



T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞEKİL ANALİZİNDE İNCE LEVHA YÖNTEMİ  
VE UYGULAMASI

Elif ASLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2007



T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞEKİL ANALİZİNDE İNCE LEVHA YÖNTEMİ  
VE UYGULAMASI

Elif ASLAN

Doç. Dr. İbrahim GÜNEY  
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2007

T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞEKİL ANALİZİNDE İNCE LEVHA YÖNTEMİ  
VE UYGULAMASI

ELİF ASLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 20/ 07/ 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr. İbrahim GÜNEY Prof.Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN Doç.Dr. İlker ERCAN  
Danışman

## ÖZET

Bu tezde; şekil kavramı tanımlanmış ve şekil analizinde procrustes analizi, ana bileşenler analizi ve özellikle ince levha yöntemi ele alınmıştır.

Bir nesnenin şeklinin tanımlanması procrustes analizi ile gerçekleşirken şeklin değişkenliğinin yorumu ana bileşenler analizi ile elde edilmektedir. Bir şekilden diğer bir şekle dönüşümler geniş ölçekli ve küçük ölçekli deformasyonları içerir. İnce levha yöntemi şekil deformasyonunun ayrışımını vererek şekil değişikliğinin yorumlanmasını sağlar.

Yöntemin bir uygulaması olarak, 80 adet denekten hem sağ el hem de sol el ile Bursa ilinin harflerinin büyük harflerle yazılması istenmiştir ve her bir harfin şekli ince levha yönteminin bileşenleri ile incelenmiştir.

**Anahtar kelimeler:** şekil, şekil analizi, procrustes analizi, ana bileşenler analizi, deformasyon, şekil değişkenliği, ince levha yöntemi.

**ABSTRACT**

In this thesis; the definition of shape is given and procrustes analysis, principal component analysis and particularly thin plate spline method are considered in shape analysis.

A thin plate spline transformation from one shape to another will involve some large scale deformations and some small scale deformations. It serves the decomposition of deformation and the interpretation of shape change.

As an application of method, we asked 80 people to write the characters of BURSA with their both hands and we analyzed all of the characters with components of thin plate spline.

**Keywords:** shape, shape analysis, procrustes analysis, principal component analysis, deformation, shape variability, thin plate spline.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ ONAY SAYFASI .....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vii
GİRİŞ .....	1
<b>1. BİRİNCİ BÖLÜM ÖN BİLGİLER</b> .....	<b>6</b>
1.1. Şekil .....	6
1.2. Şekil Büyüklüğü ve Şekil Koordinatları .....	8
1.3. Bazı Şekil Koordinat Sistemleri .....	9
1.4. Procrustes Analizi .....	11
1.5. Şekil Uzayı .....	15
1.6. Uzaklıklar .....	18
<b>2. İKİNCİ BÖLÜM ANA BİLEŞENLER</b> .....	<b>22</b>
2.1. Verilerin Standartlaştırılması .....	23
2.2. Procrustes Tanjant Düzlemi Koordinatları .....	24
<b>3. ÜÇÜNCÜ BÖLÜM ŞEKİL DEĞİŞKENLİĞİNİN İNCE LEVHA MODELLENMESİ</b> .....	<b>28</b>
3.1. Deformasyonlar ve Şekil Değişkenliğinin Tanımlanması .....	28
3.2. İnce Levha Dönüşümü .....	29
3.3. Bükme Enerjisi .....	35
3.4. Ana ve Kısmi Warp Ayrışmaları .....	39
3.5. Afin Katkı .....	41
<b>4. DÖRDÜNCÜ BÖLÜM UYGULAMA</b> .....	<b>43</b>
4.1. B Harfi .....	44
4.2. U Harfi .....	48
4.3. R Harfi .....	53
4.4. S Harfi .....	58
4.5. A Harfi .....	60
4.6. Ana bileşenler analizi .....	64
<b>5. BEŞİNCİ BÖLÜM SONUÇ</b> .....	<b>70</b>
KAYNAKLAR .....	71
ÖZGEÇMİŞ .....	73
TEŞEKKÜR .....	74

<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b>	<b>SAYFA</b>
Çizelge 1.6.1 .....	20
Çizelge 1.6.2 .....	21
Çizelge 4.1.1 .....	46
Çizelge 4.1.2 .....	46
Çizelge 4.1.3 .....	46
Çizelge 4.2.1 .....	50
Çizelge 4.2.2 .....	51
Çizelge 4.2.3 .....	51
Çizelge 4.3.1 .....	55
Çizelge 4.3.2 .....	55
Çizelge 4.3.3 .....	55
Çizelge 4.4.1 .....	60
Çizelge 4.4.2 .....	60
Çizelge 4.4.3 .....	60
Çizelge 4.5.1 .....	64
Çizelge 4.5.2 .....	64
Çizelge 4.5.3 .....	64
Çizelge 4.6.1 .....	67
Çizelge 4.6.2 .....	67
Çizelge 4.6.3 .....	67
Çizelge 4.6.4 .....	67
Çizelge 4.6.5 .....	68
Çizelge 4.6.6 .....	68
Çizelge 4.6.7 .....	69
Çizelge 4.6.8 .....	69
Çizelge 4.6.9 .....	69
Çizelge 4.6.10 .....	69

<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b>	<b>SAYFA</b>
Şekil 0.1. ....	4
Şekil 1.1. ....	7
Şekil 1.2. ....	7
Şekil 1.3. ....	20
Şekil 3.1. ....	29
Şekil 3.2. ....	30
Şekil 3.3. ....	31
Şekil 4.1.1. ....	44
Şekil 4.1.2. ....	44
Şekil 4.1.3. ....	44
Şekil 4.1.4. ....	45
Şekil 4.1.5. ....	45
Şekil 4.1.6. ....	45
Şekil 4.1.7. ....	45
Şekil 4.1.8. ....	45
Şekil 4.1.9. ....	45
Şekil 4.1.10. ....	46
Şekil 4.1.11. ....	47
Şekil 4.1.12. ....	47
Şekil 4.1.13. ....	47
Şekil 4.1.14. ....	47
Şekil 4.1.15. ....	48
Şekil 4.1.16. ....	48
Şekil 4.1.17. ....	48
Şekil 4.2.1. ....	48
Şekil 4.2.2. ....	48
Şekil 4.2.3. ....	48
Şekil 4.2.4. ....	48
Şekil 4.2.5. ....	48
Şekil 4.2.6. ....	50
Şekil 4.2.7. ....	50
Şekil 4.2.8. ....	50
Şekil 4.2.9. ....	50
Şekil 4.2.10. ....	51
Şekil 4.2.11. ....	51
Şekil 4.2.12. ....	51
Şekil 4.2.13. ....	52
Şekil 4.2.14. ....	52
Şekil 4.2.15. ....	52
Şekil 4.2.16. ....	52
Şekil 4.2.17. ....	53
Şekil 4.3.1. ....	53
Şekil 4.3.2. ....	54
Şekil 4.3.3. ....	54
Şekil 4.3.4. ....	54



Şekil 4.3.5. ....	54
Şekil 4.3.6. ....	54
Şekil 4.3.7. ....	54
Şekil 4.3.8. ....	55
Şekil 4.3.9. ....	55
Şekil 4.3.10. ....	55
Şekil 4.3.11. ....	56
Şekil 4.3.12. ....	56
Şekil 4.3.13. ....	56
Şekil 4.3.14. ....	57
Şekil 4.3.15. ....	57
Şekil 4.3.16. ....	57
Şekil 4.3.17. ....	57
Şekil 4.4.1. ....	58
Şekil 4.4.2. ....	58
Şekil 4.4.3. ....	58
Şekil 4.4.4. ....	59
Şekil 4.4.5. ....	59
Şekil 4.4.6. ....	59
Şekil 4.4.7. ....	59
Şekil 4.4.8. ....	59
Şekil 4.4.9. ....	59
Şekil 4.4.10. ....	60
Şekil 4.4.11. ....	60
Şekil 4.4.12. ....	61
Şekil 4.4.13. ....	61
Şekil 4.4.14. ....	61
Şekil 4.4.15. ....	61
Şekil 4.4.16. ....	62
Şekil 4.4.17. ....	62
Şekil 4.5.1. ....	62
Şekil 4.5.2. ....	63
Şekil 4.5.3. ....	63
Şekil 4.5.4. ....	63
Şekil 4.5.5. ....	63
Şekil 4.5.6. ....	63
Şekil 4.5.7. ....	63
Şekil 4.5.8. ....	64
Şekil 4.5.9. ....	64
Şekil 4.5.10. ....	65
Şekil 4.5.11. ....	65
Şekil 4.5.12. ....	65
Şekil 4.5.13. ....	65
Şekil 4.5.14. ....	66
Şekil 4.5.15. ....	66
Şekil 4.5.16. ....	66
Şekil 4.5.17. ....	66

## 0. GİRİŞ

Şekil; öteleme, ölçekleme ve döndürme etkilerinin nesneden kaldırılması ile geriye kalan özelliklerin bütününe denir. İki ve üç boyutlu uzayda nesnelere tanımlanırken şeklin modellenmesi ve değişkenliğinin saptanması gerekmektedir. Bu tezde şekil analizinin birçok özelliği ve uygulamaları incelenmiştir.

Şekil analizinde nirengi noktaları ilk kez Kendall (1984) ve Bookstein (1989) tarafından kullanılmıştır. Kendall nirengi noktalarını daha geometrik bir tabanda ele almıştır. Dryden ve Mardia nirengi noktalarıyla gösterilen iki boyutlu şekiller için şekil dağılımlarını bulmuşlardır(Dryden and Mardia 1998). Goodall (1991) şekil analizinde Procrustes metodlarının kullanılabilirliğini göstermiştir ve Kent kompleks Bingham dağılımını tanımlamıştır. Kent ayrıca, yoğunlaştırılmış verileri analiz edebilmenin en yararlı yolunun Procrustes ortalamada verilerin tanjant düzlem üzerine iz düşürülmesi ve ana bileşenlerinin hesaplanmasının olduğunu öne sürmüştür.

Nirengi noktaları iki kategoride incelenebilir: doğal nirengi noktaları ve pseudo nirengi noktaları. Eğer bir nesne her örnekte karşılaşılan belli özelliklere sahipse bu tip nirengi noktalarına doğal nirengi noktaları denir. Örnek olarak 3 rakamının bitiş noktası verilebilir. Bookstein biyolojik verilerin şekli ile ilgilenmiştir ve nirengi noktalarını şekilden şekle biyolojik olarak ilişkili noktalar olarak tanımlanmıştır. Cootes ve ark. (1992) nirengi noktalarını sınırların içinde veya dışında yerleşmiş olan noktalar olarak ele almıştır(Anderson,1997).

Nirengi noktaları ayrıca üç farklı çeşide de indirgenebilir: Nesnenin önemli kısımlarına yerleştirilen nirengi noktaları, en yüksek eğrilikli noktalar, bitiş noktaları gibi bağımsız konumlara yerleştirilmiş olan nirengi noktaları ve ilk iki nirengi nokta çeşidinin aralarına yerleştirilmiş olan nirengi noktaları. Dryden ve Mardia bu üç çeşidi biyolojik, matematik ve pseudo nirengi noktaları olarak adlandırmışlardır. (Dryden 1997, Stegmann 2002).

Nesneler üzerinde nirengi noktaları saptanırken her bir nesnenin aynı konum veya doğrultuda ölçüldüğünden emin olunamamaktadır. Eğer şekiller karşılaştırılmak isteniyorsa, nesnelere öteleme, döndürme ve ölçekleme işlemleri ile standart konum ve doğrultuya getirmek gerekir. Bu metodu Bookstein 1984'te, temel doğruyu oluşturacak olan A ve B nirengi noktalarını seçerek kullanmıştır. Her bir nesneyi öteleyerek, döndürerek ve ölçekleyerek A nirengi noktasını (0,0) noktasına ve B nirengi noktasını (1,0) noktasına getirmiştir. Örneğin, köşeleri A,B ve C olan üçgenler kümesi ele alınsın. Bookstein'in metodu ile A ve B noktaları sabitlenirken geriye kalan serbest C noktası her bir üçgenin şeklini tanımlar. Bu yöntemdeki problem ise temel doğrunun noktalarının sabit tutulması ve temel doğruya yakın olan noktaların varyanslarının küçük olmasıdır. Nirengi noktalarının bu uygulaması tamamen başarılı bulunmadığından Procrustes uyarlama metodu daha yaygın olarak kullanılmaktadır.

Procrustes uyarlama metodu, nirengi noktaları arasındaki kareli uzaklıkların toplamını minimum yapan yaklaşımdır. Uyarlama sonrası elde edilen koordinatlara Procrustes koordinatları denir. Tam Procrustes uyarlaması ve kısmi Procrustes uyarlaması olmak üzere iki çeşidi vardır. Tam Procrustes uyarlaması öteleme, döndürme ve ölçekleme ile nesneyi standartlaştırarak şekli elde eder. Kısmi Procrustes uyarlaması ise öteleme ve döndürme ile nesneyi standartlaştırarak şekil ve büyüklüğü elde eder. Procrustes ortalama şekil ise Procrustes metodu ile uyarlanmış şekillerin konfigürasyonlarının aritmetik ortalaması ile elde edilir. Ayrıca Procrustes ortalama şekil, standartlaştırılmış verilerin kareli toplamları ve çarpımları matrisinin en önemli öz vektörüdür (Richtsmeier 1992, Anderson 1997). Sibson (1978) Procrustes metodları üzerine genel bir gözlem yapmıştır ve Procrustes analizinin faktör analizi için bulunduğunu ancak sonraları çok değişkenli ölçeklemede kullanılarak şekil ile görüntü analizinde yararlı bir araç haline geldiğini belirtmiştir.

Şekil analizinde Procrustes metodu; veri kümesinde değişkenlik küçük olduğunda, veri kümesinin ortalama şeklinin tahminlenmesinde ve veri kümesindeki şekillerin karşılaştırılmasında kullanılır. Veriyi standartlaştırmanın birçok yolu vardır: Merkezleştirme matrisini kullanmak, Helmert matrisi ile çarpmak veya Bookstein koordinatlarını hesaplamak gibi.

