T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİK YAPILARDA ÇİFTE ORAN

Atilla AKPINAR

Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA - 2007

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİK YAPILARDA ÇİFTE ORAN

Atilla AKPINAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ..... / ..... / 2007 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Süleyman ÇİFTÇİ (Danışman) Prof.Dr. Gökay KAYNAK Yard.Doç.Dr. Basri ÇELİK

Prof.Dr. Şükrü OLGUN Doç.Dr. Cengizhan MURATHAN

ÖZET

Bu doktora tezinde $\mathcal{A} := \mathbf{A}(\varepsilon) = \mathbf{A} + \mathbf{A}\varepsilon$ dual sayılar halkası ile koordinatlanan $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ Moufang-Klingenberg (MK) düzlem sınıfı incelenmiştir. $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın kolinasyonlar grubunun dörtgenler üzerinde geçişken olduğu önemli sonucu elde edilmiştir. Ayrıca, çifte oranın bazı özellikleri incelenerek "Bir doğru üzerinde ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan dört noktanın harmonik pozisyonda olması için gerek ve yeter şart bu noktaların harmonik olmasıdır." önermesi ispat edilmiştir.

2000 Matematik Konu Sınıflaması: 51C05, 51A35, 51A10, 17D05

Anahtar Kelimeler: Moufang-Klingenberg düzlemleri, lokal alterne halka, dual sayılar halkası, Cayley cebirleri, 4-geçişkenlik, projektif kolinasyon, çifte oran

ABSTRACT

In this doctoral thesis a certain class of Moufang-Klingenberg (MK) planes $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ coordinatized by the ring of dual numbers $\mathcal{A} := \mathbf{A}(\varepsilon) = \mathbf{A} + \mathbf{A}\varepsilon$ is investigated. The important result that the group of collineations of $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ is transitive on quadrangles is obtained. Besides, by being investigated some properties of cross-ratio it is proven that this lemma: "Any pairwise non-neighbour four points on a line are in harmonic position if and only if they are harmonic."

2000 Mathematical Subject Classification: 51C05, 51A35, 51A10, 17D05

Key Words: Moufang-Klingenberg planes, local alternative ring, ring of dual numbers, Cayley algebras, 4-transitivity, projective collineation, cross-ratio

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Matematikte, geometri ile cebir arasında çok yakın ilişkiler mevcuttur. Bu ilişkiler sayesinde konular hem daha netleşmekte, hem de problem çözümleri kolaylaşmaktadır.

Projektif geometride her düzleme karşılık koordinatlama halkası dediğimiz bir cebir sistemi bulunmaktadır ki düzlemin geometrik özellikleri ile halkanın cebir özellikleri arasındaki ilişkileri belirlemek büyük öneme haizdir.

Bu tezin amaçlarından biri (Blunck, 1992) de ele alınan $\mathcal{A} := \mathbf{A}(\varepsilon) = \mathbf{A} + \mathbf{A}\varepsilon$ ($\mathbf{A}$ bir alterne halka, $\varepsilon \notin \mathbf{A}$ ve $\varepsilon^2 = 0$) lokal alterne halkası yardımıyla koordinatlanan ve $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ ile gösterilen özel bir MK-düzlem sınıfi için yukarıda bahsedilen ilişkileri araştırmaktır. Bu sebeple $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın kolinasyon grubunun dörtgenler üzerinde geçişken olduğunun gösterilmesi esas hedef olarak belirlenmiştir. Bunu göstermek için (Çiftçi, 1988) deki yol, bazı zorunlu değişiklikler ve ilavelerle birlikte, takip edilmiştir. Bu tezin bir başka amacı da Dezarg ve Moufang düzlemlerinde çifte oranın bazı iyi bilinen özelliklerinin $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ da araştırılması ve bu sayede $\mathcal{A}$ nın cebirsel özellikleri ile $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın geometrik özellikleri arasında bazı ilişkiler elde etmektir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

1. bölümde projektif düzlemler ve PK-düzlemleri ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2. bölümde ise bu çalışmanın temel aldığı $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ özel MK-düzlem sınıfi hakkında ayrıntılı bilgiler verilmiştir. Ayrıca $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ da literatürde bulunmayan bazı dönüşümler tanımlanmış ve bunların $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın kolinasyonları olduğu yedi ayrı önerme halinde ispatlanmıştır. Sonra bu kolinasyonlar kullanılarak $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın kolinasyon grubunun dörtgenler üzerinde geçişken olduğu temel teoremine ulaşılmıştır.

Son bölümde ise projektif değişmez olarak büyük öneme sahip olan çifte oran kavramından bahsedilmiştir. Çifte oranın $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ da incelenmesi sonucu $\mathcal{A}$ nın cebirsel ve $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın geometrik özellikleri arasında bazı ilişkiler elde edilmiştir. Öncelikle, (Blunck, 1991c) de $g = [1, 0, 0]$ doğrusunun noktaları için verilen çifte oran tanımı $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın tamamına genişletilmiştir. Sonra, $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ daki doğru tiplerine göre bu doğrular üzerindeki noktaların çifte oranının hesaplanması için basit bir yol verilmiştir. Son olarak, geometrik bir özellik olarak harmonik pozisyonda olma ile cebirsel bir özelllik olan harmoniklik arasında ilişki kurulmuş ve $g = [1, 0, 0]$ doğrusu üzerinde ikişer ikişer komşu olmayan dört noktanın harmonik pozisyonda olması için gerek ve yeter şartın bu noktaların harmonik olması olduğu önemli sonucu bulunmuştur.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde projektif düzlemlerle ilgili temel kavramlar ve teoremler verilmektedir. Konunun daha iyi anlaşılması açısından iki alt başlık altında inceleme yapılacaktır. Burada verilen bilgiler için (Kaya, 1992), (Stevenson, 1972), (Hughes, 1973), (Keppens, 1988), (Çiftçi, 1984) ve (Çelik, 1995) çalışmaları esas alınmıştır.

1.1. Projektif Düzlemle İlgili Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 1.1.1: Aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen bir $U = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ lineer uzayına *projektif düzlem* denir.

PD1: Herhangi iki doğru kesişir.

PD2: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Genellikle; $\mathcal{N}$ noktalar kümesinin elemanları büyük harflerle, $\mathcal{D}$ doğrular kümesinin elemanları küçük harflerle gösterilir. A ve B noktalarından geçen doğru A∪B ile veya kısaca AB ile gösterilir. Benzer şekilde a ve b doğrularının arakesiti $a \cap b$ ile veya kısaca ab ile gösterilir.

P4 (Dezarg Aksiyomu): İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaş ise bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudaştır. Bu aksiyomu gerçekleyen bir projektif düzleme *Dezarg düzlemi*, aksiyomu gerçeklemeyen bir projektif düzleme de *Dezargsel olmayan projektif düzlem* denir.

Tanım 1.1.2: A, B, C, D bir projektif düzlemin herhangi üçü doğrudaş olmayan farklı dört noktası olsun. Bu noktaları ikişer ikişer birleştiren doğruların çizilmesi ve bulunan doğruların ikişer ikişer kesiştirilmesiyle elde edilen altı doğru ve yedi noktadan oluşan bir konfigürasyona *tamdörtgen* denir. Ayrıca, A, B, C, D noktalarına tamdörtgenin köşeleri; AB ve CD, AC ve BD, BC ve AD doğru ikililerine *tamdörtgenin karşılıklı kenarları*; karşılıklı kenarların kesişme noktalarına, yani $U = AB \cap CD$, $V = AC \cap BD$, $W = BC \cap AD$ noktalarına, *tamdörtgenin köşegen noktaları* denir.

Tanım 1.1.3: İçindeki bütün tamdörtgenlerin köşegen noktaları doğrudaş olan bir projektif düzleme *Fano düzlemi* denir.

P6 (Fano Aksiyomu): Kapsanan her bir tamdörtgenin köşegen noktaları doğrudaş değildir.

Tanım 1.1.4: A, B, C, D Fano Aksiyomunu gerçekleyen bir projektif düzlemde doğrudaş dört nokta olsun. Eğer A ve B herhangi bir tamdörtgenin iki köşegen noktası ise ve C ile D de tamdörtgenin geri kalan karşılıklı iki kenarı üzerinde bulunuyorsa A, B, C, D sıralı nokta dörtlüsüne *harmonik pozisyondaki noktalar* (*harmonik nokta dörtlüsü* ya da *harmonik noktalar*) denir ve genel olarak bu durum H(AB, CD) ile gösterilir.

Bu tanım; A, B, C ve D noktalarının farklı olmasını gerektirir. Çünkü, örneğin $C = D$ olsa C noktası da tamdörtgenin bir köşegen noktası olurdu. Bu ise Fano aksiyomunun sağlanmaması demektir. Diğer noktalardan herhangi ikisinin eşit olması da tamdörtgen tanımı gereğince mümkün değildir. Karşıt olarak A, B, C, D noktaları farklı alındığında tanımlayıcı tamdörtgenin köşegen noktaları doğrudaş olamazlar, yani Fano aksiyomu geçerli olur. Böylece Fano aksiyomu sağlanmadıkça harmonik nokta tanımının anlamlı olamayacağı sonucu çıkar. Bu harmoniklik tanımına Fano aksiyomunun dahil edilmesinin nedenidir.

Tanım 1.1.5: c ve d projektif düzlemde herhangi iki doğru ve M de $M \notin c$ ve $M \notin d$ olacak biçimde harhangi bir nokta olsun. Her $X \in c$ noktası için $\psi(X) = MX \cap d$ olacak biçimde belirlenen ψ dönüşümüne c doğrusunu d doğrusuna dönüştüren M *merkezli bir perspektiflik* denir. Bu perspektiflik $\psi : d \overset{M}{\overline{\overline{\wedge}}} c$ ya da $\psi_M\,(c, d)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.6: Bir projektif düzlemde sonlu sayıda aynı tip perspektifliklerin bileşkesine *izdüşel dönüşüm* ya da kısaca *izdüşellik* (projectivity) denir.

Tanım 1.1.7: IP bir pojektif düzlem, M ve e de bu düzlemin sırasıyla belli bir nokta ve belli bir doğrusu olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeye (M, e)–*Dezarg Teoremi* ve bu teoremi gerçekleyen IP projektif düzlemine (M, e)–*Dezargsel düzlem* denir: IP düzleminde M noktasından perspektif herhangi $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ üçgenleri için eğer $P = AB \cap A'B'$ ve $Q = AC \cap A'C'$ noktaları e doğrusu üzerinde ise $R = BC \cap B'C'$noktası da e üzerindedir.

Tanım 1.1.8: IP ve IP$'$ herhangi iki projektif düzlem olsun. IP den IP$'$ ye IP nin noktalarını IP$'$ nün noktalarına, IP nin doğrularını IP$'$ nün doğrularına dönüştüren ve üzerinde bulunma bağıntısını koruyan birebir ve örten bir fonksiyon varsa bu projektif düzlemler *izomorftur* denir, bu fonksiyona da bir *izomorfizm* denir. Bir projektif düzlemi kendisine dönüştüren izomorfizme *kolinasyon* veya *otomorfizm* denir.

Teorem 1.1.9:

i) Bir projektif düzlemin bütün kolinasyonlarının kümesi fonksiyon bileşke işlemine göre bir grup oluşturur (Bu grup $\mathcal{G}(IP)$ ile gösterilir).

ii) d bir projektif düzlemde herhangi bir doğru olsun. d yi kendisine dönüştüren izdüşel dönüşümlerin kümesi fonksiyon bileşke işlemi altında bir grup oluşturur (bu grup $\mathcal{G}_i(d)$ ile gösterilir).

Tanım 1.1.10: IP projektif düzleminin $\mathcal{G}(IP)$ kolinasyonlar grubunun peryodu 2 olan birimden farklı her elemanına bir *involusyonlu kolinasyon* ya da kısaca *involusyon* denir.

Tanım 1.1.11: f, bir IP projektif düzleminin bir kolinasyonu olsun. IP nin bir M noktasından geçen her x doğrusu için $f(x) = x$ ise M ye f nin bir *merkezi* denir. Benzer olarak IP nin bir e doğrusu üzerindeki her X noktası için $f(X) = X$ ise e ye f nin bir *ekseni* denir. Eğer f nin bir M merkezi ve bir e ekseni varsa f ye IP nin bir *(M, e)-merkezsel kolinasyonu* ya da *(M, e)–perspektifliği* denir. Ayrıca eğer $M \in e$ ise f ye öteleme (translation ya da elation), $M \notin e$ ise f ye *homoloji* denir.

Gösterim: IP nin (M, e)-*merkezsel kolinasyonlar grubu* $\mathcal{G}(M, e)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.12: IP bir projektif düzlem, M ve e de bu düzlemin sırasıyla belli bir nokta ve belli bir doğrusu olsun. IP de aşağıdaki özelliklerde verilen herhangi X ve Y nokta çifti için $f(X) = Y$ olacak biçimde bir $f \in \mathcal{G}(M, e)$-merkezsel kolinasyonu varsa IP düzlemi (M, e)–*geçişkendir* denir:

i) $X \neq M$ ve $Y \neq M$,

ii) $X \notin e$ ve $Y \notin e$,

iii) M, X, Y doğrudaş

Küçük Dezarg Teoremi: IP bir projektif düzlem olsun. $X \in x$ özelliğindeki her X noktası ile her x doğrusu ve X den perspektif olan herhangi $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ üçgenleri için $AB \cap A'B'$ ve $AC \cap A'C'$ noktaları x doğrusu üzerinde ise $BC \cap B'C'$noktası da x üzerindedir.

Tanım 1.1.13: Küçük Dezarg Teoremini gerçekleyen bir projektif düzleme *küçük dezargsel düzlem* ya da *Moufang düzlemi* denir.

Teorem 1.1.14: Herhangi bir IP projektif düzlemi için aşağıdaki önermeler eş anlamlıdır:

i) IP düzlemi bir Moufang düzlemidir.

ii) $M \in e$ olmak üzere her M noktası ve her e doğrusu için IP düzlemi (M, e)–geçişkendir.

Tanım 1.1.15: IP bir projektif düzlem, e de bu düzlemin bir doğrusu olsun. Eğer IP her $X \in e$ noktası için (X, e)-geçişken ise IP ye (e, e)-*geçişken* denir.

Teorem 1.1.16: Herhangi bir IP projektif düzleminin Moufang düzlemi olması için gerek ve yeter şart d ve e gibi farklı iki doğru için (d, d)–geçişken ve (e, e)–geçişken olmasıdır.

1.2. Düzlemsel Sexternary Halkalar ve Projektif Klingenberg Düzlemleri

Bu bölümde düzlemsel sexternary halka olarak isimlendirilen bir cebirsel yapı yardımıyla genel bir projektif Klingenberg düzleminin nasıl koordinatlandığı (Keppens, 1988) den özetlenecektir. Bu koordinatlama projektif düzlemler için verilen koordinatlamanın bir genellemesidir. Daha fazla bilgi için ayrıca (Bacon, 1976) ya bakılabilir.

Tanım 1.2.1: $\mathbf{N}$ noktalar kümesini, $\mathbf{D}$ doğrular kümesini, $\in$ üzerinde olma bağıntısını ve $\sim$ $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{D}$ üzerinde bir denklik (*komşuluk*) bağıntısını göstermek üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathbf{M} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \in, \sim)$ yapısına bir *projektif Klingenberg düzlemi* denir ve kısaca *PK* ile gösterilir.

(PK1) Komşu olmayan herhangi iki $A, B \in \mathbf{N}$ noktasını birleştiren tam olarak bir $d \in \mathbf{D}$ doğrusu vardır,

(PK2) Komşu olmayan herhangi iki $c, d \in \mathbf{D}$ doğrusunun tam olarak bir $N \in \mathbf{N}$ arakesit noktası vardır,

(PK3) $\mathbf{M}$ den bir $\mathbf{M}^* = (\mathbf{N}^*, \mathbf{D}^*, \in)$ projektif düzlemi üzerine her $A, B \in \mathbf{N}$ ve $c, d \in \mathbf{D}$ için

$$\Psi(A) = \Psi(B) \Leftrightarrow A \sim B \text{ ve } \Psi(c) = \Psi(d) \iff c \sim d$$

şartlarını sağlayacak biçimde bir Ψ epimorfizmi vardır.

Tanım 1.2.1 gereği bir PK-düzleminin aynı komşulukta olan herhangi iki noktasından hiç doğru geçmeyebilir veya bir tek doğru geçebilir veyahut da pek çok doğru geçebilir.

Tanım 1.2.2: Eğer $A \sim B$ ve $B \in d$ olacak şekilde bir $B \in \mathbf{N}$ noktası varsa $A \in \mathbf{N}$ noktası $d \in \mathbf{D}$ *doğrusunun yakınındadır* denir ve bu durum $A \sim d$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.3: PK-düzleminde bir A noktasının bir d doğrusuna yakın yani $A \sim d$ olması için gerek ve yeter şart bazı $c \sim d$ doğruları için $A \in c$ olmasıdır (Çelik, 1995).

Şimdi projektif düzlemlerde bilinen bazı kavramların PK-düzlemlerindeki karşılıkları özet olarak verilecektir:

Tanım 1.2.4: $h, k \in \mathbf{D}$, $C \in \mathbf{N}$, $C \nsim h, k$ olsun. Bu takdirde h üzerindeki noktalardan k üzerindeki noktalara tanımlı, 1.1 ve örten bir $\sigma : \begin{cases} h \to k \\ X \to XC \cap k \end{cases}$ dönüşümüne h dan k ya C merkezli bir *perspektiflik* denir ve $\sigma_C\left(k, h\right)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.5: $\mathbf{M}$ nin kendisi üzerine 1-1, örten, komşuluk bağıntısını ve üzerinde olmayı koruyan bir dönüşümüne $\mathbf{M}$ nin bir *kolinasyonu* denir.

Bir kolinasyonun *merkez* ve *ekseni* projektif düzlemlerdeki gibi tanımlanır.

Tanım 1.2.6: "Her A, $B \in \mathbf{N}$ için $A \nsim M$, $B \nsim M$, $A \nsim e$, $B \nsim e$ özelliğindeki M noktası için A, B, M doğrudaş ise A yı B ye dönüştüren bir (M, e)-merkezsel kolinasyonu vardır." şartı sağlanıyorsa $\mathbf{M}$ (M, e)-*geçişkendir* denir.

Bir $\mathbf{M}$ PK-düzlemi için aşağıda verilen koordinatlama bazı küçük düzenlemelerle (Keppens, 1988) den alınmıştır.

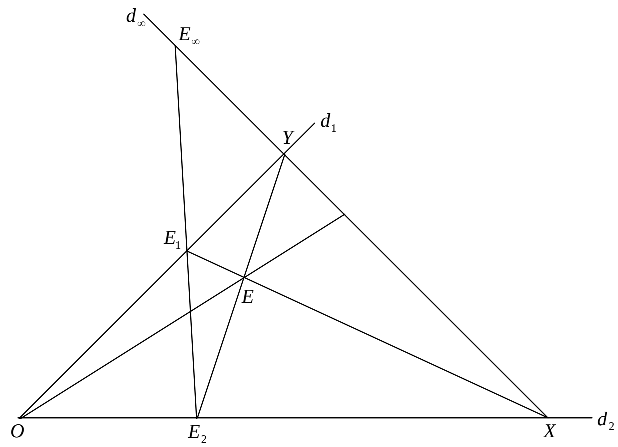
Tanım 1.2.7: $\mathbf{M} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \in, \sim)$ bir PK-düzlem olsun ve (O, X, Y, E) $\mathbf{M}$ nin bir bazı (yani $(\Psi(O), \Psi(X), \Psi(Y), \Psi(E)$ kanonik görüntüsü $\mathbf{M}^*$ projektif düzleminde bir tamdörtgen) olsun. $OY := d_1$, $OX := d_2$, $XY := d_\infty$, $XE \cap d_1 := E_1$, $YE \cap d_2 := E_2$, $E_1E_2 \cap d_\infty := E_\infty$ biçiminde gösterilsin (Bkz. Şekil 1.2.1).

$$\mathbf{H}_1 \ : \ = \{N \in \mathbf{N} \ | \ N \in d_1, N \nsim Y\}$$

$$\mathbf{I}_1 \ : \ = \{N \in \mathbf{H}_1 \ | \ N \sim O\}$$

ve $\mathbf{H}_1$ kümesinin kardinalitesi k olsun (burada k sonsuz olabilir). Özel olarak 0 ve 1 i bulunduran ama ∞ sembolünü herhangi bir eleman olarak kapsamayan kardinalitesi k olan bir R kümesi alınsın. 1:1 ve örten bir $\theta : \mathbf{H}_1 \to R$ fonksiyonu tanımlansın ve özel olarak $\theta\left(O\right) = 0$ ve $\theta\left(E_1\right) = 1$ olsun. Ayrıca $\theta\left(\mathbf{I}_1\right) = R_0$ denilsin (Burada $R_0 \subset R$ olduğu açıktır.). Böylece $\mathbf{H}_1$ kümesinin elemanları ile R kümesi arasında θ yardımıyla bir eşleme kurulmuştur. Bu eşleme yardımıyla $\mathbf{M}$ nin nokta ve doğruları koordinatlacaktır.

M nin noktalarının koordinatlanması:



Şekil 1.2.1

i) $A \in d_1 - [Y]$ (Burada $[Y]$ ile Y nin komşuğundaki noktaların kümesini gösterilmektedir.) ve $\theta(A) = x$ ise $A = (0, x)$ alınsın.

ii) $B \in d_2 - [X]$ olsun. $E_\infty \nsim B$ olduğundan $E_\infty B$ doğrusu ve dolayısıyla $B' = E_\infty B \cap d_1$ noktası iyi tanımlıdır. $B \nsim X$ olduğundan $B' \nsim Y$ dir. $B' = (0, x)$ koordinatına sahip ise $B = (x, 0)$ alınsın.

iii) $C \nsim d_\infty$ ise bu takdirde XC ve YC doğruları ile $C' = XC \cap d_1$, $C'' = YC \cap d_2$ noktaları iyi tanımlıdır. $C \nsim d_\infty$ olduğundan $C' \nsim Y$ ve $C'' \nsim X$ dir. $C' = (0, y)$, $C'' = (x, 0)$ ise $C = (x, y)$ alınsın.

iv) $S \in d_\infty \cap [Y]$ için $S \nsim E_1$ olduğundan SE_1 doğrusu ve dolayısıyla $S' = SE_1 \cap d_2$ noktası iyi tanımlıdır. $S \sim Y$ olduğundan $SE_1 \sim d_1$ ve $S' \sim O$ dur. $S' = (w, 0)$ iken $S = (\infty_w)_0$ olarak alınsın. Burada $w \in R_0$ dır.

v) $T \in d_1 \cap [Y]$ için TE_2 doğrusu ve $T' = TE_2 \cap d_\infty$ noktası iyi tanımlıdır. $T \sim Y$ olduğundan $T' \sim Y$ dir. $T' = (\infty_z)_0$ iken $T = (\infty_0)_z$ alınsın. Burada $z \in R_0$ dır.

vi) $U \in [Y]$ iken OU ve XU doğruları ile $U' = OU \cap d_\infty$ ve $U'' = XU \cap d_1$ noktaları iyi tanımlıdır. $U \sim Y$ olduğundan $U' \sim Y$ ve $U'' \sim Y$ dir. $U' = (\infty_w)_0$ ve $U'' = (\infty_0)_z$ ise $U = (\infty_w)_z$ alınsın. Burada $w, z \in R_0$ dır.

vii) $F \in d_\infty - [Y]$ olsun. Bu takdirde FE_2 doğrusu ve $F' = FE_2 \cap d_1$ noktası iyi tanımlıdır. $F \nsim Y$ olduğundan $F' \nsim Y$ dir. $F' = (0, y)$ ise $F = (y)_0$ alınsın.

viii) $G \in d_2 \cap [X]$ iken GE_∞ doğrusu ve $G' = GE_\infty \cap d_1$ noktası iyi tanımlıdır. $G \sim X$ olduğundan $G' \sim Y$ dir. $G' = (\infty_0)_z$ ise $G = (0)_z$ alınsın.

ix) $H \sim d_\infty$ ve $H \nsim Y$ olsun. Bu takdirde OH ve YH doğruları ile $H' = OH \cap d_\infty$ ve $H'' = YH \cap d_2$ noktaları iyi tanımlıdır. $H \sim d_\infty$ olduğundan $H'' \sim X$ dir ve $H \nsim Y$ olduğundan $H' \nsim Y$ dir. $H' = (y)_0$ ve $H'' = (0)_z$ ise $H = (y)_z$ alınsın. Burada $z \in R_0$ dır.

Bu koordinatlamaya göre; $O = (0,0)$, $X = (0)_0$, $Y = (\infty_0)_0$, $E_1 = (0,1)$, $E_2 = (1,0)$, $E_\infty = (1)_0$ ve $E = (1,1)$ dir.

M nin doğrularının koordinatlanması:

i) $Y \nsim d$ özelliğindeki bir d doğrusu ise $A = d \cap d_\infty$ ve $B = d \cap d_1$ noktaları iyi tanımlıdır. $Y \nsim d$ olduğundan $A, B \nsim Y$ dir. $A = (m)_0$ ve $B = (0,k)$ ise $d = [m,k]$ alınsın.

ii) $Y \sim d$ ve $d \nsim d_\infty$ özelliğinde bir d doğrusu ise $A = d \cap d_\infty$ ve $B = d \cap d_2$ noktaları iyi tanımlıdır. $Y \sim d$ ve $d \nsim d_\infty$ olduğundan sırasıyla $A \sim Y$ ve $B \nsim X$ dir. $A = (\infty_n)_0$ ve $B = (p,0)$ ise $d = [p]_n$ alınsın. Burada $n \in R_0$ dır.

iii) $d \sim d_\infty$ özelliğindeki bir d doğrusu ise $A = d \cap d_1$ ve $B = d \cap d_2$ noktaları iyi tanımlıdır. $A = (\infty_0)_n$ ve $B = (0)_q$ ise $d = [\infty_q]_n$ alınsın. Burada $q, n \in R_0$ dır.

Bu koordinatlamaya göre $d_1 = [0]_0$, $d_2 = [0,0]$, $d_\infty = [\infty_0]_0$, $XE = [0,1]$, $YE = [1]_0$, $E_1E_2 = [1,1]$, $E_\infty O = [1,0]$ dır.

Tanım 1.2.8: Boş olmayan bir R kümesi üzerinde tanımlı üçlü işlemler T_1, T_2, ... , T_n olmak üzere $(R, T_1, T_2, \dots, T_n)$ $(n+1)$-lisine *n-üçlü yapı* denir.

Tanım 1.2.9: $0, 1 \in R$ ve $0 \neq 1$ olmak üzere bir $(R, T_1, T_2, \dots, T_n)$ n-üçlü yapısında aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa yapıya *n-üçlü halka* denir:

TR1) T_1, $R \times R \times R$ üzerinde iyi tanımlıdır,

TR2) Her $a, b, c \in R$ için $T_1(a,0,c) = T_1(0,b,c) = c$ dir,

TR3) Her $a \in R$ için $T_1(a,1,0) = T_1(1,a,0) = a$ dır,

TR4) Verilen her $a, b, c \in R$ için $T_1(a,b,x) = c$ olacak biçimde bir tek $x \in R$ vardır.

n-üçlü halkasında 0 ve 1 elemanları tek türlü bellidir.

M Tanım 1.2.7 deki gibi bir R kümesi yardımıyla koordinatlanmış bir PK-düzlemi olsun. **M** deki üzerinde olma bağıntısı kullanılarak R üzerinde altı üçlü işlem aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$
\begin{aligned}
T_1(x,y,z) &= k \Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in R\times R\times R \text{ için } (y,z)\in [x,k] \\
T_2(x,y,z) &= k \Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in R_0\times R\times R \text{ için } (z,y)\in [k]_x \\
T_3(x,y,z) &= k \Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in R\times R_0\times R \text{ için } (z)_y\in [k,x] \\
T_4(x,y,z) &= k \Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in R_0\times R\times R_0 \text{ için } (y)_z\in [\infty_k]_x \\
T_5(x,y,z) &= k \Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in R\times R_0\times R_0 \text{ için } (\infty_z)_y\in [x]_k \\
T_6(x,y,z) &= k \Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in R_0\times R_0\times R_0 \text{ için } (\infty_y)_z\in [\infty_x]_k
\end{aligned}
$$

T_1 iyi tanımlıdır. Çünkü $x,y,z\in R$ için (y,z) ile $(x)_0$ noktalarından geçen doğru d_1 e komşu değildir ve dolayısıyla d_1 ile arakesit noktası bir tektir. Bu arakesit noktası, $(\infty_0)_0$ a komşu olmadığından $(0,k)$ koordinatına sahiptir, yani k tek türlü belirlidir. Aynı zamanda $T_1(R\times R\times R)\subseteq R$ dir.

