranı SNR ile gösterilmiştir. Reel ve kompleks veri modelleri için aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

Reel veri modelinde :

$$SNR = \frac{\alpha_0^2}{2\sigma^2} \quad (3.2.6)$$

Kompleks veri modelinde

$$SNR_i = \frac{\alpha_i^2}{\sigma^2}, \quad i = 1,2 \quad (3.2.7)$$

3.3. En Küçük Varyanslı Yansız Kestirici (MVU)

3.3.1. Giriş

Bu bölümde kestiricilerde yansızlık ve en küçük varyans kriterlerinin tanımları verilmiştir.

3.3.2. Yansız Kestirici

Bir kestiricinin yansız olması, o kestiricinin ortalama değerinde, bilinmeyen parametrenin doğru değerini vereceğini anlatır. Matematiksel olarak ifade edilirse, bir kestirici aşağıdaki koşulu sağlıyorsa yansızdır:

$$E(\hat{\theta}) = \theta, \quad a < \theta < b \quad (3.3.1)$$

burada (a,b) θ 'nin mümkün olan değer aralığıdır.

Bir kestiricinin yanı aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (3.3.2)$$

Bir kestiricinin yansız olması, onun iyi bir kestirici olduğunu söylemek için tek başına yeterli değildir. Yansızlık, sadece, ortalama değerde kestiricinin bilinmeyen parametrenin doğru değerini vereceğini garanti eder.

3.3.3. En Küçük Varyans Kriteri

En uygun kestirici aranırken bir takım uygunluk kriterlerine ihtiyacımız vardır. En doğal olanlarından bir tanesi aşağıdaki biçimde tanımlanan ortalama karesel hatadır (MSE):

$$mse(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad (3.3.3)$$

MSE, kestiricinin doğru değere göre ortalama karesel sapmasının bir ölçütüdür. Fakat bu kriteri benimsemek bizi gerçekleşmesi mümkün olmayan kestiricilere yönlendirebilir. Bu problemi daha iyi anlamak için MSE'yi tekrar yazalım:

$$\begin{aligned} mse(\hat{\theta}) &= E\{[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)]^2\} \\ &= \text{var}(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2 \\ &= \text{var}(\hat{\theta}) + b^2(\theta) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

(3.3.4) ifadesinden açıkça görülebileceği gibi MSE, kestirici varyansı ve yandan oluşmaktadır. MSE, yana bağlı olduğu için bu kriteri benimsemek bizi gerçekleşmesi mümkün olmayan kestiricilere yönlendirebilir. Bu sebepten dolayı en küçük MSE kestiricisinin kullanımından kaçınılmalıdır. Alternatif bir yaklaşım ise yanı sıfır değerinde sabit tutarak en küçük varyansı veren kestiriciyi aramak olabilir. Bu kestirici en küçük varyanslı yansız (MVU) kestirici olarak isimlendirilir. Yansız bir kestiricinin varyansının küçültülmesi, aynı zamanda, kestirim hatası $(\hat{\theta} - \theta)$ 'nın olasılık yoğunluk fonksiyonunun (PDF) sıfır civarında yoğunlaştırılması etkisine de sahiptir.

3.3.4. Vektör Parametre Durumuna Genişletilmesi

$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^T$ bilinmeyen parametrelerden oluşan bir vektör olmak üzere bu vektörün $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \dots \ \hat{\theta}_p]^T$ kestiricisi, eğer aşağıdaki koşul gerçekleşiyorsa yansızdır:

$$E(\hat{\theta}_i) = \theta_i, \quad a < \theta_i < b \quad (3.3.5)$$

Burada $i = 1, 2, \dots, p$ dir.

3.4. Cramér-Rao (C-R) Sınırı

3.4.1. Giriş

Yansız kestiricilerin varyansları üzerinde bir sınır koyabilmek pratik açıdan çok önemlidir. Bu sınır en iyi durumda ilgilendiğimiz yansız kestiricinin MVU bir kestirici olduğunu belirlememizi sağlar. En iyi durum, kestirici varyansının sınırı bilinmeyen parametrenin bütün değerlerinde yakalaması halidir. En kötü durumda ise ilgilendiğimiz yansız kestiricinin performansını test edebileceğimiz bir kriter sağlar. Ayrıca, varyansı sınır değerinin altında olan bir yansız kestiricinin bulunmasının fiziksel olarak imkansız olduğunu bildirir.

Pek çok varyans sınır ifadesi mevcut olmasına rağmen, (McAuley ve Hofstetter 1971), (Kendal ve Stuart 1979), (Siedman 1970) ve (Ziv ve Zakai 1969) bunlardan iyi bilinen bir kaç örnek olmak üzere, C-R sınırı türetilmesi en basit olanıdır. Ayrıca C-R sınır teorisi, sınırı yakalayan bir kestiricinin olup olmadığını sınır ifadeleri türetilirken eşzamanlı olarak belirlememizi sağlar.

3.4.2. Kestirici Doğruluğu

C-R sınır teoremine geçmeden önce bir parametreyi ne kadar iyi kestirebileceğimizi etkileyen gizli faktörleri açıklamamız yerinde olacaktır. Bizim bütün

bilgimiz elimizdeki veri vektörü \mathbf{y} (N adet veri örneğinden oluşan) ve onun PDF'i altında gömülü olduğundan, kestirici performansının doğrudan PDF'e bağımlı olduğunu görmek çok zor olmayacaktır. Eğer PDF, ilgilendiğimiz parametreye zayıf olarak bağlıysa veya hiç bağlı değilse, bu parametreyi herhangi bir doğruluk derecesiyle kestirebileceğimizi bekleyemeyiz. Genel olarak, PDF, bilinmeyen parametreden ne kadar çok etkileniyorsa parametreyi o kadar iyi kestirebiliriz.

3.4.3. Cramer-Rao Sınırı

Teorem 3.4.1. C-R Sınırı-Skaler Parametre

PDF $p(\mathbf{y}; \theta)$ 'nin "düzenlilik" koşulunu sağladığını farz edelim

$$E\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta}\right] = 0, \text{ bütün } \theta \text{ 'lar için} \quad (3.4.1)$$

Burada beklenen değer $p(\mathbf{y}; \theta)$ 'ya göre alınır.

Böylece, herhangi bir yansız kestirici $\hat{\theta}$ 'nin varyansı aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta^2}\right]} \quad (3.4.2)$$

Burada türev θ 'nın doğru değerinde gerçekleşir ve beklenen değer $p(\mathbf{y}; \theta)$ 'ya göre alınır:

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta^2}\right] = \int \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta^2} p(\mathbf{y}; \theta) d\mathbf{y} \quad (3.4.3)$$

Bununla birlikte bütün θ değerleri için sınırı yakalayan bir yansız kestirici ancak ve ancak bazı g ve J fonksiyonları için aşağıdaki eşitlik sağlandığı durumda bulunabilir:

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta} = J(\theta)(g(\mathbf{y}) - \theta) \quad (3.4.4)$$

Bu kestirici $\hat{\theta} = g(\mathbf{y})$ 'dir (MVU kestiricidir) ve en küçük varyansı $1/J(\theta)$ dır. Teoremin ispatı için (Kay 1993) Appendix 3A'ya bakabilirsiniz. (3.4.4) eşitliğinin paydası, \mathbf{y} verisi için Fisher bilgisi $J(\theta)$ olarak adlandırılır.

$$J(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad (3.4.5)$$

Daha öncede ifade ettiğimiz gibi C-R sınırı yakalandığı zaman, varyans, Fisher bilgisinin tersine eşit olacaktır. Buradan şu sonuca kolayca varılabilir, bilgi ne kadar artarsa sınır da o kadar küçülecektir. Fisher bilgisinin önemli iki özelliği:

- i. negatif değildir
- ii. bağımsız gözlemler için toplanabilir.

Son özellik bizi şu sonuca götürür, N tane özdeş bağımsız dağılıma (IID) sahip gözlem için C-R sınırı, bir gözlem için elde edilen C-R sınırının $1/N$ katıdır. Bu sonucu kolayca doğrulayabiliriz, gözlemlerin bağımsız olduğu kabulü ile

$$\ln p(\mathbf{y}; \theta) = \sum_{t=0}^{N-1} \ln p(y(t); \theta) \quad (3.4.6)$$

elde edilir. Bu ifadeyi Fisher bilgisinde yerine koyarsak

$$-E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta^2} \right] = -\sum_{t=0}^{N-1} E \left[\frac{\partial^2 \ln p(y(t); \theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad (3.4.7)$$

elde edilir. Son olarak özdeş gözlemler olduğu durumda:

$$J(\theta) = Nj(\theta) \quad (3.4.8)$$

burada

$$j(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(y(t); \theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.9)$$

bir örnek için Fisher bilgisidir.

Bağımsız olmayan örnekler için bilginin $Nj(\theta)$ 'dan az olacağını söyleyebiliriz. Tamamen bağımlı örneklerde, $y(0) = y(1) = \dots = y(N-1)$, $J(\theta) = j(\theta)$ olacaktır. Bu durumda fazladan gözlem farklı bir bilgi taşımayacaktır ve C-R sınırı veri uzunluğunun artırılması ile azalmayacaktır.

3.4.4. Beyaz Gauss Gürültü İçindeki Sinyaller için Genel C-R Sınırı

Tez çalışmasında olduğu gibi, genellikle gürültünün beyaz Gauss gürültü olarak kabul edilmesi nedeniyle bu durum için genel C-R sınırı ifadesinin türetilmesi yerinde olacaktır. Beyaz Gauss gürültü içindeki θ bilinmeyen parametresine sahip olan rasgele olmayan bir sinyali ele alalım:

$$y(t) = s(t; \theta) + e(t) \quad , \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.10)$$

Olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$p(\underline{y}; \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} (y(t) - s(t; \theta))^2 \right\} \quad (3.4.11)$$

Olabilirlik fonksiyonunun ilk türevi:

$$\frac{\partial \ln p(\underline{y}; \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} (y(t) - s(t; \theta)) \frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta} \quad (3.4.12)$$

ve ikinci türevi:

$$\frac{\partial^2 \ln p(\underline{y}; \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ (y(t) - s(t; \theta)) \frac{\partial^2 s(t; \theta)}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \quad (3.4.13)$$

Beklenen değer alınırsa:

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\underline{y}; \theta)}{\partial \theta^2}\right] = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \left(\frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta}\right)^2 \quad (3.4.14)$$

ve sonuçta

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{t=0}^{N-1} \left(\frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta}\right)^2} \quad (3.4.15)$$

elde edilir.

Sınır ifadesi sinyalin θ 'ya olan bağılılığının önemini çok iyi bir şekilde göstermektedir. Bilinmeyen parametrenin değişimleri ile hızlı değişen sinyaller doğru kestiricilere neden olurlar.

3.4.5. Parametrelerin Dönüşümü

Pratikte kestirmek istediğimiz bir parametrenin başka bir parametrenin fonksiyonu olduğu durumla sıklıkla karşılaşırız. İlgilendiğimiz parametre α , θ 'nın bir $g(\theta)$ fonksiyonu olsun. Bu durumda α için C-R sınır değeri θ 'nın C-R sınır ifadesi kullanılarak kolayca aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\text{var}(\hat{\alpha}) \geq \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\underline{y}; \theta)}{\partial \theta^2}\right]} \quad (3.4.16)$$

3.4.6. Vektör Parametre Durumuna Genişletilmesi

Bu bölümde skaler parametre durumunda elde ettiğimiz sonuçları vektör parametre durumuna genişleteceğiz. $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^T$ bilinmeyen parametrelerden oluşan vektör ve $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \dots \ \hat{\theta}_p]^T$ bu parametrelerin yansız kestiricilerini içeren

vektör olmak üzere i . bilinmeyen parametreye ait C-R sınırı Fisher bilgi matrisinin tersinin $[i, i]$. elamanı olarak elde edilir:

$$\text{var}(\hat{\theta}_i) \geq [\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})]_{ii} \quad (3.4.17)$$

Burada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ $p \times p$ boyutlu FBM' dir. FBM elamanları:

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, p \quad (3.4.18)$$

(3.4.18) hesaplanırken $\boldsymbol{\theta}$ 'nın gerçek değeri kullanılır. $p = 1$ iken skaler durumdaki ifaleler elde edilir, $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = J(\theta)$ dir.

Teorem 3.4.2. C-R Sınırı-Vektör Parametre

PDF $p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ 'nın “düzenlilik” koşulunu sağladığını farz edelim

$$E \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] = 0 \text{ bütün } \boldsymbol{\theta} \text{ 'lar için} \quad (3.4.19)$$

Burada beklenen değer $p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ 'ya göre alınır. Böylece, herhangi bir yansız kestirici $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 'nın kovaryans matrisi aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \geq 0 \quad (3.4.20)$$

Burada “ ≥ 0 ”, matrisin yarı tanımlı pozitif matris olduğunu ifade etmektedir. FBM $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ aşağıda verilmiştir:

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \quad (3.4.21)$$

Burada türev θ 'nın doğru değerinde gerçekleşir ve beklenen değer $p(\mathbf{y}; \theta)$ 'ya göre alınır. Bununla birlikte bütün θ değerleri için sınırı $\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \mathbf{J}^{-1}(\theta)$ yakalayan bir yansız kestirici ancak ve ancak bazı p boyutlu g fonksiyonu ve bazı $p \times p$ boyutlu \mathbf{J} matrisi için aşağıdaki eşitlik sağlandığı durumda bulunabilir:

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}; \theta)}{\partial \theta} = \mathbf{J}(\theta)(g(\mathbf{y}) - \theta) \quad (3.4.22)$$

Bu kestirici $\hat{\theta} = g(\mathbf{y})$ 'dir (MVU kestiricidir) ve kovaryans matrisi ise $\mathbf{J}^{-1}(\theta)$ dır.

Teoremin ispatı için (Kay 1993) Appendix 3B'ye bakınız.

(3.4.17) ve (3.4.20) eşitlikleri ile yarı tanımlı pozitif matrisin köşegen elemanlarının negatif olmaması özelliği kullanılırsa

$$[\mathbf{C}_{\hat{\theta}} - \mathbf{J}^{-1}(\theta)]_{ii} \geq 0 \quad (3.4.23)$$

yazılabilir. Böylece

$$\text{var}(\hat{\theta}_i) = [\mathbf{C}_{\hat{\theta}}]_{ii} \geq [\mathbf{J}^{-1}(\theta)]_{ii} \quad (3.4.24)$$

elde edilir.

Vektör parametre durumunda MVU kestiricilerin bulunmasında C-R sınır teoremi güçlü bir araçtır. Özellikle önemli bir veri modeli sınıfı olan doğrusal modellerde MVU kestiricileri bulmamızı sağlar.

3.4.7. Vektör Parametrelerin Dönüşümü

Bölüm 3.4.5.'te skaler parametre durumu için gerçekleştirilen inceleme bu bölümde vektör parametre durumuna genişletilmiştir. İlgilendiğimiz parametre α , θ 'nın r boyutlu bir $\mathbf{g}(\theta)$ fonksiyonu olmak üzere:

$$\mathbf{C}_a - \frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} \geq 0 \quad (3.4.25)$$

burada “ ≥ 0 ”yarı tanımlı pozitif matris olduğunu göstermektedir.

(3.4.25) ifadesinde yer alan $\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ aşağıdaki biçimde tanımlanan $r \times p$ Jacobian matristir.

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p} \\ \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} \quad (3.4.26)$$

3.4.8. Genel Gauss Durumu için C-R Sınırı

Bölüm 3.4.4.’te beyaz Gauss gürültü içindeki ve bir bilinmeyen parametreye sahip olan sinyal modeli için genel C-R sınır ifadesi elde edilmişti. Bu bölümde ise genel Gauss gürültü içinde ve vektör bilinmeyen parametreye sahip sinyal modeli için genel C-R sınır ifadesi verilecektir. Sinyal modelinin aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim:

$$\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})) \quad (3.4.27)$$

burada hem ortalama değer vektörü hem de kovaryans matrisi $\boldsymbol{\theta}$ ’ya bağlıdır.

Bu durum için FBM aşağıda verilmiştir:

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right]^T \mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right] \quad (3.4.28)$$

burada

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})]_1}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial [\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})]_2}{\partial \theta_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial [\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})]_N}{\partial \theta_i} \end{bmatrix} \quad (3.4.29)$$

ve

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})]_{11}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})]_{12}}{\partial \theta_i} & \cdots & \frac{\partial [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})]_{1N}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})]_{21}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})]_{22}}{\partial \theta_i} & \cdots & \frac{\partial [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})]_{2N}}{\partial \theta_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})]_{N1}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})]_{N2}}{\partial \theta_i} & \cdots & \frac{\partial [\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})]_{NN}}{\partial \theta_i} \end{bmatrix}. \quad (3.4.30)$$

İfadeler skaler parametre durumuna indirgenirse:

$$\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}(\theta), \mathbf{C}(\theta)) \quad (3.4.31)$$

$$[J(\theta)] = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\theta)}{\partial \theta} \right]^T \mathbf{C}^{-1}(\theta) \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\mathbf{C}^{-1}(\theta) \frac{\partial \mathbf{C}(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (3.4.32)$$

elde edilir. Bu ifade (3.4.15) ifadesinin genelleştirilmiş halidir.

3.5. Maksimum Olabilirlik Kestirici (MLE)

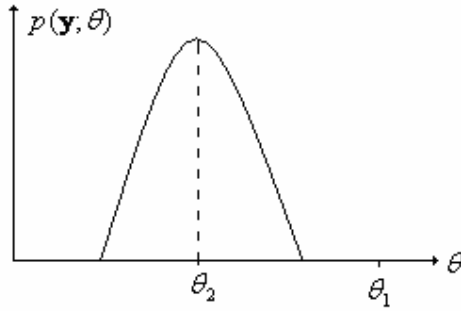
3.5.1. Giriş

Bu bölümde MVU kestiricinin oluşmadığı veya oluşsa bile bulunamadığı durumlarda bir alternatif olan MLE incelenmiştir. MLE, pratik kestiricilerin elde edilmesinde en çok kullanılan yöntemlerden birisi olan en büyük olabilirlik prensibi üzerinde temellendirilmiştir. Pratik uygulamaların pek çoğunda, yeterince geniş veri uzunluklarında, MLE'nin performansı en iyi sonucu vermektedir. Yaklaşık olarak etkin

olması özelliği nedeniyle asimtotik olarak MVU kestiricidir. Bu sebepten dolayı hemen hemen bütün pratik kestiriciler maksimum olabilirlik kestiricisi üzerinde temellendirilmiştir.

3.5.2. MLE'nin Bulunması

Skaler parametre için MLE, sabit bir \mathbf{y} için $p(\mathbf{y};\theta)$ 'yı maksimum yapan θ değeri olarak tanımlanır. Başka bir deyişle olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan θ değeridir. Maksimum değer elde edilmesi işlemi θ 'nın mümkün olan değer aralığında gerçekleştirilir. MLE'nin çalışma prensibini $p(\mathbf{y};\theta)d\mathbf{y}$ 'nin (verilen bir θ değeri için \mathbf{y} 'in küçük bir hacimde bulunma olasılığı) θ 'ya göre değişimini gözlemleyerek açıklayalım. Şekil 3.5.1'de $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ için PDF'in θ 'ya göre değişimi verilmiştir.



Şekil 3.5.1. MLE prensibi

$p(\mathbf{y} = \mathbf{y}_0; \theta)d\mathbf{y}$ 'nin değeri bütün θ değerleri için \mathbf{y} 'in R^N bölgesinde \mathbf{y}_0 merkezli $d\mathbf{y}$ hacminde bulunma olasılığını verir. Eğer $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ olduğu gözlemlenmişse $\theta = \theta_1$ olması mantıklı olmayacaktır. Çünkü $\theta = \theta_1$ iken $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ 'ın gerçekte gözlemlenme olasılığı küçük olacaktır. $\theta = \theta_2$ iken $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ olması olasılığı en büyük değerini alacaktır. Bu sonuçtan hareketle θ 'nın gerçek değerinin θ_2 olması kuvvetli bir olasılıktır. Böylece $p(\mathbf{y} = \mathbf{y}_0; \theta)$ 'yı en büyük yapan değer olarak $\hat{\theta} = \theta_2$ kestirim değeri olarak seçilir.

3.5.3. MLE'nin Özellikleri

Genel olarak MLE, geniş veri uzunluklarında (asimtotik olarak) yansız kestiricidir, C-R sınırını yakalar ve Gauss PDF fonksiyonuna sahiptir. Bu üç özelliği matematiksel olarak gösterirsek:

$$\hat{\theta} = \overset{a}{\sim} N(\theta, J^{-1}(\theta)) \quad (3.5.1)$$

Burada “ $\overset{a}{\sim}$ ” asimtotik dağılım anlamındadır.

Pratikte, en iyi performans için ne kadar genişlikte veri kullanılması gerektiği deney yapılmadan genellikle bilinemez. MLE'nin PDF'i için analitik bir ifadenin türetilmesi genellikle mümkün olmadığı için performans analizi bilgisayar benzetimi yardımıyla gerçekleştirilir.

Teorem 3.5.1. MLE'nin Asimtotik Özellikleri

Eğer y 'in PDF'i $p(y; \theta)$ bazı “düzenlilik” şartlarını sağlıyorsa bilinmeyen parametre θ 'nın MLE'si asimtotik olarak aşağıdaki biçimde dağılır:

$$\hat{\theta} = \overset{a}{\sim} N(\theta, J^{-1}(\theta)) \quad (3.5.2)$$

burada $J(\theta)$ bilinmeyen parametrenin gerçek değerinde elde edilen Fisher bilgisidir. Düzenlilik koşulları Fisher bilgisinin sıfırdan farklı olmasını gerektirdiği gibi aynı zamanda logaritmik olabilirlik fonksiyonunun türevinin var olmasını da gerektirir. Düzenlilik koşulları ile ilgili daha geniş bilgi için (Kay 1993) Appendix 7.B'ye bakabilirsiniz.

Teorem 3.5.2. MLE'nin Değişmezlik Özelliği

İlgilendiğimiz parametre α , θ 'nın bir $g(\theta)$ fonksiyonu olsun. Bu durumda α için MLE aşağıdaki biçimde verilir:

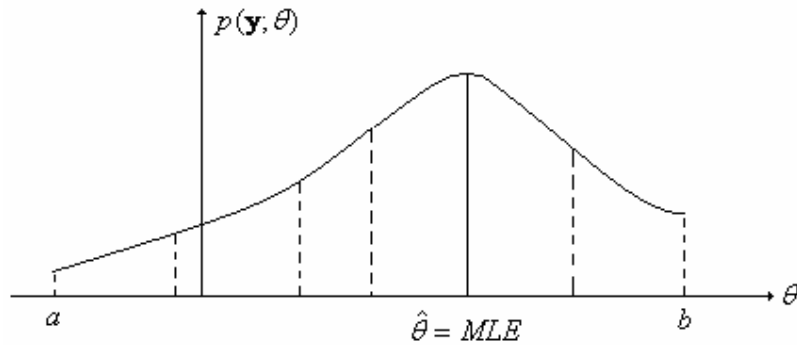
$$\hat{\alpha} = g(\hat{\theta}) \quad (3.5.3)$$

burada $\hat{\theta}$, θ 'nin MLE'sidir. $\hat{\theta}$, $p(\mathbf{y};\theta)$ 'nin θ üzerinde maksimumlaştırılması ile elde edilir. Eğer g bire-bir fonksiyon değilse $\hat{\alpha}$, değiştirilmiş olabilirlik fonksiyonu $\bar{p}_T(\mathbf{y};\theta)$ 'nin maksimumlaştırılması ile elde edilir. Değiştirilmiş olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\bar{p}_T(\mathbf{y};\theta) = \max_{\{\theta, \alpha=g(\theta)\}} p(\mathbf{y};\theta) \quad (3.5.4)$$

3.5.4. MLE'nin Sayısal Olarak Elde Edilmesi

MLE'nin ayırt edici özelliği, verilen bir veri kümesi için her zaman sayısal olarak bulunabilmesidir. Bunun sebebi MLE'nin iyi bilinen olabilirlik fonksiyonunun maksimumu olarak tanımlanmasıdır. Örneğin θ 'nin mümkün olan değer aralığı (a, b) ise yapmamız gereken sadece bu aralıkta $p(\mathbf{y};\theta)$ 'yi maksimum yapan değeri bulmak olacaktır. Bunu yapmanın en güvenli yolu Şekil 3.5.2'de görüldüğü gibi (a, b) aralığında ızgara arama işlemini yerine getirmektir. θ değerleri arasındaki mesafe yeterince küçük olduğu sürece verilen veri kümesi için MLE'yi bulmamız garantidir.



Şekil 3.5.2. MLE için ızgara arama

Fakat eğer θ 'nın mümkün olan değer aralığı bir sonlu aralıkta değilse, örneğin $\sigma^2 > 0$ için, bir gürültü sürecinin varyansının kestirilmesi ve ızgara arama yapmak hesaplama yükü açısından uygun olmayabilir. Bu ve benzeri durumlarda özyineli maksimumlaştırma yöntemlerine başvururuz. Bu yöntemlere örnek olarak beklenti-maksimumlaştırma (Expectation-Maximization) ve Newton-Raphson'u verebiliriz. Genellikle bu yöntemler başlangıç tahmin değeri gerçek maksimum değere yakın olduğu durumlarda MLE'yi verirler. Eğer başlangıç değeri gerçek maksimum değere yakın değilse yakınsama gerçekleşmeyebilir veya yerel maksimum değere yakınsayabilir. Özyineli yöntemlerin kullanımındaki temel zorluk, işleme başlamadan önce bu yöntemlerin gerçek değere yakınsayıp yakınsamayacağını eğer yakınsayacak olsa bile yakınsadığı değer MLE olup olmayacağını bilemememizdir.

Tez çalışmasında ızgara arama yöntemi kullanılmıştır. Özyineli yöntemler hakkında daha geniş bilgi almak için (Kay 1993) ve (Bard 1974)'e bakabilirsiniz.

3.5.5. Vektör Parametre Durumuna Genişletilmesi

θ vektör parametresi için MLE, $p(\mathbf{y}; \theta)$ olabilirlik fonksiyonunu θ 'nın mümkün olan değer aralığında maksimum yapan vektör değeridir. Olabilirlik fonksiyonunun türevlenebilir olduğu kabulü ile MLE aşağıdaki eşitlikten bulunur:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} p(\mathbf{y}; \theta) = 0 \quad (3.5.5)$$

Eğer birden fazla çözüm mevcut ise, bu durumda değerlerden olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan bir tanesi MLE dir.

Teorem 3.5.3. MLE'nin Asimtotik Özellikleri-Vektör Parametre Durumu

Eğer \mathbf{y} 'in PDF'i $p(\mathbf{y}; \theta)$ bazı "düzenlilik" şartlarını sağlıyorsa bilinmeyen parametre θ 'nın MLE'si asimtotik olarak aşağıdaki biçimde dağılır:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \overset{a}{\sim} N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})) \quad (3.5.6)$$

Burada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ bilinmeyen parametrenin gerçek değerinde gerçekleşmiş FBM'dir. Düzenlilik koşulları skaler durumdaki koşullar ile benzerdir. Daha geniş bilgi için (Kay 1993) Appendix 7.B'ye bakabilirsiniz.

Teorem 3.5.4. MLE'nin Değişmezlik Özelliği-Vektör Parametre Durumu

İlgilendiğimiz parametre $\boldsymbol{\alpha}$, p boyutlu bir $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörünün r boyutlu bir $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ fonksiyonu olsun. Bu durumda $\boldsymbol{\alpha}$ için MLE aşağıdaki biçimde verilir:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.5.7)$$

burada $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta}$ 'nin MLE'sidir. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ 'nin $\boldsymbol{\theta}$ üzerinde maksimumlaştırılması ile elde edilir. Eğer g tersi alınabilir bir fonksiyon değilse $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, değiştirilmiş olabilirlik fonksiyonu $\bar{p}_r(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ 'nin maksimumlaştırılması ile elde edilir. Değiştirilmiş olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\bar{p}_r(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \max_{\{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\}} p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) \quad (3.5.8)$$

Teorem 3.5.5. Doğrusal Model için MLE

Eğer gözlenen veri aşağıda verilen genel doğrusal model ile tanımlanabiliyorsa:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \quad (3.5.9)$$

burada \mathbf{H} rankı p olan, $N \gg p$ olmak üzere, $N \times p$ matris, $\boldsymbol{\theta}$, $p \times 1$ boyutlu kestirimi gerçekleştirilecek parametre vektörü ve \mathbf{e} , PDF'i $N(0, \mathbf{C})$ olan gürültü vektörü olmak üzere, $\boldsymbol{\theta}$ 'nin MLE'si aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} \quad (3.5.10)$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$, aynı zamanda C-R sınırını yakalayan en etkin kestiricidir, dolayısıyla MVU kestiricidir. Başka bir deyişle eğer bir etkin kestirici oluşuyorsa, MLE bize onu verecektir. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 'nın PDF'i aşağıda verilmiştir:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N(\boldsymbol{\theta}, (\mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H})^{-1}) \quad (3.5.11)$$

3.6. MUSIC (Çoklu Sinyal Sınıflandırma) Kestirici

3.6.1. Giriş

MUSIC ilk kez Schmidt (1979) ve Bienvenue (1979) tarafından eşzamanlı olarak önerilmiştir. Otokorelasyon matrisinin özdeğer analizi üzerinde temellendirilmiş bir spektral frekans kestirim yöntemidir. MUSIC, aşağıdaki modele indirgenebilen veri modellerinde üç temel varsayım altında tanımlanır (Stoica ve Nehorai 1989).

Veri modeli:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k, \quad k = 1, \dots, M \quad (3.6.1)$$

burada $\mathbf{y}_k \in \mathbf{C}^{mx1}$ gürültülü veri vektörü, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{C}^{nx1}$ sinyal genlikleri vektörü, $\mathbf{e}_k \in \mathbf{C}^{mx1}$ toplanır gürültü vektörü ve $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbf{C}^{m \times n}$ aşağıdaki özel yapıya sahip matristir:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\omega_1), \dots, \mathbf{a}(\omega_n)] \quad (3.6.2)$$

burada $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ bilinmeyen reel frekans parametresi, $\mathbf{a}(\omega_i) \in \mathbf{C}^{mx1}$ i . sinyal ile \mathbf{y}_k arasındaki aktarım vektörü ve $\boldsymbol{\theta} = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T$ dir.

Varsayımlar:

MUSIC kestiricisi tanımlanırken kabul edilen varsayımlar (3.6.1) modelinde θ parametresinin kestirimi için literatürde yer alan standart varsayımlardır.

A1: $m \gg n$ ve ω 'nın $(n+1)$ farklı değeri ile ilişkili $\mathbf{a}(\omega)$ vektörleri doğrusal olarak bağımsızdır. (Bu varsayım MUSIC kestiricisinin tek olmasını garanti eder).

A2: \mathbf{e}_k , aşağıdaki özellikleri sağlayan (beyaz gürültü örneklerinden oluşan) vektördür:

Kompleks beyaz gürültü için:

$$E[\mathbf{e}_k] = 0, E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^*] = \sigma^2 \mathbf{I}, E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = 0$$

Reel beyaz gürültü ise (reel veri modelinde frekans kestirimi için kullanıldığı durum):

$$E[\mathbf{e}_k] = 0, E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = \sigma^2 \mathbf{I}$$

A3: $\mathbf{P} = E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^*]$ tekil olmayan kesin artı matristir, \mathbf{x}_k ve \mathbf{e}_k bütün k değerleri için korelasyonsuzdur ve $M \gg m$ dir.

3.6.2. MUSIC Algoritması

Bölüm 3.6.1'de verilen varsayımlar altında gözlem vektörü \mathbf{y}_k 'nin otokorelasyon matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{R} \stackrel{\Delta}{=} E[\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^*] = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{P} \mathbf{A}^*(\theta) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.6.3)$$

Sembollerin yazımında rahatlık sağlması için bu noktadan sonra $\mathbf{A}(\theta)$ yerine \mathbf{A} kullanacağız.

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$, \mathbf{R} otokorelasyon matrisinin artmayan biçimde sıralanmış özdeğerleri olmak üzere, $\text{rank}(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^*) = n$ olduğu için, özdeğerler aşağıdaki özelliklere sahip olacaktır:

$$\begin{aligned} \lambda_i &> \sigma^2, & i = 1, \dots, n \text{ için} \\ \lambda_i &= \sigma^2, & i = n+1, \dots, m \text{ için} \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

\mathbf{R} 'nin özdeğerleri iki alt kümeye bölünebilir. Bu alt kümeler ile ilişkili özvektörler $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ parametrelerinin kestiriminde kullanılabilecek ilginç özelliklere sahiptirler (Stoica ve Moses 1997).

$\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\}$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ile ilişkili özvektörler ve $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{m-n}\}$ ise $\{\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_m\}$ ile ilişkili özvektörler olmak üzere, bu vektörlerden oluşan \mathbf{S} , \mathbf{G} matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= [\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_n] & (m \times n) \\ \mathbf{G} &= [\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_{m-n}] & (m \times (m-n)) \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

(3.6.3) ve (3.6.4) ifadelerinden

$$\mathbf{R}\mathbf{G} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \lambda_{n+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^* \mathbf{G} + \sigma^2 \mathbf{G} \quad (3.6.6)$$

buradan

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G} = 0 \quad (3.6.7)$$

kolayca görülebilir. Başka bir deyişle \mathbf{G} 'nin $\{\mathbf{g}_k\}$ kolonları \mathbf{A}^* 'nin çekirdek uzayına aittir, $\mathbf{g}_k \in N(\mathbf{A}^*)$. $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ olduğu için, $N(\mathbf{A}^*)$ 'nin boyutu $m-n$ 'e eşit olacaktır, bu boyut aynı zamanda \mathbf{G} 'nin görüntü uzayı $R(\mathbf{G})$ 'nin boyutudur. Bu gözlemden ve (3.6.7) ifadesinden hareketle

$$R(\mathbf{G}) = N(\mathbf{A}^*) \quad (3.6.8)$$

yazılabilir. (3.6.8) ifadesi $\{\mathbf{g}_k\}$ vektörlerinin hem $R(\mathbf{G})$ hem de $N(\mathbf{A}^*)$ 'yı gerdiğini söylemektedir. Şimdi

$$\mathbf{S}^* \mathbf{G} = 0 \quad (3.6.9)$$

tanımından hareketle, aynı zamanda $R(\mathbf{G}) = N(\mathbf{S}^*)$ eşitliğine sahip oluruz. Böylece $N(\mathbf{S}^*) = N(\mathbf{A}^*)$ dır. $R(\mathbf{S})$ ve $R(\mathbf{A})$ sırasıyla $N(\mathbf{S}^*)$ ve $N(\mathbf{A}^*)$ 'nin ortogonal tümleyeni olduğu için

$$R(\mathbf{S}) = R(\mathbf{A}) \quad (3.6.10)$$

yazılabilir. Bu eşitliği doğrudan (3.6.3) ifadesinden de çıkarabiliriz. (3.6.10) ve (3.6.9) ifadelerinden hareketle $R(\mathbf{S})$ ve $R(\mathbf{G})$ altuzayları sırasıyla sinyal ve gürültü altuzayları olarak isimlendirilir.

(3.6.7) ifadesinden, gerçek parametre değerleri $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ 'lerin aşağıdaki denklemin tek sonucu olduğu elde edilir:

$$\mathbf{a}^*(\omega) \mathbf{G} \mathbf{G}^* \mathbf{a}(\omega) = 0, \quad \omega = \omega_1, \dots, \omega_n \text{ için} \quad (3.6.11)$$

Bunun ispatını yapmak oldukça kolaydır. $\tilde{\omega}$ 'nin, $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ değerleri dışında bir çözüm olduğunu kabul edelim. (3.6.11) ifadesinde, $\mathbf{G} \mathbf{G}^*$, $R(\mathbf{G})$ üzerinde ortogonal izdüşümdür. Böylece $\mathbf{a}(\tilde{\omega})$, $R(\mathbf{G})$ 'ye diktir, başka bir söyleyişle $\mathbf{a}(\tilde{\omega}) \in N(\underline{\mathbf{G}}^*)$ demektir. Fakat $\mathbf{a}(\tilde{\omega})$, $\{\mathbf{a}(\omega_i)\}_{i=1}^n$ 'lerle doğrusal olarak bağımsızdır. $(n+1)$ adet doğrusal olarak bağımsız vektör n boyutlu bir altuzaya ait olamayacağından, burada $N(\mathbf{G}^*)$, $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ değerleri dışında bir çözüm (3.6.11) ifadesinde mümkün olamaz sonucuna varırız.

MUSIC kestiricisi (3.6.11) sonucunu kullanarak aşağıdaki adımlar ile parametre kestirimini gerçekleştirir:

Adım 1: Otokorelasyon matrisi örnekler kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^* \quad (3.6.12)$$

ve özdeğer ayrışımı gerçekleştirilir. $\hat{\mathbf{S}}$ ve $\hat{\mathbf{G}}$ matrisleri (3.6.5) ifadesinde verildiği gibi tanımlanır. (Pratikte otokorelasyon matrisi örnek değerlerinden elde edildiği için $\hat{\mathbf{S}}$ ve $\hat{\mathbf{G}}$ olarak gösterilmiştir.)

Adım 2a: Bilinmeyen parametrelerin $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ kestirim değerleri aşağıda verilen fonksiyonun, sözde spektrum fonksiyonu, en yüksek n tepesinin yeri olarak elde edilir.

$$f(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^*(\omega) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^* \mathbf{a}(\omega)}, \quad \omega \in (0, 2\pi) \quad (3.6.13)$$

veya

Adım 2b: Barabell (1983) tarafından önerilen Root-MUSIC algoritması kullanılırsa, bilinmeyen parametrelerin $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ kestirim değerleri aşağıdaki denklemin birim çembere en yakın noktada bulunan n adet kökünün açısız yerleri olarak elde edilir.

$$\mathbf{a}^*(z^{-1}) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^* \mathbf{a}(z) = 0 \quad (3.6.14)$$

burada $\mathbf{a}(z)$, $\mathbf{a}(\omega)$ vektöründe $e^{j\omega}$ 'nin z ile yer değiştirilmesi ile elde edilir. Böylece $\mathbf{a}(z) = [1, z, \dots, z^{(m-1)}]^T$ dir.

3.7. Sönümlü MUSIC Kestirici (DMUSIC)

3.7.1. Giriş

Sönümlü sinüslerden oluşan sinyallerin durağan olmaması nedeniyle korelasyon matrisi yazılamamaktadır. Bu nedenden dolayı pek çok, iyi bilinen ve verimli kestirim yöntemi, (örn. MUSIC kestiricisi), sönümlü sinüslerden oluşan veri modellerinde frekans parametresinin kestiriminde kullanılamamaktadır. DMUSIC, sönümlü

sinüslerden oluşan sinyal modellerinde parametre kestirimi için ilk kez Li ve Arkadaşları (1995) tarafından önerilmiştir. Algoritma yapısı olarak MUSIC'e çok benzediğinden dolayı DMUSIC olarak isimlendirilmiştir. MUSIC yönteminde yer alan otokorelasyon matrisinin yerini DMUSIC yönteminde detayları Bölüm 3.7.2'de verilen öngörü matrisi alır. DMUSIC yönteminde sönüm faktörü ve frekans iki boyutlu bir arama ile eş zamanlı olarak kestirilir.

3.7.2. DMUSIC Algoritması

DMUSIC yönteminde parametre kestirimi, öngörü matrisinin düşük rank Hankel yaklaşıklığının doğrudan bulunması yoluyla gerçekleştirilir.

Gürültü içindeki p adet sönümlü sinüsten oluşan veri modeli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p c_i e^{s_i t} + e(t), \quad t = 0, 1, \dots, N \quad (3.7.1)$$

burada c_k 'lar sıfır olmayan kompleks genlik değerleri, $s_i = -\beta_i + j\omega_i$, $\beta_i \in R^+$ ve $\omega_i \in (0, 2\pi)$ dir. Örnek sayısı, sönümlü sinüs sayısının iki katından büyük veya eşit olmalıdır ($N \geq 2p$).

DMUSIC, yalnızca öngörü matrisi (\mathbf{A} olarak isimlendirilmiştir) aşağıdaki biçimde tanımlanabilir (Hankel biçiminde):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \dots & y(L-1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(L) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(L-1) & y(L) & \dots & y(2L-2) \end{bmatrix} \quad (3.7.2)$$

burada $\min(N-L, L) \geq p$ dir.

(3.7.1) ifadesinden \mathbf{A} matrisi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^p c_i \mathbf{r}(s_i) \mathbf{r}^T(s_i) + \mathbf{N} = \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{S}^T + \mathbf{N} \quad (3.7.3)$$

burada $\mathbf{r}(s_i)$ ve \mathbf{S} sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlanmış sinyal vektörü ve sinyal matrisidir:

$$\mathbf{r}(s_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{s_i} \\ \vdots \\ e^{(L-1)s_i} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{S} = [\mathbf{r}(s_1) \quad \mathbf{r}(s_2) \quad \dots \quad \mathbf{r}(s_p)] \quad (3.7.4)$$

\mathbf{C} $p \times p$ uzunlukta, köşegen elemanları $\text{diag}(\mathbf{C}) = (c_1, c_2, \dots, c_p)$ olan köşegen matris ve $\mathbf{N} = [e^{(i+j)}]_{i,j=0}^{L-1}$ gürültü matrisidir.

Eğer s_i 'ler ayrık ise $\mathbf{r}(s_i)$ 'ler $i = 1, 2, \dots, p$ için lineer olarak bağımsız ve \mathbf{S} tam sütun rankına sahip olur. Gürültünün olmadığı durumda \mathbf{C} 'nin rankı p olduğu için \mathbf{A} 'nın rankı da p 'ye eşit olacaktır.

Gürültünün olmadığı durumu ele alalım, \mathbf{A} 'yı tekil değer ayrıştırması (SVD) ile aşağıdaki üç matrisin çarpımı biçiminde yazabiliriz (Lawson ve Hanson 1974):

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^* \quad (3.7.5)$$

burada \mathbf{U} ve \mathbf{V} birimcil matris, \mathbf{D} köşegen elemanları aşağıdaki biçimde olan köşegen matristir:

$$\text{diag}(\mathbf{D}) = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p, 0, \dots, 0), \quad \rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_p \quad (3.7.6)$$

(3.7.5) ifadesinden

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{D} \quad (3.7.7)$$

elde edilir.

(3.7.5) ve (3.7.6) ifadelerinden hareketle aşağıdaki ortogonal ilişkiyi elde ederiz:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_n = 0 \text{ veya } \mathbf{A}\mathbf{v}_k = 0, \quad k = p+1, \dots, L \text{ için} \quad (3.7.8)$$

burada $\mathbf{V}_n = [\mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_L]$.

(3.7.3) ifadesinden

$$\mathbf{SCS}^T \mathbf{v}_k = 0, \quad k = p+1, \dots, L \text{ için} \quad (3.7.9)$$

\mathbf{S} ve \mathbf{C} tam ranka sahip olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{v}_k = 0, \quad k = p+1, \dots, L \text{ için} \quad (3.7.10)$$

veya

$$\mathbf{r}(s_i)^T \mathbf{v}_k = 0, \quad k = p+1, \dots, L \text{ ve } n = 1, \dots, p \quad (3.7.11)$$

Böylece $\mathbf{V}_n^T \mathbf{r}(s) = 0$ eşitliği sadece $s = s_1, s_2, \dots, s_p$ iken gerçekleşir. Buradan hareketle s_i değerleri $\|\mathbf{V}_n^T \mathbf{r}(s)\| = 0$ eşitliğini sağlayan s değerleri olarak elde edilir.

Gürültü varken (3.7.8) ifadesinde verilen ortogonal ilişki sağlanamaz. Bu durumda sinyal vektörleri gürültü altuzayına en yakın ortogonal vektörler olarak alınabilir. Böylece s_i , yani $\{\omega_i, \beta_i\}$, değerleri aşağıdaki sözde spektrumun tepe noktalarından elde edilebilir (ω_i ve β_i parametrelerinin tanım aralıkları üzerinde iki boyutlu ızgara arama yöntemiyle):

$$f(\omega, \beta) = f(s) = \frac{1}{\tilde{\mathbf{r}}^*(s) \mathbf{V}_n + \mathbf{V}_n^T \tilde{\mathbf{r}}(s)} \quad (3.7.12)$$

burada $\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$ dir.

DMUSIC kestiricisi (3.7.12) sonucunu kullanarak aşağıdaki adımlar ile parametre kestirimini gerçekleştirir:

Adım 1. Örneklerden (3.7.2) ifadesinde yer alan \mathbf{A} öngörü matrisi elde edilir.

Adım 2. \mathbf{A} öngörü matrisine tekil değer dönüşümü uygulanarak $\hat{\mathbf{V}}_n$ elde edilir. Pratikte \mathbf{A} matrisi gürültülü örnek değerlerinden elde edildiği için $\hat{\mathbf{V}}_n$ olarak gösterilmiştir.

Adım 3. s_i değerleri (3.7.12) ifadesini maksimum yapan s değerleri olarak kestirilir.

3.8. Bir Reel Sönümlü Sinüs için C-R Sınır İfadeleri

3.8.1. Giriş

Bu bölümde reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli (3.1.3) için genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırlarının matrissel olmayan çözümsel ifadeleri elde edilmiştir. Sınırlar, sinüsün fazı değişirken incelenmiş ve sınırların alacağı en kötü (en büyük) ve en iyi (en küçük) durum değerleri ile bu değerlere karşılık gelen kritik faz değerlerini veren ifadeler çıkarılmıştır. Bu ifadeler, alçak frekans durumu için (frekans farkının Fourier limitinden küçük olduğu durum) analiz edilmiş ve basit ifadelere indirgenmiştir. Elde edilen basit ifadeler, yeterince büyük toplam örnek sayısı ve düşük sönüm katsayısı varsayımları altında incelenmiş ve basit kapalı-biçim (asimtotik) ifadeler biçiminde sunulmuştur.

3.8.2. Çözümsel C-R Sınır İfadeleri

Cramér-Rao (C-R) teoremi, $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\varphi}_0$, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\omega}_0$ sırasıyla, α_0 genliğinin, φ_0 fazının, β_0 sönüm katsayısının ve ω_0 frekansının herhangi bir yansız kestiricisi olmak üzere, her bir kestiricinin varyansı için bir alt sınır verir:

$$\text{var}\{\hat{\alpha}_0\} \geq B_{\alpha_0}, \quad \text{var}\{\hat{\varphi}_0\} \geq B_{\varphi_0}$$

$$\text{var}\{\hat{\beta}_0\} \geq B_{\beta_0}, \quad \text{var}\{\hat{\omega}_0\} \geq B_{\omega_0}$$

B_{α_0} , B_{φ_0} , B_{β_0} ve B_{ω_0} sınırları (3.1.3) modeline ilişkin Fisher bilgi matrisinin evriğinin, sırasıyla, α_0 , φ_0 , β_0 ve ω_0 parametrelerine karşılık gelen köşegensel elemanlarıdır. Fisher bilgi matrisinin özel bir biçimde ayrıştırılması suretiyle B_{α_0} , B_{φ_0} , B_{β_0} ve B_{ω_0} C-R sınırları için aşağıda verilen matrissel olmayan ifadeler elde edilebilir (bu ifadelerin ispatı Ek-1'de verilmiştir):

$$B_{\alpha_0} = \frac{2\sigma^2}{N} (K_0 + K_C \cos 2\varphi_0 + K_S \sin 2\varphi_0) \quad (3.8.1)$$

$$B_{\varphi_0} = \frac{1}{SNR \cdot N} (K_0 - K_C \cos 2\varphi_0 - K_S \sin 2\varphi_0) \quad (3.8.2)$$

$$B_{\beta_0} = \frac{1}{SNR \cdot N^3} (K'_0 - K'_C \cos 2\varphi_0 - K'_S \sin 2\varphi_0) \quad (3.8.3)$$

$$B_{\omega_0} = \frac{1}{SNR \cdot N^3} (K'_0 + K'_C \cos 2\varphi_0 + K'_S \sin 2\varphi_0) \quad (3.8.4)$$

Bu ifadelerde SNR sinyal gürültü oranını göstermektedir: $SNR = \frac{\alpha_0^2}{2\sigma^2}$.