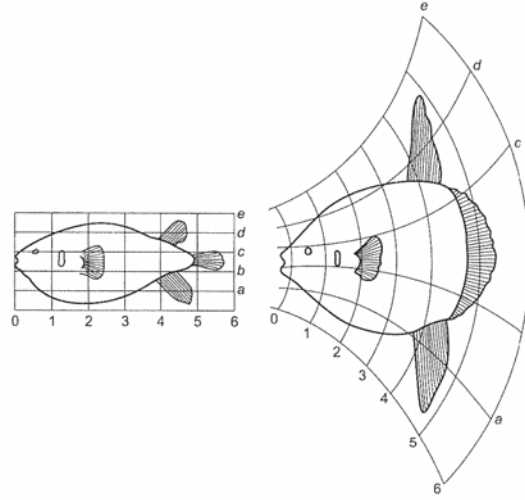
Veri kümesindeki nesnelere arasındaki değişkenliği belirlemenin temel yolu; verilerin Procrustes ortalama şekilde kısmi veya tam izdüşümü ile tanjant düzlemi üzerine iz düşürülmesi, iz düşürülen verilerin ana bileşenler analizinin değerlendirilmesi ve değişkenliğin gösterimi için ana bileşenlerin şekil uzayına tekrar iz düşürülmesidir.

Ana bileşenler analizi, çok değişkenli verilerde mümkün olduğu kadar çok varyansı hesaplayan varsayıma dayalı bileşenleri bulmaya yarar (Hotelling 1933, Jolliffe 1986, Jackson 1991, Reyment and Jöreskog 1993). Bileşenler ortogondur ve lineer birleşimler ile değişkenlik tarif edilebilir. Ana bileşenler analizinin amacı bütün değişkenler kümesinin boyutunu en çok değişkenliği açıklayan kümenin boyutuna indirgemektir (Jolliffe 1986). Bu veri indirgeme metodu küçük boyutlu çok değişkenli verilerin en önemli görsel ifadelerini verir. Başka bir deyişle ana bileşenler analizi, orijinal yüksek boyutlu değişkenler uzayından iki boyutlu düzleme noktaların varyanslarında minimum kayıplar ile iz düşürülmesini sağlar. Dolayısıyla veri kümesi daha önemli ve daha anlaşılır bir hale gelir. Ana bileşenler analizi genellikle verilerin kovaryans matrisinin özyapısını içerir. Her bir ana bileşenin varyansı sadece ilgili öz değerdir ve her bir bileşen tarafından açıklanan değişkenlik oranı ilgili öz değerin bütün öz değerlerin toplamına oranı ile bulunur(Richtsmeier 1992, Anderson 1997, Hammer 2006,).

Temel metrik özdeşlik matrisi veya öklid metriğidir. Dolayısıyla, ana bileşenler kovaryans matrisin öz vektörleridir. Diğer metriklerin kullanımı ile değişkenliğin farklı yönleri tanımlanabilir.

Eğer verilerin kovaryans matrisinin rankı boyutundan küçük ise veriler, ana bileşenlerin sayısını azaltan ve kovaryans matrisin rankını küçülten başka bir düzleme iz düşürülebilir. Bu yaklaşım şekil analizinde genellikle kullanılır.

Ana bileşenler analizi, şekil analizinde ortalama şeklin elde edilmesinde de kullanılır. Örneğin, Procrustes ortalama şeklin elde edilmesi ve veri kümesinde şekil değişkenliğinin temel durumunun görüntülenmesi gibi.



**Şekil 0.1.** Thompson'ın bir balıktan diğerine dönüşüm ızgarası (Thompson 1917)

Bir şekil diğer bir şekle dönüştürülmek istendiğinde akla ilk gelecek isim D'Arcy Wentworth Thompson'dır. Thompson bu dönüşümleri, kaynak şekli (ilk şekil) karesel ızgara üzerine yerleştirerek ve hedef şekli (ikinci şekil) elde edinceye kadar şekli ve ızgarayı deforme ederek elde etmiştir(Thomson 1917). Bu yaklaşım çok kullanışlıdır çünkü şekil değişkenliğinin görselliğini sağlar. Thompson dönüşümlerini elle çizmiştir dolayısıyla daha objektif bir yaklaşıma gereksinim duyulmuştur.

Kaynak şekilden hedef şekle bir dönüşüm kaynak nirengi noktalarının bu noktalara eşlenmiş olan hedef nirengi noktalarına göre yer değişimini içerir. Nirengi noktalarının bilinen yer değiştirmeleri arasında enterpolasyona ihtiyaç duyulduğundan bu olay bir enterpolasyon problemi'dir. Bu enterpolasyon, herhangi bir sivriliğin, yerel büküm ve sıkışmanın minimum yapılabilmesi için olabildiğince düzgün olmalıdır. Bookstein 1989 da istenen özelliğe sahip enterpolasyon metodunu bulmuştur. Bu metod ince levha dönüşümü olarak adlandırılır, çünkü ince sert metal tabakalara minimum enerji kullanılarak istenilen şekli verme mekanik problemini çözmek için kullanılmışlardır.

İnce levha dönüşümü, bağımsız olarak  $x$  ve  $y$  yönlerinde yer değiştirmeyi hesaplar. Kaynak şekilden hedef şekle ince levha dönüşümünde her  $i$  nirengi noktası,  $\Delta x_i = x_i^H - x_i^K$  bilinen uzaklığı kadar yer değiştirir. Burada  $x_i^H$  hedef şekildeki koordinatı gösterirken  $x_i^K$  kaynak şekildeki koordinatı göstermektedir.

Yatay düzlemde ince, düz, katı fakat esnek bir tabak ele alınsın. Kaynak şekil üzerindeki her bir noktada tabak  $\Delta x_i$  uzaklığı kadar dikey yönde hareket ettirilir. Örneğin bir iğne ile itmek gibi. Böylece tabak en küçük eğriliğe sahip olan düzgün bir form halini alıncaya kadar bükülür. Çünkü tabak eğriliğiyle orantılı olan bükme enerjisini minimum yapar. Bu işlem  $\Delta y_i$  uzaklıkları ile de tekrarlanarak ızgara düğümleri tam olarak oluşturulur. Böylece, ince levha dönüşümü şekil değişikliklerini yorumlamayı sağlayan figürleri üretir.

Bir şekilden diğerine ince levha dönüşümü bazı geniş ölçekli deformasyonları ve küçük ölçekli deformasyonları içerir. İlk olarak kaynak şekle bakılmalıdır. Kaynak konfigürasyonunda nirengi noktalarının hareketleri tabağı bükme ve global-lokal deformasyonları içerir. Amaç kaynak şekildeki herhangi bir hareketi bu bileşenlerin toplamı olarak yeniden ifade etmektir.

Ana warplar ızgara düzlemdeki iki boyutlu konumların tek değişkenli düzgün fonksiyonlarıdır. Ana warplar genellikle ana ilgi odağı değildir ancak deformasyonun ayrıştırılmasında önemli bir adımdır. Ana warplar yalnızca kaynak şekil kullanılarak hesaplanır. Verilen bir hedef şekle yapılan gerçek ayrıştırma kısmi warplar aracılığıyla yorumlanır. Daha yüksek ölçüm değerine sahip olan ana warplara karşılık gelen kısmi warplarda noktalar daha kuvvetli bir şekilde yer değiştirir. Kısmi bir warp verilen herhangi bir kaynak noktasının hedef noktasına yer değişimini gösteren bir dönüşümdür ve böylece kısmi bir warp konumun iki değişkenli bir fonksiyonudur.

## 1.ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmada kullanılan bazı temel kavramların tanımları verilecektir (Dryden 1998, Bookstein 1991, Hammer 2002 and 2006, Graybill 1961). Ele alınan bölüm başlıkları; şekil, şekil büyüklüğü ve koordinatları, bazı şekil koordinat sistemleri, Procrustes analizi, şekil uzayı ve uzaklıklardır.

### 1.1. Şekil

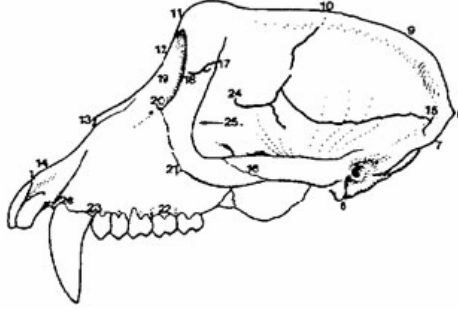
**Tanım 1.1.1:** Konum, ölçeklendirme ve döndürme etkilerinin nesneden kaldırılmasıyla elde edilen geometrik bilgiye şekil denir. Dolayısıyla bir nesnenin şekli, Öklid benzerlik dönüşümlerinden öteleme, ölçekleme ve döndürme dönüşümleri altında değişmezdir. Örneğin bir insan kafatasının şekli keyfi bir koordinat sisteminde ötelendiğinde, ölçeklendiğinde ya da döndürüldüğünde kafatasının değişmeyen geometrik bilgilerini içerir. İki nesne eğer aralarında ötelenip, ölçeklenip döndürülüyorsa aynı şekle sahiptir ve dolayısıyla iki nesne benzer ise eşlenebilir. İleride (Tanım 1.5.6.) verilecek olan tanım ve sonuçlarla tekrar ele alınacaktır.

**Tanım 1.1.2:** Konum ve döndürme etkilerinin nesneden kaldırılmasıyla elde edilen geometrik bilgiye şekil ve büyüklük denir.

**Tanım 1.1.3:** İki veya üç boyutlu uzayda, nesnenin istenen özelliğe sahip konumlarında bulunan noktalarına nirengi noktası(landmark) denilmektedir. Diğer bir tanım ise(Hammer 2006) veri kümesi içinde diğer bütün nesnelere ilişkili olan her bir nesnede tanımlanmış noktalardır. Literatürde nirengi noktalarının çok çeşitli isimleri vardır: Köşe içerenler, çapa noktaları, kontrol noktaları, siteler, profil noktaları, örnekleme noktaları, tasarım noktaları, düğümler, model noktaları, işaretleyiciler. Dryden ve Mardia(1998) nirengi noktalarını iki farklı sınıfta ele almışlardır.

A sınıfı:

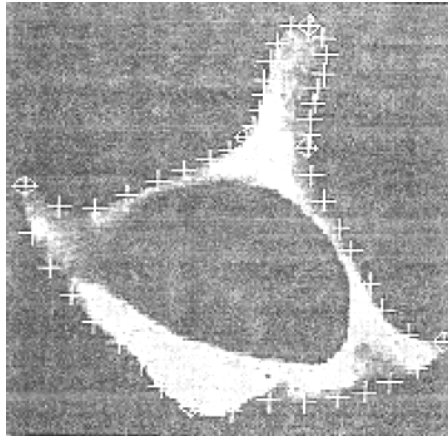
1- Anatomik nirengi noktaları: Organizmalarda uzmanlar tarafından belirlenen biyolojik açıdan anlamlı noktalardır. Örneğin, şekil 1.1 de görüldüğü gibi kafatası kemiklerinin dikişe benzeyen ek yerleri.



**Şekil 1.1.** Maymun kafatası üzerinde belirlenen anatomik nirengi noktaları

2- Matematik nirengi noktaları: Nesnedeki matematik veya geometrik anlam içeren noktalar matematik nirengi noktalarıdır. Örneğin, yüksek eğrilikteki noktalar veya ekstremum noktalar.

3- Pseudo nirengi noktası: Organizmada anatomik ve matematik nirengi noktalarının arasında veya çerçevesinde(taslağında) bulunan noktalara pseudo nirengi noktaları denmektedir. Örneğin, Lohmann (1983) mikro fosillerin çerçevesinde eşit ayrılmış noktalar almıştır.



**Şekil 1.2.** Fare omurgası üzerinde belirlenmiş 6 adet matematik 42 adet pseudo nirengi noktası



B sınıfı:(Bookstein 1991)

1. tip: Doku ve kemiklerin bulunduğu nokta.
- 2.tip: Maksimal eğrilik gibi yerel özelliklerle tanımlı nirengi noktaları.
- 3.tip: Kitle merkezi gibi inşa edilmiş noktalar veya uç noktalar.

**Tanım 1.1.4:** Etiket, nirengi noktaları ile ilişkilendirilmiş bir isim veya sayıdır ve iki nesnenin karşılaştırılışında hangi nirengi nokta çiftinin ilişkili olduğunu belirler. Bu tip nirengi noktalarına etiketli nirengi noktaları denir.

## 1.2. Şekil Büyüklüğü ve Şekil Koordinatları

**Tanım 1.2.1:** Nesne üzerindeki nirengi noktalarının kümesine konfigürasyon denir.  $X$  konfigürasyon matrisi,  $m$  boyutta  $k$  adet nirengi noktasının kartezyen koordinatlarının bulunduğu  $k \times m$  matrisidir. Konfigürasyon uzayı ise mevcut olan bütün nirengi nokta koordinatlarının uzayıdır.

**Tanım 1.2.2:** Keyfi bir pozitif  $a$  sayısı için,  $g(aX) = ag(X)$  özelliğindeki konfigürasyon matrisinin herhangi bir pozitif reel değerli fonksiyonu olan  $g(X)$ ’e büyüklük ölçüsü denir.

**Tanım 1.2.3:**  $X$  in  $(i, j)$  . elemanı  $X_{ij}$ ,  $j$ .sütunun aritmetik ortalaması  $\bar{X}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{ij}$

ve  $C = I_k - \frac{1}{k} 1_k 1_k^T$  merkezleme matrisi olmak üzere,

$$S(X) = \|CX\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (X_{ij} - \bar{X}_j)^2}, \quad X \in R^{km}$$

değerine kitle merkezi büyüklüğü denir. Burada,  $\|X\| = \sqrt{\text{iz}(X^T X)}$  öklid normu,  $I_k$   $k \times k$  birim matrisi ve  $1_k$  1 lerin  $k \times 1$  vektörüdür. ( $k$  adet 1)

Kitle merkezi büyüklüğü; her bir nirengi noktasının merkeze olan uzaklıklarının kareli toplamlarının kareköküdür. Yani  $(X)_i$ ,  $X(i=1,\dots,k)$  konfigürasyon matrisinin  $i$ . satırı ve  $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m)$  kitle merkezi olmak üzere,

$$S(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^k \|(X)_i - \bar{X}\|^2}$$

dir. Bu terim geometrik şekil analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır Kitle merkezi büyüklüğü  $S(X)/\sqrt{k}$  ya da  $S(X)/\sqrt{km}$  ile normalleştirilmiş halde de kullanılmıştır.