T_2 iyi tanımlıdır. Çünkü $x\in R_0$, $y,z\in R$ için (z,y) ile $(\infty_x)_0$ noktalarından geçen doğru d_2 ye komşu değildir ve dolayısıyla d_2 ile arakesit noktası bir tektir. Bu arakesit noktası $(0)_0$ a komşu olmadığından $(k,0)$ koordinata sahiptir. O halde k tek türlü belirlidir ve $T_2(R_0\times R\times R)\subseteq R$ dir.

T_3 iyi tanımlıdır. Çünkü $y\in R_0$, $x,z\in R$ için $(z)_y$ ile $(0,x)$ noktalarından geçen doğru ile d_∞ un arakesit noktası bir tek olarak belirlidir. Bu arakesit noktası $(\infty_0)_0$ a komşu olmadığından $(k)_0$ koordinatına sahiptir. Bundan dolayı k tek türlü belirlidir ve $T_3(R\times R_0\times R)\subseteq R$ dir.

T_4 iyi tanımlıdır. Çünkü $x,z\in R_0$, $y\in R$ için $(y)_z$ ile $(\infty_0)_x$ noktalarından geçen doğru ile d_2 nin arakesit noktası tek olarak belirli olup $(0)_0$ ile komşu olduğundan $(0)_k$ koordinatına sahiptir. Bu yüzden k bir tek belirli olup $T_4(R_0\times R\times R_0)\subseteq R_0$ dır.

T_5 iyi tanımlıdır. Çünkü $y,z\in R_0$, $x\in R$ için $(\infty_z)_y$ ile $(x,0)$ noktalarından geçen doğru d_∞ a komşu değildir. Bu yüzden d_∞ ile bu doğrunun arakesit noktası bir tek olarak belirlidir. Bu arakesit noktası $(\infty_0)_0$ ile komşu olduğundan $(\infty_k)_0$ koordinata sahiptir. Bundan dolayı k tek türlü belirlir ve $T_5(R\times R_0\times R_0)\subseteq R_0$ dır.

T_6 iyi tanımlıdır. $x,y,z\in R_0$ için $(\infty_y)_z$ ile $(0)_x$ noktalarından geçen doğru ile d_1 in arakesit noktası bir tektir ve bu arakesit noktası Y ile komşu olduğundan $(\infty_0)_k$ koordinata sahiptir. Bu yüzden k bir tek olarak belirlidir ve $T_6(R_0 \times R_0 \times R_0) \subseteq R_0$ dır.

Sonuç olarak $(R, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ 6-üçlü yapısıdır. Bundan sonra bu yapı için özel olarak *sexternary yapı* ismi kullanılacaktır. Aşağıdaki teorem, bir PK-düzlemi verildiğinde ona karşılık gelen $(R, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ sexternary yapısının hangi özelliklere sahip olduğunu ifade eder.

Teorem 1.2.10: $\mathbf{M}$ bir PK-düzlem ve $\mathbf{M}$ ye karşılık gelen sexternary yapı

$$(R, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(PSR0) T_1, $R \times R \times R$ üzerinde iyi tanımlıdır.

(PSR 1) R de aşağıdaki özelliklere sahip bir $\cong$ denklik bağıntısı vardır:

(i) $0 \ncong 1$,

(ii) $\cong$, T_1 ile uyumludur; yani $a \cong a'$, $b \cong b'$ ve $c \cong c'$ ise bu takdirde $T_1(a, b, c) \cong T_1(a', b', c')$ dür,

(iii) Şayet $T_1(a, b, x) \cong T_1(a, b, y)$ ise bu takdirde $x \cong y$ dir,

(iv) Şayet $a \ncong c$ iken $T_1(x, a, b) \cong T_1(x, c, d)$ ve $T_1(y, a, b) \cong T_1(y, c, d)$ ise bu takdirde $x \cong y$ dir,

(v) Şayet $a \ncong c$ iken $T_1(a, x, y) \cong T_1(a, x', y')$ ve $T_1(c, x, y) \cong T_1(c, x', y')$ ise bu takdirde $x \cong x'$ ve $y \cong y'$ dür,

$R_0 = \{x \mid x \in R \text{ ve } x \cong 0\}$ olsun.

(PSR 2) T_2, T_3, T_4, T_5 ve T_6 işlemlerinin tanım kümeleri sırasıyla $R_0 \times R \times R$, $R \times R_0 \times R$, $R_0 \times R \times R_0$, $R \times R_0 \times R_0$ ve $R_0 \times R_0 \times R_0$ olup $T_4(R_0 \times R \times R_0) \subseteq R_0$, $T_5(R \times R_0 \times R_0) \subseteq R_0$ ve $T_6(R_0 \times R_0 \times R_0) \subseteq R_0$ dır.

(PSR 3) $\forall a, b, c \in R$ için $T_1(a, 0, c) = T_1(0, b, c) = c$ dir.

(PSR 4) $\forall b, c \in R$ için $T_2(0, b, c) = c$ dir.

(PSR5) $\forall a \in R$ için $T_1(1, a, 0) = T_1(a, 1, 0) = a$ dir.

(PSR 6) Şayet $T_2(a, b, c) = k$ ya da $T_3(a, b, c) = k$ ise bu takdirde $k \cong c$ dir.

(PSR7) $a \ncong c$ olmak üzere $\forall a, b, c, d \in R$ için $T_1(x, a, b) = T_1(x, c, d)$ denkleminin R de bir tek çözümü vardır.

(PSR 8) $a \ncong c$ ve $b \cong d$ olmak üzere $\forall a, b, c, d \in R$ için $T_2(x, a, b) = T_2(x, c, d)$

denkleminin R_0 da bir tek çözümü vardır.

(PSR 9) $a \ncong c$ olmak üzere $\forall a, c \in R$ ve $\forall b, d \in R_0$ için $T_4(x, a, b) = T_4(x, c, d)$ denkleminin R_0 da bir tek çözümü vardır.

(PSR 10) $\forall a, b, d \in R$ ve $\forall c \in R_0$ için $\left.\begin{array}{l} T_1(x, a, b) = y \\ T_3(y, c, d) = x \end{array}\right\}$ sisteminin bir tek çözümü vardır ve $R \times R$ dedir.

(PSR 11) $\forall a, b \in R$ ve $\forall c, d \in R_0$ için $\left.\begin{array}{l} T_2(x, a, b) = y \\ T_5(y, c, d) = x \end{array}\right\}$ sisteminin bir tek çözümü vardır ve $R_0 \times R$ dedir.

(PSR 12) $\forall a \in R$ ve $\forall b, c, d \in R_0$ için $\left.\begin{array}{l} T_4(x, a, b) = y \\ T_6(y, c, d) = x \end{array}\right\}$ sisteminin bir tek çözümü vardır ve $R_0 \times R_0$ dadır.

(PSR 13) $a \ncong c$ olmak üzere $\forall a, b, c, d \in R$ için $\left.\begin{array}{l} T_1(a, x, y) = b \\ T_1(c, x, y) = d \end{array}\right\}$ sisteminin bir tek çözümü vardır ve $R \times R$ dedir.

(PSR 14) $a \ncong c$ ve $b \cong d$ olmak üzere $\forall a, b, c, d \in R$ için $\left.\begin{array}{l} T_3(a, x, y) = b \\ T_3(c, x, y) = d \end{array}\right\}$ sisteminin bir tek çözümü vardır ve $R_0 \times R$ dedir.

(PSR 15) $a \ncong c$ olmak üzere $\forall a, c \in R$ ve $\forall b, d \in R_0$ için $\left.\begin{array}{l} T_5(a, x, y) = b \\ T_5(c, x, y) = d \end{array}\right\}$ sisteminin bir tek çözümü vardır ve $R_0 \times R_0$ dadır.

(PSR 16) $\forall a, b, d \in R$ ve $\forall c \in R_0$ için $\left.\begin{array}{l} T_1(a, x, y) = b \\ T_2(c, y, x) = d \end{array}\right\}$ sisteminin bir tek çözümü vardır ve $R \times R$ dedir.

(PSR 17) $\forall a, b \in R$ ve $\forall c, d \in R_0$ için $\left.\begin{array}{l} T_3(a, x, y) = b \\ T_4(c, y, x) = d \end{array}\right\}$ sisteminin bir tek çözümü vardır ve $R_0 \times R$ dedir.

(PSR 18) $\forall a \in R$ ve $\forall b, c, d \in R_0$ için $\left.\begin{array}{l} T_5(a, x, y) = b \\ T_6(c, y, x) = d \end{array}\right\}$ sisteminin bir tek çözümü vardır ve $R_0 \times R_0$ dadır.

Tanım 1.2.11: $0, 1 \in R$ olmak üzere yukarıdaki teoremde ifade edilen (PSR 0)-(PSR 18) özelliklerine sahip bir $(R, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ sexternary yapısına bir *düzlemsel sexternary halka* (PSR) denir.

Aşağıdaki teorem, bir PSR nin bir PK-düzlemin temsilinde kullanılabileceğini göstermektedir.

Teorem 1.2.12: $(R, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ bir PSR olsun. Komşuluk bağıntısına sahip bir $\mathbf{M} = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \in, \sim)$ üzerinde olma yapısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

N (noktalar) kümesi; $x,\ y \in R$ olmak üzere (x, y) ikililerinden, $x \in R$ ve $y \in R_0$

olmak üzere $(x)_y$ biçimindeki elemanlardan ve $x, y \in R_0$ olmak üzere $(\infty_x)_y$ biçimindeki elemanlardan oluşmaktadır. $\mathbf{D}$ (doğrular) kümesi; $m, k \in R$ olmak üzere $[m, k]$ biçimindeki elemanlar, $m \in R_0$ ve $k \in R$ olmak üzere $[k]_m$ biçimindeki elemanlar ve $m, k \in R_0$ olmak üzere $[\infty_k]_m$ biçimindeki elemanlardan meydana gelmektedir.

$\in \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{D}$ üzerinde olma bağıntısı

$$\begin{aligned}
(x, y) &\in [m, k] \Leftrightarrow T_1(m, x, y) = k \\
(x, y) &\in [k]_m \Leftrightarrow T_2(m, y, x) = k \\
(x, y) &\notin [\infty_k]_m \\
(x)_y &\in [m, k] \Leftrightarrow T_3(k, y, x) = m \\
(x)_y &\notin [k]_m \\
(x)_y &\in [\infty_k]_m \Leftrightarrow T_4(m, x, y) = k \\
(\infty_x)_y &\notin [m, k] \\
(\infty_x)_y &\in [k]_m \Leftrightarrow T_5(k, y, x) = m \\
(\infty_x)_y &\in [\infty_k]_m \Leftrightarrow T_6(k, x, y) = m
\end{aligned}$$

biçiminde, $\sim$ komşuluk bağıntısı noktalar için;

$$\begin{aligned}
(x, y) &\sim (x', y') \Leftrightarrow x \cong x' \text{ ve } y \cong y' \\
(x, y) &\nsim (x')_{y'} \\
(x, y) &\nsim (\infty_{x'})_{y'} \\
(x)_y &\sim (x')_{y'} \Leftrightarrow x \cong x' \\
(x)_y &\nsim (\infty_{x'})_{y'} \\
(\infty_x)_y &\sim (\infty_{x'})_{y'}
\end{aligned}$$

ve doğrular için;

$$\begin{aligned}
[m, k] &\sim [m', k'] \Leftrightarrow m \cong m' \text{ ve } k \cong k' \\
[m, k] &\nsim [k']_{m'} \\
[m, k] &\nsim [\infty_{k'}]_{m'} \\
[k]_m &\sim [k']_{m'} \Leftrightarrow k \cong k'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[k]_m &\not\sim [\infty_{k'}]_{m'} \\
[\infty_k]_m &\sim [\infty_{k'}]_{m'}
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde $\mathbf{M}$ bir projektif Klingenberg düzlemidir.

Teorem 1.2.12 de inşaa edilen PK-düzleminde; $O = (0,0)$, $X = (0)_0$, $Y = (\infty_0)_0$, $E = (1,1)$ olarak ve OY doğrusu üzerinde olan fakat Y ye komşu olmayan noktaları $b \in R$ olmak üzere $(0,b)$ koordinatlı olarak alınır ve de OY nin Y ye komşu olmayan noktalarının kümesi ile R arasında $(0,b) \to b$ şeklinde bir dönüşüm tanımlanırsa bu koordinatlamadan ortaya çıkan PSR orijinal PSR olur.

Tanım 1.2.13: $(R, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ ve $(R', T_1', T_2', T_3', T_4', T_5', T_6')$ biçiminde iki PSR verilsin. Şayet $\alpha(0) = 0'$, $\alpha(1) = 1'$, $\forall x, y \in R$ için $\alpha(x) \cong \alpha(x') \Leftrightarrow x \cong x'$ ve $i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ olmak üzere T_i nin tanım bölgesindeki $\forall (a,b,c)$ için $\alpha(T_i(a,b,c)) = T_i'(\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c))$ özelliklerine sahip 1:1 ve örten $\alpha : R \to R'$ dönüşümü bulunabilirse bu *iki PSR izomorftur* denir.

Teorem 1.2.14: K ve K' iki PK-düzlem olsun. K nın (O,X,Y,E) dörtgenine göre koordinatlama PSR si $(R, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ ve K' nün (O', X', Y', E') dörtgenine göre koordinatlama PSR si $(R', T_1', T_2', T_3', T_4', T_5', T_6')$ olsun. Bu takdirde $(R, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ ve $(R', T_1', T_2', T_3', T_4', T_5', T_6')$ nin izomorf olması için gerek ve yeter şart $\alpha(O) = O'$, $\alpha(X) = X'$, $\alpha(Y) = Y'$ ve $\alpha(E) = E'$ olacak biçimde bir $\alpha : K \to K'$ izomorfizminin var olmasıdır.

2. LOKAL ALTERNE HALKALAR VE MOUFANG-KLINGENBERG DÜZLEMLERİ

Bu bölümdeki amacımız, çalışmamızın temel aldığı ve daha sonra $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ ile gösterilecek olan özel MK-düzlem sınıfı hakkında ayrıntılı bilgiler vererek $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın $\mathcal{G}$ ile gösterilen kolinasyon grubunun dörtgenler üzerinde geçişken olduğunu göstermektir. MK-düzlemleri bir lokal alterne halka yardımıyla koordinatlandıkları için 2.1 de lokal alterne halkalara genel olarak değinilecek ve çalışacağımız cebirsel yapının bazı özellikleri belirlenecektir. 2.2 de ise bu çalışmanın temelini oluşturan geometrik yapı olan $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ MK-düzlem sınıfı tanıtılacaktır. Son olarak, kısım 2.3 de $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ MK-düzleminde yedi tane özel kolinasyon kurulacak ve bunlar kullanılarak $\mathcal{G}$ nin dörtgenler kümesi üzerinde geçişken olduğu orijinal sonucu ispatlanacaktır.

Bu kısımda kaynak belirtmeden vereceğimiz tanım ve teoremler birçok cebir kitabında rahatlıkla bulunabilir. Örnek olarak (Fraleigh, 1989), (Jacobson, 1985), (Schafer, 1995), (Zhevlakov, 1982) ve (Stevenson, 1972) yi verebileceğimiz gibi (Çelik, 1995) i de önerebiliriz.

2.1. Lokal Alterne Halkalar

Biz bu çalışma boyunca vereceğimiz cebirsel yapıların hiçbirinde assosyatiflik özelliğini aramadığımızı vurgulamak istiyoruz.

Tanım 2.1.1: $(\mathcal{H},+)$ bir abel grubu ve "." $\mathcal{H}$ üzerinde tanımlı bir iç işlem olsun. Eğer her $x,y,z\in\mathcal{H}$ için,

$$(x+y).z = x.z + y.z \text{ ve } z.(x+y) = z.x + z.y$$

şartları gerçekleniyorsa $(\mathcal{H},+,\ .)$ üçlüsüne bir *halka* denir. Eğer $(\mathcal{H},\ .)$ sisteminin birim elemanı varsa $(\mathcal{H},+,\ .)$ ya *birimli halka*, "." işlemi değişimli ise bu halkaya *değişimli halka* denir.

Tanım 2.1.2: Bir $(\mathcal{H},+,\ .)$ halkasının kendisi üzerine 1-1, örten ve her $a,b\in\mathcal{H}$ için,

i) $\Phi(a+b)=\Phi(a)+\Phi(b)$

ii) $\Phi(a.b)=\Phi(b).\Phi(a)$

şartlarını sağlayan bir Φ dönüşümüne $\mathcal{H}$ üzerinde bir *anti-otomorfizm* denir.

Tanım 2.1.3: Eğer $(\mathcal{H}, +, \ .)$ bir birimli halka ve $\mathcal{H} \backslash \{0\}$ ın her elemanının çarpmaya göre tersi varsa $(\mathcal{H}, +, \ .)$ üçlüsüne *bölümlü halka* veya *aykırı cisim* denir. Çarpma işlemi değişmeli olan assosyatif bir bölümlü halkaya *cisim* denir.

Tanım 2.1.4: $\mathcal{B}$ bir bölümlü halka olsun. $\overbrace{1+1+...+1}^{n \text{ tane}} = 0$ eşitliğine uyan en küçük $n \geq 2$ tamsayısına $\mathcal{B}$ halkasının *karakteristiği* denir. Eğer böyle (sonlu) bir n tamsayısı yoksa $\mathcal{B}$ nin *karakteristiği sıfırdır* denir.

Tanım 2.1.5: $(\mathcal{B}, +, .)$ bir bölümlü halka olsun.

$$Z(\mathcal{B}) = \{x \in \mathcal{B} \mid \ x.y = y.x, \text{ her } y \in \mathcal{B} \text{ için}\}$$

kümesine $\mathcal{B}$ nin *merkezi* denir.

Herhangi bir halkanın merkezi bir cisimdir (Fraleigh, 1989).

Tanım 2.1.6: $\mathcal{B}$ bir bölümlü halka olsun. Her $x, y \in \mathcal{B}$ için $a(ab) = (aa)b$ ve $(ab)b = a(bb)$ sol ve sağ alterne şartları sağlanıyorsa $\mathcal{B}$ ye *alterne bölümlü halka (ya da alterne cisim)* denir.

Tanım 2.1.7: V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olup V üzerinde bir çarpma iç işlemi tanımlansın. Eğer V bu işleme göre $\forall \alpha \in \mathcal{F}$, $x, y \in V$ için

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

şartını sağlayan bir halka ise V ye $\mathcal{F}$ üzerinde bir *cebir* denir.

Şimdi alterne halkalar ile ilgili dört temel teoremi peşpeşe verebiliriz.

Teorem 2.1.8: Bir alterne halkanın herhangi iki elemanı tarafından üretilen altcebir assosyatif cebirdir (Artin, 1957).

Teorem 2.1.9: A bir alterne halka olsun. Bu takdirde her $x, y, w \in A$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Pickert, 1955).

i) $y((xw)x) = ((yx)w)x$ (Skornyakov, 1953)

ii) $(x(wx))y = x(w(xy))$ (Hall, 1954)

iii) $(xy)(wx) = x(yw)x$

Bu eşitliklere *Moufang özdeşlikleri* de denilmektedir.

Teorem 2.1.10: Sonlu bir alterne halka bir cisimdir (Artin, 1957).

Teorem 2.1.11: (*Bruck-Kleinfeld*) Bir alterne halka ya assosyatiftir ya da kendi merkezi üzerinde Cayley-Dickson cebiridir (Pickert, 1955) ya da (Stevenson, 1972).

Tanım 2.1.12: $\mathcal{F}$ herhangi bir cisim ve

$$\mathbb{C}_\alpha = \{a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 \mid a_i \in \mathcal{F}, i = 0, 1, 2, ..., 7\}$$

olsun. $\mathbb{C}_\alpha$ daki *iki elemanın eşitliği* $a_0 + a_1 i_1 + ... + a_7 i_7 = b_0 + b_1 i_1 + ... + b_7 i_7 \Leftrightarrow a_i = b_i, i = 0, 1, 2, ..., 7$ biçiminde, $\mathbb{C}_\alpha$ daki $\oplus$ işlemi (*toplama*), $(a_0 + a_1 i_1 + ... + a_7 i_7) \oplus (b_0 + a_1 i_1 + ... + b_7 i_7) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)\, i_1 + ... + (a_7 + b_7)\, i_7$ olarak ve $\odot$ çarpma işlemi Çizelge 2.1.1 yardımıyla ve aşağıdaki dört özellikle birlikte tanımlansın:

i) $j \neq k$ için $i_j \odot i_k = -i_k \odot i_j$ dir,

ii) Dağılma kuralları geçerlidir.

iii) $\alpha \in \mathcal{F}$ için $\alpha i_k = \alpha \odot i_k = i_k \odot \alpha$ dır,

iv) $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ için $\alpha \odot (\beta i_k) = (\alpha\beta) \odot i_k$ dır. $\mathbb{C}_\alpha$ nın karakteristiğinin $\neq 2$ olması durumunda ise (Jacobson, 1985, p. 448) de verilen çarpım tablosu ile birlikte $\mathbb{C}_\alpha$ nın

$$(i_0 = 1, i_1, i_2, i_3 = i_1 i_2, i_4, i_5 = i_1 i_4, i_6 = i_2 i_4, i_7 = (i_1 i_2)\, i_4)$$

biçiminde bir bazı vardır. $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{F}$ sıfırdan farklı skalarlar olmak üzere bu çarpım tablosu aşağıdaki gibidir:

$\odot$	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	$c_1 i_0$	i_3	$c_1 i_2$	i_5	$c_1 i_4$	$-i_7$	$-c_1 i_6$
i_2		$c_2 i_0$	$-c_2 i_1$	i_6	i_7	$c_2 i_4$	$c_2 i_5$
i_3			$-c_1 c_2 i_0$	i_7	$c_1 i_6$	$-c_2 i_5$	$-c_1 c_2 i_4$
i_4				$c_3 i_0$	$-c_3 i_1$	$-c_3 i_2$	$-c_3 i_3$
i_5					$-c_1 c_3 i_0$	$c_3 i_3$	$c_1 c_3 i_2$
i_6						$-c_2 c_3 i_0$	$-c_2 c_3 i_1$
i_7							$c_1 c_2 c_3 i_0$

Çizelge 2.1.1

$\mathbb{C}_\alpha$ kümesinin elemanlarına *Cayley sayıları* denir.

Teorem 2.1.13: $(\mathbb{C}_\alpha, \oplus, \odot)$ bir alterne halkadır (Schafer, 1995).

Tanım 2.1.14: $(\mathbb{C}_\alpha, \oplus, \odot)$ alterne halkasına ($\mathcal{F}$ üzerinde) bir *Cayley-Dickson cebiri* denir.

Bu çalışma boyunca assosyatiflik şartı aranmayan bir cebirsel yapı ile çalışacağımızı belirttiğimizden Cayley-Dickson cebiri üzerinde ayrıntılı durmaya devam edeceğiz. Bu sebeple $\mathbb{C}_\alpha$ üzerinde tanımlı bazı dönüşümlerden bahsedilecektir. Bu dönüşümler bu çalışmanın amacına ulaşmasında temel taşları olacak önemde bir rol üstleneceklerdir.

Tanım 2.1.15: $x = x_0 + x_1 i_1 + ... + x_7 i_7 \in \mathbb{C}_\alpha$ olmak üzere $^- : \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{C}_\alpha$ için $x \to \overline{x} = x_0 - x_1 i_1 - ... - x_7 i_7$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *eşlenik alma dönüşümü* denir.

Teorem 2.1.16: $x \in \mathbb{C}_\alpha$ için $\overline{\overline{x}} = x$ ve $x, y \in \mathbb{C}_\alpha$ için $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ dir. Bu nedenle eşlenik alma dönüşümü bir involusyonlu anti otomorfizmdir (Ferrar, 1981) ve (Jacobson, 1958).

Tanım 2.1.17: $n : \mathbb{C}_\alpha \to \mathcal{F}$ için $x \to n(x) = x\overline{x}$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *norm form*, $n(x)$ e de x in *normu* veya *norm formu* denir.

Teorem 2.1.18: $x \in \mathbb{C}_\alpha$, $x = x_0 + x_1 i_1 + ... + x_7 i_7$ ise $n(x) = x\overline{x} = \overline{x}x = n(\overline{x})$ dir (Çelik, 1995).

Tanım 2.1.19: $t : \mathbb{C}_\alpha \to \mathcal{F}$ için $x \to t(x) = \frac{1}{2}(x + \overline{x})$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *iz form*, $t(x)$ e de x in *izi* veya *iz formu* denir.

Teorem 2.1.20: $x, y \in \mathbb{C}_\alpha$ için,

i) $n(xy) = n(x)\,n(y)$ dir (Norm form çarpılabilirdir.).

ii) $t(x) = t(\overline{x})$ dır (Ferrar, 1981), (Jacobson, 1958), (Schafer, 1995).

Teorem 2.1.21: t iz formu lineerdir (Çelik, 1995).

Tanım 2.1.22: $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha \to \mathcal{F}$ ye her $x, y \in \mathbb{C}_\alpha$ için $n(x, y) = \frac{1}{2}(n(x + y) - n(x) - n(y))$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *birleştirilmiş form* denir.

Teorem 2.1.23: Birleştirilmiş form için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) $n(x, y) = \frac{1}{2} t(x\overline{y})$ dir.

ii) Birleştirilmiş form simetrik ve bilineerdir (Çelik, 1995).

Teorem 2.1.24: t iz formu simetriktir ve assosyatiftir. Yani, her $x, y \in \mathbb{C}_\alpha$ için $t(xy) = t(yx)$ ve her $x, y, z \in \mathbb{C}_\alpha$ için $t(x(yz)) = t((xy)z)$ dir (Blunck, 1991a), (Ferrar, 1981), (Jacobson, 1958), (Schafer, 1995).

Tanım 2.1.25: $\mathcal{H}$ bir halka ve $a, b \in \mathcal{H}$ olsun. Eğer $a = xbx^{-1}$ olacak biçimde bir $x \in \mathcal{H}$ elemanı varsa a ve b elemanlarına *eşleniktirler* denir.

$a \approx b \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{H} \ni a = xbx^{-1}$ biçiminde tanımlı $\approx$ bağıntısına da *eşleniklik bağıntısı* denir.

Teorem 2.1.26: A bir alterne bölümlü halka, $x, y \in A$ olsun. Bu takdirde xy ile yx eşleniktirler (Çelik, 1995).

Aşağıdaki teorem iz ve norm form tanımlarının direkt bir sonucudur:

Teorem 2.1.27: $x \in \mathcal{F}$ ise $t(x) = x$, $n(x) = x^2$ dir (Çelik, 1995).

Teorem 2.1.28: $x, y \in \mathbb{C}_\alpha$ olsun. Bu takdirde, x ve y nin eşlenik olması için gerek ve yeter şart $t(x) = t(y)$ ve $n(x) = n(y)$ olmasıdır (Çelik, 1995).

Teorem 2.1.29: $x, y, z, u \in \mathbb{C}_\alpha$ iken,

i) $(xy)(zu) \approx x(y(zu))$ dir.

ii) $(xy)(zx^{-1}) \approx yz \approx zy \approx (yx)(x^{-1}z)$ dir (Çelik, 1995).

Teorem 2.1.30: Her $x, y, y^{-1}, z \in \mathbb{C}_\alpha$ için,

$$t\left((xy)\left(y^{-1}z\right)\right) = t(xz) = t(zx) = t\left(\left(y^{-1}z\right)(xy)\right)$$

dir (Çelik, 1995).

Teorem 2.1.31: Eşlenik olma $\mathbb{C}_\alpha$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır (Çelik, 1995).

Gösterim: Eşlenik olma bağıntısına göre bir $x \in \mathbb{C}_\alpha$ elemanının denklik sınıfı $< x >$ ile gösterilir.

$< x >= \{yxy^{-1} \mid y \in \mathbb{C}_\alpha\} = \{y^{-1}xy \mid y \in \mathbb{C}_\alpha\}$ dır.

Teorem 2.1.32: $x \in \mathbb{C}_\alpha$ olsun. Bu takdirde,

i) $\overline{(x^{-1})} = (\overline{x})^{-1}$ dir.

ii) $< x >=< \overline{x} >$ dir (Çelik, 1995).

Teorem 2.1.33: A Cayley bölümlü cebiri olsun. Bu takdirde iz formun aşağıdaki özellikleri geçerlidir:

i) Her $x, y, z \in A$ için $t(x(yz)) = t((xy)z) = t(z(xy)) = t((zx)y)$

ii) Her $x, y, z \in A$ ve $x \neq 0$ için $t(x^{-1}((xy)z)) = t(yz)$ dir.

iii) Her $x, y, z, b \in A$ ve $b \neq 0$ için $t((x(y(xb^{-1})))(bz)) = t((xyx)z)$ dir.

iv) Her $x, y, z \in A$ için $t(((xy)x)z) = t((yx)(zx))$ dir (Çelik, 1995).

2.2. $\mathrm{M}(\mathcal{A})$ MK-düzlem Sınıfı

Bu bölümde (Blunck, 1991c), (Blunck, 1991b) ve (Çelik, 1995) deki bilgiler derlenerek çalışmamıza temel oluşturacak bir MK-düzlem sınıfi belirlenecektir.