K_0 , K_C , K_S , K'_0 , K'_C ve K'_S katsayıları φ_0 fazına bağlı değildir (bu katsayılar sinüsün ω_0 frekansına, β_0 sönüm katsayısına ve N örnek sayısına bağlıdır) ve aşağıdaki biçimde verilmektedir:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{X_{11} + X_{22}}{2(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)} & K_C &= -\frac{X_{11} - X_{22}}{2(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)} \\ K_S &= -\frac{X_{12}}{X_{11}X_{22} - X_{12}^2} & K'_0 &= \frac{X'_{11} + X'_{22}}{2(X'_{11}X'_{22} - X'^2_{12})} \\ K'_C &= \frac{X'_{11} - X'_{22}}{2(X'_{11}X'_{22} - X'^2_{12})} & K'_S &= -\frac{X'_{12}}{X'_{11}X'_{22} - X'^2_{12}} \end{aligned}$$

Burada X_{11} , X_{12} , X_{22} , X'_{11} , X'_{12} ve X'_{22} büyüklükleri aşağıda gösterilen (3.8.5)-(3.8.10) ifadeleriyle verilmektedir:

$$X_{11} = (\Gamma_0 + C_0) - \frac{(\Gamma_2 - C_2)(\Gamma_1 + C_1)^2 - 2(\Gamma_1 + C_1)S_1S_2 + (\Gamma_2 + C_2)S_1^2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2} \quad (3.8.5)$$

$$X_{12} = -S_0 - \frac{2(C_1C_2 - \Gamma_1\Gamma_2)S_1 + (\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2)S_2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2} \quad (3.8.6)$$

$$X_{22} = (\Gamma_0 - C_0) - \frac{(\Gamma_2 + C_2)(\Gamma_1 - C_1)^2 - 2(\Gamma_1 - C_1)S_1S_2 + (\Gamma_2 - C_2)S_1^2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2} \quad (3.8.7)$$

$$X'_{11} = (\Gamma_2 + C_2) - \frac{(\Gamma_0 - C_0)(\Gamma_1 + C_1)^2 - 2(\Gamma_1 + C_1)S_0S_1 + (\Gamma_0 + C_0)S_1^2}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2} \quad (3.8.8)$$

$$X'_{12} = S_2 - \frac{2(\Gamma_0\Gamma_1 - C_0C_1)S_1 - (\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2)S_0}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2} \quad (3.8.9)$$

$$X'_{22} = (\Gamma_2 - C_2) - \frac{(\Gamma_0 + C_0)(\Gamma_1 - C_1)^2 - 2(\Gamma_1 - C_1)S_0S_1 + (\Gamma_0 - C_0)S_1^2}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2} \quad (3.8.10)$$

Bu ifadelerde $r = 0, 1, 2$ ve $\delta\omega = 2\omega_0$ olmak üzere

$$\Gamma_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=1}^N t^r e^{-2\beta_0 t} \quad (3.8.11)$$

$$C_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=1}^N t^r e^{-2\beta_0 t} \cos(\delta\omega t) \quad (3.8.12)$$

$$S_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=1}^N t^r e^{-2\beta_0 t} \sin(\delta\omega t) \quad (3.8.13)$$

kısaltmaları kullanılmıştır.

(3.8.1)-(3.8.4) ifadelerinin sağ taraflarındaki ilk terimlerden genlik sınırının genlikten bağımsız olduğu; faz, sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının sinyal gürültü oranı SNR ile ters orantılı olduğu; genlik ve faz sınırlarının veri sayısı N 'nin birinci kuvveti biçiminde azaldığı; sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının N 'nin üçüncü kuvveti biçiminde azaldığı görülmektedir.

(3.8.1)-(3.8.4) ifadeleri C-R sınırlarının sinüsün φ_0 başlangıç fazına olan bağılıklarını basit bir biçimde vermektedir. Bu ifadelerden φ_0 faz açısı değişirken her bir sınırın alacağı en kötü ve en iyi değerler ve bu değerlere karşılık düşen kritik faz değerlerini veren ifadeler kolayca bulunabilir. Bu ifadeler Bölüm 3.8.3'te verilmiş ve alçak frekans durumu için incelenerek basit ifadelere indirgenmiştir.

Kritik faz değerleri yansız kestiricileri veren pratik sistemlerin başarımını test etmede en kötü ve en iyi kestirim senaryolarını oluşturmada kullanılabilir.

(3.8.1)-(3.8.4) ifadelerinden daha fazla yorum yapmak mümkündür. $(B_{\alpha_0})_{\max}$ ve $(B_{\alpha_0})_{\min}$ genlik sınırı B_{α_0} 'in en büyük ve en küçük değerini, $(B_{\varphi_0})_{\max}$ ve $(B_{\varphi_0})_{\min}$ faz sınırı B_{φ_0} 'in en büyük ve en küçük değerini göstermek üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(B_{\varphi_0})_{\max} = \frac{(B_{\alpha_0})_{\max}}{\alpha_0^2} \text{ ve } (B_{\varphi_0})_{\min} = \frac{(B_{\alpha_0})_{\min}}{\alpha_0^2}$$

Benzer şekilde, $(B_{\beta_0})_{\max}$ ve $(B_{\beta_0})_{\min}$ sönüm katsayısı sınırı B_{β_0} 'ın en büyük ve en küçük değerini, $(B_{\omega_0})_{\max}$ ve $(B_{\omega_0})_{\min}$ frekans sınırı B_{ω_0} 'ın en büyük ve en küçük değerini göstermek üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(B_{\omega_0})_{\max} = (B_{\beta_0})_{\max} \text{ ve } (B_{\omega_0})_{\min} = (B_{\beta_0})_{\min}$$

En büyük genlik sınırını veren kritik faz değerinde faz sınırı en küçük değerini alır, en küçük genlik sınırını veren kritik faz değerinde faz sınırı en büyük değerini alır:

$$\{\varphi_0 : B_{\varphi_0} = (B_{\varphi_0})_{\max}\} = \{\varphi_0 : B_{\alpha_0} = (B_{\alpha_0})_{\min}\}$$

$$\{\varphi_0 : B_{\varphi_0} = (B_{\varphi_0})_{\min}\} = \{\varphi_0 : B_{\alpha_0} = (B_{\alpha_0})_{\max}\}$$

Benzer şekilde, en büyük sönüm katsayısı sınırını veren kritik faz değerinde frekans sınırı en küçük değerini alır, en küçük sönüm katsayısı sınırını veren kritik faz değerinde frekans sınırı en büyük değerini alır:

$$\{\varphi_0 : B_{\omega_0} = (B_{\omega_0})_{\max}\} = \{\varphi_0 : B_{\beta_0} = (B_{\beta_0})_{\min}\}$$

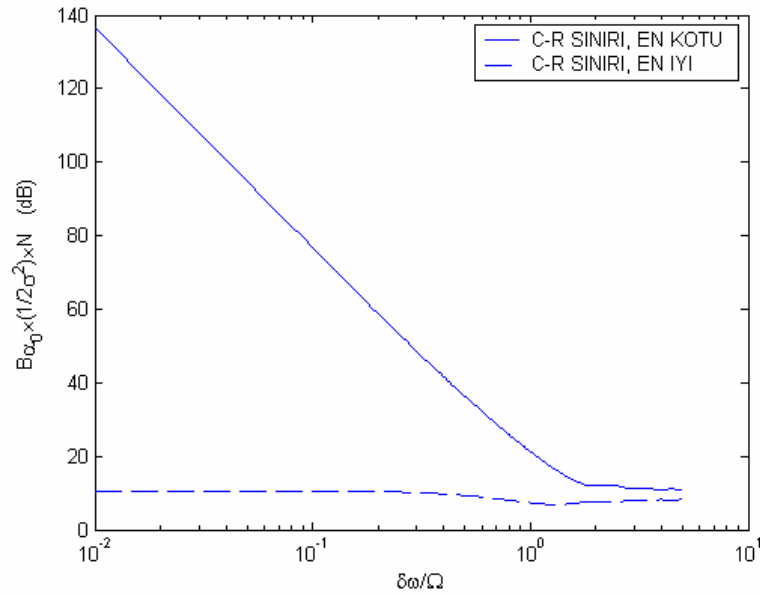
$$\{\varphi_0 : B_{\omega_0} = (B_{\omega_0})_{\min}\} = \{\varphi_0 : B_{\beta_0} = (B_{\beta_0})_{\max}\}$$

(3.8.1)-(3.8.4) ifadelerinden C-R sınırlarının sinüsün frekansı ω_0 'a ve sinüsün sönüm katsayısı β_0 'a bağıllığı açık bir biçimde gözükmemektedir. Bu bağıllıklar sayısal örnekler yardımıyla aşağıda incelenmiştir.

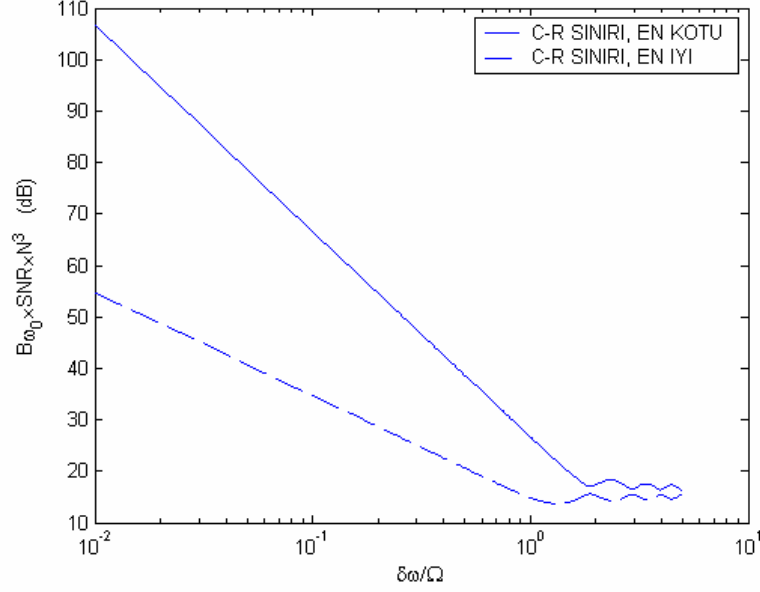
Örnek 3.8.1: C-R genlik sınırının en büyük ve en küçük değerleri örnek sayısı $N = 10$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$ için Şekil 3.8.1'de gösterilmiştir. Şekilde düşey eksen $B_{\alpha_0} \cdot (1/2\sigma^2) \cdot N$ çarpımını, yatay eksen $\delta\omega = 2\omega_0$ frekans farkının Ω Fourier limiti ($\Omega = 2\pi/N$) cinsinden değerini ($\delta\omega/\Omega$ değerini) göstermektedir. Şekilden sınırın en

büyük ve en küçük değerleri arasındaki farkın $\delta\omega/\Omega < 1$ bölgesinde oldukça fazla olduğu görülmektedir. Sınır bu bölgede sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olmaktadır. $\delta\omega/\Omega > 1$ bölgesinde söz konusu fark azalmaktadır. Bu ikinci bölgede sınırın faza bağlılığı ihmal edilebilir. C-R frekans sınırının en büyük ve en küçük değerleri $N = 10$ ve $\beta_0 = 0.1$ için Şekil 3.8.2’de gösterilmiştir. Şekilde düşey eksen $B_{\omega_0} \cdot SNR \cdot N^3$ çarpımını, yatay eksen $\delta\omega/\Omega$ oranını göstermektedir. Sınırın $\delta\omega/\Omega < 1$ bölgesinde faza kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu görülmektedir.

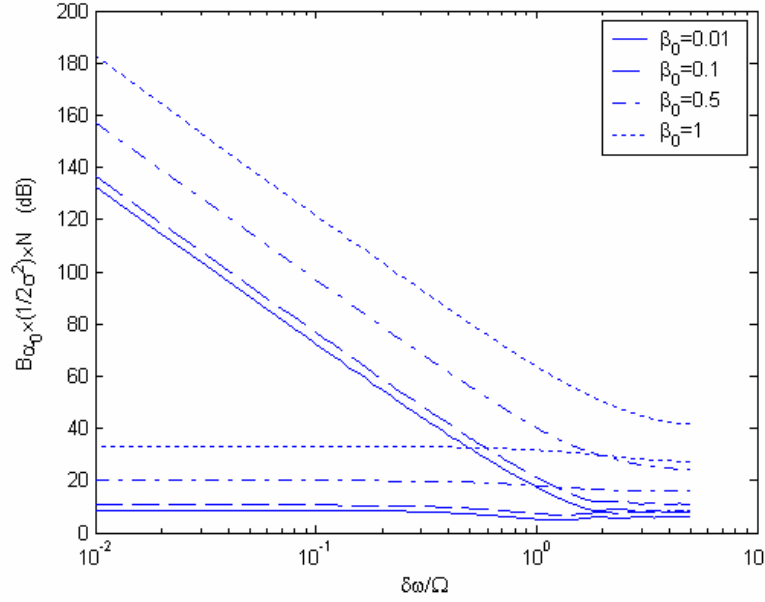
Örnek 3.8.2: C-R sınırlarının sinüsün sönüm katsayısı β_0 ile değişimini görmek amacıyla bir önceki örnek $\beta_0 = 0.01, 0.1, 0.5$ ve 1 değerleri için tekrar edilmiştir. Sonuçlar Şekil 3.8.3 ve Şekil 3.8.4’de gösterilmiştir. Şekillerden sınırların β_0 artarken arttığı (diğer bir deyişle $1/\beta_0$ artarken azaldığı) görülmektedir. $1/\beta_0$ sabiti sönümlü sinüsün etkin süresi olarak düşünülebilir. Şekillerden, aynı zamanda, belirli bir ω_0 değeri için sınırların en büyük ve en küçük değerleri arasındaki farkın β_0 ile arttığı da görülmektedir.



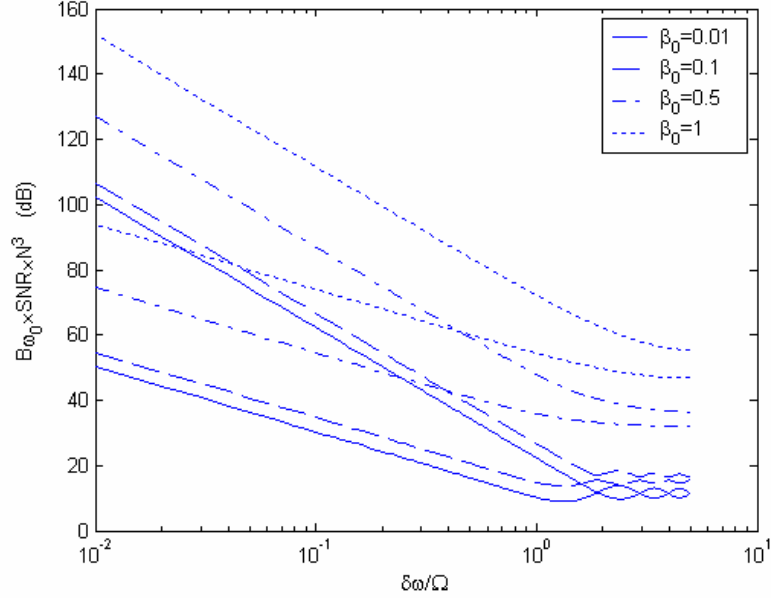
Şekil 3.8.1. Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N = 10$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$ alınmıştır.



Şekil 3.8.2. Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansı ile değişimi. Örnek adeti $N=10$ ve sönüm katsayısı $\beta_0=0.1$ alınmıştır.



Şekil 3.8.3. Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansı ve sönüm katsayısı β_0 ile değişimi. Örnek adeti $N=10$ alınmıştır.



Şekil 3.8.4. Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının sinüsün frekansı ve sönüm katsayısı β_0 ile değişimi. Örnek adeti $N = 10$ alınmıştır.

3.8.3. En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ve Kritik Faz Değerleri

C-R sınırlarını φ_0 fazının basit birer fonksiyonu biçiminde veren matrisel olmayan ifadeler Bölüm 3.8.2’de verilmiştir. Bu ifadelerden sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırlarının, φ_0 fazının fonksiyonları biçiminde düşünüldüklerinde, birbirlerinin $\pi/2$ radyan ötelenmiş halleri oldukları görülebilir. Bu iki sınırın en büyük değerleri ve en küçük değerleri aynıdır ve, aynı zamanda, sınırlardan biri en büyük değerini aldığı anda diğeri en küçük değerini almaktadır, yani, bir sınıra ilişkin en kötü (en iyi) faz değeri diğere sınıra ilişkin en iyi (en kötü) faz değeri olmaktadır. Aynı ilişki, genlik sınırı α_0^2 ile bölünmek şartıyla, genlik ve faz parametrelerine ilişkin C-R sınırları arasında da vardır. Dolayısıyla, burada sadece genlik ve frekans parametrelerine ilişkin kritik C-R sınırları ve bu sınırlarla karşılık düşen kritik faz değerleri üzerinde duracağız. C-R sınırları φ_0 fazının π radyan periyodu ile periyodik fonksiyonları olduğundan, $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2]$ aralığında alınması yeterli olacaktır.

Sınırların en büyük ve en küçük değerlerini aldığı kritik φ_0 faz değerleri (3.8.1)-(3.8.4) ifadelerinin φ_0 'a göre türevi alınıp bu türevin sıfıra eşitlenmesi yoluyla kolayca bulunabilir. (Benzer hesaplamalar (3.1.1) modelinde frekans kestirimine ilişkin kritik faz değerlerinin elde edilmesinde de karşımıza çıkmaktadır (Dilaveroğlu 1998)).

Her bir sınırın φ_0 aralığında sadece bir maksimumu ve bir minimumu vardır. β_{α_0} genlik sınırının maksimumu ve minimumu:

$$(B_{\alpha_0})_{\max} = \frac{2\sigma^2}{N} \left(K_0 + \sqrt{K_C^2 + K_S^2} \right) \quad (3.8.14)$$

$$(B_{\alpha_0})_{\min} = \frac{2\sigma^2}{N} \left(K_0 - \sqrt{K_C^2 + K_S^2} \right) \quad (3.8.15)$$

ve bu değerlerle ilişkili kritik faz değerleri aşağıda verilmiştir:

$$(\varphi_0)_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) - \operatorname{sgn} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) \frac{\pi}{2} & , K_C < 0 \\ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) & , K_C \geq 0 \end{cases} \quad (3.8.16)$$

$$(\varphi_0)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) & , K_C < 0 \\ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) - \operatorname{sgn} \left(\frac{K_S}{K_C} \right) \frac{\pi}{2} & , K_C \geq 0 \end{cases} \quad (3.8.17)$$

β_{ω_0} frekans sınırının maksimumu ve minimumu:

$$(B_{\omega_0})_{\max} = \frac{1}{SNR.N^3} \left(K_0' + \sqrt{K_C'^2 + K_S'^2} \right) \quad (3.8.18)$$

$$(B_{\omega_0})_{\min} = \frac{1}{SNR.N^3} \left(K_0' - \sqrt{K_C'^2 + K_S'^2} \right) \quad (3.8.19)$$

ve bu değerlerle ilişkili kritik faz değerleri aşağıda verilmiştir:

$$(\varphi_0)_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right) - \operatorname{sgn} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right) \frac{\pi}{2}, & K'_C < 0 \\ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right), & K'_C \geq 0 \end{cases} \quad (3.8.20)$$

$$(\varphi_0)_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right), & K'_C < 0 \\ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right) - \operatorname{sgn} \left(\frac{K'_S}{K'_C} \right) \frac{\pi}{2}, & K'_C \geq 0 \end{cases} \quad (3.8.21)$$

Bu ifadelerde

$$\tan^{-1}(\cdot) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3.8.4. Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ve Kritik Faz Değerleri için Basit İfadeler

C-R genlik ve frekans sınırlarının en kötü ve en iyi durum değerleri ile bu değerlere karşılık düşen kritik faz değerlerini veren (3.8.14)-(3.8.21) ifadeleri elde edildikten sonra, alçak frekans durumu için bu ifadelerde gözükten frekansa bağlı fonksiyonlar $\omega_0 = 0$ civarındaki Taylor serileri cinsinden yazılmıştır. Cebirsel işlemlerden sonra, küçük ω_0 değerleri için, aşağıdaki basit ifadeler bulunmuştur: Genlik kestirimi için:

$$(B_{\alpha_0})_{\min} = \frac{m}{(1/2\sigma^2)N} + O[N\delta\omega]^2 \quad (3.8.22)$$

$$(B_{\alpha_0})_{\max} = \frac{M}{(1/2\sigma^2)N} (N\delta\omega)^{-6} + O[N\delta\omega]^{-2} \quad (3.8.23)$$

$$(\phi_0)_{\min} = p(N\delta\omega)^3 + O[N\delta\omega]^5 \quad (3.8.24)$$

$$(\phi_0)_{\max} = \frac{\pi}{2} + p(N\delta\omega)^3 + O[N\delta\omega]^5 \quad (3.8.25)$$

Frekans kestirimi için:

$$(B_{\omega_0})_{\min} = \frac{m'}{SNR.N^3} (N\delta\omega)^{-2} + O[1] \quad (3.8.26)$$

$$(B_{\alpha_0})_{\max} = \frac{M'}{SNR.N^3} (N\delta\omega)^{-4} + O[N\delta\omega]^{-2} \quad (3.8.27)$$

$$(\phi_0)_{\min} = p' (N\delta\omega) + O[N\delta\omega]^3 \quad (3.8.28)$$

$$(\phi_0)_{\max} = \frac{\pi}{2} + p' (N\delta\omega) + O[N\delta\omega]^3 \quad (3.8.29)$$

M, m, p, M', m' ve p' tanımları Ek-1'de verilmiştir. Bu sabitler ω_0 frekansından bağımsızdır ve sadece β_0 sönüm katsayısına ve N toplam örnek sayısına bağlıdır. Yaklaşık sınırların ω_0 'ın ters kuvvetlerine olan bağlılığının $N\delta\omega$ çarpımı yoluyla olması, sınırların ω_0 'dan ziyade $N\delta\omega$ 'ın küçük olması halinde büyük olacağını göstermektedir. Bu ise, ω_0 'ın küçük olması durumunda, toplam veri sayısı N 'nin önemini göstermektedir.

(3.8.22) ve (3.8.25) ifadeleri, küçük ω_0 frekansları için, en büyük C-R genlik (faz) sınırının $\frac{(N\delta\omega)^{-6}}{N}$ ve bu sınıra ilişkin kritik faz değerinin $(N\delta\omega)^3$ ile, en küçük C-R genlik (faz) sınırının $\frac{1}{N}$ ve bu sınıra ilişkin kritik faz değerinin $(N\delta\omega)^3$ ile doğru orantılı olduğunu göstermektedir.

(3.8.26) ve (3.8.29) ifadeleri, küçük ω_0 frekansları için, en büyük C-R frekans (sönüm katsayısı) sınırının $\frac{(N\delta\omega)^{-4}}{N^3}$ ve bu sınıra ilişkin kritik faz değerinin $(N\delta\omega)$ ile, en küçük C-R frekans (sönüm katsayısı) sınırının $\frac{(N\delta\omega)^{-2}}{N^3}$ ve bu sınıra ilişkin kritik faz değerinin $(N\delta\omega)$ ile doğru orantılı olduğunu göstermektedir.

3.8.5. Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ile Kritik Faz Değerleri için Basit Kapalı-Biçim İfadeler

(3.8.14)-(3.8.21) ifadeleriyle verilen en iyi ve en kötü durum genlik ve frekans sınırları ile bu sınırlara karşılık düşen kritik faz değerleri sinüsün frekansı ω_0 'ın küçük değerleri için toplam örnek sayısı N ve sinüsün sönüm katsayısı β_0 ile ilgili aşağıdaki varsayımlar altında oldukça sadeleştirilebilir:

$$A1) N^3 e^{-\beta_0 N} \ll 1,$$

$$A2) \beta_0 \ll 1.$$

A1 varsayımı sinüsün sönümlenene kadar örneklendiğini söylemektedir; yani, toplam örnek sayısı yeteri kadar fazla olmalıdır. A2 varsayımı sinüsün sönüm katsayısının küçük olduğunu söylemektedir. Bu varsayımların temelinde hızla sönen yüksek sönüm katsayılı bir sinüsün parametre kestiricilerinin muhtemelen yanlı olacağı, dolayısıyla, C-R sınırlarının uygulanamayacağı düşüncesi yatmaktadır.

Wigren ve Nehorai (1991) tarafından aynı varsayımlar, büyük toplam örnek sayısı ve düşük sönüm katsayısı, altında beyaz Gauss gürültü içindeki çok sayıda sönümlü sinüsten oluşan daha genel bir sinyal modelinde bilinmeyen parametrelerin kestirimine ilişkin C-R sınır ifadeleri için basit ifadeler türetilmiştir.

En kötü ve en iyi durum C-R sınırlarını ve bu sınırlara karşılık düşen kritik faz değerlerini veren (3.8.14)-(3.8.21) ifadelerinin $\omega_0 \rightarrow 0$ iken hakim olan terimleri Bölüm 3.8.4'te (3.8.22)-(3.8.29) basit ifadeleri ile verilmiştir. Bu terimlere A1 ve A2 varsayımları tatbik edilirse, küçük ω_0 değerleri için, aşağıdaki basit kapalı-biçim (asimtotik) ifadeler bulunur (ara işlemler Ek-1'de verilmiştir.): Genlik kestirimi için:

$$(B_{\alpha_0})_{\max} = 32\sigma^2 \beta_0 \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^{-6} + O[\omega_0^{-4}] \quad (3.8.30)$$

$$(B_{\alpha_0})_{\min} = 6\sigma^2 \beta_0 + O[\omega_0^2] \quad (3.8.31)$$

$$(\varphi_0)_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^3 \quad (3.8.32)$$

$$(\varphi_0)_{\min} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^3 \quad (3.8.33)$$

Frekans kestirimi için:

$$(B_{\omega_0})_{\max} = \frac{16\beta_0^3}{SNR} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^{-4} + O[\omega_0^{-2}] \quad (3.8.34)$$

$$(B_{\omega_0})_{\min} = \frac{4\beta_0^3}{SNR} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^{-2} + O[1] \quad (3.8.35)$$

$$(\varphi_0)_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\beta_0} \quad (3.8.36)$$

$$(\varphi_0)_{\min} = -\frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\beta_0} \quad (3.8.37)$$

Asimtotik sınırların ω_0 'a olan bağıllığı ω_0 / β_0 aracılığıyla. Sınır değerleri ω_0 'dan ziyade ω_0 / β_0 değeri küçük olduğunda büyük olacaktır. Bu, ω_0 küçük olduğunda büyük $1 / \beta_0$ 'a sahip olmanın önemini göstermektedir.

(3.8.30)-(3.8.37) ifadeleri en kötü ve en iyi C-R sınırlarının ve bu sınırlara karşılık düşen kritik faz değerlerinin sinüsün frekansına ve sönüm katsayısına olan bağıllığını oldukça basit bir biçimde vermektedir.

(3.8.30) ve (3.8.31) ifadeleri küçük ω_0 , A1 ve A2 varsayımları altında genlik parametresinin kestirimine ilişkin en iyi C-R sınırının β_0 ile ve en kötü C-R sınırının $\beta_0(\omega_0 / \beta_0)^{-6}$ orantılı olduğunu göstermektedir.

(3.8.34) ve (3.8.35) ifadeleri küçük ω_0 , A1 ve A2 varsayımları altında frekans parametresinin kestirimine ilişkin en iyi C-R sınırının $\beta_0^3(\omega_0 / \beta_0)^{-2}$ ile ve en kötü C-R sınırının $\beta_0^3(\omega_0 / \beta_0)^{-4}$ ile orantılı olduğunu göstermektedir.

(3.8.32) ve (3.8.33) ile (3.8.36) ve (3.8.37) ifadeleri küçük ω_0 , A1 ve A2 varsayımları altında genlik parametresinin ve frekans parametresinin kestirimine ilişkin kritik faz değerlerinin ω_0 / β_0 ile orantılı olduğunu göstermektedir.

A1, A2 ve büyük ω_0 varsayımları altında (Wigren ve Nehorai 1991)'de türetilen C-R sınır ifadeleri karşılaştırma yapmak amacıyla aşağıda verilmiştir: Genlik kestirimi için:

$$B_{\alpha_0} = 8\sigma^2\beta_0 \quad (3.8.38)$$

Frekans kestirimi için

$$B_{\omega_0} = \frac{8\beta_0^3}{SNR} \quad (3.8.39)$$

(3.8.38) ve (3.8.39) ifadeleri ω_0 ve φ_0 'dan bağımsızdır.

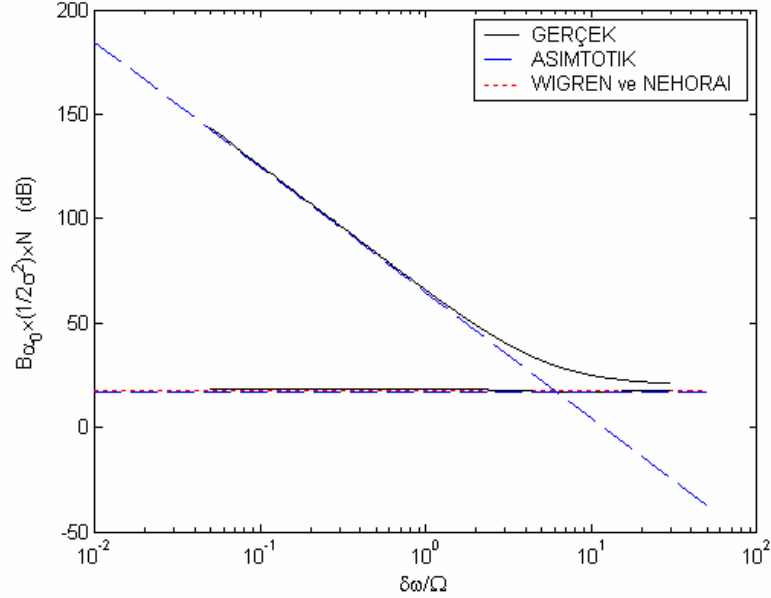
Büyük ω_0 değerleri için Wigren ve Nehorai (1991) kendi sonuçlarını sönümsüz sinüs durumu için var olan sonuçlarla karşılaştırdığında sönümlü sinüs durumundaki $1/\beta_0$ büyüklüğünün sönümsüz sinüs durumundaki N ile aynı role sahip olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmada elde ettiğimiz sonuçlar ile sönümsüz sinüs durumu için Dilaveroğlu (1998,1999) tarafından verilen sonuçlar karşılaştırıldığında aynı ilişkinin küçük ω_0 değerlerinde de sağlandığı görülmüştür. Wigren ve Nehorai (1991) tarafından belirtildiği gibi $1/\beta_0$ büyüklüğü sönümlü sinüsün etkin uzunluğu olarak yorumlanabilir. Ayrıca, ifadeler toplam örnek sayısı N 'ye bağlı değildir. Bu durum sinüsün sönümlenene kadar örneklendiğini belirten A1 varsayımının bir sonucudur.

Sayısal örnekler (3.8.30)-(3.8.37) ifadeleriyle verilen basit kapalı-biçim C-R sınır ve kritik faz ifadelerinin A1 ve A2 varsayımları altında $\delta\omega/\Omega \ll 1$ bölgesinin tamamında geçerli olduğunu göstermektedir.

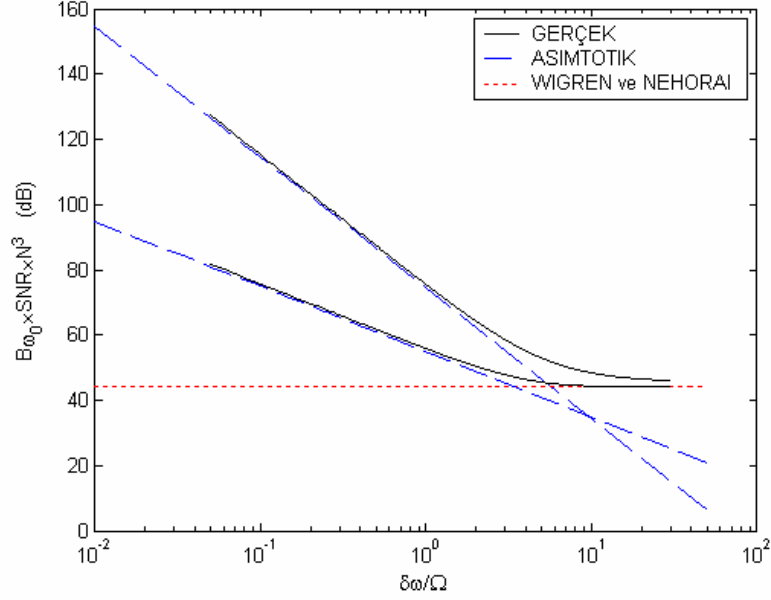
Örnek 3.8.3: Toplam örnek sayısı $N = 100$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.15$ durumunu ele alalım. Genlik kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınır değerlerinin (3.8.14)-(3.8.15) ifadeleriyle verilen gerçek (tam) ve (3.8.30)-(3.8.31) ifadeleriyle verilen asimtotik değerleri Şekil 3.8.5'te gösterilmiştir. Frekans kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınır değerlerinin (3.8.18)-(3.8.19) ifadeleriyle verilen gerçek ve (3.8.34)-(3.8.35) ifadeleriyle verilen asimtotik değerleri Şekil 3.8.6'da gösterilmiştir. Şekillerdeki yatay sürekli eğriler sınırların gerçek değerlerini ve yatay kesikli çizgiler asimtotik değerlerini göstermektedir. Şekillerde ayrıca (Wigren ve Nehorai 1991) kaynağında verilen ve burada (3.8.38)-(3.8.39) ifadeleriyle tekrarlanan asimtotik C-R

sınır değerleri yatay noktali çizgiler ile gösterilmiştir. Şekillerde düşey eksen oranlanmış C-R sınırlarını, yatay eksen $\delta\omega$ frekansının Ω Fourier limiti ($\Omega = 2\pi/N$) cinsinden değerini ($\delta\omega/\Omega$ değerini) göstermektedir. Asimtotik en kötü ve en iyi C-R sınır değerlerinin gerçek değerleri $\delta\omega/\Omega < 1$ (Fourier limitinin altındaki frekans farkları) bölgesi için oldukça yakın bir biçimde izlediği görülmektedir.

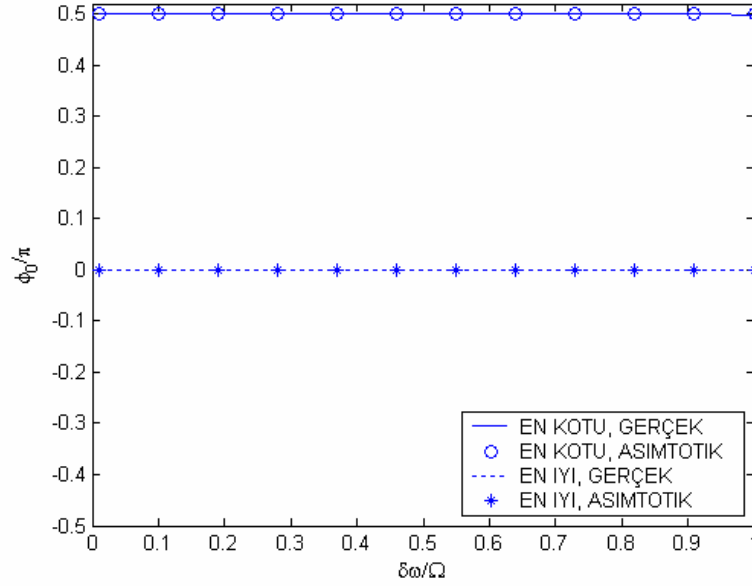
Örnek 3.8.4: Toplam örnek sayısı $N = 60$ ve sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.3$ durumunu ele alalım. Genlik kestirimine ilişkin kritik faz değerlerinin (3.8.16)-(3.8.17) ifadeleriyle verilen gerçek (tam) ve (3.8.32)-(3.8.33) ifadeleriyle verilen asimtotik değerleri Şekil 3.8.7’de gösterilmiştir. Frekans kestirimine ilişkin kritik faz değerlerinin (3.8.20)-(3.8.21) ifadeleriyle verilen gerçek ve (3.8.36)-(3.8.37) ifadeleriyle verilen asimtotik değerleri Şekil 3.8.8’de gösterilmiştir. Şekillerdeki yatay eksen $\delta\omega/\Omega$ oranlanmış frekansını ilgililenen $\delta\omega/\Omega < 1$ bölgesi için göstermektedir. Asimtotik değerlerin gerçek kritik faz değerlerini oldukça yakın bir biçimde izlediği görülmektedir.



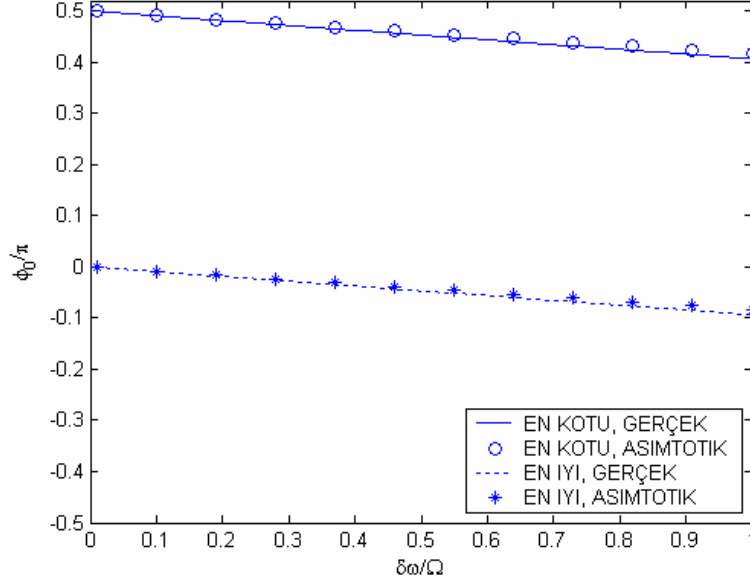
Şekil 3.8.5. Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin gerçek ve asimtotik en kötü ve en iyi durumlardaki C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N = 100$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.15$ ’tir.



Şekil 3.8.6. Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin gerçek ve asimtotik en kötü ve en iyi durumlardaki C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N = 100$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.15$ 'tir.



Şekil 3.8.7. Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durumlardaki gerçek ve yaklaşık faz değerlerinin sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N = 60$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.3$ 'dür.



Şekil 3.8.8. Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durumlardaki gerçek ve yaklaşık faz değerlerinin sinüsün frekansı ile değişimi. Örnek adeti $N = 60$, sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.3$ 'dür.

3.9. İki Kompleks Sönümlü Sinüs için C-R Sınır İfadeleri

3.9.1. Giriş

Bu bölümde kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli (3.1.4) için genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırlarının matrisel olmayan çözümsel ifadeleri elde edilmiştir. Çözümsel ifadeler, daha sonra, yeteri kadar büyük toplam örnek sayısı, küçük frekans farkı ve düşük sönüm katsayısı durumu için analiz edilmiş ve basit kapalı-biçim (asimtotik) ifadeler biçiminde sunulmuştur.

3.9.2. Çözümsel C-R Sınır İfadeleri

Cramér-Rao (C-R) teoremi, $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\phi}_i$, $\hat{\beta}_i$ ve $\hat{\omega}_i$, i . sinüsün, sırasıyla, α_i genliğinin, ϕ_i fazının, β_i sönüm katsayısının ve ω_i frekansının herhangi bir yansız kestiricisi olmak üzere, her bir kestiricinin varyansı için bir alt sınır verir:

$$\text{var}\{\hat{\alpha}_i\} \geq B_{\alpha_i}, \quad \text{var}\{\hat{\varphi}_i\} \geq B_{\varphi_i}$$

$$\text{var}\{\hat{\beta}_i\} \geq B_{\beta_i}, \quad \text{var}\{\hat{\omega}_i\} \geq B_{\omega_i}$$

B_{α_i} , B_{φ_i} , B_{β_i} ve B_{ω_i} sınırları (3.1.4) modeline ilişkin Fisher bilgi matrisinin evriğinin, sırasıyla, α_i , φ_i , β_i ve ω_i parametrelerine karşılık gelen köşegensel elemanlarıdır. Fisher bilgi matrisinin özel bir biçimde ayrıştırılması suretiyle B_{α_i} , B_{φ_i} , B_{β_i} ve B_{ω_i} C-R sınırları için aşağıda verilen matrissel olmayan çözümsel ifadeler elde edilebilir (bu ifadelerin ispatı Ek-2’de verilmiştir.):

$$B_{\alpha_i} = \frac{\sigma^2}{N} \frac{c_i}{2(a_i c_i - b_{i,1}^2 - b_{i,2}^2)} \quad (3.9.1)$$

$$B_{\varphi_i} = \frac{1}{SNR_i \cdot N} \frac{c_i}{2(a_i c_i - b_{i,1}^2 - b_{i,2}^2)} \quad (3.9.2)$$

$$B_{\beta_i} = \frac{1}{SNR_i \cdot N^3} \frac{a_i}{2(a_i c_i - b_{i,1}^2 - b_{i,2}^2)} \quad (3.9.3)$$

$$B_{\omega_i} = \frac{1}{SNR_i \cdot N^3} \frac{a_i}{2(a_i c_i - b_{i,1}^2 - b_{i,2}^2)} \quad (3.9.4)$$

Bu ifadelerde SNR_i , i . sinüsün sinyal gürültü oranını göstermektedir:

$$SNR_i = \frac{\alpha_i^2}{\sigma^2}$$

a_i , $b_{i,1}$, $b_{i,2}$, c_i katsayıları sinüslerin frekanslarına, sönüm katsayılarına ve toplam örnek sayısına bağlıdır:

$$a_i = \Gamma_{i,0} - \frac{(C_1^2 + S_1^2)\Gamma_{j,0} - 2(C_0 C_1 + S_0 S_1)\Gamma_{j,1} + (C_0^2 + S_0^2)\Gamma_{j,2}}{\Gamma_{j,0}\Gamma_{j,2} - \Gamma_{j,1}^2} \quad (3.9.5)$$

$$b_{i,1} = \Gamma_{i,1} - \frac{(C_1 C_2 + S_1 S_2)\Gamma_{j,0} - (C_1^2 + S_1^2 + C_0 C_2 + S_0 S_2)\Gamma_{j,1} + (C_0 C_1 + S_0 S_1)\Gamma_{j,2}}{\Gamma_{j,0}\Gamma_{j,2} - \Gamma_{j,1}^2} \quad (3.9.6)$$

$$b_{i,2} = -\frac{(C_1S_2 - C_2S_1)\Gamma_{j,0} - (C_0S_2 - C_2S_0)\Gamma_{j,1} + (C_0S_1 - C_1S_0)\Gamma_{j,2}}{\Gamma_{j,0}\Gamma_{j,2} - \Gamma_{j,1}^2} \quad (3.9.7)$$

$$c_i = \Gamma_{i,2} - \frac{(C_2^2 + S_2^2)\Gamma_{j,0} - 2(C_1C_2 + S_1S_2)\Gamma_{j,1} + (C_1^2 + S_1^2)\Gamma_{j,2}}{\Gamma_{j,0}\Gamma_{j,2} - \Gamma_{j,1}^2} \quad (3.9.8)$$

Bu ifadelerde $i \neq j = 1, 2$ 'dir ve $r = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\Gamma_{i,r} = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{k=1}^N k^r e^{-2\beta_i k} \quad (3.9.9)$$

$$C_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{k=1}^N k^r e^{-(\beta_1 + \beta_2)k} \cos((\omega_1 - \omega_2)k) \quad (3.9.10)$$

$$S_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{k=1}^N k^r e^{-(\beta_1 + \beta_2)k} \sin((\omega_1 - \omega_2)k) \quad (3.9.11)$$

kısaltmaları kullanılmıştır.

(3.9.1)-(3.9.4) ifadelerinden sınırların sinüslerin φ_1 ve φ_2 fazlarına bağlı olmadığı görülmektedir. Sınırlar sinüslerin ω_1 ve ω_2 frekanslarına sadece bu iki frekans değeri arasındaki fark yoluyla bağlıdır.

(3.9.1)-(3.9.4) ifadelerinin sağ taraflarındaki ilk terimlerden genlik sınırlarının genliklerden bağımsız olduğu; faz, sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının ilgili sinüsün sinyal gürültü oranı ile ters orantılı olduğu; genlik ve faz sınırlarının örnek sayısı N 'nin birinci kuvveti biçiminde azaldığı; sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının N 'nin üçüncü kuvveti biçiminde azaldığı görülmektedir.

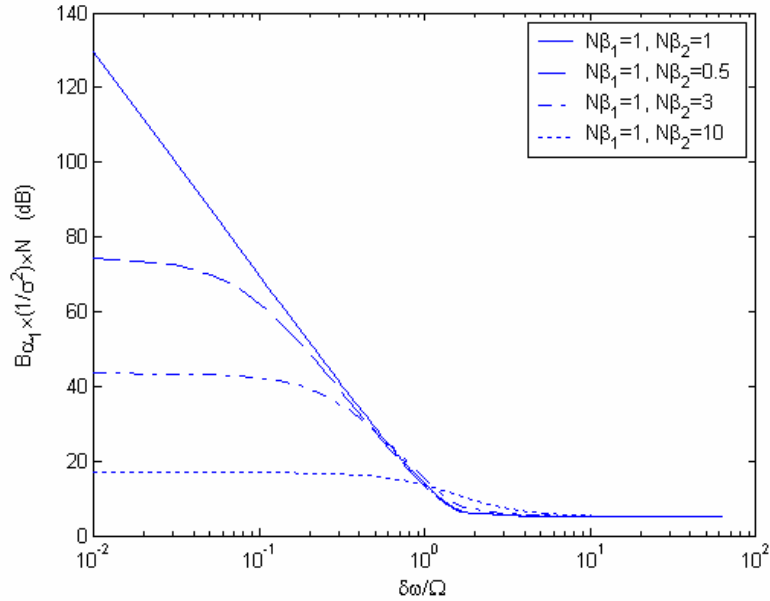
(3.9.1)-(3.9.4) ifadelerinden bir sinüse ilişkin sınırlar arasında

$$B_{\varphi_i} = \frac{B_{\alpha_i}}{\alpha_i^2}, \quad B_{\omega_i} = B_{\beta_i}$$

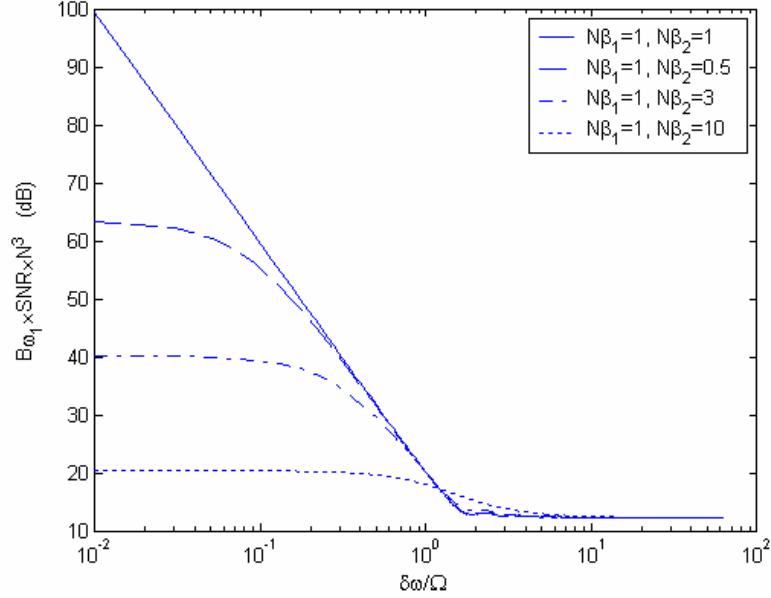
eşitliklerinin sağlandığı görülmektedir. Dolayısıyla, bundan sonraki kısımda sadece genlik ve frekans sınırları ile ilgilenilecektir.

(3.9.1)-(3.9.4) ifadelerinden C-R sınırlarının sinüsler arasındaki frekans farkına ve sinüslerin sönüm katsayılarına olan bağılılıkları açık bir biçimde gözükmemektedir. Bu bağılılıklar bir sayısal örnek yardımıyla aşağıda incelenmiştir.

Örnek 3.9.1: Toplam örnek sayısı $N = 128$ ve sönüm katsayılarının (i) $\beta_1 = 1/N$, $\beta_2 = 1/N$, (ii) $\beta_1 = 1/N$, $\beta_2 = 0.5/N$, (iii) $\beta_1 = 1/N$, $\beta_2 = 3/N$ ve (iv) $\beta_1 = 1/N$, $\beta_2 = 10/N$ şeklindeki dört farklı seçimi için birinci sinüse ilişkin oranlanmış C-R genlik sınırı $B_{\alpha_1} \cdot (1/\sigma^2) \cdot N$ ve oranlanmış C-R frekans sınırı $B_{\alpha_1} \cdot SNR_1 \cdot N^3$, sırasıyla, Şekil 3.9.1 ve Şekil 3.9.2’de gösterilmiştir. Şekillerde yatay eksen $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ frekans farkının Ω Fourier limiti ($\Omega = 2\pi/N$) cinsinden değerini ($\delta\omega/\Omega$ oranını) göstermektedir. Şekillerden sınırların frekans farkı sıfıra yaklaşırken oldukça arttığı görülmektedir. Sınırlar frekans farkı artarken genel olarak azalmakla beraber, bu azalma sadece $\delta\omega/\Omega < 1$ bölgesinde önemlidir; $\delta\omega/\Omega > 1$ bölgesinde sınırlar hemen hemen sabit kalmaktadır. Küçük frekans farklarında, belirli bir frekans farkı değeri için, sınırlar en büyük değerini sinüslerin sönüm katsayılarının eşit olması durumunda almaktadır.