Farklı bir büyüklük ölçüsü ise temel doğrunun büyüklüğüdür. Örneğin, 1. ve 2. nirengi noktaları arası uzaklık  $D_{12}(X) = \|(X)_2 - (X)_1\|$  dir. Bu temel doğrunun büyüklüğü ilk kez yüzleri normalleştirebilmek için Galton tarafından 1907 de kullanılmıştır ve daha sonra Bookstein koordinatları ile öne çıkmıştır.

### 1.3.Bazı Şekil Koordinat Sistemleri

Şekil koordinatları Bookstein koordinatları ve kendall koodinatları olmak üzere iki bölümde incelenmiştir.

#### 1.3.1 Düzlemde Bookstein koordinatları

Düzlemde  $k \geq 3$  için nirengi noktaları,  $(x_j, y_j)$   $j = 1, \dots, k$  olsun. Bookstein, 1 ve 2 numaralı nirengi noktalarının ötelenerek, döndürülerek ve ölçeklenerek sabit bir konuma getirilmesi ile benzerlik dönüşümlerinin etkisini kaldırmayı önermiştir. Eğer, 1. nirengi noktası  $(0,0)$  noktasına ve 2. nirengi noktası da  $(1,0)$  noktasına götürülürse, bu işlemlerden sonra geriye kalan  $k-2$  adet koordinat uygun şekil değişkenleridir. Temel nirengi noktalarının  $(-\frac{1}{2}, 0)$  ve  $(\frac{1}{2}, 0)$  noktalarına götürülmesi ile nesnenin geriye kalan  $(u_j^B, v_j^B)^T$   $j = 3, \dots, k$  koordinatlarına Bookstein koordinatları denir. Böylece Bookstein koordinatları;

$$D_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 > 0, \quad -\infty < u_j^B, v_j^B < \infty \quad \text{ve} \quad j = 3, \dots, k \quad \text{olmak üzere}$$

$$u_j^B = \{(x_2 - x_1)(x_j - x_1) + (y_2 - y_1)(y_j - y_1)\} / D_{12}^2 - \frac{1}{2},$$

$$v_j^B = \{(x_2 - x_1)(y_j - y_1) + (y_2 - y_1)(x_j - x_1)\} / D_{12}^2 \text{ dir.}$$

### 1.3.2. Düzlemde Kendall koordinatları

Kendall koordinatları Bookstein koordinatlarına benzemektedir ancak konum etkisi farklı bir yöntemle kaldırılmaktadır. Öncelikle konum etkisini kaldırmak için kullanılan Helmert alt matrisi tanımlanmalıdır.

Helmert alt matrisi,  $(k-1) \times k$  Helmert matrisinin ilk satırının olmadığı halidir.

İstatistikte çok kullanılan  $H^F$  tam Helmert matrisi, ilk satırının elemanları  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  olan ve geri kalan satırları ilk satıra ortogonal olan bir  $k \times k$  ortogonal matristir.  $H^F$  tam Helmert matrisinde ilk satırın atılmasıyla  $HX$  konfigürasyonunun orijinal konuma bağlı olmaması sağlanmıştır.

Helmert alt matrisinin  $j$ . satırı;  $(h_j, \dots, h_j, -jh_j, 0, 0, \dots, 0)$  olarak verilir. Burada,

$h_j = -\{j(j+1)\}^{-\frac{1}{2}}$  dir ve  $j$ . satır,  $j=1, \dots, k-1$  olmak üzere sırasıyla,  $h_j$  nin  $j$  defa tekrarını,  $-jh_j$  değerini ve  $k-j-1$  adet sıfırı içerir. Örneğin  $k=3$  için tam Helmert matrisi;

$$H^F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ ve Helmert alt matrisi;}$$

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Orijinal nirengi noktaları kompleks düzlemde,  $z^0 = (z_1^0, \dots, z_k^0)^T$  ile verilsin. Konum etkisi Helmert alt matrisi ile çarparak  $z_H = Hz^0 = (z_1, \dots, z_{k-1})^T$  kaldırılır. Kendall koordinatları;

$$u_j^K + iv_j^K = \frac{z_{j-1}}{z_1}, \quad j = 3, \dots, k \quad \text{ile verilir.}$$

## 1.4. Procrustes analizi

### 1.4.1. Şekil uzaklığı ve Procrustes eşlemesi

$y^*$ ,  $y$  nin kompleks eşleniğinin transpozu ve  $y^* 1_k = 0 = w^* 1_k$  olmak üzere,  $C^k$  da iki merkezleştirilmiş konfigürasyon  $y = (y_1, \dots, y_k)^T$  ve  $w = (w_1, \dots, w_k)^T$  olarak ele alınsın. Şekildeki konfigürasyonları karşılaştırmak için iki şekil arasındaki uzaklık ölçüsü belirlenmelidir. Kompleks regresyon denklemi;

$$\begin{aligned} y &= (a + ib)1_k + \beta e^{i\theta} w + \varepsilon \\ &= [1_k, w]A + \varepsilon \\ &= X_D A + \varepsilon \end{aligned}$$

ile verilir. Burada,  $A = (A_1, A_2)^T = (a + ib, \beta e^{i\theta})^T$  bir  $a + ib$  ötelemeli,  $\beta > 0$  ölçeklemeli ve  $0 \leq \theta < 2\pi$  döndürmeli  $2 \times 1$  kompleks parametreler;  $\varepsilon$   $k \times 1$  kompleks hata vektörü ve  $X_D = [1_k, w]$   $k \times 2$  matrisidir.

Procrustes eşleme için en küçük kareler fonksiyonunu minimum yapılarak  $A$  tahminlenmelidir. Bu durum hataların kareli toplamalarının minimum yapılması anlamına gelir.

$$D^2(y, w) = \varepsilon \varepsilon^* = (y - X_D A)^* (y - X_D A).$$

### 1.4.2. Tam Procrustes uyarlaması

$y$  nin  $w$  üzerine tam Procrustes uyarlaması;  $(\hat{\beta}, \hat{\theta}, \hat{a}, \hat{b})$  değerleri

$$D^2(y, w) = \|y - w\beta e^{i\theta} - (a + ib)1_k\|^2$$

eşitliğini minimum yapacak şekilde seçildiğinde,

$$w^p = X_D \hat{A} = (\hat{a} + i\hat{b})1_k + \hat{\beta} e^{i\hat{\theta}} w \text{ dır.}$$

**Sonuç 1.4.3:** Tam Procrustes uyarlamasının eşleme parametreleri;

$$\hat{a} + i\hat{b} = 0, \quad \hat{\theta} = \arg(w^* y) = -\arg(y^* w), \quad \hat{\beta} = (w^* y y^* w)^{\frac{1}{2}} / (w^* w)$$

değerleridir.

**İspat:** Hataların kareli toplamı minimum yapılmalıdır.

$$\begin{aligned}
D^2 &= \varepsilon \varepsilon^* \\
&= \left\| y - w \beta e^{i\theta} - (a + ib) \mathbf{1}_k \right\|^2 \\
&= y^* y + \beta^2 w^* w - y^* w \beta e^{i\theta} - w^* y \beta e^{-i\theta} + k(a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

$a$  ve  $b$  nin minimum değeri sıfırdır.

$$y^* w = \gamma e^{i\phi} \quad (\gamma > 0) \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned}
\beta(y^* w e^{i\theta} + w^* y e^{-i\theta}) &= \beta(\gamma e^{i(\theta+\phi)} + \gamma e^{-i(\theta+\phi)}) \\
&= 2\beta\gamma \cos(\theta + \phi)
\end{aligned}$$

dir.  $\left\| y - \beta e^{i\theta} w \right\|^2$  değerinin  $\theta$  üzerinden minimum yapılabilmesi için  $2\beta\gamma \cos(\theta + \phi)$  değeri maksimum olmalıdır.

$\theta$  için bir çözüm;

$\hat{\theta} = -\phi = -\arg(y^* w)$  dır. En küçük ölçeklemeyi bulmak için  $\gamma = |y^* w|$  olmak üzere,

$$\frac{\partial D^2}{\partial \beta} = 0 = 2\beta w^* w - 2\gamma \text{ değeri çözülmelidir. Sonuç olarak,}$$

$$\hat{\beta} = |y^* w| / (w^* w) \text{ dır.}$$

#### 1.4.4. Tam Procrustes uzaklığı

$w$  ve  $y$  kompleks konfigürasyonları arasındaki tam Procrustes uzaklığı;

$$\begin{aligned}
d_F(w, y) &= \inf_{\beta, \theta, a, b} \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{w}{\|w\|} \beta e^{i\theta} - a - ib \right\| \\
&= \left\{ 1 - \frac{y^* w w^* y}{w^* w y^* y} \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Tam teriminin kullanılmasının sebebi, bütün öklid benzerlik dönüşümlerinin (öteleme, ölçekleme ve döndürme) eşlemede kullanılmasıdır fakat  $y$  ve  $w$  nin birim büyüklüğe ölçeklendiği unutulmamalıdır. Procrustes teriminin kullanılmasının sebebi ise yukarıdaki eşleme işlemlerinin, çok değişkenli analizde dönüşümlere bağlı matrislerin karşılaştırılmasında sık kullanılan bir teknik olan Procrustes analizine özdeş olmasıdır. Procrustes analizinde en

uygun dönüşüm parametreleri en küçük kareler yöntemiyle tahminlenmiştir. “Procrustes analizi” terimi ilk kez faktör analizinde Hurley ve Cattell tarafından 1962 de kullanılmıştır.

#### 1.4.5. Ortalama şeklin tahminlenmesi

Ortalama şeklin tahminlenmesinde birçok durum söz konusudur. Öteleme vektörü  $\gamma_i \in \mathbb{C}$ , ölçekleme parametresi  $\beta_i \in \mathbb{R}^+$ , döndürme açısı  $0 \leq \theta_i < 2\pi$ , sıfır ortalamalı rasgele kompleks hatalar  $\varepsilon_i \in \mathbb{C}$  ve ana kitle ortalama konfigürasyonu  $\mu$  olmak üzere rasgele örneklem konfigürasyonu  $w_1, \dots, w_n$

$$w_i = \gamma_i 1_k + \beta_i e^{i\theta_i} (\mu + \varepsilon_i)$$

perturbasyon modelinden elde edilir.

Ortalama şeklin tam Procrustes tahminlemesi olan  $[\hat{\mu}]$ ; her bir  $w_i$  den birim büyüklükte bilinmeyen ortalama konfigürasyon olan  $\mu$  ye tam Procrustes uzaklıklarının kareleri toplamının minimum yapılmasıyla elde edilir.

$$[\hat{\mu}] = \arg \inf_{\mu} \sum_{i=1}^n d_F^2(w_i, \mu) \text{ dir.}$$

Bundan sonra ortalama şeklin tam Procrustes ortalaması yerine tam Procrustes ortalama ifadesi kullanılacaktır. Tam Procrustes ortalamasının şeklin anakitle tahmini olduğu unutulmamalıdır.  $w_1, \dots, w_n$  konfigürasyonları merkezleştirilmiştir dolayısıyla  $w_i^* 1_k = 0$  dır.

**Sonuç 1.4.6:**  $z_i = w_i / \|w_i\|$   $i = 1, 2, \dots, n$  ön şekiller olmak üzere tam Procrustes ortalama şekli  $[\hat{\mu}]$ ,

$$S = \sum_{i=1}^n w_i w_i^* / (w_i^* w_i) = \sum_{i=1}^n z_i z_i^*$$

kompleks kareler çarpımının toplam matrisinin en büyük öz değerine karşılık gelen öz vektörü olarak bulunabilir.

$w_1, \dots, w_n$  nin tam Procrustes uyarlamaları veya tam Procrustes koordinatları

$$w_i^p = w_i^* \hat{\mu} w_i / (w_i^* w_i); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dir. Burada her bir  $w_i^p$ ,  $w_i$  nin  $\hat{\mu}$  üzerine tam Procrustes uyarlamasıdır. Tam Procrustes ortalama şekli, tam Procrustes koordinatlarının aritmetik ortalaması alınarak da bulunabilir.

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^p$  tam Procrustes ortalama şekli  $[\hat{\mu}]$  ile aynı şekle sahiptir.

Procrustes artıkları,

$$r_i = w_i^p - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^p \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ile hesaplanır ve Procrustes artıkları şekil değişkenliğinin bulunmasında çok kullanılır.

**Tanım 1.4.7:** Şekil değişkenliğinin genel bir ölçüsü; her bir konfigürasyondan  $[\hat{\mu}]$  tam Procrustes ortalamasına tam Procrustes uzaklıkları dikkate alınarak elde edilir. Bu ölçüye kareli ortalamanın kökü denir ve  $RMS(d_F)$  ile gösterilir.

$$RMS(d_F) = \sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n d_F^2(w_i, \hat{\mu})} \text{ dir.}$$

#### 1.4.8. Şekil değişkenliği

Ortalama şekil konfigürasyonunu elde ettikten sonra örnekteki şekil değişkenliği hesaplanmaya çalışılır. Şekil değişkenliğinin bulunmasında en uygun yöntem lineer uzayda ortalama şekil ile (bir tanjant uzayı) olur. Örneğin, Procrustes artıklarının (yaklaşık tanjant koordinatları) ana bileşenler analizi uygulaması düşünülebilir. Tanjant koordinatlarının reel vektörleri  $v_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  ile gösterilecektir. Bunlar  $r_i$  Procrustes artıkları veya tanjant koordinatlarıdır.