Tanım 2.2.1: $\mathbf{M}$ bir PK-düzlem olsun. Eğer her (M,e), $M\in e$ için $\mathbf{M}$, (M,e)-geçişken ise $\mathbf{M}$ ye *Moufang-Klingenberg düzlemi* veya kısaca *MK-düzlemi* denir.

Teorem 2.2.2: $\mathbf{M}$ bir MK-düzlem iken $\mathbf{M}^*$ kanonik görüntüsü bir Moufang düzlemidir (Blunck, 1991c).

MK-düzlemleri lokal alterne halkalar yardımıyla koordinatlanırlar. Aşağıda bir özeti verilecek bu koordinatlama, projektif düzlemler için verilen koordinatlamanın genelleştirilmişi olan Dugas' ın verdiği metodun (Dugas, 1978) bir benzeridir. Bu koordinatlamada, literatürdeki tanımı ile aynı sonucu veren ancak çok daha sade olan, doğruların koordinatlanması (iv ve v) için küçük bir düzenleme yapılmıştır.

Tanım 2.2.3: Özdeşlikli bir alterne halkanın birim olmayan elemanların **I** kümesi bir ideal ise halkaya *lokal alterne halka* denir.

Tanım 2.2.4: $\mathbf{M}=(\mathbf{N},\mathbf{D},\in,\sim)$ bir MK-düzlem ve (O,U,V,E) $\mathbf{M}$ nin bir bazı, yani $(\Psi(O),\Psi(U),\Psi(V),\Psi(E)$ kanonik görüntüsü $\mathbf{M}^*$ da bir tamdörtgen olsun. $OE:=d$, $d\cap UV:=W$ ve $UV:=d_\infty$biçiminde gösterilsin.

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &:= \{N\in\mathbf{N} \mid N\in d, N\nsim W\}\\ \mathbf{I} &:= \{N\in\mathbf{H} \mid N\sim O\}\end{aligned}$$

ve $\mathbf{H}$ kümesinin kardinalitesi k olsun (burada k sınırsız olabilir). Özel olarak 0 ve 1 i bulunduran ama ∞ sembolünü herhangi bir eleman olarak kapsamayan kardinalitesi k olan bir R kümesi alınsın. 1:1 ve örten bir $\theta:\mathbf{H}\to R$ fonksiyonu tanımlansın ve özel olarak $\theta(O)=0$ ve $\theta(E)=1$ olsun. Ayrıca $\theta(\mathbf{I})=R_0$ denilsin (Burada $R_0\subset R$ olduğu açıktır.). Böylece $\mathbf{H}$ kümesinin elemanları ile R kümesi arasında θ yardımıyla bir eşleme kurulmuştır. Bu eşleme yardımıyla $\mathbf{M}$ nin $N\in\mathbf{N}$ noktaları ve $c\in\mathbf{D}$ doğruları, aşağıdaki gibi koordinatlanır:

$N\in d$ ve $N\nsim W$ ise $\theta(N)=x$ ise $N=(x,x,1)$ biçiminde; $w,z,q,n\in\mathbf{I}$ olmak üzere

i) $N\nsim d_\infty$ ise $NV\cap d=(x,x,1)$, $NU\cap d=(y,y,1)$ iken $N=(x,y,1)$ (bkz. Şekil 2.2.1),

ii) $N\sim d_\infty$, $N\nsim V$ ise $ON\cap EV=(1,y,1)$, $(NV\cap UE)\,O\cap EV=(1,z,1)$ iken $N=(1,y,z)$ (bkz. Şekil 2.2.2),

iii) $N\sim V$ ise $ON\cap EU=(w,1,1)$, $NU\cap d=(1,1,z)$ iken $N=(w,1,z)$ (bkz. Şekil

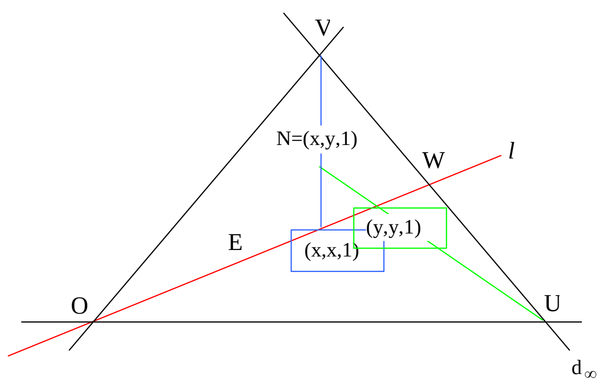
2.2.3),

iv) $c \nsim V$ ise $c \cap d_\infty = (1, m, 0) =$, $c \cap OV = (0, k, 1)$ iken $c = [m, 1, k]$ (bkz. Şekil 2.2.4),

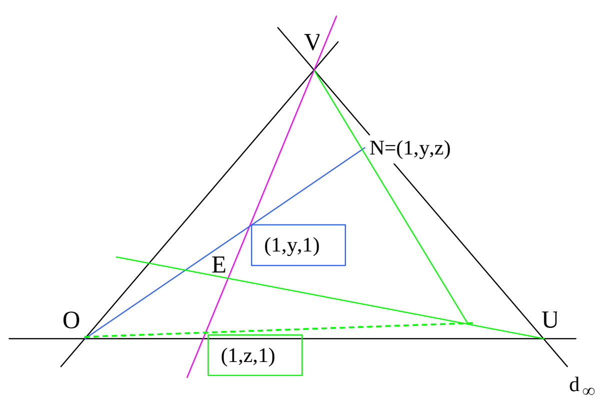
v) $c \sim V$, $c \nsim d_\infty$ ise $c \cap d_\infty = (n, 1, 0)$, $c \cap OU = (p, 0, 1)$ iken $c = [1, n, p]$ (bkz. Şekil 2.2.5),

vi) $c \sim d_\infty$ ise $c \cap OU = (1, 0, q)$, $c \cap OV = (0, 1, n)$ iken $c = [q, n, 1]$ (bkz. Şekil 2.2.6) biçiminde koordinatlanır.

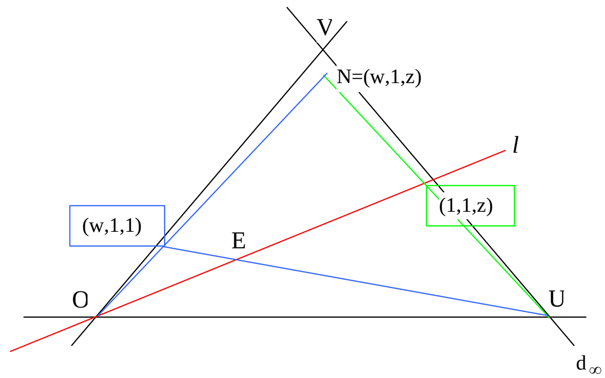
Koordinatlamanın bir sonucu olarak, koordinatlama bazındaki elemanlarının koordinatları $O = (0, 0, 1)$, $U = (1, 0, 0)$, $V = (0, 1, 0)$, $E = (1, 1, 1)$ olur.



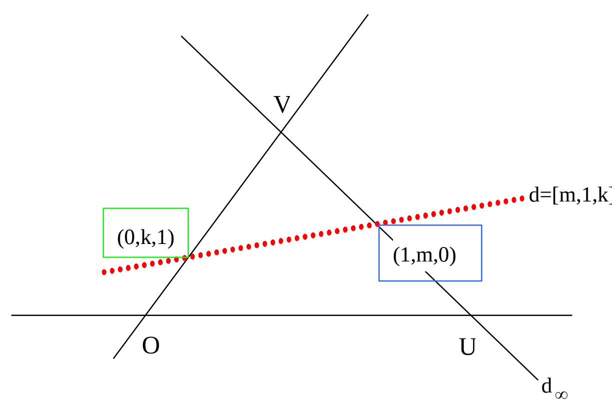
Şekil 2.2.1



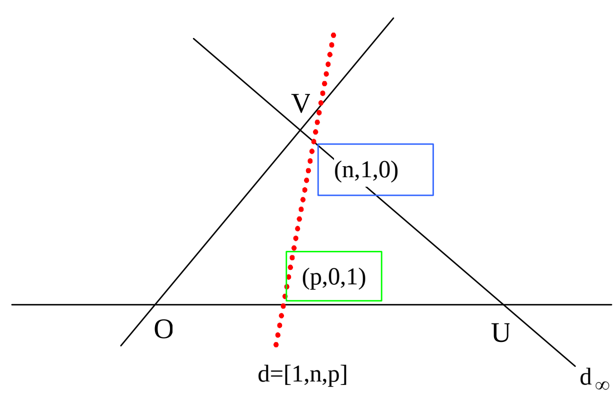
Şekil 2.2.2



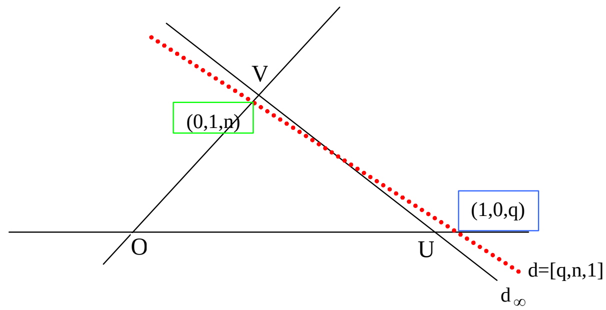
Şekil 2.2.3



Şekil 2.2.4



Şekil 2.2.5



Şekil 2.2.6

(Baker, 1991) de yukarıdaki gibi koordinatlanan bir MK-düzlem verildiğinde **H** nın "$+$" ve "$\cdot$" ya göre etkisiz elemanları sırasıyla 0 ve 1 olan bir lokal alterne halka olduğu altı üçlü işlem yardımıyla gösterilmiştir. Bu üçlü işlemler yardımıyla, düzlemin üzerinde olma bağıntısı aşağıdaki biçimde belirlenmiştir:

$$(x,y,1) \in [m,1,k] \iff y = xm + k$$

$$(x,y,1) \in [1,n,p] \iff x = yn + p$$

$$(x,y,1) \notin [q,n,1]$$

$$(1,y,z) \in [m,1,k] \iff y = m + zk$$

$$(1,y,z) \notin [1,n,p]$$

$$(1,y,z) \in [q,n,1] \iff z = q + yn$$

$$(w,1,z) \notin [m,1,k]$$

$$(w,1,z) \in [1,n,p] \iff w = n + zp$$

$$(w,1,z) \in [q,n,1] \iff z = wq + n$$

Buna göre doğrular, üzerindeki nokta tiplerine göre, noktalar kümesi olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} [m,1,k] &= \{(x, xm+k, 1) \mid x \in \mathbf{H}\} \cup \{(1, zk+m, z) \mid z \in \mathbf{I}\}, \\ [1,n,p] &= \{(yn+p, y, 1) \mid y \in \mathbf{H}\} \cup \{(zp+n, 1, z) \mid z \in \mathbf{I}\}, \\ [q,n,1] &= \{(1, y, yn+q) \mid y \in \mathbf{H}\} \cup \{(w, 1, wq+n) \mid w \in \mathbf{I}\} \end{aligned}$$

(Baker, 1991) de koordinatlama ile ilgili olarak elde edilen genel sonuç aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teroem 2.2.5: $\mathbf{M}$ yukarıdaki gibi koordinatlanmış bir MK-düzlem olsun. Bu takdirde ($\mathbf{H}$,$+, \cdot$) lokal alterne halkadır ve **I** birimden farklı elemanların oluşturduğu idealdir. $\mathbf{M}$ de komşuluk bağıntısı aşağıdaki gibi karakterize edilebilir:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbf{I},\, i = 1, 2, 3$$
$$[x_1, x_2, x_3] \sim [y_1, y_2, y_3] \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbf{I},\, i = 1, 2, 3$$

Teorem 2.2.6: Her lokal alterne halkaya karşılık bununla koordinatlanabilen bir MK-düzlemi vardır ve tersine her MK-düzlemine karşılık bir lokal alterne halka bulunabilir (Baker, 1991).

MK-düzlem için Tanım 2.2.4 de verilen koordinatlama, Tanım 1.2.7 de PK-düzlemler için verilen koordinatlamaya izomorftur.

MK-düzlem ve PK-düzlem için verilen koordinatlamaların aynı olduğu, noktalar için

$$\begin{aligned}(x, y) &\rightarrow (x, y, 1)\\ (y)_z &\rightarrow (1, y, z)\\ (\infty_w)_z &\rightarrow (w, 1, z)\end{aligned}$$

ve doğrular için de

$$\begin{aligned}[m, k] &\rightarrow [m, 1, k]\\ [p]_n &\rightarrow [1, n, p]\\ [\infty_q]_n &\rightarrow [q, n, 1]\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan f izomorfizminden hemen çıkarılabilir.

A özdeşlikli bir alterne bölümlü halka olsun. $\mathcal{A} := \mathbf{A}(\varepsilon) = \mathbf{A} + \mathbf{A}\varepsilon$ ($\varepsilon \notin \mathbf{A}$, $\varepsilon^2 = 0$) üzerinde toplama ve çarpma

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2\varepsilon) + (b_1 + b_2\varepsilon) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\,\varepsilon\\ (a_1 + a_2\varepsilon)(b_1 + b_2\varepsilon) &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\varepsilon, \quad (a_i, b_i \in \mathbf{A},\, i = 1, 2)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 2.2.7: $(\mathcal{A}, +, .)$ bir lokal alterne halkadır ve birim olmayan elemanların oluşturduğu küme $\mathbf{I} = \mathbf{A}\varepsilon$ bir idealdir (Blunck, 1991b).

$\mathcal{A}$ nın birim olmayan elemanlarının formal terslerinin kümesi $\mathbf{I}^{-1}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8: $(a\varepsilon)^{-1} \in \mathbf{I}^{-1},\ t \in \mathcal{A}$, $q \in \mathcal{A} \backslash \mathbf{I}$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
(a\varepsilon)^{-1} + t \quad &: \quad = (a\varepsilon)^{-1} := t + (a\varepsilon)^{-1} \\
q\,(a\varepsilon)^{-1} \quad &: \quad = \left(aq^{-1}\varepsilon\right)^{-1} \\
(a\varepsilon)^{-1}\,q \quad &: \quad = \left(q^{-1}a\varepsilon\right)^{-1} \\
\left((a\varepsilon)^{-1}\right)^{-1} \quad &: \quad = a\varepsilon
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı olup $\mathbf{I}^{-1}$ üzerinde diğer işlemler tanımlı değildir.

Bu çalışmada $\mathcal{A}$, reel sayılar üzerinde bilinen $\mathbf{D}$ dual sayılar halkasının (Benz, 1973) bir genellemesi olduğundan, *alterne dual sayılar halkası* olarak da isimlendirilebilir. $\mathcal{A}$ hakkında daha fazla bilgi için (Blunck, 1992) e bakılabilir. Biz çalışmamızda kullacağımız bazı önermeleri vermekle yetineceğiz.

Teorem 2.2.9: $\mathcal{A}$ nın birleşmeli olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{A}$ nın birleşmeli olmasıdır.

$\mathbf{A}$ nın merkezi $\mathbf{Z}$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\mathbf{Z}\,(\mathcal{A}) := \mathbf{Z}\,(\varepsilon) = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\varepsilon$$

kümesi $\mathcal{A}$ nın merkezi olup $\mathcal{A}$ nın değişmeli ve birleşmeli bir alt halkasıdır (Blunck, 1992).

$\mathbf{A}$ daki $k : x \longmapsto \bar{x}$ eşlenik alma dönüşümü $\mathcal{A}$ ya $K : x_1 + x_2\varepsilon \longmapsto \bar{x}_1 + \bar{x}_2\varepsilon$ biçiminde genişletilir. $\mathbf{A}$ üzerinde t ile gösterilen $x \rightarrow \frac{1}{2}\,(x + \bar{x})$ *iz form* ve n ile gösterilen $x \rightarrow x\bar{x}$ *norm form* dönüşümlerinin $\mathcal{A}$ da karşılıkları için sırasıyla T ve N sembolleri kullanılacaktır. t ve n dönüşümlerinin sırasıyla T ve N nin $\mathbf{A}$ ya kısıtlanmışları olduğu açıktır. Bundan sonra $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{Z}$ üzerinde karakteristiği $\neq 2$ olan bir Cayley bölümlü cebiri kastedilecektir.

Aşağıdaki teorem $\mathcal{A}$ da iz ile norm formun bazı özelliklerini belirtir.

Teorem 2.2.10: $a, b, c \in \mathcal{A}$, $a = a_1 + a_2\varepsilon$ olsun. Bu takdirde (i)-(vii) aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) $\mathcal{A}$ daki K eşlenik alma dönüşümü bir involusyonlu $Z\,(\varepsilon)$-lineer antiotomorfizmidir.

(ii) $N(a) = N(a_1) + f(a_1, a_2)\varepsilon$ olacak biçimde f simetrik bilineer form vardır.

(iii) $T(a) = T(a_1) + T(a_2)\varepsilon$ ve T iz formu $Z\,(\varepsilon)$-lineerdir.

(iv) $N(ab) = N(a)N(b)$ (Bu özelliğe N norm formun çarpılabilirliği denir.).

(v) $T(ab) = T(ba)$ (yani T iz form simetriktir.), $T(a(bc) = T((ab)c)$ (yani T iz form birleşmelidir.).

(vi) $a^2 - T(a)a + N(a) = 0$ dır.

(vii) $N(a) = 0 \Leftrightarrow a \in I$ dır. Eğer $a \in A \backslash A\varepsilon$ ise $a^{-1} = N(a)^{-1}\overline{a}$ dir (Çelik, 1995).

Teorem 2.2.11: Her $a = a_1 + a_2\varepsilon$ için,

i) $f(a_1, a_2) = T(a_1\overline{a_2})$,

ii) $T(a) = T(\overline{a})$, $N(a) = N(\overline{a})$ dır (Çelik, 1995).

Tanım 2.1.25 de verilen "$\approx$" eşleniklik bağıntısının $\mathcal{A}$ daki karakterizasyonunu ifade eden aşağıdaki teroemi verebiliriz:

Teorem 2.2.12: $a, b \in \mathcal{A}$, $a = a_1 + a_2\varepsilon$ ve $b = b_1 + b_2\varepsilon$ olsun.

(i) $a_1 \in$ **Z** ise $a \approx b \Leftrightarrow a_1 = b_1$ ve $a_2 \approx b_2$.

(ii) $a_1 \notin$ **Z** ise $a \approx b \Leftrightarrow N(a) = N(b)$ ve $T(a) = T(b)$ (Çelik, 1995).

Teorem 2.2.13: "$\approx$" bağıntısı $\mathcal{A}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır (Çelik, 1995).

Teorem 2.2.14: Her $a, b, c \in \mathcal{A}$ için $ab \approx ba$ ve $a(bc) \approx (ab)c$ dir (Çelik, 1995).

Tanım 2.2.15: $x \in \mathcal{A}$ elemanının denklik sınıfı $< x >$ ile ve eğer $x \in \mathbf{A}$ ise $< x >_{\mathbf{A}}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.16: $< x >_{\mathbf{A}} = < x > \cap \mathbf{A}$ dır (Çelik, 1995).

Tanım 2.2.17: $n \geq 3$ olmak üzere, ikişer ikişer farklı komşuluklarda olan ve herhangi üçü komşu doğrular üzerinde olmayan sıralı n-nokta kümesine bir (sıralı) $n-gen$ denir. Özel olarak 3-gen ve 4-gen sırasıyla *üçgen* ve *dörtgen* olarak adlandırılır.

Gösterim: $\mathcal{A}$ lokal alterne halkası ile koordinatlanan MK-düzlem sınıfı $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ ile gösterilecektir.

2.3. $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ MK-düzleminde Bazı Özel Dönüşümler ve 4-geçişkenlik

Bu bölümde, Moufang düzlemleri için benzerleri literatürde verilen bazı kolinasyonların $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ daki karşılıkları verilecektir. MK-düzleminde dörtgenler üzerinde geçişkenliğin mümkün olup olmadığı bu güne kadar tespit edilememiştir. Biz esas olarak bu geçişkenliği göstermeye çalıştık. Aşağıda vereceğimiz dönüşümlere bu amaçla ihtiyaç duyulmuştur.

Moufang düzlemlerinde dörtgenler üzerinde geçişkenliğin varlığı (Çiftçi, 1988) gösterilmiştir ki orada kullanılan dönüşümler ile burada kullandığımız dönüşümler aynı semboller ile verilmesine rağmen dönüşümlerin elde ediliş mantıklarında ve kapsamlarında farklılıklar bulunmaktadır. Ancak, $\mathbf{I}$ yalnızca sıfırdan ibaret iken $\mathbf{H}$ bir alterne bölümlü halka ve dolayısıyla $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ bir Moufang düzlemi olur ki bu durumda vereceğimiz kolinasyonlar oradakiler ile çakışır. w, z, q, $n \in \mathbf{A}$ olmak üzere;

$a, b \in \mathcal{A}$ için $\mathrm{T}_{a,b}$:

$$(x, y, 1) \to (x + a, y + b, 1)\,,\ \ (1, y, z\varepsilon) \to (1, y + z(b - ay)\varepsilon, z\varepsilon)\,,$$

$$(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \to ((w + za)\varepsilon, 1, z\varepsilon)$$

$$[m, 1, k] \to [m, 1, k + b - am]\,,\ \ [1, n\varepsilon, p] \to [1, n\varepsilon, p + a - bn\varepsilon]\,,$$

$$[q\varepsilon, n\varepsilon, 1] \to [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$$

$a \notin \mathbf{I}$ için L_a:

$$(x, y, 1) \to (ax, aya, 1)\,,\ \ (1, y, z\varepsilon) \to \big(1, ya, (za^{-1})\varepsilon\big)\,,$$

$$(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \to \big((a^{-1}w)\varepsilon, 1, (a^{-1}za^{-1})\varepsilon\big)$$

$$[m, 1, k] \to [ma, 1, aka]\,,\ \ [1, n\varepsilon, p] \to \big[1, (a^{-1}n)\varepsilon, ap\big]\,,$$

$$[q\varepsilon, n\varepsilon, 1] \to \big[(qa^{-1})\varepsilon, (a^{-1}na^{-1})\varepsilon, 1\big]$$

$a \notin \mathbf{I}$ için F_a:

$$(x, y, 1) \to (axa, ay, 1)\,,\ \ (1, y, z\varepsilon) \to \big(1, a^{-1}y, (a^{-1}za^{-1})\varepsilon\big)\,,$$

$$(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \to \big((wa)\varepsilon, 1, (za^{-1})\varepsilon\big)$$

$$[m, 1, k] \to \big[a^{-1}m, 1, ak\big]\,,\ \ [1, n\varepsilon, p] \to [1, (na)\varepsilon, apa]\,,$$

$$[q\varepsilon, n\varepsilon, 1] \to \big[(a^{-1}qa^{-1})\varepsilon, (na^{-1})\varepsilon, 1\big]$$

I_1:

$$x \notin \mathbf{I} \text{ ise } (x, y, 1) \to \big(x^{-1}, x^{-1}y, 1\big)\,,\ x \in \mathbf{I} \text{ ise } (x, y, 1) \to (1, y, x)\,,$$

$$(1, y, z\varepsilon) \to (z\varepsilon, y, 1)\,,\ \ (w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \to (z\varepsilon, 1, w\varepsilon)$$

$$[m, 1, k] \to [k, 1, m]\,,\ p \in \mathbf{I} \text{ ise } [1, n\varepsilon, p] \to [p, n\varepsilon, 1]\,,$$

$$p \notin \mathbf{I} \text{ ise } [1, n\varepsilon, p] \to \big[1, -(np^{-1})\varepsilon, p^{-1}\big]\,,\ \ [q\varepsilon, n\varepsilon, 1] \to [1, n\varepsilon, q\varepsilon]$$

α,$\beta \in$ $\mathbf{Z}(\mathcal{A})$, α,$\beta \notin$ **I** için $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}$:

$$(x,y,1) \to (x\beta, y\alpha, 1)\,,\;\; (1,y,z\varepsilon) \to \left(1, \beta^{-1}y\alpha, (\beta^{-1}z)\varepsilon\right),$$

$$(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \to \left((\alpha^{-1}w\beta)\varepsilon, 1, (\alpha^{-1}z)\varepsilon\right)$$

$$[m,1,k] \to \left[\beta^{-1}m\alpha, 1, k\alpha\right],\;\; [1,n\varepsilon,p] \to \left[1, (\alpha^{-1}n\beta)\varepsilon, p\beta\right],$$

$$[q\varepsilon, n\varepsilon, 1] \to \left[(\beta^{-1}q)\varepsilon, (\alpha^{-1}n)\varepsilon, 1\right]$$

F:

$$(x,y,1) \to (y,x,1)\,,\;\; y \in \mathbf{I} \text{ ise } (1,y,z\varepsilon) \to (y,1,z\varepsilon)\,,$$

$$y \notin \mathbf{I} \text{ ise } (1,y,z\varepsilon) \to \left(1, y^{-1}, (y^{-1}z)\varepsilon\right),\;\; (w\varepsilon,1,z\varepsilon) \to (1,w\varepsilon,z\varepsilon)$$

$$m \in \mathbf{I} \text{ ise } [m,1,k] \to [1,m,k]\,,\;\; m \notin \mathbf{I} \text{ ise } [m,1,k] \to \left[m^{-1}, 1, -km^{-1}\right],$$

$$[1,n\varepsilon,p] \to [n\varepsilon,1,p]\,,\;\; [q\varepsilon,n\varepsilon,1] \to [n\varepsilon,q\varepsilon,1]$$

$s \in \mathcal{A}$ için G_s :

$$(x,y,1) \to (x, y-xs, 1)\,, (1,y,z\varepsilon) \to (1, y-s, z\varepsilon)\,, (w\varepsilon,1,z\varepsilon) \to (w\varepsilon,1,z\varepsilon)$$

$$[m,1,k] \to [m-s,1,k]\,,\;\; [1,n\varepsilon,p] \to [1,n\varepsilon,p+((ps)n)\varepsilon]\,,$$

$$[q\varepsilon,n\varepsilon,1] \to [(q+sn)\varepsilon, n\varepsilon, 1]$$

dönüşümlerini tanımlıyoruz. Bu dönüşümlerin her birinin $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonu olduğu, aşağıda peşpeşe vereceğimiz yardımcı teoremler yardımıyla ispat edilecektir. Her bir dönüşümün kolinasyon olduğu gösterilirken bu dönüşümlerin 1-1 ve örten olduğunu görmek kolay olduğundan biz sadece dönüşümlerin üzerinde olma bağıntısını ve komşuluk bağıntısını koruduğunu (yani, örnek olarak I_1 dönüşümü için, sırasıyla $N \in d \iff \mathrm{I}_1(N) \in \mathrm{I}_1(d)$ ve $M \sim N \iff \mathrm{I}_1(M) \sim \mathrm{I}_1(N)$ ($c \sim d \iff \mathrm{I}_1(c) \sim \mathrm{I}_1(d)$) önermelerinin geçerli olduğunu) göstermekle yetineceğiz.

Yardımcı Teorem 2.3.1: $\mathrm{T}_{a,b}$ dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.

İspat. $\mathrm{T}_{a,b}$ dönüşümünün üzerinde olmayı koruduğunun ispatını noktanın konumuna göre üç duruma ayırarak veriyoruz. Ayrıca bu durumların her birini de doğrunun konumuna göre üç alt kısma ayıracağız.

I. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(x,y,1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{T}_{a,b}(x,y,1) = (x+a, y+b, 1)$ dir.

1. $(x, y, 1) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{T}_{a,b}([m, 1, k]) = [m, 1, k + b - am]$ olup, verilenlerden

$$\begin{aligned} y &= xm + k \iff y + b = (x + a)\, m + k + b - am \\ &\iff \mathrm{T}_{a,b}(x, y, 1) \in \mathrm{T}_{a,b}([m, 1, k]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

2. $(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{T}_{a,b}([1, n\varepsilon, p]) = [1, n\varepsilon, p + a - bn\varepsilon]$ olup, verilenlerden

$$\begin{aligned} x &= y\,(n\varepsilon) + p \iff x + a = (y + b)\, n\varepsilon + p + a - bn\varepsilon \\ &\iff \mathrm{T}_{a,b}(x, y, 1) \in \mathrm{T}_{a,b}([1, n\varepsilon, p]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(x, y, 1) \notin [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olduğu koordinatlamadan açıktır. Bu durumda $\mathrm{T}_{a,b}([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olup

$$\mathrm{T}_{a,b}(x, y, 1) \notin \mathrm{T}_{a,b}([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$$

olduğu da koordinatlamadan açıktır.

II. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{T}_{a,b}(1, y, z\varepsilon) = (1, y + z(b - ay)\varepsilon, z\varepsilon)$ dir.