Şekil 3.9.1. İki kompleks sinüsten birincisinin genlik kestirimine ilişkin C-R sınırının sinüsler arasındaki frekans farkı ile değişimi. Örnek adeti $N = 128$ alınmıştır ve sinüslerin sönüm katsayıları için dört farklı durum seçilmiştir.



Şekil 3.9.2. İki kompleks sinüsten birincisinin frekans kestirimine ilişkin C-R sınırının sinüsler arasındaki frekans farkı ile değişimi. Örnek adeti $N=128$ alınmıştır ve sinüslerin sönüm katsayıları için dört farklı durum seçilmiştir.

3.9.3. Yakın Frekans Durumu: Basit Kapalı-Biçim C-R Sınır İfadeleri

(3.9.1)-(3.9.4) sınır ifadeleri iki kompleks sinüs arasındaki frekans farkı $\delta\omega$ 'ın küçük değerleri için toplam örnek sayısı N ve iki kompleks sinüsün sönüm katsayıları β_i , ($i=1,2$) ile ilgili aşağıdaki varsayımlar altında oldukça sadeleştirilebilir:

A1: $Ne^{-\beta_i N} \ll 1$, $i=1,2$ için.

A2: $\beta_i \ll 1$, $i=1,2$ için.

A1 varsayımı sinüslerin sönümlenene kadar örneklendiğini söylemektedir; yani, toplam örnek sayısı yeteri kadar fazla olmalıdır. A2 varsayımı sinüslerin sönüm katsayılarının küçük olduğunu söylemektedir. Pratik parametre kestiricilerinin, genelde, bu iki varsayım sağlandığında yansız oldukları gözlenmiştir. Dolayısıyla, C-R sınırları bu şart altında uygulanabilir olmaktadır.

(3.9.1)-(3.9.4) ifadelerinin A1 varsayımı altında aşağıdaki biçimde sadeleştirilebilir (ifadelerin ispatı Ek-2'de verilmiştir.):

$$\begin{aligned}
& \sigma^2(z_i^2 - 1)(1 + z_i^2 z_j^2 - 2z_i z_j \cos(\delta\omega)) \\
& \times \left\{ 4 - 3z_i^2 + z_i^4 - 7z_j^2 + 4z_j^4 + 19z_i^2 z_j^2 \right. \\
& \quad + 9z_i^4 z_j^4 - 5z_i^4 z_j^2 + z_i^6 z_j^2 - 11z_i^2 z_j^4 \\
& \quad - 2z_i z_j (1 + z_i^2)(3 - z_i^2 - z_j^2 + 3z_i^2 z_j^2) \cos(\delta\omega) \\
& \quad \left. + 2z_i^2 z_j^2 (1 + z_i^2) \cos(2\delta\omega) \right\} \\
B_{\alpha_i} = & \frac{\quad}{2(z_i^2 + z_j^2 - 2z_i z_j \cos(\delta\omega))^3} \quad (3.9.12)
\end{aligned}$$

$$B_{\omega_i} = \frac{1}{\text{SNR}_i} \frac{(z_i^2 - 1)^3 (1 + z_i^2 z_j^2 - 2z_i z_j \cos(\delta\omega))^2}{2z_i^2 (z_i^2 + z_j^2 - 2z_i z_j \cos(\delta\omega))^2} \quad (3.9.13)$$

Burada $i \neq j = 1, 2$ 'dir ve $z_1 = e^{\beta_1}$ ve $z_2 = e^{\beta_2}$ kısaltmaları kullanılmıştır.

(3.9.12) ve (3.9.13) ifadeleri (Yao ve Pandit 1995) kaynağında tek bir sönümlü sinüs durumu için verilen ifadeleri, denklem (34) ve (35), andırmaktadır. Frekans farkı $\delta\omega$ 'nın büyük olması durumunda, (3.9.12) ve (3.9.13) ifadelerinin (Yao ve Pandit 1995) kaynağındaki ifadelerle yaklaşık aynı sonuçları verdiği görülebilir. (İki kompleks sinüs arasındaki frekans farkının büyük olması durumunda sınırların tek sinüslü veri durumundakine indirgeneceği bilinmektedir.)

(3.9.12) ve (3.9.13) ifadeleri örnek sayısı N 'den bağımsızdır. Bu durum sinyalin sönümlenene kadar örneklendiğini belirten A1 varsayımının bir sonucudur.

(3.9.12) ve (3.9.13) ifadeleriyle verilen yaklaşık sınır değerlerinin hassaslığı hakkında bir fikir edinmek için bu ifadelerdeki bağıl hatalar toplam örnek sayısının $N = 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için hesaplanmıştır. Sinüslerin sönüm katsayıları

$$\beta_i \in \left(\frac{\ln 10 + \ln N}{N}, \frac{20}{N} \right)$$

aralığında düzgün dağılmış bir rasgele değişkenin gerçekleşmesi suretiyle saptanmıştır. Sınırların frekans farkına olan bağımlılığının frekans farkının Fourier limitinden küçük veya büyük olmasına göre farklı özelliklere sahip olmasından dolayı, bağıl hatalar frekans farkının

$$\delta\omega/\Omega \in (0.1, 1) \text{ ve } \delta\omega/\Omega \in (1, N/2)$$

aralıklarında olması durumları için ayrı ayrı ele alınmıştır. Her bir aralık için, frekans farkları söz konusu aralıkta düzgün dağılmış bir rasgele değişkenin değerleri şeklinde belirlenmiştir. Bağlı hataların 20,000 denemede elde edilen ortalama ve standart sapmaları Çizelge 3.9.1’de verilmiştir. Çizelgedeki sonuçlardan, (3.9.12) ve (3.9.13) ifadelerinin, çoğunlukla, sınırların doğru değerlerine oldukça yakın değerler verdiği görülmektedir. Ayrıca, bağlı hatalara ilişkin ortalama ve standart sapma değerleri örnek sayısı arttıkça azalmaktadır. Bağlı hataların denemelerde elde edilen maksimum değerleri Çizelge 3.9.2’de verilmiştir. Bu maksimum değerler küçük örnek sayısı durumlarında bile oldukça makul seviyelerdedir ve örnek sayısının artmasıyla daha da azalmaktadır. Toplam örnek sayısı 16’dan 1024’e artarken maksimum bağlı hata Fourier limitinden daha küçük frekans farkları için %30’lardan %0.4’lere düşmektedir; Fourier limitinden daha büyük frekans farkları için ise, %6.5’den daha azdır.

Çizelge 3.9.1. Genlik ve frekans sınırlarının (3.9.12) ve (3.9.13) ifadeleriyle verilen yaklaşık değerlerindeki mutlak bağlı hataların ortalama ve standart sapması (yüzde olarak).

Veri Sayısı N	Frekans Farkı, $\delta\omega/\Omega$			
	$\delta\omega/\Omega \in (0.1,1)$		$\delta\omega/\Omega \in (1, N/2)$	
	Ortalama	Standart Sapma	Ortalama	Standart Sapma
16	$9.6974e-1^\dagger$	2.5242	$7.0087e-2$	$2.3603e-1$
	$9.6730e-1^\ddagger$	2.5120	$7.3253e-2$	$2.4456e-1$
32	$4.3288e-1$	1.2947	$1.3708e-2$	$6.7094e-2$
	$4.2506e-1$	1.2847	$1.5153e-2$	$6.8006e-2$
64	$2.0430e-1$	$6.2751e-1$	$2.7590e-3$	$2.0218e-2$
	$2.0113e-1$	$6.2367e-1$	$3.4137e-3$	$2.0033e-2$
128	$9.6545e-2$	$3.0727e-1$	$6.6238e-4$	$6.0642e-3$
	$9.5191e-2$	$3.0559e-1$	$9.2505e-4$	$6.0379e-3$
256	$4.2857e-2$	$1.3862e-1$	$1.7389e-4$	$2.2067e-3$
	$4.2349e-2$	$1.3797e-1$	$2.5832e-4$	$2.2087e-3$
512	$1.8806e-2$	$5.8115e-2$	$3.8055e-5$	$3.1179e-4$
	$1.8606e-2$	$5.7808e-2$	$6.6831e-5$	$3.3152e-4$
1024	$8.1005e-3$	$2.5708e-2$	$1.0784e-5$	$8.4280e-5$
	$8.0203e-3$	$2.5577e-2$	$1.9821e-5$	$9.1084e-5$

† : $B_{\alpha_1} \cdot (1/\sigma^2) \cdot N$ oranlanmış genlik sınırına ilişkin.

‡ : $B_{\omega_1} \cdot SGO_1 \cdot N^3$ oranlanmış frekans sınırına ilişkin.

Çizelge 3.9.2. Genlik ve frekans sınırlarının (3.9.12) ve (3.9.13) ifadeleriyle verilen yaklaşık değerlerindeki mutlak bağıl hataların maksimum değeri (yüzde olarak).

Veri Sayısı N	Frekans Farkı, $\delta\omega/\Omega$	
	$\delta\omega/\Omega \in (0.1, 1)$	$\delta\omega/\Omega \in (1, N/2)$
16	31.234 [†]	5.9932
	31.395 [‡]	6.3113
32	17.787	3.8682
	17.887	3.8250
64	10.464	1.0616
	10.450	9.6371e-1
128	5.2337	5.0550e-1
	5.2298	4.9222e-1
256	2.1422	1.9098e-1
	2.1412	1.9357e-1
512	1.0645	2.6719e-2
	1.0619	2.4702e-2
1024	4.3988e-1	7.2814e-3
	4.4011e-1	6.3884e-3

[†] : $B_{\alpha_i} \cdot (1/\sigma^2) \cdot N$ oranlanmış genlik sınırına ilişkin.

[‡] : $B_{\omega_i} \cdot SGO_1 \cdot N^3$ oranlanmış frekans sınırına ilişkin

A1 varsayımı altında elde edilen (3.9.12) ve (3.9.13) ifadeler $\delta\omega \rightarrow 0$ iken ve A2 varsayımı altında aşağıdaki basit kapalı-biçim ifadelere indirgenebilir. Genlik kestirimi için:

$$B_{\alpha_i} = \frac{2\sigma^2 \beta_i (\delta\omega^2 + (\beta_i + \beta_j)^2)}{(\delta\omega^2 + (\beta_i - \beta_j)^2)^3} \{(\delta\omega^2 + (\beta_i + \beta_j)^2)^2 + 4\beta_i \beta_j (\delta\omega^2 + (\beta_i + \beta_j)^2) - 16\beta_i^2 \beta_j (\beta_i - \beta_j)\} \quad (3.9.14)$$

Frekans kestirimi için:

$$B_{\omega_i} = \frac{4\beta_i^3 (\delta\omega^2 + (\beta_i + \beta_j)^2)^2}{SNR_i (\delta\omega^2 + (\beta_i - \beta_j)^2)^2} \quad (3.9.15)$$

Burada $i \neq j = 1, 2$ ve $SNR_i = \alpha_i^2 / \sigma^2$ i . kompleks sinüse ait sinyal gürültü oranıdır.

(3.9.14) ve (3.9.15) ifadelerinden C-R sınır ifadelerinin frekans farkı $\delta\omega$ ve sönüm katsayıları β_1, β_2 'ye basit bir biçimde bağlı olduğu açıkça görülmektedir.

(3.9.14) ve (3.9.15) ifadelerinden küçük frekans farklarında ($\delta\omega \rightarrow 0$) C-R sınırlarının kompleks sinüslerin sönüm katsayıları eşit iken gösterdiği davranış, sönüm faktörü eşit değilken gösterdiği davranıştan farklı olduğu kolayca görülebilir.

(3.9.14) ifadesi A1 ve A2 varsayımları altında ve $\delta\omega \rightarrow 0$ iken i . kompleks sinüs ($i = 1,2$) için C-R genlik (faz) sınırının $\beta_1 = \beta_2$ için $\beta_i(\delta\omega/\beta_i)^{-6}$ ile orantılıyken, $\beta_1 \neq \beta_2$ için $\beta_i(\beta_1 - \beta_2)^{-6}$ ile orantılı ve frekans farkı $\delta\omega$ 'dan bağımsız olduğunu gösterir.

(3.9.15) ifadesi A1 ve A2 varsayımları altında ve $\delta\omega \rightarrow 0$ iken i . kompleks sinüs ($i = 1,2$) için C-R frekans (sönüm katsayısı) sınırının $\beta_1 = \beta_2$ için $\beta_i^3(\delta\omega/\beta_i)^{-4}$ ile orantılıyken, $\beta_1 \neq \beta_2$ için $\beta_i^3(\beta_1 - \beta_2)^{-4}$ ile orantılı ve frekans farkı $\delta\omega$ 'dan bağımsız olduğunu gösterir.

Kompleks sinüslerin sönüm katsayıları eşit iken, asimtotik sınırların $\delta\omega$ frekans farkına bağımlılığı $\delta\omega/\beta_i$ 'nin ters kuvveti aracılığıyla. Sınırlar $\delta\omega$ 'nın küçük olmasından ziyade $\delta\omega/\beta_i$ oranı küçük iken büyük olacaktır. Bu, $\delta\omega$ küçük olduğunda büyük $1/\beta_i$ 'e sahip olmanın önemini göstermektedir.

Bölüm 3.8'de bahsettiğimiz gibi Wigren ve Nehorai (1991) tarafından aynı varsayımlar, büyük toplam örnek sayısı ve düşük sönüm katsayısı, ve bizim modelimize ek olarak $\delta\omega$ frekans farkının büyük olması varsayımı altında beyaz Gauss gürültü içindeki çok sayıda sönümlü sinüsten oluşan reel ve kompleks veri modellerindeki bilinmeyen parametrelerin kestirimine ilişkin C-R sınır ifadeleri için basit ifadeler türetilmiştir. Wigren ve Nehorai

$$\delta\omega \gg \beta_1 + \beta_2 \quad (3.9.16)$$

olarak varsaymışlardır.

Bu ek varsayım ile i . kompleks sinüse ($i = 1,2$) ait sınırlar (Wigren ve Nehorai 1991)'de aşağıdaki gibi verilmiştir.

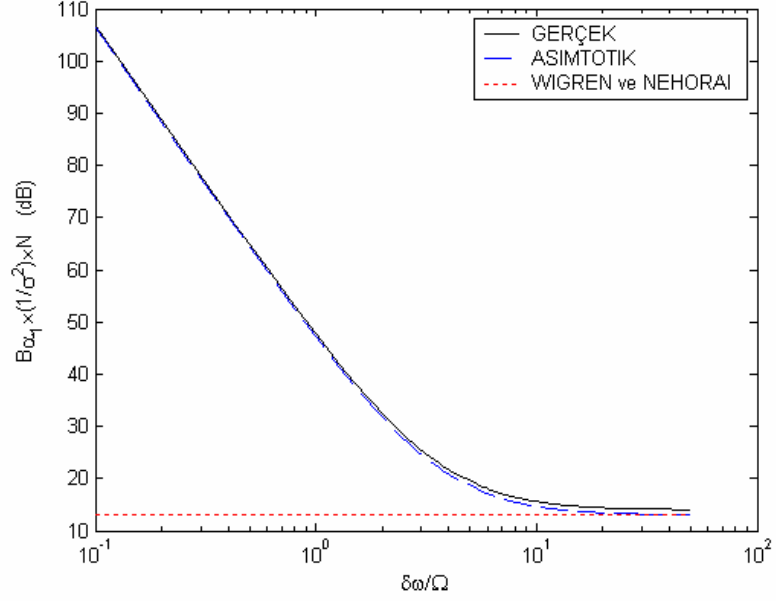
$$B_{\alpha_i} = 2\sigma^2 \beta_i \quad (3.9.17)$$

$$B_{\omega_i} = \frac{4\beta_i^3}{SNR_i} \quad (3.9.18)$$

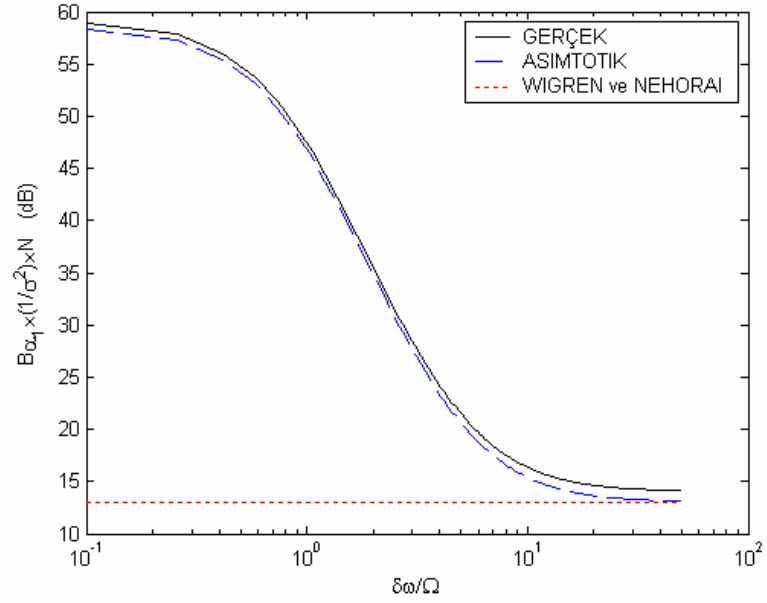
Büyük frekans farkları için yukarıda verilen ifadeler $\delta\omega$ 'dan bağımsızdır.

C-R sınırları için elde edilen basit kapalı-biçim ifadeler (3.9.14) ve (3.9.15) küçük frekans farkları için türetilmiş olmasına rağmen (3.9.16) şartının bu ifadelerde yerine konulması durumunda aynı zamanda geniş frekans aralıkları içinde geçerli olacaktır. Sayısal örnekler (3.9.14) ve (3.9.15) basit ifadelerinin gerçek C-R sınır değerlerin bütün frekans aralığı değerleri için çok yakından izlediğini göstermektedir.

Örnek 3.9.2: Toplam örnek sayısı $N = 100$ ve sönüm katsayılarının (i) $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$ ve (ii) $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.15$, sırasıyla birbirlerine eşit olduğu ve birbirlerinden farklı olduğu iki durumu göz önüne alalım. Birinci kompleks sinüse ait C-R genlik sınırı Şekil 3.9.3'de, C-R frekans sınırı ise Şekil 3.9.4'de verilmiştir. Şekillerde yatay düz çizgiler ile gerçek sınır değerleri, yatay kesikli çizgilerle ise (3.9.14) ve (3.9.15) ifadeleriyle verilen asimtotik sınır değerleri gösterilmiştir. Yatay eksen $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ frekans farkının Ω Fourier limiti ($\Omega = 2\pi/N$) cinsinden değerini ($\delta\omega/\Omega$ oranını) göstermektedir. Şekillerden de görüleceği gibi asimtotik sınır değerlerinin gerçek sınır değerlerini çok yakından izledikleri görülebilir. Şekillerde ayrıca (3.9.17) ve (3.9.18) ifadeleri de karşılaştırma yapmak amacıyla bu şekillerde yatay noktali çizgilerle gösterilmiştir. Sınır eğrileri ve yatay noktali çizgiler arasındaki fark ikinci kompleks sinüsün birincisinden yeterince uzak olduğu durumda C-R sınırı üzerindeki etkisini ifade etmektedir.

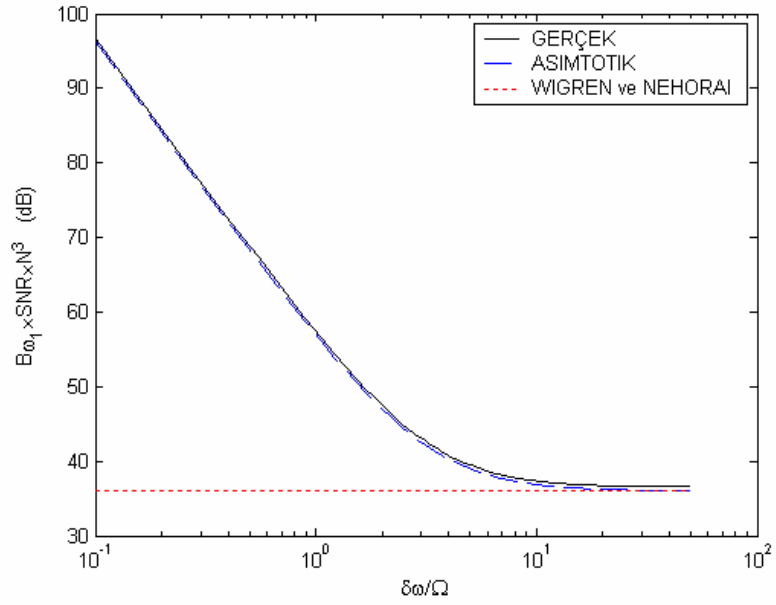


(a)

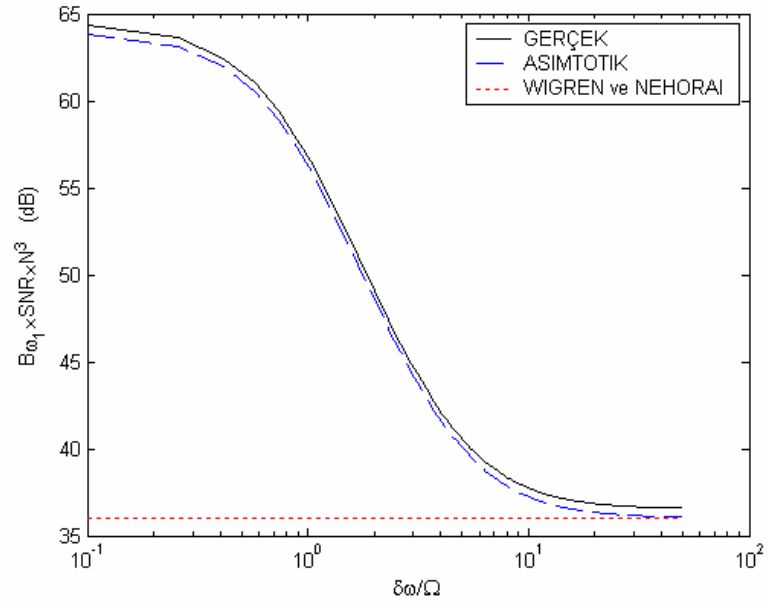


(b)

Şekil 3.9.3. İki kompleks sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin gerçek ve asimtotik C-R sınırlarının sinüsün frekansı ile değişimi. Örnek adeti $N = 100$: (a) sönüm katsayısı $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$; ve (b) sönüm katsayısı $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.15$.



(a)



(b)

Şekil 3.9.4. İki kompleks sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin gerçek ve asimtotik C-R sınırlarının sinüsün frekansıyla değişimi. Örnek adeti $N = 100$: (a) sönüm katsayısı $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$; ve (b) sönüm katsayısı $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.15$.

3.10. Bir Reel Sönümsüz Sinüsün Frekans Parametresinin Kestirimi

3.10.1. Giriş

(3.1.1) modeli ile verilen bir reel sönümsüz sinüsün frekans parametresinin kestirimi MLE ve MUSIC yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Özellikle alçak frekans durumu için (frekans farkının Fourier limitinden küçük olduğu durum) kestiricilerin en kötü ve en iyi durum performansları karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Performans kriteri olarak (Dilaveroğlu 1991) kaynağında verilen frekans parametresinin kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durum C-R sınırları ve bu sınırlara karşılık gelen kritik faz değerleri kullanılmıştır.

Kestiricilerin performansı, sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken incelenmiştir.

3.10.2. MLE ile Frekans Kestirimi

(3.1.1) modelini burada tekrar hatırlayalım:

$$y(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + e(t), \quad t = 1, 2, \dots, N$$

Modele doğrusal biçimde bağlı olan genlik parametresi α_0 ve faz parametresi ϕ_0 'ın kestirimine ilişkin kestirici ifadelerini basit bir biçimde verebilmek için (3.1.1) modelini doğrusal model $\mathbf{y} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$ biçiminde tekrar yazalım. Bu durumda $\mathbf{y}, \mathbf{H}, \boldsymbol{\theta}$ terimleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{y} = [y(1) \quad \dots \quad y(N)]^T, \quad \boldsymbol{\theta} = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T,$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0) & \sin(\omega_0) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cos(\omega_0 N) & \sin(\omega_0 N) \end{bmatrix} \quad (3.10.1)$$

burada $\alpha_1 = \alpha_0 \cos(\varphi_0)$ ve $\alpha_2 = -\alpha_0 \sin(\varphi_0)$ dır.

\mathbf{y} örnek vektörü için ω_0 parametresine bağlı PDF aşağıdaki gibidir:

$$p(\mathbf{y}; \omega_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right) \quad (3.10.2)$$

ω_0 frekans parametresinin MLE'si $\hat{\omega}_0$, (3.10.2) ifadesini maksimum yapan ω_0 değeri olarak elde edilir:

$$\hat{\omega}_0 = \arg \max_{\omega_0} (p(\mathbf{y}; \omega_0)) \quad (3.10.3)$$

(3.10.3) ifadesinin maksimum olması negatif üstsel fonksiyon içerisindeki $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$ ifadesinin minimum olduğu durumda gerçekleşir. Bu çarpım ifadesi aşağıdaki biçimde düzenlenebilir:

$$\mathbf{y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T) \mathbf{y} \quad (3.10.4)$$

(3.10.4) ifadesinden kolayca görülebileceği gibi $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$ ifadesinin minimum olabilmesi $\mathbf{y}^T \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$ ifadesinin maksimum olmasına bağlıdır. Böylece ω_0 frekans parametresi için MLE aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\hat{\omega}_0 = \arg \max_{\omega_0} (\mathbf{y}^T \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}) \quad (3.10.5)$$

Tez çalışmasında, (3.10.5) ifadesini maksimum yapan ω_0 değeri ızgara arama yöntemiyle bulunmuştur. Bu yöntem hakkında detaylı bilgiyi Bölüm 3.5.4'te bulabilirsiniz. Frekans parametresi ω_0 kestirildikten sonra, modele lineer biçimde bağlı olan diğer parametrelerin kestirimi oldukça kolaylaşır.

Kestirilen frekans parametresi değeri $\hat{\omega}_0$, \mathbf{H} matrisinde yerine konulduktan sonra $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\alpha}_1 \quad \hat{\alpha}_2]^T$, α_1 ve α_2 parametrelerinin kestiricileri içeren vektör, (3.5.10) ifadesinde verildiği gibi elde edilir:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (3.10.6)$$

$\hat{\alpha}_1$ ve $\hat{\alpha}_2$ değerleri kestirildikten sonra genlik parametresi α_0 ve faz parametresi φ_0 için kestirici ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\alpha}_0 = \sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2}, \quad \hat{\varphi}_0 = \tan^{-1} \left(-\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \right) \quad (3.10.7)$$

3.10.3. MUSIC ile Frekans Kestirimi

(3.1.1) modelinde frekans parametresi ω_0 'nın kestiriminin MUSIC yöntemi ile yapılabilmesi için modelin (3.6.1) modeli biçiminde tekrar yazılabilmesi gerekir. (3.6.1) modelini burada tekrar hatırlayalım:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k, \quad k = 1, \dots, M$$

(3.1.1) modeli tek bir deneyden elde edilen örneklerden oluştuğundan dolayı bu örneklerin M adet deneyden elde edilmiş örnekler biçiminde tekrar düzenlenmesi gerekir. Bu düzenleme gerçekleştirilmez ise Bölüm 3.6.1'de verilen A3 varsayımı sağlanmayacağından, deney sayısının sinyal sayısından fazla olması varsayımı, MUSIC yöntemi uygulanamaz. (3.1.1) modeli aşağıdaki dönüşümler ile (3.6.1) biçiminde düzenlenebilir.

Öncelikle (3.1.1) modelinde yer alan reel sinyali iki kompleks sinüsün toplamından oluşan eşdeğeri biçiminde yazalım. (MUSIC yöntemi reel değerli veriye, reel değerli verinin (çift sayıda) kompleks değerli sinüs dalgalarından oluştuğu düşünülmektedir (Stoica ve Eriksson 1995)):

$$y(t) = \frac{\alpha_0}{2} e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)} + \frac{\alpha_0}{2} e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (3.10.8)$$

Dönüşüm ifadeleri aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= [y(k) \quad \dots \quad y(k+m-1)]^T, \mathbf{a}(\omega) = [1 \quad e^{j\omega} \quad \dots \quad e^{j(m-1)\omega}]^T, \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{a}(-\omega_0) \quad \mathbf{a}(\omega_0)], \mathbf{x}_k = \left[\frac{\alpha_0}{2} e^{-j\varphi_0} e^{-j\omega_0 k} \quad \frac{\alpha_0}{2} e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 k} \right]^T, \\ \mathbf{e}_k &= [e(k) \quad \dots \quad e(k+m-1)], k=1, \dots, N-m+1, M=N-m+1 \end{aligned} \quad (3.10.9)$$

(3.10.9) ifadesinde verilen dönüşümlerle (3.1.1) modelinin (3.6.1) biçiminde düzenlenmiş açık hali aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(k+m-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-j\omega_0} & e^{j\omega_0} \\ \cdot & \cdot \\ e^{-j(m-1)\omega_0} & e^{j(m-1)\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0}{2} e^{-j\varphi_0} e^{-j\omega_0 k} \\ \frac{\alpha_0}{2} e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ e(k+m-1) \end{bmatrix} \quad (3.10.10)$$

burada m , $2p \ll 2m \ll N+1$ şartını sağlayan bir tamsayı ve p veri modelindeki toplam kompleks sinyal sayısıdır (incelenen modelde $p=2$).

ω_0 frekans parametresinin MUSIC kestiricisi $\hat{\omega}_0$ 'nın performansı incelenirken m değeri olarak $N/2$ seçilmiştir. Kestirim işlemi aşağıdaki adımlar ile gerçekleştirilir:

Adım 1: Yeniden düzenlenen modelin otokorelasyon matrisi (3.6.12) ifadesi kullanılarak elde edilir.

Adım 2: Bu matrise özdeğer ayrıştırma yöntemi uygulanarak (3.6.5) ifadesinde verilen $\hat{\mathbf{G}}$ ve $\hat{\mathbf{S}}$ matrisleri oluşturulur.

Adım 3: $\hat{\omega}_0$ aşağıdaki sözde spektrum fonksiyonunun en yüksek tepesinin yeri olarak elde edilir.

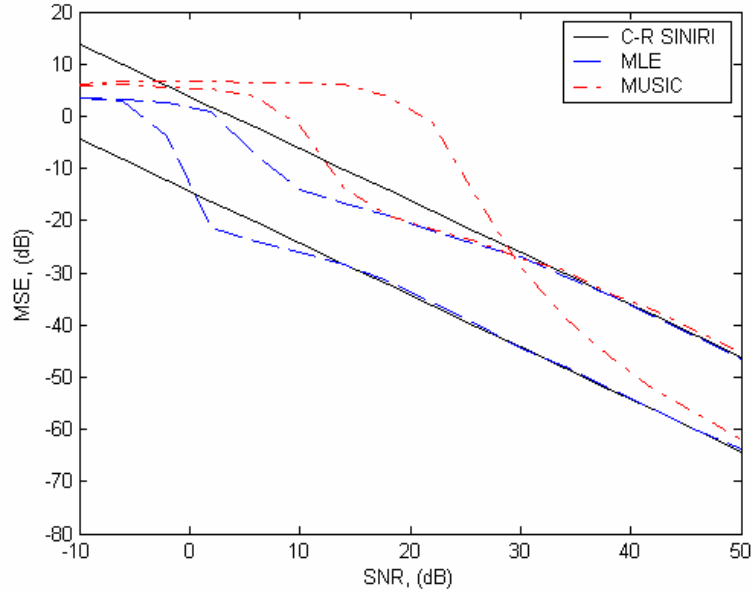
$$f(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^*(\omega) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^* \mathbf{a}(\omega)}, \quad \omega \in (0, \pi) \quad (3.10.11)$$

Frekans parametresi ω_0 kestirildikten sonra, modele lineer biçimde bağlı diğer parametreler (3.10.6) ve (3.10.7) ifadeleri ile elde edilebilir.

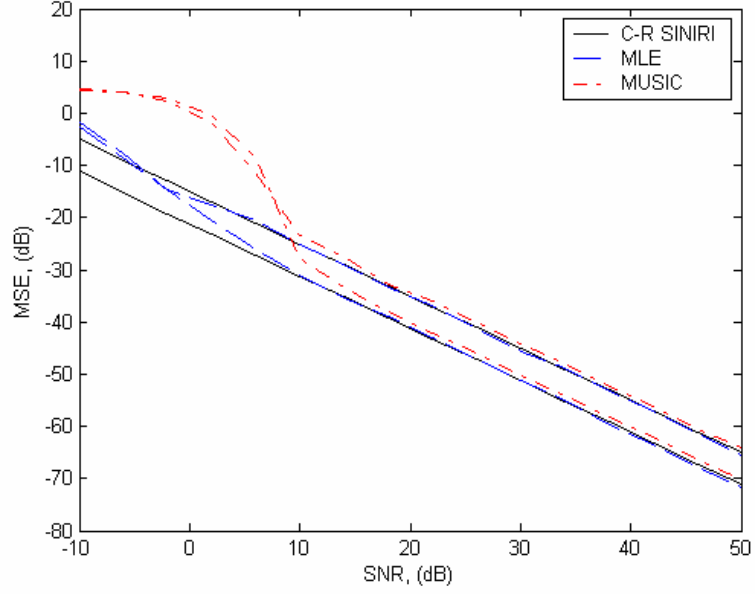
3.10.4. MLE ve MUSIC Kestiricilerin Performans Analizi

Bir reel sönümsüz sinüsün frekans parametresinin kestirimine ilişkin MLE ve MUSIC kestiricilerin performansı, C-R sınırı performans kriteri seçilerek, sayısal yoldan karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. (3.1.1) modelinde en kötü durum $\varphi_0 = (\varphi_0)_{\max}$ ve en iyi durum $\varphi_0 = (\varphi_0)_{\min}$ senaryoları için kestiricilerin performansı sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken incelenmiştir.

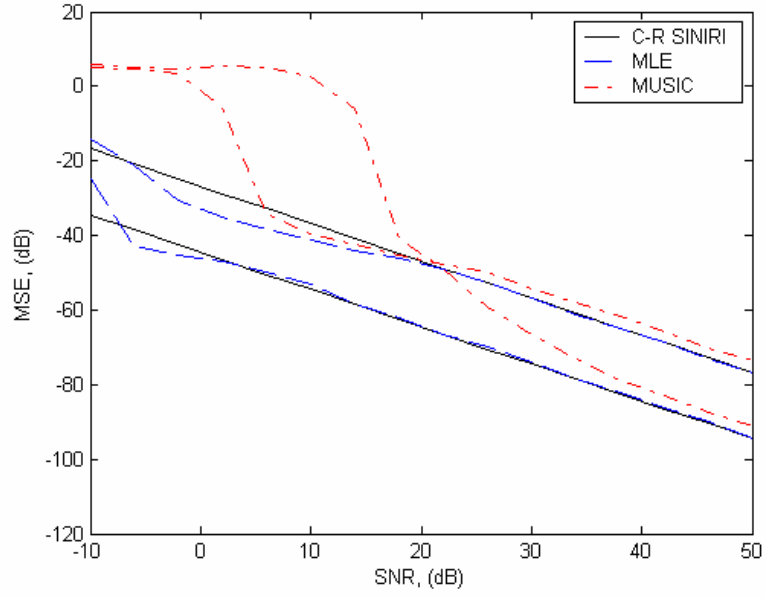
Her iki durum için genlik parametresi $\alpha_0 = 1$ alınmış ve gürültü bileşeni $e(t)$ olarak sıfır ortalamalı reel beyaz Gauss gürültü kullanılmıştır. MUSIC kestiricisinde otokorelasyon matrisinin boyutu $m = N/2$ olarak seçilmiştir. Benzetim sonuçları 500 Monte Carlo denemesi için aşağıda verilmiştir.



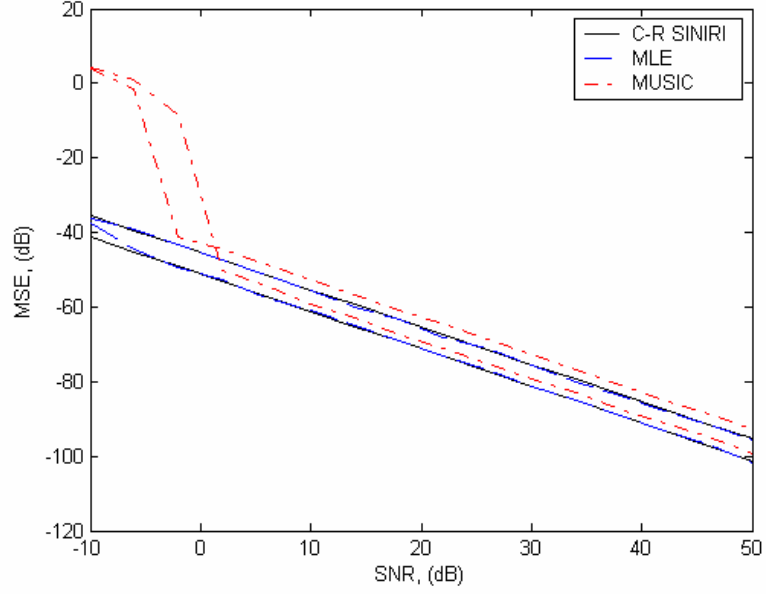
Şekil 3.10.1. $N = 10$ ve $\delta\omega = 0.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



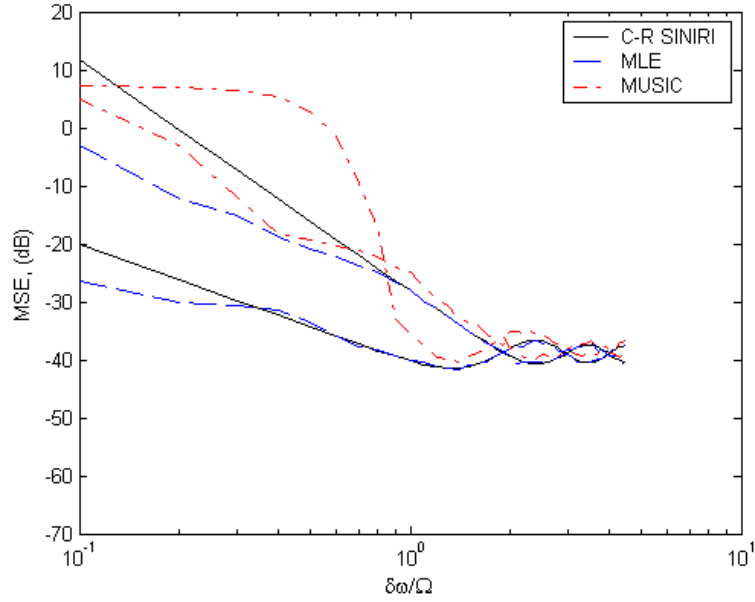
Şekil 3.10.2. $N=10$ ve $\delta\omega=1.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



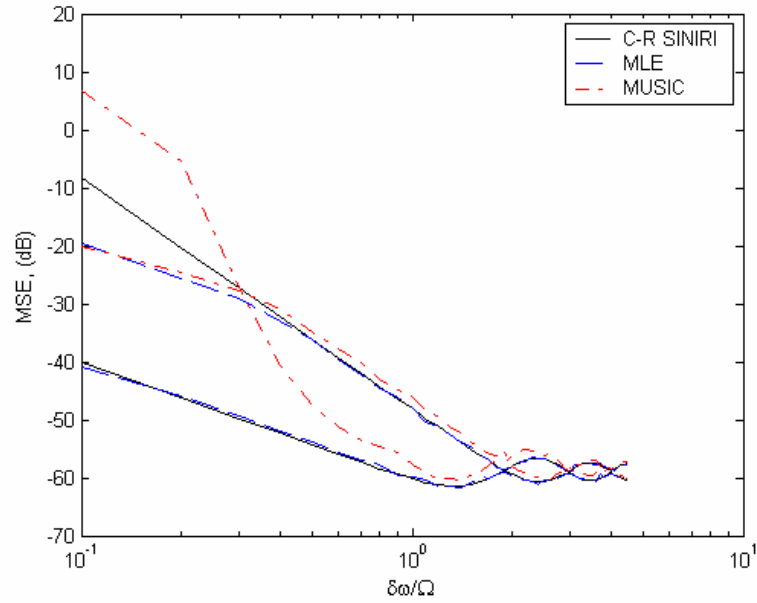
Şekil 3.10.3. $N=100$ ve $\delta\omega=0.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



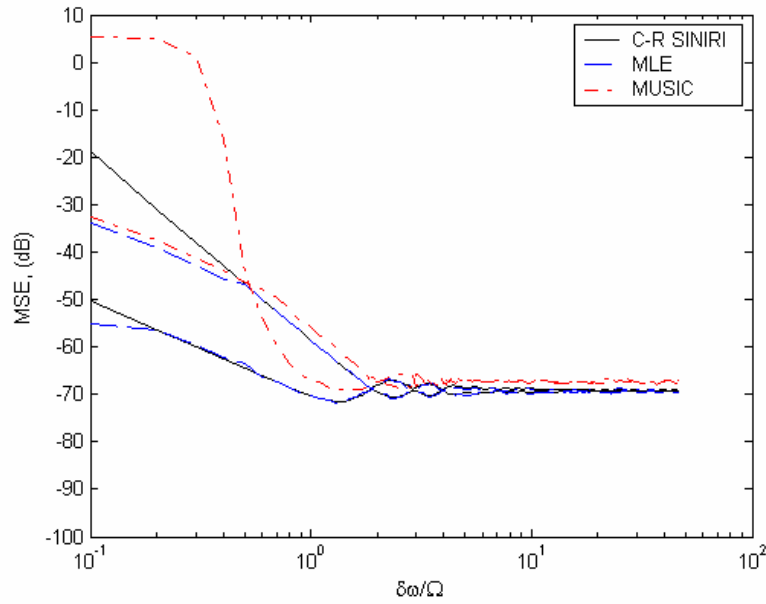
Şekil 3.10.4. $N=100$ ve $\delta\omega=1.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



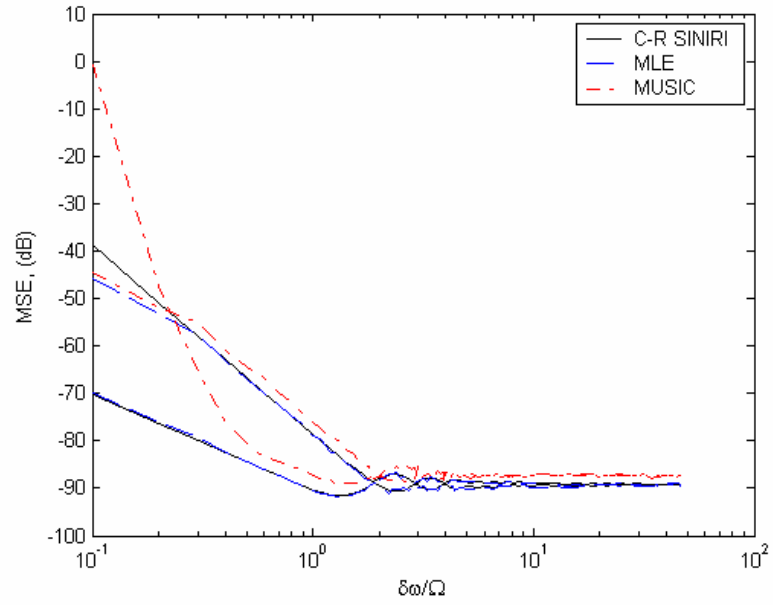
Şekil 3.10.5. $N=10$ ve $SNR=20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



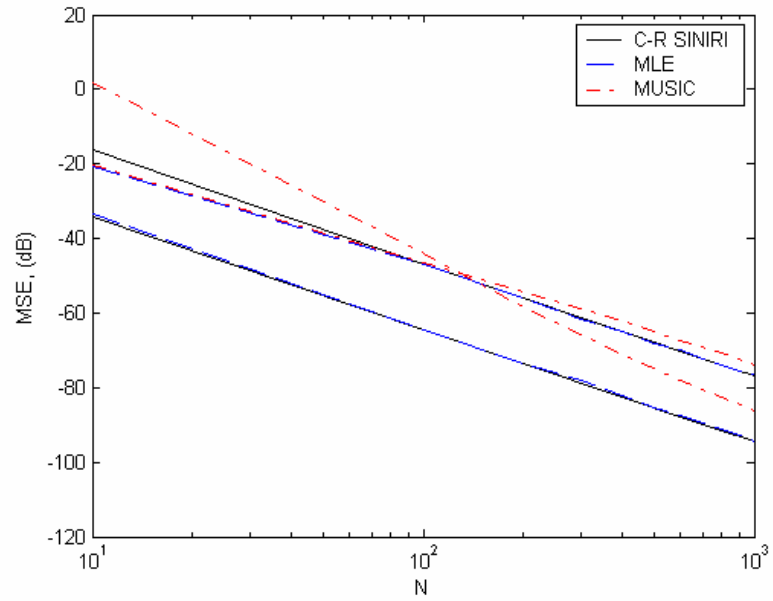
Şekil 3.10.6. $N=10$ ve $SNR=40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



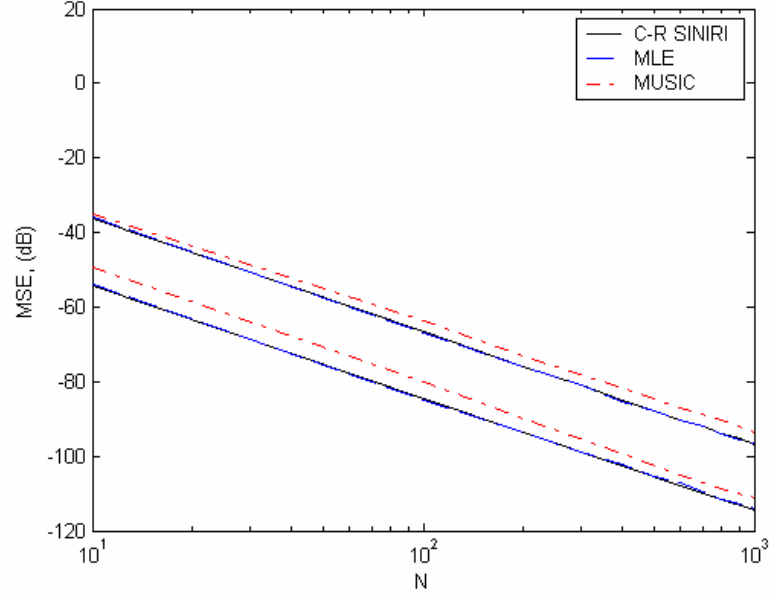
Şekil 3.10.7. $N=100$ ve $SNR=20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



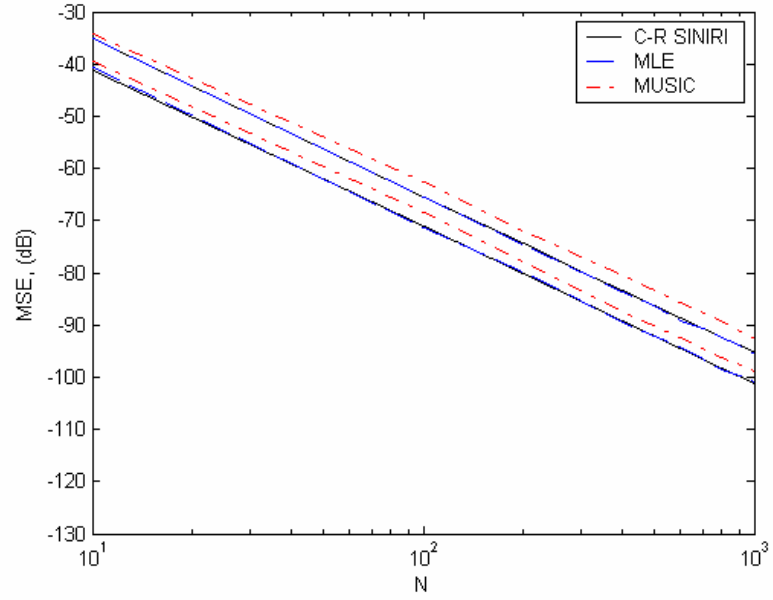
Şekil 3.10.8. $N = 100$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



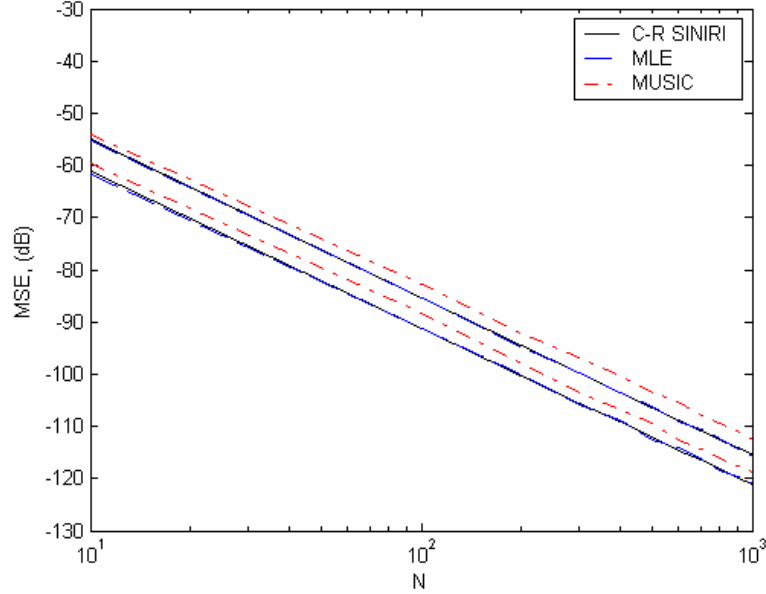
Şekil 3.10.9. $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.10.10. $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.10.11. $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.10.12. $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi

MLE her iki C-R sınırını (en kötü durum ve en iyi durum) toplam örnek sayısı $N = 10$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ için (10dB)-(30dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ için (5dB), $N = 100$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ için (0dB)-(20dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ için (-10dB) civarındaki SNR değerlerinde yakalamaktadır.