$S_v$  bir takım tanjant koordinatlarının ( $v_i$ ) örnek kovaryans matrisi ve

$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum v_i$  olmak üzere,

$$S_v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(v_i - \bar{v})^T$$

dir.  $M = 2k - 4$  şekil uzayının boyutu,  $p = \min(n - 1, M)$  olmak üzere,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$  öz değerlerine karşılık gelen  $S_v$  nin ortonormal öz vektörleri  $\gamma_j$  ler  $S_v$  nin ana bileşenleridir.  $i$ . veri için  $j$ . ana bileşenin ölçüm değeri (skoru)

$$s_{ij} = \gamma_j^T (v_i - \bar{v}) \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$$

ve tanjant uzayında verilerin ana bileşen özeti,

$$v_i = \bar{v} + \sum_{j=1}^p s_{ij} \gamma_j \quad i = 1, \dots, n$$

ile verilir. Standartlaştırılmış ana bileşen ölçümleri ise,

$$c_{ij} = s_{ij} / \lambda_j^{1/2} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$$

dir.  $j$ . ana bileşende açıklanan  $j = 1, \dots, p$  değişkenliğin yüzdesi,

$$\frac{100\lambda_j}{\sum_{j=1}^p \lambda_j} \quad \text{İle hesaplanır.}$$

### 1.5. Şekil Uzayı

**Tanım 1.5.1:** Bir  $m \times m$  rotasyon matrisi,  $\Gamma^T \Gamma = \Gamma \Gamma^T = I_m$  ve  $|\Gamma| = +1$  özelliklerini sağlar.

Tüm  $m \times m$  rotasyon matrisleri özel ortogonal grup olarak bilinirler ve  $SO(M)$  ile gösterilirler.

**Tanım 1.5.2:**  $X$  konfigürasyon matrisinin Öklidyen benzerlik dönüşümleri; ötelenmiş, döndürülmüş ve izotropik olarak ölçeklenmiş  $X$  kümesidir.

$\beta \in \mathbb{R}^+$  ölçeği,  $\Gamma$  döndürme matrisi ve  $\gamma$   $m$  vektörlü öteleme ile

$$\{\beta X \Gamma + 1_k \gamma^T : \beta \in \mathbb{R}^+, \Gamma \in SO(m), \gamma \in \mathbb{R}^m\} \text{ dir.}$$

**Tanım 1.5.3:**  $X$  konfigürasyon matrisinin katı cisim dönüşümleri, ötelenmiş ve döndürülmüş  $X$  lerin kümesidir ve bu küme aşağıdaki gibidir:

$$\{X \Gamma + 1_k \gamma^T : \Gamma \in SO(m), \gamma \in \mathbb{R}^m\}.$$

Burada,  $\Gamma$  döndürme matrisini ve  $\gamma$   $m$  vektörü ötelemeyi gösterir.



#### 1.5.4. Ötelemenin kaldırılması

$X$  veri matrisinin Helmert alt matrisi ile soldan  $X_H = HX \in \mathbb{R}^{(k-1)m} \setminus \{0\}$  şeklinde çarpılmasıyla öteleme etkisi kaldırılır. Orijin uyuşan(çakışan) nirengi noktalarına müsaade edilmediğinden çıkarılmıştır. Helmertleştirilmiş nirengi noktaları  $X_H$  ile gösterilecektir.

Konum etkisinin kaldırılmasında bir diğer yöntem merkezleştirilmiş nirengi noktalarıdır ve  $X_c = CX$  ile gösterilir. Helmertleştirilmiş nirengi noktalarından merkezleştirilmiş nirengi noktalarına dönmek için  $X_H$ 'ı soldan  $H^T$  ile çarpabiliriz. Çünkü

$$H^T H = I_k - \frac{1}{k} 1_k 1_k^T = C$$

olduğundan  $H^T X_H = H^T HX = CX$  elde edilir.

#### 1.5.5. Ön şekil

Şekiller arasındaki uzaklık hesaplanırken şekilleri büyüklüklerine göre standartlaştırmak yararlıdır. Bunun için kitle merkezi büyüklüğü ele alırsa,

$$\|X_H\| = \sqrt{\text{iz}(X^T H^T HX)} = \sqrt{\text{iz}(X^T CX)} = \|CX\| = S(X)$$

dir ( $H^T H = C$ ).  $X$  konfigürasyon matrisinin önşekli;

$$Z = \frac{X_H}{\|X_H\|} = \frac{HX}{\|HX\|}$$

dir. Ön şeklin farklı bir sunumu, konfigürasyonun merkezleştirilmesi ve büyüklüğüne bölünmesidir. Merkezleştirilmiş ön şekil;  $C = H^T H$  olmak üzere,

$$Z_c = CX / \|CX\| = H^T Z \text{ dir.}$$

$Z_c$   $k \times m$  matrisi iken  $Z$   $(k-1) \times m$  matrisidir. Ön şekil uzayı, mevcut olan bütün ön şekillerin uzayıdır.

**Tanım (Şekil) 1.5.6:**  $X$  konfigürasyon matrisinin şekli; konum, döndürme ve eş yönlü ölçekleme altında değişmeyen geometrik bilgidir. Şekil;  $SO(m)$  döndürmelerinin özel ortogonal grubu ve  $Z$ ,  $X$  in ön şekli olmak üzere

$$[X] = \{Z\Gamma : \Gamma \in SO(m)\}$$

şeklinde ifade edilir. Şekil uzayının boyutu  $M = km - m - 1 - \frac{m(m-1)}{2}$  dir. İlk önce  $km$  koordinata sahiptir ancak, konum için  $m$ , düzgün ölçekleme için 1 ve döndürme için  $\frac{1}{2}m(m-1)$  boyut kaybeder.

**Tanım 1.5.7:**  $X$  konfigürasyon matrisinin büyüklük ve şekli, konum ve döndürme altında değişmeyen geometrik bilgidir ve  $[X]_S$  ile gösterilerek

$$[X]_S = \{X_H \Gamma : \Gamma \in SO(m)\}$$

ile ifade edilir. Burada  $X_H$ , helmertleştirilmiş koordinatlarıdır. Mevcut olan bütün şekil ve büyüklüklere şekil ve büyüklük uzayı denir ve  $m$  boyut  $k$  noktada bu uzay  $S \sum_m^k$  ile gösterilir. Eğer şekil ve büyüklükten büyüklük kaldırılırsa(kitle merkezi birim büyüklüğe ölçeklenirse)  $X$  in şeklini,

$$[X] = [X_S] / S(X) = \{Z\Gamma : \Gamma \in SO(m)\}$$

ile elde ederiz.

**Tanım 1.5.8:**  $X$  konfigürasyon matrisinin yansımış şekli, benzerlik dönüşümleri ve yansıma altında değişmeyen geometrik bilgidir. Yansımış şekil;

$$[X]_R = \{ZR : R \in O(m)\}$$

kümesi ile gösterilir. Burada  $O(m)$ ;  $R^T R = I_m = RR^T$  ve  $|R| = \pm 1$  ortogonal matrislerinin kümesi ve  $Z$  ön şekildir.

**Tanım 1.5.9:**  $X$  konfigürasyon matrisinin yansımış şekil ve büyüklüğü; öteleme, dönme ve yansıma altında değişmeyen geometrik bilgidir. Yansımış şekil ve büyüklük;  $O(m)$   $m \times m$  ortogonal matrislerin kümesi ve  $X_H$  helmertleştirilmiş koordinatlar kümesi olmak üzere,

$$[X]_{RS} = \{X_H R : R \in O(m)\}$$

ile gösterilir.

## 1.6. Uzaklıklar

**Tanım 1.6.1:**  $X_1$  ve  $X_2$  arasındaki tam Procrustes uzaklığı;  $Z_r = HX_r / \|HX_r\|$   $r = 1, 2$  olmak üzere

$$d_F(X_1, X_2) = \inf_{\Gamma \in SO(m), \beta \in \mathbb{R}} \|Z_2 - \beta Z_1 \Gamma\| \text{ dir.}$$

**Sonuç 1.6.2:** Tam Procrustes uzaklığı;  $Z_1^T Z_2 Z_2^T Z_1$  çarpımının öz değerlerinin karekökleri  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq |\lambda_m|$  olmak üzere

$$d_F(X_1, X_2) = \{1 - (\sum_{i=1}^m \lambda_i)^2\}^{\frac{1}{2}} \text{ dir.}$$

Burada, en küçük değer olan  $\lambda_m$  negatif kareköktür  $\Leftrightarrow \det(Z_1^T Z_2) < 0$  dir. Minimum döndürme  $U, V \in SO(m)$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  ve  $Z_2^T Z_1 = V \Lambda U^T$  iken

$$\hat{\Gamma} = UV^T$$

dir. Minimum ölçekleme ise

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{ dir.}$$

**İspat:** Minimum değeri elde etmek için Kendall'ın (1984) çalışmasından faydalanılmıştır.

$$\begin{aligned} d_F^2(X_1, X_2) &= \inf_{\Gamma \in SO(m), \beta} \text{iz}\{(Z_2 - \beta Z_1 \Gamma)^T (Z_2 - \beta Z_1 \Gamma)\} \\ &= \inf_{\beta} (\|Z_2\|^2 + \beta^2 \|Z_1\|^2 - 2\beta \sup_{\Gamma \in SO(m)} \text{iz}(Z_2^T Z_1 \Gamma)) \end{aligned}$$

ve  $\|Z_1\| = 1 = \|Z_2\|$ .  $\Gamma \in SO(m)$  üzerinden  $\text{iz}(Z_2^T Z_1 \Gamma)$  nın supremum değeri bulunmalıdır.  $Z_2^T Z_1$  in tekil değer ayrışımı  $U, V \in SO(m)$   $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$   $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq |\lambda_m|$  olmak üzere,  $Z_2^T Z_1 = V \Lambda U^T$  ile verilsin.

$\lambda_m < 0 \Leftrightarrow \det(Z_2^T Z_1) < 0$  dir.  $d_F^2(X_1, X_2)$  Denkleminin sağ tarafındaki son terim

$$-2\beta \sup_{R \in SO(m)} \text{iz}(R\Lambda) = -2\beta \sup_{R \in SO(m)} \sum_{i=1}^m r_{ii} \lambda_i \text{ değerine eşittir. Burada, } (r_{11}, \dots, r_{mm}) R \in SO(m) \text{ nin}$$

köşegenidir.  $SO(m)$  deki  $R$  nin köşegenlerinin kümesi  $\{\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1\}$  ekstrem noktaları ile kompakt konveks bir kümedir.

$r_{ii} = 1 \quad i = 1, \dots, m$  iken supremum değeri elde edilir. Dolayısıyla,

$$d_F^2(X_1, X_2) = \inf_{\beta} (1 + \beta^2 - 2\beta \sum_{i=1}^m \lambda_i) \text{ ve } \hat{\beta} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{ dir.}$$

$iz(Z_2^T Z_1 \hat{\Gamma}) = iz(V \Lambda U^T U V^T) = iz(\Lambda)$  olduğunda minimum döndürme  $\hat{\Gamma} = UV^T$  olarak bulunur.

**Tanım 1.6.3:**  $X_1$  ve  $X_2$  nin ön şekilleri olan  $Z_1$  ve  $Z_2$  yi ölçekleme olmaksızın mümkün olan en yakın döndürmelerle eşleyerek  $d_p$  kısmi Procrustes uzaklığı elde edilir.

$Z_j = HX_j / \|HX_j\| \quad j = 1, 2$  olmak üzere,

$$d_p(X_1, X_2) = \inf_{\Gamma \in SO(m)} \|Z_2 - Z_1 \Gamma\| \text{ dir.}$$

**Sonuç 1.6.4:** Kısmi Procrustes uzaklığı;

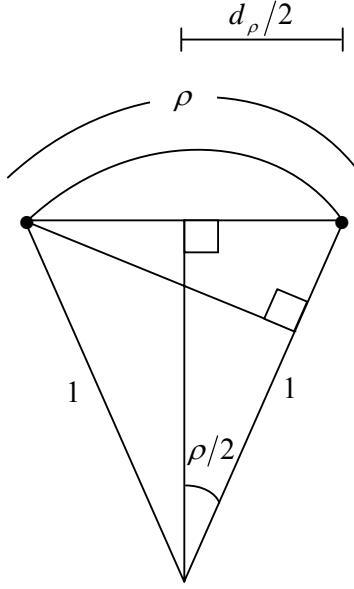
$$d_p(X_1, X_2) = \sqrt{2} \left(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

ile verilir.

**Tanım 1.6.5:** Ön şekil uzayındaki  $Z_1$  ve  $Z_2$  arasında en yakın uzaklıkta çizilebilen en büyük çember uzaklığına Procrustes uzaklığı denir ve  $\rho(X_1, X_2)$  ile gösterilir. Minimizasyon döndürmelerden elde edilir.

$$\begin{aligned} \rho(X_1, X_2) &= 2 \arcsin(d_p(X_1, X_2)/2) \\ &= \arccos\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \end{aligned}$$

ile hesaplanır.