1. $(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{T}_{a,b}([m, 1, k]) = [m, 1, k + b - am]$$

olup, verilenlerden

$$\begin{aligned} y &= m + (z\varepsilon)\, k \iff y + z\varepsilon(b - ay) = m + (z\varepsilon)\, k + z(b - ay)\varepsilon \\ &\iff y + z(b - ay)\varepsilon = m + z\varepsilon\,(k + b - am) \\ &\iff \mathrm{T}_{a,b}(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{T}_{a,b}([m, 1, k]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

2. $(1, y, z\varepsilon) \notin [1, n\varepsilon, p]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Bu durumda

$$\mathrm{T}_{a,b}([1, n\varepsilon, p]) = [1, n\varepsilon, p + a - bn\varepsilon]$$

olup

$$\mathrm{T}_{a,b}(1, y, z\varepsilon) \notin \mathrm{T}_{a,b}([1, n\varepsilon, p])$$

olduğu koordinatlamadan açıktır.

3. $(1, y, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{T}_{a,b}\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right) = [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olup, verilenlerden

$$z\varepsilon = q\varepsilon + y\,(n\varepsilon) \iff \mathrm{T}_{a,b}\,(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{T}_{a,b}\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right)$$

sonucu bulunur.

III. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{T}_{a,b}\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) = ((w + za)\varepsilon, 1, z\varepsilon)$$

dir.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \notin [m, 1, k]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Burada

$$\mathrm{T}_{a,b}\left([m, 1, k]\right) = [m, 1, k + b - am]$$

olup koordinatlamadan dolayı

$$\mathrm{T}_{a,b}\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \notin \mathrm{T}_{a,b}\left([m, 1, k]\right)$$

sonucu bulunur.

2. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{T}_{a,b}\left([1, n\varepsilon, p]\right) = [1, n\varepsilon, p + a - bn\varepsilon]$$

olur ve

$$\begin{aligned} w\varepsilon &= n\varepsilon + (z\varepsilon)\,p \iff w\varepsilon + (z\varepsilon)\,a = n\varepsilon + (z\varepsilon)\,p + (z\varepsilon)\,a \\ &\iff (w + za)\varepsilon = n\varepsilon + z\varepsilon\,(p + a - bn\varepsilon) \\ &\iff \mathrm{T}_{a,b}\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in \mathrm{T}_{a,b}\left([1, n\varepsilon, p]\right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olması için gerek ve yeter şart $z\varepsilon = n\varepsilon$ olmasıdır. Diğer taraftan $\mathrm{T}_{a,b}\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right) = [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olup

$$\mathrm{T}_{a,b}\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in \mathrm{T}_{a,b}\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right)$$

olması için gerek ve yeter şartın yine $z\varepsilon = n\varepsilon$ olması olduğu aşikardır.

Böylece $\mathrm{T}_{a,b}$ dönüşümünün mümkün bütün durumlarda üzerinde olmayı koruduğunu göstermiş olduk.

$\mathrm{T}_{a,b}$ dönüşümünün noktalar için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, nokta tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum(i-iii) söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine nokta tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır.

i. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{T}_{a,b}(x, y, 1) = (x + a, y + b, 1)$ dir.

1. $\mathrm{T}_{a,b}(u, v, 1) = (u + a, v + b, 1)$ olup

$$\begin{aligned}(x, y, 1) \quad \sim \quad (u, v, 1) &\iff x - u \in \mathbf{I} \wedge y - v \in \mathbf{I} \\ &\iff \quad (x + a, y + b, 1) \sim (u + a, v + b, 1)\end{aligned}$$

sonucu bulunur.

2. $(x, y, 1) \nsim (1, u, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır.

$$\mathrm{T}_{a,b}(1, u, v\varepsilon) = (1, u + v(b - au)\varepsilon, v\varepsilon)$$

olup $(x + a, y + b, 1) \nsim (1, u + v(b - au)\varepsilon, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

3. $(x, y, 1) \nsim (u\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bilinmektedir. $\mathrm{T}_{a,b}(u\varepsilon, 1, v\varepsilon) = ((u + va)\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ olup yine koordinatlamadan dolayı $(x + a, y + b, 1) \nsim ((u + va)\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ dir.

ii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{T}_{a,b}(1, y, z\varepsilon) = (1, y + z(b - ay)\varepsilon, z\varepsilon)$ dir.

1. $(1, y, z\varepsilon) \nsim (u, v, 1) \iff \mathrm{T}_{a,b}(1, y, z\varepsilon) \nsim \mathrm{T}_{a,b}(u, v, 1)$ olduğu i. durumun 2. şıkkında gösterilmiştir.

2. $\mathrm{T}_{a,b}(1, u, v\varepsilon) = (1, u + v(b - au)\varepsilon, v\varepsilon)$ olup

$$\begin{aligned}(1, y, z\varepsilon) \quad \sim \quad (1, u, v\varepsilon) &\iff y - u \in \mathbf{I} \\ &\iff \quad (1, y + z(b - ay)\varepsilon, z\varepsilon) \sim (1, u + v(b - au)\varepsilon, v\varepsilon)\end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(1, y, z\varepsilon) \nsim (u\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

$$\mathrm{T}_{a,b}(u\varepsilon, 1, v\varepsilon) = ((u + va)\varepsilon, 1, v\varepsilon)$$

olup $(1, y + z(b - ay)\varepsilon, z\varepsilon) \nsim ((u + va)\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

iii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{T}_{a,b}(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) = ((w + za)\varepsilon, 1, z\varepsilon)$$

dir.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim (u, v, 1) \iff \mathrm{T}_{a,b}(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim \mathrm{T}_{a,b}(u, v, 1)$ olduğu i. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

2. $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\nsim(1,u,v\varepsilon)\iff \mathrm{T}_{a,b}(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\nsim\mathrm{T}_{a,b}(1,u,v\varepsilon)$ olduğu ii. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

3. $\mathrm{T}_{a,b}(u\varepsilon,1,v\varepsilon)=((u+va)\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olduğundan bu durum için komşuluk bağıntısının korunduğu aşikardır.

$\mathrm{T}_{a,b}$ dönüşümünün doğrular için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, doğru tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine doğru tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır. Tüm durumlarda komşuluk bağıntısının korunduğu noktalar için yapılan işlemlere çok benzeyen işlemlerle görülebilmektedir.

O halde $\mathrm{T}_{a,b}$ dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.■

Yardımcı Teorem 2.3.2: L_a dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.

İspat. Önce Moufang özdeşliklerini kullanarak L_a dönüşümünün üzerinde olma bağıntısını koruduğunu göstereceğiz. Bunu alınan noktanın koordinatlarına göre üç durumda yapacağız.

I. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(x,y,1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{L}_a(x,y,1)=(ax,aya,1)$ dir.

1. $(x,y,1)\in[m,1,k]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{L}_a([m,1,k])=[ma,1,aka]$ olup, verilenlerden

$$\begin{aligned} y &= xm+k \iff aya=a(xm)a+aka \\ &\iff aya=(ax)(ma)+aka \iff \mathrm{L}_a(x,y,1)\in\mathrm{L}_a([m,1,k]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

2. $(x,y,1)\in[1,n\varepsilon,p]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{L}_a([1,n\varepsilon,p])=[1,(a^{-1}n)\varepsilon,ap]$ olup, verilenlerden

$$\begin{aligned} x &= y(n\varepsilon)+p \iff ax=a(y(n\varepsilon))+ap \\ &\iff ax=a\left(y\left(aa^{-1}n\right)\right)\varepsilon+ap \iff ax=(aya)(a^{-1}n)\varepsilon+ap \\ &\iff \mathrm{L}_a(x,y,1)\in\mathrm{L}_a([1,n\varepsilon,p]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(x,y,1)\notin[q\varepsilon,n\varepsilon,1]$ olduğu koordinatlamadan açıktır. Bu durumda $\mathrm{L}_a([q\varepsilon,n\varepsilon,1])=$

$[(qa^{-1})\varepsilon, (a^{-1}na^{-1})\varepsilon, 1]$ olup

$$\mathrm{L}_a\,(x, y, 1) \notin \mathrm{L}_a\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$$

olduğu da koordinatlamadan bilinmektedir.

II. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{L}_a\,(1, y, z\varepsilon) = (1, ya, (za^{-1})\varepsilon)$ dir.

1. $(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{L}_a\,([m, 1, k]) = [ma, 1, aka]$ olup, verilenlerden

$$\begin{aligned} y &= m + (z\varepsilon)\,k \iff y = m + (zk)\,\varepsilon \\ &\iff ya = ma + ((zk)\,a)\,\varepsilon \iff ya = ma + \big(\big(\big(za^{-1}a\big)\,k\big)\,a\big)\,\varepsilon \\ &\iff ya = ma + (za^{-1})\,(aka)\,\varepsilon \iff \mathrm{L}_a\,(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{L}_a\,([m, 1, k]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

2. $(1, y, z\varepsilon) \notin [1, n\varepsilon, p]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Bu durumda $\mathrm{L}_a\,([1, n\varepsilon, p]) = [1, (a^{-1}n)\varepsilon, ap]$ olup

$$\mathrm{L}_a\,(1, y, z\varepsilon) \notin \mathrm{L}_a\,([1, n\varepsilon, p])$$

olduğu koordinatlamadan açıktır.

3. $(1, y, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{L}_a\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = \big[(qa^{-1})\varepsilon, (a^{-1}na^{-1})\varepsilon, 1\big]$$

olup, verilenlerden

$$\begin{aligned} z\varepsilon &= q\varepsilon + y\,(n\varepsilon) \\ &\iff (z\varepsilon)\,a^{-1} = (q\varepsilon)\,a^{-1} + (y\,(n\varepsilon))\,a^{-1} = (q\varepsilon)\,a^{-1} + \big(yaa^{-1}\,(n\varepsilon)\big)\,a^{-1} \\ &\iff (za^{-1})\varepsilon = (qa^{-1})\varepsilon + (ya)\,(a^{-1}na^{-1})\varepsilon \\ &\iff \mathrm{L}_a\,(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{L}_a\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

III. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{L}_a\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) = \big((a^{-1}w)\varepsilon, 1, (a^{-1}za^{-1})\varepsilon\big)$$

dir.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \notin [m, 1, k]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Burada,

$$\mathrm{L}_a\left([m, 1, k]\right) = [ma, 1, aka]$$

olup koordinatlamadan dolayı

$$\mathrm{L}_a\left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right) \notin \mathrm{L}_a\left([m, 1, k]\right)$$

olduğu açıktır.

2. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{L}_a\left([1, n\varepsilon, p]\right) = [1, (a^{-1}n)\varepsilon, ap]$ olur ve

$$\begin{aligned} w\varepsilon &= n\varepsilon + (z\varepsilon)\, p \\ &\Longleftrightarrow a^{-1}w\varepsilon = a^{-1}n\varepsilon + a^{-1}\left(zp\right)\varepsilon = a^{-1}n\varepsilon + a^{-1}\left(za^{-1}ap\right)\varepsilon \\ &\Longleftrightarrow (a^{-1}w)\varepsilon = (a^{-1}n)\varepsilon + (a^{-1}za^{-1})\left(ap\right)\varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{L}_a\left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right) \in \mathrm{L}_a\left([1, n\varepsilon, p]\right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olsun. Diğer taraftan

$$\mathrm{L}_a\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right) = \left[(qa^{-1})\varepsilon, (a^{-1}na^{-1})\varepsilon, 1\right]$$

olup

$$\begin{aligned} (w\varepsilon, 1, z\varepsilon) &\in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1] \Longleftrightarrow z\varepsilon = n\varepsilon \\ &\Longleftrightarrow (a^{-1}za^{-1})\varepsilon = (a^{-1}na^{-1})\varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{L}_a\left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right) \in \mathrm{L}_a\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right) \end{aligned}$$

olduğu aşikardır.

Böylece L_a dönüşümünün mümkün bütün durumlarda üzerinde olmayı koruduğunu göstermiş olduk.

L_a dönüşümünün noktalar için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, nokta tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum(i-iii) söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine nokta tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır.

i. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{L}_a\left(x, y, 1\right) = (ax, aya, 1)$ dir.

1.$\mathrm{L}_a(u,v,1)=(au,ava,1)$ olup $a\notin\mathbf{I}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(x,y,1) \quad \sim \quad (u,v,1) &\iff x-u\in\mathbf{I}\wedge y-v\in\mathbf{I}\\ &\iff a(x-u)\in\mathbf{I}\wedge a(y-v)a\in\mathbf{I}\\ &\iff ax-au\in\mathbf{I}\wedge aya-ava\in\mathbf{I}\\ &\iff (ax,aya,1)\sim(au,ava,1)\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

2. $(x,y,1)\nsim(1,u,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır. $\mathrm{L}_a(1,u,v\varepsilon)=(1,ua,(va^{-1})\varepsilon)$ olup $(ax,aya,1)\nsim(1,ua,(va^{-1})\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bilinmektedir.

3. $(x,y,1)\nsim(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bilinmektedir. $\mathrm{L}_a(u\varepsilon,1,v\varepsilon)=((a^{-1}u)\varepsilon,1,(a^{-1}va^{-1})\varepsilon)$ olup yine koordinatlamadan dolayı

$$(ax,aya,1)\nsim\big((a^{-1}u)\varepsilon,1,(a^{-1}va^{-1})\varepsilon\big)$$

dir.

ii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(1,y,z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{L}_a(1,y,z\varepsilon)=(1,ya,(za^{-1})\varepsilon)$ dir.

1. $(1,y,z\varepsilon)\nsim(u,v,1) \iff \mathrm{L}_a(1,y,z\varepsilon)\nsim\mathrm{L}_a(u,v,1)$ olduğu i. durumun 2. şıkkında gösterilmiştir.

2. $\mathrm{L}_a(1,u,v\varepsilon)=(1,ua,(va^{-1})\varepsilon)$ olup $a\notin\mathbf{I}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(1,y,z\varepsilon) \quad \sim \quad (1,u,v\varepsilon) &\iff y-u\in\mathbf{I}\\ &\iff (y-u)a\in\mathbf{I}\\ &\iff ya-ua\in\mathbf{I}\\ &\iff \big(1,ya,(za^{-1})\varepsilon\big)\sim\big(1,ua,(va^{-1})\varepsilon\big)\end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(1,y,z\varepsilon)\nsim(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bilinmektedir. $\mathrm{L}_a(u\varepsilon,1,v\varepsilon)=((a^{-1}u)\varepsilon,1,(a^{-1}va^{-1})\varepsilon)$ olup $(1,ya,(za^{-1})\varepsilon)\nsim((a^{-1}u)\varepsilon,1,(a^{-1}va^{-1})\varepsilon)$ olduğu yine koordinatlamadan bilinmektedir.

iii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{L}_a(w\varepsilon,1,z\varepsilon)=\big((a^{-1}w)\varepsilon,1,(a^{-1}za^{-1})\varepsilon\big)$$

dir.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim (u, v, 1) \iff \mathrm{L}_a(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim \mathrm{L}_a(u, v, 1)$ olduğu i. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

2. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim (1, u, v\varepsilon) \iff \mathrm{L}_a(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim \mathrm{L}_a(1, u, v\varepsilon)$ olduğu ii. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

3. $\mathrm{L}_a(u\varepsilon, 1, v\varepsilon) = ((a^{-1}u)\varepsilon, 1, (a^{-1}va^{-1})\varepsilon)$ olup bu durum için komşuluk bağıntısının korunduğu aşikardır.

L_a dönüşümünün doğrular için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, doğru tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine doğru tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır. Tüm durumlarda komşuluk bağıntısının korunduğu noktalar için yapılan işlemlere çok benzeyen işlemlerle görülebilmektedir.

O halde L_a dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.$\blacksquare$

Yardımcı Teorem 2.3.3: F_a dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.

İspat. Moufang özdeşliklerini kullanarak F_a dönüşümünün üzerinde olma bağıntısını koruduğunu göstereceğiz. Bunu alınan noktanın koordinatlarına göre üç durumda yapacağız.

I. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}_a(x, y, 1) = (axa, ay, 1)$ dir.

1. $(x, y, 1) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}_a([m, 1, k]) = [a^{-1}m, 1, ak]$ olup

$$\begin{aligned} y &= xm + k \iff ay = a(xm) + ak = a\left(x\left(aa^{-1}m\right)\right) + ak \\ &\iff ay = (axa)\left(a^{-1}m\right) + ak \iff \mathrm{F}_a(x, y, 1) \in \mathrm{F}_a([m, 1, k]) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

2. $(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}_a([1, n\varepsilon, p]) = [1, (na)\varepsilon, apa]$ olup

$$\begin{aligned} x &= y(n\varepsilon) + p \iff axa = a(y(n\varepsilon))a + apa \\ &\iff axa = (ay)(na)\varepsilon + apa \iff \mathrm{F}_a(x, y, 1) \in \mathrm{F}_a([1, n\varepsilon, p]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(x, y, 1) \notin [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olduğu koordinatlamadan açıktır. Bu durumda $\mathrm{F}_a([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = [(a^{-1}qa^{-1})\varepsilon, (na^{-1})\varepsilon, 1]$ olup

$$\mathrm{F}_a(x, y, 1) \notin \mathrm{F}_a([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$$

olduğu koordinatlamadan açıktır.

II. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}_a\,(1, y, z\varepsilon) = (1, a^{-1}y, (a^{-1}za^{-1})\varepsilon)$ dir.

1. $(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}_a\,([m, 1, k]) = [a^{-1}m, 1, ak]$ olup

$$\begin{aligned} y &= m + (z\varepsilon)\,k \\ &\Longleftrightarrow a^{-1}y = a^{-1}m + a^{-1}\,(zk)\,\varepsilon = a^{-1}m + a^{-1}\left(z\left(a^{-1}ak\right)\right)\varepsilon \\ &\Longleftrightarrow a^{-1}y = a^{-1}m + (a^{-1}za^{-1})\,(ak)\,\varepsilon \Longleftrightarrow \mathrm{F}_a\,(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{F}_a\,([m, 1, k]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

2. $(1, y, z\varepsilon) \notin [1, n\varepsilon, p]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Bu durumda $\mathrm{F}_a\,([1, n\varepsilon, p]) = [1, (na)\varepsilon, apa]$ olup

$$\mathrm{F}_a\,(1, y, z\varepsilon) \notin \mathrm{F}_a\,([1, n\varepsilon, p])$$

olduğu koordinatlamadan açıktır.

3. $(1, y, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{F}_a\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = \left[(a^{-1}qa^{-1})\varepsilon, (na^{-1})\varepsilon, 1\right]$$

olup

$$\begin{aligned} z\varepsilon &= q\varepsilon + y\,(n\varepsilon) \Longleftrightarrow a^{-1}\,(z\varepsilon)\,a^{-1} = a^{-1}\,(q\varepsilon)\,a^{-1} + a^{-1}\,(y\,(n\varepsilon))\,a^{-1} \\ &\Longleftrightarrow (a^{-1}za^{-1})\varepsilon = (a^{-1}qa^{-1})\varepsilon + \left(a^{-1}y\right)(na^{-1})\varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{F}_a\,(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{F}_a\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

III. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{F}_a\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) = \left((wa)\varepsilon, 1, (za^{-1})\varepsilon\right)$$

dir.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \notin [m, 1, k]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Burada,

$$\mathrm{F}_a\,([m, 1, k]) = \left[a^{-1}m, 1, ak\right]$$

olup koordinatlamadan dolayı

$$\mathrm{F}_a\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \notin \mathrm{F}_a\,([m, 1, k])$$

dir.

2. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}_a([1, n\varepsilon, p]) = [1, (na)\varepsilon, apa]$ olur ve

$$\begin{aligned} w\varepsilon &= n\varepsilon + (z\varepsilon)\,p \\ &\iff (w\varepsilon)\,a = (n\varepsilon)\,a + ((z\varepsilon)\,p)\,a = (n\varepsilon)\,a + \left(\left(za^{-1}a\right)p\right)a \\ &\iff (wa)\varepsilon = (na)\varepsilon + \left(za^{-1}\right)(apa)\,\varepsilon \iff \mathrm{F}_a(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in \mathrm{F}_a([1, n\varepsilon, p]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olsun. Diğer taraftan

$$\mathrm{F}_a([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = \left[(a^{-1}qa^{-1})\varepsilon, (na^{-1})\varepsilon, 1\right]$$

olup

$$\mathrm{F}_a(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in \mathrm{F}_a([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$$

olması için gerek ve yeter şartın $(za^{-1})\varepsilon = (na^{-1})\varepsilon \iff z\varepsilon = n\varepsilon$ olması olduğu aşikardır.

Böylece F_a dönüşümünün mümkün bütün durumlarda üzerinde olmayı koruduğunu göstermiş olduk.

F_a dönüşümünün noktalar için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, nokta tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum(i-iii) söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine nokta tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır.

i. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}_a(x, y, 1) = (axa, ay, 1)$ dir.

1. $\mathrm{F}_a(u, v, 1) = (aua, av, 1)$ olup $a \notin \mathbf{I}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (x, y, 1) \sim (u, v, 1) &\iff x - u \in \mathbf{I} \wedge y - v \in \mathbf{I} \\ &\iff a\,(x-u)\,a \in \mathbf{I} \wedge a\,(y-v) \in \mathbf{I} \\ &\iff axa - aua \in \mathbf{I} \wedge ay - av \in \mathbf{I} \\ &\iff (axa, ay, 1) \sim (aua, av, 1) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $(x, y, 1) \nsim (1, u, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır.

$$\mathrm{F}_a(1, u, v\varepsilon) = \left(1, a^{-1}u, (a^{-1}va^{-1})\varepsilon\right)$$

olup $(axa, ay, 1) \nsim (1, a^{-1}u, (a^{-1}va^{-1})\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

3. $(x, y, 1) \nsim (u\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bilinmektedir.

$$\mathrm{F}_a(u\varepsilon, 1, v\varepsilon) = \left((ua)\varepsilon, 1, (va^{-1})\varepsilon\right)$$

olup yine koordinatlamadan dolayı $(axa, ay, 1) \nsim ((ua)\varepsilon, 1, (va^{-1})\varepsilon)$ dir.

ii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}_a\,(1, y, z\varepsilon) = (1, a^{-1}y, (a^{-1}za^{-1})\varepsilon)$ dur.

1. $(1, y, z\varepsilon) \nsim (u, v, 1) \iff \mathrm{F}_a\,(1, y, z\varepsilon) \nsim \mathrm{F}_a\,(u, v, 1)$ olduğu i. durumun 2. şıkkında gösterilmiştir.

2. $\mathrm{F}_a\,(1, u, v\varepsilon) = (1, a^{-1}u, (a^{-1}va^{-1})\varepsilon)$ olup $a \notin \mathbf{I}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \big(1, a^{-1}y, (a^{-1}za^{-1})\varepsilon\big) \quad \sim \quad \big(1, a^{-1}u, (a^{-1}va^{-1})\varepsilon\big) &\iff a^{-1}y - a^{-1}u \in \mathbf{I} \\ &\iff a^{-1}\,(y-u) \in \mathbf{I} \\ &\iff y - u \in \mathbf{I} \\ &\iff (1, y, z\varepsilon) \sim (1, u, v\varepsilon) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(1, y, z\varepsilon) \nsim (u\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

$$\mathrm{F}_a\,(u\varepsilon, 1, v\varepsilon) = \big((ua)\varepsilon, 1, (va^{-1})\varepsilon\big)$$

olup $(1, a^{-1}y, (a^{-1}za^{-1})\varepsilon) \nsim ((ua)\varepsilon, 1, (va^{-1})\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

iii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{F}_a\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) = \big((wa)\varepsilon, 1, (za^{-1})\varepsilon\big)$$

dur.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim (u, v, 1) \iff \mathrm{F}_a\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim \mathrm{F}_a\,(u, v, 1)$ olduğu i. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

2. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim (1, u, v\varepsilon) \iff \mathrm{F}_a\,(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim \mathrm{F}_a\,(1, u, v\varepsilon)$ olduğu ii. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

3. $\mathrm{F}_a\,(u\varepsilon, 1, v\varepsilon) = ((ua)\varepsilon, 1, (va^{-1})\varepsilon)$ olup bu durum için komşuluk bağıntısının korunduğu aşikardır.

F_a dönüşümünün doğrular için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, doğru tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine doğru tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır. Tüm durumlarda komşuluk bağıntısının korunduğu noktalar için yapılan işlemlere çok benzeyen işlemlerle görülebilmektedir.

O halde F_a dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.$\blacksquare$

Yardımcı Teorem 2.3.4: $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}$ dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.

İspat. $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}$ dönüşümünün üzerinde olma bağıntısını koruduğunu görmek için $x, y \in \mathcal{A}$, $c \in \mathbf{Z}(\mathcal{A})$ olmak üzere $(cx)\,y = (xc)\,y = x\,(cy) = x\,(yc) = c\,(xy) = (xy)\,c$ eşitliklerini kullanmak yeterli olacaktır.

I. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,(x, y, 1) = (x\beta, y\alpha, 1)$ dir.

1. $(x, y, 1) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,([m, 1, k]) = \left[\beta^{-1}m\alpha, 1, k\alpha\right]$ olup

$$\begin{aligned} y &= xm + k \iff y\alpha = (xm)\,\alpha + k\alpha \iff y\alpha = \left(x\beta\beta^{-1}m\right)\alpha + k\alpha \\ &\iff y\alpha = (x\beta)\left(\beta^{-1}m\alpha\right) + k\alpha \iff \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,(x, y, 1) \in \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,([m, 1, k]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

2. $(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,([1, n\varepsilon, p]) = [1, (\alpha^{-1}n\beta)\varepsilon, p\beta]$ olup

$$\begin{aligned} x &= y\,(n\varepsilon) + p \\ &\iff x\beta = (y\,(n\varepsilon))\,\beta + p\beta \iff x\beta = \left(y\alpha\alpha^{-1}\,(n\varepsilon)\right)\beta + p\beta \\ &\iff x\beta = (y\alpha)\,(\alpha^{-1}n\beta)\varepsilon + p\beta \iff \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,(x, y, 1) \in \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,([1, n\varepsilon, p]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(x, y, 1) \notin [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olduğu koordinatlamadan açıktır. Bu durumda $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = \left[(\beta^{-1}q)\varepsilon, (\alpha^{-1}n)\varepsilon, 1\right]$ olup

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,(x, y, 1) \notin \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$$

olduğu yine koordinatlamadan açıktır.

II. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,(1, y, z\varepsilon) = \left(1, \beta^{-1}y\alpha, (\beta^{-1}z)\varepsilon\right)$ dir.

1. $(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,([m, 1, k]) = \left[\beta^{-1}m\alpha, 1, k\alpha\right]$ olup

$$\begin{aligned} y &= m + (z\varepsilon)\,k \iff \beta^{-1}y = \beta^{-1}m + \beta^{-1}\,((z\varepsilon)\,k) \\ &\iff \beta^{-1}y\alpha = \beta^{-1}m\alpha + \left(\beta^{-1}\,((z\varepsilon)\,k)\right)\alpha \\ &\iff \beta^{-1}y\alpha = \beta^{-1}m\alpha + (\beta^{-1}z)\,(k\alpha)\,\varepsilon \\ &\iff \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,([m, 1, k]) \end{aligned}$$

sonucuna varılır.

2. $(1, y, z\varepsilon) \notin [1, n\varepsilon, p]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Bu durumda $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\,([1, n\varepsilon, p]) =$

$[1,(\alpha^{-1}n\beta)\varepsilon,p\beta]$ olup

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(1,y,z\varepsilon\right)\notin\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left([1,n\varepsilon,p]\right)$$

olduğu yine koordinatlamadan açıktır.

3. $(1,y,z\varepsilon)\in[q\varepsilon,n\varepsilon,1]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left([q\varepsilon,n\varepsilon,1]\right)=\left[(\beta^{-1}q)\varepsilon,(\alpha^{-1}n)\varepsilon,1\right]$$

olup

$$\begin{aligned}
z\varepsilon &= q\varepsilon+y\left(n\varepsilon\right)\iff\beta^{-1}\left(z\varepsilon\right)=\beta^{-1}\left(q\varepsilon\right)+\beta^{-1}\left(y\left(n\varepsilon\right)\right)\\
&\iff \beta^{-1}\left(z\varepsilon\right)=\beta^{-1}\left(q\varepsilon\right)+\beta^{-1}\left(y\alpha\alpha^{-1}\left(n\varepsilon\right)\right)\\
&\iff (\beta^{-1}z)\varepsilon=(\beta^{-1}q)\varepsilon+\left(\beta^{-1}y\alpha\right)(\alpha^{-1}n)\varepsilon\\
&\iff \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(1,y,z\varepsilon\right)\in\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left([q\varepsilon,n\varepsilon,1]\right)
\end{aligned}$$

sonucu bulunur.

III. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(w\varepsilon,1,z\varepsilon\right)=\left((\alpha^{-1}w\beta)\varepsilon,1,(\alpha^{-1}z)\varepsilon\right)$$

dir.