MUSIC her iki C-R sınırını (en kötü durum ve en iyi durum) toplam örnek sayısı $N = 10$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ için (30dB)-(50dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ için (10dB), $N = 100$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ için (15dB)-(40dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ için (0dB) civarındaki SNR değerlerinde yakından izlemeye başlamaktadır.

MLE, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için alçak frekans durumunda dahi düşük SNR değerlerinde ilgili C-R sınırını yakalamaktadır.

MUSIC'in, her iki durum için de, toplam örnek sayısı artarken dahi ilgili C-R sınırını yakalayamadığı görülmektedir. Bunun sebebi reel sinüsün iki kompleks sinüsün toplamı biçiminde düşünülmüş olmasıdır. Bu yaklaşımın kabul edilebilir performans kaybına sebep olduğu bilinmektedir.

MUSIC'in en kötü durum performansı MLE'ye çok yakın bir davranış sergilerken en iyi durum performansı incelenen değişken parametrelerin hepsi (sinyal gürültü oranı, sinüsün frekansı ve toplam örnek sayısı) için daha yüksek bir eşik değere sahiptir.

Her iki kestirici için de SNR eşik değeri, frekans farkı ve/veya toplam örnek sayısı azaldıkça artmaktadır.

3.11. İki Kompleks Sönümsüz Sinüsün Frekans Parametrelerinin Kestirimi

3.11.1. Giriş

(3.1.2) modeli ile verilen iki kompleks sönümsüz sinüsün frekans parametrelerinin kestirimi MLE ve MUSIC kestirici kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Özellikle yakın frekans durumu için (frekans farkının Fourier limitinden küçük olduğu durum) kestiricilerin en kötü ve en iyi durum performansları karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Performans kriteri olarak (Dilaveroğlu 1991) kaynağında verilen frekans parametresinin kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durum C-R sınırları ve bu sınırlara karşılık gelen kritik faz değerleri kullanılmıştır.

Kestiricilerin performansı, sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken incelenmiştir.

3.11.2. MLE ile Frekans Kestirimi

(3.1.2) modelini burada tekrar hatırlayalım:

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i e^{j(\omega_i t + \phi_i)} + e(t), \quad t = 1, 2, \dots, N$$

Frekans parametreleri ω_i dışında modele doğrusal biçimde bağlı olan genlik parametreleri α_i ve faz parametreleri ϕ_i , ($i = 1, 2$) için kestirici ifadelerini basit bir biçimde verebilmek amacıyla (3.1.2) modelini doğrusal model $\mathbf{y} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$ biçiminde tekrar yazalım. Bu durumda \mathbf{y} , \mathbf{H} , $\boldsymbol{\theta}$ terimleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{y} = [y(1) \quad \dots \quad y(N)]^T, \quad \boldsymbol{\theta} = [A_1 \quad A_2]^T, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} e^{j\omega_1} & e^{j\omega_2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ e^{j\omega_1 N} & e^{j\omega_2 N} \end{bmatrix} \quad (3.11.1)$$

burada $A_1 = \alpha_1 e^{j\theta_1}$ ve $A_2 = \alpha_2 e^{j\theta_2}$ dir.

\underline{y} örnek vektörü için ω_1 ve ω_2 parametrelerine bağlı PDF aşağıdaki gibidir:

$$p(\mathbf{y}; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^* (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right) \quad (3.11.2)$$

ω_1 ve ω_2 frekans parametrelerinin MLE'si $\hat{\omega}_1$ ve $\hat{\omega}_2$ (3.11.2) ifadesini maksimum yapan ω_1 ve ω_2 değerleri olarak elde edilir:

$$\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 = \arg \max_{\omega_1, \omega_2} (p(\mathbf{y}; \omega_1, \omega_2)) \quad (3.11.3)$$

(3.11.3) ifadesinin maksimum olması negatif üstsel fonksiyon içerisindeki $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^* (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$ ifadesinin minimum olduğu durumda gerçekleşir. Bu çarpım ifadesi aşağıdaki biçimde düzenlenebilir:

$$\mathbf{y}^* (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^*) \mathbf{y} \quad (3.11.4)$$

(3.11.4) ifadesinden kolayca görülebileceği gibi $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^* (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$ ifadesinin minimum olabilmesi $\mathbf{y}^* \mathbf{H}(\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{y}$ ifadesinin maksimum olmasına bağlıdır. Böylece ω_1 ve ω_2 frekans parametreleri için MLE aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 = \arg \max_{\omega_1, \omega_2} (\mathbf{y}^* \mathbf{H}(\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{y}) \quad (3.11.5)$$

Tez çalışmasında, (3.11.5) ifadesini maksimum yapan ω_1 ve ω_2 değerleri iki boyutlu ızgara arama yöntemiyle bulunmuştur. Bu yöntem hakkında detaylı bilgiyi Bölüm 3.5.4'te bulabilirsiniz. Frekans parametreleri ω_1 ve ω_2 kestirildikten sonra, modele lineer biçimde bağlı olan diğer parametrelerin kestirimi oldukça kolaylaşır.

Kestirilen frekans parametrelerinin değeri $\hat{\omega}_1$ ve $\hat{\omega}_2$ \mathbf{H} matrisinde yerine konulduktan sonra $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{A}_1 \ \hat{A}_2]^T$, A_1 ve A_2 parametreleri için kestiricileri içeren vektör, (3.5.10) ifadesinde verildiği gibi elde edilir:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{y} \quad (3.11.6)$$

\hat{A}_1 ve \hat{A}_2 kestirilmiş değerleri elde edildikten sonra genlik parametreleri α_1, α_2 ve faz parametreleri φ_1, φ_2 için kestirici ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\varphi}_1 = \tan^{-1}(\text{imag}(\hat{A}_1) / \text{real}(\hat{A}_1)) \quad (3.11.7)$$

$$\hat{\varphi}_2 = \tan^{-1}(\text{imag}(\hat{A}_2) / \text{real}(\hat{A}_2)) \quad (3.11.8)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \sqrt{(\text{real}(\hat{A}_1))^2 + (\text{imag}(\hat{A}_1))^2} \quad (3.11.9)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \sqrt{(\text{real}(\hat{A}_2))^2 + (\text{imag}(\hat{A}_2))^2} \quad (3.11.10)$$

3.11.3. MUSIC ile Frekans Kestirimi

(3.1.2) modelinde ω_1 ve ω_2 frekans parametrelerinin kestiriminin MUSIC yöntemi ile yapılabilmesi için modelin (3.6.1) modeli biçiminde tekrar yazılabilmesi gerekir.

(3.1.2) modeli tek bir deneyden elde edilen örneklerden oluştuğundan dolayı bu örneklerin M adet deneyden elde edilmiş örnekler biçiminde tekrar düzenlenmesi gerekir. Bu düzenleme gerçekleştirilmez ise Bölüm 3.6.1'de verilen A3 varsayımı sağlanmayacağından, deney sayısının sinyal sayısından fazla olması varsayımı, MUSIC yöntemi uygulanamaz. (3.1.2) modeli aşağıdaki dönüşümler ile (3.6.1) biçiminde düzenlenebilir.

Dönüşüm ifadeleri aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= [y(k) \quad \dots \quad y(k+m-1)]^T, \mathbf{a}(\omega) = [1 \quad e^{j\omega} \quad \dots \quad e^{j(m-1)\omega}]^T, \mathbf{A}(\theta) = [\underline{a}(\omega_1) \quad \underline{a}(\omega_2)], \\ \mathbf{x}_k &= [\alpha_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega_1 k} \quad \alpha_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega_2 k}]^T, \mathbf{e}_k = [e(k) \quad \dots \quad e(k+m-1)], \\ k &= 1, \dots, N-m+1, M = N-m+1 \end{aligned} \quad (3.11.11)$$

(3.11.11) ifadesinde verilen dönüşümlerle (3.1.2) modelinin (3.6.1) biçiminde düzenlenmiş açık hali aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(k+m-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\omega_1} & e^{j\omega_2} \\ \cdot & \cdot \\ e^{j(m-1)\omega_1} & e^{j(m-1)\omega_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega_1 k} \\ \alpha_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega_2 k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ e(k+m-1) \end{bmatrix} \quad (3.11.12)$$

burada m , $2p(2m(N+1))$ şartını sağlayan bir tamsayıdır. p veri modelindeki toplam kompleks sinyal sayısıdır (incelenen modelde $p = 2$).

ω_1 ve ω_2 frekans parametrelerinin MUSIC kestiricileri $\hat{\omega}_1$ ve $\hat{\omega}_2$ 'nin performansı incelenirken m değeri olarak $N/2$ seçilmiştir. Kestirim işlemi aşağıdaki adımlar ile gerçekleştirilir:

Adım 1:Yeniden düzenlenen modelin otokorelasyon matrisi (3.6.12) ifadesi kullanılarak elde edilir.

Adım 2: Bu matrise özdeğer ayrıştırma yöntemi uygulanarak (3.6.5) ifadesinde verilen $\hat{\mathbf{S}}$ ve $\hat{\mathbf{G}}$ matrisleri oluşturulur.

Adım 3: $\hat{\omega}_1$ ve $\hat{\omega}_2$ aşağıdaki sözde spektrum fonksiyonunun en yüksek iki tepesinin yeri olarak elde edilir.

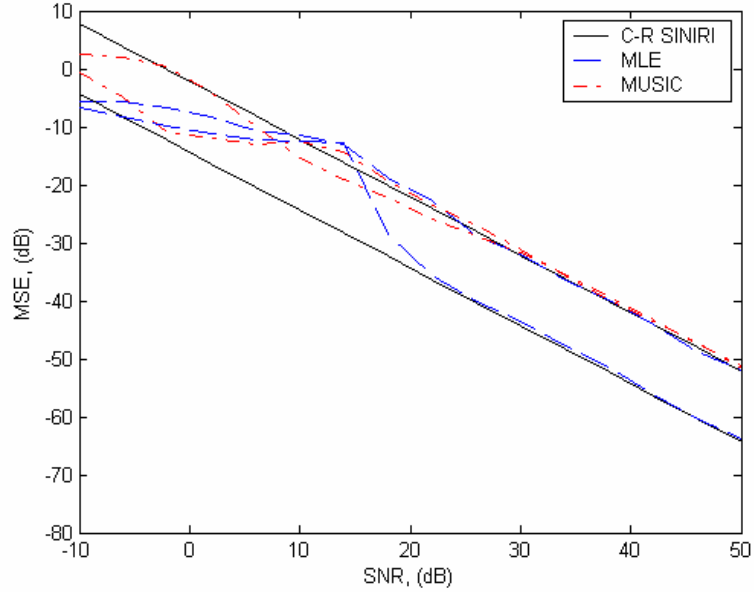
$$f(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^*(\omega) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^* \mathbf{a}(\omega)}, \quad \omega \in (0, 2\pi) \quad (3.11.13)$$

Frekans parametreleri ω_1 ve ω_2 kestirildikten sonra, modele lineer biçimde bağlı diğer parametreler (3.11.7)-(3.11.10) ifadeleriyle verildiği biçimde elde edilir.

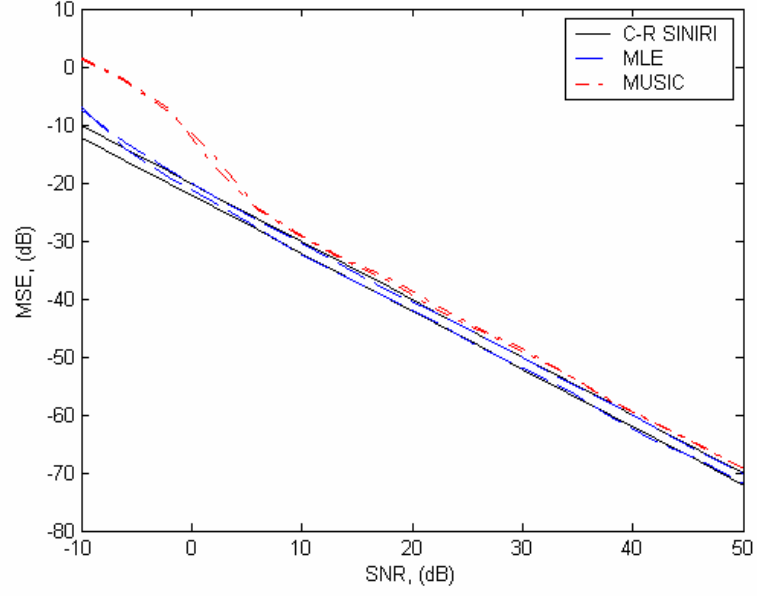
3.11.4. MLE ve MUSIC Kestiricilerin Performans Analizi

İki kompleks sönümsüz sinüsün frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin MLE ve MUSIC kestiricilerin performansı, C-R sınırı performans kriteri seçilerek, sayısal yoldan karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. (3.1.2) modelinde en kötü durum $\varphi_2 - \varphi_1 = (\delta\varphi)_{\max}$ ve en iyi durum $\varphi_2 - \varphi_1 = (\delta\varphi)_{\min}$ senaryoları için kestiricilerin performansı sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken incelenmiştir.

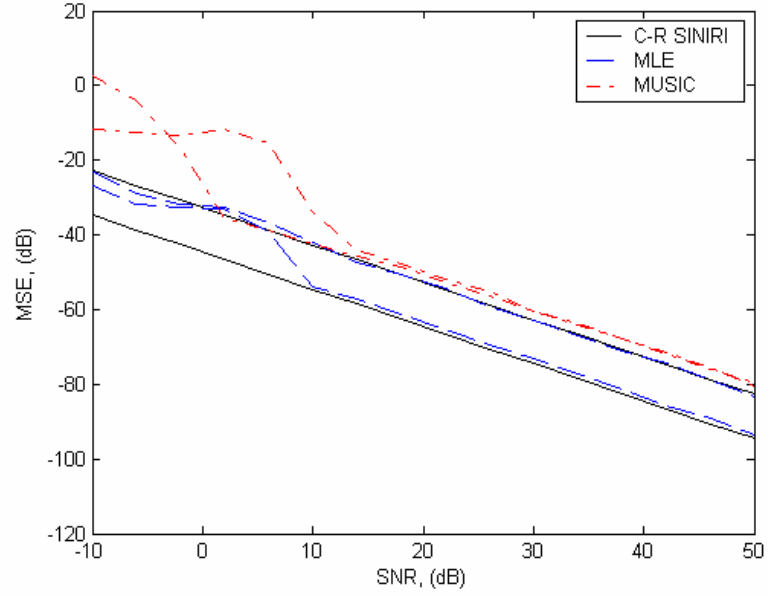
Her iki durum için genlik parametresi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ seçilmiş ve gürültü bileşeni $e(t)$ olarak sıfır ortalamalı kompleks beyaz Gauss gürültü kullanılmıştır. MUSIC kestiricisinde otokorelasyon matrisinin boyutu $m = N/2$ olarak seçilmiştir. Benzetim sonuçları birinci sinüsün frekans kestirimine ilişkindir ve 500 Monte Carlo denemesi için aşağıda verilmiştir.



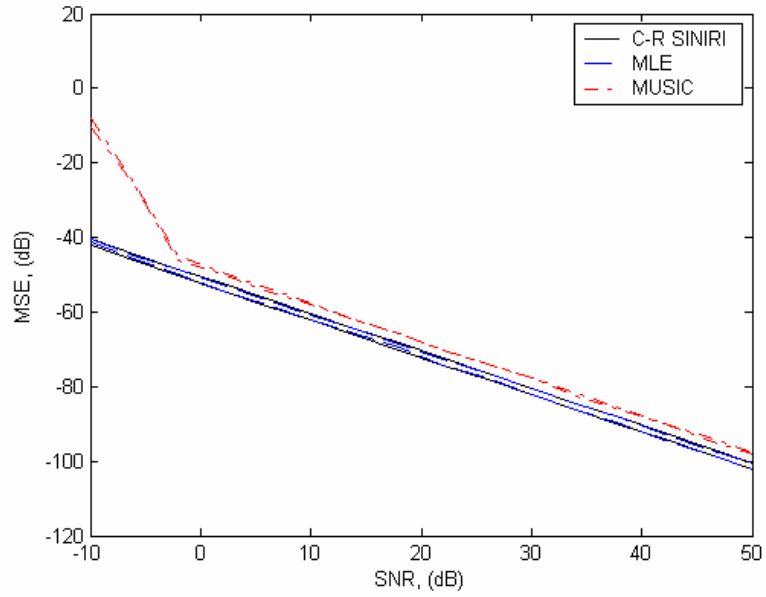
Şekil 3.11.1. $N = 10$ ve $\delta\omega = 0.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



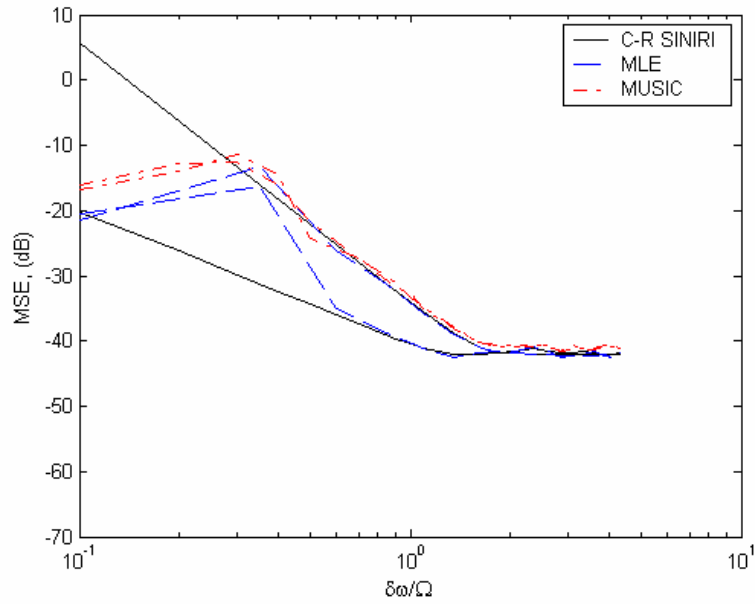
Şekil 3.11.2. $N=10$ ve $\delta\omega=1.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



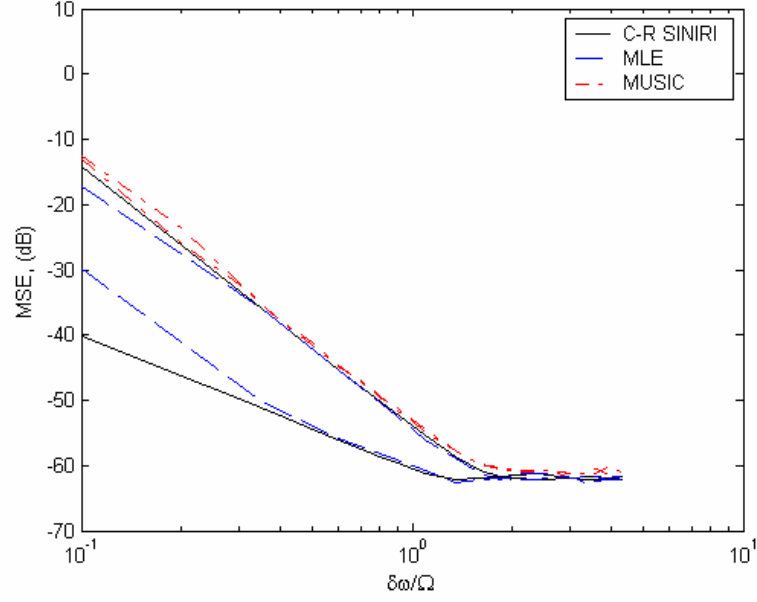
Şekil 3.11.3. $N=100$ ve $\delta\omega=0.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



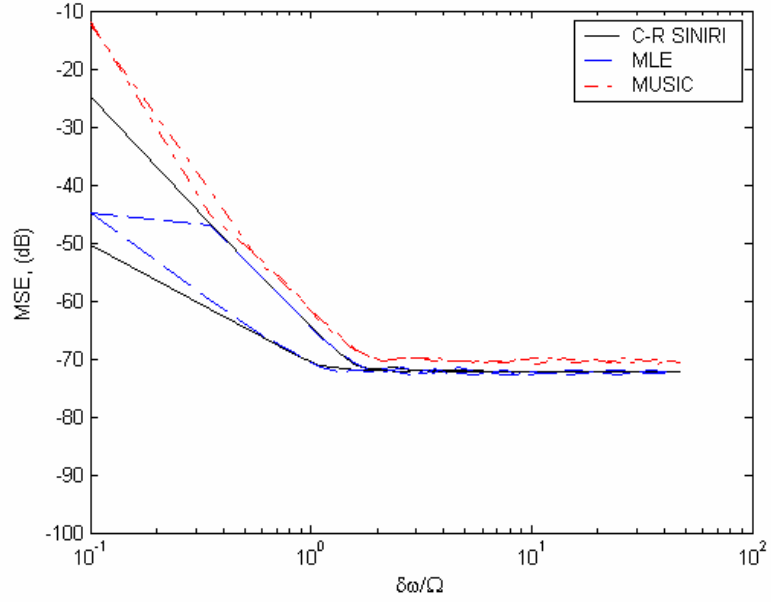
Şekil 3.11.4. $N = 100$ ve $\delta\omega = 1.5\Omega$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



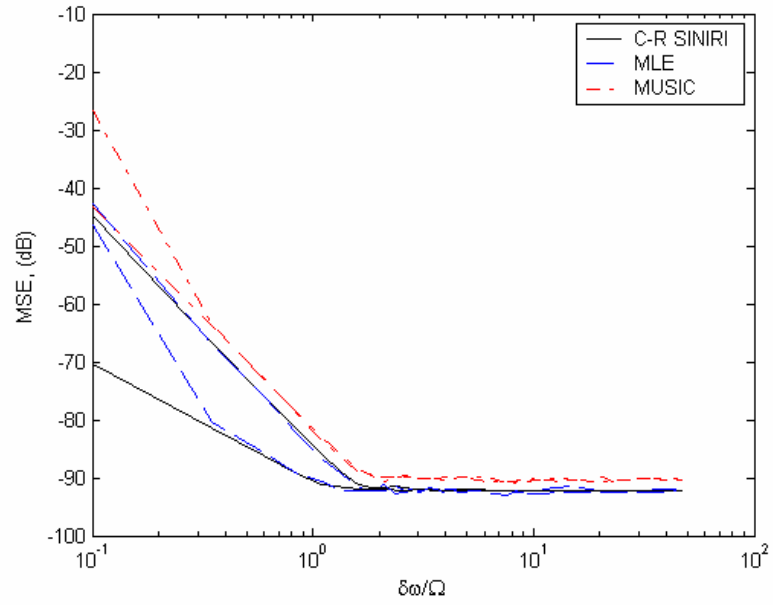
Şekil 3.11.5. $N = 10$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



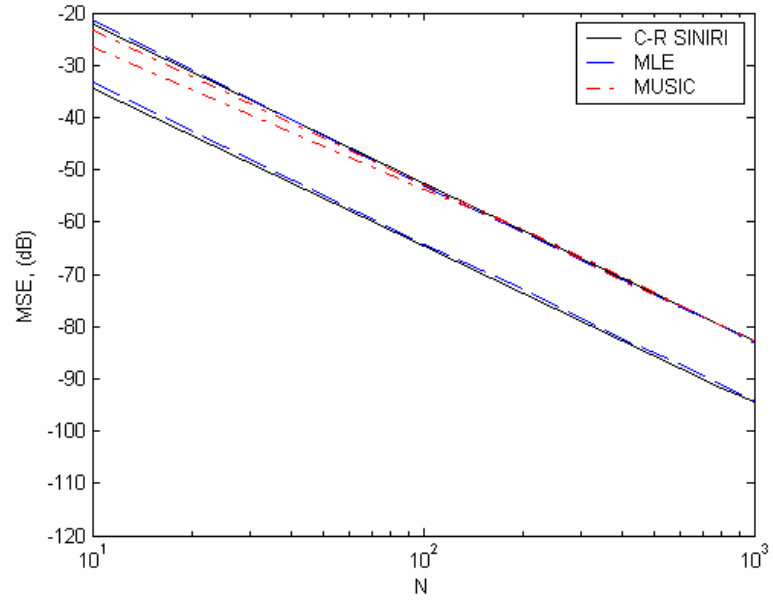
Şekil 3.11.6. $N=10$ ve $SNR=40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



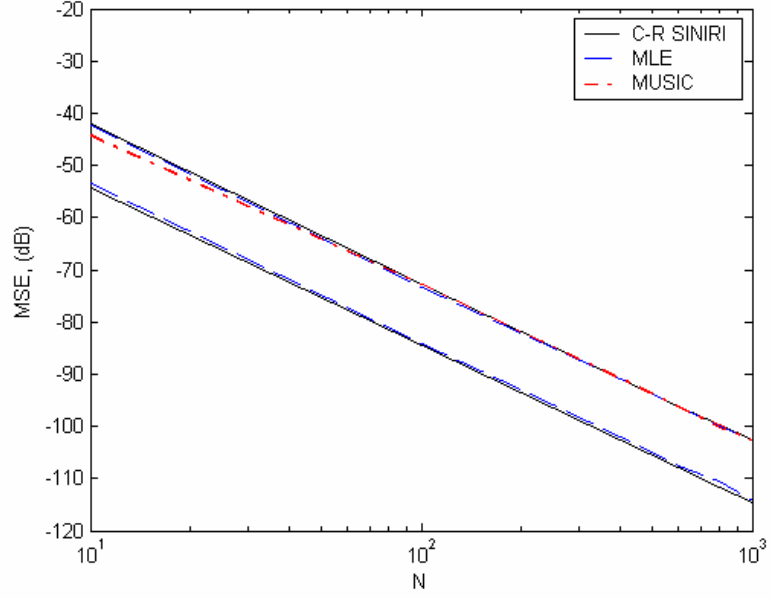
Şekil 3.11.7. $N=100$ ve $SNR=20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



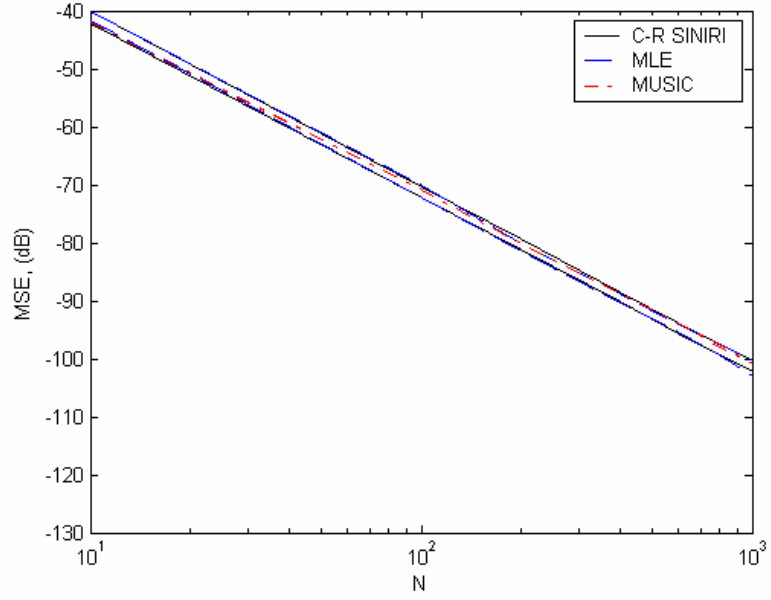
Şekil 3.11.8. $N = 100$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



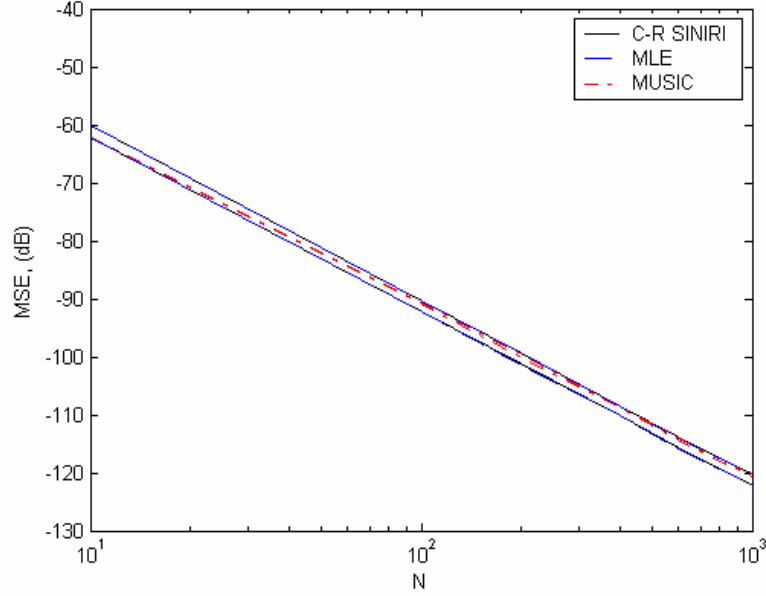
Şekil 3.11.9. $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.11.10. $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.11.11. $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 20dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.11.12. $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve MUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi

MLE, her iki C-R sınırını (en kötü durum ve en iyi durum) toplam örnek sayısı $N = 10$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ için (10dB)-(20dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ için (0dB), $N = 100$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ için (0dB)-(10dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ için (-10dB) civarındaki SNR değerlerinde yakalamaktadır.

MUSIC, en kötü ve en iyi duruma karşılık gelen kritik faz değerlerinin her ikisi için de en kötü durum C-R sınırını toplam örnek sayısı $N = 10$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ için (20dB)-(30dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ için (5dB), $N = 100$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ için (5dB)-(15dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ için (-5dB) civarındaki SNR değerlerinde çok yakından izlemeye başlamaktadır.

MLE, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi düşük SNR değerlerinde ilgili C-R sınırını yakalamaktadır.

MUSIC, her iki durum için de, en kötü durum C-R sınırına yaklaşmakta ve yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi düşük SNR değerlerinde en kötü durum C-R sınırını yakalamaktadır.

Her iki kestirici için de SNR eşik değeri frekans farkı ve/veya toplam örnek sayısı azaldıkça artmaktadır.

3.12. Bir Reel Sönümlü Sinüsün Frekans Parametresinin Kestirimi

3.12.1. Giriş

(3.1.3) modeli ile verilen bir reel sönümlü sinüsün frekans parametresinin kestirimi MLE ve DMUSIC yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Özellikle alçak frekans durumu için (frekans farkının Fourier limitinden küçük olduğu durum) kestiricilerin en kötü ve en iyi durum performansları karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Performans kriteri olarak (3.8.18)-(3.8.19) ifadeleri ile verilen frekans parametresinin kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durum C-R sınırları ve bu sınırlara karşılık gelen (3.8.20)-(3.8.21) ifadeleri ile verilen kritik faz değerleri kullanılmıştır.

Kestiricilerin performansı, sinyal gürültü oranı, frekans farkı, sönüm katsayısı ve toplam örnek sayısı değişirken incelenmiştir.

3.12.2. MLE ile Frekans Kestirimi

(3.1.3) modelini burada tekrar hatırlayalım:

$$y(t) = \alpha_0 e^{-\beta_0 t} \cos(\omega_0 t + \phi_0) + e(t), \quad t = 0, 1, \dots, N-1$$

Frekans parametresi ω_0 ve β_0 parametreleri dışında modele doğrusal biçimde bağlı olan genlik parametresi α_0 ve faz parametresi ϕ_0 'ın kestirimine ilişkin kestirici ifadelerini basit bir biçimde verebilmek için (3.1.3) modelini doğrusal model $\mathbf{y} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$ biçiminde tekrar yazalım. Bu durumda \mathbf{y} , \mathbf{H} , $\boldsymbol{\theta}$ terimleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{y} = [y(0) \quad \dots \quad y(N-1)]^T, \quad \boldsymbol{\theta} = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ e^{-\beta_0(N-1)} \cos(\omega_0(N-1)) & e^{-\beta_0(N-1)} \sin(\omega_0(N-1)) \end{bmatrix} \quad (3.12.1)$$

burada $\alpha_1 = \alpha_0 \cos(\varphi_0)$ ve $\alpha_2 = -\alpha_0 \sin(\varphi_0)$ dır.

\mathbf{y} örnek vektörü için ω_0 ve β_0 parametrelerine bağlı PDF aşağıdaki gibidir:

$$p(\mathbf{y}; \omega_0, \beta_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right) \quad (3.12.2)$$

ω_0 ve β_0 parametrelerinin MLE'si $\hat{\omega}_0$ ve $\hat{\beta}_0$, (3.12.2) ifadesini maksimum yapan ω_0 ve β_0 değerleri olarak elde edilir:

$$\hat{\omega}_0, \hat{\beta}_0 = \arg \max_{\omega_0, \beta_0} (p(\mathbf{y}; \omega_0, \beta_0)) \quad (3.12.3)$$

(3.12.3) ifadesinin maksimum olması negatif üstsel fonksiyon içerisindeki $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$ ifadesinin minimum olduğu durumda gerçekleşir. Bu çarpım ifadesi aşağıdaki biçimde düzenlenebilir:

$$\mathbf{y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T) \mathbf{y} \quad (3.12.4)$$

(3.12.4) ifadesinden kolayca görülebileceği gibi $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$ ifadesinin minimum olabilmesi $\mathbf{y}^T \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$ ifadesinin maksimum olmasına bağlıdır. Böylece ω_0 ve β_0 parametreleri için MLE aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\hat{\omega}_0, \hat{\beta}_0 = \arg \max_{\omega_0, \beta_0} (\mathbf{y}^T \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}) \quad (3.12.5)$$

Tez çalışmasında, (3.12.5) ifadesini maksimum yapan ω_0 ve β_0 değerleri iki boyutlu ızgara arama yöntemiyle bulunmuştur. Bu yöntem hakkında detaylı bilgiyi Bölüm 3.5.4'te bulabilirsiniz. Frekans parametresi ω_0 ve sönüm katsayısı β_0 kestirildikten sonra, modele lineer biçimde bağlı olan diğer parametrelerin kestirimi oldukça kolaylaşır. Bu parametrelerin kestirimine ilişkin Bölüm 3.10.2'te elde edilen

(3.10.6) ve (3.10.7) ifadeleri aynen geçerlidir, tek fark \mathbf{H} matrisinin elemanlarının oluşum biçimidir.

3.12.3. DMUSIC ile Frekans Kestirimi

Frekans parametresi ω_0 'nın kestirimini DMUSIC yöntemi ile yapabilmek için (3.1.3) modelinde yer alan reel sinyali iki kompleks sinüsün toplamından oluşan eşdeğeri biçiminde yazalım:

$$y(t) = \frac{\alpha_0}{2} e^{-j\varphi_0} e^{s_1 t} + \frac{\alpha_0}{2} e^{j\varphi_0} e^{s_2 t} + e(t), \quad t = 0, 1, \dots, N$$

burada $s_1 = -\beta_0 - j\omega_0$ ve $s_2 = -\beta_0 + j\omega_0$ kompleks frekanslardır.

(3.1.3) modeli için (3.7.3) ifadesi ile verilen \mathbf{A} öngörü matrisi aşağıdaki biçimde oluşturulur:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{s_1} & e^{s_2} \\ \vdots & \vdots \\ e^{(L-1)s_1} & e^{(L-1)s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0}{2} e^{-j\varphi_0} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_0}{2} e^{j\varphi_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e^{s_1} & \dots & e^{s_1(L-1)} \\ 1 & e^{s_2} & \dots & e^{s_2(L-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(0) & \dots & e(L-1) \\ e(1) & \dots & e(L) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ e(L-1) & \dots & e(2L-2) \end{bmatrix}$$

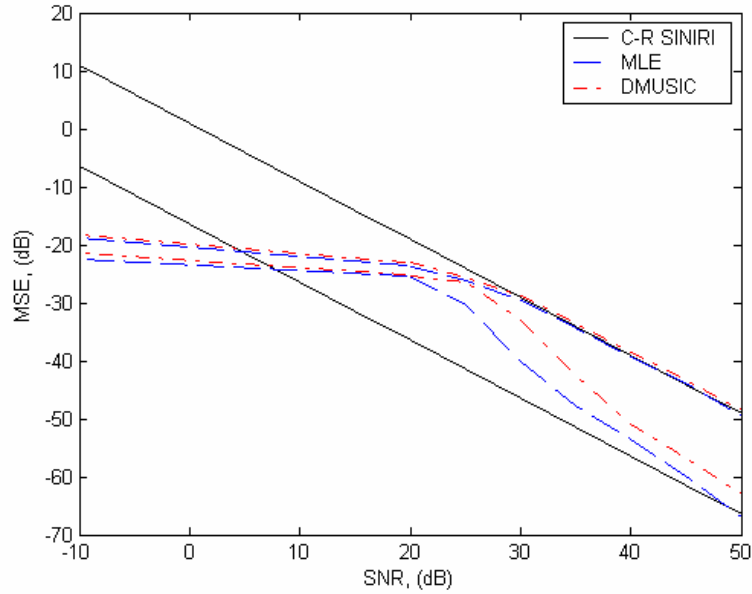
(3.7.8) ifadesinden \mathbf{V}_n matrisi elde edilir. ω_0 ve β_0 parametrelerinin DMUSIC kestiricisi $\hat{\omega}_0$ ve $\hat{\beta}_0$ aşağıdaki sözde spektrum fonksiyonunu maksimum yapan s kompleks frekans değeri olarak elde edilir. s kompleks frekansı, ω_0 ve β_0 parametrelerinin tanım aralıkları üzerinde iki boyutlu ızgara arama yöntemiyle elde edilir.

$$\hat{\omega}_0, \hat{\beta}_0 = \arg \max_s \left(\frac{1}{\tilde{\mathbf{r}}^*(s) \mathbf{V}_n + \mathbf{V}_n^T \tilde{\mathbf{r}}(s)} \right)$$

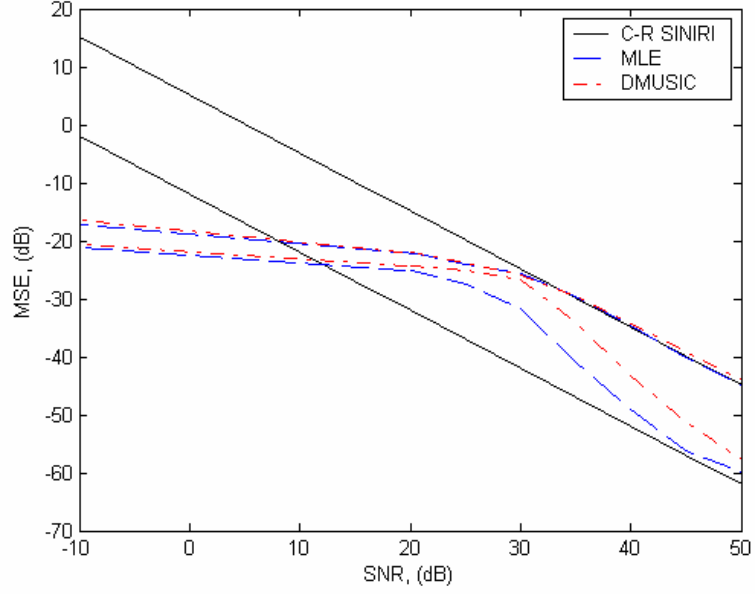
3.12.4. MLE ve DMUSIC Kestiricilerin Performans Analizi

Bir reel sönümlü sinüsün frekans parametresinin kestirimine ilişkin MLE ve DMUSIC kestiricilerin performansı, C-R sınırı performans kriteri seçilerek, sayısal yoldan karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. (3.1.3) modelinde en kötü durum $\varphi_0 = (\varphi_0)_{\max}$ ve en iyi durum $\varphi_0 = (\varphi_0)_{\min}$ senaryoları için kestiricilerin performansı sinyal gürültü oranı, frekans farkı, sönüm katsayısı ve toplam örnek sayısı değişirken incelenmiştir.

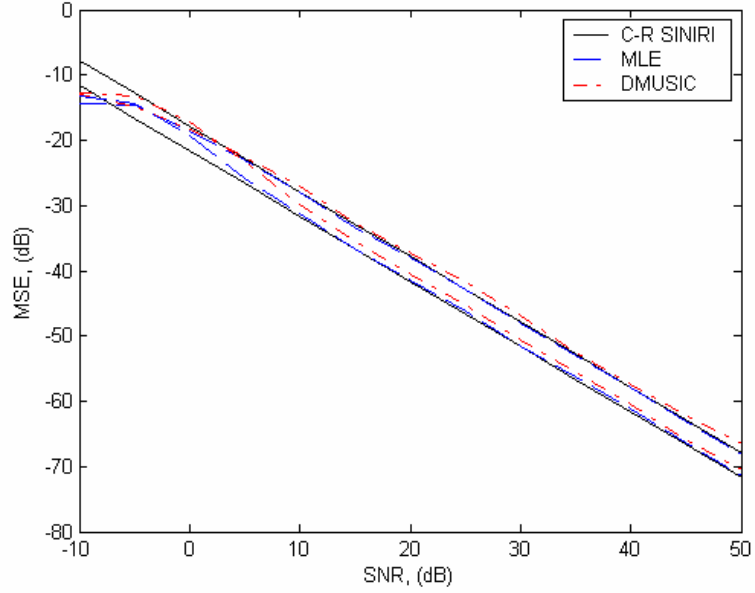
Her iki durum için genlik parametresi $\alpha_0 = 1$ seçilmiş ve gürültü bileşeni $e(t)$ olarak sıfır ortalamalı reel beyaz Gauss gürültü kullanılmıştır. DMUSIC kestiricisinde öngörü matrisinin boyutu $L = (N + 2)/2$ olarak seçilmiştir. Benzetim sonuçları 500 Monte Carlo denemesi için aşağıda verilmiştir.