**Şekil 1.3.** Ön şekil küresinde Procrustes, kısmi Procrustes ve tam Procrustes uzaklığı.

**Tanım 1.6.6:** Şekil ve büyüklük uzayında iki konfigürasyon  $X_1^0$  ve  $X_2^0$  olsun.

$X_1 = HX_1^0$ ,  $X_2 = HX_2^0$  ve  $S_1 = \|X_1\|$ ,  $S_2 = \|X_2\|$  olmak üzere,

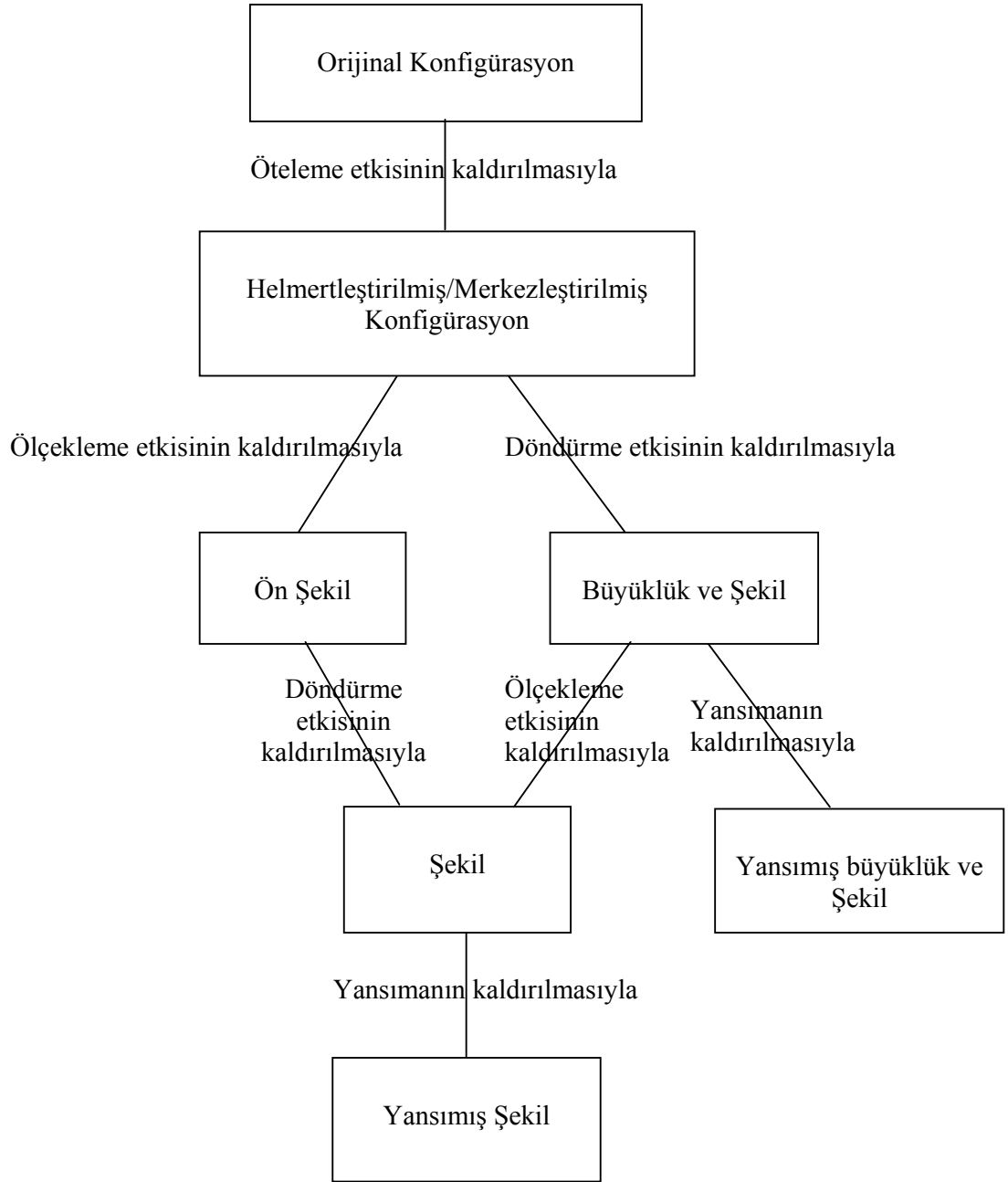
$$d_S^2(X_1^0, X_2^0) = \inf_{\Gamma \in SO(m)} \|X_1 - X_2 \Gamma\|^2$$

$$= S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 \cos \rho(X_1^0, X_2^0) \text{ ifadesine riemann uzaklığı denir.}$$

**Çizelge 1.6.1** (Şekil Uzayında Procrustes Uzaklıkları)

Uzaklık	Notasyon	Formül	Aralık
Tam Procrustes Uzaklığı	$d_F$	$d_F(X_1, X_2) = \{1 - (\sum_{i=1}^m \lambda_i)^2\}^{\frac{1}{2}}$	$0 \leq d_F \leq 1$
Kısmi Procrustes Uzaklığı	$d_p$	$d_p(X_1, X_2) = \sqrt{2} (1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i)^{\frac{1}{2}}$	$0 \leq d_p \leq \sqrt{2}$
Procrustes Uzaklığı	$\rho$	$\text{arc cos}(\sum_{i=1}^m \lambda_i)$	$0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}$

Çizelge 1.6.2. Orijinal konfigürasyondan şeklin elde edilmesi



## 2. ANA BİLEŞENLER ANALİZİ

Çok değişkenli analiz konusu iki veya daha çok boyutlu rasgele değişkenleri bir bütün olarak ele alan ve değişkenler arasındaki ilişkileri göz önünde tutarak sonuç üreten istatistiksel tekniklerden meydana gelmektedir. Bu tekniklerden biri de ana bileşenler analizidir (Akça 2002). Bu yöntem ilk defa Harold Hotelling (1933) tarafından geliştirilmiş ve “ana bileşenler yöntemi” adı verilmiştir.

Ana bileşenler analizi şekil değişkenlikleri yorumlanırken kullanılmaktadır. Öncelikle veriler standartlaştırılmalı ve Procrustes tanjant koordinatları hesaplanmalıdır. Tanjant koordinatlarının kovaryans matrisi ile ana bileşenler hesaplanır ve değişkenliği açıklama yüzdeleri her bir ana bileşenin öz değerinin tüm öz değerler toplamına oranı ile bulunabilir.

**Notasyon:** Her bir veri kümesinde  $n$  adet şekil ve her birinde de  $k$  adet nirengi noktası bulunmaktadır. Kompleks veri girişinde konfigürasyon uzayı  $W$   $k \times n$  matrisidir ve  $w_{ij}$   $i = 1, \dots, k$   $j = 1, \dots, n$  değerleri  $j$ . resimdeki  $i$ . nirengi noktalarını ifade etmektedir. Bu bölümde, verilerin standartlaştırılması ve Procrustes tanjant düzlem koordinatlarının hesaplanması ele alınacaktır. Özet olarak, veriler standartlaştırılır ve Procrustes ortalama şekil bulunur. Daha sonra standartlaştırılmış veriler Procrustes ortalama tam ve kısmi Procrustes iz düşümü ile Procrustes düzlem üzerine iz düşürülür.

Bu bölümde anlatılacak olan işlemler çok farklı yollarla elde edilebilir. Üç farklı yolla veriler standartlaştırılır ya da tanjant düzlem üzerine tam veya kısmi Procrustes iz düşümü uygulanabilir.

## 2.1. Verilerin Standartlaştırılması

Procrustes tanjant koordinatlarını elde etmek için verilerin standartlaştırılmaları veya merkezleştirilmeleri dolayısıyla öteleme ve ölçekleme etkilerini kaldırmak gerekir. Bu merkezleştirilmiş verilere standartlaştırılmış veriler denir.  $Z$ ,  $z_j$   $j = 1, \dots, n$  standartlaştırılmış verilerinden oluşan  $k \times n$  matristir. Standartlaştırılmış veriler;

$$\bar{w}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w_{ij}$$

olmak üzere

$$z_j = \frac{w_j - \bar{w}_j}{\|w_j - \bar{w}_j\|} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

dir. Dolayısıyla  $\bar{z}_j = 0$  ve  $\sum_{i=1}^k |z_{ij}|^2 = 1$   $j = 1, \dots, n$ . Bu dönüşüm öteleme ve ölçekleme etkilerini kaldırırken döndürme altında invaryant değildir. (2.1) denklemi  $C$  ( $k \times k$ ) merkezleştirme matrisi iken  $Z = CW / \|CW\|$  ile aynı ifadeyi verir.

$C = I_k - \frac{1}{k} \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^T$  dir ve  $CW$  sıfır ağırlık merkezine sahip olduğundan konum etkisini kaldırır.

Farklı bir standartlaştırma yöntemi ise veri kümesini Helmert alt matrisiyle çarpmaktır. Alt Helmert matrisinin satırları  $(\frac{1}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}})$  ile ortogonaldir ve  $j$ . satırı;

$j$  defa  $d_j = \{j(j+1)\}^{-\frac{1}{2}}$   $j = 1, \dots, k-1$  tekrarı ile  $(d_j, \dots, d_j, -jd_j, 0, \dots, 0)$  şeklindedir.

Standartlaştırılmış veriler  $HW / \|HW\|$  ile bulunabilir. Helmert matrisi ile standartlaştırılan verilere ön şekil adı verilir. Bu standartlaştırma metodu boyutu  $k$  dan  $(k-1)$  e düşürür dolayısıyla hesaplamada daha etkilidir. Bu iki standartlaştırma yöntemi  $\|CW\| = \|HW\|$  olduğundan benzerdir.



Verileri standartlaştırmanın üçüncü bir yolu ise verileri Bookstein koordinatlarına dönüştürmektir.

$$b_j = \frac{w_j - w_{j1}}{w_{j2} - w_{j1}} \quad j = 1, \dots, n \quad \text{olarak,} \quad b_{jl} = \frac{w_{jl} - w_{j1}}{w_{j2} - w_{j1}} \quad j = 1, \dots, n \quad l = 1, \dots, k \quad \text{ile bu olay}$$

gerçekleşir. Birinci nirengi noktası 0' a ikinci nirengi noktası 1'e götürülür ve bu iki nirengi noktası yeni konfigürasyonun bazını oluşturur. Dolayısıyla, bu yöntem temel doğrunun seçimine bağlıdır.

## 2.2. Procrustes Tanjant Düzlemi Koordinatları

$S_z$  matrisi,  $Z$  nin kompleks kareler çarpımının toplam matrisidir ve  $k-1$  ranklı  $k \times k$  matristir.  $z_j^*$ ,  $z_j$  nin eşleniğinin transpozu iken  $S_z = \sum_{j=1}^n z_j z_j^*$  dir.  $S_z$  matrisi kompleks düzlemde döndürme işlemi altında invaryanttır. Veriler standartlaştırıldıktan sonra Procrustes ortalama şekil hesaplanabilir. Eşlenen konfigürasyonların Procrustes ortalama şekli  $Z$  nin satırlarının ortalamasıdır. Ayrıca  $n$  adet şeklin Procrustes ortalama şekli,  $S_z$  nin en büyük öz değerine karşılık gelen öz vektörü olan  $\rho$  ile de gösterilebilir. Procrustes ortalama şekli birim büyüklüğe sahiptir dolayısıyla  $\sum_{i=1}^k |\rho_i|^2 = 1$  ve  $\sum_{i=1}^k \rho_i = 0$  dir. Tanjant düzleme iz düşürülürken döndürme etkilerinin kaldırılması için  $\theta_j = \arg(\rho^* z_j)$  iken her bir  $z_j \quad j = 1, \dots, n$   $e^{-i\theta_j}$  ile çarpılır.  $e^{-i\theta_j} z_j$  ile  $z_j$  kompleks düzlemde aynı şekle sahiptir.  $e^{-i\theta_j} z_j \quad j = 1, \dots, n$  nin sadece döndürülmüş halidir.

Veriler ortalama şekil etrafında toplandığında veri kümesinde değişkenlik küçük olur ve bir dönüşüm ile Procrustes tanjant uzaya iz düşürülür. Bu uzayda ana bileşenler hesaplanır. Procrustes düzlemi koordinatlarının ana bileşenleri, uygun bir temel metrik ile dönüştürülmüş verilerin kovaryans matrislerinin ana bileşenler analizi düşünülerek bulunur.

Procrustes tanjant düzlemi koordinatlarının hesaplanması ile şekiller döndürülür ve Procrustes ortalama şekle göre hizalanır( dizilir). Daha sonra şekilleri  $\rho$  da tanjant uzayına iz düşürür. Eğer standartlaştırılmış veriler  $z_j$   $j=1,\dots,n$  ile tanımlanırsa  $\rho^* z_j = 0$  dışında tanjant uzaya iz düşüm iyi tanımlıdır. Verilerin  $\rho$  da Procrustes tanjant düzleme iz düşürülmesi verilerin  $\rho$  ya göre en uygun hizalanmasını verir.  $\rho$  da tanjant düzleme iz düşüm tam veya kısmi(ölçekleme faktörü olmadan) olabilir.

Tam Procrustes iz düşümü özellikle veriler ortalama şekil etrafında kümelendiğinde daha kesin analizlerle sonuçlanır. Tanjant uzayı öklidyen ve eğrisel uzay olmamasına rağmen figürlerin ortalama şekil etrafında kümelendiği varsayılması ve ölçekleme faktörünün 1'e yakın alınması sonuçları az miktarda farklılaştırır.

Tam Procrustes iz düşümü için  $\rho$  (tam Procrustes ortalama şekli)

$$\sum_{j=1}^n \left\| \rho - r_j e^{i\theta_j} z_j \right\|^2 \quad (2.2)$$

değerini minimum yapacak şekilde seçilir ve kısmi Procrustes iz düşümü için  $r_j = 1$  seçilerek  $\rho$

$$\sum_{j=1}^n \left\| \rho - e^{i\theta_j} z_j \right\|^2 \quad (2.3)$$

değerini minimum yapacak şekilde seçilir. Her iki durumda da  $\rho$  birim büyüklüğe sahiptir  $\|\rho\| = 1$  dir. (2.2) denklemini ele alındığında,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left\| \rho - r_j e^{i\theta_j} z_j \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n (\rho - r_j e^{i\theta_j} z_j)^* (\rho - r_j e^{i\theta_j} z_j) \\ &= \sum_{j=1}^n (\rho^* \rho - \rho r_j e^{-i\theta_j} z_j^* - \rho^* r_j e^{i\theta_j} z_j + r_j^2 e^{-i\theta_j} z_j^* e^{i\theta_j} z_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n (\rho^* \rho - 2r_j \operatorname{Re}(e^{i\theta_j} \rho^* z_j) + r_j^2) \\
&= \sum_{j=1}^n (1 - 2r_j \operatorname{Re}(e^{i\theta_j} \rho^* z_j) + r_j^2) \tag{2.4}
\end{aligned}$$

$z_j z_j^* = \rho^* \rho = 1$  dir.  $r_j$  ve  $\theta_j$  üzerinden (2.4) denklemi minimum yapılırsa  $r_j = |\rho^* z_j|$  ve  $\theta_j = -\arg(\rho^* z_j)$   $\theta_j \in [0, 2\pi)$  bulunur. (2.2) denklemi

$\sum_{j=1}^n (1 - |\rho^* z_j^2|) = n - \rho^* \sum_{j=1}^n z_j z_j^* \rho$  şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak  $\rho$ ,  $\sum_{j=1}^n z_j z_j^*$  değerinin ana öz vektörüdür.