1. $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\notin[m,1,k]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Burada,

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left([m,1,k]\right)=\left[\beta^{-1}m\alpha,1,k\alpha\right]$$

olup koordinatlamadan dolayı

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(w\varepsilon,1,z\varepsilon\right)\notin\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left([m,1,k]\right)$$

dir.

2. $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\in[1,n\varepsilon,p]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left([1,n\varepsilon,p]\right)=\left[1,(\alpha^{-1}n\beta)\varepsilon,p\beta\right]$$

olur ve

$$\begin{aligned}
w\varepsilon &= n\varepsilon+\left(z\varepsilon\right)p\iff\alpha^{-1}\left(w\varepsilon\right)=\alpha^{-1}\left(n\varepsilon\right)+\alpha^{-1}\left(\left(z\varepsilon\right)p\right)\\
&\iff \alpha^{-1}\left(w\varepsilon\right)\beta=\alpha^{-1}\left(n\varepsilon\right)\beta+\alpha^{-1}\left(\left(z\varepsilon\right)p\right)\beta\\
&\iff (\alpha^{-1}w\beta)\varepsilon=(\alpha^{-1}n\beta)\varepsilon+(\alpha^{-1}z)\left(p\beta\right)\varepsilon\\
&\iff \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(w\varepsilon,1,z\varepsilon\right)\in\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left([1,n\varepsilon,p]\right)
\end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olsun. Diğer taraftan

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right) = \left[(\beta^{-1}q)\varepsilon, (\alpha^{-1}n)\varepsilon, 1\right]$$

olup

$$z\varepsilon = n\varepsilon \iff (\alpha^{-1}z)\varepsilon = (\alpha^{-1}n)\varepsilon \iff \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right) \in \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right)$$

olduğu aşikardır.

Böylece $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}$ dönüşümünün mümkün bütün durumlarda üzerinde olmayı koruduğunu göstermiş olduk.

$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}$ dönüşümünün noktalar için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, nokta tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum(i-iii) söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine nokta tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır.

i. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(x, y, 1\right) = (x\beta, y\alpha, 1)$ dir.

1. $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(u, v, 1\right) = (u\beta, v\alpha, 1)$ olup $\alpha, \beta \notin \mathbf{I}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (x, y, 1) \quad \sim \quad (u, v, 1) &\iff x - u \in \mathbf{I} \wedge y - v \in \mathbf{I} \\ &\iff (x-u)\,\beta \in \mathbf{I} \wedge (y-v)\,\alpha \in \mathbf{I} \\ &\iff x\beta - u\beta \in \mathbf{I} \wedge y\alpha - v\alpha \in \mathbf{I} \\ &\iff (x\beta, y\alpha, 1) \sim (u\beta, v\alpha, 1) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $(x, y, 1) \nsim (1, u, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır.

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(1, u, v\varepsilon\right) = \left(1, \beta^{-1}u\alpha, (\beta^{-1}v)\varepsilon\right)$$

olup $(x\beta, y\alpha, 1) \nsim \left(1, \beta^{-1}u\alpha, (\beta^{-1}v)\varepsilon\right)$ olduğu koordinatlamadan bellidir..

3. $(x, y, 1) \nsim (u\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bilinmektedir. $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(u\varepsilon, 1, v\varepsilon\right) = ((\alpha^{-1}u\beta)\varepsilon, 1, (\alpha^{-1}v)\varepsilon)$ olup yine koordinatlamadan dolayı

$$(x\beta, y\alpha, 1) \nsim \left((\alpha^{-1}u\beta)\varepsilon, 1, (\alpha^{-1}v)\varepsilon\right)$$

dir.

ii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(1, y, z\varepsilon\right) = \left(1, \beta^{-1}y\alpha, (\beta^{-1}z)\varepsilon\right)$ dur.

1. $(1, y, z\varepsilon) \nsim (u, v, 1) \iff \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(1, y, z\varepsilon\right) \nsim \mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(u, v, 1\right)$ olduğu i. durumun 2.

şıkkında gösterilmiştir.

2. $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(1,u,v\varepsilon\right)=\left(1,\beta^{-1}u\alpha,(\beta^{-1}v)\varepsilon\right)$ olup $\alpha,\beta\notin\mathbf{I}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(1,y,z\varepsilon)\quad\sim\quad(1,u,v\varepsilon)&\iff y-u\in\mathbf{I}\\&\iff \beta^{-1}\left(y-u\right)\alpha\in\mathbf{I}\\&\iff \beta^{-1}y\alpha-\beta^{-1}u\alpha\in\mathbf{I}\\&\iff \left(1,\beta^{-1}y\alpha,(\beta^{-1}z)\varepsilon\right)\sim\left(1,\beta^{-1}u\alpha,(\beta^{-1}v)\varepsilon\right)\end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(1,y,z\varepsilon)\nsim(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(u\varepsilon,1,v\varepsilon\right)=\left((\alpha^{-1}u\beta)\varepsilon,1,(\alpha^{-1}v)\varepsilon\right)$$

olup $\left(1,\beta^{-1}y\alpha,(\beta^{-1}z)\varepsilon\right)\nsim((\alpha^{-1}u\beta)\varepsilon,1,(\alpha^{-1}v)\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

iii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(w\varepsilon,1,z\varepsilon\right)=\left((\alpha^{-1}w\beta)\varepsilon,1,(\alpha^{-1}z)\varepsilon\right)$$

dur.

1. $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\nsim(u,v,1)\iff\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(w\varepsilon,1,z\varepsilon\right)\nsim\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(u,v,1\right)$ olduğu i. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

2. $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\nsim(1,u,v\varepsilon)\iff\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(w\varepsilon,1,z\varepsilon\right)\nsim\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(1,u,v\varepsilon\right)$ olduğu ii. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

3. $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}\left(u\varepsilon,1,v\varepsilon\right)=((\alpha^{-1}u\beta)\varepsilon,1,(\alpha^{-1}v)\varepsilon)$ olup bu durum için komşuluk bağıntısının korunduğu aşikardır.

$\mathrm{S}_{\alpha,\beta}$ dönüşümünün doğrular için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, doğru tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine doğru tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır. Tüm durumlarda komşuluk bağıntısının korunduğu noktalar için yapılan işlemlere çok benzeyen işlemlerle görülebilmektedir.

O halde $\mathrm{S}_{\alpha,\beta}$ dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.$\blacksquare$

Yardımcı Teorem 2.3.5: I_1 dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.

İspat. I_1 in üzerinde olma bağıntısını koruduğunu göstermek için ispatı 3 duruma ayırabiliriz:

I. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(x,y,1)$ olsun.

1. $(x, y, 1) \in [m, 1, k]$ olsun. O zaman $y = xm + k$ olur ve $(x, y, 1)$ in I_1 altındaki görüntüsü x in **I** da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden iki alt durum söz konusudur.

1.1. $x \in \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{I}_1 (x, y, 1) = (1, y, x) \text{ ve } \mathrm{I}_1 ([m, 1, k]) = [k, 1, m]$$

olup

$$(x, y, 1) \in [m, 1, k] \iff y = xm + k \iff \mathrm{I}_1 (x, y, 1) \in \mathrm{I}_1 ([m, 1, k])$$

sonucu bulunur.

1.2. $x \notin \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{I}_1 (x, y, 1) = \left(x^{-1}, x^{-1}y, 1\right) \text{ ve } \mathrm{I}_1 ([m, 1, k]) = [k, 1, m]$$

olur ve

$$y = xm + k \iff x^{-1}y = x^{-1}k + m \iff \mathrm{I}_1 (x, y, 1) \in \mathrm{I}_1 ([m, 1, k])$$

elde edilir.

2. $(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. O zaman $x = y\,(n\varepsilon) + p$ olur. $(x, y, 1)$ ve $[1, n\varepsilon, p]$ nin I_1 altındaki görüntüsü x ve p nin **I** da olup olmadığına bağlı değiştiğinden dört alt durum söz konusudur.

2.1. $x \in \mathbf{I}$ ve $p \in \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{I}_1 (x, y, 1) = (1, y, x) \text{ ve } \mathrm{I}_1 ([1, n\varepsilon, p]) = [p, n\varepsilon, 1]$$

olduğundan

$$x = y\,(n\varepsilon) + p \iff \mathrm{I}_1 (x, y, 1) \in \mathrm{I}_1 ([1, n\varepsilon, p])$$

sonucu bulunur.

2.2. $x \in \mathbf{I}$ ve $p \notin \mathbf{I}$ ise: $(x, y, 1) \notin [1, n\varepsilon, p]$ dir. Çünkü $(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsaydı $x = (yn)\,\varepsilon + p$ olurdu ki, $p \notin \mathbf{I}$ olduğundan, bu $x \notin \mathbf{I}$ anlamına gelip kabul ile çelişki verirdi. Aynı zamanda

$$\mathrm{I}_1 (x, y, 1) = (1, y, x) \text{ ve } \mathrm{I}_1 ([1, n\varepsilon, p]) = \left[1, -\left(np^{-1}\right)\varepsilon, p^{-1}\right]$$

olup $\mathrm{I}_1 (x, y, 1) \notin \mathrm{I}_1 ([1, n\varepsilon, p])$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

2.3. $x \notin \mathbf{I}$ ve $p \in \mathbf{I}$ ise: $(x, y, 1) \notin [1, n\varepsilon, p]$ dir. Çünkü $(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsaydı $x = y\,(n\varepsilon) + p$ olurdu ki, $p \in \mathbf{I}$ olduğundan, bu $x \notin \mathbf{I}$ kabulü ile bir çelişki verirdi. Aynı zamanda

$$\mathrm{I}_1(x,y,1)=\left(x^{-1},x^{-1}y,1\right) \text{ ve } \mathrm{I}_1([1,n\varepsilon,p])=[p,n\varepsilon,1]$$

olup $\mathrm{I}_1(x,y,1) \notin \mathrm{I}_1([1,n\varepsilon,p])$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

2.4. $x\notin \mathbf{I}$ ve $p\notin \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{I}_1(x,y,1)=\left(x^{-1},x^{-1}y,1\right) \text{ ve } \mathrm{I}_1([1,n\varepsilon,p])=\left[1,-\left(np^{-1}\right)\varepsilon,p^{-1}\right]$$

olur. $x\notin \mathbf{I}$ ve $p\notin \mathbf{I}$ olduğundan $x=x_1+x_2\varepsilon$, $p=p_1+p_2\varepsilon$ olacak biçimde $\mathbf{A}$ da $x_1\neq 0$, $p_1\neq 0$ özelliğinde x_1,x_2,p_1,p_2 elemanları vardır. Bu durumda $x^{-1}=x_1^{-1}-x_1^{-1}x_2x_1^{-1}\varepsilon$, $p^{-1}=p_1^{-1}-p_1^{-1}p_2p_1^{-1}\varepsilon$ olur. Hesaplamalar yaparak,

$$\left(x^{-1},x^{-1}y,1\right)\in\left[1,-\left(np^{-1}\right)\varepsilon,p^{-1}\right]$$

olması için gerek ve yeter şartın ($n=n_1+n_2\varepsilon\in\mathbf{I}$ olduğundan n ara işlemlerde $n_2\varepsilon$ olarak belirtilecektir.)

$$x_1^{-1}-x_1^{-1}x_2x_1^{-1}\varepsilon=-\left(\left(x_1^{-1}y_1\right)\left(n_2p_1^{-1}\right)\right)\varepsilon+p_1^{-1}-p_1^{-1}p_2p_1^{-1}\varepsilon$$

olduğu kolayca bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki ε bulunduran ifadeler ε parantezinde toplanırsa $x_1^{-1}=p_1^{-1}$ ve

$$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}=\left(x_1^{-1}y_1\right)\left(n_2p_1^{-1}\right)+p_1^{-1}p_2p_1^{-1} \tag{2.1}$$

eşitlikleri bulunur. $x_1^{-1}=p_1^{-1}$ eşitliğinden elde edilen $x_1=p_1$ sonucu (2.1) eşitliğinde kullanıldığında,

$$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}=\left(x_1^{-1}y_1\right)\left(n_2x_1^{-1}\right)+x_1^{-1}p_2x_1^{-1}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte yer alan tüm değişkenler $\mathbf{A}$ Cayley bölümlü cebirinin elemanları olduğundan Moufang özdeşlikleri geçerlidir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x_1^{-1}x_2x_1^{-1} &= x_1^{-1}(y_1n_2)x_1^{-1}+x_1^{-1}p_2x_1^{-1}\\ &= x_1^{-1}((y_1n_2)x_1^{-1}+p_2x_1^{-1})\\ &= x_1^{-1}((y_1n_2+p_2)x_1^{-1})\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Son eşitliğin sağ tarafında yer alan $y_1n_2+p_2$ ifadesi bir tek eleman olarak gözönüne alındığında, iki eleman tarafından üretilen cebirin birleşmeli olduğu kullanılarak,

$$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}=x_1^{-1}(y_1n_2+p_2)x_1^{-1}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, önce soldan x_1 ile sonra sağdan x_1 ile çarpma yapıldığında, yine iki eleman tarafından üretilen cebirin birleşmeli olduğu kullanılarak

$$x_2 = y_1 n_2 + p_2$$

olduğu bulunur. Böylece

$$(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p] \Rightarrow x_1 = p_1 \text{ ve } x_2 = y_1 n_2 + p_2$$

elde edilmiş olur. Buradan $x_2\varepsilon = (y_1 n_2)\,\varepsilon + p_2\varepsilon$ ve $x_1 + x_2\varepsilon = x_1 + (y_1 n_2)\,\varepsilon + p_2\varepsilon$ olup $x_1 = p_1$ eşitliği kullanılarak $x = (y_1 n_2)\,\varepsilon + p_1 + p_2\varepsilon$ yazılabilir. $(y_1 + y_2\varepsilon)\,n = (y_1 n_2)\,\varepsilon$ olduğundan $x = y\,(n\varepsilon) + p \iff (x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p]$ dir. Sonuç olarak

$$(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p] \iff x_1 = p_1 \text{ ve } x_2 = y_1 n_2 + p_2$$

olduğundan I_1 incelenen durumda üzerinde olmayı korur.

3. $(x, y, 1) \notin [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olduğu koordinatlamadan açıktır. $(x, y, 1)$ in I_1 altındaki görüntüsü x in **I** da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden iki alt durumsöz konusudur.

3.1. $x \in$ **I** ise: $\mathrm{I}_1\,(x, y, 1) = (1, y, x)$ ve $\mathrm{I}_1\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = [1, n\varepsilon, q\varepsilon]$ olup

$$\mathrm{I}_1\,(x, y, 1) \notin \mathrm{I}_1\,([m, 1, k])$$

olduğu yine koordinatlamadan bellidir.

3.2. $x \notin$ **I** ise:

$$\mathrm{I}_1\,(x, y, 1) = \left(x^{-1}, x^{-1}y, 1\right) \text{ ve } \mathrm{I}_1\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = [1, n\varepsilon, q\varepsilon]$$

olup $\mathrm{I}_1\,(x, y, 1) \in \mathrm{I}_1\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$ olsaydı $x^{-1} = ((x^{-1}y)\,n + q)\,\varepsilon$ bulunurdu ki bu $x \in$ **I** çelişkisini verirdi. O halde $\mathrm{I}_1\,(x, y, 1) \notin \mathrm{I}_1\,([1, n\varepsilon, q\varepsilon])$ dur.

II. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{I}_1\,(1, y, z\varepsilon) = (z\varepsilon, y, 1)$ dir.

1. $(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{I}_1\,([m, 1, k]) = [k, 1, m]$ olup

$$(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k] \iff y = m + (z\varepsilon)\,k \iff \mathrm{I}_1\,(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{I}_1\,([m, 1, k])$$

sonucu bulunur.

2. $(1, y, z\varepsilon) \notin [1, n\varepsilon, p]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. $[1, n\varepsilon, p]$ nin I_1 altındaki görüntüsü p nin **I** da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden iki alt durum söz konusudur.

2.1. $p \in$ **I** ise: $\mathrm{I}_1\,([1, n\varepsilon, p]) = [p, n\varepsilon, 1]$ olduğundan koordinatlamanın direkt bir sonucu olarak

$$\mathrm{I}_1\left(1, y, z\varepsilon\right) \notin \mathrm{I}_1\left(\left[1, n\varepsilon, p\right]\right)$$

dir.

2.2. $p \notin$ **I** ise:

$$\mathrm{I}_1\left(\left[1, n\varepsilon, p\right]\right) = \left[1, -\left(np^{-1}\right)\varepsilon, p^{-1}\right] \text{ ve } \mathrm{I}_1\left(1, y, z\varepsilon\right) = \left(z\varepsilon, y, 1\right)$$

olup $(z\varepsilon, y, 1) \in [1, -(np^{-1})\varepsilon, p^{-1}]$ olsaydı $p^{-1} = z\varepsilon + y(np^{-1})\varepsilon \in$ **I** olurdu ki bu $p \in$ **I** çelişkisine yol açardı. O halde $\mathrm{I}_1(1, y, z\varepsilon) \notin \mathrm{I}_1([1, n\varepsilon, q\varepsilon])$ dur.

3. $(1, y, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{I}_1([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = [1, n\varepsilon, q\varepsilon]$ olup

$$(1, y, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1] \iff z\varepsilon = y(n\varepsilon) + q\varepsilon \iff \mathrm{I}_1(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{I}_1([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$$

sonucu bulunur.

III. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{I}_1(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) = (z\varepsilon, 1, w\varepsilon)$$

dir.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \notin [m, 1, k]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Burada,

$$\mathrm{I}_1([m, 1, k]) = [k, 1, m]$$

olup yine koordinatlamadan dolayı $\mathrm{I}_1(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \notin \mathrm{I}_1([m, 1, k])$ sonucu bulunur.

2. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [1, n\varepsilon, p] \iff w\varepsilon = n\varepsilon + (z\varepsilon)p$ dir. $[1, n\varepsilon, p]$ nin I_1 altındaki görüntüsü p nin **I** da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden iki alt durumda inceleme yapılır.

2.1. $p \in$ **I** ise: $\mathrm{I}_1([1, n\varepsilon, p]) = [p, n\varepsilon, 1]$ olduğundan $w\varepsilon = n\varepsilon + (z\varepsilon)p \iff \mathrm{I}_1(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in \mathrm{I}_1([1, n\varepsilon, p])$ sonucu elde edilir.

2.2. $p \notin$ **I** ise: $\mathrm{I}_1([1, n\varepsilon, p]) = [1, -(np^{-1})\varepsilon, p^{-1}]$ olur ve

$$w\varepsilon = n\varepsilon + (z\varepsilon)p \iff z\varepsilon = -(n\varepsilon)p^{-1} + (w\varepsilon)p^{-1} \iff \mathrm{I}_1(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in \mathrm{I}_1([1, n\varepsilon, p])$$

sonucu bulunur.

3. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olması için gerek ve yeter şart $z\varepsilon = n\varepsilon$ olmasıdır. Diğer taraftan $\mathrm{I}_1([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = [1, n\varepsilon, q\varepsilon]$ olup

$$\mathrm{I}_1(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in \mathrm{I}_1([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$$

olması için gerek ve yeter şartın yine $z\varepsilon = n\varepsilon$ olduğu aşikardır.

Böylelikle I_1 dönüşümünün mümkün bütün durumlarda üzerinde olmayı koruduğunu göstermiş olduk.

I_1 dönüşümünün noktalar için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, nokta tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum(i-iii) söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine nokta tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır.

i. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun.

1. $(x, y, 1) \sim (u, v, 1) \iff x-u \in \mathbf{I} \wedge y-v \in \mathbf{I}$ dır. $(x, y, 1)$ ve $(u, v, 1)$ noktalarının I_1 altındaki görüntüsü x ve u nun $\mathbf{I}$ da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden üç alt durum söz konusudur.

1.1. $x \notin \mathbf{I}$ ve $u \notin \mathbf{I}$ iken $I_1(x, y, 1) = (x^{-1}, x^{-1}y, 1)$, $I_1(u, v, 1) = (u^{-1}, u^{-1}v, 1)$ olur. $x = x_1 + x_2\varepsilon$ ve $y = y_1 + y_2\varepsilon$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(x, y, 1) \quad \sim \quad & (u, v, 1) \iff x - u \in \mathbf{I} \wedge y - v \in \mathbf{I} \\
\iff \quad & x_1 - u_1 = 0 \wedge y_1 - v_1 = 0 \\
\iff \quad & x_1 = u_1 \wedge y_1 = v_1 \\
\iff \quad & x_1^{-1} - u_1^{-1} = 0 \wedge x_1^{-1}y_1 - u_1^{-1}v_1 = 0 \\
\iff \quad & x^{-1} - u^{-1} \in \mathbf{I} \wedge x^{-1}y - u^{-1}v \in \mathbf{I} \\
\iff \quad & \left(x^{-1}, x^{-1}y, 1\right) \sim \left(u^{-1}, u^{-1}v, 1\right)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

1.2. $x \in \mathbf{I}$ ve $u \notin \mathbf{I}$ iken $I_1(x, y, 1) = (1, y, x)$, $I_1(u, v, 1) = (u^{-1}, u^{-1}v, 1)$ olur. Bu durumda $(1, y, x) \nsim (u^{-1}, u^{-1}v, 1)$ olduğu koordinatlamadan açıktır. $(x, y, 1) \nsim (u, v, 1)$ dir. Çünkü $(x, y, 1) \sim (u, v, 1)$ olsaydı, $x \in \mathbf{I} \wedge u \notin \mathbf{I}$ olduğundan, $x - u \notin \mathbf{I}$ olur ki bu mümkün değildir.

1.3. $x \in \mathbf{I}$ ve $u \in \mathbf{I}$ iken $I_1(x, y, 1) = (1, y, x)$, $I_1(u, v, 1) = (1, v, u)$ olur ve

$$(x, y, 1) \sim (u, v, 1) \iff y - v \in \mathbf{I} \wedge x - u \in \mathbf{I} \iff (1, y, x) \sim (1, v, u)$$

elde edilir.

2. $(x, y, 1) \nsim (1, u, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır. $I_1(1, u, v\varepsilon) = (v\varepsilon, u, 1)$ dir ve $(x, y, 1)$ noktasının I_1 altındaki görüntüsü x in $\mathbf{I}$ da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden iki alt durum söz konusudur.

2.1. $x \notin \mathbf{I}$ ise $I_1(x, y, 1) = (x^{-1}, x^{-1}y, 1)$ dir. Bu durumda $(x^{-1}, x^{-1}y, 1) \nsim$

$(v\varepsilon, u, 1)$ dir. Çünkü $(x^{-1}, x^{-1}y, 1) \sim (v\varepsilon, u, 1)$ olsaydı $x^{-1} - v\varepsilon \in \mathbf{I}$ olmasını gerektirirdi ki, $x \notin \mathbf{I}$ olduğundan, bu mümkün değildir.

2.2. $x \in \mathbf{I}$ ise $\mathrm{I}_1(x, y, 1) = (1, y, x)$ dir. Bu durumda $(1, y, x) \nsim (v\varepsilon, u, 1)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

3. $(x, y, 1) \nsim (u\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır. $(x, y, 1)$ noktasının I_1 altındaki görüntüsü x in $\mathbf{I}$ da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden iki alt durum söz konusudur.

3.1. $x \notin \mathbf{I}$ ise $\mathrm{I}_1(x, y, 1) = (x^{-1}, x^{-1}y, 1)$ dir. Bu durumda $(x^{-1}, x^{-1}y, 1) \nsim (v\varepsilon, 1, u\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır.

3.2. $x \in \mathbf{I}$ ise $\mathrm{I}_1(x, y, 1) = (1, y, x)$ dir. Bu durumda $(1, y, x) \nsim (v\varepsilon, 1, u\varepsilon)$ olduğu yine koordinatlamadan açıktır.

ii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{I}_1(1, y, z\varepsilon) = (z\varepsilon, y, 1)$ dir.

1. $(1, y, z\varepsilon) \nsim (u, v, 1) \iff \mathrm{I}_1(1, y, z\varepsilon) \nsim \mathrm{I}_1(u, v, 1)$ olduğu i. durumun 2. şıkkında gösterilmiştir.

2. $\mathrm{I}_1(1, u, v\varepsilon) = (v\varepsilon, u, 1)$ olup

$$(1, y, z\varepsilon) \sim (1, u, v\varepsilon) \iff y - u \in \mathbf{I} \iff (z\varepsilon, y, 1) \sim (v\varepsilon, u, 1)$$

sonucu bulunur.

3. $\mathrm{I}_1(u\varepsilon, 1, v\varepsilon) = (v\varepsilon, 1, u\varepsilon)$ olup $(z\varepsilon, y, 1) \nsim (v\varepsilon, 1, u\varepsilon)$ ve $(1, y, z\varepsilon) \nsim (u\varepsilon, 1, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

iii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{I}_1(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) = (z\varepsilon, 1, w\varepsilon)$$

dur.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim (u, v, 1) \iff \mathrm{I}_1(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim \mathrm{I}_1(u, v, 1)$ olduğu i. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

2. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim (1, u, v\varepsilon) \iff \mathrm{I}_1(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim \mathrm{I}_1(1, u, v\varepsilon)$ olduğu ii. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

3. $\mathrm{I}_1(u\varepsilon, 1, v\varepsilon) = (v\varepsilon, 1, u\varepsilon)$ olup

$$(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \sim (u\varepsilon, 1, v\varepsilon) \iff (z\varepsilon, 1, w\varepsilon) \sim (v\varepsilon, 1, u\varepsilon)$$

elde edilir.

I_1 dönüşümünün doğrular için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, doğru tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine doğru tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır. Tüm durumlarda komşuluk bağıntısının korunduğu noktalar için yapılan işlemlere çok benzeyen işlemlerle görülebilmektedir.

O halde I_1 dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.■

Yardımcı Teorem 2.3.6: F dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.

İspat. F dönüşümünün üzerinde olma bağıntısını koruduğunu görmek kolaydır.

I. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}(x, y, 1) = (y, x, 1)$ dir.

1. $(x, y, 1) \in [m, 1, k]$ olsun. O zaman $y = xm + k$ olur. Bu durumda m nin **I** da olup olmadığına bağlı olarak iki alt durum söz konusudur.

1.1. $m \in$ **I** ise: $\mathrm{F}([m, 1, k]) = [1, m, k]$ olup

$$y = xm + k \iff \mathrm{F}(x, y, 1) \in \mathrm{F}([m, 1, k])$$

sonucu bulunur.

1.2. $m \notin$ **I** ise: $\mathrm{F}([m, 1, k]) = [m^{-1}, 1, -km^{-1}]$ olup

$$\begin{aligned} y &= xm + k \iff xm = y - k \iff x = ym^{-1} - km^{-1} \\ &\iff \mathrm{F}(x, y, 1) \in \mathrm{F}([m, 1, k]) \end{aligned}$$

dır.

2. $(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}([1, n\varepsilon, p]) = [n\varepsilon, 1, p]$ olup

$$x = y(n\varepsilon) + p \iff \mathrm{F}(x, y, 1) \in \mathrm{F}([1, n\varepsilon, p])$$

sonucu bulunur.

3. $(x, y, 1) \notin [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olduğu koordinatlamadan açıktır. Bu durumda $\mathrm{F}([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = [(n\varepsilon, q\varepsilon, 1]$ olup

$$\mathrm{F}(x, y, 1) \notin \mathrm{F}([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$$

olduğu yine koordinatlamadan açıktır.

II. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun.

1. $(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k]$ olsun. O zaman $y = m + (z\varepsilon)k$ olur. Bu durumda y ve m nin **I**

da olup olmadığına bağlı olarak dört alt durum söz konusudur.

1.1. $y \in \mathbf{I}$ ve $m \in \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) = (y, 1, z\varepsilon) \text{ ve } \mathrm{F}([m, 1, k]) = [1, m, k]$$

olup

$$y = m + (z\varepsilon) k \iff \mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{F}([m, 1, k])$$

sonucu bulunur.

1.2. $y \in \mathbf{I}$ ve $m \notin \mathbf{I}$ ise: $(1, y, z\varepsilon) \notin [m, 1, k]$ dir. Çünkü $(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k]$ olsaydı $y = m + (z\varepsilon) k$ olurdu ki, $m \notin \mathbf{I}$ olduğundan, bu $y \in \mathbf{I}$ kabulü ile bir çelişki verirdi. Aynı zamanda

$$\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) = (y, 1, z\varepsilon) \text{ ve } \mathrm{F}([m, 1, k]) = \left[m^{-1}, 1, -km^{-1}\right]$$

olup $\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) \notin \mathrm{F}([m, 1, k])$ olduğu koordinatlamadan bilinmektedir.

1.3. $y \notin \mathbf{I}$ ve $m \in \mathbf{I}$ ise: $(1, y, z\varepsilon) \notin [m, 1, k]$ dir. Çünkü $(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k]$ olsaydı $y = m + (z\varepsilon) k$ olurdu ki, $m \in \mathbf{I}$ olduğundan, bu $y \notin \mathbf{I}$ kabulü ile bir çelişki verirdi. Aynı zamanda

$$\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) = \left(1, y^{-1}, (y^{-1}z)\varepsilon\right) \text{ ve } \mathrm{F}([m, 1, k]) = [1, m, k]$$

olup $\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) \notin \mathrm{F}([m, 1, k])$ olduğu koordinatlamadan açıktır.