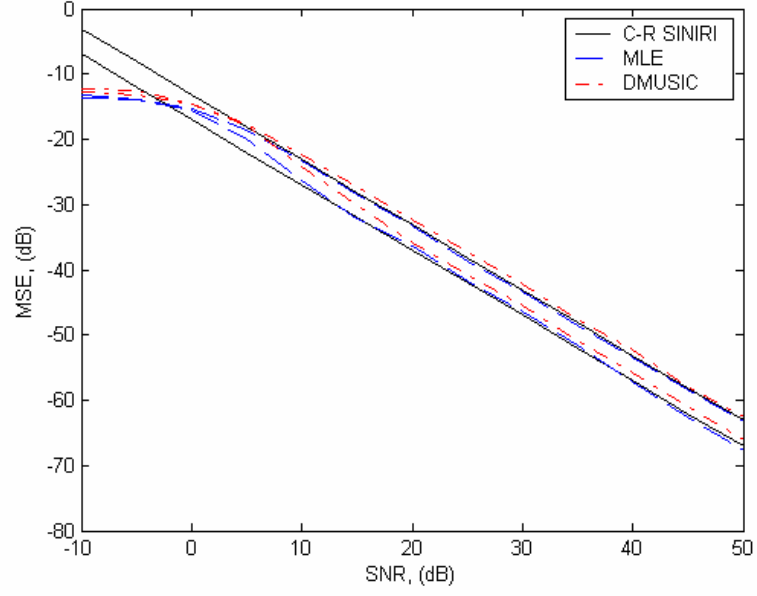
Şekil 3.12.1. $N = 10$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



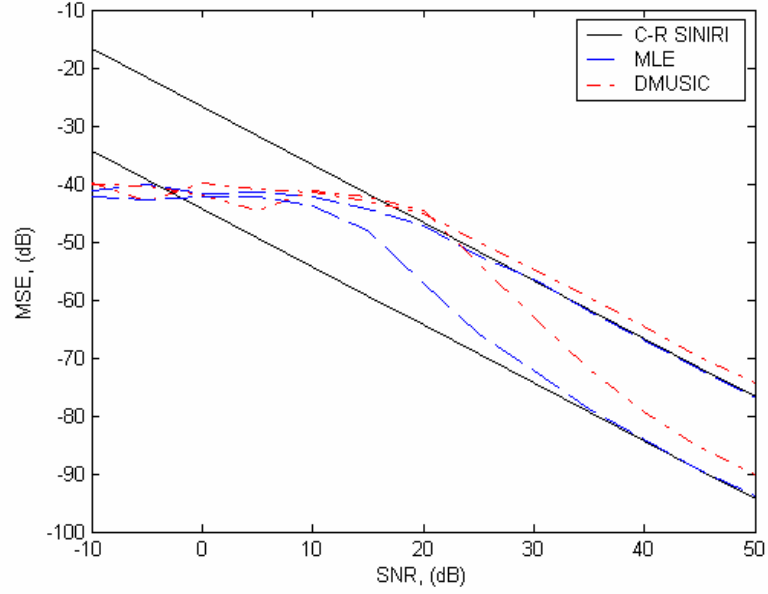
Şekil 3.12.2. $N = 10$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



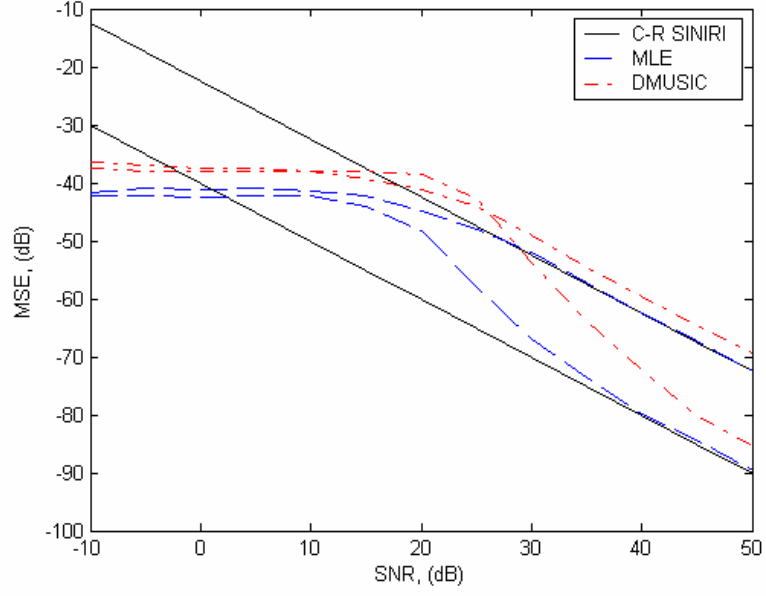
Şekil 3.12.3. $N = 10$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



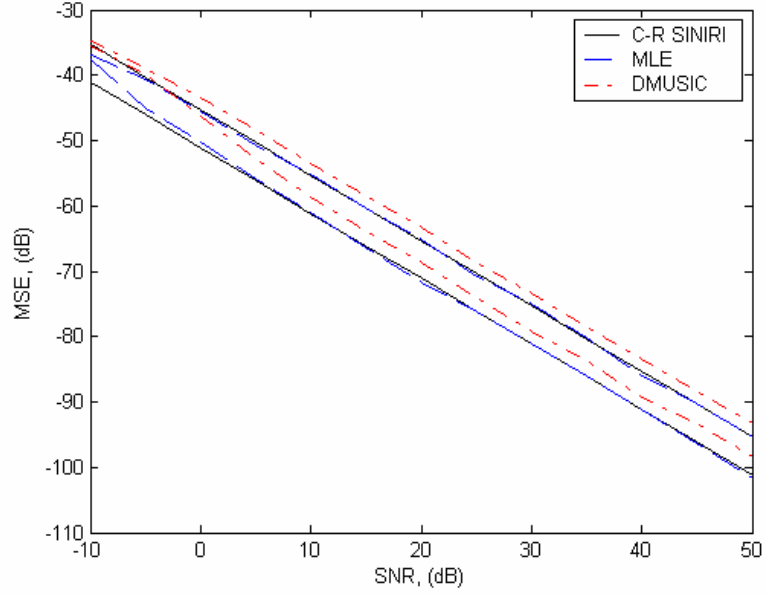
Şekil 3.12.4. $N = 10$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



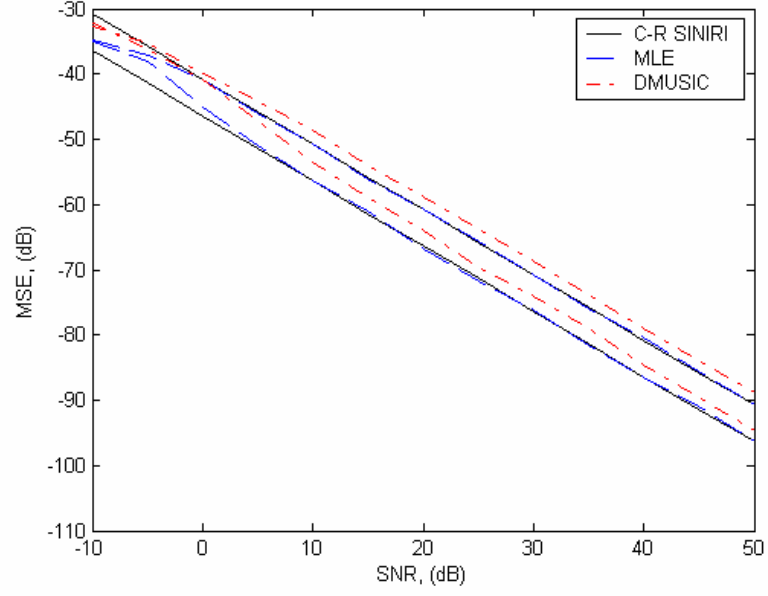
Şekil 3.12.5. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



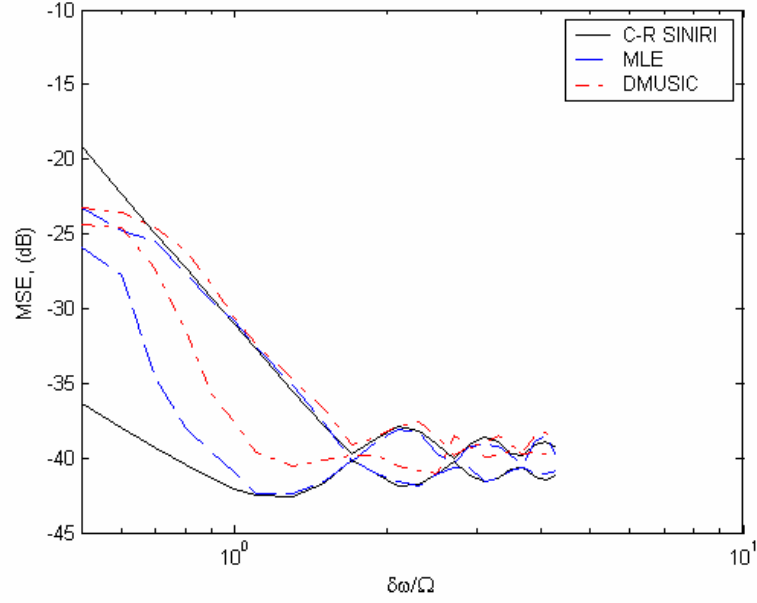
Şekil 3.12.6. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



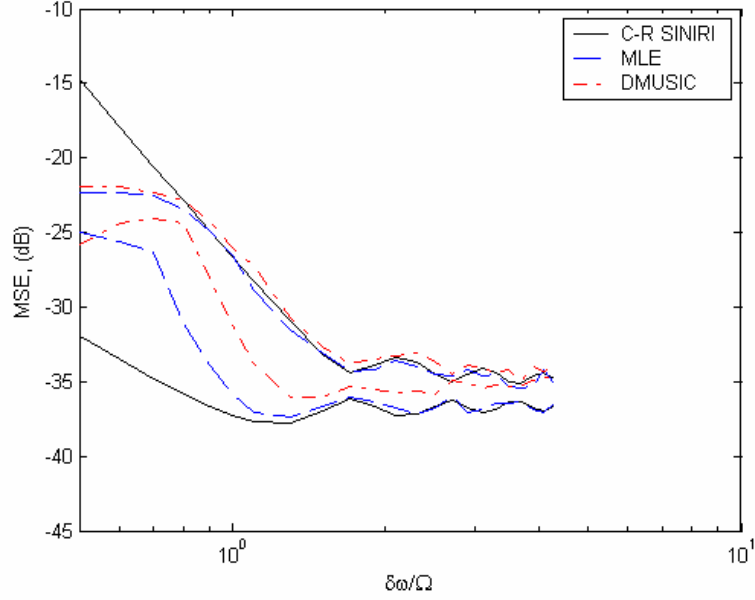
Şekil 3.12.7. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



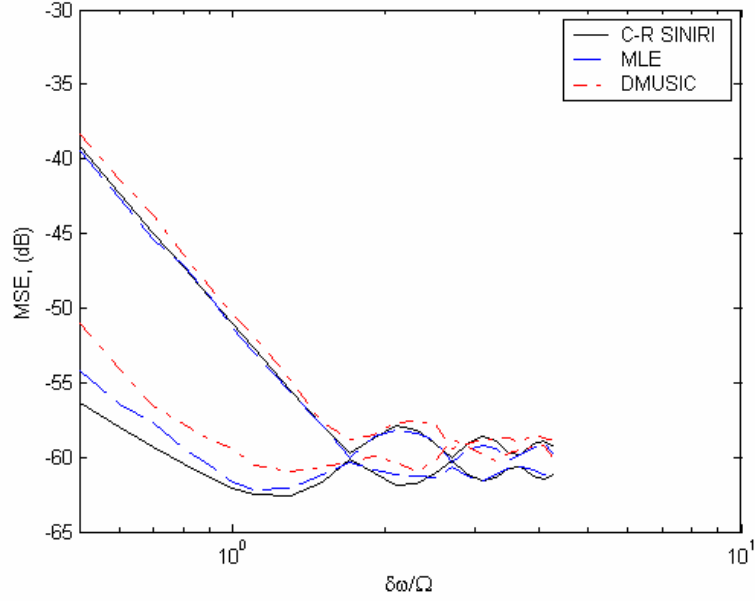
Şekil 3.12.8. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



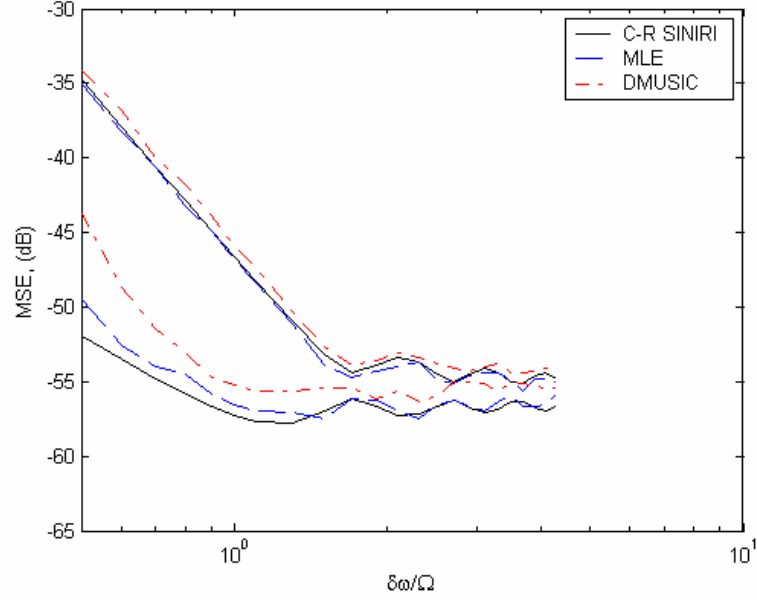
Şekil 3.12.9. $N = 10$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



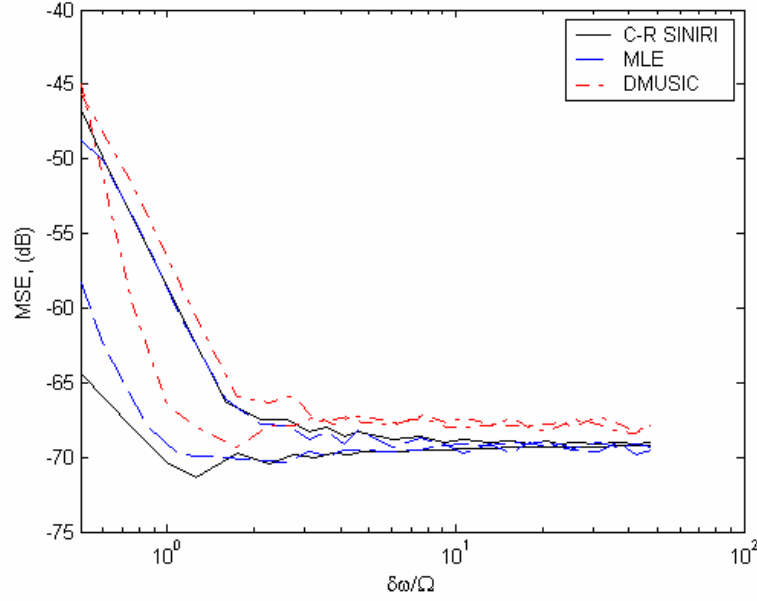
Şekil 3.12.10. $N = 10$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



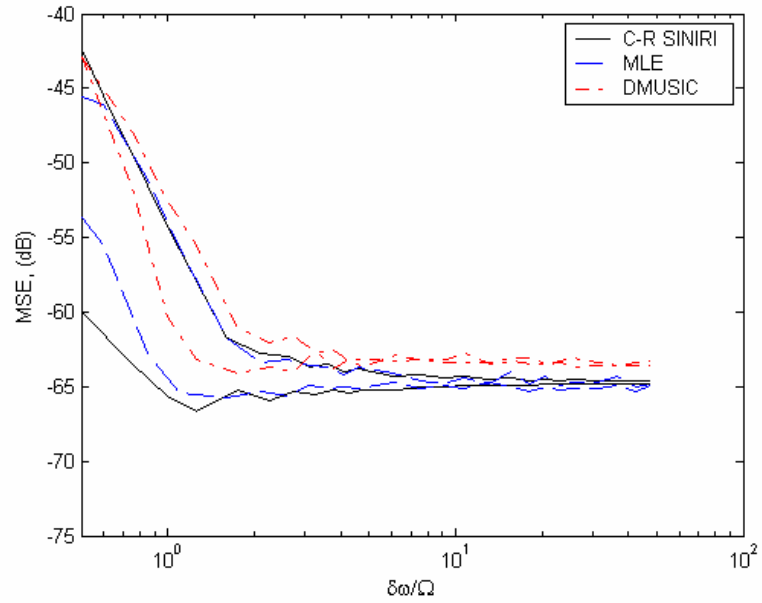
Şekil 3.12.11. $N = 10$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



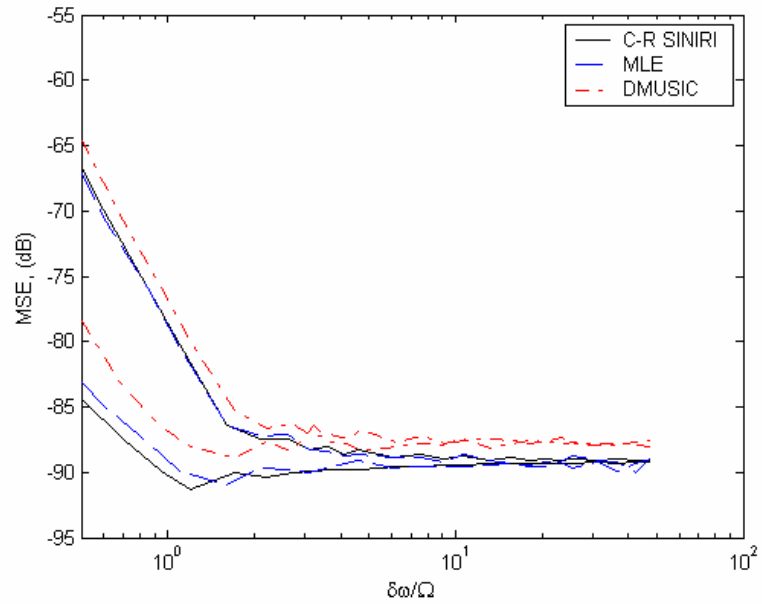
Şekil 3.12.12. $N = 10$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



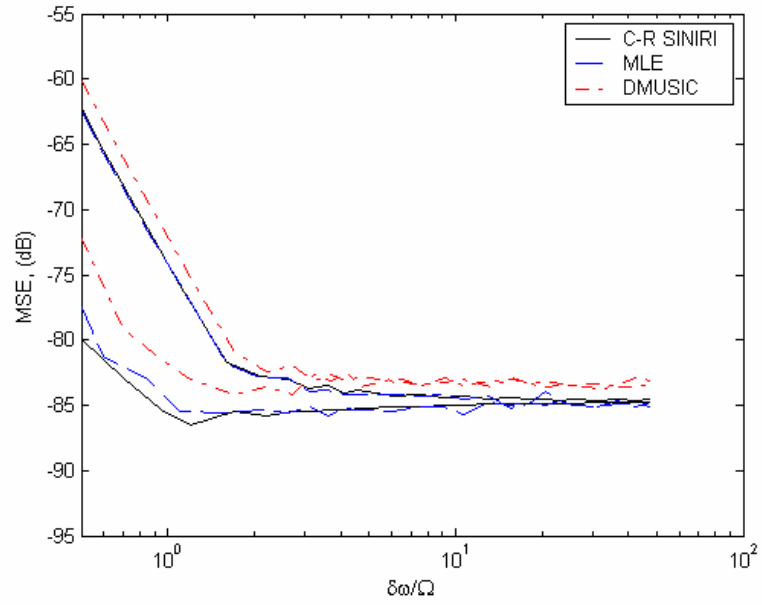
Şekil 3.12.13. $N = 100$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



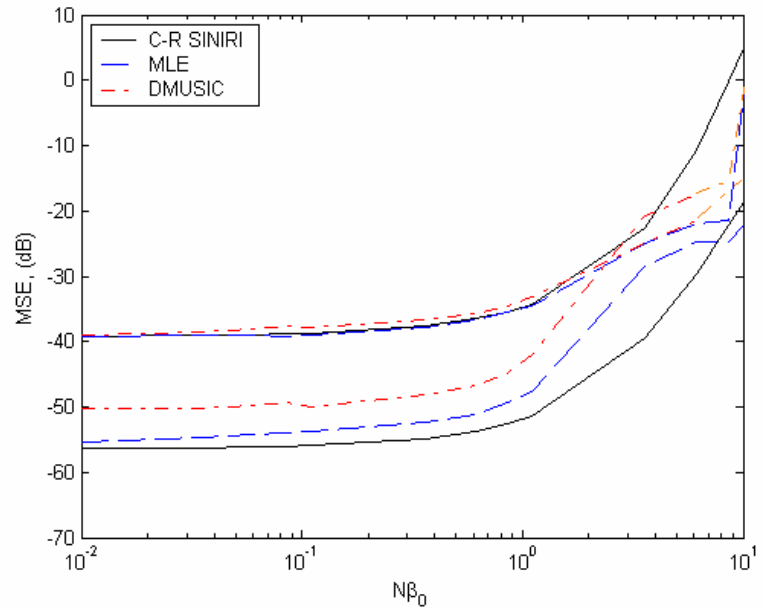
Şekil 3.12.14. $N = 100$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



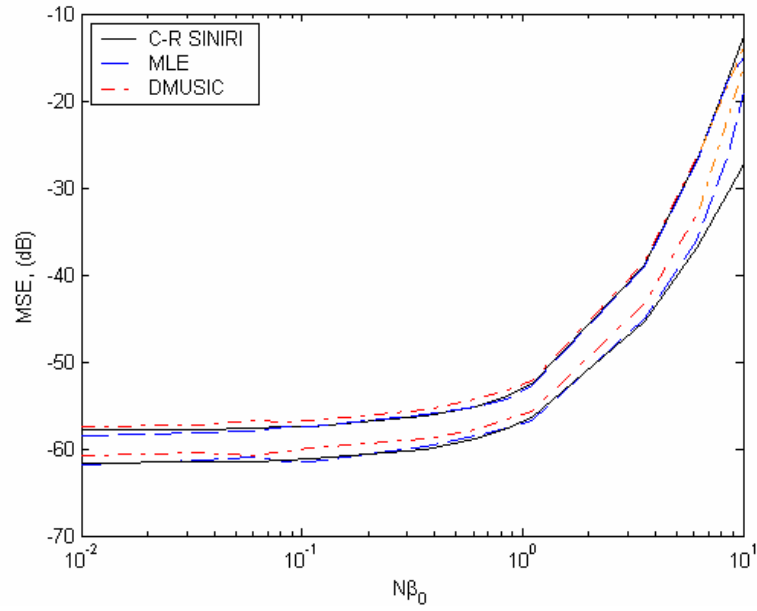
Şekil 3.12.15. $N = 100$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



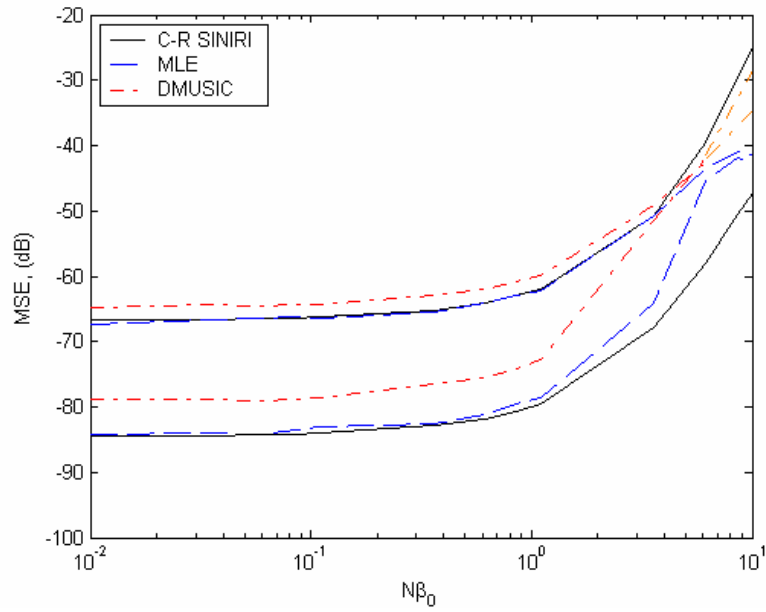
Şekil 3.12.16. $N = 100$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



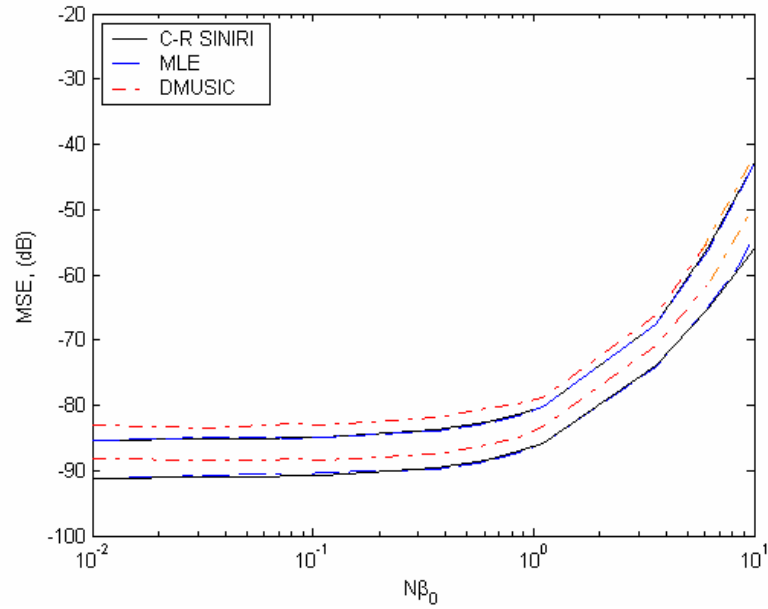
Şekil 3.12.17. $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_0$ ile değişimi



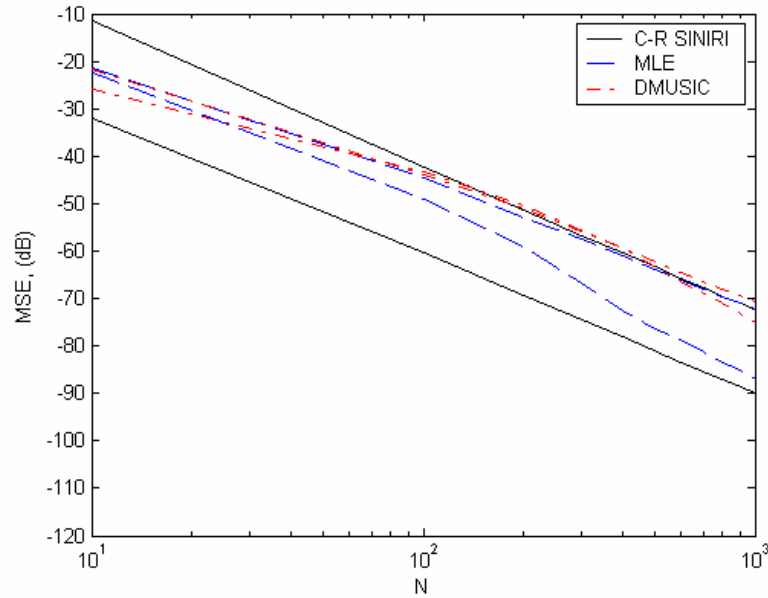
Şekil 3.12.18. $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_0$ ile değişimi



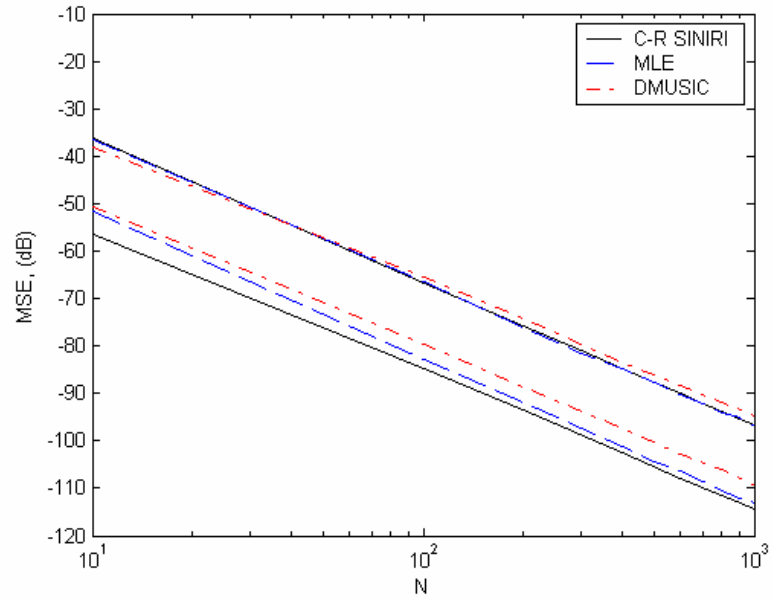
Şekil 3.12.19. $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_0$ ile değişimi



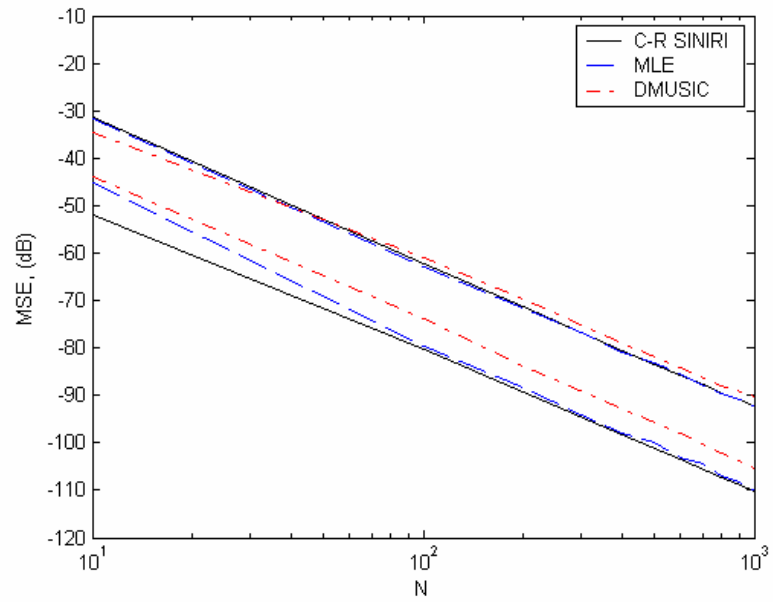
Şekil 3.12.20. $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $SNR = 40dB$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_0$ ile değişimi



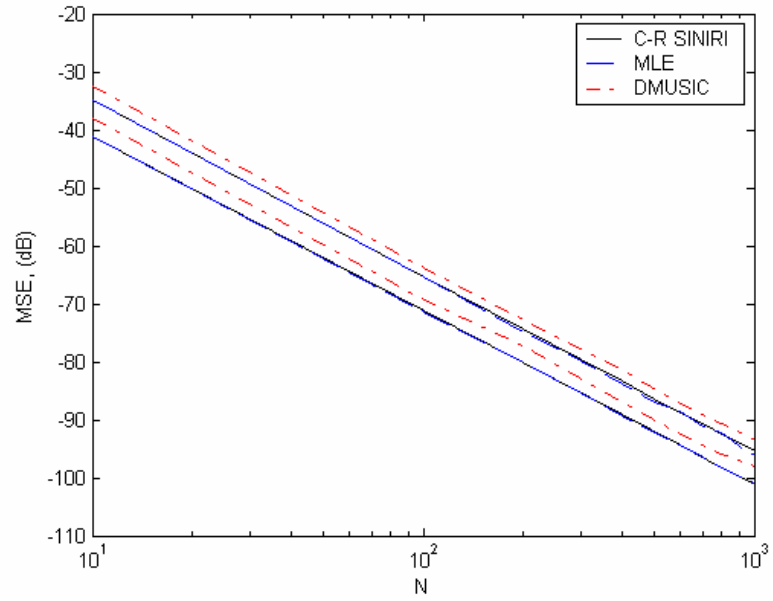
Şekil 3.12.21. $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



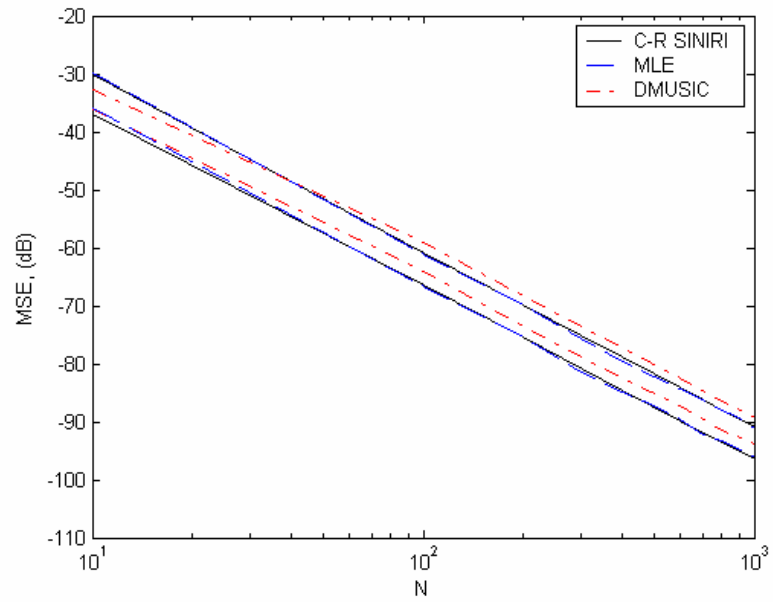
Şekil 3.12.22. $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



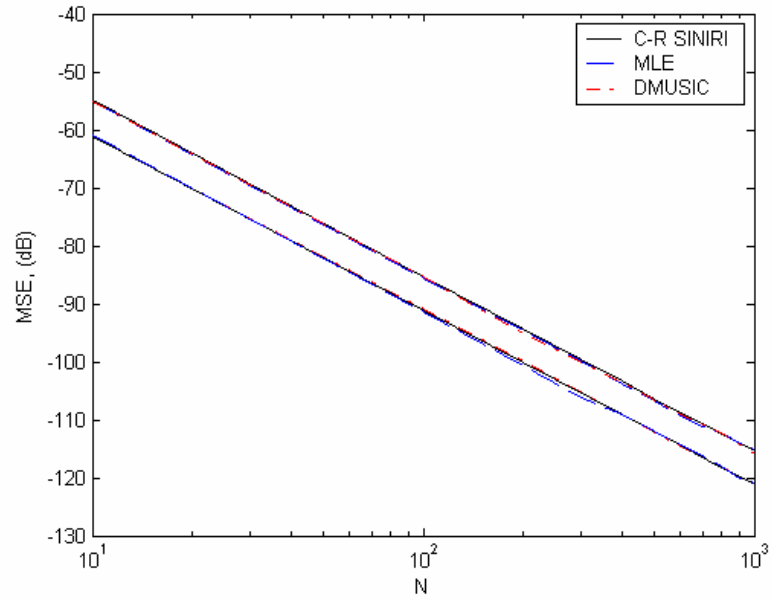
Şekil 3.12.23. $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



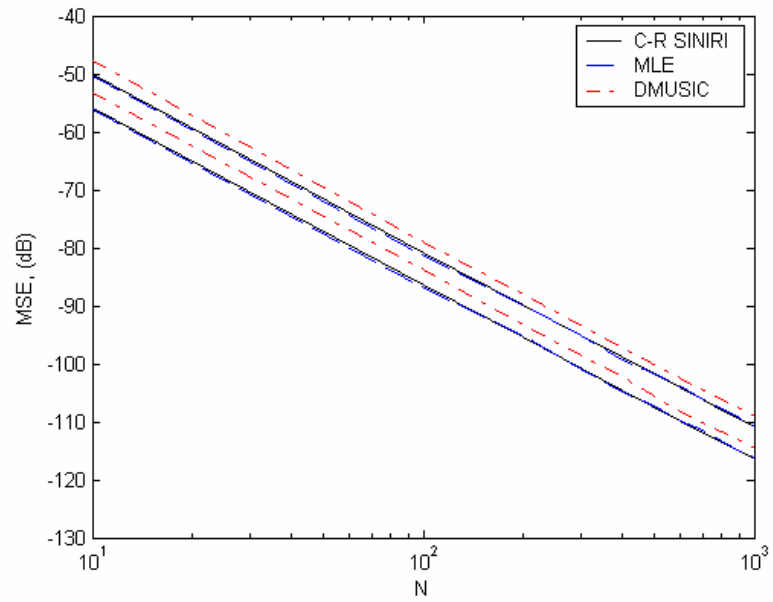
Şekil 3.12.24. $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.12.25. $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.12.26. $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.12.27. $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_0 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi

MLE her iki C-R sınırını (en kötü durum ve en iyi durum) toplam örnek sayısı $N = 10$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için (30dB)-(50dB), $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için (32dB)-(55dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için (5dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için (10dB) $N = 100$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için (20dB)-(35dB), $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için (25dB)-(40dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için (0dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için (5dB) civarındaki *SNR* değerlerinde yakalamaktadır.

DMUSIC her iki C-R sınırını (en kötü durum ve en iyi durum) toplam örnek sayısı $N = 10$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için (30dB)-(50dB), $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için (32dB)-(55dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için (0dB)-(5dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için (5dB)-(10dB) $N = 100$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için (20dB)-(40dB), $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için (25dB)-(45dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için (0dB)-(5dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için (5dB)-(10dB) civarındaki *SNR* değerlerinden başlamak üzere yakından izlemeye başlamaktadır.

MLE, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için alçak frekans durumunda dahi düşük *SNR* değerlerinde ilgili C-R sınırını yakalamaktadır.

DMUSIC, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için alçak frekans durumunda dahi düşük *SNR* değerlerinden başlamak üzere ilgili C-R sınırını yakından izlemektedir. En kötü durum performansı en iyi durum performansına göre ilgili C-R sınırına daha yakın bir davranış sergilemektedir.

Her iki kestirici için de *SNR* eşik değeri, frekans farkı ve/veya toplam örnek sayısı azalırken ve/veya sönüm katsayısı artarken artmaktadır.

3.13. İki Kompleks Sönümlü Sinüsün Frekans Parametrelerinin Kestirimi

3.13.1. Giriş

(3.1.4) modeli ile verilen iki kompleks sönümlü sinüsün frekans parametrelerinin kestirimi MLE ve DMUSIC yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Özellikle yakın frekans durumu için (frekans farkının Fourier limitinden küçük olduğu durum)

kestiricilerin performansları karşılaştırılmıştır. Performans kriteri olarak (3.9.4) ifadesi ile verilen C-R sınır ifadesi kullanılmıştır.

Kestiricilerin performansı, sinyal gürültü oranı, frekans farkı, sönüm katsayısı ve toplam örnek sayısı değişirken incelenmiştir.

3.13.2. MLE ile Frekans Kestirimi

(3.1.4) modelini burada tekrar hatırlayalım:

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i e^{-\beta_i t} e^{j(\omega_i t + \phi_i)}, \quad t = 0, 1, \dots, N-1$$

Frekans parametreleri ω_i ve β_i dışında modele doğrusal biçimde bağlı olan genlik parametreleri α_i ve faz parametreleri ϕ_i , ($i = 1, 2$), için kestirici ifadelerinin basit bir biçimde verilebilmesi için (3.1.4) modelini doğrusal model $\mathbf{y} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$ biçiminde tekrar yazalım. Bu durumda \mathbf{y} , \mathbf{H} , $\boldsymbol{\theta}$ terimleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{y} = [y(0) \quad \dots \quad y(N-1)]^T, \quad \boldsymbol{\theta} = [A_1 \quad A_2]^T, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ e^{(j\omega_1 - \beta_1)(N-1)} & e^{(j\omega_2 - \beta_2)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (3.13.1)$$

burada $A_1 = \alpha_1 e^{j\phi_1}$ ve $A_2 = \alpha_2 e^{j\phi_2}$ dir.

\mathbf{y} örnek vektörü için ω_i ve β_i , ($i = 1, 2$), parametrelerine bağlı PDF aşağıdaki gibidir:

$$p(\mathbf{y}; \omega_1, \omega_2, \beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^* (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right) \quad (3.13.2)$$

ω_i ve β_i parametrelerinin MLE'leri $\hat{\omega}_i$ ve $\hat{\beta}_i$, (3.13.2) ifadesini maksimum yapan ω_i ve β_i değerleri olarak elde edilir:

$$\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 = \arg \max_{\omega_1, \omega_2, \beta_1, \beta_2} (p(\mathbf{y}; \omega_1, \omega_2, \beta_1, \beta_2)) \quad (3.13.3)$$

(3.13.3) ifadesinin maksimum olması negatif üstsel fonksiyon içerisindeki $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^*(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$ ifadesinin minimum olduğu durumda gerçekleşir. Bu çarpım ifadesi aşağıdaki biçimde düzenlenebilir:

$$\mathbf{y}^* (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^*) \mathbf{y} \quad (3.13.4)$$

(3.13.4) ifadesinden kolayca görülebileceği gibi $(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^*(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$ ifadesinin minimum olabilmesi $\mathbf{y}^* \mathbf{H}(\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{y}$ ifadesinin maksimum olmasına bağlıdır. Böylece ω_i ve β_i frekans parametreleri için MLE aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 = \arg \max_{\omega_1, \omega_2, \beta_1, \beta_2} (\mathbf{y}^* \mathbf{H}(\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{y}) \quad (3.13.5)$$

Tez çalışmasında, (3.13.5) ifadesini maksimum yapan ω_i ve β_i değerleri dört boyutlu ızgara arama yöntemiyle bulunmuştur. Bu yöntem hakkında detaylı bilgiyi Bölüm 3.5.4'te bulabilirsiniz. Frekans ve sönüm katsayısı parametreleri ω_i ve β_i 'ler kestirildikten sonra, modele lineer biçimde bağlı olan diğer parametrelerin kestirimi oldukça kolaylaşır. Bu parametrelerin kestirimine ilişkin Bölüm 3.11.2'de elde edilen (3.11.7) ve (3.11.10) ifadeleri aynen geçerlidir, tek fark \mathbf{H} matrisi elemanlarının oluşum biçimidir.

3.13.3. DMUSIC ile Frekans Kestirimi

(3.1.4) modeli için (3.7.3) ifadesinde verilen \mathbf{A} öngörü matrisi aşağıdaki biçimde oluşturulur:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{s_1} & e^{s_2} \\ \vdots & \vdots \\ e^{(L-1)s_1} & e^{(L-1)s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{j\varphi_1} & 0 \\ 0 & \alpha_2 e^{j\varphi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e^{s_1} & \dots & e^{s_1(L-1)} \\ 1 & e^{s_2} & \dots & e^{s_2(L-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(0) & \dots & e(L-1) \\ e(1) & \dots & e(L) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ e(L-1) & \dots & e(2L-2) \end{bmatrix}$$

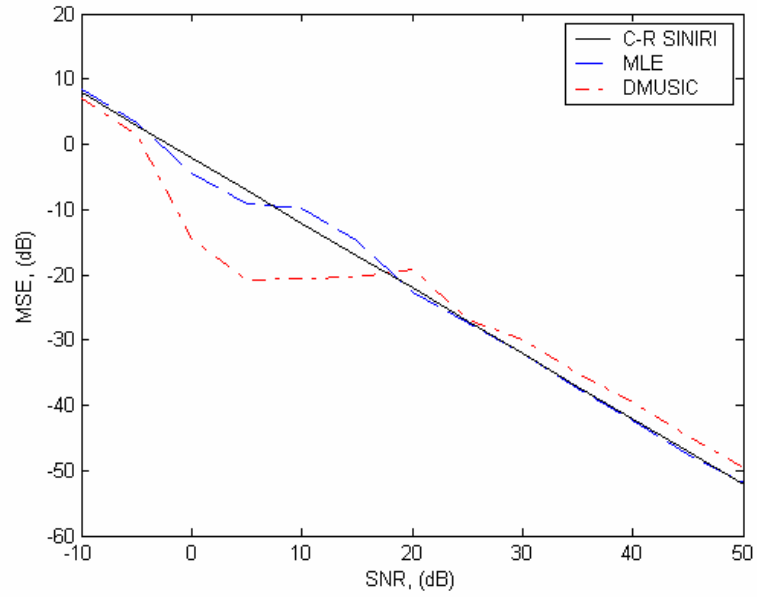
(3.7.8) ifadesinden \mathbf{V}_n matrisi elde edilir. ω_i ve β_i parametrelerinin DMUSIC kestiricisi $\hat{\omega}_i$ ve $\hat{\beta}_i$ 'ler aşağıdaki sözde spektrum fonksiyonunun en büyük iki tepe değerini veren s kompleks frekans değerleri olarak elde edilir. s kompleks frekansı, ω_i ve β_i parametrelerinin tanım aralıkları üzerinde dört boyutlu ızgara arama yöntemiyle elde edilir.

$$\hat{\omega}_i, \hat{\beta}_i = \arg \max_s \left(\frac{1}{\tilde{\mathbf{r}}^*(s) \mathbf{V}_n + \mathbf{V}_n^T \tilde{\mathbf{r}}(s)} \right)$$

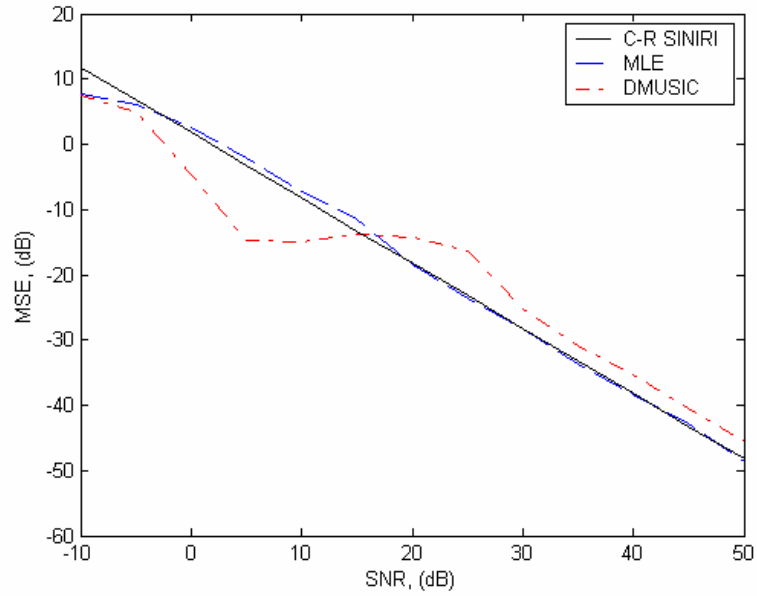
3.13.4. MLE ve DMUSIC Kestiricilerin Performans Analizi

İki kompleks sönümlü sinüsün frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin MLE ve DMUSIC kestiricilerin performansı, C-R sınırı performans kriteri seçilerek, sayısal yoldan karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. (3.1.4) modelinde kestiricilerin performansı sinyal gürültü oranı, frekans farkı, sönüm katsayıları ve toplam örnek sayısı değişirken incelenmiştir.

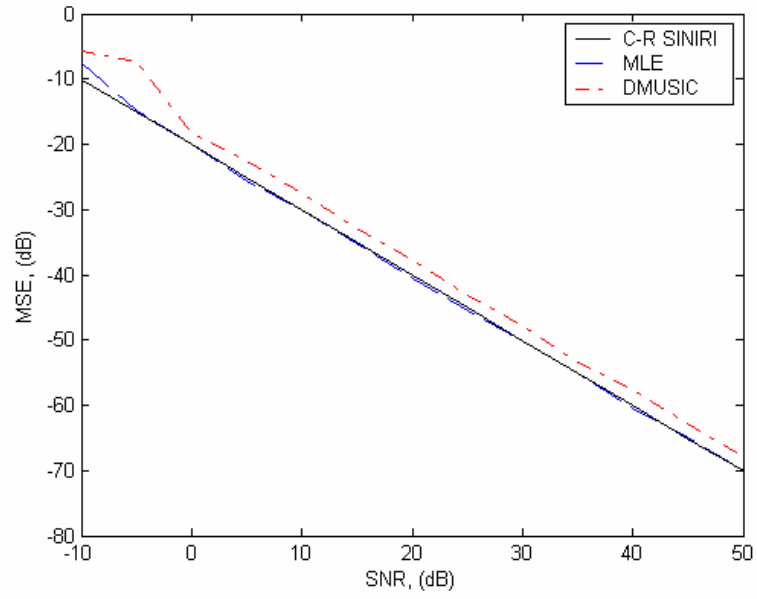
Genlik parametreleri $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ seçilmiş ve gürültü bileşeni $e(t)$ olarak sıfır ortalamalı kompleks beyaz Gauss gürültü kullanılmıştır. DMUSIC kestiricisinde öngörü matrisinin boyutu $L = (N + 2)/2$ olarak seçilmiştir. Benzetim sonuçları birinci sinüsün frekans kestirimine ilişkindir ve 500 Monte Carlo denemesi için aşağıda verilmiştir.