Kısmi Procrustes iz düşümü ile tanjant düzlemi koordinatları; iz düşüm matrisi  $(I_k - \rho \rho^*)$  olmak üzere,

$$v_j = e^{-i\theta_j} (I_k - \rho \rho^*) z_j \quad j = 1, \dots, n$$

şeklinde dir. Tam Procrustes iz düşümü kısmi Procrustes iz düşümünden  $\Phi_j = |z_j^* \rho| = \sqrt{z_j^* \rho z_j \rho^*}$  büyüklüğü ile farklılaşır. Tam Procrustes iz düşümü ile tanjant düzlemi koordinatları;

$$v_j = \Phi_j e^{-i\theta_j} (I_k - \rho \rho^*) z_j$$

şeklinde dir. Dolayısıyla,  $S_v$  tanjant koordinatlarının  $(v_j)$  örnek kovaryans matrisi;

$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum v_j$  olmak üzere,

$$S_v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(v_i - \bar{v})^T$$

dir.  $M = 2k - 4$  şekil uzayının boyutu,  $p = \min(n - 1, M)$  olmak üzere,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$  öz değerlerine karşılık gelen  $S_v$  nin ortonormal öz vektörleri  $\gamma_j$  ler  $S_v$  nin ana bileşenleridir.  $i$ . veri için  $j$ . anabileşenin ölçüm değeri (skoru)

$$s_{ij} = \gamma_j^T (v_i - \bar{v}) \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$$

ve tanjant uzayında verilerin ana bileşen özeti,

$$v_i = \bar{v} + \sum_{j=1}^p s_{ij} \gamma_j \quad i = 1, \dots, n$$

ile verilir.

Standartlaştırılmış anabileşen ölçümleri ise,

$$c_{ij} = s_{ij} / \lambda_i^{1/2} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$$

dir.  $j$ . anabileşende açıklanan  $j = 1, \dots, p$  değişkenliğin yüzdesi,

$$\frac{100\lambda_j}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}$$

ile hesaplanır.

### 3. ŞEKİL DEĞİŞKENLİĞİNİN İNCE LEVHA MODELLENMESİ

Global farklılıklar afin dönüşümler gibi geniş ölçekli eğilimler iken yerel farklılıklar küçük ölçekli eğilimlerdir. Örneğin birbirine yakın olan nirengi noktalarında öne çıkan değişiklikler küçük ölçekli değişikliklerdir. Global farklılıklar şekiller arasındaki düzgün değişiklikler iken yerel farklılıklar deformasyonun geriye kalan bileşenleridir ve daha az düzgünlerdir. Bookstein (Bookstein1989;1991) ince levha dönüşümlerini; global afin dönüşüme ve küçük ölçeklerde değişikliği vurgulayan yerel deformasyonlar kümesine ayırtmıştır.

#### 3.1. Deformasyonlar ve Şekil Değişkenliğinin Tanımlanması

**Tanım 3.1.1:**  $\mathbb{R}^m$  de iki adet  $k \times m$  konfigürasyon matrisi  $T = [t_1 \dots t_k]^T$  ve  $Y = [y_1 \dots y_k]^T$  ile verilsin.  $t_j, y_j \in \mathbb{R}^m$  olmak üzere  $T, Y$  ye deforme edilmek istensin.  $t_j$   $m$ -vektörü  $t_j = [t_j(1) \dots t_j(m)]^T$  ile gösterilmektedir.

$t \in \mathbb{R}^m$  den  $y \in \mathbb{R}^m$  ye deformasyon,  $y = \Phi(t) = [\Phi_1(t) \Phi_2(t) \dots \Phi_m(t)]^T$  dönüşümü ile tanımlanır. Burada  $T$  kaynak ve  $Y$  de hedef şekillerdir.  $\Phi(t)$  Deformasyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

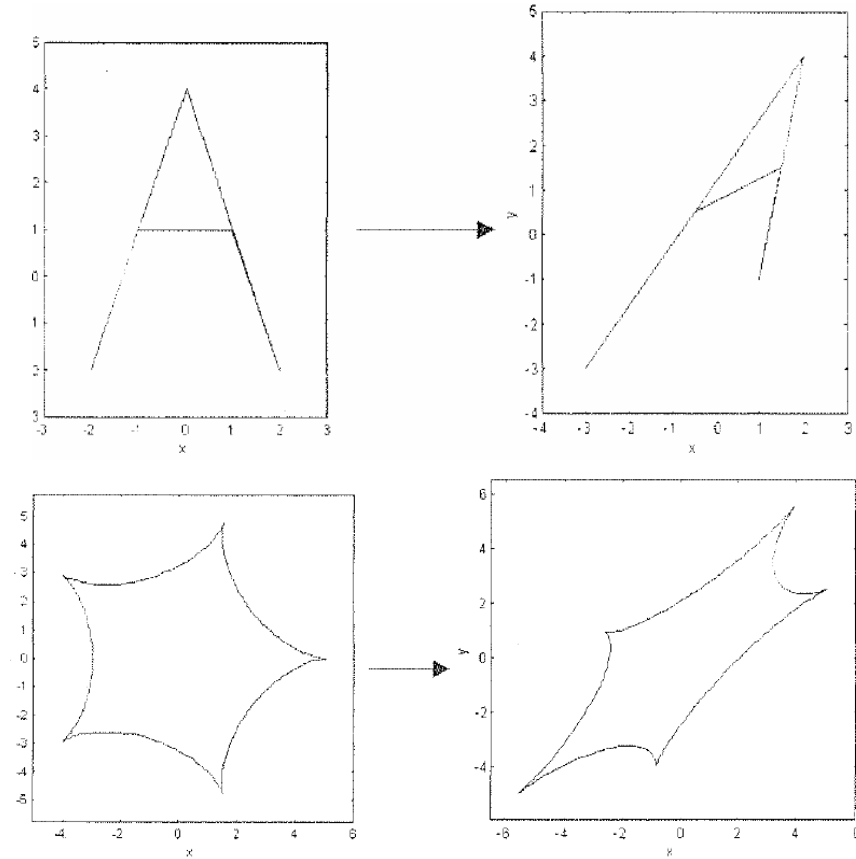
- 1- Süreklidir.
- 2- Düzgündür.
- 3- Birebir ve örtendir.
- 4- Öteleme, ölçekleme ve döndürme dönüşümleri altında değişmeyendir.

#### 3.1.2. D’Arcy Thompson’ın Dönüşüm Izgaraları

D’Arcy Thompson 1917 de şekil ve büyüklük farklarını açıklamak için bir türden diğer türe deformasyonları ele aldı. Bir nesne üzerinde düzgün kare ızgara örneği çizildi ve biyolojik kısımlar uygun ızgara bloklarında iken ikinci nesneyi elde edecek şekilde deforme edildi. Bu ızgaralar kartezyen dönüşüm ızgaraları olarak bilinir. D’Arcy Thompson’ın figürleri elle çizildiğinden kusursuz değildir. 1917 den beri figürleri daha objektif bir şekilde tekrar oluşturmak üzere birçok çalışma yapılmıştır.

**Tanım 3.1.3:**  $A$  singüler olmayan  $m \times m$  matris,  $c$   $m \times 1$  ve  $\alpha$  keyfi bir reel sayı olmak üzere  $t \in \mathbb{R}^m$  den  $y \in \mathbb{R}^m$  ye afin dönüşüm  $y = \alpha(At + c)$  ile verilir. Lineer dönüşüm, afin dönüşümün  $c=0$  halidir.  $T$  şeklinin bütün noktalarına afin dönüşüm uygulandığında  $Y$  şekli elde edilir.

Örneğin  $\alpha = 1$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$  ve  $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  afin dönüşümü ile farklı iki şeklin dönüşümü:



Şekil 3.1. Afin dönüşüm

### 3.2. İnce Levha Dönüşümü

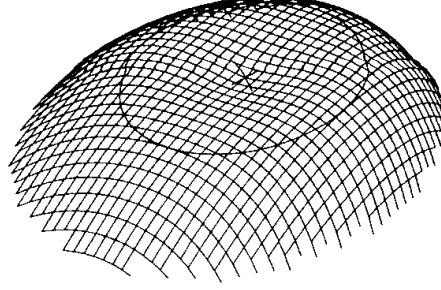
Uygulamalarda genel olarak  $m$  boyutta  $m+1$  den fazla nirengi noktası olduğunda afin dönüşüm tam olarak uyarlanamaz ve afin olmayan şekil deformasyonlarına ihtiyaç duyulur. İnce levha dönüşümü ince sert metal tabakalara minimum enerji kullanılarak istenilen şekli verme mekanik problemini çözmek için kullanıldıklarından bu şekilde adlandırılmıştır.

### 3.2.1. $U(r)$ fonksiyonu

Spline analizinin temeli özel bir fonksiyona dayanır.  $r$  kartezyen orijinden uzaklığı  $\sqrt{x^2 + y^2}$  ile belirtirken bu yüzey

$$z(x, y) = -U(r) = -r^2 \log r^2$$

dir.



**Şekil 3.2.** Bi harmonik denklemin temel çözümü olan  $z(x, y) = -r^2 \log r^2$  yüzeyinin üstten bakışı.  $X$  ile gösterilen nokta  $(0,0,0)$  noktasıdır ve denklemin diğer sıfırları 1 yarıçaplı çemberin üzerindedir.

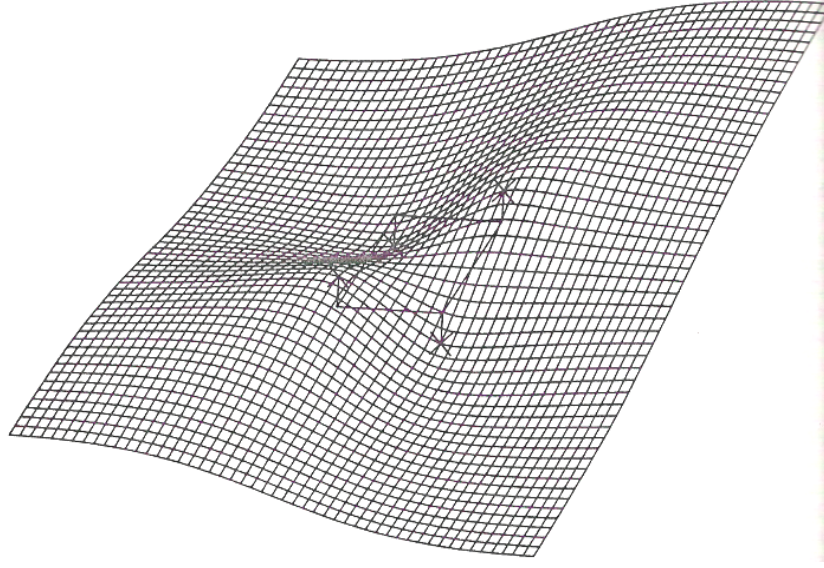
- işareti sadece görsel olarak kolaylık sağladığı için konulmuştur. Yüzey şekil 3.2 de  $X$  işareti ile gösterildiği üzere  $(0,0,0)$  noktasını içermektedir. Ayrıca fonksiyon  $r=1$  çemberi üzerinde sıfır değerini alır. Şekil 3.2 deki yüzey, yarıçapı 1 olan çember ile eşmerkezli  $1/\sqrt{e}$  yarıçaplı bir çember boyunca yatay teğet düzlem ile değme noktasına sahiptir.  $U(r)$  Fonksiyonu

$$\Delta^2 U = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 U \propto \delta_{(0,0)}$$

denklemini sağlar. Bu ifadenin sağ tarafı orijin hariç her yerde sıfır olan ve integral değeri 1 olan  $\delta_{(0,0)}$  genelleştirilmiş fonksiyonu ile orantılıdır.  $(x, y)$  Düzlemi üzerinde ince çelik tabak şeklinin yüklenmiş olduğu  $z(x, y)$  denkleminin  $U$ ,  $\Delta^2 U = 0$  biharmonik denklemin temel çözümü olarak adlandırılır.

### 3.2.2. $U(r)$ Terimlerinin sınırlı lineer birleşimleri

Şekil 3.3, bütün yönlerde sonsuza genişlediğini düşündüğümüz çelik veya diğer katı metallerin ince bir tabağının matematik modelidir. Tabağı incelediğimizde şeklin merkezinde eşkenar dörtgen gibi çizilmiş  $\sqrt{2}$  kenar uzunluklu kare formda katı bir armatür olduğunu görürüz.



Şekil 3.3.  $(0, \pm 1)$  ve  $(\pm 1, 0)$  noktalarına kısıtlanmış sonsuz bir metal tabağın parçası

Çelik tabak, karenin iki köşegeni arasındaki bir uzaklığa ve aynı uzaklık diğer köşegenler arasında da olacak şekilde sabitlemiştir. Figürde bu sabitleme  $X$  ler ile gösterilmektedir.

Şekil 3.3 deki yüzey karenin dört köşesinin her birinde tanımlı  $U(r)$  fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak,

$$\begin{aligned} z(x, y) &= U([x^2 + (y-1)^2]^{1/2}) - ([x^2 + (y+1)^2]^{1/2}) \\ &\quad + ([x^2 + (y+1)^2]^{1/2}) - ([x^2 + (y-1)^2]^{1/2}) \\ &= \sum (-1)^{k+1} U(|(x, y) - i^k|) \quad (i = \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.  $U(r)$  Fonksiyonları, bir köşegenin uçlarında +1, diğer köşegenin uçlarında -1 katsayılarını almışlardır.

Öncelikle düz olan sonsuz tabağın sırasıyla üst ve alt köşelerine sabitlemesi ile  $\Delta^2 z = 0$  biharmonik denkleminin çözümü olan  $z(x, y)$  uyumludur. Çelik bu formu yer değiştirmeler küçük olduğunda alır çünkü en düşük fiziksel bükme enerjisinin konfigürasyonu olan  $z(x, y)$  fonksiyonu verilen kısıtlar ile uyumludur.