1.4. $y \notin \mathbf{I}$ ve $m \notin \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) = \left(1, y^{-1}, (y^{-1}z)\varepsilon\right) \text{ ve } \mathrm{F}([m, 1, k]) = \left[m^{-1}, 1, -km^{-1}\right]$$

olup

$$\begin{aligned} y &= m + (z\varepsilon) k \iff y^{-1} = m^{-1} - m^{-1}(zk) m^{-1}\varepsilon \\ &\iff y^{-1} = m^{-1} - \left(m^{-1}z\right)\left(km^{-1}\right)\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki

$$y^{-1} = m^{-1} - \left(m^{-1}z\right)\left(km^{-1}\right)\varepsilon \iff y^{-1}z\varepsilon = m^{-1}z\varepsilon$$

olduğu dikkate alınarak

$$y^{-1} = m^{-1} - \left(m^{-1}z\right)\left(km^{-1}\right)\varepsilon \iff y^{-1} = m^{-1} - (y^{-1}z)\left(km^{-1}\right)\varepsilon$$

bulunur. Bu durumda

$$\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{F}([m, 1, k])$$

sonucu elde edilir.

2. $(1, y, z\varepsilon) \notin [1, n\varepsilon, p]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Bu durumda y nin **I** da olup olmadığına bağlı olarak iki alt durum söz konusudur.

2.1. $y \in \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{F}\left(1, y, z\varepsilon\right) = \left(y, 1, z\varepsilon\right) \text{ ve } \mathrm{F}\left(\left[1, n\varepsilon, p\right]\right) = \left[n\varepsilon, 1, p\right]$$

olup $\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) \notin \mathrm{F}([1, n\varepsilon, p])$ olduğu koordinatlamadan açıktır.

2.2. $y \notin \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{F}\left(1, y, z\varepsilon\right) = \left(1, y^{-1}, (y^{-1}z)\varepsilon\right) \text{ ve } \mathrm{F}\left(\left[1, n\varepsilon, p\right]\right) = \left[n\varepsilon, 1, p\right]$$

olup $\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) \notin \mathrm{F}([1, n\varepsilon, p])$ dir. Çünkü $\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{F}([1, n\varepsilon, p])$ olsaydı $y^{-1} = n\varepsilon + (y^{-1}z)p\varepsilon$ olurdu ki bu $y \notin \mathbf{I}$ ile bir çelişki verirdi.

3. $(1, y, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olsun. O zaman $z\varepsilon = q\varepsilon + yn\varepsilon$ olur. Bu durumda y nin **I** da olup olmadığına bağlı olarak iki alt durum söz konusudur.

3.1. $y \in \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{F}\left(1, y, z\varepsilon\right) = \left(y, 1, z\varepsilon\right) \text{ ve } \mathrm{F}\left(\left[q\varepsilon, n\varepsilon, 1\right]\right) = \left[(n\varepsilon, q\varepsilon, 1\right]$$

olup $z\varepsilon = q\varepsilon + yn\varepsilon$ eşitliği hem

$$(1, y, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$$

in hem de

$$\mathrm{F}\left(1, y, z\varepsilon\right) \in \mathrm{F}\left(\left[q\varepsilon, n\varepsilon, 1\right]\right)$$

in gerek ve yeter şartıdır.

3.2. $y \notin \mathbf{I}$ ise:

$$\mathrm{F}\left(1, y, z\varepsilon\right) = \left(1, y^{-1}, (y^{-1}z)\varepsilon\right) \text{ ve } \mathrm{F}\left(\left[q\varepsilon, n\varepsilon, 1\right]\right) = \left[(n\varepsilon, q\varepsilon, 1\right]$$

olup

$$z\varepsilon = q\varepsilon + yn\varepsilon \iff y^{-1}z\varepsilon = y^{-1}q\varepsilon + n\varepsilon \iff \mathrm{F}\left(1, y, z\varepsilon\right) \in \mathrm{F}\left(\left[q\varepsilon, n\varepsilon, 1\right]\right)$$

sonucu elde edilir.

III. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{F}\left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right) = \left(1, w\varepsilon, z\varepsilon\right)$$

dir.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \notin [m, 1, k]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Bu durumda m nin **I** da olup olmadığına bağlı olarak iki alt durum söz konusudur.

1.1. $m \in \mathbf{I}$ ise: F$([m,1,k]) = [1,m,k]$ olup F$(w\varepsilon,1,z\varepsilon)$ $\notin$F$([m,1,k])$ olduğu yine koordinatlamadan açıktır.

1.2. $m \notin \mathbf{I}$ ise: F$([m,1,k]) = [m^{-1},1,-km^{-1}]$ olup

$$\mathrm{F}\left(w\varepsilon,1,z\varepsilon\right) \notin \mathrm{F}\left([m,1,k]\right)$$

dır. Çünkü F$(w\varepsilon,1,z\varepsilon)$ $\in$F$([m,1,k])$ olsaydı $w\varepsilon = m^{-1} - (z\varepsilon)\,(km^{-1})$ olurdu ki bu $m \notin \mathbf{I}$ ile bir çelişki verirdi.

2. $(w\varepsilon,1,z\varepsilon) \in [1,n\varepsilon,p]$ olsun. Bu durumda F$([1,n\varepsilon,p]) = [n\varepsilon,1,p]$ olur ve

$$w\varepsilon = n\varepsilon + (z\varepsilon)\,p \iff \mathrm{F}\left(w\varepsilon,1,z\varepsilon\right) \in \mathrm{F}\left([1,n\varepsilon,p]\right)$$

sonucu bulunur.

3. $(w\varepsilon,1,z\varepsilon) \in [q\varepsilon,n\varepsilon,1]$ olması için gerek ve yeter şart $z\varepsilon = n\varepsilon$ olmasıdır. Diğer taraftan

$$\mathrm{F}\left([q\varepsilon,n\varepsilon,1]\right) = [n\varepsilon,q\varepsilon,1]$$

olup

$$\mathrm{F}\left(w\varepsilon,1,z\varepsilon\right) \in \mathrm{F}\left([q\varepsilon,n\varepsilon,1]\right)$$

olması için gerek ve yeter şartın $z\varepsilon = n\varepsilon$ olması olduğu da aşikardır.

Böylece F dönüşümünün mümkün bütün durumlarda üzerinde olmayı koruduğunu göstermiş olduk.

F dönüşümünün noktalar için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, nokta tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum(i-iii) söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine nokta tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır.

i. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(x,y,1)$ olsun. Bu durumda F$(x,y,1) = (y,x,1)$ dir.

1. F$(u,v,1) = (v,u,1)$ olup bu durumda

$$(x,y,1) \sim (u,v,1) \iff x-u \in \mathbf{I} \wedge y-v \in \mathbf{I} \iff (y,x,1) \sim (v,u,1)$$

elde edilir.

2. $(x,y,1) \nsim (1,u,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır. $(1,u,v\varepsilon)$ noktasının I_1 altındaki görüntüsü u nun $\mathbf{I}$ da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden iki alt durum söz konusudur.

2.1. $u \notin \mathbf{I}$ ise $(x,y,1) \nsim (1,u,v\varepsilon)$ ve F$(1,u,v\varepsilon) = (1,u^{-1},(u^{-1}v)\varepsilon)$ dur. Bu durumda

$$(y,x,1) \nsim \big(1,u^{-1},(u^{-1}v)\varepsilon\big)$$

olduğu koordinatlamadan bellidir.

2.2. $u \in \mathbf{I}$ ise $(x,y,1) \nsim (1,u,v\varepsilon)$ ve $\mathrm{F}(1,u,v\varepsilon) = (u,1,v\varepsilon)$ dur. Bu durumda $(y,x,1) \nsim (u,1,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır.

3. $(x,y,1) \nsim (u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır. $\mathrm{F}(u\varepsilon,1,v\varepsilon) = (1,u\varepsilon,v\varepsilon)$ olup $(y,x,1) \nsim (1,u\varepsilon,v\varepsilon)$ olduğu yine koordinatlamadan bellidir.

ii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(1,y,z\varepsilon)$ olsun.

1. $(1,y,z\varepsilon) \nsim (u,v,1) \iff \mathrm{F}(1,y,z\varepsilon) \nsim \mathrm{F}(u,v,1)$ olduğu i. durumun 2. şıkkında gösterilmiştir.

2. $(1,y,z\varepsilon)$ ve $(1,u,v\varepsilon)$ noktalarının F altındaki görüntüsü y ve u nun **I** da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden üç alt durum söz konusudur.

2.1. $y \notin \mathbf{I}$ ve $u \notin \mathbf{I}$ ise $\mathrm{F}(1,y,z\varepsilon) = (1,y^{-1},(y^{-1}z)\varepsilon)$ ve

$$\mathrm{F}\,(1,u,v\varepsilon) = \big(1,u^{-1},(u^{-1}v)\varepsilon\big)$$

dur. Bu durumda

$$(1,y,z\varepsilon) \sim (1,u,v\varepsilon) \iff \big(1,y^{-1},(y^{-1}z)\varepsilon\big) \sim \big(1,u^{-1},(u^{-1}v)\varepsilon\big)$$

olduğu I_1 in I. durumunun 1.1. şıkkındaki işlemlerden açıktır.

2.2. $y \in \mathbf{I}$ ve $u \notin \mathbf{I}$ ise $\mathrm{F}(1,y,z\varepsilon) = (y,1,z\varepsilon)$ ve $\mathrm{F}(1,u,v\varepsilon) = (1,u^{-1},(u^{-1}v)\varepsilon)$ dur. Bu durumda $(y,1,z\varepsilon) \nsim (1,u^{-1},(u^{-1}v)\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır. $y \in \mathbf{I}$ ve $u \notin \mathbf{I}$ olduğundan, $y - u \notin \mathbf{I}$ dır, dolayısıyla $(1,y,z\varepsilon) \nsim (1,u,v\varepsilon)$ dir.

2.3. $y \in \mathbf{I}$ ve $u \in \mathbf{I}$ ise $\mathrm{F}(1,y,z\varepsilon) = (y,1,z\varepsilon)$ ve $\mathrm{F}(1,u,v\varepsilon) = (u,1,v\varepsilon)$ dur. Bu durumda

$$(1,y,z\varepsilon) \sim (1,u,v\varepsilon) \iff (y,1,z\varepsilon) \sim (u,1,v\varepsilon)$$

olduğu açıktır.

3. $(1,y,z\varepsilon) \nsim (u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir. $\mathrm{F}(u\varepsilon,1,v\varepsilon) = (1,u\varepsilon,v\varepsilon)$ dir ve $(1,y,z\varepsilon)$ nin F altındaki görüntüsü y nin **I** da olup olmadığına bağlı olarak değiştiğinden iki alt durum söz konusudur.

3.1. $y \notin \mathbf{I}$ ise $\mathrm{F}(1,y,z\varepsilon) = (1,y^{-1},(y^{-1}z)\varepsilon)$ dur. Bu durumda $y^{-1} - u\varepsilon \notin \mathbf{I}$ olduğundan $(1,y^{-1},(y^{-1}z)\varepsilon) \nsim (1,u\varepsilon,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

3.2. $y \in \mathbf{I}$ ise $\mathrm{F}(1, y, z\varepsilon) = (y, 1, z\varepsilon)$ dur. Bu durumda $(y, 1, z\varepsilon) \nsim (1, u\varepsilon, v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır.

iii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{F}(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) = (1, w\varepsilon, z\varepsilon)$ dur.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim (u, v, 1) \iff \mathrm{F}(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim \mathrm{F}(u, v, 1)$ olduğu i. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

2. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim (1, u, v\varepsilon) \iff \mathrm{F}(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \nsim \mathrm{F}(1, u, v\varepsilon)$ olduğu ii. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

3. $\mathrm{F}(u\varepsilon, 1, v\varepsilon) = (1, u\varepsilon, v\varepsilon)$ dir ve bu durumda

$$(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \sim (u\varepsilon, 1, v\varepsilon) \iff (1, w\varepsilon, z\varepsilon) \sim (1, u\varepsilon, v\varepsilon)$$

elde edilir.

F dönüşümünün doğrular için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, doğru tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine doğru tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır. Tüm durumlarda komşuluk bağıntısının korunduğu noktalar için yapılan işlemlere çok benzeyen işlemlerle görülebilmektedir.

O halde F dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.■

Yardımcı Teorem 2.3.7: G_s dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.

İspat. G_s dönüşümünün üzerinde olma bağıntısını sağladığını yine durumlara ayırarak direkt hesaplama yöntemi ile kolayca gösterebiliriz:

I. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{G}_s(x, y, 1) = (x, y - xs, 1)$ dir.

1. $(x, y, 1) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{G}_s([m, 1, k]) = [m - s, 1, k]$$

olup

$$y = xm + k \iff y - xs = x(m - s) + k \iff \mathrm{G}_s(x, y, 1) \in \mathrm{G}_s([m, 1, k])$$

sonucu bulunur.

2. $(x, y, 1) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{G}_s([1, n\varepsilon, p]) = [1, n\varepsilon, p + ((ps)n)\varepsilon]$$

olup

$$x = y\,(n\varepsilon) + p \iff x = y\,(n\varepsilon) + p - (xs)\,n\varepsilon + (xs)\,n\varepsilon$$

elde edilir ki $x = y\,(n\varepsilon) + p$ olduğunu dikkate alarak

$$x = y\,(n\varepsilon) + p - (xs)\,n\varepsilon + (xs)\,n\varepsilon \iff x = (y - xs)\,n\varepsilon + p + ((ps)n)\varepsilon$$

bulunur. Bu durumda $\mathrm{G}_s\,(x, y, 1)$ $\in$$\mathrm{G}_s\,([1, n\varepsilon, p])$ sonucu elde edilir.

3. $(x, y, 1) \notin [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olduğu koordinatlamadan açıktır. Bu durumda

$$\mathrm{G}_s\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = [(q + sn)\varepsilon, n\varepsilon, 1]$$

olup

$$\mathrm{G}_s\,(x, y, 1) \notin \mathrm{G}_s\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1])$$

olduğu yine koordinatlamadan açıktır.

II. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(1, y, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{G}_s\,(1, y, z\varepsilon) = (1, y - s, z\varepsilon)$ dir.

1. $(1, y, z\varepsilon) \in [m, 1, k]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{G}_s\,([m, 1, k]) = [m - s, 1, k]$$

olup

$$y = m + (z\varepsilon)\,k \iff y - s = m - s + (z\varepsilon)\,k \iff \mathrm{G}_s\,(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{G}_s\,([m, 1, k])$$

sonucu bulunur.

2. $(1, y, z\varepsilon) \notin [1, n\varepsilon, p]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Bu durumda

$$\mathrm{G}_s\,([1, n\varepsilon, p]) = [1, n\varepsilon, p + ((ps)n)\varepsilon]$$

olup

$$\mathrm{G}_s\,(1, y, z\varepsilon) \notin \mathrm{G}_s\,([1, n\varepsilon, p])$$

olduğu yine koordinatlamadan açıktır.

3. $(1, y, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{G}_s\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) = [(q + sn)\varepsilon, n\varepsilon, 1]$$

olup

$$\begin{aligned} z\varepsilon &= q\varepsilon + y\,(n\varepsilon) \iff z\varepsilon = (q + sn)\varepsilon + (y - s)\,n\varepsilon \\ &\iff \mathrm{G}_s\,(1, y, z\varepsilon) \in \mathrm{G}_s\,([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

III. DURUM: Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{G}_s\left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right) = \left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right)$$

dir.

1. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \notin [m, 1, k]$ olduğu koordinatlamadan bellidir. Burada,

$$\mathrm{G}_s\left([m, 1, k]\right) = [m - s, 1, k]$$

olup koordinatlamadan dolayı

$$\mathrm{G}_s\left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right) \notin \mathrm{G}_s\left([m, 1, k]\right)$$

sonucu bulunur.

2. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [1, n\varepsilon, p]$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{G}_s\left([1, n\varepsilon, p]\right) = [1, n\varepsilon, p + ((ps)n)\varepsilon]$$

olur ve

$$\begin{aligned} w\varepsilon &= n\varepsilon + (z\varepsilon)\, p \iff w\varepsilon = n\varepsilon + (z\varepsilon)\left(p + ((ps)n)\varepsilon\right) \\ &\iff \mathrm{G}_s\left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right) \in \mathrm{G}_s\left([1, n\varepsilon, p]\right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

3. $(w\varepsilon, 1, z\varepsilon) \in [q\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ olması için gerek ve yeter şart $z\varepsilon = n\varepsilon$ olmasıdır. Diğer taraftan

$$\mathrm{G}_s\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right) = [(q + sn)\varepsilon, n\varepsilon, 1]$$

olup aynı eşitlik

$$\mathrm{G}_s\left(w\varepsilon, 1, z\varepsilon\right) \in \mathrm{G}_s\left([q\varepsilon, n\varepsilon, 1]\right)$$

olmasının da gerek ve yeter şartıdır.

Böylece G_s dönüşümünün mümkün bütün durumlarda üzerinde olmayı koruduğunu göstermiş olduk.

G_s dönüşümünün noktalar için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, nokta tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum (i-iii) söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine nokta tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır.

i. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(x, y, 1)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{G}_s\left(x, y, 1\right) = (x, y - xs, 1)$ dir.

1. $\mathrm{G}_s(u,v,1)=(u,v-us,1)$ olur ve bu durumda

$$\begin{aligned}(x,y,1) \quad \sim \quad (u,v,1) &\iff x-u\in\mathbf{I}\wedge y-v\in\mathbf{I}\\ &\iff x-u\in\mathbf{I}\wedge y-v-(x-u)s\in\mathbf{I}\\ &\iff x-u\in\mathbf{I}\wedge y-xs-(v-us)\in\mathbf{I}\\ &\iff (x,y-xs,1)\sim(u,v-us,1)\end{aligned}$$

elde edilir.

2. $(x,y,1)\nsim(1,u,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan açıktır. $\mathrm{G}_s(1,u,v\varepsilon)=(1,u-s,v\varepsilon)$ olup $(x,y-xs,1)\nsim(1,u-s,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan aşikardır.

3. $(x,y,1)\nsim(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bilinmektedir. $\mathrm{G}_s(u\varepsilon,1,v\varepsilon)=(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olup yine koordinatlamadan dolayı $(x,y-xs,1)\nsim(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ dir.

ii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(1,y,z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{G}_s(1,y,z\varepsilon)=(1,y-s,z\varepsilon)$ dur.

1. $(1,y,z\varepsilon)\nsim(u,v,1)\iff \mathrm{G}_s(1,y,z\varepsilon)\nsim\mathrm{G}_s(u,v,1)$ olduğu i. durumun 2. şıkkında gösterilmiştir.

2. $\mathrm{G}_s(1,u,v\varepsilon)=(1,u-s,v\varepsilon)$ olup

$$(1,y,z\varepsilon)\sim(1,u,v\varepsilon)\iff y-u\in\mathbf{I}\iff(1,y-s,z\varepsilon)\sim(1,u-s,v\varepsilon)$$

sonucu bulunur.

3. $(1,y,z\varepsilon)\nsim(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir. $\mathrm{G}_s(u\varepsilon,1,v\varepsilon)=(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olup $(1,y-s,z\varepsilon)\nsim(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olduğu koordinatlamadan bellidir.

iii. DURUM. Alınan noktanın koordinatları $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{G}_s(w\varepsilon,1,z\varepsilon)=(w\varepsilon,1,z\varepsilon)$$

dur.

1. $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\nsim(u,v,1)\iff\mathrm{G}_s(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\nsim\mathrm{G}_s(u,v,1)$ olduğu i. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

2. $(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\nsim(1,u,v\varepsilon)\iff\mathrm{G}_s(w\varepsilon,1,z\varepsilon)\nsim\mathrm{G}_s(1,u,v\varepsilon)$ olduğu ii. durumun 3. şıkkında gösterilmiştir.

3. $\mathrm{G}_s(u\varepsilon,1,v\varepsilon)=(u\varepsilon,1,v\varepsilon)$ olup bu durum için komşuluk bağıntısının korunduğu aşikardır.

G_s dönüşümünün doğrular için komşuluk bağıntısını koruduğunun ispatı, doğru tiplerine göre değişiklik arz edeceğinden üç durum söz konusudur. Ayrıca bu durumların her biri yine doğru tiplerine göre üç alt kısma ayrılacaktır. Tüm durumlarda komşuluk bağıntısının korunduğu noktalar için yapılan işlemlere çok benzeyen işlemlerle görülebilmektedir.

O halde G_s dönüşümü $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir kolinasyonudur.$\blacksquare$

Şimdi bu kolinasyonları kullanarak $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ daki aşağıdaki önemli önermeleri ispatlayabiliriz. İlk önermede kolinasyonlar grubunun 3-genler üzerinde geçişken olduğu gösterilecek sonra da koordinatlama bazının keyfi seçimine imkan tanıyacak olan $\mathcal{G}$ nin 4-genler üzerinde geçişkenliğini ispatlayacağız.

Teorem 2.3.8: $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ nın $\mathcal{G}$ kolinasyonlar grubu 3-genler üzerinde geçişkendir.

İspat. (P, Q, R), $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ da bir 3-gen olsun. P, Q, R yi koordinatlama bazının sırasıyla $O = (0,0,1)$, $U = (1,0,0)$, $V = (0,1,0)$ elemanlarına dönüştüren bir kolinasyonun var olduğunu göstereceğiz. İşe QR doğrusunu UV doğrusuna dönüştüren bir dönüşüm bulmakla başlayacağız. J_1 ile göstereceğimiz bu dönüşüm QR doğrusuna bağlı olarak aşağıdaki üç şekilde bulunur:

Eğer $QR = [a,1,b]$ biçiminde bir doğru ise, bu takdirde $J_1 := \mathrm{I}_1 \circ \mathrm{T}_{-b,0} \circ \mathrm{F} \circ \mathrm{G}_a$ olarak alınabilir.

$$[a,1,b] \xrightarrow{\mathrm{G}_a} [0,1,b] \xrightarrow{\mathrm{F}} [1,0,b] \xrightarrow{\mathrm{T}_{-b,0}} [1,0,0] \xrightarrow{\mathrm{I}_1} [0,0,1] = UV\ ;$$

Eğer $QR = [1, n\varepsilon, p]$ ise bu takdirde $J_1 := \mathrm{I}_1 \circ \mathrm{T}_{-p,0} \circ \mathrm{F} \circ \mathrm{G}_{n\varepsilon} \circ \mathrm{F}$ ve eğer $QR = [m\varepsilon, n\varepsilon, 1]$ ise bu takdirde $J_1 := \mathrm{I}_1 \circ \mathrm{T}_{-m\varepsilon,0} \circ \mathrm{F} \circ \mathrm{G}_{n\varepsilon} \circ \mathrm{F} \circ \mathrm{I}_1$ kolinasyonu istenilen özellikteki dönüşüm olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda $J_1(R) \in UV$ olduğundan $J_1(R)$ ya $(1,x,0)$ ya da $(x,1,0)$ formunda olmak zorundadır. Eğer $J_1(R) = (1,x,0)$ ise bu takdirde $J_2 := \mathrm{F} \circ \mathrm{G}_x$ olarak alınırsa $J_2(J_1(R)) = V$ olur.

$$(1,x,0) \xrightarrow{\mathrm{G}_x} (1,0,0) \xrightarrow{\mathrm{F}} (0,1,0) = V$$

Eğer $J_1(R) = (x,1,0)$ ise bu takdirde $J_2 := \mathrm{F} \circ \mathrm{G}_x \circ \mathrm{F}$ olarak alınırsa $J_2(J_1(R)) = V$ olur.

Kolinasyonlar komşuluğu koruduğu için aynı komşulukta olmayan Q ve R noktalarının $J_2 \circ J_1$ kolinasyonu altındaki resimleri de aynı komşulukta olamaz. Bu halde $(J_2 \circ J_1)(R) = V$ olduğu dikkate alınırsa $(J_2 \circ J_1)(Q)$ noktası $(1,y,0)$ formunda olmak zorundadır. Bu takdirde $J_3 := \mathrm{G}_y$ olarak seçilirse $(1,y,0)$ noktası J_3 yardımıyla U ya resmedilmiş olur.

$(J_3 \circ J_2 \circ J_1)(R) = V$ ve $(J_3 \circ J_2 \circ J_1)(Q) = U$ olduğundan $(J_3 \circ J_2 \circ J_1)(P)$ noktası $UV = [0,0,1]$ doğrusuna yakın değildir ve bu yüzden de $(J_3 \circ J_2 \circ J_1)(P)$ noktası $(x,y,1)$ formunda bir nokta olmak zorundadır. Bu takdirde $J_4 :=\mathrm{T}_{-x,-y}$ olarak alınırsa

$$(J_4 \circ J_3 \circ J_2 \circ J_1)(P) = J_4(x,y,1) = (0,0,1) = O.$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\tau = J_4 \circ J_3 \circ J_2 \circ J_1$ kolinasyonu istenildiği gibi (P,Q,R) üçgenini (O,U,V) ye dönüştürür.■

T ve N nin tanımlarını kullanarak ispatlanabilen aşağıdaki yardımcı teoremi (Blunck, 1991b) den veriyoruz.

Yardımcı Teorem 2.3.9: Eğer $x \in \mathcal{A}$ ve $T(x) = 0$ ise bu takdirde $x^2 = -N(x)$ dir.

Bu bölümün ana sonucu olan Teorem 2.3.12 nin ispatındaki bazı hesaplamalar için kullanılacak bir yardımcı teorem veriyoruz.

Yardımcı Teorem 2.3.10: $s \in \mathbf{A}$, $s \notin \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{Z}$ olsun. Bu takdirde $t(su) = t(us) = c$ ve $t(u) = 0$ özelliğinde sıfırdan farklı bir $u \in \mathbf{A}$ vardır.

İspat. $\mathbf{A}$ nın bir bazı $(e_0 = 1,\ e_1,\ e_2, ...,\ e_7)$, $\mathbf{A}$ nın merkezi $\mathbf{Z}$ ve $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{Z}$ ise (Jacobson, 1985, s. 448) da bu baz için verilen çarpım tablosundaki (bak. Çizelge 2.1.1) sıfırdan farklı parametreler olsun. $s = \sum_{i=0}^{7} s_i e_i \notin \mathbf{Z}$ olduğundan en az bir $k \in \{1,2,3,..,7\}$ için $s_k \neq 0$ dır.

$v_0 = s_0,\ v_1 = c_1 s_1,\ v_2 = c_2 s_2,\ v_3 = -c_1 c_2 s_3,\ v_4 = c_3 s_4, v_5 = -c_1 c_3 s_5,\ v_6 = -c_2 c_3 s_6,\ v_7 = c_1 c_2 c_3 s_7$ olarak alınırsa bu takdirde $c_1,\ c_2,\ c_3$ ve s_k skalerleri $\mathbf{Z}$ nin sıfırdan farklı elemanları olduğundan $v_k \neq 0$ dır. $i = 1,2,...,7$ ve $i \neq k$ için $u_i \in \mathbf{Z}$ lerin en az birini sıfırdan farklı olacak biçimde keyfi seçerek (böylece $u \neq 0$ olur)

$$u_0 = 0,\ u_k = v_k^{-1} \left(c - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{7} v_i u_i \right),$$

alalım. $u = \sum_{i=0}^{7} u_i e_i$ için $u_0 = 0$ olduğundan $t(u) = 0$ ve

$$
\begin{aligned}
t(su) &= t(us) = \sum_{i=0}^{7} v_i u_i = \sum_{i=1}^{7} v_i u_i = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{7} v_i u_i + v_k u_k \right) \\
&= \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{7} v_i u_i + \left(c - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{7} v_i u_i \right) \right) = c
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu istenilen özellikte bir u nun varlığını ifade eder∎

$\mathcal{A}$ nın elemanlarının T iz formu, $\mathbf{A}$ daki t iz formu cinsinden $\forall x = x_1 + x_2\varepsilon \in \mathcal{A}$ için $T(x) = t(x_1) + t(x_2)\varepsilon$ biçiminde tanımlanmıştı. Yardımcı Teorem 2.3.10 un $\mathcal{A}$ ya genişletilmişi olan aşağıdaki önerme bu tanım kullanılarak kolayca ispatlanabilir.

Yardımcı Teorem 2.3.11: $s \in \mathcal{A}$, $s \notin \mathbf{Z}(\mathcal{A})$, $c \in \mathbf{Z}(\mathcal{A})$ olsun. Bu takdirde $T(su) = T(us) = c$ ve $T(u) = 0$ özelliğinde bir $u \in \mathcal{A} \setminus \mathbf{I}$ vardır.

Moufang düzlemleri için (Çiftçi, 1988) de verilen teoremin benzerini bu bölümün ana sonucu olarak ifade edebiliriz.