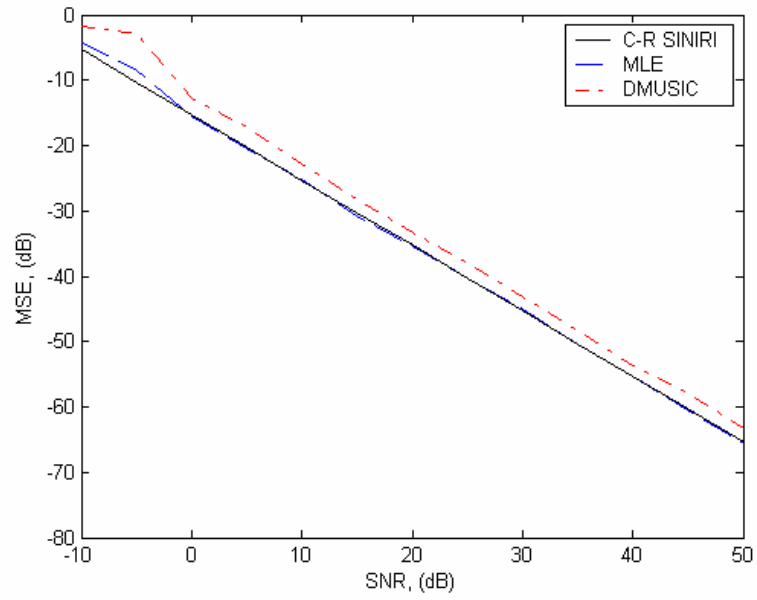
Şekil 3.13.1. $N = 10$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



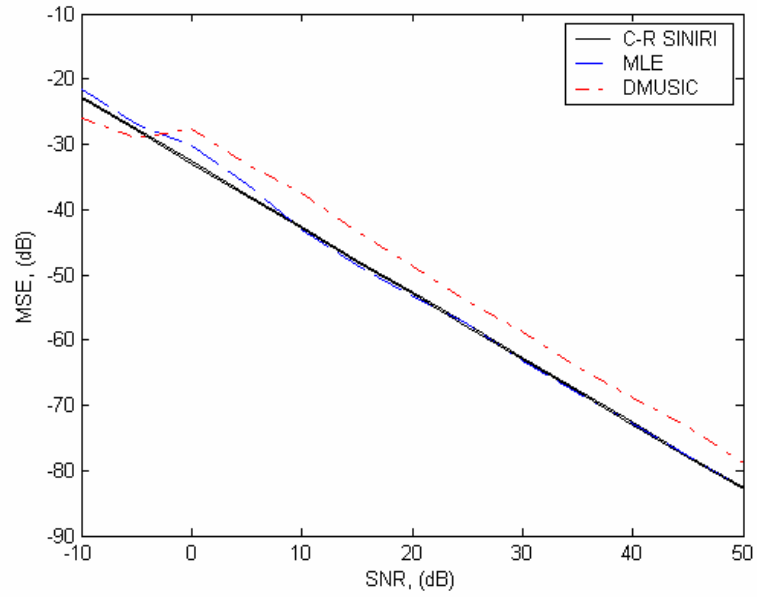
Şekil 3.13.2. $N = 10$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



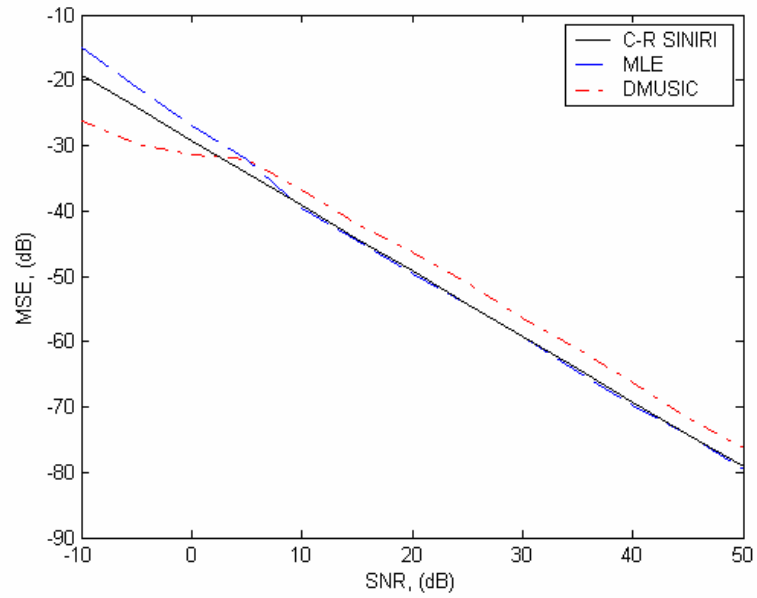
Şekil 3.13.3. $N = 10$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



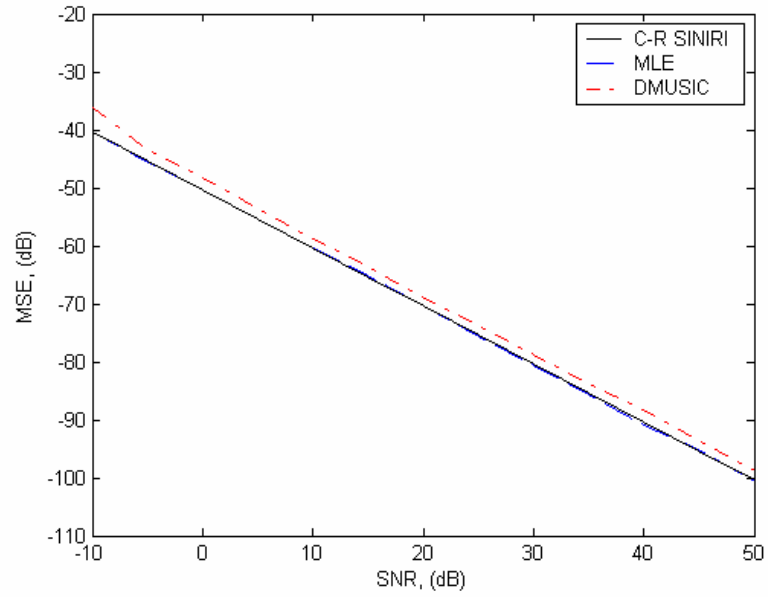
Şekil 3.13.4. $N = 10$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



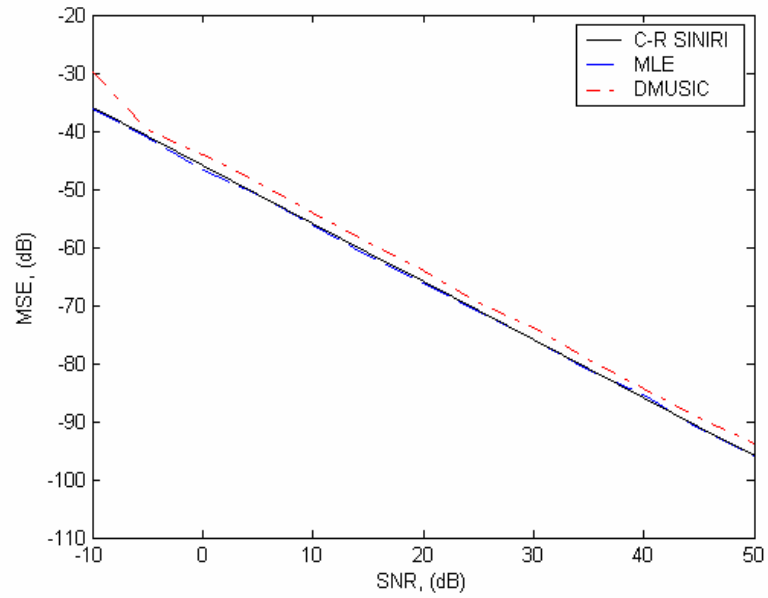
Şekil 3.13.5. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



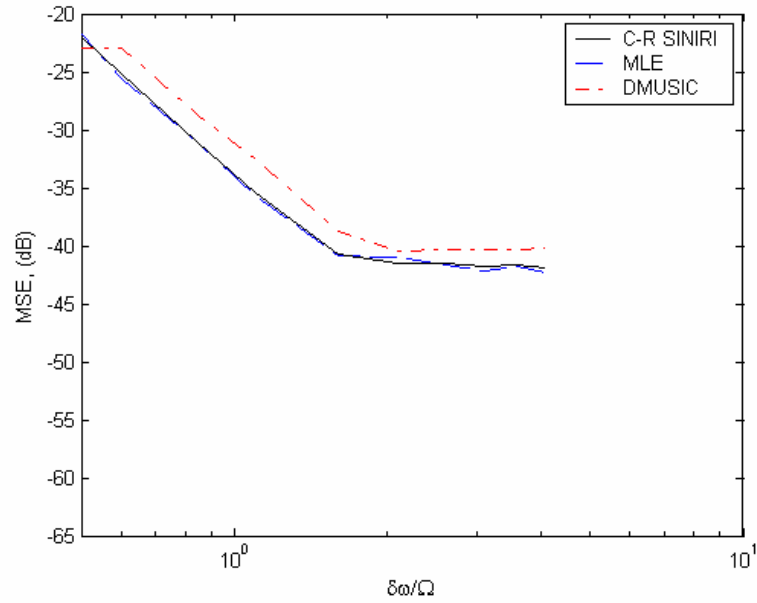
Şekil 3.13.6. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



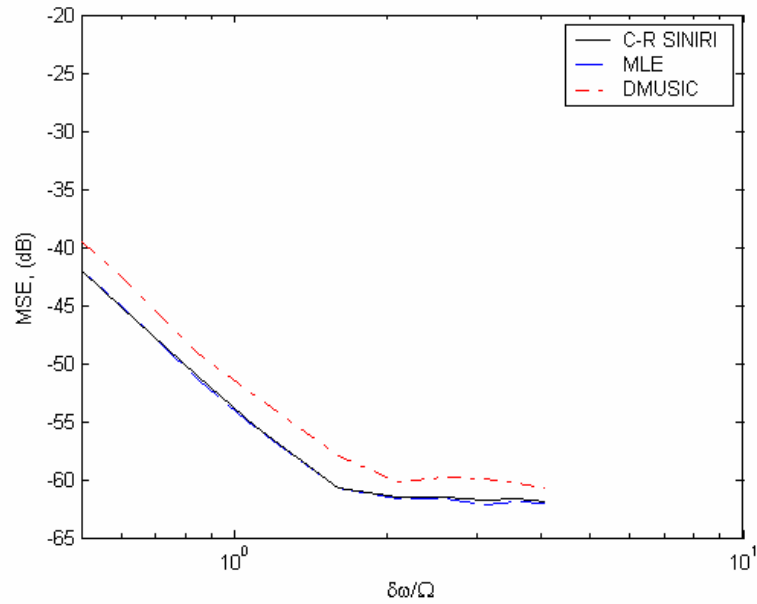
Şekil 3.13.7. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



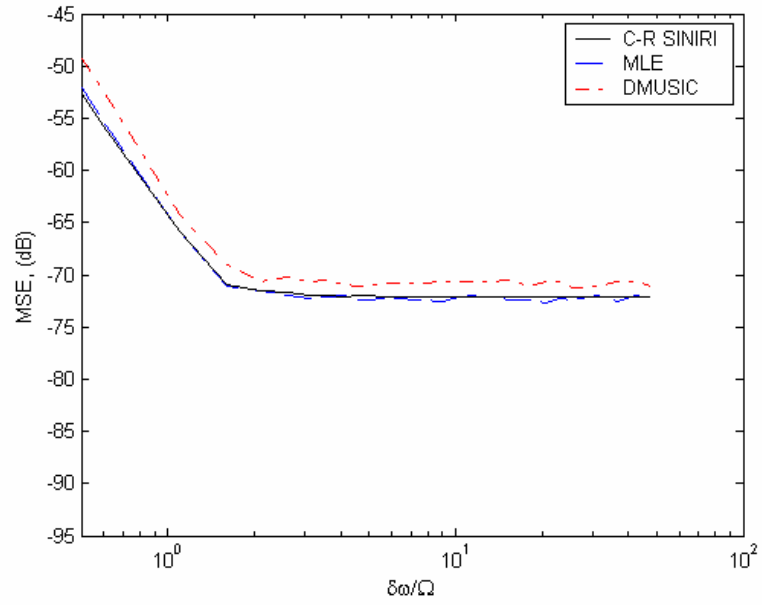
Şekil 3.13.8. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



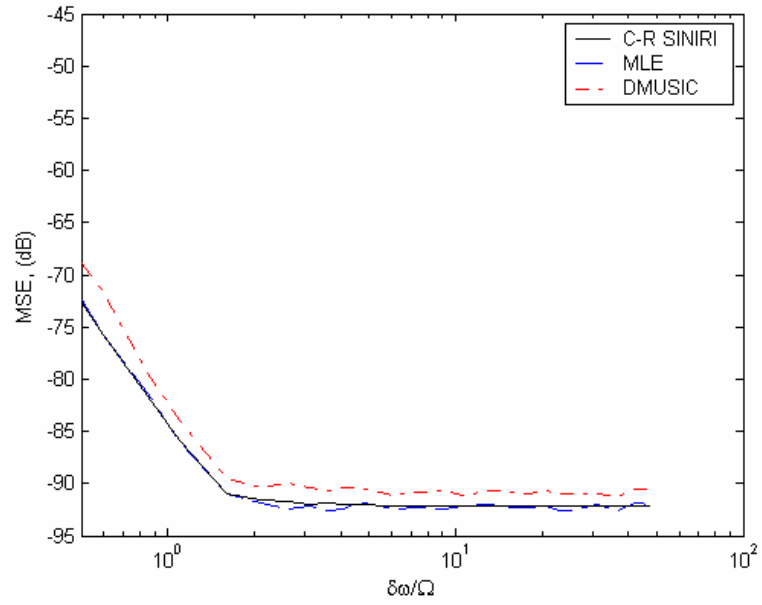
Şekil 3.13.9. $N = 10$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



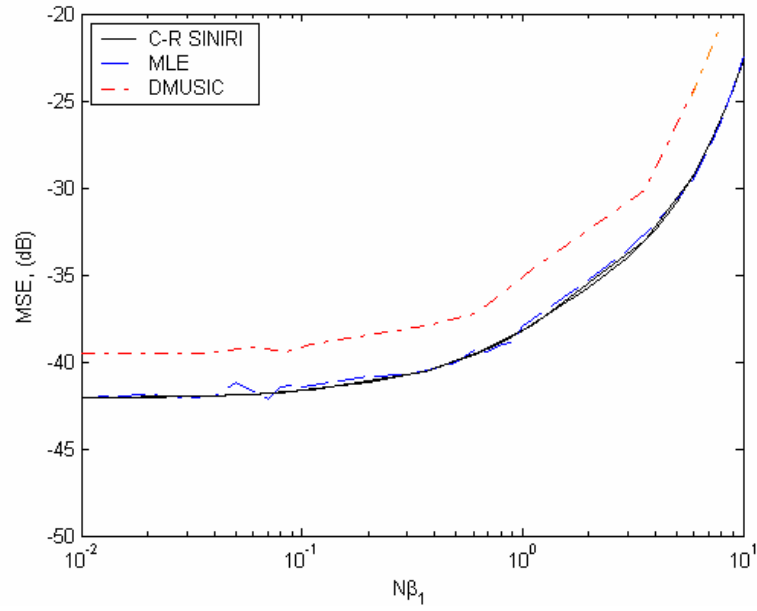
Şekil 3.13.10. $N = 10$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



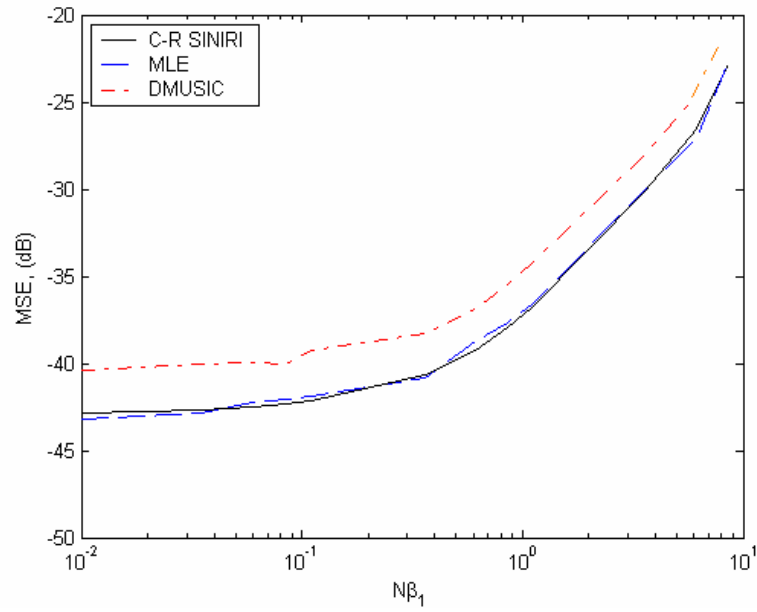
Şekil 3.13.11. $N = 100$, $SNR = 20dB$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



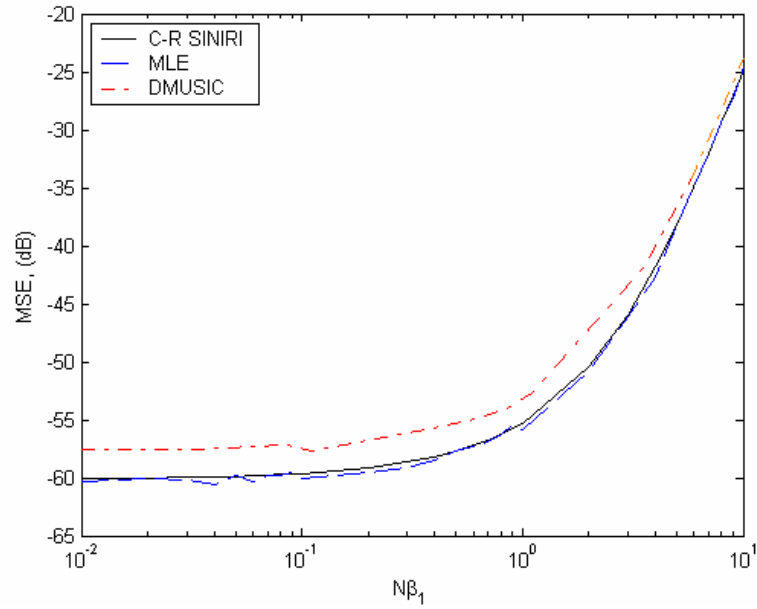
Şekil 3.13.12. $N = 100$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) oranlanmış frekans farkı ($\delta\omega/\Omega$) ile değişimi



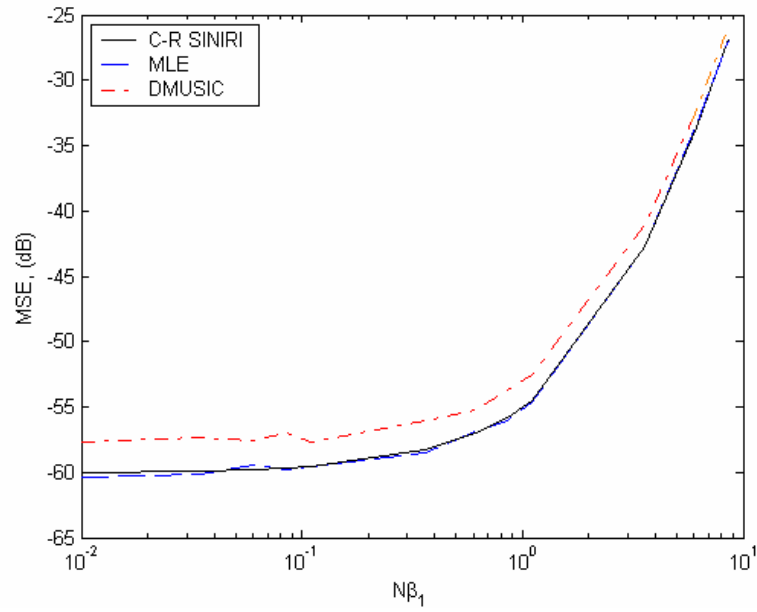
Şekil 3.13.13. $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi



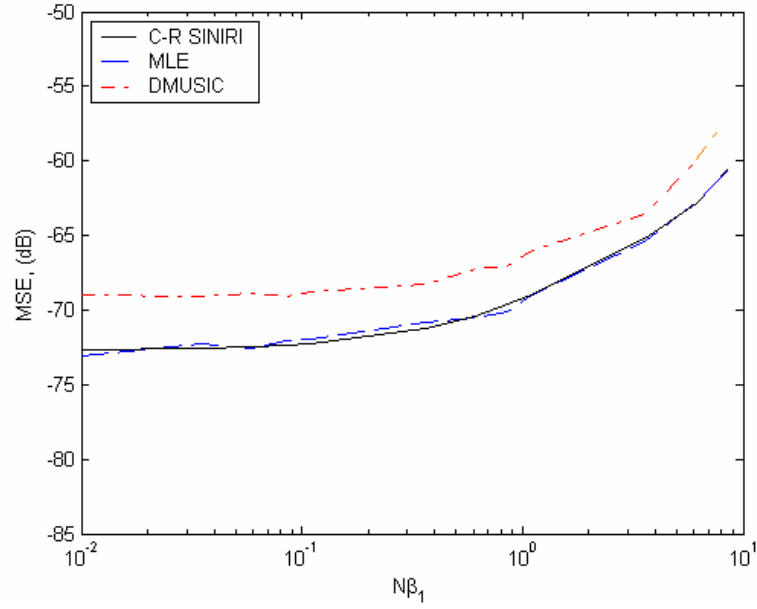
Şekil 3.13.14. $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi



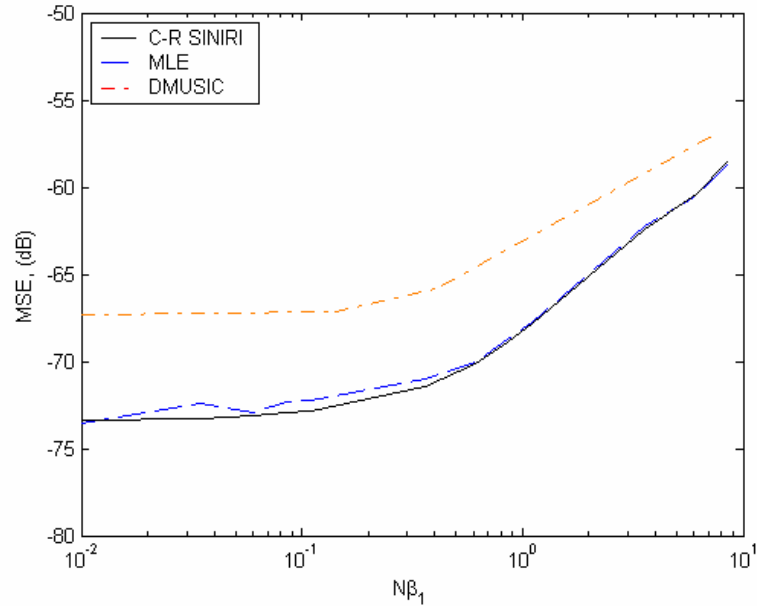
Şekil 3.13.15. $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi



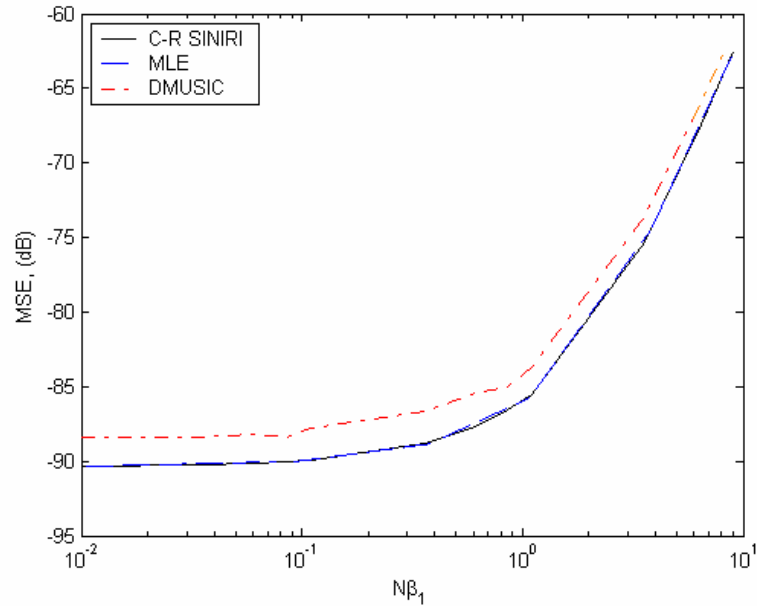
Şekil 3.13.16. $N = 10$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi



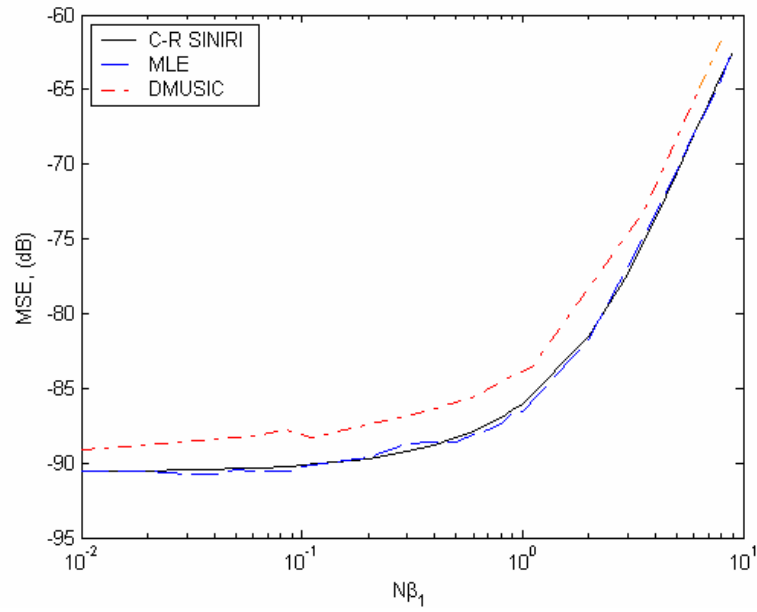
Şekil 3.13.17. $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi



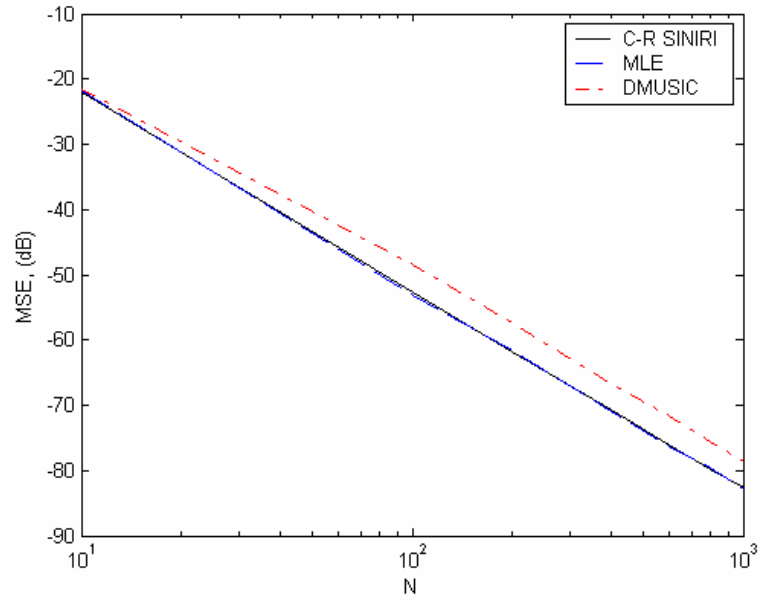
Şekil 3.13.18. $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi



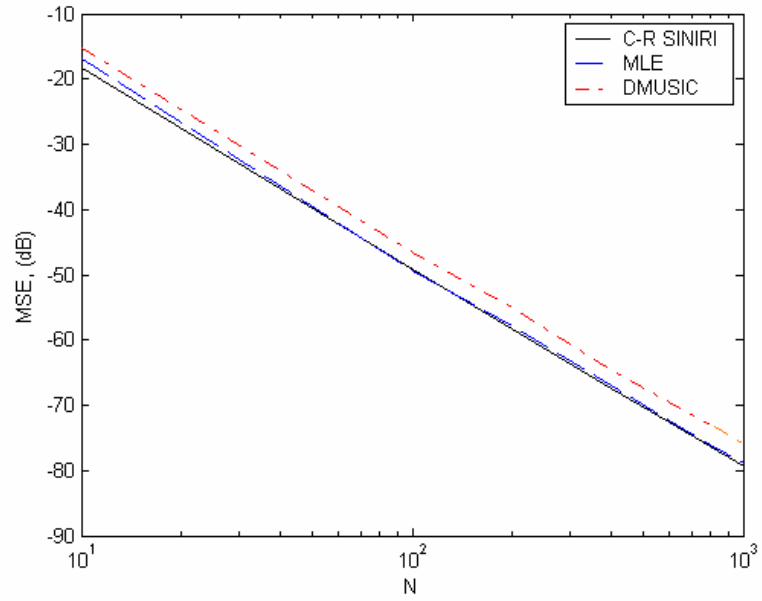
Şekil 3.13.19. $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi



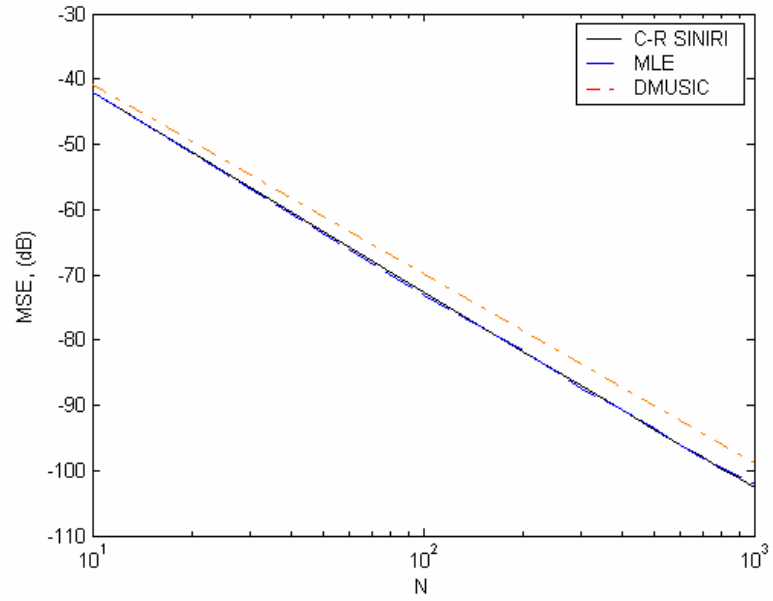
Şekil 3.13.20. $N = 100$, $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$ ve $N\beta_2 = 1$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) $N\beta_1$ ile değişimi



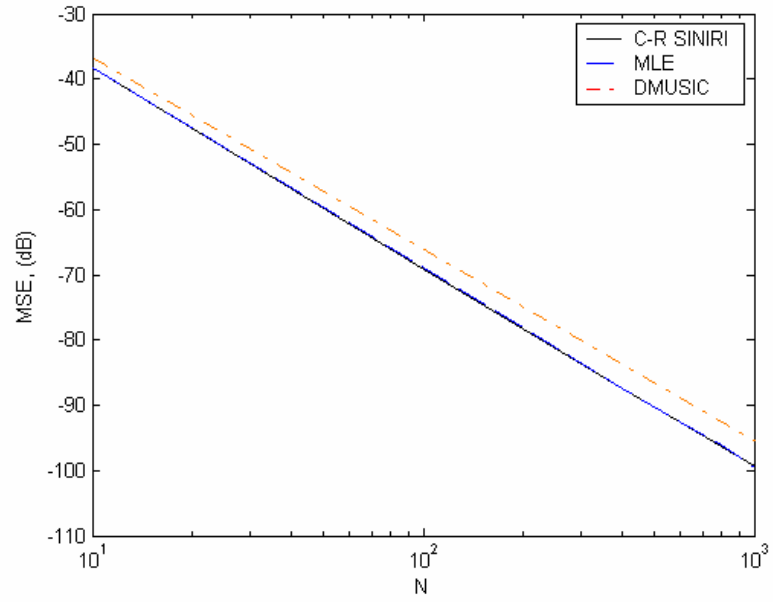
Şekil 3.13.21. $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 20dB$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



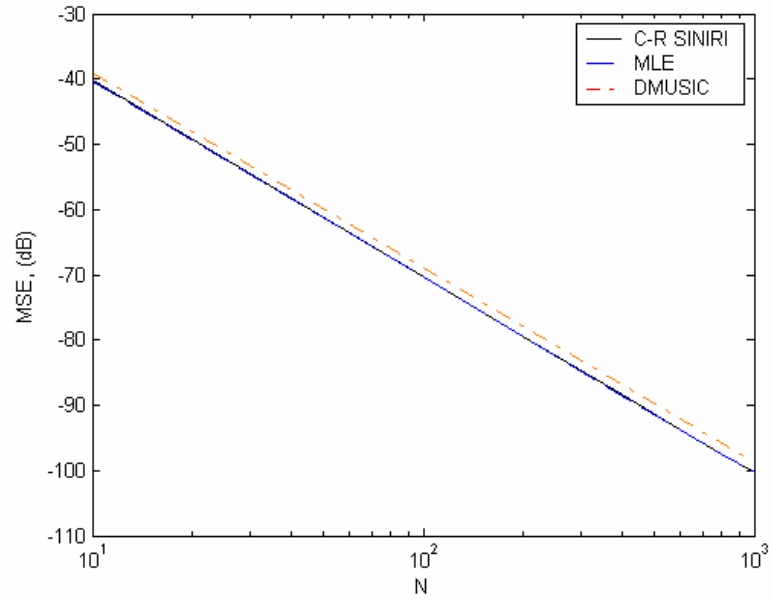
Şekil 3.13.22. $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 20dB$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



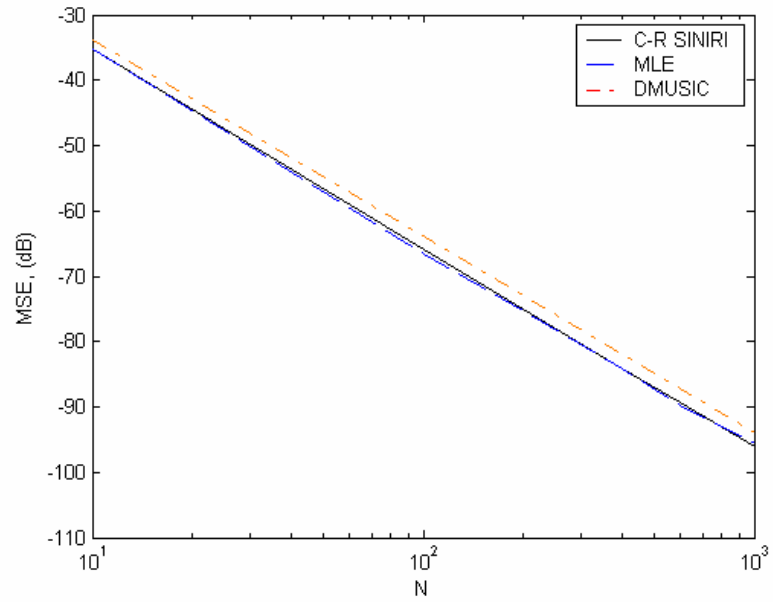
Şekil 3.13.23. $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



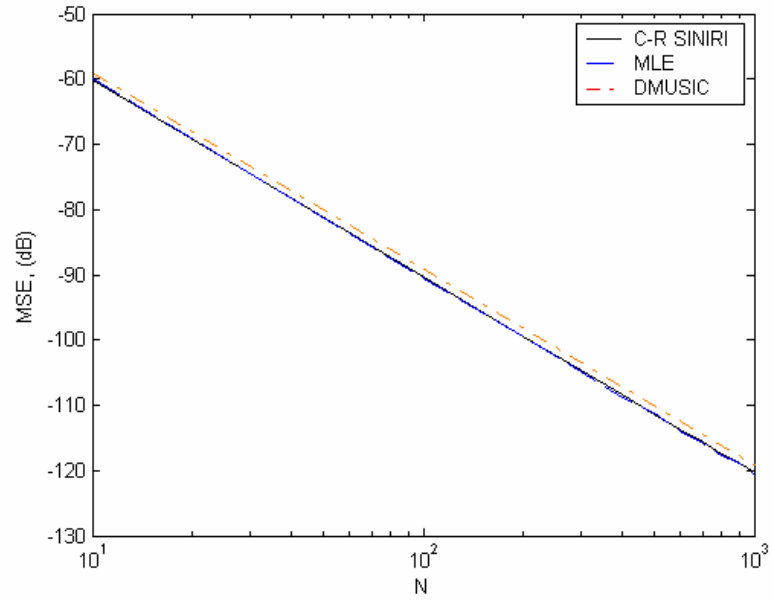
Şekil 3.13.24. $\delta\omega/\Omega = 0.5$, $SNR = 40dB$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



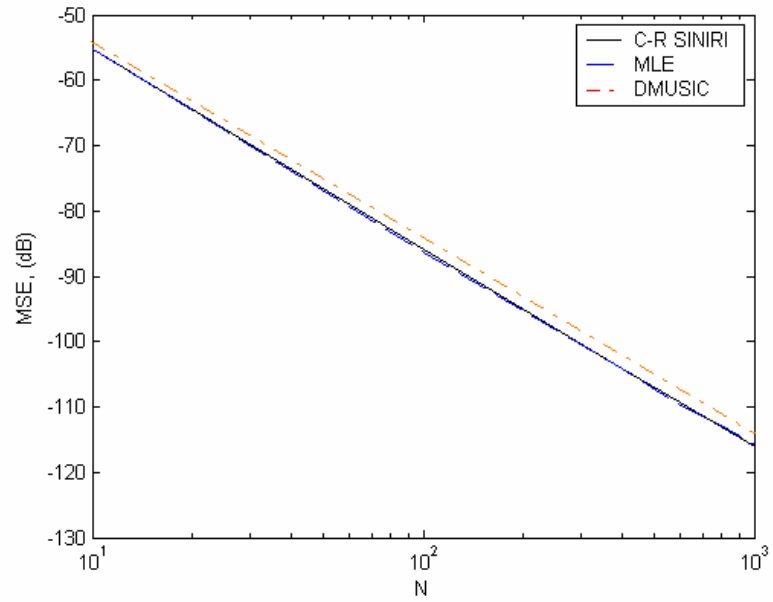
Şekil 3.13.25. $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 20dB$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.13.26. $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 20dB$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.13.27. $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi



Şekil 3.13.28. $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $SNR = 40dB$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için MLE ve DMUSIC kestiricilerin ortalama karesel hatalarının (MSE) toplam örnek sayısı (N) ile değişimi

MLE, C-R sınırını toplam örnek sayısı $N = 10$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (15dB), $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (20dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (-5dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (0dB) $N = 100$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (10dB), $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (15dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için \langle (-10dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için \langle (-10dB) civarındaki SNR değerlerinde yakalamaktadır.

DMUSIC, C-R sınırını toplam örnek sayısı $N = 10$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$, ve $N\beta_2 = 0.01$ için (15dB), $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (30dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (0dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (2dB) $N = 100$ iken; $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (0dB), $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (5dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (-5dB), $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$ ve $N\beta_2 = 0.01$ için (0dB) civarındaki SNR değerlerinde yakından izlemeye başlamaktadır.

MLE, yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi düşük SNR değerlerinde C-R sınırını yakalamaktadır.

DMUSIC, yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi düşük SNR değerlerinden başlamak üzere C-R sınırını yakından izlemektedir.

Her iki kestirici için de SNR eşik değeri, frekans farkı ve/veya toplam örnek sayısı azalırken ve/veya sönüm katsayısı artarken artmaktadır.

3.14. DMUSIC için Birinci Derece Analizi

3.14.1.Giriş

Bu bölümde büyük toplam örnek sayısı, düşük sönüm katsayısı ve alçak/yakın frekans durumunda DMUSIC için birinci derece analizi yapılarak teorik yan ve varyans ifadeleri elde edilmiştir.

Bir reel sönümlü sinüs ve iki kompleks sönümlü sinüsten oluşan veri modellerinde frekans parametrelerinin kestirimi için teorik ifadelerin performansı incelenmiştir.

3.14.2. Birinci Derece Analizi

$\{\hat{\omega}, \hat{\beta}\}$, (3.7.12) ifadesinde verilen $f(\omega, \beta)$ fonksiyonunun bir minimum noktası olsun.

Bu durumda,

$$\left. \frac{\partial f(\omega, \beta)}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega=\hat{\omega} \\ \beta=\hat{\beta}}} = f_{\omega}(\hat{\omega}, \hat{\beta}) = 0 \quad (3.14.1)$$

$$\left. \frac{\partial f(\omega, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\substack{\omega=\hat{\omega} \\ \beta=\hat{\beta}}} = f_{\beta}(\hat{\omega}, \hat{\beta}) = 0 \quad (3.14.2)$$

$f_{\omega}(\hat{\omega}, \hat{\beta})$ ve $f_{\beta}(\hat{\omega}, \hat{\beta})$ fonksiyonlarının $\{\omega^x, \beta^x\}$ gerçek değerlerinde, $\omega^x \in \{\omega_i\}_{i=1}^p$, $\beta^x \in \{\beta_i\}_{i=1}^p$, birinci dereceden Taylor serisine açıldıktan sonra $(\hat{\omega} - \omega^x)$ ve $(\hat{\beta} - \beta^x)$ farkları aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{bmatrix} (\hat{\omega} - \omega^x) \\ (\hat{\beta} - \beta^x) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{h} \quad (3.14.3)$$

(3.14.3) ifadesinden frekans parametresinin kestirimine ilişkinin DMUSIC 'in yanı ve varyansı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \text{bias}(\hat{\omega}) &= E(\hat{\omega} - \omega^x) = E[(\mathbf{A}^{11} \mathbf{h}_{11} + \mathbf{A}^{12} \mathbf{h}_{21})] \\ \text{var}(\hat{\omega}) &= E[(\hat{\omega} - \omega^x)^2] = E[(\mathbf{A}^{11} \mathbf{h}_{11} + \mathbf{A}^{12} \mathbf{h}_{21})^2] \end{aligned} \quad (3.14.4)$$

Burada $\mathbf{A}^{ij} = (\mathbf{A}^{-1})_{ij}$, $(i, j = 1, 2)$ ve E beklenen değer işlevidir. \mathbf{A} matrisi ve \mathbf{h} vektörü aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_{\omega}(\hat{\omega}, \hat{\beta})}{\partial \omega} \right|_{\substack{\hat{\omega}=\omega^{\times} \\ \hat{\beta}=\beta^{\times}}} & \left. \frac{\partial f_{\omega}(\hat{\omega}, \hat{\beta})}{\partial \beta} \right|_{\substack{\hat{\omega}=\omega^{\times} \\ \hat{\beta}=\beta^{\times}}} \\ \left. \frac{\partial f_{\beta}(\hat{\omega}, \hat{\beta})}{\partial \omega} \right|_{\substack{\hat{\omega}=\omega^{\times} \\ \hat{\beta}=\beta^{\times}}} & \left. \frac{\partial f_{\beta}(\hat{\omega}, \hat{\beta})}{\partial \beta} \right|_{\substack{\hat{\omega}=\omega^{\times} \\ \hat{\beta}=\beta^{\times}}} \end{bmatrix} \quad (3.14.5)$$

$$\mathbf{h} = \left[-f_{\omega}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \quad -f_{\beta}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \right]^T \quad (3.14.6)$$

\mathbf{A} matrisi ve \mathbf{h} vektörünün elemanları aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{A}_{11} = 2 \operatorname{Re} \left[\begin{array}{l} \mathbf{d}_{\omega}^*(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T \mathbf{d}_{\omega}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \\ + \tilde{\mathbf{r}}^*(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T \mathbf{d}'_{\omega}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \end{array} \right] \quad (3.14.7)$$

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21} = 2 \operatorname{Re} \left[\begin{array}{l} \mathbf{d}_{\beta}^*(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T \mathbf{d}_{\omega}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \\ + \tilde{\mathbf{r}}^*(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T \mathbf{d}_{\omega, \beta}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \end{array} \right] \quad (3.14.8)$$

$$\mathbf{A}_{22} = 2 \operatorname{Re} \left[\begin{array}{l} \mathbf{d}_{\beta}^*(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T \mathbf{d}_{\beta}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \\ + \tilde{\mathbf{r}}^*(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T \mathbf{d}'_{\beta}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \end{array} \right] \quad (3.14.9)$$

$$\mathbf{h}_{11} = -2 \operatorname{Re} \left[\tilde{\mathbf{r}}^*(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T \mathbf{d}_{\omega}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \right] \quad (3.14.10)$$

$$\mathbf{h}_{21} = -2 \operatorname{Re} \left[\tilde{\mathbf{r}}^*(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T \mathbf{d}_{\beta}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) \right] \quad (3.14.11)$$

Bu ifadelerde $*$ ve T sırasıyla kompleks eşlenik ve devrik sembolleridir.

(3.14.7)-(3.14.11) ifadelerinde yer alan $\tilde{\mathbf{r}}(\omega^{\times}, \beta^{\times})$, $\mathbf{d}_{\omega}(\omega^{\times}, \beta^{\times})$, $\mathbf{d}'_{\omega}(\omega^{\times}, \beta^{\times})$, $\mathbf{d}_{\beta}(\omega^{\times}, \beta^{\times})$, $\mathbf{d}'_{\beta}(\omega^{\times}, \beta^{\times})$, $\mathbf{d}_{\omega, \beta}(\omega^{\times}, \beta^{\times})$ vektörleri (3.14.12)-(3.14.22) ifadeleriyle verilmiştir:

$$\mathbf{r}(\omega^{\times}, \beta^{\times}) = \left[1 \quad e^{-\beta^{\times} + j\omega^{\times}} \quad \dots \quad e^{(-\beta^{\times} + j\omega^{\times})(L-1)} \right]^T \quad (3.14.12)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}(\omega^\times, \beta^\times) = \frac{\mathbf{r}(\omega^\times, \beta^\times)}{\|\mathbf{r}(\omega^\times, \beta^\times)\|} \quad (3.14.13)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}^*(\omega^\times, \beta^\times) = (\tilde{\mathbf{r}}(\omega^\times, \beta^\times))^* \quad (3.14.14)$$

$$\mathbf{d}_\omega(\omega^\times, \beta^\times) = \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\mathbf{r}}(\omega^\times, \beta^\times) \quad (3.14.15)$$

$$\mathbf{d}_\omega^*(\omega^\times, \beta^\times) = (\mathbf{d}_\omega(\omega^\times, \beta^\times))^* \quad (3.14.16)$$

$$\mathbf{d}'_\omega(\omega^\times, \beta^\times) = \frac{\partial}{\partial \omega} \mathbf{d}_\omega(\omega^\times, \beta^\times) \quad (3.14.17)$$

$$\mathbf{d}_\beta(\omega^\times, \beta^\times) = \frac{\partial}{\partial \beta} \tilde{\mathbf{r}}(\omega^\times, \beta^\times) \quad (3.14.18)$$

$$\mathbf{d}_\beta^*(\omega^\times, \beta^\times) = (\mathbf{d}_\beta(\omega^\times, \beta^\times))^* \quad (3.14.19)$$

$$\mathbf{d}'_\beta(\omega^\times, \beta^\times) = \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{d}_\beta(\omega^\times, \beta^\times) \quad (3.14.20)$$

$$\mathbf{d}_{\omega, \beta}(\omega^\times, \beta^\times) = \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{d}'_\omega(\omega^\times, \beta^\times) \quad (3.14.21)$$

(3.14.15)-(3.14.21) ifadelerinde yer alan türev ifadeleri bir vektörün bir skalere göre eleman eleman türevidir:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r} = \left[\frac{\partial r_1}{\partial \theta} \quad \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \quad \dots \quad \frac{\partial r_{L-1}}{\partial \theta} \right]^T \quad (3.14.22)$$

DMUSIC yöntemi için elde edilen teorik ifadelerin performansı sayısal örnekler yardımıyla incelenmiştir.

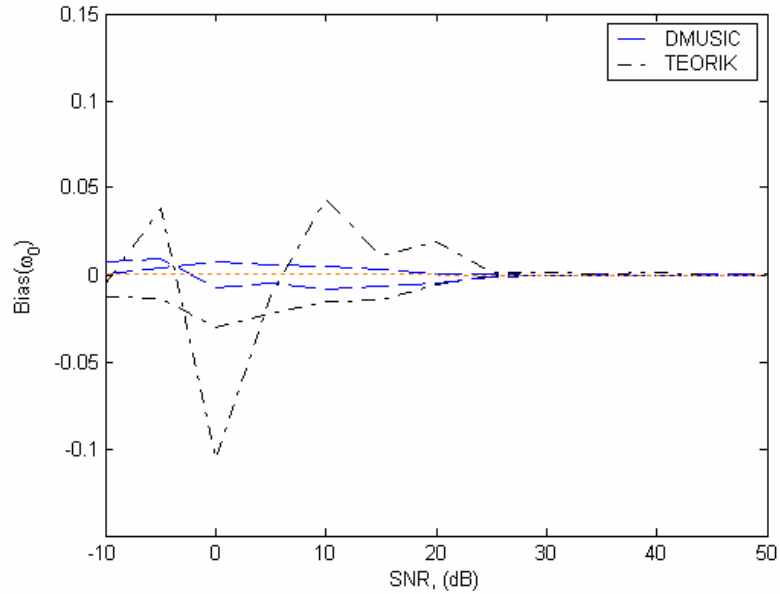
3.14.3. Birinci Derece Teorik Yan İfadesi için Performans İncelemesi

Bölüm 3.14.2'de elde edilen birinci derece teorik yan ifadesinin performansı her iki model içinde, (3.1.3) ve (3.1.4) modelleri, sayısal örnekler yardımıyla aşağıda incelenmiştir. Sayısal örnekler 500 Monte Carlo denemesi sonucudur.

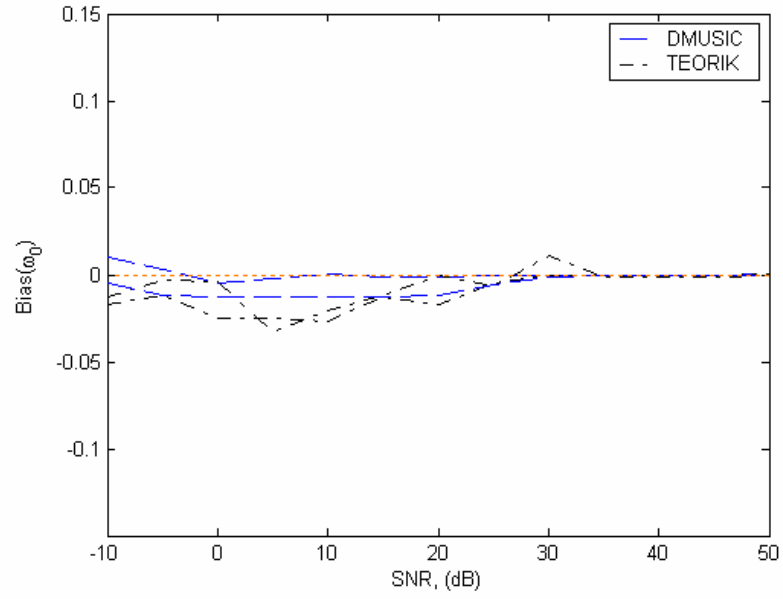
Örnek 3.14.1: (3.1.3) modelinde faz parametresinin $\varphi_0 = (\varphi_0)_{\max}$ (en kötü durum) ve $\varphi_0 = (\varphi_0)_{\min}$ (en iyi durum) değerlerini aldığı her iki durum için de genlik parametresini

$\alpha_0 = 1$ ve toplam örnek sayısını $N = 100$ olarak seçelim. Bu koşullar altında Şekil 3.14.1'de $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$, Şekil 3.14.2'de $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$, Şekil 3.14.3'de $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ ve Şekil 3.14.4'te $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $N\beta_0 = 1$ için frekans parametresi ω_0 'ın kestirimine ilişkin DMUSIC'in gerçek yanı ve (3.14.4) ifadesi ile verilen teorik yanının SNR ile değişimleri verilmiştir. En kötü ve en iyi durum yan ifadeleri aynı şekilde birlikte verilmiştir.