Az bükülen ince çelik için nokta üzerindeki bükme enerjisi,

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2$$

değeri ile orantılıdır ve net enerji bütün tabak üzerinde bu değer (kuadratik değişim) integrali ile orantılıdır. Yani,  $i^k$  da  $(-1)^{k+1}$  değerini alan bütün

$$z(x, y) = \sum (-1)^{k+1} U(|(x, y) - i^k|)$$

fonksiyonlarının sınıfı

$$\iint \left[ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 \right]$$

ifadesini minimum yapar.

Orijinden uzaklaştığında tabak daha ilginç bir konfigürasyon halini alır ve bütün yönlerde asimptotik olarak düzdür. Aynı düzlemde olmamasına rağmen bu seviyeler sonsuzda farklı yönlerde farklıdır. Şekil 3.3 de spline edilmiş köşelerin görülebilir sınırları yer almaktadır.

Büyük  $r^2 = x^2 + y^2$  için  $1/r$  sifira yaklaşırken  $z(x, y)$ ,  $\frac{4(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2 + 1}$  değerine indirgenir.

Bu ifade, paydadaki +1 terimi ihmal edildiğinde  $2 \arctan(y/x)$  açısının 2 katının kosinüsünün -4 katıdır. Böylece metal yaprak, armatürün üstünde bulunan noktadaki dört birimin bir köşegen boyunca ve armatürün altında bulunan noktadaki dört birimin diğer köşegen boyunca uzaklaşmasıyla (0,0) dan uzaklaşarak form halini alır.

Armatürün noktalarında bu özel düzlemin yüksekliği

$$\pm z(1,0) = \pm[-2U(\sqrt{2}) + U(2)]$$

$$= \pm[-2(\sqrt{2})^2 \log 2 + 2^2 \log 4] = \pm 2,77 \text{ dir.}$$

Düzlemin sonsuzdaki yüksekliğinde değişim armatür düzleminin üzerindeki kısıtlardan daha büyüktür. İnce levha dönüşümü ve onun minimum yaptığı enerji, görselleştirme ve animasyon gibi diğer çeşitli verilere de genelleştirilebilir.

### 3.2.3. Nirengi noktalarının keyfi kümelerinin uygulamaları

Çelik tabağın sadece karenin köşe noktaları değil de noktaların herhangi bir birleşiminde temel düzlemin üstünde veya altında nasıl sabitlendiği düşünülebilir. Bu kısıtlar altında tabak en az bükme enerjisi konumuna uyar. Onun formunun tanımı  $r^2 \log r^2$  terimlerinin lineer birleşimleri olur. Biharmonik denklemin temel çözümleri bilginin özelleştirildiği her noktada merkezlenmiştir.

$t_j \quad j = 1, \dots, k$  birinci şekilden  $y_i \quad i = 1, \dots, k$  ikinci şekline giden  $(2 \times 1)$  nirengi noktalarını ele alalım.  $T$  ve  $Y$   $(k \times 2)$  matrisleri;  $T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_k]^T$ ,  $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_k]^T$  olmak üzere 2 boyutlu deformasyon

$$(y_j)_r = \Phi_r(t_j) \quad r = 1, 2 \quad j = 1, \dots, k \quad (3.1)$$

ile yazılabilir.

#### Tanım 3.2.4:

$$U(r) = \begin{cases} \|r\|^2 \log(\|r\|) & , \|r\| > 0 \\ 0 & , \|r\| = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$t$   $(2 \times 1)$ ,

$$s(t) = (U(t-t_1), \dots, U(t-t_k))^T \quad (k \times 1) \quad (3.3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi(t) &= (\phi_1(t), \phi_2(t))^T \\ &= c + At + W^T s(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

iki değişkenli fonksiyonuna ince levha dönüşümü çifti denir.

$c$   $(2 \times 1)$ ,  $A$   $(2 \times 2)$  ve  $W$   $(k \times 2)$  olmak üzere dönüşümün  $2k+6$  adet parametresi vardır.

(3.1) denkleminde  $2k$  enterpolasyon kısıtı vardır ve 6 kısıt da bükme enerjisi denkleminden (3.3.1. Tanım) elde edilecektir.

$$1_k^T W = 0, \quad T^T W = 0 \quad (3.5)$$

(3.5) denklemini sağlayan ince levha dönüşümü çiftlerine doğal ince levha dönüşümleri denir.

(3.1) ve (3.5) denklemleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} S & 1_k & T \\ 1_k^T & 0 & 0 \\ T^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ c^T \\ A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. Burada

$(S)_{ij} = U(t_i - t_j)$  ve  $k$  tane 1 den oluşan vektördür. (3.6) denkleminde

$$\Gamma = \begin{bmatrix} S & 1_k & T \\ 1_k^T & 0 & 0 \\ T^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak gösterilsin. Bu matris simetrik ve pozitif tanımlıdır.  $S$  nin tersi mevcut olduğunda  $\Gamma$  matrisinin de tersi mevcuttur. Sonuç olarak,

$$\begin{bmatrix} w \\ c^T \\ A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 1_k & T \\ 1_k^T & 0 & 0 \\ T^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.5:**  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$  pozitif tanımlı simetrik bir matris  $A$  nın tersi olan

matrisi  $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$  biçiminde tanımlı ve her bir  $A_{ii}$  ile  $B_{ii}$  ler  $m_i \times m_i$  boyutundan ise

$$A_{11}^{-1} = B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}$$

dir.

**İspat:**  $A = B^{-1}$  olduğundan  $AB = I$  yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = I$$

ve buradan da

$$A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = I \text{ ve } A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = 0$$

yazılabilir. 2. denkleminde  $A_{12}$  değeri

$$A_{12} = -A_{11}B_{12}B_{22}^{-1}$$

şeklinde alındığında ve bu değer 1. denklemde yerine konulduğunda

$$A_{11}B_{11} - A_{11}B_{12}B_{22}^{-1}B_{21} = I$$

elde edilir. Her iki taraf  $A_{11}^{-1}$  ile çarpılarak

$$A_{11}^{-1} = B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}$$

sonucu elde edilir.  $\square$

Teorem gereği  $\Gamma^{-1}$  matrisi  $\Gamma^{11}$   $k \times k$  ve  $\Gamma^{21}$   $3 \times k$  olmak üzere,  $\Gamma^{-1}$

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma^{11} & \Gamma^{12} \\ \Gamma^{21} & \Gamma^{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilirse,

$$\begin{aligned} \Gamma^{11} &= S^{-1} - S^{-1}Q(Q^T S^{-1}Q)^{-1}Q^T S^{-1} \\ \Gamma^{21} &= (Q^T S^{-1}Q)^{-1}Q^T S^{-1} = (\Gamma^{12})^T \\ \Gamma^{22} &= -(Q^T S^{-1}Q)^{-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dır. Yukarıdaki denklemlerde  $Q = [1_k, T]$  dir. Buradan da (4) denkleminde

$$\begin{aligned} W &= \Gamma^{11}Y \\ \begin{bmatrix} c^T \\ A^T \end{bmatrix} &= \Gamma^{21}Y \end{aligned} \quad (3.8)$$

bulunur.

### 3.3. Bükme (Bending) Enerjisi

**Tanım 3.3.1:**  $\Gamma^{11}$  ( $k \times k$ ) matrisine bükme (bending) enerji matrisi denir ve  $B_e$  ile gösterilir.

Bükme enerjisi matrisinde 3 kısıt vardır. Kısıtlar:

$$1_k^T B_e = 0, \quad T^T B_e = 0$$

dır. Bükme enerjisi matrisinin rankı  $k-3$  dür.  $T$  den  $Y$  ye giden bütün (3.4) dönüşümleri toplam bükme enerjisini minimum yapar. Toplam bükme enerjisi;

$$J(\Phi) = \sum_{j=1}^2 \iint_{R^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \quad (3.9)$$

olarak ifade edilir.

Kent ve Mardia tarafından basitçe ispatlanan minimum bükme enerjisi de

$$J(\Phi) = iz(w^T Sw) = iz(Y^T \Gamma^{-1} Y) \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bir deformasyon ızgarası hesaplanırken, ihtiyaçtan fazla bir yerel bükme ya da verinin olmadığı yerde bükülme olması beklenmemelidir. Dolayısıyla, ince levha dönüşümleri çiftinin minimum bükülme özelliği bir çok uygulama için çok kullanışlıdır. İnce levha dönüşümü kolay bir analitik çözüm olduğundan çok popülerdir. Deformasyon  $m$  boyuta da genelleştirilebilir. Ayrıca ince levha dönüşümünün jakobiyen matrisinin determinantı nirengi noktalarındaki genişleme ve daralma katsayılarını verir. Katsayılar 1 den büyükse genişlemeyi 1 den küçükse daralmayı ifade eder.

### 3.3.2. Dönüşüm ızgaraları

D'Arcy Thompson'ın (Thompson 1917) orijinal düşünceleri takip edilerek  $T$  konfigürasyon matrisinden  $Y$  konfigürasyon matrisine deformasyonlar için dönüşüm ızgaraları, ince levha dönüşümleri kullanılarak üretilebilir.

1. şeklin üzerine bir düzgün kare ızgara çizilir. Izgaradaki iki doğrunun kesiştiği her  $t_i$  noktasında ve bu noktanın 2. şekildeki  $y_i = \Phi(t_i)$   $i = 1, \dots, n$  karşılığı ince levha dönüşümü ile hesaplanır. Burada  $n$  ızgara üzerindeki kesişen nokta sayısı veya birleşme yerlerinin sayısıdır. İkinci şekil üzerinde deforme edilmiş ızgara oluşturmak için birleşme noktaları birinci şekil aynı sırada doğrularla bağlanır. İnce levha dönüşümleri 1.şekil üzerindeki düzgün kare ızgaradan 2. şekile deformasyonun dönüşüm ızgarasını elde etmek için kullanılır. Sonuçlanan enterpolant dönüşüm ızgaralarının mümkün olduğunca az bükülmesini sağlar.

**Örnek 3.3.3:** Bookstein 'in (1989) kareyi çatıya dönüştürme işlemini ele alınsın. 2 boyutta  $k = 4$  nokta  $T$  ve  $Y$  matrisleriyle şu şekilde verilsin.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0,75 \\ -1 & 0,25 \\ 0 & -1,25 \\ 1 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\|t_1 - t_2\| &= \sqrt{(0 - (-1))^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2} \\ &= \|t_1 - t_4\| = \|t_2 - t_1\| = \|t_2 - t_3\| = \|t_3 - t_2\| = \|t_3 - t_4\| = \|t_4 - t_1\| = \|t_4 - t_3\|\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|t_1 - t_4\| &= \sqrt{(0 - 0)^2 + (1 - (-1))^2} = 2 \\ &= \|t_2 - t_4\| = \|t_3 - t_1\| = \|t_4 - t_2\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{dir. } S_{11} &= U(t_1 - t_1), S_{12} = U(t_1 - t_2), S_{13} = U(t_1 - t_3), S_{14} = U(t_1 - t_4), \dots, S_{41} = U(t_4 - t_1), \\ S_{42} &= U(t_4 - t_2), S_{43} = U(t_4 - t_3), S_{44} = U(t_4 - t_4)\end{aligned}$$

$$U(t_1 - t_1) = U(0) = 0$$

$$U(t_1 - t_2) = U(\sqrt{2}) = \|\sqrt{2}\|^2 \log(\|\sqrt{2}\|) = 0,6931 = a$$

$$U(t_1 - t_3) = U(2) = \|2\|^2 \log(\|2\|) = 2,7726 = b \text{ dolayısıyla,}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{bmatrix}$$

denklem (3.7) gereği

$$B_e = \Gamma^{11} = S^{-1} - S^{-1}Q(Q^T S^{-1}Q)^{-1}Q^T S^{-1}$$

olduğundan ( $Q = [1_k, T]$ )

$$B_e = 0,1803 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Denklem (3.8) gereği  $W = \Gamma^{11}Y$  olduğundan

$$W = 0,1803 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,75 \\ -1 & 0,25 \\ 0 & -1,25 \\ 1 & 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,1803 \\ 0 & 0,1803 \\ 0 & -0,1803 \\ 0 & 0,1803 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} c^T \\ A^T \end{bmatrix} = \Gamma^{21} Y$  olduğundan,  $c = 0$   $A = I_2$  elde edilir. Dolayısıyla  $\Phi(t)$  ince levha dönüşümü

$$\Phi(t) = (t[1], t[2] + 0.1803 \sum_{j=1}^4 (-1)^j U(t - t_j))^T \text{ dir.}$$

**Tanım 3.3.4 (jakobien matris):**  $U \subset \mathbb{R}^p$  ve  $V \subset \mathbb{R}^q$  açık kümeler olmak üzere,  $h: U \rightarrow V$  sürekli bir fonksiyon olsun.  $(y_1, y_2, \dots, y_q) = h(x_1, x_2, \dots, x_p)$  yazılabilir. Eğer  $h$  fonksiyonunu  $\partial y_k / \partial x_j$   $j = 1, \dots, p$  ve  $k = 1, \dots, q$  sonlu kısmi türevlerine sahipse  $h$  fonksiyonu  $U$  üzerinde düzgün ve diferensiyellenebilirdir.

Eğer bütün kısmi türevler sürekli fonksiyonlar ise  $h$   $U$  üzerinde  $C^1$  sınıfındandır denir.  $U$  da keyfi bir  $h: U \rightarrow V$  düzgün fonksiyonu ve keyfi bir nokta  $x = (x_1, \dots, x_p)$  olmak üzere, kısmi türevlerin matrisi olan jakobiyen matrisi

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

dir.  $(jh)_x = \det(\Lambda)$  değeri  $h$ 'ın  $x$  üzerindeki jakobiyenidir. Jakobiyen,  $x \rightarrow h(x)$  dönüşümü ile  $x$  in etrafındaki hacimsel değişiklik oranını ölçer (Small 1996).