Teorem 2.3.12: $\mathcal{G}$ 4-genler üzerinde geçişkendir (Çelik, 2007).

İspat. (P, Q, R, S) $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ da bir 4-gen olsun. $\mathcal{G}$ nin P, Q, R, S yi sırasıyla $U, V, (1,1,1), O$ ya dönüştüren bir elemanın var olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Teorem 2.3.8 den P, Q, R yi sırasıyla U, V, $(0,1,1)$ e dönüştüren bir σ dönüşümün var olduğunu biliyoruz. QR ve PS doğrularının arakesit noktasını Y ile gösterelim. Bu takdirde $\sigma(Y)$ noktası $\sigma(P)$, $\sigma(Q)$, $\sigma(R)$ noktalarına komşu olamayacağı için bu nokta $b - 1 \notin \mathbf{I}$ olmak üzere $(0, b, 1)$ formundadır ve bu yüzdende $\sigma(S)$ noktası $a \notin \mathbf{I}$ olmak üzere $(a, b, 1)$ formundadır. Bu nedenle σ dönüşümü P, Q, R, S yi sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (0,1,1)\,,\ (a,b,1)$$

noktalarına dönüştürür. Bu noktalara $\mathrm{T}_{-a,-b}$ uygulanırsa sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (-a, 1-b, 1)\,,\ (0,0,1)$$

noktaları elde edilir. $c = \bar{a}(1-b)\bar{a}$ olmak üzere bu noktalara $\mathrm{L}_{\overline{a}}$ uygulanırsa sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ \ (0,1,0)\,,\ \ (-N(a),c,1)\,,\ (0,0,1)$$

noktaları bulunur.

Dikkat edilirse $a \notin \mathbf{I}$, $1-b \notin \mathbf{I}$ olduğundan $c \notin \mathbf{I}$ dır. Bu elde edilen son dört noktaya $\mathrm{S}_{1,-N(a)^{-1}}$ uygulanırsa sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ \ (0,1,0)\,,\ \ (1,c,1)\,,\ (0,0,1)$$

elde edilir.

$c = c_1 + c_2\varepsilon$ için iki durum söz konusudur:

1. Eğer $T(c) = t(c_1) + t(c_2)\varepsilon \in \mathbf{I}$ ise bu takdirde $t(c_1) = 0$ dır. Burada da iki alt durum vardır.

1.1. Eğer $t(c_2) = 0$ ise bu takdirde $T(c) = 0$ dır ve Yardımcı Teorem 2.3.9 den dolayı da $c^2 = -N(c)$ dir. F_c dönüşümü

$$(1,0,0)\,,\ \ (0,1,0)\,,\ \ (1,c,1)\,,\ (0,0,1)$$

noktalarını sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ \ (0,1,0)\,,\ \ (-N(c),-N(c),1)\,,\ (0,0,1)$$

noktalarına dönüştürür.

Bu son noktalara $\mathrm{S}_{-N(c)^{-1},-N(c)^{-1}}$ uygulanırsa sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ \ (0,1,0)\,,\ \ (1,1,1)\,,\ (0,0,1)$$

noktaları elde edilir ki bunlar istenilen özellikteki noktalardır.

1.2. Eğer $t(c_2) \neq 0$ ise bu takdirde Yardımcı Teorem 2.3.10 gereği $s_1 \neq 0 \neq s_2$, $t(s_1) = t(s_2) = 0$, $t(s_1c_1) = 0$, $t(c_1s_2) = -t(s_1c_2)$ özelliğinde $s_1, s_2 \in \mathbf{A}$ vardır. $s = s_1 + s_2\varepsilon$ alırsak $T(s) = t(s_1) + t(s_2)\varepsilon = 0$ olur.

$$(1,0,0)\,,\ \ (0,1,0)\,,\ \ (1,c,1)\,,\ (0,0,1)$$

noktalarına F_s uygulanırsa bu noktalar sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ \ (0,1,0)\,,\ \ \left(s^2,sc,1\right)\,,\ (0,0,1)$$

noktalarına dönüşür. Yardımcı Teorem 2.3.9 den dolayı da $s^2 = -N(s)$ dir. Son olarak elde edilen noktalara $\mathrm{S}_{1,-N(s)^{-1}}$ uygulanırsa sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ \ (0,1,0)\,,\ \ (1,sc,1)\,,\ (0,0,1)$$

elde edilir ki burada $T(sc) = 0$ dır. Bu durumda ispatın geri kalan kısmı için 1.1 i takip ederiz.

2. Eğer $T(c) = t(c_1) + t(c_2)\varepsilon \notin \mathbf{I}$ ise bu takdirde $t(c_1) \neq 0$ dır. Yardımcı Teorem 2.3.10 den dolayı $d_1 \neq 0,\ t(c_1 d_1) = 0,\ t(d_1) = t(d_2) = 0$ özelliğinde bir $d = d_1 + d_2\varepsilon \in \mathcal{A}$ vardır ve Yardımcı Teorem 2.3.9 den dolayı da $d^2 = -N(d)$ dir. Bu durumda F_d dönüşümü

$$(1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (1,c,1)\,,\ (0,0,1)$$

noktalarını sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (-N(d),dc,1)\,,\ (0,0,1)$$

noktalarına dönüştürür. Bu noktalara son olarak $\mathrm{S}_{1,-N(d)^{-1}}$ uygulanırsa $T(dc) \in \mathbf{I}$ olmak üzere sırasıyla

$$(1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (1,dc,1)\,,\ (0,0,1)$$

elde edilir ki ispatın geri kalan kısmı için 1 deki yol takip edilir.$\blacksquare$

Son teoremin açık bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu belirtebiliriz.

Sonuç 2.3.13: $\mathrm{M}(\mathcal{A})$ nın koordinatlanması, koordinatlama bazının seçiminden bağımsızdır.

3. $\mathrm{M}(\mathcal{A})$ MOUFANG-KLINGENBERG DÜZLEMLERİNDE ÇİFTE ORAN

Çifte oran projektif geometrinin belli dönüşümler altında değişmez kalan tek sayısal kavramı olduğundan büyük öneme haizdir. İki alt başlık altında verilecek olan bu bölümün ilk kısmında, ele alınan projektif düzlemin cebirsel yapısına bağlı olarak çifte oran tanımını ve özelliklerini Pappus, Dezarg ve Moufang düzlemlerinde ele alacağız. İkinci kısımda ise $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ Moufang-Klingenberg düzlem sınıfında çifte oran tanımını tüm düzleme genişletip, doğru tiplerine göre verilen doğrudaş dört noktanın çifte oranı için kolay bir hesaplama metodu vermeye çalışacağız. Ayrıca, bu son kısımda Moufang düzlemlerinde iyi bilinen bazı sonuçların $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ daki karşılıklarını inceleyeceğiz.

3.1. Projektif Düzlemlerde Çifte Oran

Bu kısımda kaynak belirtilmeden verilen bilgiler için (Stevenson, 1972) ve (Kaya, 1992) den faydalanılmıştır.

Çifte oran tanımı Öklid geometrisinde metrik kavramlar kullanılarak verilir. Öklid düzleminde doğrudaş A, B, C, D noktalarının *çifte oranı* $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ olarak tanımlanır ve $(A, B; C, D)$ ile gösterilir.

Biz çifte oranın Öklid düzlemindeki bilinen sonuçları ile değil, çifte oranın projektif düzlemlerdeki konumu ile ilgileneceğiz. Çifte oran projektif düzlemlerde ifade edilebilen tek sayısal özelliktir, yani projektif dönüşümler altında değişmez kalan tek sayısal ifadedir. Bu onun projektif düzlemlerdeki büyük önemini açıkca göstermektedir.

Burada noktadaş doğrular için çifte oran tanımı, harmoniklik ve bunlarla ilgili bilinen özelliklere değinmeden doğrudaş noktaların çifte oranının bazı özelliklerinden kısaca bahsedeceğiz.

Bir Pappus düzlemi, cebirsel yapısı bir $\mathcal{F}$ cismi olan ve reel düzleme çok benzer özelliklere sahip en iyi bilinen projektif düzlemdir. Çifte oran kavramı Pappus düzlemlerinde $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $D = (d_1, d_2)$ olmak üzere

$$(A, B; C, D) = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1d_2 - b_2d_1)}{(a_1d_2 - a_2d_1)(b_1c_2 - b_2c_1)} \tag{3.1}$$

biçiminde verilmiştir (Fishback, 1962). Şayet $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $D = (d_1, d_2)$ yerine sırasıyla $a = \frac{a_1}{a_2}$, $b = \frac{b_1}{b_2}$, $c = \frac{c_1}{c_2}$, $d = \frac{d_1}{d_2}$ alınırsa (3.1) deki çifte oran tanımı

$$(A, B; C, D) = \frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)} = (a, b; c, d)$$

olarak da ifade edilebilir (Horadam, 1970).

Çifte oranın Öklid düzlemindeki özellikleri hemen hemen tamamıyla Pappus düzlemlerinde geçerlidir.

Dezarg düzlemlerinde durum biraz farklıdır. Çünkü bir Dezarg düzlemine karşılık gelen cebir yapısı bir bölümlü halkadır. Dolayısıyla değişme özelliği var kabul edilemez. Bu yüzden de bazı kısıtlamalar söz konusudur.

Biz bir Dezarg düzleminde çifte oran kavramının tanımını ve bazı özelliklerini (Stevenson, 1972) den alıp homogen koordinatları kullanarak veriyoruz. Bunun için vereceğimiz tüm özellikler, her cisim bir bölümlü halka olduğundan, Pappus düzlemlerinde de geçerlidir.

$\mathcal{B}$ bir bölümlü halka, IP$_2\mathcal{B}$ onun üzerine kurulan projektif düzlem ve A, B, C de IP$_2\mathcal{B}$ nin koordinatları a_i, b_i, c_i; $i = 1, 2, 3$ olan farklı ve doğrudaş üç noktası olsun. Bu durumda $c_i = a_i + b_i$ iken $d_i = a_i\, s + b_i\, t$, $r = st^{-1}$ şartıyla tanımlanan D noktasına C için A ve B ye göre $[r]$ *oranında nokta* denir. $[r]$, $\{k^{-1}rk \mid k \in \mathcal{B}\}$ ile belirlenir ve $[r]$ ye D nin C için A ve B ye göre *çifte oranı* denir, $(A, B; C, D)$ ile gösterilir. Bu tanıma göre $[r]$, $\mathcal{B}$ üzerinde "$r \equiv r' \Leftrightarrow r' = k^{-1}rk$ olacak şekilde $\exists k \in \mathcal{B}$ vardır." tanımı ile verilen denklik bağıntısı ile üretilmiş bir denklik sınıfı olur. Dolayısıyla her $r' \in [r]$ için $[r'] = [r]$ dir. Böyle bir denklik sınıfının tek elemandan ibaret olması için gerek ve yeter şart r nin $\mathcal{B}$ nin merkezinde olmasıdır. Şayet $\mathcal{B}$ bir cisim ise $[r]$ çifte oranı tek elemanlı $\{r\}$ kümesidir. Buradan bir Pappus düzleminde $[r]$ nin tek elemanlı küme olduğu çıkar. Çifte oran kümesi için r temsilci olarak alınır.

Yukarıda verilen çifte oran kavramının iyi tanımlı olduğunu kolayca gösterebiliriz: Farzedelim ki $a'_i, b'_i, c'_i; d'_i$ de sırasıyla A, B, C, D nin $c'_i = a'_i + b'_i$ şartını sağlayan koordinatları olsun. $c'_i = a'_i + b'_i$ olduğundan $a_ik = a'_i$, $b_ik = b'_i$, $c_ik = c'_i$ olacak biçimde $k \in \mathcal{B}$ vardır. $d'_i = d_in = (a_i\, s + b_i\, t)\, n = (a'_ik^{-1}\, s + b'_ik^{-1}\, t)\, n$ ve buradan oranı $[k^{-1}snn^{-1}t^{-1}k] =$

$[k^{-1}(st^{-1})k] = [k^{-1}rk] = [r]$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla çifte oran koordinat seçiminden bağımsızdır.

D noktası ve A noktası aynı olabilir. Bu durumda $t = 0$ olup usulen $r = \infty$ yazılır. Bu sembolün aşağıdaki özellikleri kabul edilir:

$$\infty^{-1} = 0,\ 0^{-1} = \infty,\ -\infty = \infty,\ \infty.\infty = \infty$$

$$\infty + c = c + \infty = \infty,\ c \neq 0 \text{ için } \infty.c = c.\infty = \infty$$

dur ve

$$\infty - \infty,\ \infty.0,\ 0.\infty,\ \frac{\infty}{\infty}$$

sembollerine hiçbir anlam verilmez.

Buradan $r = \infty$ ise $[r]$ sınıfi bir tek elemandan ibaret sayılabileceği görülür. A, B, C ve r verildiğinde $(A, B; C, D) = [r]$ denklemini sağlayan D noktası $d_i = a_i\, c^{-1}rc + b_i$ ile verilir ki $c \neq 0$ $\mathcal{B}$ de keyfi bir sabittir. Bu yüzden D nin bir tek olarak belirtilmesi için gerek ve yeter şart r nin $\mathcal{B}$ nin merkezinde olmasıdır.

Sonuç 3.1.1: D noktası ve r arasındaki eşlemenin birebir olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{B}$ nin komütatif olmasıdır.

Teorem 3.1.2: Eğer $(A, B; C, D) = [r]$ ve f de $f : A, B, C, D \to A', B', C', D'$ özelliğinde bir izdüşellik ise $(A', B', C', D') = [r]$ dir (Stevenson, 1972).

Teorem 3.1.3: $(A, B; C, D) = [r]$ iken

$$\begin{aligned}
(A,B;C,D) &= (B,A;D,C) = (C,D;A,B) = (D,C;B,A) = [r] \\
(B,A;C,D) &= (A,B;D,C) = (D,C;A,B) = (C,D;B,A) = [r]^{-1} := \left[r^{-1}\right] \\
(A,C;B,D) &= (B,D;A,C) = (C,A;D,B) = (D,B;C,A) = 1 - [r] := [1-r] \\
(B,C;A,D) &= (A,D;B,C) = (D,A;C,B) = (C,B;D,A) = \left[1-(1-r)^{-1}\right]^{-1} \\
&= \left[1-r^{-1}\right] \\
(C,A;B,D) &= (D,B;A,C) = (A,C;D,B) = (B,D;C,A) = [1-r]^{-1} = \left[(1-r)^{-1}\right] \\
(C,B;A,D) &= (D,A;B,C) = (A,D;C,B) = (B,C;D,A) = \left[-r(1-r)^{-1}\right] \\
&= \left[1-(1-r)^{-1}\right]
\end{aligned}$$

dir (Stevenson, 1972).

Teorem 3.1.4: A, B, C, D; $\mathrm{IP}_2\mathcal{B}$ nin koordinatları $a_i, b_i, c_i; d_i,\ i = 1, 2, 3$ olan farklı ve doğrudaş dört noktası olup $c_i = a_i + b_i$ ve H(AB, CD) olsun. Bu durumda $(A, B; C, D) = [-1]$ dir (Stevenson, 1972).

D noktasının A, B veya C ile çakışması için gerek ve yeter şart $(A, B; C, D)$ çifte oranının sırasıyla $\infty, 0$ veya 1 olmasıdır. -1 sayısının ∞ ve 0 a eşit olmadığı açıktır. $-1 = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{B}$ nin karakteristiğinin 2 olmasıdır. Bu sebeple kar$\mathcal{B} \neq 2$ ve H(AB, CD) iken D noktası A, B, C den farklı dördüncü bir noktadır. Dolayısıyla IP$_2\mathcal{B}$ de Fano aksiyomu geçerlidir. Aşağıdaki teorem bunun çift yönlü işlediğini ifade eder.

Teorem 3.1.5: IP$_2\mathcal{B}$ projektif düzleminin P6 Fano aksiyomunu sağlaması için gerek ve yeter şart $\mathcal{B}$ bölümlü halkasının karakteristiğinin 2 den farklı olmasıdır (Kaya, 1992).

Her cisim bir bölümlü halka olduğundan $\mathcal{F}$ nin karakteristiği 2 den farklı olma koşulu altında her IP$_2\mathcal{F}$ cisim düzlemi Fano aksiyomunu gerçekler. Özel olarak $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{C}$ için $\mathcal{F}$ nin karakteristiği sıfır olduğundan Fano aksiyomu sağlanır.

Moufang düzleminin cebirsel yapısı bir alterne halka olduğundan asosyatif özelliği geçerli kabul edilemez. Dolayısıyla işlemlerde sıkıntılar ve kısıtlamalar Dezarg düzlemlerinden fazladır. Bu yüzden de çifte oranın Dezarg düzlemlerinde bilinen bazı özellikleri Moufang düzlemlerinde geçerli olmamaktadır.

(Ferrar, 1981) de, Moufang düzleminde $[0, 0]$ doğrusu üzerindeki $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$, $D = (d, 0)$ noktaları için çifte oranın aşağıdaki cebirsel tanımı verilmiştir:

$$(A, B; C, D) = (a, b; c, d) :=< \big((a-d)^{-1}(b-d)\big)\big((b-c)^{-1}(a-c)\big) >$$

Burada $< x >$ ile çalışılan Moufang düzleminin $\mathbf{H}$ koordinatlama halkasında x in $< x >= \{y^{-1}xy \mid y \in \mathbf{H}\}$ eşlenik sınıfı gösterilmektedir. Çifte oranın bu tanımında A, B, C, D noktalarından herhangi biri ∞ ise ∞ u bulunduran çarpanlar silinir.

Teorem 3.1.6: Fano aksiyomunu sağlayan bir Moufang düzleminde H(AB, CD) ve H(AB, CD') ise bu takdirde $D = D'$ dür (Stevenson, 1972).

Teorem 3.1.7: Moufang düzleminde $[0, 0]$ doğrusu üzerinde farklı dört nokta A, B, C, D olsun. Bu takdirde H(AB, CD) olması için gerek ve yeter şart $(A, B; C, D) =< -1 >$ olmasıdır (Ferrar, 1981).

Biz bundan sonraki kısımda MK-düzlemlerinin özel bir sınıfı olan $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ MK- düzlemlerinde çifte oranın özelliklerini incelemeye çalışacağız. Bunu Moufang düzlemlerinde geçerli özelliklerin hangilerinin $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ MK-düzlemlerinde geçerli olduğunu bulmaya çalışarak yapacağız. Dolayısıyla çifte oranın Moufang düzlemlerindeki bazı özelliklerini $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ MK-düzlemleri ile paralel ele alacağız.

3.2. $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ Moufang-Klingenberg Düzlemlerinde Çifte Oran

Moufang-Klingenberg düzlemlerinde çifte oran kavramını tanımlayıp temel özelliklerini belirlemeye çalıştığımız bu kısımda (Blunck, 1991c), (Blunck, 1991b), (Ferrar, 1981) ve (Çelik, 1995) faydalanılan başlıca kaynaklardır.

$\mathbf{M}(\mathcal{A})$ düzleminde çifte oran tanımını vermeden önce bu kısımda kullanacağımız bazı kavramları tanımlayıp aralarındaki ilişkileri belirleyen iki yardımcı teorem veriyoruz.

Tanım 3.2.1: $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı,

$$t_u(x) = x + u;\, u \in \mathcal{A} \tag{3.2}$$

$$r_u(x) = xu;\, u \in \mathcal{A} \setminus \mathbf{I} \tag{3.3}$$

$$i(x) = x^{-1} \tag{3.4}$$

$$l_u(x) = ux = (ir_{u^{-1}}i)(x)\,;\ u \in \mathcal{A} \setminus \mathbf{I} \tag{3.5}$$

dönüşümlerine sırasıyla u *ile öteleme* (veya kısaca *öteleme*), u *ile sağ çarpma* (veya kısaca *sağ çarpma*), *invers alma* ve u *ile sol çarpma* (veya kısaca *sol çarpma*) dönüşümleri denir.

Yardımcı Teorem 3.2.2: (3.2), (3.3), (3.4) ve (3.5) tipinden tüm permütasyonlar bir grup üretir.

Gösterim: Yardımcı Teorem 3.2.2 de ifade edilen grup Λ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 3.2.3: $g := OV = [1, 0, 0]$ olmak üzere $\mathcal{G}_i(g)$ yani g nin izdüşellikler grubu Λ ya eşittir (Blunck, 1991c).

Şimdi $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ MK-düzleminde çifte oran kavramını ele alalım.

$\mathbf{M}(\mathcal{A})$ düzleminde g doğrusunun ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan $A = (0, a, 1)$, $B = (0, b, 1)$, $C = (0, c, 1)$, $D = (0, d, 1)$, ve $z \in \mathbf{I}$ olmak üzere $Z = (0, 1, z)$ noktaları için çifte oran aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Blunck, 1992):

$$
\begin{aligned}
(A,B;C,D) &: = (a,b;c,d) =< \left((a-d)^{-1}(b-d)\right)\left((b-c)^{-1}(a-c)\right) > \\
(Z,B;C,D) &: = \left(z^{-1},b;c,d\right) =< \left((1-dz)^{-1}(b-d)\right)\left((b-c)^{-1}(1-cz)\right) > \\
(A,Z;C,D) &: = \left(a,z^{-1};c,d\right) =< \left((a-d)^{-1}(1-dz)\right)\left((1-cz)^{-1}(a-c)\right) > \\
(A,B;Z,D) &: = \left(a,b;z^{-1},d\right) =< \left((a-d)^{-1}(b-d)\right)\left((1-zb)^{-1}(1-za)\right) > \\
(A,B;C,Z) &: = \left(a,b;c,z^{-1}\right) =< \left((1-za)^{-1}(1-zb)\right)\left((b-c)^{-1}(a-c)\right) >
\end{aligned}
$$

$\mathbf{I}^{-1}$ kümesinin elemanlarıyla ilgili işlemler Tanım 2.2.8 de verilmiştir.

Aşağıdaki yardımcı teorem çifte oran tanımının bir başka ifadesini verir.

Yardımcı Teorem 3.2.4: $A=(0,a,1)$, $B=(0,b,1)$, $C=(0,c,1)$, $D=(0,d,1)\in g$ ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan doğrudaş dört nokta olsun. Bu takdirde

$(A,B;C,D) =< \left((a-b)^{-1}-(a-d)^{-1}\right)\left((a-b)^{-1}-(a-c)^{-1}\right)^{-1} >$ (Blunck, 1991b).

Tanım 3.2.5: g nin komşuluğu ve çifte oranı koruyan bir permütasyonuna *çifte oranı koruyan dönüşüm* denir.

Gösterim: g nin çifte oranı koruyan tüm dönüşümlerinin kümesi ρ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 3.2.6: Λ, ρ nun bir alt grubudur (Blunck, 1991b).

Sonuç 3.2.7: $\mathcal{G}_i(g)$ grubu çifte oranı korur.

Moufang düzlemleri için (Ferrar, 1981) deki Teorem 2 nin benzeri olan aşağıdaki teorem $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ daki çifte oran hakkında önemli bir sonucu belirtir.

Yardımcı Teorem 3.2.8: $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ da bir l doğrusu üzerinde ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan A,B,C noktaları ve $r\in\mathcal{A}\backslash(\{0,1\}+\mathbf{I})$ için $< r >= (A,B;C,D)$ olacak biçimde bir $D\nsim A$, B, C noktası vardır ve eğer $r\in\mathbf{Z}(\varepsilon)$ ise D tektir (Blunck, 1991b).

Yardımcı Teorem 3.2.9: $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ düzleminde A, B, C, $D\in g$ ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan noktalar olmak üzere $(A,B;C,D)=(B,A;D,C)$ dir (Blunck, 1991b).

Yardımcı Teorem 3.2.10: $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ düzleminde A, B, C, $D\in g$ ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan noktalar olsun ve herhangi bir $x\in\mathcal{A}$ için $< x >^{-1} := < x^{-1} >$ ve $1- < x > := < 1-x >$ olarak tanımlansın. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) $(A,B;C,D)^{-1}=(B,A;C,D)$ dir.

ii) $1-(A,B;C,D)=(A,C;B,D)$ dir.

iii) $(A,B;C,D)=(B,A;D,C)=(C,D;A,B)=(D,C;B,A)$ dır (Blunck, 1991b).

$\mathbf{M}(\mathcal{A})$ düzleminde; Yardımcı Teorem 3.2.9 ve 3.2.10 daki sonuçlardan daha genel olarak, (Çelik, 1995) den aşağıdaki sonuçları ifade edebiliriz (Bu sonuçlar ilk olarak Möbius tarafından reel projektif düzlemler için bulunmuştur (Horadam, 1970, p. 152).):

$w\in(A,B;C,D)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
(A,B;C,D) &= (B,A;D,C)=(C,D;A,B)=(D,C;B,A)=< w > \qquad (3.6)\\
(B,A;C,D) &= (A,B;D,C)=(D,C;A,B)=(C,D;B,A)=< w >^{-1}\\
(A,C;B,D) &= (B,D;A,C)=(C,A;D,B)=(D,B;C,A)=1-< w >\\
(B,C;A,D) &= (A,D;B,C)=(D,A;C,B)=(C,B;D,A)=1-< w >^{-1}\\
(C,A;B,D) &= (D,B;A,C)=(A,C;D,B)=(B,D;C,A)=<1-w>^{-1}\\
(C,B;A,D) &= (D,A;B,C)=(A,D;C,B)=(B,C;D,A)=<1-w^{-1}>^{-1}
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla bir çifte oran, noktaların sırasına bağlı olarak, en çok 6 farklı değer alabilir.

Şimdi g doğrusunun noktaları için verilen çifte oran tanımını $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ MK-düzlemin tamamına genişletebiliriz. Bu genişletme, $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ verilen herhangi bir l doğrusu üzerindeki noktaların çifte oranını uygun perspektiflikler yardımıyla g doğrusu üzerindeki eşlendikleri noktaların çifte oranı olarak tanımlamaktan ibarettir. Bu genişletmeyi (Çelik, 1995) den küçük bir düzenleme ile aşağıdaki biçimde veriyoruz.

Genişletme 3.2.11: (O,U,V,E), $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ nın bir bazı olsun.

1. $l=[m,1,p]$ ve $A,\ B,\ C,\ D\in l$ ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan noktalar olsun. İki durum söz konusudur:

1.1. $l\nsim U$ olsun. $m\in\mathbf{I}$ iken $[m,1,p]$ doğrusu U ya komşu olduğundan $l\nsim U$ için $m\notin\mathbf{I}$ dır. Bu durumda $\sigma=\sigma_U(g,l)$ perspektifliği yardımıyla $(A,B;C,D):=(\sigma(A),\sigma(B);\sigma(C),\sigma(D))$ dir.

1.2. $l\sim U$ olsun. l nin U ya komşu tüm noktaları $(1,zp+m,z)$ tipinde olduğundan $l\sim U$ için $(1,zp+m,z)\sim U$ olur. O halde $zp+m\in\mathbf{I}$ olup $m\in\mathbf{I}$ dır. Bu durumda $\sigma=\sigma_{(1,1,0)}(g,l)$ perspektifliği yardımıyla $(A,B;C,D):=(\sigma(A),\sigma(B);\sigma(C),\sigma(D))$ dir.

2. $l=[1,n,p]$ ise, bu takdirde $\sigma_U(g,l)$ perspektifliği yardımıyla $(A,B;C,D):=$

$(\sigma(A), \sigma(B); \sigma(C), \sigma(D))$ dir.

3. $l = [q, n, 1]$ ise, bu takdirde $\sigma_{(1,0,1)}(g, l)$ perspektifliği yardımıyla $(A, B; C, D) := (\sigma(A), \sigma(B); \sigma(C), \sigma(D))$ dir.

Yukarıdaki tanımdan aşağıdaki teoremi elde ederiz. Bu teoremin sonuçları bir sonraki teoremin ispatındaki bazı hesaplamaları kolaylaştıracaktır.

Teorem 3.2.12: Yukarıdaki genişletmede kullanılan σ dönüşümü altında l doğrusunun noktalarının görüntüleri aşağıdaki gibi olur.

1. $l = [m, 1, p]$ ve l doğrusunun $A = (a, am + p, 1) \nsim UV$, $K = (1, m + kp, k) \sim UV$ özelliğindeki noktaları için,

1.1. Eğer $m \notin \mathbf{I}$ ise bu takdirde $\sigma(A) = (0, am + p, 1)$ ve $\sigma(K) = (0, 1, m^{-1}k)$ dir.

1.2. Eğer $m \in \mathbf{I}$ ise bu takdirde

$$\sigma(A) = (0, a(m-1) + p, 1) \text{ ve } \sigma(K) = \left(0, 1, (m-1)^{-1} z\right)$$

dir.

2. $l = [1, n, p]$ ve l doğrusunun $A = (an + p, a, 1) \nsim V$ ve $K = (zp + n, 1, z) \sim V$ özelliğindeki noktaları için $\sigma(A) = (0, a, 1)$ ve $\sigma(K) = (0, 1, z)$ dir.