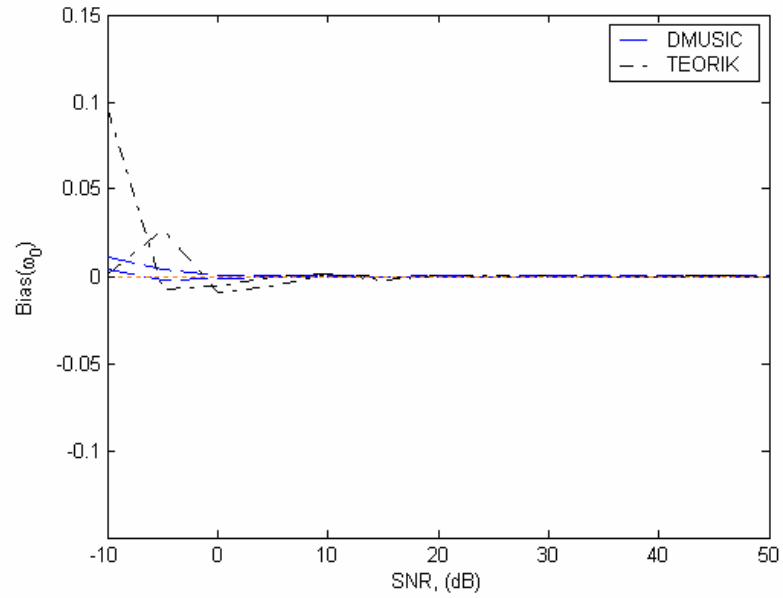
Örnek 3.14.2: (3.1.4) modelinde genlik parametrelerinin $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, faz parametrelerinin $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, frekans parametrelerinin $\omega_1 = 1$ ve $\omega_2 = \omega_1 + \delta\omega$ ve toplam veri sayısının $N = 100$ olduğu durumu ele alalım. Şekil 3.14.5'de $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$, Şekil 3.14.6'da $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$, Şekil 3.14.7'de $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ ve Şekil 3.14.8'te $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için birinci sönümlü sinüsün frekans parametresi ω_1 'in kestirimine ilişkin DMUSIC'in gerçek yanı ve (3.14.4) ifadesi ile verilen teorik yanının SNR ile değişimleri verilmiştir.



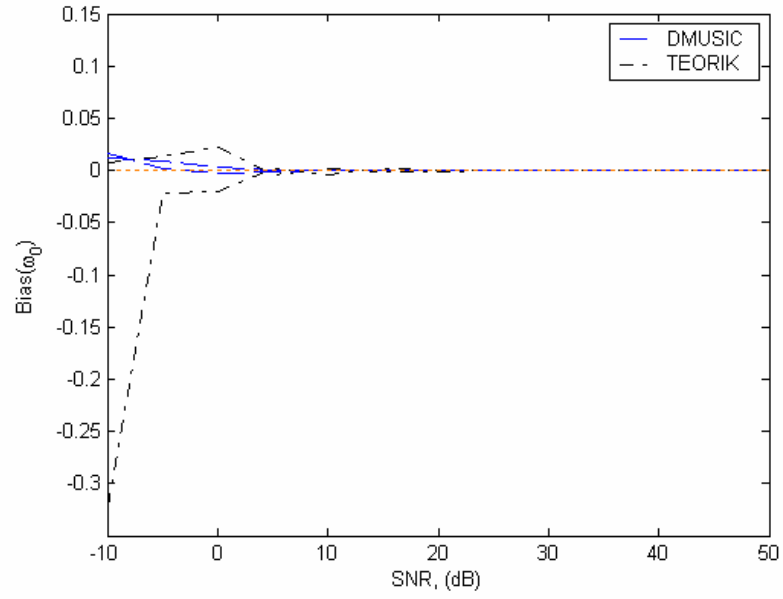
Şekil 3.14.1. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



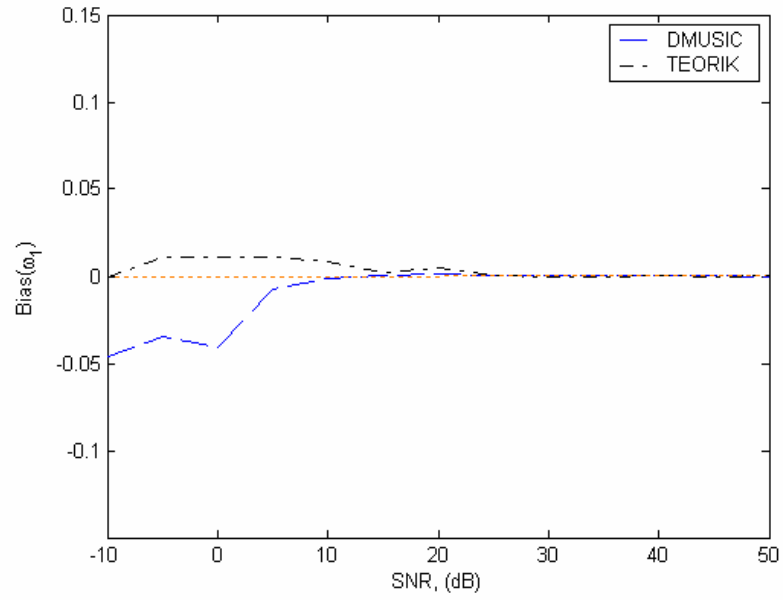
Şekil 3.14.2. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



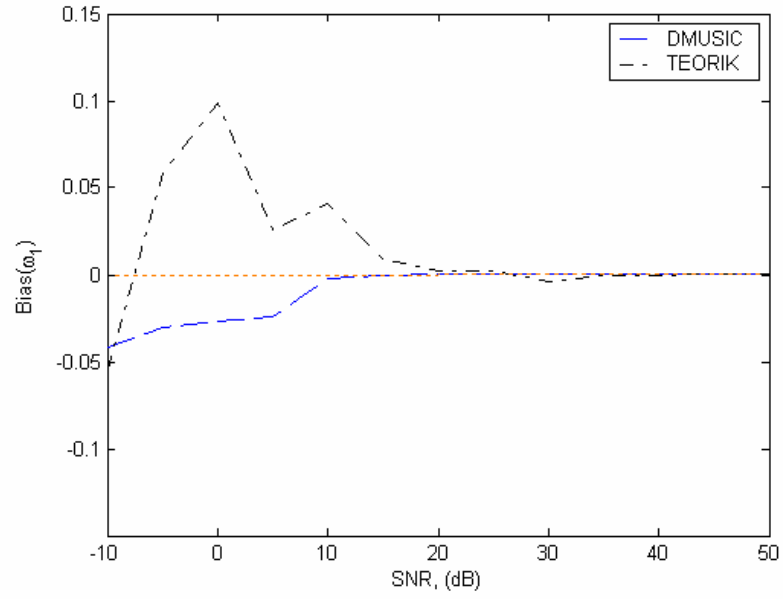
Şekil 3.14.3. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



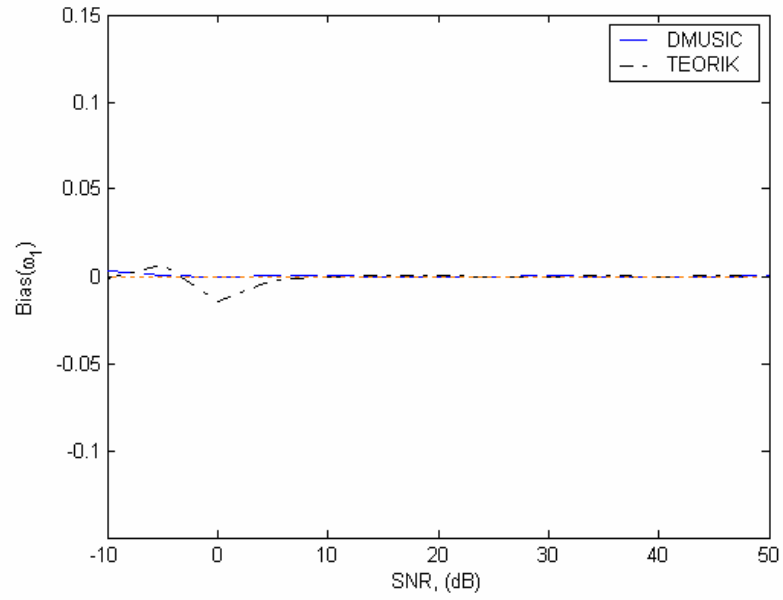
Şekil 3.14.4. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



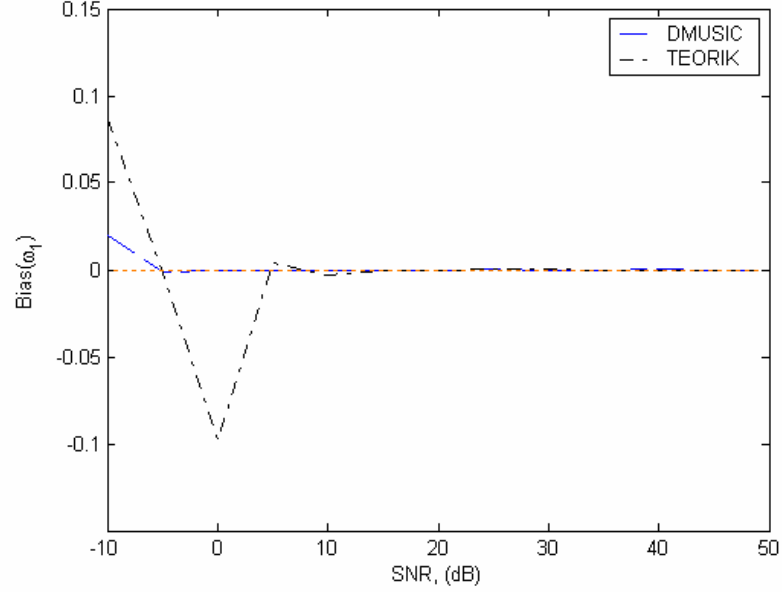
Şekil 3.14.5. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



Şekil 3.14.6. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



Şekil 3.14.7. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



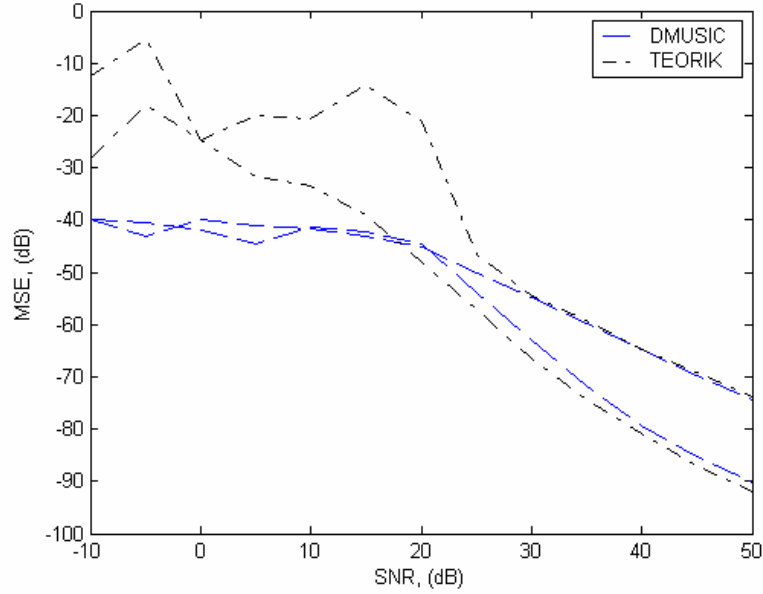
Şekil 3.14.8. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik yanının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi

3.14.4. Birinci Derece Teorik Varyans İfadesi için Performans İncelemesi

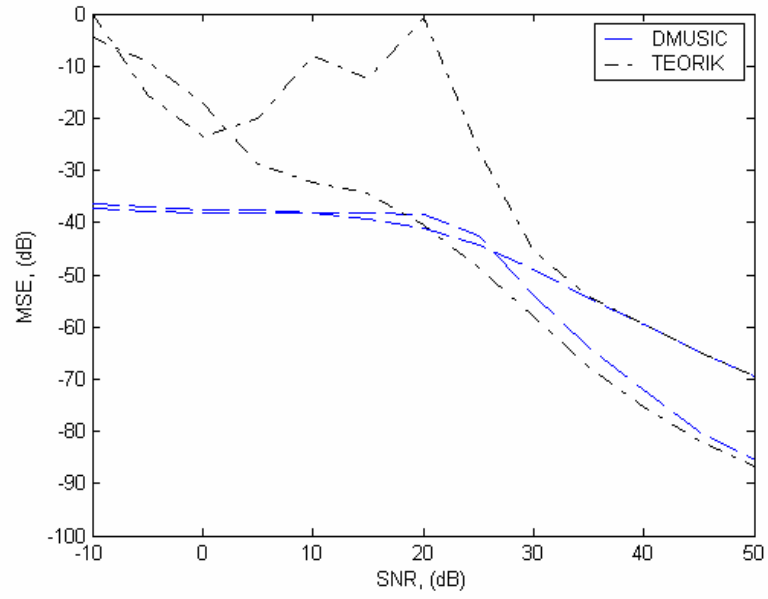
Bölüm 3.14.2’de elde edilen birinci derece varyans ifadesinin performansı her iki model için de, (3.1.3) ve (3.1.4) modelleri, sayısal örnekler yardımıyla aşağıda incelenmiştir. Sayısal örnekler 500 Monte Carlo denemesi sonucudur.

Örnek 3.14.3: (3.1.3) modelinde faz parametresinin $\varphi_0 = (\varphi_0)_{\max}$ (en kötü durum) ve $\varphi_0 = (\varphi_0)_{\min}$ (en iyi durum) değerlerini aldığı her iki durum için genlik parametresini $\alpha_0 = 1$ ve toplam örnek sayısını $N = 100$ olarak seçelim. Bu koşullar altında Şekil 3.14.9’da $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$, Şekil 3.14.10’da $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$, Şekil 3.14.11’de $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ ve Şekil 3.14.12’de $\delta\omega/\Omega = 1.5$ ve $N\beta_0 = 1$ için bir reel sönümlü sinüsün frekans parametresi ω_0 ’ın kestirimine ilişkin DMUSIC’in gerçek varyans ve (3.14.4) ifadesi ile verilen teorik varyansının SNR ile değişimleri verilmiştir. En kötü ve en iyi durum varyans ifadeleri aynı şekilde birlikte verilmiştir.

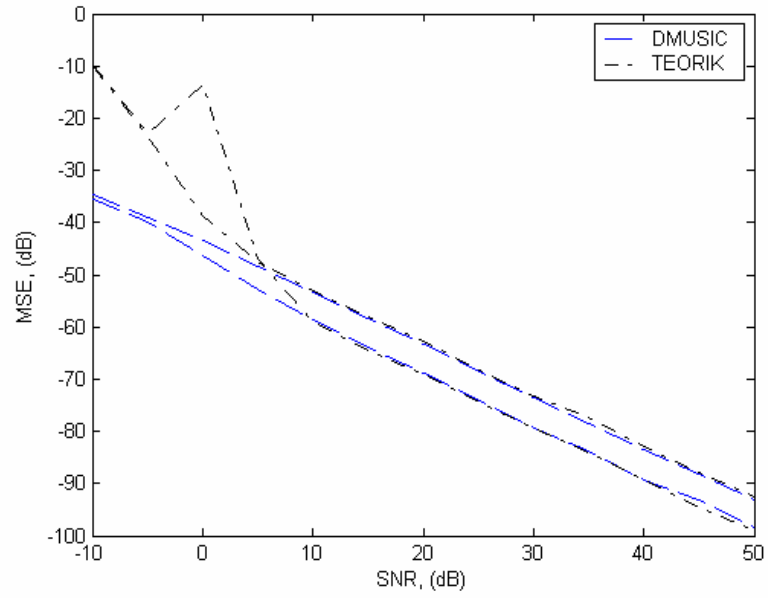
Örnek 3.14.4: (3.1.4) modelinde genlik parametrele $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, faz parametrelerinin $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, frekans parametrelerinin $\omega_1 = 1$ ve $\omega_2 = \omega_1 + \delta\omega$, toplam veri sayısının $N = 100$ ve ilk örnekleme indisinin $n = 0$ olduğu durumu ele alalım. Şekil 3.14.13’de $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$, Şekil 3.14.14’te $\delta\omega = 0.5\Omega$, $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$, Şekil 3.14.15’te $\delta\omega = 1.5\Omega$, $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ ve Şekil 3.14.16’da $\delta\omega/\Omega = 1.5$, $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ durumları için birinci sönümlü sinüsün frekans parametresi ω_1 ’in kestirimine ilişkin DMUSIC’in varyansının ve DMUSIC için (3.14.4) ifadesi ile verilen teorik varyans ifadesinin SNR ile değişimleri verilmiştir.



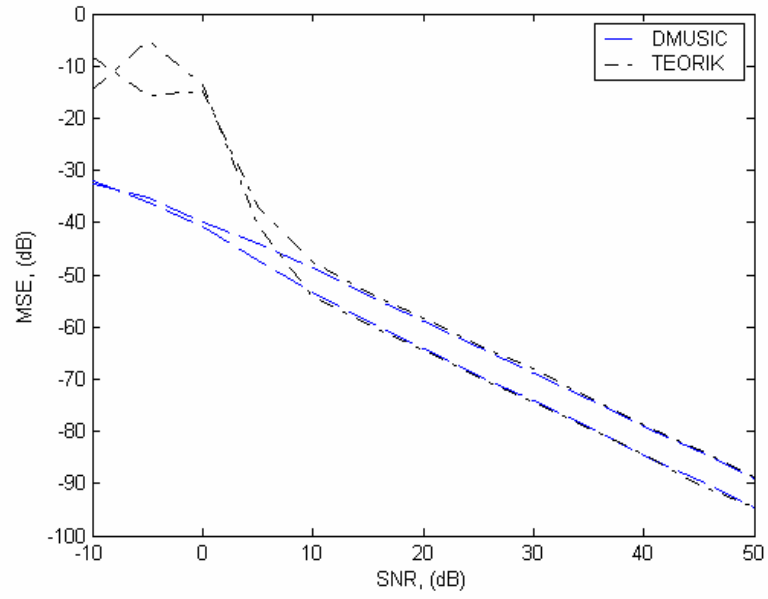
Şekil 3.14.9. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



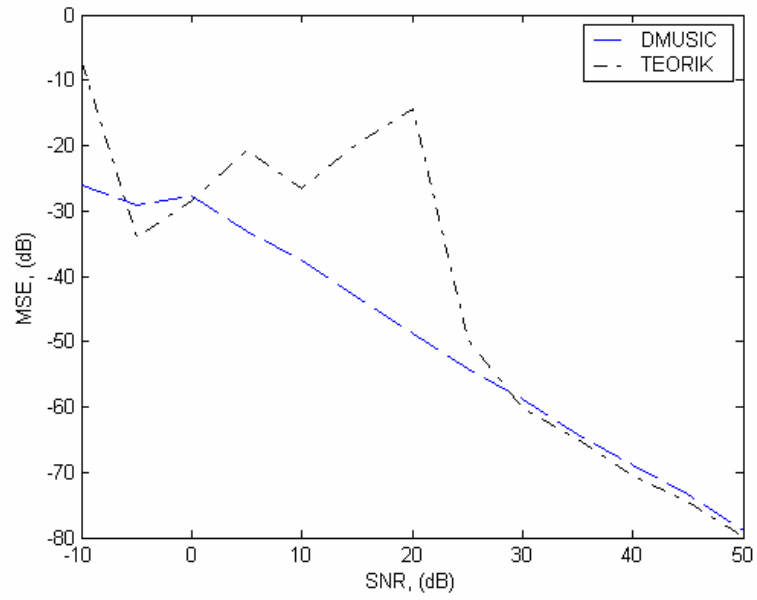
Şekil 3.14.10. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



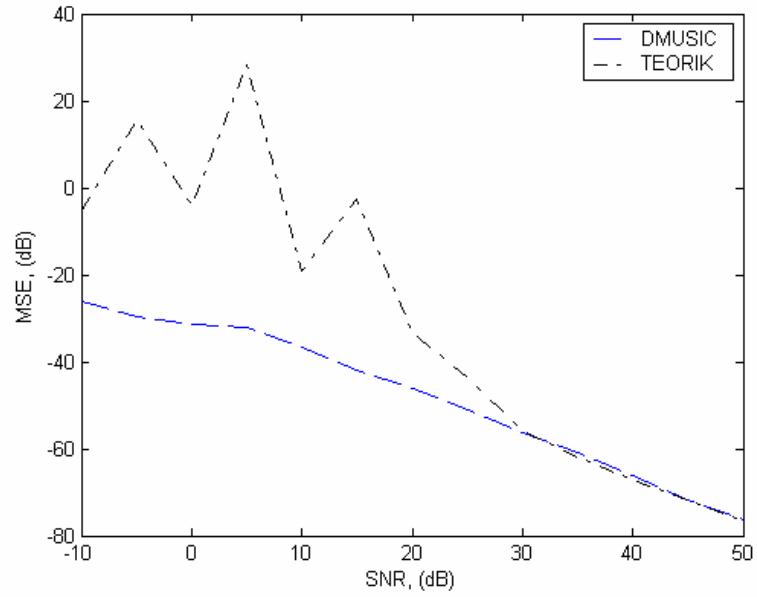
Şekil 3.14.11. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



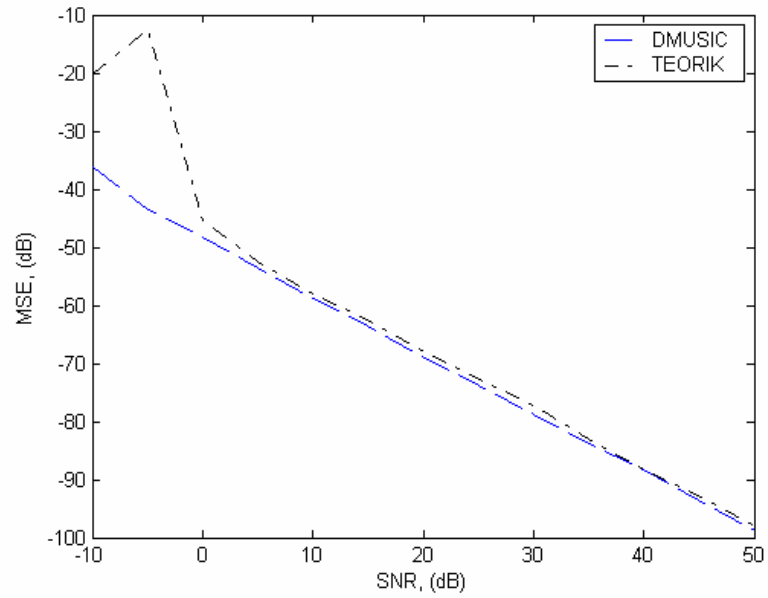
Şekil 3.14.12. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_0 = 1$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



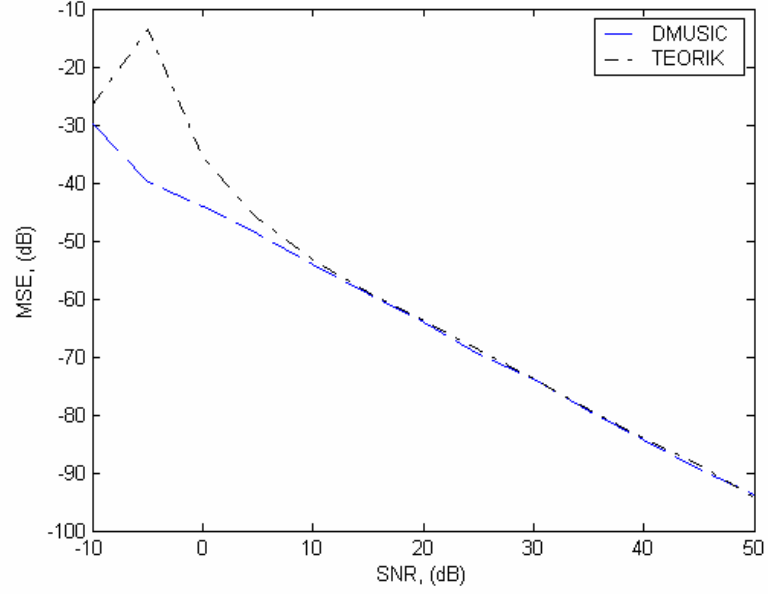
Şekil 3.14.13. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



Şekil 3.14.14. $N = 100$, $\delta\omega = 0.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



Şekil 3.14.15. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 0.01$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi



Şekil 3.14.16. $N = 100$, $\delta\omega = 1.5\Omega$ ve $N\beta_1 = 1$, $N\beta_2 = 0.01$ için DMUSIC kestiricisinin gerçek ve teorik varyansının sinyal gürültü oranı (SNR) ile değişimi

DMUSIC'in teorik yan ve varyans değerleri gerçek yan ve varyans değerlerini frekans farkının Fourier limitinin altında olduğu durumda kabul edilebilir SNR değerlerinden ((20dB)-(40dB) aralığında veri modeline ve sönüm faktörlerine bağlı olarak), üzerindeki bölgede ise düşük SNR değerlerinden ((0dB)-(10dB) aralığında veri modeline ve sönüm faktörlerine bağlı olarak) başlamak üzere çok yakından izlemektedir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1. Bir Reel Sönümsüz Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli

4.1.1. MLE ve MUSIC Kestiricilerin Performans Analizi

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümsüz sinüsten oluşan zaman serisi veri modelinde frekans parametresinin kestirimi MLE ve MUSIC yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Özellikle, alçak frekans durumu için kestiricilerin en kötü ve en iyi durum performansları sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Performans ölçütü olarak frekans parametresinin kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durum C-R sınırları kullanılmıştır. Sayısal örnekler yardımıyla her iki kestiricinin performansları hakkında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

MLE, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için alçak frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarında ilgili C-R sınırını yakalamaktadır.

MUSIC'in, her iki durum için de, toplam örnek sayısı artarken dahi ilgili C-R sınırını yakalayamadığı görülmektedir. Bunun sebebi reel sinüsün iki kompleks sinüsün toplamı biçiminde düşünülmüş olmasıdır. Bu yaklaşımın kabul edilebilir performans kaybına sebep olduğu bilinmektedir.

MUSIC'in en kötü durum performansı MLE'ye çok yakın bir davranış sergilerken en iyi durum performansı incelenen değişken parametrelerin hepsi (sinyal gürültü oranı, sinüsün frekansı ve toplam örnek sayısı) için daha yüksek bir eşik değere sahiptir.

Her iki kestirici için de sinyal gürültü oranı eşik değeri, frekans farkı ve/veya toplam örnek sayısı azalırken artmaktadır.

MUSIC'in performansı, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için alçak frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarından başlamak üzere MLE'nin aynı durum performansını yakından izlemektedir.

4.2. İki Kompleks Sönümsüz Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli

4.2.1. MLE ve MUSIC Kestiricilerin Performans Analizi

Kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümsüz sinüsten oluşan zaman serisi veri modelinde frekans parametrelerinin kestirimi MLE ve MUSIC yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Özellikle, yakın frekans durumu için kestiricilerin en kötü ve en iyi durum performansları sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Performans ölçütü olarak frekans parametresinin kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durum C-R sınırları kullanılmıştır. Sayısal örnekler yardımıyla her iki kestiricinin performansları hakkında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

MLE, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarında ilgili C-R sınırını yakalamaktadır.

MUSIC, her iki durum için de, en kötü durum C-R sınırına yaklaşmakta ve yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi en kötü durum C-R sınırını yakalamaktadır.

Her iki kestirici için de sinyal gürültü oranı eşik değeri, frekans farkı ve/veya toplam örnek sayısı azalırken artmaktadır.

MUSIC'in performansı, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarında MLE'nin en kötü durum performansını yakalamaktadır.

4.3. Bir Reel Sönümlü Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli

4.3.1. Çözümsel C-R Sınır İfadeleri

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırlarının matrissel olmayan çözümsel ifadeleri türetilmiştir. Bu ifadeler sınırların sinüsün fazına olan bağıllığını basit bir biçimde ortaya koymaktadır. Bunun bir sonucu

olarak sınırların faz değişirken alacağı en büyük ve en küçük değerler ve bu değerler ile ilişkili kritik faz değerleri kolayca elde edilebilir. Sınırlar sinüsün frekansına sadece frekans farkı yoluyla bağlıdır.

Genlik sınırlarının genliklerden bağımsız olduğu; faz, sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının ilgili sinüsün sinyal gürültü oranı ile ters orantılı olduğu; genlik ve faz sınırlarının toplam örnek sayısının birinci kuvveti biçiminde azaldığı; sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının toplam örnek sayısının üçüncü kuvveti biçiminde azaldığı görülmektedir.

Sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırlarının, en büyük değerleri ve en küçük değerleri aynıdır ve, aynı zamanda, sınırlardan biri en büyük değerini aldığında diğeri en küçük değerini almaktadır, yani, bir sınıra ilişkin en kötü (en iyi) faz değeri diğer sınıra ilişkin en iyi (en kötü) faz değeri olmaktadır. Aynı ilişki, genlik sınırı genliğin karesi ile bölünmek şartıyla, genlik ve faz parametrelerine ilişkin C-R sınırları arasında da vardır.

Dolayısıyla, sadece genlik ve frekans parametrelerine ilişkin en kötü ve en iyi durum C-R sınırlarının davranışlarının incelenmesi yeterli olmuştur.

Çözümsel ifadelerden C-R sınırlarının sönüm katsayısı ve sinüsün frekansına olan bağlılığı açık bir biçimde gözükmemektedir. Bu bağlılıklar sayısal örnekler yardımıyla incelenmiştir.

Sayısal örnekler C-R sınırlarının sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması halinde sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğunu göstermektedir. Bu bölgede en kötü ve en iyi durum C-R sınırları arasındaki fark sinüsün frekansı azaldıkça artmaktadır. Belirli bir frekans değeri için sınırların en büyük ve en küçük değerleri arasındaki fark sönüm katsayısının artışı ile artmaktadır.

4.3.2. Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ve Kritik Faz Değerleri için Basit İfadeler

Sınırların alçak frekans rejimindeki davranışını daha iyi anlamayabilmek için en kötü ve en iyi durum C-R sınırları ve kritik faz değerleri için basit yaklaşık ifadeler elde edilmiştir.

Yaklaşık sınırların sinüsün frekansının ters kuvvetlerine olan bağlılığının toplam örnek sayısı ve frekans farkının çarpımı yoluyla olması, sınırların sinüsün frekansından daha çok bu çarpımın küçük olması halinde büyük olacağını göstermektedir. Bu ise, sinüsün frekansının küçük olması durumunda, toplam örnek sayısının önemini göstermektedir.

4.3.3. Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ile Kritik Faz Değerleri için Basit Kapalı-Biçim İfadeler

En kötü ve en iyi genlik ve frekans sınırları ile bu sınırlara karşılık düşen kritik faz ifadeleri sinüsün frekansının küçük değerleri için sinüsün sönümlenene kadar örneklendiği, yani, toplam örnek sayısının yeteri kadar fazla olduğu ve sinüsün sönüm katsayısının küçük olduğu varsayımları altında sadeleştirilerek basit kapalı-biçim (asimtotik) ifadeler şeklinde sunulmuştur. Bu varsayımların temelinde hızla sönen yüksek sönüm katsayılı bir sinüsün parametre kestiricilerinin muhtemelen yanlı olacağı, dolayısıyla, C-R sınırlarının uygulanamayacağı düşüncesi yatmaktadır.

Asimtotik C-R sınırlarının ve bu sınırlar ile ilişkili kritik faz ifadelerinin sinüsün frekansına olan bağlılığı sinüsün frekansının sönüm katsayısına oranı aracılığıylaadır. Sınır değerleri sinüsün frekansından daha çok bu oran küçük olduğunda büyük olacaktır. Bu, sinüsün frekansı küçük olduğunda küçük sönüm katsayısına sahip olmanın önemini göstermektedir.

Sayısal örnekler basit kapalı-biçim ifadelerin gerçek C-R sınır değerlerini ilgilenilen frekans aralığı (alçak frekans) değerleri için çok yakından izlediğini göstermektedir.

4.3.4. MLE ve DMUSIC Kestiricilerin Performans Analizi

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modelinde frekans parametresinin kestirimi MLE ve DMUSIC yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Özellikle, alçak frekans durumu için kestiricilerin en kötü ve en iyi durum performansları sinyal gürültü oranı, frekans farkı, sönüm katsayısı ve toplam örnek sayısı değişirken karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Performans

ölçütü olarak frekans parametresinin kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durum C-R sınırları kullanılmıştır. Sayısal örnekler yardımıyla her iki kestiricinin performansları hakkında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

MLE, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için alçak frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarında ilgili C-R sınırlarını yakalamaktadır.

DMUSIC, her iki durum için de, yeterince büyük toplam örnek sayıları için alçak frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarından başlamak üzere ilgili C-R sınırını yakından izlemektedir. En kötü durum performansı en iyi durum performansına göre ilgili C-R sınırına daha yakın bir davranış sergilemektedir.

Her iki kestirici için de sinyal gürültü oranı eşik değeri, frekans farkı ve/veya toplam örnek sayısı azalırken ve/veya sönüm katsayısı artarken artmaktadır.

DMUSIC'in performansı yeterince büyük toplam örnek sayıları için alçak frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarından başlamak üzere MLE'nin performansını yakından izlemektedir.

4.4. İki Kompleks Sönümlü Sinüsten Oluşan Zaman Serisi Veri Modeli

4.4.1. Çözümsel C-R Sınır İfadeleri

Kompleks beyaz gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırlarının matrissel olmayan çözümsel ifadeleri elde edilmiştir. Bu ifadelerden sınırların sinüslerin fazlarına bağlı olmadığı görülmektedir. Sınırlar sinüslerin frekanslarına sadece bu iki frekans değeri arasındaki fark yoluyla bağlıdır.

Genlik sınırlarının genliklerden bağımsız olduğu; faz, sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının ilgili sinüsün sinyal gürültü oranı ile ters orantılı olduğu; genlik ve faz sınırlarının örnek sayısı toplam örnek sayısının birinci kuvveti biçiminde azaldığı; sönüm katsayısı ve frekans sınırlarının toplam örnek sayısının üçüncü kuvveti biçiminde azaldığı görülmektedir.

C-R sınırlarının sinüsler arasındaki frekans farkına ve sinüslerin sönüm katsayılarına olan bağılılıkları açık bir biçimde gözükmemektedir. Bu bağılılıklar sayısal örnekler yardımıyla incelenmiştir.

Sınırların frekans farkı sifira yaklaşırken oldukça arttığı görülmektedir. Sınırlar frekans farkı artarken genel olarak azalmakla beraber, bu azalma sadece Fourier limitinin altındaki bölgede önemlidir; üzerindeki bölgede sınırlar hemen hemen sabit kalmaktadır. Küçük frekans farklarında, belirli bir frekans farkı değeri için, sınırlar en büyük değerini sinüslerin sönüm katsayılarının eşit olması durumunda almaktadır.

4.4.2. Yakın Frekans Durumu: Basit Kapalı-Biçim C-R Sınır İfadeleri

C-R sınır ifadeleri iki kompleks sinüs arasındaki frekans farkının küçük değerleri için sinüslerin sönümlenene kadar örneklendiği, yani, toplam örnek sayısının yeteri kadar fazla olduğu ve sinüslerin sönüm katsayılarının küçük olduğu varsayımları altında sadeleştirilerek basit kapalı-biçim (asimtotik) ifadeler şeklinde sunulmuştur.

Küçük frekans farklarında, C-R sınırlarının kompleks sinüslerin sönüm katsayıları eşit iken gösterdiği davranış, sönüm faktörü eşit değilken gösterdiği davranıştan farklı olduğu açıkça görülmektedir.

Kompleks sinüslerin sönüm katsayıları eşit iken, asimtotik sınırların frekans farkına bağılılığı frekans farkının ilgili sinüsün sönüm katsayısına oranının ters kuvveti aracılığıylaadır. Sınırlar frekans farkının küçük olmasından daha çok bu oran küçük iken büyük olacaktır. Bu, frekans farkı küçük olduğunda küçük sönüm katsayısına sahip olmanın önemini göstermektedir.

C-R sınırları için elde edilen kapalı biçim basit ifadeler küçük frekans farkları için türetilmiş olmasına rağmen büyük frekans farkı (frekans farkının sinüslerin sönüm katsayılarının toplamından büyük olduğu durum) şartının bu ifadelerde yerine konulması durumunda aynı zamanda geniş frekans aralıkları içinde geçerli olacaktır.

Sayısal örnekler kapalı-biçim basit ifadelerin gerçek C-R sınır değerlerini bütün frekans aralığı değerleri için çok yakından izlediğini göstermektedir.

4.4.3. MLE ve DMUSIC Kestiricilerin Performans Analizi

Kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modelinde frekans parametrelerinin kestirimi MLE ve DMUSIC yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Özellikle, yakın frekans durumu için kestiricilerin performansları sinyal gürültü oranı, frekans farkı, sönüm katsayısı ve toplam örnek sayısı değişirken karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Performans ölçütü olarak frekans parametresinin kestirimine ilişkin C-R sınırı kullanılmıştır. Sayısal örnekler yardımıyla her iki kestiricinin performansları hakkında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

MLE, yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarında C-R sınırını yakalamaktadır.

DMUSIC, yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarından başlamak üzere C-R sınırını yakından izlemektedir.

Her iki kestirici için de sinyal gürültü oranı eşik değeri, frekans farkı ve/veya toplam örnek sayısı azalırken ve/veya sönüm katsayısı artarken artmaktadır.

DMUSIC'in performansı yeterince büyük toplam örnek sayıları için yakın frekans durumunda dahi düşük sinyal gürültü oranlarından başlamak üzere MLE'nin performansını yakından izlemektedir.

4.5. DMUSIC için Birinci Derece Analizi

Büyük toplam örnek sayısı, düşük sönüm katsayısı ve alçak/yakın frekans durumunda DMUSIC için birinci derece analizi gerçekleştirilmiştir. Birinci derece analizi sonucu frekans kestirimine ilişkin teorik yan ve varyans ifadeleri elde edilmiştir. Teorik yan ve varyans ifadelerinin performansı her iki zaman serisi veri modeli için sayısal örnekler yardımıyla incelenmiştir.

Sayısal örnekler DMUSIC'in teorik yan ve varyans değerlerinin gerçek değerleri frekans farkının Fourier limitinin altında olduğu durumda kabul edilebilir sinyal gürültü oranlarından, üzerindeki bölgede ise düşük sinyal gürültü oranlarından başlamak üzere çok yakından izlediğini göstermektedir.

KAYNAKLAR

- BARABELL, A. 1983. Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Boston, p.336-339.
- BARD, Y. 1974. Nonlinear Parameter Estimation. Academic Press, New York. 341p.
- BARKHNIJSEN, H., R. DE BEER and D. VAN ORMONDT. 1985. Retrieval of frequencies, amplitudes, damping factors and phases from time-domain signals using a linear least-squares procedure. Journal of Magnetic Resonance, 61(3):465-481.
- BIENVENUE, G. 1979. Influence of the spatial coherence of the background noise on high resolution passive methods. International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Washington, DC, p.306-309.
- BRESLER, Y. ve A. MACOVSKI. 1986. Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise. IEEE Transaction on Acoustic, Speech, and Signal Processing, 34(5): 1081–1089.
- DİLAVEROĞLU, E. 1998. Nonmatrix Cramér-Rao bound expressions for high-resolution frequency estimators. IEEE Transactions on Signal Processing, 46(2):463-474.
- DİLAVEROĞLU, E. 1998. Simple expressions for worst and best case Cramér-Rao bounds for amplitude and phase estimation of low frequency sinusoid. Electronics Letters, 35(3):206-208.
- DİLAVEROĞLU, E. 1999. Simple expressions for worst and best case Cramér-Rao bounds for amplitude and phase estimation of closely spaced cisoids. Electronics Letters, 35(18):1522-1523.
- DİLAVEROĞLU, E. 2002. The Cramér-Rao Bound for Damped and Undamped Sinusoids in Gaussian Noise. Uludağ University Journal of the Faculty of Engineering and Architecture, 7(1):5-9.
- HAYKIN, S. 1991. Adaptive Filter Theory. Prentice-Hall, New Jersey. 936p.
- HUA, Y. ve T.K. SARKAR. 1990. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped and undamped sinusoids in noise. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 38(5):814-824.
- KAY, S. ve S. L. MARPLE. 1981. Spectrum analysis-A modern perspective. Proceeding IEEE, vol. 69, pp. 1380-1419, Nov. 1981.
- KAY, S. M. 1993. Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory. Prentice-Hall, New Jersey. 595p.

- KAY, S. M. 2000. Mean likelihood frequency estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(7):1937-1946.
- KENDAL, S. M. ve A. STUART. 1979. *The Advanced Theory of Statistics Vol:2*. Macmillan, New York.
- KUMARESAN, R. ve D. W. TUFTS. 1982. Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 30(6):833-840.
- LAWSON, C.L. ve R.J. HANSON. 1974. *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, New Jersey. 340p.
- LEE, H. B. 1992. The Cramér-Rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(6):1508–1517.
- LI, Y., K.J.R. LIU, ve J. RAZAVILAR. 1995. Improved Parameter Estimation Scheme for Damped Sinusoidal Signals. Technical Report of SRC of University of Maryland, T.R. 95.11. 27 p.
- LI, Y., K.J.R. LIU, ve J. RAZAVILAR. 1995. DMUSIC algorithm for 2D NMR signals. *Engineering in Medicine and Biology Society, IEEE 17th Annual Conference*, 20-23 September 1995. p.477–478.
- LI, Y., K.J.R. LIU, ve J. RAZAVILAR. 1997. A parameter estimation scheme for damped Sinusoidal signals based on low-rank Hankel approximation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(2):481-486.
- MCAULAY, R. ve E. HOFSTETTER. 1971. Barankin Bounds on Parameter Estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 17(6):669-676.
- RAHMAN, M.D. ve KAI-BOR YU. 1987. Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction. *IEEE Transactions on. Acoustic, Speech, and Signal Processing*, 35(10):1440-1454.
- RIFE, D.C. ve R.R. BOORSTYN. 1974. Single tone parameter estimation from discrete-time observations. *IEEE Transactions on Information Theory*, 20(5):591-598.
- RIFE, D. C. ve R.R. BOORSTYN. 1976. Multiple tone parameter estimation from discrete-time observations. *The Bell System Technical Journal*, 55(9):1389-1410.
- SCHMIDT, R.O. 1979. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *Spectral Estimation Workshop, Rome, NY*, p.243-258.
- SEIDMAN, L.P. 1970. Some Performance limitations and error calculations for parameter estimation. *Proceedings of the IEEE*, 58(5):644-652.

- STEIGLITZ, K. ve L.E. McBRIDE. 1965. A technique for identification of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10(4):461-464.
- STEIGLITZ, K. 1977. On the simultaneous estimation of poles and zeros in speech analysis. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, 25(3):229-234.
- STOICA, P., NEHORAI A. ve S. KAY. 1987. Statistical analysis of the least squares autoregressive estimator in the presence of noise. *IEEE Transaction on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, 35(9): 1273–1281.
- STOICA, P., MOSES R.L., B. FRIEDLANDER ve T. SODESTROM. 1989. Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements. *IEEE Transaction on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, 37(3): 378–392.
- STOICA, P. ve A. NEHORAI. 1989. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound. *IEEE Transaction on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, 37(5): 720–741.
- STOICA, P. ve A. ERIKSSON. 1995. MUSIC estimation of real-valued sine-wave frequencies. *Signal Processing*, 42():139-146.
- STOICA, P.ve R.L. MOSES. 1997. *Introduction to spectral analysis*. Prentice-Hall, New Jersey.319 p.
- SWINGLER, D. N. 1999. Approximate expressions for the Cramér-Rao lower bounds on parameter estimates for a pair of closely spaced cisoids. *Signal Processing*, 76(1):99-104.
- SWINGLER, D.N. 1999. Approximations to the Cramer-Rao lower bound for a single damped exponential signal. *Signal Processing*, 76(1):197-200.
- TUFTS, D.W. ve R. KUMARESAN. 1982. Estimation of frequencies of multiple sinusoids: Making linear prediction perform like maximum likelihood. *Proceeding of The IEEE*, 70(9):975-989.
- TUFTS, D.W. ve R. KUMARESAN. 1980. Improved spectral resolution II. *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, p. 392-397, Apr. 1980.
- VAN VEEN, B. and K. BUCKLEY. 1988. Beamforming: A versatile approach to spatial filtering. *IEEE ASSP Magazine*, 5(2):4-24.
- VAN TREES, H. L. 1968. *Detection, estimation and modulation theory, Part I*. John Wiley & Sons, New York.
- WIGREN, T. ve A. NEHORAI. 1991. Asymptotic Cramér-Rao bounds for estimation of the parameters of damped sine waves in noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*,39(4):1017–1020.

YAO, Y. ve S. M. PANDIT. 1995. Cramér-Rao lower bounds for a damped sinusoidal process. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(4):878-885.

YILMAZ, E. ve E. DİLAVEROĞLU. 2004. Bir reel alçak frekanslı sönümlü sinüsün parametrelerinin kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durumlardaki Cramér-Rao sınırları için basit ifadeler. *Uludağ Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 9(2):89-93.

YILMAZ, E. ve E. DİLAVEROĞLU. 2004. bir reel sönümlü sinüs için matrissel olmayan Cramér-Rao sınır ifadeleri. *ELECO Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu Bildiri Kitabı Elektronik-Bilgisayar Cildi*. Bursa, 8-12 Aralık 2004, s. 207-210.

YILMAZ, E. and E. DİLAVEROĞLU. 2005. Asymptotic Worst and Best Case Cramér-Rao Bounds for Estimation of Parameters of Low-Frequency Damped Sinusoid. *IEE Electronics Letters*, 41(2):104-106.

YILMAZ, E. ve E. DİLAVEROĞLU. 2005. İki kompleks sönümlü sinüs için matrissel olmayan Cramér-Rao sınır ifadeleri. 13. *IEEE Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı Bildiri Kitabı*. Kayseri, 16-18 Mayıs 2005.

YILMAZ, E. ve E. DİLAVEROĞLU. 2006. Bir reel sönümlü sinüsün parametrelerinin kestirimine ilişkin kritik faz değerleri için basit ifadeler. *ELECO Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu Bildiri Kitabı Elektronik-Bilgisayar Cildi*. Bursa, 6-11 Aralık 2006.

YILMAZ, E. ve E. DİLAVEROĞLU. 2006. Asymptotic Cramér-Rao Bounds for Two Closely Spaced Damped Cisoids. *Signal Processing*, 86(11):3388-3392.

ZIV, J. ve M. ZAKAI. 1969. Some lower bounds on signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 15(3):386-391.

Ek-1**Bir Reel Sönümlü Sinüs için Çözümsel C-R Sınırları**

Matrisel olmayan C-R sınırları elde edilirken Fisher bilgi matrisi için Dilaveroğlu (2002) tarafından türetilen yeni ifadesi kullanılmıştır. Bu ifade, C-R sınırı ile sinyal parametreleri arasındaki bazı ilişkilerin kolayca görülebileceği biçimdedir.

Gauss gürültü içerisindeki M adet reel sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli aşağıdaki biçimdedir:

$$y(t) = x(t) + e(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i e^{-\beta_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) + e(t), \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{E.1.1})$$

Bilinmeyen parametre vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boldsymbol{\theta} = [\alpha_1, \varphi_1, \beta_1, \omega_1, \alpha_2, \dots, \omega_M]^T \quad (\text{E.1.2})$$

Eğer gürültünün bileşeni reel Gauss, $N(0, \mathbf{C})$, PDF'ye sahip olursa \mathbf{y} 'nin PDF'si $N(\mathbf{x}, \mathbf{C})$ olur, burada $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$.

θ_i , $\boldsymbol{\theta}$ 'nin i . elemanını göstermek üzere, Fisher bilgi matrisinin (i, j) . elemanı aşağıdaki biçimde gösterilebilir:

$$(\mathbf{J})_{i,j} = \text{Re} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_i} \right)^H \mathbf{C}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_j} \right) \right\} \quad (\text{E.1.3})$$

Burada $\frac{\partial(\)}{\partial \theta_i}$ kısmi türev ifadesidir.

$\mathbf{J} = \{\mathbf{J}_{i,j} : i, j = 1, 2, \dots, M\}$ olmak üzere bölüntülenebilir. Burada $\mathbf{J}_{i,j}$, \mathbf{J} matrisinin 4×4 'lük $[i, j]$. blok matrisidir:

$$\mathbf{J}_{i,j} = \frac{1}{2} \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{W}_{i,j} \mathbf{Q}_i^T \mathbf{D}_j \quad (\text{E.1.4})$$

burada

$$\mathbf{D}_i = \text{diag}\{1, \alpha_i, \alpha_i, \alpha_i\}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_i & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}'_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}'_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_{i,j} = \text{Re}\{\mathbf{Z}_{i,j} + \mathbf{Z}'_{i,j}\}$$

$$\mathbf{Z}_{i,j} = \begin{bmatrix} \xi_{i,j,0} & j\xi_{i,j,0} & \xi_{i,j,1} & j\xi_{i,j,1} \\ -j\xi_{i,j,0} & \xi_{i,j,0} & -j\xi_{i,j,1} & \xi_{i,j,1} \\ \xi_{i,j,2} & j\xi_{i,j,2} & \xi_{i,j,3} & j\xi_{i,j,3} \\ -j\xi_{i,j,2} & \xi_{i,j,2} & -j\xi_{i,j,3} & \xi_{i,j,3} \end{bmatrix}$$

$$\xi_{i,j,0} = \boldsymbol{\Psi}(\tau_i)^* \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Psi}(\tau_j)$$

$$\xi_{i,j,1} = \boldsymbol{\Psi}(\tau_i)^* \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Psi}'(\tau_j)$$

$$\xi_{i,j,2} = \boldsymbol{\Psi}'(\tau_i)^* \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Psi}(\tau_j)$$

$$\xi_{i,j,3} = \boldsymbol{\Psi}'(\tau_i)^* \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Psi}'(\tau_j)$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\tau) = [1, \tau, \dots, \tau^{N-1}]^T, \quad \boldsymbol{\Psi}'(\tau) = \tau \frac{d\boldsymbol{\Psi}(\tau)}{d\tau} \text{ ve } \tau_i = e^{-\beta_i + j\omega_i}$$

$$\mathbf{Z}'_{i,j} = \begin{bmatrix} \xi'_{i,j,0} & j\xi'_{i,j,0} & \xi'_{i,j,1} & j\xi'_{i,j,1} \\ j\xi'_{i,j,0} & -\xi'_{i,j,0} & j\xi'_{i,j,1} & -\xi'_{i,j,1} \\ \xi'_{i,j,2} & j\xi'_{i,j,2} & \xi'_{i,j,3} & j\xi'_{i,j,3} \\ j\xi'_{i,j,2} & -\xi'_{i,j,2} & j\xi'_{i,j,3} & -\xi'_{i,j,3} \end{bmatrix}$$

$$\xi'_{i,j,0} = \boldsymbol{\Psi}(\tau_i)^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Psi}(\tau_j)$$

$$\xi'_{i,j,1} = \boldsymbol{\Psi}(\tau_i)^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Psi}'(\tau_j)$$

$$\xi'_{i,j,2} = \boldsymbol{\Psi}'(\tau_i)^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Psi}(\tau_j)$$

$$\xi'_{i,j,3} = \Psi'(\tau_i)^T \mathbf{C}^{-1} \Psi'(\tau_j)$$

\mathbf{J}^{-1} matrisinin 4×4 'lük $[i, j]$. blok matrisi:

$$\mathbf{J}^{i,j} = 2\mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{Q}_i \mathbf{W}^{i,j} \mathbf{Q}_j^T \mathbf{D}_j^{-1} \quad (\text{E.1.5})$$

burada $\mathbf{W}^{i,j}$, \mathbf{W}^{-1} matrisinin 4×4 'lük $[i, j]$. blok matrisidir.

i . sönümlü reel sinüsün bilinmeyen parametrelerine ait C-R sınırları \mathbf{J}^{-1} 'in i . köşegen blok matrisinin köşegen elemanlarına eşit olacaktır:

$$\mathbf{J}^{i,i} = 2\mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{Q}_i \mathbf{W}^{i,i} \mathbf{Q}_i^T \mathbf{D}_i^{-1} \quad (\text{E.1.6})$$

$M = 1$ ve gürültü bileşeninin PDF'i $N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ olması durumunda (tez çalışmasında incelenen reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüs durumu) Fisher bilgi matrisi yukarıda anlatıldığı biçimde (özel bir biçimde) yazılarak sinyal parametrelerinin kestirimine ilişkin çözümsel C-R sınırları aşağıdaki biçimde elde edilmiştir:

$$\tau_1 = e^{-\beta_0 + j\omega_0}, \quad \Psi(\tau_1) = [1, e^{-\beta_0 + j\omega_0}, \dots, e^{(-\beta_0 + j\omega_0)(N-1)}]^T$$

$$\Psi'(\tau_1) = [0, e^{-\beta_0 + j\omega_0}, \dots, (N-1)e^{(-\beta_0 + j\omega_0)(N-1)}]^T$$

İfadelerin basitleştirilmesi için aşağıdaki tanımlamalar yapılırsa ($\delta\omega = 2\omega_0$):

$$\Gamma_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=0}^{N-1} t^r e^{-2\beta_0 t}, \quad C_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=0}^{N-1} t^r e^{-2\beta_0 t} \cos(\delta\omega t), \quad S_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=0}^{N-1} t^r e^{-2\beta_0 t} \sin(\delta\omega t)$$

$$\xi_{1,1,0} = \frac{1}{\sigma^2} N\Gamma_0, \quad \xi_{1,1,1} = \frac{1}{\sigma^2} N^2\Gamma_1, \quad \xi_{1,1,2} = \frac{1}{\sigma^2} N^2\Gamma_1, \quad \xi_{1,1,3} = \frac{1}{\sigma^2} N^3\Gamma_2$$

$$\mathbf{Z}_{1,1} = \frac{N}{\sigma_0^2} \mathbf{D}_N \begin{bmatrix} \Gamma_0 & j\Gamma_0 & \Gamma_1 & j\Gamma_1 \\ -j\Gamma_0 & \Gamma_0 & -j\Gamma_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_1 & j\Gamma_1 & \Gamma_2 & j\Gamma_2 \\ -j\Gamma_1 & \Gamma_1 & -j\Gamma_2 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_N$$

$$\mathbf{D}_N = \text{diag}\{1, 1, N, N\}, \mathbf{D}_1 = \{1, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_0\}$$

$$\xi'_{1,1,0} = \frac{1}{\sigma^2} N(C_0 + jS_0), \xi'_{1,1,1} = \frac{1}{\sigma^2} N^2(C_1 + jS_1), \xi'_{1,1,2} = \frac{1}{\sigma^2} N^2(C_1 + jS_1),$$

$$\xi'_{1,1,3} = \frac{1}{\sigma^2} N^2(C_2 + jS_2)$$

$$\mathbf{Z}'_{1,1} = \frac{N}{\sigma^2} \mathbf{D}_N \begin{bmatrix} (C_0 + jS_0) & j(C_0 + jS_0) & (C_1 + jS_1) & j(C_1 + jS_1) \\ j(C_0 + jS_0) & -(C_0 + jS_0) & j(C_1 + jS_1) & -(C_1 + jS_1) \\ (C_1 + jS_1) & j(C_1 + jS_1) & (C_2 + jS_2) & j(C_2 + jS_2) \\ j(C_1 + jS_1) & (C_1 + jS_1) & j(C_2 + jS_2) & -(C_2 + jS_2) \end{bmatrix} \mathbf{D}_N$$

$$\mathbf{W}_{1,1} = \frac{N}{\sigma^2} \mathbf{D}_N \begin{bmatrix} \Gamma_0 + C_0 & -S_0 & \Gamma_1 + C_1 & -S_1 \\ -S_0 & \Gamma_0 - C_0 & -S_1 & \Gamma_1 - C_1 \\ \Gamma_1 + C_1 & -S_1 & \Gamma_2 + C_2 & -S_2 \\ -S_1 & \Gamma_1 - C_1 & -S_2 & \Gamma_2 - C_2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_N$$

$$\mathbf{W}_{1,1} = \frac{N}{\sigma^2} \mathbf{D}_N \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{D}_N$$

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \Gamma_0 + C_0 & -S_0 & \Gamma_1 + C_1 & -S_1 \\ -S_0 & \Gamma_0 - C_0 & -S_1 & \Gamma_1 - C_1 \\ \Gamma_1 + C_1 & -S_1 & \Gamma_2 + C_2 & -S_2 \\ -S_1 & \Gamma_1 - C_1 & -S_2 & \Gamma_2 - C_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}^{1,1} = \frac{\sigma^2}{N} \mathbf{D}_N^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_N^{-1}$$

ΓCS matrisinin tersi:

$$\Gamma\text{CS}^{-1} = \begin{bmatrix} (\Gamma\text{CS}_{11} - \Gamma\text{CS}_{12}\Gamma\text{CS}_{22}^{-1}\Gamma\text{CS}_{21})^{-1} & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & (\Gamma\text{CS}_{22} - \Gamma\text{CS}_{21}\Gamma\text{CS}_{11}^{-1}\Gamma\text{CS}_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

\mathbf{X} ve \mathbf{X}' matrisleri:

$$\mathbf{X} = \Gamma\text{CS}_{11} - \Gamma\text{CS}_{12}\Gamma\text{CS}_{22}^{-1}\Gamma\text{CS}_{21}, \quad \mathbf{X}' = \Gamma\text{CS}_{22} - \Gamma\text{CS}_{21}\Gamma\text{CS}_{11}^{-1}\Gamma\text{CS}_{12}$$

\mathbf{X} ve \mathbf{X}' matrislerinin elemanları:

$$X_{11} = (\Gamma_0 + C_0) - \frac{(\Gamma_2 - C_2)(\Gamma_1 + C_1)^2 - 2(\Gamma_1 + C_1)S_1S_2 + (\Gamma_2 + C_2)S_1^2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2}$$

$$X_{12} = -S_0 - \frac{2(C_1C_2 - \Gamma_1\Gamma_2)S_1 + (\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2)S_2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2}$$

$$X_{21} = X_{12}$$

$$X_{22} = (\Gamma_0 - C_0) - \frac{(\Gamma_2 + C_2)(\Gamma_1 - C_1)^2 - 2(\Gamma_1 - C_1)S_1S_2 + (\Gamma_2 - C_2)S_1^2}{\Gamma_2^2 - C_2^2 - S_2^2}$$

$$X'_{11} = (\Gamma_2 + C_2) - \frac{(\Gamma_0 - C_0)(\Gamma_1 + C_1)^2 - 2(\Gamma_1 + C_1)S_0S_1 + (\Gamma_0 + C_0)S_1^2}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2}$$

$$X'_{12} = S_2 - \frac{2(\Gamma_0\Gamma_1 - C_0C_1)S_1 - (\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2)S_0}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2}$$

$$X'_{21} = X'_{12}$$

$$X'_{22} = (\Gamma_2 - C_2) - \frac{(\Gamma_0 + C_0)(\Gamma_1 - C_1)^2 - 2(\Gamma_1 - C_1)S_0S_1 + (\Gamma_0 - C_0)S_1^2}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2}$$

\mathbf{X}^{-1} ve \mathbf{X}'^{-1} matrislerinin elemanları:

$$(\mathbf{X}^{-1})_{11} = \frac{1}{X_{11} - \frac{X_{12}X_{21}}{X_{22}}}, (\mathbf{X}^{-1})_{12} = \frac{1}{X_{21} - \frac{X_{11}X_{22}}{X_{12}}}, (\mathbf{X}^{-1})_{22} = \frac{1}{X_{22} - \frac{X_{12}X_{21}}{X_{11}}}$$

$$(\mathbf{X}'^{-1})_{11} = \frac{1}{X'_{11} - \frac{X'_{12}X'_{21}}{X'_{22}}}, (\mathbf{X}'^{-1})_{12} = \frac{1}{X'_{21} - \frac{X'_{11}X'_{22}}{X'_{12}}}, (\mathbf{X}'^{-1})_{22} = \frac{1}{X'_{22} - \frac{X'_{12}X'_{21}}{X'_{11}}}$$

\mathbf{X}^{-1} ve \mathbf{X}'^{-1} matrisleri yerine koyulursa:

$$\underline{B}_\theta = \text{diag}\{2\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{W}^{1,1}\mathbf{Q}_1^T\mathbf{D}_1^{-1}\}$$

$$\underline{B}_\theta = \text{diag}\left\{2\frac{\sigma^2}{N}\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{D}_N^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}_N^{-1}\mathbf{Q}_1^T\mathbf{D}_1^{-1}\right\}$$

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{-1}) & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & (\mathbf{X}'^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_N^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}_N^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{N}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{-1}) & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & (\mathbf{X}'^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{N}I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_N^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}_N^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{-1}) & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & \frac{1}{N^2}(\mathbf{X}'^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{D}_N^{-1} \Gamma \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_N^{-1} \mathbf{Q}_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{-1}) & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & \frac{1}{N^2} (\mathbf{X}'^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_1{}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}'_1{}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{D}_N^{-1} \Gamma \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_N^{-1} \mathbf{Q}_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_1 (\mathbf{X}^{-1}) \mathbf{Q}'_1{}^T & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & \frac{1}{N^2} \mathbf{Q}'_1 (\mathbf{X}'^{-1}) \mathbf{Q}'_1{}^T \end{bmatrix}$$

Bilinmeyen parametre vektörüne ait C-R sınır vektörü aşağıdadır:

$$\underline{B}_\theta = \frac{2\sigma^2}{N} \text{diag} \{ \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{Q}_1 \mathbf{D}_N^{-1} \Gamma \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_N^{-1} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{D}_1^{-1} \}$$

Her bir parametreye ait C-R sınır ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$B_{\alpha_0} = \frac{2\sigma^2}{N} \{ \cos^2 \varphi_0 (X^{-1})_{11} + 2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 (X^{-1})_{12} + \sin^2 \varphi_0 (X^{-1})_{22} \}$$

$$B_{\varphi_0} = \frac{2\sigma^2}{N} \frac{1}{\alpha_0^2} \{ \sin^2 \varphi_0 (X^{-1})_{11} - 2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 (X^{-1})_{12} + \cos^2 \varphi_0 (X^{-1})_{22} \}$$

$$B_{\beta_0} = \frac{2\sigma^2}{N^3 \alpha_0^2} \{ \cos^2 \varphi_0 (X'^{-1})_{11} + 2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 (X'^{-1})_{12} + \sin^2 \varphi_0 (X'^{-1})_{22} \}$$

$$B_{\omega_0} = \frac{2\sigma^2}{N^3 \alpha_0^2} \{ \sin^2 \varphi_0 (X'^{-1})_{11} - 2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 (X'^{-1})_{12} + \cos^2 \varphi_0 (X'^{-1})_{22} \}$$

İfadeleri basitleştirmek için aşağıdaki tanımlar yapılırsa:

$$K_0 = \frac{X_{11} + X_{22}}{2(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)} \quad K_C = -\frac{X_{11} - X_{22}}{2(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)} \quad K_S = -\frac{X_{12}}{X_{11}X_{22} - X_{12}^2}$$

$$K'_0 = \frac{X'_{11} + X'_{22}}{2(X'_{11}X'_{22} - X'^2_{12})} \quad K'_C = \frac{X'_{11} - X'_{22}}{2(X'_{11}X'_{22} - X'^2_{12})} \quad K'_S = -\frac{X'_{12}}{X'_{11}X'_{22} - X'^2_{12}}$$

C-R sınır ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$B_{\alpha_0} = \frac{2\sigma^2}{N} (K_0 + K_C \cos 2\varphi_0 + K_S \sin 2\varphi_0) \quad (\text{E.1.7})$$

$$B_{\varphi_0} = \frac{1}{\text{SNR} \cdot N} (K_0 - K_C \cos 2\varphi_0 - K_S \sin 2\varphi_0) \quad (\text{E.1.8})$$

$$B_{\beta_0} = \frac{1}{\text{SNR} \cdot N^3} (K'_0 - K'_C \cos 2\varphi_0 - K'_S \sin 2\varphi_0) \quad (\text{E.1.9})$$

$$B_{\omega_0} = \frac{1}{\text{SNR} \cdot N^3} (K'_0 + K'_C \cos 2\varphi_0 + K'_S \sin 2\varphi_0) \quad (\text{E.1.10})$$

Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ve Kritik Faz Değerleri için Basit İfadeler

(3.8.24)-(3.8.31) ifadelerinde gözükten m, m', M, M', p, p' sabitlerinin tanımları aşağıda verilmiştir.

$$\Gamma_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=0}^{N-1} t^r e^{-2\beta_0 t}$$

$$\begin{aligned} M = & 288(\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 + 2\Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4)/(-\Gamma_3^4 - \Gamma_2^2\Gamma_4^2 + \Gamma_0\Gamma_4^3 - \Gamma_1^2\Gamma_5^2 \\ & + \Gamma_2^3\Gamma_6 + \Gamma_1^2\Gamma_4\Gamma_6 + 3\Gamma_2\Gamma_3^2\Gamma_4 + 2\Gamma_1\Gamma_3^2\Gamma_5 + \Gamma_0\Gamma_3^2\Gamma_6 - 2\Gamma_2^2\Gamma_3\Gamma_5 - 2\Gamma_0\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5 - 2\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4^2 - \\ & 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_6 + 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4\Gamma_5 + \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_5^2 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4\Gamma_6) \end{aligned}$$

$$m = \frac{\Gamma_3^2 - \Gamma_2\Gamma_4}{\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4}$$

$$p = \frac{\Gamma_3^3 + \Gamma_1\Gamma_4^2 + \Gamma_2^2\Gamma_5 - 2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 - \Gamma_1\Gamma_3\Gamma_5}{\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4}$$

$$M' = \frac{M}{4}$$

$$m' = \frac{2(\Gamma_1^2 - \Gamma_0\Gamma_2)}{\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4}$$

$$p' = \frac{\Gamma_2^2\Gamma_3 - \Gamma_1\Gamma_3^2 + \Gamma_0\Gamma_3\Gamma_4 + \Gamma_1^2\Gamma_5 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_5}{\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4}$$

Alçak Frekans Durumu: En Kötü ve En İyi Durum C-R Sınırları ile Kritik Faz Değerleri için Basit Kapalı-Biçim İfadeler

Alçak frekans durumu için elde edilen basit ifadelerde ki m, m', M, M', p, p' sabitlerinde yer alan Γ_i $i = 0, 1, \dots, 6$ ifadeleri Bölüm 3.8.5'te verilen A1 varsayımı altında aşağıdaki gibi sadeleştirilir:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{N(e^{2\beta_0} - 1)}, \Gamma_1 = \frac{e^{2\beta_0}}{N^2(e^{2\beta_0} - 1)^2}, \Gamma_2 = \frac{e^{2\beta_0} + e^{4\beta_0}}{N^3(e^{2\beta_0} - 1)^3}, \Gamma_3 = \frac{e^{2\beta_0} + 4e^{4\beta_0} + e^{6\beta_0}}{N^4(e^{2\beta_0} - 1)^4}$$

$$\Gamma_4 = \frac{e^{2\beta_0} + 11e^{4\beta_0} + 11e^{6\beta_0} + e^{8\beta_0}}{N^5(e^{2\beta_0} - 1)^5}, \Gamma_5 = \frac{e^{2\beta_0} + 26e^{4\beta_0} + 66e^{6\beta_0} + 26e^{8\beta_0} + e^{10\beta_0}}{N^6(e^{2\beta_0} - 1)^6}$$

$$\Gamma_6 = \frac{e^{2\beta_0} + 57e^{4\beta_0} + 302e^{6\beta_0} + 302e^{8\beta_0} + 57e^{10\beta_0} + e^{12\beta_0}}{N^7(e^{2\beta_0} - 1)^7}$$

Daha sonra ifadeler $\beta_0 = 0$ civarında Taylor serisine açılarak aşağıdaki kapalı-biçim ifadeleri elde edilir:

Genlik kestirimi için:

$$(B_{\alpha_0})_{\max} = 32\sigma^2\beta_0\left(\frac{\omega_0}{\beta_0}\right)^{-6} + O[\omega_0^{-4}] \quad (\text{E.1.11})$$

$$(B_{\alpha_0})_{\min} = 6\sigma^2\beta_0 + O[\omega_0^2] \quad (\text{E.1.12})$$

$$(\varphi_0)_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^3 \quad (\text{E.1.13})$$

$$(\varphi_0)_{\min} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^3 \quad (\text{E.1.14})$$

Frekans kestirimi için

$$(B_{\omega_0})_{\max} = \frac{16\beta_0^3}{SNR} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^{-4} + O[\omega_0^{-2}] \quad (\text{E.1.15})$$

$$(B_{\omega_0})_{\min} = \frac{4\beta_0^3}{SNR} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^{-2} + O[1] \quad (\text{E.1.16})$$

$$(\varphi_0)_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\beta_0} \quad (\text{E.1.17})$$

$$(\varphi_0)_{\min} = -\frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\beta_0} \quad (\text{E.1.18})$$

Ek-2

İki Kompleks Sönümlü Sinüs için Çözümsel C-R Sınır İfadeleri

Matrisel olmayan C-R sınırları elde edilirken Fisher bilgi matrisinin Dilaveroğlu (2002) tarafından türetilen yeni ifadesi kullanılmıştır. Bu ifade, C-R sınırı ile sinyal parametreleri arasındaki bazı ilişkilerin kolayca görülebileceği biçimdedir.

Gauss gürültü içerisindeki M adet kompleks sönümlü sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli aşağıdaki biçimdedir:

$$y(t) = x(t) + e(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i e^{-\beta t} e^{j(\omega_i t + \phi_i)} + e(t), \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{E.2.1})$$

Bilinmeyen parametre vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boldsymbol{\theta} = [\alpha_1, \phi_1, \beta_1, \omega_1, \alpha_2, \dots, \omega_M]^T \quad (\text{E.2.2})$$

Eğer gürültünün bileşeni kompleks Gauss, $CN(0, \mathbf{C})$, PDF'e sahip olursa \mathbf{y} 'nin PDF'i $CN(\mathbf{x}, \mathbf{C})$ olur, burada $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$.

θ_i , $\boldsymbol{\theta}$ 'nin i . elemanını göstermek üzere, Fisher bilgi matrisinin $[i, j]$. elemanı aşağıdaki biçimde gösterilebilir:

$$(\mathbf{J})_{i,j} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_i} \right)^H \mathbf{C}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_j} \right) \right\} \quad (\text{E.2.3})$$

Burada $\frac{\partial(\)}{\partial \theta_i}$ kısmi türev ifadesidir.

$\mathbf{J} = \{ \mathbf{J}_{i,j} : i, j = 1, 2, \dots, M \}$ olmak üzere bölüntülenebilir. Burada $\mathbf{J}_{i,j}$, \mathbf{J} matrisinin 4×4 'lük $[i, j]$. blok matrisidir:

$$\mathbf{J}_{i,j} = 2\mathbf{D}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{X}_{i,j} \mathbf{Q}_j^T \mathbf{D}_j \quad (\text{E.2.4})$$

burada $\mathbf{D}_i = \text{diag}\{1, \alpha_i, \alpha_i, \alpha_i\}$, $\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_i & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}'_i \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}'_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{X}_{i,j} = \text{Re}\{\mathbf{Z}_{i,j}\}$$

$$\mathbf{Z}_{i,j} = \begin{bmatrix} \xi_{i,j,0} & j\xi_{i,j,0} & \xi_{i,j,1} & j\xi_{i,j,1} \\ -j\xi_{i,j,0} & \xi_{i,j,0} & -j\xi_{i,j,1} & \xi_{i,j,1} \\ \xi_{i,j,2} & j\xi_{i,j,2} & \xi_{i,j,3} & j\xi_{i,j,3} \\ -j\xi_{i,j,2} & \xi_{i,j,2} & -j\xi_{i,j,3} & \xi_{i,j,3} \end{bmatrix}$$

$$\xi_{i,j,0} = \boldsymbol{\psi}(\tau_i)^* \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\psi}(\tau_j)$$

$$\xi_{i,j,1} = \boldsymbol{\psi}(\tau_i)^* \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\psi}'(\tau_j)$$

$$\xi_{i,j,2} = \boldsymbol{\psi}'(\tau_i)^* \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\psi}(\tau_j)$$

$$\xi_{i,j,3} = \boldsymbol{\psi}'(\tau_i)^* \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\psi}'(\tau_j)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\tau) = [1, \tau, \dots, \tau^{N-1}]^T, \quad \boldsymbol{\psi}'(\tau) = \tau \frac{d\boldsymbol{\psi}(\tau)}{d\tau}, \quad \tau_i = e^{(-\beta_i + j\omega_i)}$$

\mathbf{J}^{-1} matrisinin 4×4 'lük $[i, j]$. blok matrisi:

$$\mathbf{J}^{i,j} = \frac{1}{2} \mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_j^T \mathbf{X}^{i,j} \mathbf{D}_j^{-1} \quad (\text{E.2.5})$$

burada $\mathbf{X}^{i,j}$, \mathbf{X}^{-1} matrisinin 4×4 'lük $[i, j]$. blok matrisidir.

i . sönümlü kompleks sinüsün bilinmeyen parametrelerine ait C-R sınırları \mathbf{J}^{-1} 'in i . blok köşegen matrisinin köşegen elemanlarına eşit olacaktır:

\mathbf{J}^{-1} matrisinin i . blok köşegen matrisi:

$$\mathbf{J}^{i,j} = \frac{1}{2} \mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{X}^{i,j} \mathbf{D}_i^{-1} \quad (\text{E.2.6})$$

$M = 2$ ($i, j = 1, 2$) ve gürültü bileşeninin PDF'si $CN(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ olması durumunda (tez çalışmasında incelenen kompleks beyaz Gauss gürültü içindeki iki kompleks sönümlü sinüs durumu) Fisher bilgi matrisi yukarıda anlatıldığı biçimde (özel bir biçimde) yazılarak sinyal parametrelerinin kestirimine ilişkin çözümsel C-R sınırları aşağıdaki biçimde elde edilmiştir:

$$\boldsymbol{\theta} = [\alpha_1, \varphi_1, \beta_1, \omega_1, \alpha_2, \varphi_2, \beta_2, \omega_2]^T$$

$$\tau_1 = e^{(-\beta_1 + j\omega_1)t}, \quad \tau_2 = e^{(-\beta_2 + j\omega_2)t}$$

İfadelerin basitleştirilmesi için aşağıdaki tanımlamalar yapılır:

$$\Gamma_{1,r} = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=0}^{N-1} t^r e^{-2\beta_1 t}, \quad \Gamma_{2,r} = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=0}^{N-1} t^r e^{-2\beta_2 t},$$

$$C_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{t=0}^{N-1} t^r e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \cos((\omega_2 - \omega_1)t),$$

$$S_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{k=0}^{N-1} t^r e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \sin((\omega_2 - \omega_1)t),$$

$$\xi_{1,1,0} = \frac{1}{\sigma^2} N \Gamma_{1,0}, \quad \xi_{1,1,1} = \frac{1}{\sigma^2} N^2 \Gamma_{1,1}, \quad \xi_{1,1,2} = \frac{1}{\sigma^2} N^2 \Gamma_{1,1}, \quad \xi_{1,1,3} = \frac{1}{\sigma^2} N^3 \Gamma_{1,2}$$

$$\xi_{1,2,0} = \frac{1}{\sigma^2} N(C_0 + jS_0), \quad \xi_{1,2,1} = \frac{1}{\sigma^2} N(C_1 + jS_1), \quad \xi_{1,2,2} = \frac{1}{\sigma^2} N(C_1 + jS_1),$$

$$\xi_{1,2,3} = \frac{1}{\sigma^2} N(C_2 + jS_2)$$

$$\xi_{2,1,0} = \frac{1}{\sigma^2} N(C_0 - jS_0), \quad \xi_{2,1,1} = \frac{1}{\sigma^2} N(C_1 - jS_1), \quad \xi_{2,1,2} = \frac{1}{\sigma^2} N(C_1 - jS_1),$$

$$\xi_{2,1,3} = \frac{1}{\sigma^2} N(C_2 - jS_2)$$

$$\xi_{2,2,0} = \frac{1}{\sigma^2} N\Gamma_{2,0}, \quad \xi_{2,2,1} = \frac{1}{\sigma^2} N^2\Gamma_{2,1}, \quad \xi_{2,2,2} = \frac{1}{\sigma^2} N^2\Gamma_{2,1}, \quad \xi_{2,2,3} = \frac{1}{\sigma^2} N^3\Gamma_{2,2}$$

İfadeler \mathbf{Z} matrisinde yerine koyulduktan sonra \mathbf{X} matrisi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \text{Re}\{\mathbf{Z}\}$$

$$\mathbf{X} = \frac{N}{\sigma^2} \mathbf{D}_N \begin{bmatrix} \Gamma_{1,0} & 0 & \Gamma_{1,1} & 0 & C_0 & -S_0 & C_1 & -S_1 \\ 0 & \Gamma_{1,0} & 0 & \Gamma_{1,1} & S_0 & C_0 & S_1 & C_1 \\ \Gamma_{1,1} & 0 & \Gamma_{1,2} & 0 & C_1 & -S_1 & C_2 & -S_2 \\ 0 & \Gamma_{1,1} & 0 & \Gamma_{1,2} & S_1 & C_1 & S_2 & C_2 \\ C_0 & S_0 & C_1 & S_1 & \Gamma_{2,0} & 0 & \Gamma_{2,1} & 0 \\ -S_0 & C_0 & -S_1 & C_1 & 0 & \Gamma_{2,0} & 0 & \Gamma_{2,1} \\ C_1 & S_1 & C_2 & S_2 & \Gamma_{2,1} & 0 & \Gamma_{2,2} & 0 \\ -S_1 & C_1 & -S_2 & C_2 & 0 & \Gamma_{2,1} & 0 & \Gamma_{2,2} \end{bmatrix} \mathbf{D}_N$$

burada $\mathbf{D}_N = \text{diag}\{1,1,N,N,1,1,N,N\}$

$$\Gamma_{CS} = \begin{bmatrix} \Gamma_{1,0} & 0 & \Gamma_{1,1} & 0 & C_0 & -S_0 & C_1 & -S_1 \\ 0 & \Gamma_{1,0} & 0 & \Gamma_{1,1} & S_0 & C_0 & S_1 & C_1 \\ \Gamma_{1,1} & 0 & \Gamma_{1,2} & 0 & C_1 & -S_1 & C_2 & -S_2 \\ 0 & \Gamma_{1,1} & 0 & \Gamma_{1,2} & S_1 & C_1 & S_2 & C_2 \\ C_0 & S_0 & C_1 & S_1 & \Gamma_{2,0} & 0 & \Gamma_{2,1} & 0 \\ -S_0 & C_0 & -S_1 & C_1 & 0 & \Gamma_{2,0} & 0 & \Gamma_{2,1} \\ C_1 & S_1 & C_2 & S_2 & \Gamma_{2,1} & 0 & \Gamma_{2,2} & 0 \\ -S_1 & C_1 & -S_2 & C_2 & 0 & \Gamma_{2,1} & 0 & \Gamma_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \frac{\sigma^2}{N} \mathbf{D}_N^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_N^{-1}$$

\mathbf{X}^{-1} 'i elde etmek için $\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1}$ bulunur:

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{21} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{11} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{12} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{22}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{21})^{-1} & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & (\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{22} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{21} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{11}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{S}_0 & \mathbf{C} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{C} \mathbf{S}_1 & \mathbf{C} \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{S}_0^T & \mathbf{C} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{C} \mathbf{S}_1^T & \mathbf{C} \mathbf{S}_2^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{10} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{11} \\ \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{11} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{20} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{21} \\ \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{21} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = (\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{11} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{12} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{22}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C} \mathbf{S}_{21})$$

\mathbf{T} matrisi elemanları:

$$\mathbf{T}_{11} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{10} - \frac{1}{\Gamma_{2,0} \Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2} \left(\mathbf{C} \mathbf{S}_0 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{22} \mathbf{C} \mathbf{S}_0^T - \mathbf{C} \mathbf{S}_0 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{21} \mathbf{C} \mathbf{S}_1^T - \mathbf{C} \mathbf{S}_1 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{21} \mathbf{C} \mathbf{S}_1^T + \mathbf{C} \mathbf{S}_1 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{20} \mathbf{C} \mathbf{S}_1^T \right)$$

$$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{11} - \frac{1}{\Gamma_{2,0} \Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2} \left(\mathbf{C} \mathbf{S}_0 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{22} \mathbf{C} \mathbf{S}_1^T - \mathbf{C} \mathbf{S}_0 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{21} \mathbf{C} \mathbf{S}_2^T - \mathbf{C} \mathbf{S}_1 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{21} \mathbf{C} \mathbf{S}_1^T + \mathbf{C} \mathbf{S}_1 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{20} \mathbf{C} \mathbf{S}_2^T \right)$$

$$\mathbf{T}_{21} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{11} - \frac{1}{\Gamma_{2,0} \Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2} \left(\mathbf{C} \mathbf{S}_1 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{22} \mathbf{C} \mathbf{S}_0^T - \mathbf{C} \mathbf{S}_1 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{21} \mathbf{C} \mathbf{S}_1^T - \mathbf{C} \mathbf{S}_2 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{21} \mathbf{C} \mathbf{S}_0^T + \mathbf{C} \mathbf{S}_2 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\beta}_{20} \mathbf{C} \mathbf{S}_1^T \right)$$

$$\mathbf{T}_{22} = \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\beta}_{12} - \frac{1}{\Gamma_{2,0}\Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2} \begin{pmatrix} \mathbf{CS}_1\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\beta}_{22}\mathbf{CS}_1^T - \mathbf{CS}_1\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\beta}_{21}\mathbf{CS}_2^T - \mathbf{CS}_2\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\beta}_{21}\mathbf{CS}_1^T \\ + \mathbf{CS}_2\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\beta}_{20}\mathbf{CS}_2^T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{11} = \left(\Gamma_{1,0} - \frac{\Gamma_{2,2}(C_0^2 + S_0^2) - 2\Gamma_{2,1}(C_0C_1 + S_0S_1) + \Gamma_{2,0}(C_1^2 + S_1^2)}{\Gamma_{2,0}\Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \left(\Gamma_{1,0} - \frac{\Gamma_{2,2}(C_0^2 + S_0^2) - 2\Gamma_{2,1}(C_0C_1 + S_0S_1) + \Gamma_{2,0}(C_1^2 + S_1^2)}{\Gamma_{2,0}\Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2} \right)$$

$$\mathbf{T}_{11} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{21} = \mathbf{T}_{12}^T, \quad \mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ -b_{1,2} & b_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$b_{1,1} = \Gamma_{1,1} - \frac{\Gamma_{2,2}(C_1C_0 + S_1S_0) - \Gamma_{2,1}(C_1^2 + S_1^2 + C_2C_0 + S_2S_0) + \Gamma_{2,0}(C_1C_2 + S_1S_2)}{\Gamma_{2,0}\Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2}$$

$$b_{1,2} = -\frac{\Gamma_{2,2}(C_0S_1 - S_0C_1) - \Gamma_{2,1}(C_0S_2 - S_0C_2) + \Gamma_{2,0}(C_1S_2 - S_1C_2)}{\Gamma_{2,0}\Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2}$$

$$\mathbf{T}_{22} = \left(\Gamma_{1,2} - \frac{\Gamma_{2,2}(C_1^2 + S_1^2) - 2\Gamma_{2,1}(C_1C_2 + S_1S_2) + \Gamma_{2,0}(C_2^2 + S_2^2)}{\Gamma_{2,0}\Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \left(\Gamma_{1,2} - \frac{\Gamma_{2,2}(C_1^2 + S_1^2) - 2\Gamma_{2,1}(C_1C_2 + S_1S_2) + \Gamma_{2,0}(C_2^2 + S_2^2)}{\Gamma_{2,0}\Gamma_{2,2} - (\Gamma_{2,1})^2} \right)$$

$$\mathbf{T}_{22} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{\Gamma}\mathbf{CS}_{22} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{CS}_{21}\mathbf{\Gamma}\mathbf{CS}_{11}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{CS}_{12})$$

\mathbf{V} matrisi elemanları:

$$\mathbf{V}_{11} = \Gamma \boldsymbol{\beta}_{20} - \frac{1}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2} \begin{pmatrix} \mathbf{CS}_0^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{12} \mathbf{CS}_0 - \mathbf{CS}_0^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{11} \mathbf{CS}_1 - \mathbf{CS}_1^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{11} \mathbf{CS}_1 \\ + \mathbf{CS}_1^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{10} \mathbf{CS}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{12} = \Gamma \boldsymbol{\beta}_{21} - \frac{1}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2} \begin{pmatrix} \mathbf{CS}_0^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{12} \mathbf{CS}_1 - \mathbf{CS}_0^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{11} \mathbf{CS}_2 - \mathbf{CS}_1^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{11} \mathbf{CS}_1 \\ + \mathbf{CS}_1^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{10} \mathbf{CS}_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{21} = \Gamma \boldsymbol{\beta}_{21} - \frac{1}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2} \begin{pmatrix} \mathbf{CS}_1^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{12} \mathbf{CS}_0 - \mathbf{CS}_1^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{11} \mathbf{CS}_1 - \mathbf{CS}_2^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{11} \mathbf{CS}_0 \\ + \mathbf{CS}_2^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{10} \mathbf{CS}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{22} = \Gamma \boldsymbol{\beta}_{22} - \frac{1}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2} \begin{pmatrix} \mathbf{CS}_1^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{12} \mathbf{CS}_1 - \mathbf{CS}_1^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{11} \mathbf{CS}_2 - \mathbf{CS}_2^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{11} \mathbf{CS}_1 \\ + \mathbf{CS}_2^T \Gamma \boldsymbol{\beta}_{10} \mathbf{CS}_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{11} = \left(\Gamma_{2,0} - \frac{\Gamma_{1,2}(C_0^2 + S_0^2) - 2\Gamma_{1,1}(C_0C_1 + S_0S_1) + \Gamma_{1,0}(C_1^2 + S_1^2)}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \left(\Gamma_{2,0} - \frac{\Gamma_{1,2}(C_0^2 + S_0^2) - 2\Gamma_{1,1}(C_0C_1 + S_0S_1) + \Gamma_{1,0}(C_1^2 + S_1^2)}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2} \right)$$

$$\mathbf{V}_{11} = a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{21} = \mathbf{V}_{12}^T, \quad \mathbf{V}_{12} = \begin{bmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} \\ -b_{2,2} & b_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$b_{2,1} = \Gamma_{2,1} - \frac{\Gamma_{1,2}(C_1C_0 + S_1S_0) - \Gamma_{1,1}(C_1^2 + S_1^2 + C_2C_0 + S_2S_0) + \Gamma_{1,0}(C_1C_2 + S_1S_2)}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2}$$

$$b_{2,2} = -\frac{\Gamma_{1,2}(C_0S_1 - S_0C_1) - \Gamma_{1,1}(C_0S_2 - S_0C_2) + \Gamma_{1,0}(C_1S_2 - S_1C_2)}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2}$$

$$\mathbf{V}_{22} = \left(\Gamma_{2,2} - \frac{\Gamma_{1,2}(C_1^2 + S_1^2) - 2\Gamma_{1,1}(C_1C_2 + S_1S_2) + \Gamma_{1,0}(C_2^2 + S_2^2)}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \left(\Gamma_{2,2} - \frac{\Gamma_{1,2}(C_1^2 + S_1^2) - 2\Gamma_{1,1}(C_1C_2 + S_1S_2) + \Gamma_{1,0}(C_2^2 + S_2^2)}{\Gamma_{1,0}\Gamma_{1,2} - (\Gamma_{1,1})^2} \right)$$

$$\mathbf{V}_{22} = c_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma CS}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{T})^{-1} & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & (\mathbf{V})^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma CS}^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{T}^{-1})_{11} & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & (\mathbf{T}^{-1})_{22} \end{bmatrix} & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & \begin{bmatrix} (\mathbf{V}^{-1})_{11} & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & (\mathbf{V}^{-1})_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{T}^{-1})_{11} = \frac{c_1}{c_1a_1 - (b_{1,1}^2 + b_{1,2}^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{T}^{-1})_{22} = \frac{a_1}{c_1a_1 - (b_{1,1}^2 + b_{1,2}^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{V}^{-1})_{11} = \frac{c_2}{c_2a_2 - (b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{V}^{-1})_{22} = \frac{a_2}{c_2a_2 - (b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{\Gamma CS}^{-1}$ elde edildikten sonra \mathbf{X}^{-1} matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{X}^{-1} = \frac{\sigma^2}{N} \mathbf{D}_N^{-1} \left[\begin{array}{cc} (\mathbf{T}^{-1})_{11} & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & \frac{1}{N^2} (\mathbf{T}^{-1})_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \text{ilgilenilmeyen} & \\ & (\mathbf{V}^{-1})_{11} & \text{ilgilenilmeyen} \\ \text{ilgilenilmeyen} & & \frac{1}{N^2} (\mathbf{V}^{-1})_{22} \end{array} \right] \mathbf{D}_N^{-1}$$

Her bir parametreye ait C-R sınır ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$B_{\alpha_1} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{N} \frac{c_1}{c_1 a_1 - (b_{1,1}^2 + b_{1,2}^2)}$$

$$B_{\alpha_2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{N} \frac{c_2}{c_2 a_2 - (b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2)}$$

$$B_{\phi_1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\sigma^2}{N} \frac{c_1}{c_1 a_1 - (b_{1,1}^2 + b_{1,2}^2)}$$

$$B_{\phi_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\sigma^2}{N} \frac{c_2}{c_2 a_2 - (b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2)}$$

$$B_{\beta_1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\sigma^2}{N^3} \frac{a_1}{c_1 a_1 - (b_{1,1}^2 + b_{1,2}^2)}$$

$$B_{\beta_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\sigma^2}{N^3} \frac{a_2}{c_2 a_2 - (b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2)}$$

$$B_{\omega_1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\sigma^2}{N^3} \frac{a_1}{c_1 a_1 - (b_{1,1}^2 + b_{1,2}^2)}$$

$$B_{\omega_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\sigma^2}{N^3} \frac{a_2}{c_2 a_2 - (b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2)}$$

Birinci ve ikinci sinüsün bilinmeyen parametrelerinin kestirimine ilişkin çözümsel C-R sınır ifadeleri aralarındaki benzerlik ve sinyal gürültü oranı tanımı kullanılarak sınır ifadeleri aşağıdaki biçimde yazılabilir ($i = 1,2$):

$$B_{\alpha_i} = \frac{\sigma^2}{N} \frac{c_i}{2(a_i c_i - b_{i,1}^2 - b_{i,2}^2)} \quad (\text{E.2.7})$$

$$B_{\phi_i} = \frac{1}{\text{SNR}_i \cdot N} \frac{c_i}{2(a_i c_i - b_{i,1}^2 - b_{i,2}^2)} \quad (\text{E.2.8})$$

$$B_{\beta_i} = \frac{1}{\text{SNR}_i \cdot N^3} \frac{a_i}{2(a_i c_i - b_{i,1}^2 - b_{i,2}^2)} \quad (\text{E.2.9})$$

$$B_{\omega_i} = \frac{1}{\text{SNR}_i \cdot N^3} \frac{a_i}{2(a_i c_i - b_{i,1}^2 - b_{i,2}^2)} \quad (\text{E.2.10})$$

Yakın Frekans Durumu: Basit Kapalı-Biçim C-R Sınır İfadeleri

Bölüm 3.9.3'te verilen A1 varsayımı altında (E.2.7)-(E.2.10) ifadeleri aşağıdaki biçimde basitleştirilebilir:

$$B_{\alpha_i} = \frac{\sigma^2 (z_i^2 - 1)(1 + z_i^2 z_j^2 - 2z_i z_j \cos(\delta\omega)) \times \left\{ 4 - 3z_i^2 + z_i^4 - 7z_j^2 + 4z_j^4 + 19z_i^2 z_j^2 + 9z_i^4 z_j^4 - 5z_i^4 z_j^2 + z_i^6 z_j^2 - 11z_i^2 z_j^4 - 2z_i z_j (1 + z_i^2)(3 - z_i^2 - z_j^2 + 3z_i^2 z_j^2) \cos(\delta\omega) + 2z_i^2 z_j^2 (1 + z_i^2) \cos(2\delta\omega) \right\}}{2(z_i^2 + z_j^2 - 2z_i z_j \cos(\delta\omega))^3} \quad (\text{E.2.11})$$

$$B_{\omega_i} = \frac{1}{\text{SNR}_i} \frac{(z_i^2 - 1)^3 (1 + z_i^2 z_j^2 - 2z_i z_j \cos(\delta\omega))^2}{2z_i^2 (z_i^2 + z_j^2 - 2z_i z_j \cos(\delta\omega))^2} \quad (\text{E.2.12})$$

burada $z_i = e^{\beta_i}$ dir.

(E.2.11) ve (E.2.12) ifadelerindeki pay ve paydada yer alan terimler $\delta\omega = 0$ civarında Taylor serisine açılırsa (küçük $\delta\omega$ durumu):

$$B_{\alpha_i} = \frac{\sigma^2(p_{\alpha_i,0} + p_{\alpha_i,2}\delta\omega^2 + p_{\alpha_i,4}\delta\omega^4 + p_{\alpha_i,6}\delta\omega^6 + O(\delta\omega^8))}{q_{\alpha_i,0} + q_{\alpha_i,2}\delta\omega^2 + q_{\alpha_i,4}\delta\omega^4 + q_{\alpha_i,6}\delta\omega^6 + O(\delta\omega^8)}$$

$$B_{\omega_i} = \frac{p_{\omega_i,0} + p_{\omega_i,2}\delta\omega^2 + p_{\omega_i,4}\delta\omega^4 + O(\delta\omega^6)}{SNR_i(q_{\omega_i,0} + q_{\omega_i,2}\delta\omega^2 + q_{\omega_i,4}\delta\omega^4 + O(\delta\omega^6))}$$

Burada $p_{\alpha_i,m}, q_{\alpha_i,m}$ $m = 0,2,4,6$ ve $p_{\omega_i,n}, q_{\omega_i,n}$ $n = 0,2,4$ katsayıları sadece β_1 ve β_2 'ye bağlıdır.

Daha sonra Bölüm 3.9.3'te verilen A2 varsayımı altında bütün p, q katsayıları $\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 = 0$ civarında (düşük sönüm katsayısı durumu) Taylor serisine açılıp yeteri sayıda terimi ($p_{\alpha_i,m}, q_{\alpha_i,m}$ için sırasıyla $O(\beta_i^{1+k} \beta_j^l)$, $O(\beta_i^k \beta_j^l)$ dereceden veya daha küçük dereceden terimler $i \neq j = 1,2$ ve $k+l = 6-m$; $p_{\omega_i,n}, q_{\omega_i,n}$ için sırasıyla $O(\beta_i^{3+k} \beta_j^l)$, $O(\beta_i^k \beta_j^l)$ dereceden veya daha küçük dereceden terimler $i \neq j = 1,2$ ve $k+l = 4-n$) alındıktan sonra aşağıdaki basit kapalı-biçim ifadeler elde edilir.

$$B_{\alpha_i} = \frac{2\sigma^2 \beta_i (\delta\omega^2 + (\beta_i + \beta_j)^2)}{(\delta\omega^2 + (\beta_i - \beta_j)^2)^3} \{(\delta\omega^2 + (\beta_i + \beta_j)^2)^2 + 4\beta_i \beta_j (\delta\omega^2 + (\beta_i + \beta_j)^2) - 16\beta_i^2 \beta_j (\beta_i - \beta_j)\} \quad (\text{E.2.13})$$

$$B_{\omega_i} = \frac{4\beta_i^3 (\delta\omega^2 + (\beta_i + \beta_j)^2)^2}{SNR_i (\delta\omega^2 + (\beta_i - \beta_j)^2)^2} \quad (\text{E.2.14})$$

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, ihtiyaç duyduğum her anda yanımda olan tez danışmanım sayın Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU'na,

Yapmış oldukları katkılardan dolayı tez izleme komitesi üyeleri sayın Prof. Dr. Tuncay ERTAŞ ve sayın Prof. Dr. Osman KOPMAZ'a,

Doktora yeterlilik ve tez savunma sınavlarımda bulunarak değerli katkılar sağlayan sayın Prof. Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN'a,

Doktora tez savunma sınavı jüri üyesi sayın Yrd. Doç. Dr. Osman Hilmi KOÇAL'a,

NATO-A2 Yurt Dışı Araştırma Bursu kapsamında altı ay süre ile yurt dışı deneyimi kazanmamı sağlayan TÜBİTAK'a,

Doktora eğitimim süresince beni sevgisiyle destekleyen güzel eşim Tezcan COŞKUN YILMAZ'a,

Maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan değerli ailem F. Melahat YILMAZ, Sevinç COŞKUN, Sedat YILMAZ, Prof. Dr. Nejdet COŞKUN, Evren YILMAZ, Ecmel YILMAZ ve Mümin COŞKUN'a,

Birlikte çalışmaktan mutluluk duyduğum değerli iş arkadaşlarıma,

Sınav sonrasında beni büyük bir coşkuyla tebrik eden ve tezimin bir kopyasını sabırsızlıkla bekleyen güzel SELMA'ya,

Çok teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

Ersen YILMAZ 1978 yılında Kemah/Erzincan'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kemah'ta tamamladı. Uludağ Üniversitesinden 1998 yılında Elektronik Mühendisi, 2001 yılında Elektronik Yüksek Mühendisi ünvanlarını aldı. 2001 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde doktora eğitimine başladı.

Ersen YILMAZ 1999 Nisan ayından itibaren Uludağ Üniversitesi Elektronik Mühendisliği Bölümü ile birlikte ve 1 adet SCI, 1 adet SCI Expanded, 1 adet Ulusal Dergi, 6 adet Uluslararası Sempozyum, 6 adet Ulusal Sempozyum olmak üzere toplam 15 adet yayınlanmış özgün çalışmaya sahiptir.