3. $l = [q, n, 1]$ ve l doğrusunun $A = (1, a, q + an) \nsim V$ ve $K = (k, 1, kq + n) \sim V$ özelliğindeki noktaları için $\sigma(A) = \left(0, -[1 - (q + an)]^{-1} a, 1\right)$ ve $\sigma(K) = (0, 1, k(q-1) + n)$ dir.

İspat. Teoremin doğruluğu her durumda kolay ancak biraz sıkıcı hesaplamalarla gösterilebilir ki biz örnek olarak 1.1 şıkkının ispatını veriyoruz. Açık olarak,

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= AU \cap g \\
&= (a, am + p, 1)(1, 0, 0) \cap [1, 0, 0] \\
&= [0, 1, am + p] \cap [1, 0, 0] \\
&= (0, am + p, 1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sigma(K) &= KU \cap g \\ &= (1, m+kp, k)(1,0,0) \cap [1,0,0] \\ &= \left[0, m^{-1}k, 1\right] \cap [1,0,0] \\ &= \left(0, 1, m^{-1}k\right)\end{aligned}$$

dir.■

Aşağıda ispatlayacağımız teorem, $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ da verilen herhangi bir doğru üzerindeki noktaların çifte oranının hesaplanması için basit bir yöntem verir.

Teorem 3.2.13: $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ da bir doğru üzerindeki noktaların çifte oranı, doğru tiplerine göre, aşağıdaki biçimde hesaplanabilir:

Eğer A, B, C, D ve S

1. $l = [m, 1, p]$ doğrusunun $A = (a, am+p, 1)$, $B = (b, bm+p, 1)$, $C = (c, cm+p, 1)$, $D = (d, dm+p, 1) \nsim UV$ ve $S = (1, m+sp, s) \sim UV$ özelliğinde,

2. $l = [1, n, p]$ doğrusunun $A = (an+p, a, 1)$, $B = (bn+p, b, 1)$, $C = (cn+p, c, 1)$, $D = (dn+p, d, 1) \nsim V$ ve $S = (n+sp, 1, s) \sim V$ özelliğinde,

3. $l = [q, n, 1]$ doğrusunun $A = (1, a, q+an)$, $B = (1, b, q+bn)$, $C = (1, c, q+cn)$, $D = (1, d, q+dn) \nsim V$ ve $S = (s, 1, sq+n) \sim V$ özelliğinde ikişer ikişer komşu olmayan noktaları ise bu takdirde

$$\begin{aligned}(A, B; C, D) &= (a, b; c, d) \\ (S, B; C, D) &= \left(s^{-1}, b; c, d\right) \\ (A, S; C, D) &= \left(a, s^{-1}; c, d\right) \\ (A, B; S, D) &= \left(a, b; s^{-1}, d\right) \\ (A, B; C, S) &= \left(a, b; c, s^{-1}\right)\end{aligned}$$

dir.

İspat. İspatı, teoremin ifadesinde verildiği gibi, 3 duruma ayırararak veriyoruz.

1. Durum. $m \in \mathbf{I}$ ve $m \notin \mathbf{I}$ olmak üzere 2 durum söz konusudur:

1.1. Eğer $m \notin \mathbf{I}$ ise, bu durumda $\sigma_U(g, l)$ perspektifliği altında A, B, C, D, S noktaları sırasıyla $A' = (0, am+p, 1)$, $B' = (0, bm+p, 1)$, $C' = (0, cm+p, 1)$, $D' =$

$(0, dm + p, 1)$, $S' = (0, 1, m^{-1}s)$ noktalarına resmedilir. $\gamma := r_{m^{-1}} \circ t_{-p} \in \Lambda$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}(A, B; C, D) &= (A', B'; C', D') = (am + p, bm + p; cm + p, dm + p)\\ &= (\gamma(am + p), \gamma(bm + p); \gamma(cm + p), \gamma(dm + p))\\ &= (a, b; c, d)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(S, B; C, D) &= (S', B'; C', D') = \left(s^{-1}m, bm + p; cm + p, dm + p\right)\\ &= \left(\gamma\left(s^{-1}m\right), \gamma(bm + p); \gamma(cm + p), \gamma(dm + p)\right)\\ &= (s^{-1}, b; c, d)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer biçimde basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}(A, S; C, D) &= (a, s^{-1}; c, d)\\ (A, B; S, D) &= (a, b; s^{-1}, d)\\ (A, B; C, S) &= (a, b; c, s^{-1})\end{aligned}$$

olduğu görülür.

1.2. Eğer $m \in \mathbf{I}$ ise, bu durumda $\sigma_{(1,1,0)}(g, l)$ perspektifliği altında A, B, C, D, S noktaları sırasıyla

$$\begin{aligned}A' &= (0, a(m-1) + p, 1), B' = (o, b(m-1) + p, 1), C' = (0, c(m-1) + p, 1),\\ D' &= (0, d(m-1) + p, 1), S' = \left(0, 1, (m-1)^{-1}s\right)\end{aligned}$$

noktalarına resmedilir. $\gamma := r_{(m-1)^{-1}} \circ t_{-p} \in \Lambda$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}(A, B; C, D) &= (A', B'; C', D')\\ &= (a(m-1) + p, b(m-1) + p; c(m-1) + p, d(m-1) + p)\\ &= (\gamma(a(m-1) + p), \gamma(b(m-1) + p); \gamma(c(m-1) + p), \gamma(d(m-1) + p))\\ &= (a, b; c, d)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(S, B; C, D) &= (S', B'; C', D')\\ &= (s^{-1}(m-1), b(m-1) + p; c(m-1) + p, d(m-1) + p)\\ &= \left(\gamma\left(s^{-1}(m-1)\right), \gamma(b(m-1) + p); \gamma(c(m-1) + p), \gamma(d(m-1) + p)\right)\\ &= (s^{-1}, b; c, d)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer biçimde basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}(A,S;C,D) &= (a,s^{-1};c,d)\\(A,B;S,D) &= (a,b;s^{-1},d)\\(A,B;C,S) &= (a,b;c,s^{-1})\end{aligned}$$

olduğu görülür.

2) A,B,C,D,S noktaları $\sigma_U(g,l)$ perspektifliği altında sırasıyla

$$A' = (0,a,1)\,, B' = (0,b,1)\,, C' = (0,c,1)\,, D' = (0,d,1)\,, S' = (1,0,s)$$

noktalarına resmedilir. $\gamma \in \Lambda$ özdeşlik dönüşümü olarak alınırsa

$$\begin{aligned}(A,B;C,D) &= (A',B';C',D') = (a,b;c,d)\\(S,B;C,D) &= (S',B';C',D') = (s^{-1},b;c,d)\end{aligned}$$

ve benzer biçimde

$$\begin{aligned}(A,S;C,D) &= (a,s^{-1};c,d)\\(A,B;S,D) &= (a,b;s^{-1},d)\\(A,B;C,S) &= (a,b;c,s^{-1})\end{aligned}$$

bulunur.

3) A,B,C,D,S noktaları $\sigma_{(1,0,1)}(g,l)$ perspektifliği altında sırasıyla

$$\begin{aligned}A' &= \left(0,-\left(1-(q+an)\right)^{-1}a,1\right), B' = \left(0,-\left(1-(q+bn)\right)^{-1}b,1\right),\\C' &= \left(0,-\left(1-(q+cn)\right)^{-1}c,1\right), D' = \left(0,-\left(1-(q+dn)\right)^{-1}d,1\right),\\S' &= (0,1,s(q-1)+n)\end{aligned}$$

noktalarına resmedilir. $\gamma := i\circ r_{(1-q)^{-1}}\circ t_n\circ i\circ l_{-1}\in\Lambda$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}(A,B;C,D) &= (A',B';C',D')\\&= (-\left(1-(q+an)\right)^{-1}a,-\left(1-(q+bn)\right)^{-1}b;\\&\quad -\left(1-(q+cn)\right)^{-1}c,-\left(1-(q+dn)\right)^{-1}d)\\&= (\gamma(-\left(1-(q+an)\right)^{-1}a),\gamma(-\left(1-(q+bn)\right)^{-1}b);\\&\quad \gamma(-\left(1-(q+cn)\right)^{-1}c),\gamma(-\left(1-(q+dn)\right)^{-1}d))\\&= (a,b;c,d)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(S,B;C,D) &= (S',B';C',D') \\
&= ((s(q-1)+n)^{-1}, -(1-(q+bn))^{-1}b; \\
&\quad -(1-(q+cn))^{-1}c, -(1-(q+dn))^{-1}d) \\
&= (\gamma((s(q-1)+n)^{-1}), \gamma(-(1-(q+bn))^{-1}b); \\
&\quad \gamma(-(1-(q+cn))^{-1}c), \gamma(-(1-(q+dn))^{-1}d)) \\
&= (s^{-1}, b; c, d)
\end{aligned}$$

sonuçlarına varılır. Yine basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
(A,S;C,D)) &= (a,s^{-1};c,d) \\
(A,B;S,D) &= (a,b;s^{-1},d) \\
(A,B;C,S) &= (a,b;c,s^{-1})
\end{aligned}$$

elde edilir.■

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, ikişer ikişer komşu olmayan doğrudaş herhangi dört noktanın çifte oranının nasıl hesaplanabileceğini kolayca belirtebiliriz:

1.1 ve 1.2 nin ortak bir sonucu olarak; $[m,1,p]$ üzerindeki noktaların çifte oranının hesaplanmasında, UV doğrusuna yakın olmayan noktaların ilk koordinatı ve UV doğrusuna yakın noktanın son koordinatının tersi kullanılır.

2 nin bir sonucu olarak; $[1,n,p]$ doğrusu üzerindeki noktaların çifte oranının hesaplanmasında, V ye yakın olmayan noktaların ikinci koordinatı ve V ye yakın noktanın son koordinatının tersi kullanılır.

3 ün bir sonucu olarak; $[q,n,1]$ doğrusu üzerindeki noktaların çifte oranının hesaplanmasında, V ye yakın olmayan noktaların ikinci koordinatı ve V ye yakın noktaların ilk koordinatının tersi kullanılır.

Teorem 3.2.14: $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ da, perspektiflikler çifte oranları korur.

İspat. A,B,C,D; $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ da bir l doğrusunun ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan noktaları olsun. $\sigma_M(g,l)$ ile Genişletme 3.2.11 deki perspektifliği gösterelim, yani $(A,B;C,D) = (\sigma_M(A), \sigma_M(B); \sigma_M(C), \sigma_M(D))$ olsun. $N \nsim M$, $N \nsim l$, $N \nsim g$ özelliğinde $\sigma_N(g,l)$ perspektifliğini alalım. $\sigma_N(g,l)$ nin çifte oranı koruduğunu göstermek ispatı tamamlar.

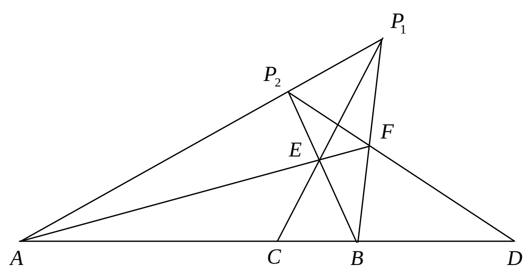
$\sigma = \sigma_M \sigma_N^{-1}$, g nin bir izdüşelliğidir. g nin izdüşellikleri de çifte oranı koruduğu için açık olarak

$$(\sigma_N(A), \sigma_N(B); \sigma_N(C), \sigma_N(D)) = (\sigma_M(A), \sigma_M(B); \sigma_M(C), \sigma_M(D))$$

dir. Dolayısıyla da $(\sigma_N(A), \sigma_N(B); \sigma_N(C), \sigma_N(D)) = (A, B; C, D)$ olduğu elde edilir.$\blacksquare$

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, izdüşellikler altında da çifte oranın korunduğunu belirtebiliriz. Çünkü, bir izdüşellik sonlu sayıda aynı tip perspektifliğin bileşkesidir.

Bir l doğrusunun ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan noktaları A, B, C, D olmak üzere eğer $(A, B; C, D) =< -1 >$ ise bu noktalara *harmoniktir* denir. A, B, C, D harmonik ise bu durum $h(A, B, C, D)$ ile gösterilir.



Şekil 3.2.1

(Ferrar, 1981) de Moufang düzlemleri için iyi bilinen bir tanımı $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ da veriyoruz:

Tanım 3.2.15: A, B, C, D; bir l doğrusunun ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan noktaları olsun. Eğer $A = P_1P_2 \cap EF$, $B = P_2E \cap P_1F$, $C \in EP_1$, $D \in P_2F$ olacak biçimde köşeleri l ye yakın olmayan bir (P_1, P_2, E, F) 4-geni bulunabiliyorsa A, B, C, $D \in l$ noktalarına *harmonik pozisyondadır* denir. Bu durumda C ile D, A ve B ye göre *harmonik eşleniktir* denir ve bu durum $\mathrm{H}(A, B, C, D)$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 3.2.16. A, B, C; g doğrusunun ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan noktaları olsun. Bu takdirde C nin A ve B ye göre harmonik eşleneği bir tektir. Yani D noktası P_1 ve P_2 noktalarının seçiminden bağımsızdır (Akpınar, 2007).

Bu gerçeği aşağıdaki teoremin ispatında kullanacağız. Bu teorem Moufang düzlemleri için (Ferrar, 1981) de verilen Teorem 6 nın bir benzeridir.

Teorem 3.2.17: g doğrusu üzerinde ikişer ikişer komşu olmayan dört noktanın harmonik pozisyonda olması için gerek ve yeter şart bu noktaların harmonik olmasıdır.

İspat. $A, B, C, D \in g$ noktaları harmonik pozisyonda olsun. İlk olarak da bu noktaların hiçbirinin V ye yakın olmadığını kabul edelim. Bu noktaları $A = (0, a, 1)$, $B = (0, b, 1)$, $C = (0, c, 1)$, $D = (0, d, 1)$ koordinatlarına sahip kabul edebiliriz. Genelliği bozmadan, Yardımcı Teorem 3.2.16 yardımıyla, $P_1 = U = (1, 0, 0)$ ve $P_2 = (1, a, 1)$ olduğunu varsayabiliriz. Bu takdirde

$BP_2 = [a - b, 1, b]$, $BP_2 \cap CP_1 = E = \left((c - b)(a - b)^{-1}, c, 1\right)$ ve

$$\begin{aligned} BP_1 \cap AE &= F = \left((b - a)\left((c - a)^{-1}\left[(c - b)(a - b)^{-1}\right]\right), b, 1\right) \\ &= \left((b - a)\left((c - a)^{-1}\left[(c - a + a - b)(a - b)^{-1}\right]\right), b, 1\right) \\ &= \left(-1 + (b - a)(c - a)^{-1}, b, 1\right) \end{aligned}$$

olur. $P_2D = [a - d, 1, d]$ ve $F \in P_2D$ olduğundan

$$b = \left(-1 + (b - a)(c - a)^{-1}\right)(a - d) + d$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} b - d &= \left(-1 + (b - a)(c - a)^{-1}\right)(a - d) \\ (b - d)(a - d)^{-1} &= -1 + (b - a)(c - a)^{-1} \\ (b - \mathbf{a} + \mathbf{a} - d)(a - d)^{-1} &= -1 + (b - a)(c - a)^{-1} \\ (b - \mathbf{a})(a - d)^{-1} + 1 &= -1 + (b - a)(c - a)^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafını $(b - a)^{-1}$ ile çarparsak

$$(a - d)^{-1} + (b - a)^{-1} = -(b - a)^{-1} + (c - a)^{-1}$$

buluruz. Buradan da

$$(a - d)^{-1} + (b - a)^{-1} = (a - b)^{-1} + (c - a)^{-1}$$

ve dolayısıyla

$$\left((a - b)^{-1} - (a - d)^{-1}\right)\left((a - b)^{-1} - (a - c)^{-1}\right)^{-1} = -1$$

elde edilir ki son eşitlik Yardımcı Teorem 3.2.4 gereği $(A, B; C, D) =< -1 >$ olduğunu ifade eder.

A, B, C; l üzerinde V ye yakın olmayan noktalar olarak verildiğinde 4. harmonik noktanın V ye yakın olması için $D := (0, 1, z) = P_2F \cap OV$ ve dolayısıyla P_2F doğrusunun $[1, u, v]$ tipinde bir doğru olması gerekir. Buradan $z = \left(-2(a - b)^{-1} - (c - a)^{-1}\right) \in \mathbf{I}$

olmak üzere

$$P_2F = [1, -z, 1 + az]$$

bulunur. Bu durumda $(A, B; C, D)$ çifte oranını

$$\begin{aligned}(A, B; C, D) &= (a, b; c, z^{-1}) \\ &= < \left((1 - za)^{-1}(1 - zb)\right)\left((b - c)^{-1}(a - c)\right) > \\ &= < \left((1 + za)(1 - zb)\right)\left((b - c)^{-1}(a - c)\right) > \\ &= < (1 + z(a - b))\left((b - c)^{-1}(a - c)\right) >\end{aligned}$$

$$=< (1 + z(a - b))\left((b - c)^{-1}(a - c)\right) >$$

olarak buluruz. Son eşitlikte z yi yerine yazarsak

$$\begin{aligned}&=< \left(1 + \left(-2(a - b)^{-1} - (c - a)^{-1}\right)(a - b)\right)\left((b - c)^{-1}(a - c)\right) > \\ &=< -\left(1 + (c - a)^{-1}(a - b)\right)\left((b - c)^{-1}(a - c)\right) > \\ &=< -\left(1 + (c - a)^{-1}((a - c) + (c - b))\right)\left((b - c)^{-1}(a - c)\right) > \\ &=< -\left((c - a)^{-1}(c - b)\right)\left((b - c)^{-1}(a - c)\right) > \\ &=< -\left((c - a)^{-1}(b - c)\right)\left((b - c)^{-1}(c - a)\right) > \\ &=< -1 >\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu $D \sim V$ iken bile $h(A, B, C, D)$ olduğu anlamına gelir.

Şimdi A, B, C noktalarının herhangi birinin V ye yakın olması durumunu gözönüne alalım. Bu üç durum içinde $h(A, B, C, D)$ olduğunu göstermeliyiz. Şayet $D \sim V$ iken $h(A, B, C, D)$ olduğunu ve (3.6) deki sonuçları birarada düşünecek olursak

$$\begin{aligned}(A, B; C, D) &= (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A) =< -1 > \\ (B, A; C, D) &= (A, B; D, C) = (D, C; A, B) = (C, D; B, A) =< -1 >^{-1} =< -1 >\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi bu üç durumu aşağıdaki gibi ele alabiliriz:

Şayet $A \sim V$ ise bu takdirde $z \in \mathbf{I}$ olmak üzere $A = (0, 1, z)$ dir. $B = (0, b, 1)$, $C = (0, c, 1)$ $D = (0, d, 1)$ olsun. Bu durumda $(A, B; C, D)$ çifte oranı; D, C, A ve B nin yerine sırasıyla A, B, C ve D alarak, $(D, C; A, B)$ çifte oranı yardımıyla hesaplanabilir. Bu yüzden $A \sim V$ için $(A, B; C, D) =< -1 >$ olduğu açıktır.

Şayet $B \sim V$ ise bu takdirde $z \in \mathbf{I}$ olmak üzere $B = (0, 1, z)$ dir. $A = (0, a, 1)$, $C = (0, c, 1)$ ve $D = (0, d, 1)$ olsun. Bu durumda $(A, B; C, D)$ çifte oranı; C, D, A ve B nin yerine sırasıyla A, B, C ve D alarak, $(C, D; A, B)$ çifte oranı yardımıyla hesaplanabilir. Bu yüzden $B \sim V$ için $(A, B; C, D) =< -1 >$ olacağı aşikardır.

Son olarak şayet $C \sim V$ ise bu takdirde $z \in \mathbf{I}$ olmak üzere $C = (0, 1, z)$ dir. $A = (0, a, 1)$, $B = (0, b, 1)$ ve $D = (0, d, 1)$ olsun. Bu durumda $(A, B; C, D)$ çifte oranı; B, A, D ve C nin yerine sırasıyla A, B, C ve D alarak, $(B, A; D, C)$ çifte oranı yardımıyla hesaplanabilir. Bu yüzden de $C \sim V$ için $(A, B; C, D) =< -1 >$ olacaktır.

Böylece tüm durumlarda g nin harmonik pozisyondaki A, B, C, D noktaları için $h(A, B, C, D)$ olduğunu göstermiş olduk.

Tersine ispat için, direkt hesaplamanın hatırına ispatı tüm mümkün durumlar için Şekil 3.2.1 in bir konfigürasyonuna dönüştürebilen özel dörtgenler vererek yapacağız. Dört durum söz konusudur:

$h(A, B, C, D)$ kabulümüzden dolayı A, B, C, $D \in g$ noktalarından herhangi üçü verildiğinde dördüncü noktanın bir tek olarak belli olduğunu Yardımcı Teorem 3.2.8 den biliyoruz. Şimdi ilgili durumlara geçebiliriz.

1. Durum: $A = (0, a, 1)$, $B = (0, b, 1)$, $C = (0, c, 1)$ noktalarının hiçbiri V ye yakın olmasın. Bu durumda $D \nsim V$ ise $h(A, B, C, D)$ olacak özellikteki D noktası $D = (0, a + \left(-2\,(a-b)^{-1} - (c-a)^{-1}\right)^{-1}, 1)$ ve $D \sim V$ ise $D = (0, 1, \left(-2\,(a-b)^{-1} - (c-a)^{-1}\right))$ biçiminde olduğu gerekli işlemler yapılarak kolayca görülebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_1 &= U = (1,0,0)\,, P_2 = (1,a,1)\,, E = \left((c-b)\,(a-b)^{-1}, c, 1\right) \text{ ve} \\ F &= \left(-1 + (b-a)\,(c-a)^{-1}, b, 1\right) \end{aligned}$$

olarak seçilirse H(A, B, C, D) olduğu görülür.

2. Durum: $A = (0, 1, z) \sim V$, $B = (0, b, 1)$ ve $C = (0, c, 1) \nsim V$ olsun. Bu durumda $h(A, B, C, D)$ olacak özellikteki D noktası $D = (0, 2b - c - 2\,(c-b)\,z\,(c-b)\,, 1)$ olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_1 &= U, P_2 = (1,1,z), E = ((c-b)\,(1+zb)\,, c, 1) \text{ ve} \\ F &= ((c-b)\,(1+zc)\,, b, 1) \end{aligned}$$

olarak seçilirse H(A, B, C, D) olduğu görülür.

3. Durum: $B = (0, 1, z) \sim V$, $A = (0, a, 1)$ ve $C = (0, c, 1) \nsim V$ olsun. Bu durumda $h(A, B, C, D)$ olacak özellikteki D noktası $D = (0, 2a - c - 2(c - a) z (c - a), 1)$ olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_1 &= U, P_2 = (1, a, 1), E = ((a - c) z + 1, c, 1) \text{ ve} \\ F &= (1, (1 + (c - a) z)(c - a) + ((c - a) z) a, (c - a) z) \end{aligned}$$

olarak seçilirse H(A, B, C, D) olduğu görülür.

4. Durum: $C = (0, 1, z) \sim V$, $A = (0, a, 1)$ ve $B = (0, b, 1) \nsim V$ olsun. Bu durumda $h(A, B, C, D)$ olacak özellikteki D noktası $D = \left(0, a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(a - b) z\right)(b - a), 1\right)$ olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_1 &= U, P_2 = (1, a, 1), E = (1, (a - b) + ((a - b) z) b, (a - b) z) \text{ ve} \\ F &= (-1 - (a - b) z, b, 1) \end{aligned}$$

olarak seçilirse H(A, B, C, D) olduğu görülür.

Bu yüzden g nin harmonik dört noktası harmonik pozisyondadır.$\blacksquare$

KAYNAKLAR

Akpınar, A., B. Çelik, S. Çiftçi. 2007. Cross-Ratios and 6-Figures in Some Moufang-Klingenberg Planes. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*. (2007-2008 de görülecek).

Artin, E. 1957. *Geometric Algebra*. New York and London Interscience. 214 p.

Bacon, P. Y. 1976. *An Introduction to Klingenberg Planes*. 3101 NW 2nd Ave., Gainesville, Florida., 32607, USA (Vol. 1, 1976; Vol. 2, 1977; Vol. 3, 1979): P. Y. Bacon. 952 p.

Baker, C. A., N. D. Lane, J. W. Lorimer. 1991. A Coordinatization for Moufang-Klingenberg Planes. *Simon Stevin*, **65**, 3–22.

Benz, W. 1973. *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*. Berlin: Springer. 368 p.

Blunck, A. 1991a. Cross-Ratios in Moufang Planes. *Journal of Geometry*, **40**, 20–25.

Blunck, A. 1991b. Cross-Ratios Over Lokal Alternative Rings. *Result Math.*, **19**, 246–256.

Blunck, A. 1991c. Projectivities in Moufang-Klingenberg Planes. *Geometriae Dedicata*, **40**, 341–359.

Blunck, A. 1992. Cross-ratios in Moufang-Klingenberg planes. *Geometriae Dedicata*, **43**, 93–107.

Çelik, B., A. Akpınar, S. Çiftçi. 2007. 4-Transitivity and 6-Figures in Some Moufang-Klingenberg Planes. *Monatshefte für Mathematik*. (2007 de görülecek).

Çelik, B. 1995. Non-Assosyatif Cebirler Üzerine Kurulan Projektif Yapılar (Düzlemler), Doktora Tezi, Uludag Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı. 74 s.

Çiftçi, S., R. Kaya, J. C. Ferrar. 1988. On 4-transitivity in the Moufang Plane. *Journal of Geometry*, **31**, 65–68.

Çiftçi, S. 1984. Moufang Düzlemleri Üzerine, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı. 48 s.

Dugas, M. 1978. Verallgemeinerte Andre-Ebenen mit Epimorphismen auf Hjelmslev-

Ebenen. *Geometriae Dedicata*, **8**, 105–123.

Ferrar, J. C. 1981. Cross-ratios in projective and affine planes,. *in Plaumann, P. and Strambach, K., Geometry-von Staudt's Point of View (Proceedings Bad Windsheim,1980), Reidel, Dordrecht*, 101–125.

Fishback, W. T. 1962. *Projective and Euclidean Geometry*. John Wiley and Sons Inc. 244 p.

Fraleigh, J. B. 1989. *A First Course in Abstract Algebra*. Addision-Wesley Publ. Co. 518 p.

Hall, M. JR. 1954. Projective Planes and Related Topics. *California Institute of Technology Pasadena*, 30–31.

Horadam, A. F. 1970. *A Guide to Undergraduate Projective Geo.* Pergamon Press. 349 p.

Hughes, D. R., F. C. Piper. 1973. *Projective planes*. New York: Springer-Verlag. 291 p.

Jacobson, N. 1958. Composition Algebras and Their Automorphisms. *Rend. Circ. Mat. Palermo, Series 2*, **7**, 55–80.

Jacobson, N. 1985. *Basic Algebra I.* New York: W. H. Freeman and Company. 499 p.

Kaya, R. 1992. *Projektif Geometri*. Eskisehir: Anadolu Üniv. Yay. No: 551. 463 s.

Keppens, D. 1988. Coordinatization of projective Klingenberg planes (part I). *Simon Stevin*, **62**, 63–90.

Pickert, G. 1955. *Projektive Ebenen*. Berlin: Springer. 343 p.

Schafer, R. D. 1995. *An Introduction to Nonassociative Algebras*. New York: Dover Publications. 166 p.

Skornyakov, L. A. 1953. Right-Alternative Fields. *Isv. Akad. Nauk SSSR*, **15**, 177–184.

Stevenson, F. W. 1972. *Projective planes*. San Francisco: W. H. Freeman Co. 416 p.

Zhevlakov, K. A., A. M. Slinko, I. P. Shestakov. 1982. *Rings That Are Nearly Associative*. New York: Academic Press. 371 p.

TEŞEKKÜR

F2004-38 numaralı proje ile bu çalışmayı destekleyen U.Ü. Bilimsel Araştırmalar Komisyonu'na teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

22.04.1976 yılında İstanbul - Paşabahçe de doğdum. İlkokul ve Ortaokulu Gebze Çayırova İlköğretim Okulunda, liseyi Gebze Sarkuysan Lisesinde tamamladım. 1993 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans eğitimime başladım ve buradan 1997 yılında mezun oldum. 1998 yılının ortalarında geometri bilim dalında Prof. Dr. Süleyman Çiftçi danışmanlığında "Sonlu Mertebeli Projektif Düzlemler" isimli yüksek lisans tezime başladım. 1999 yılı başında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne araştırma görevlisi olarak atandım. Yüksek lisans tezimi 2001 yılında bitirdikten hemen sonra yine Prof. Dr. Süleyman Çiftçi danışmanlığında doktoraya başladım. 2006 yılında, Prof. Dr. Joseph A. Thas danışmanlığında Erasmus öğrencisi olarak, Ghent Üniversitesi'nde bir dönem bulundum. Halen Uludağ Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak görevime devam etmekteyim.