**Örnek 3.3.5:** Örnek 2.5 tekrar ele alınsın.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} t[1] \\ t[2] + 0.1803 \sum_{j=1}^4 (-1)^j U(t - t_j) \end{bmatrix} \text{ idi. Ayrıca, (4) nolu denklemde belirtildiği üzere}$$

$$\Phi(t) = c + At + W^T s(t) \text{ olduğundan}$$

$$\Phi(t) = 0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1803 & 0,1803 & -0,1803 & 0,1803 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t - t_1) \\ U(t - t_2) \\ U(t - t_3) \\ U(t - t_4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + A \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $A$ ,

$$A = 0,1803 \sum_{i=1}^4 (-1)^i (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \log(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2})$$

dır.  $\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y + A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  3.3.4 tanıma göre jakobiyen matrisi

$$j = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ olduğundan ve}$$

$\det j = 0,1803 \sum_{j=1}^4 (y - y_j)(\log((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2) + 1)$  değeri bulunur. Her bir nokta için  $x$  ve

$y$  değerleri yerine yazıldığında noktalara ait genişleme katsayıları elde edilir. Örneğin  $(1,0)$  noktasındaki genişleme katsayısı  $0,75$  tir. Diğerleri de benzer şekilde bulunabilir.

İnce levha dönüşümü afin ve afin olmayan olmak üzere iki kısma ayrılır. Sadece afin olmayan kısım bükme enerjisine katılır ve dolayısıyla afin dönüşümlü iki konfigürasyonun toplam bükme enerjisi sıfırdır.

### 3.4. Ana ve Kısmi Warp Ayrışimleri

**Tanım 3.4.1:**  $t \in \mathbb{R}^2$  den  $y \in \mathbb{R}^2$  ye  $k$  adet noktayı  $T$  den  $Y$  ye  $(k \times 2)$  matrisleriyle enterpole eden ince levha dönüşümü ele alınsın.  $(k \times k)$  bükme enerji matrisi olan  $B_e$  nin öz değerleri  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{k-3}$  olmak üzere bunlara karşılık gelen öz vektörler de  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-3}$  dir. Bu öz vektörlere ana warp öz vektörleri ve öz değerlere de bükme enerjileri ismi verilir. Bu fonksiyonlar,

$$s(t) = (U(t - t_1), \dots, U(t - t_k))^T$$

olmak üzere



$$P_j^T = \gamma_j^T s(t) \quad j = 1, \dots, k-3 \text{ tür.}$$

Burada öz değer ve öz vektörler, en küçük öz değer  $\lambda_1$  ve ona karşılık gelen öz vektörde birinci ana warp olacak şekilde dizilmişlerdir. Ana warplar ikinci şekil olan  $Y$  ye bağlı değildir. Ana warplar ince levha dönüşümünü açıklayan ortogonal bazı kurmak için kullanılırlar ve aynı zamanda ortonormaldirler.

Ana warp deformasyonları, iki boyutlu  $t$  nin tek değişkenli fonksiyonlarıdır ve düzlem üzerinde yüzeyler veya düzey haritaları olarak gösterilirler. Dönüşüm ızgaralarının farklı bir çizimi ise  $t$  den  $y$  ye her bir  $j$  ve belirli  $c_1$  ve  $c_2$  değerleri için

$$y = t + (c_1 P_j^T, c_2 P_j^T)^T$$

dir.

**Tanım 3.4.2:** Kısmi warplar;

$$R_j^T = Y^T \lambda_j \gamma_j P_j^T = Y^T \lambda_j \gamma_j^T s(t)$$

olmak üzere,  $k-3$  adet iki değişkenli  $R_j^T$  fonksiyonunun kümesi olarak tanımlanır.

$T$  den  $Y$  ye  $j$ . kısmi warp ölçüm değeri (skoru)

$$(p_{j_1}, p_{j_2})^T = Y^T \gamma_j \quad j = 1, \dots, k-3$$

tür ve her bir kısmi warp için iki adet ölçüm değeri vardır.

İnce levha dönüşümlerinin afin olmayan kısmı kısmi warpların toplamı olarak

$$W^T s(t) = \sum_{j=1}^{k-3} R_j^T$$

ile ifade edilir.  $j$ . kısmi warp en yüksek ağırlığını  $j$ . ana warpta alan nirengi noktalarının hareketi ile ilişkilidir.  $j$ . kısmi warp, ölçüm değeri her bir kartezyen eksende  $T$  kaynak şeklinden  $Y$  hedef şekline olan deformasyonun  $j$ . ana warpının katkısını gösterir.

Kısmi warplar iki değişkenli fonksiyonlardır ve  $T$  üzerindeki kare ızgaranın deformasyonları olarak çizimlerde gösterilirler. Ayrıca, eğer  $t$  orijinal konfigürasyonun

düzleminde bir nokta ise, bu noktayı  $y = t + R_j^T$  ye deforme ederek  $j$ . kısmi warpın ızgarası elde edilir. Dolayısıyla, deformasyonun iyi bir şekilde anlaşılabilmesi kısmi warpların yorumları ile gerçekleşir. Ayrıca ince levha dönüşümünün tam bir ayrışımı için afin dönüşüm de deforme edilmiş ızgara olarak gösterilmelidir.

Kısmi warplar, birinci şekilde noktaları hareket ettirmek için istenen bükmenin değerine göre sıralanarak deformasyonun afin olmayan kısımlarını verirler. Uygulamalarda bu durum, kısmi warpların çeşitli ölçeklerde deformasyon belirtmesi ile sonuçlanır. Öz değerlerin büyük değerleri (büyük  $j$  ler) küçük ölçekli yerel deformasyon belirtirken, öz değerlerin küçük değerleri büyük ölçekli global deformasyonları belirtir. Dolayısıyla, birinci ana ve kısmi warplar şeklin geniş ölçekli bükülmesine karşılık gelirken sonuncu ana ve kısmi warplar en küçük ölçekte birbirine en yakın nirengi noktaları ile ilgilenir.

### 3.5. Afin Katkı

$Y_{k \times 2}$  ve  $T_{k \times 2}$  birim büyüklükteki konfigürasyonları verildiğinde şekiller arasında kareli Procrustes uzaklığı (1.6.1. Tanım) afin kısmın katkısı ve afin olmayan kısmın katkısı olarak

$$d_F^2(Y, T) = \text{afin katkı} + d_F^2(T, \hat{T})$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Burada,

$$\hat{T} = T + \sum_{j=1}^{k-3} R_j^T$$

dir. Afin katkı yüzdesi

$$1 - \frac{d_F^2(T, \hat{T})}{d_F^2(Y, T)} \quad (4)$$

denklemleri ile bulunur. Bu afin katkı payının bulunmasında izlenen adımlar aşağıdaki algoritma ile verilebilir.

A0: Başla

A1:  $k$  adet nirengi noktası için  $(k-1) \times k$  tipinde  $H$  helmert matrisini hesapla.

A2:  $T$  nin ön şekli olan  $Z_1$  i bulmak için önce  $\|HT\|$  yi  $\|HT\| = \sqrt{iz(T'H'HT)}$  denklemi ile hesapla ve bulduğun değeri

$Z_1 = \frac{HT}{\|HT\|}$  denkleminde yerleştir.

A3:  $T + W'S$  formülüyle  $\hat{T}$  matrisini bul.

A4:  $\hat{T}$  nin önşeklini ifade eden  $Z_2$  yi bul.(A2)

A5:  $Z_1'Z_2Z_2'Z_1$  matrisinin özdeğerlerini hesapla. (bu özdeğerler Procrustes uzaklık hesaplanırken kullanılacak olan özdeğerlerdir.)

A6:  $T$  ve  $\hat{T}$  arasındaki Procrustes uzaklığını  $d_F^2(T, \hat{T}) = 1 - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)^2$  denklemi ile bul.(Buradaki  $\lambda_i$  ler A5 te bulunan özdeğerlerin karekökleridir.)

A7:  $Y$  ve  $T$  arasındaki Procrustes uzaklığını bulmak için  $Y$  nin ön şekli olan  $Z_3$  ;önce

$\|HY\|$  yi  $\|HY\| = \sqrt{iz(Y'H'HY)}$  ile bularak  $Z_3 = \frac{HY}{\|HY\|}$  ü hesapla.

A8: A2. adımda hesaplanan  $Z_1$  ve  $Z_3$  ön şekillerini kullanarak  $Z_3'Z_1Z_1'Z_3$  matrisinin özdeğerlerini hesapla.

A9:  $Y$  ile  $T$  arasındaki Procrustes uzaklığını  $d_F^2(Y, T) = 1 - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)^2$  ile bul. (Buradaki  $\lambda_i$  ler A8 de bulunan öz değerlerin karekökleridir.)

A10:  $T$  den  $Y$  ye olan İnce levha dönüşümünün afin katkı yüzdesini (4) denklemi ile hesapla.

A11: Son.

#### 4. UYGULAMA

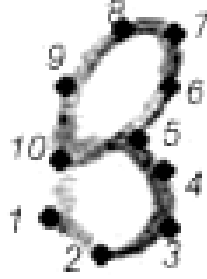
Bu çalışmada 80 adet denekten hem sağ el hem de sol el ile Bursa ilinin harflerinin büyük harflerle yazılması istenmiştir. Denekler; 20 adet sağ eli baskın olarak kullanan kadın, 20 adet sol eli baskın olarak kullanan kadın, 20 adet sağ eli baskın olarak kullanan erkek ve 20 adet sol eli baskın olarak kullanan erkek olmak üzere dört farklı gruptan oluşmaktadır. Tek bir harf için 160 adet şekil elde edilirken bütün harfler değerlendirildiğinde 800 adet şekil elde edilmiş ve bu 800 adet şekil ince levha dönüşümü yardımı ile analiz edilmiştir. İzlenen adımlar ise kısaca şu şekilde özetlenebilir: Tpsdig programı ile her bir harf üzerinde nirengi noktaları belirlenerek, R programında nirengi noktalarının Procrustes koordinatları hesaplanmıştır. Analizleri yapılacak dönüşümler için şekil konfigürasyonları oluşturulmuş, ince levha dönüşümü ızgaraları ve kısmi warp ayrışmaları elde edilmiştir. Ayrıca tanjant koordinatları belirlenerek ana bileşenler analizi yapılmıştır.

Çalışmanın devamında sağ el ile yazılmış olan harflerin başında “sağ”, sol el ile yazılmış olan harflerin başında “sol” ifadeleri kullanılmıştır. Örneğin “sağ el ile yazılmış B harfi” ifadesi yerine “sağ B” ifadesi kullanılmıştır. Ayrıca, sağ eli baskın olarak kullanan kişiler sağlak, sol eli baskın olarak kullanan kişiler solak olarak nitelendirilmişlerdir. Analizi yapılan ince levha dönüşümleri ise sırasıyla şu şekildedir:

- 1- Sağlak erkekte sağ B den sol B ye ince levha dönüşümü
- 2- Sağlak kadında sağ B den sol B ye ince levha dönüşümü
- 3- Solak erkekte sol B den sağ B ye ince levha dönüşümü
- 4- Solak kadında sol B den sağ B ye ince levha dönüşümü
- 5- Sağ B de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü
- 6- Sağ B de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü
- 7- Sol B de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü
- 8- Sol B de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü

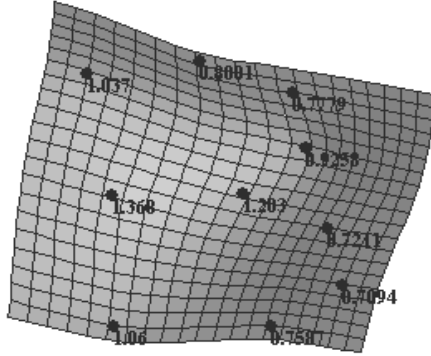
#### 4.1. B Harfi

B harfinin üzerinde 10 adet nirengi noktası belirlenmiştir. Şekil 4.1.1 belirlenen nirengi noktalarını göstermektedir. 4.1.1. bölümde; genişleme daralma katsayılarını gösteren 8 adet ince levha dönüşümü ızgarası verilmiştir ve en yüksek genişleme ve daralmanın gerçekleştiği nirengi noktaları belirtilmiştir. Dönüşümlerdeki şekil değişkenlikleri (Tanım 1.4.7) ve ortalama şekiller arasındaki riemann uzaklıkları (Tanım 1.6.6) 4.1.2. bölümde ele alınmıştır. 4.1.3. bölümde ise dönüşümlerin kısmi warp ayrışımına yer verilmiştir. Bu bölümde özellikle dönüşümlerin sırasıyla en geniş ölçekli değişimini açıklayan ve en yerel değişimi gösteren kısmi warp ayrışimleri bulunmaktadır.

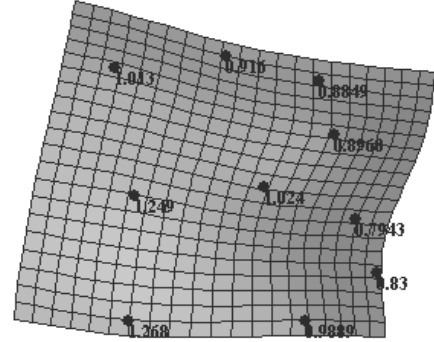


Şekil 4.1.1. B harfinin üzerinde belirlenen 10 adet nirengi noktası

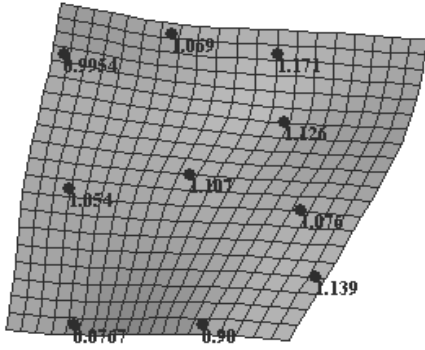
#### 4.1.1. İnce levha dönüşümü ızgaraları ve genişleme-daralma katsayıları



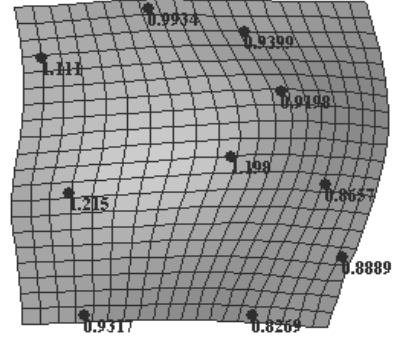
Şekil 4.1.2. Sağlak erkekte sağ B den sol B ye İnce levha dönüşümü. En büyük genişleme 10 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 7 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



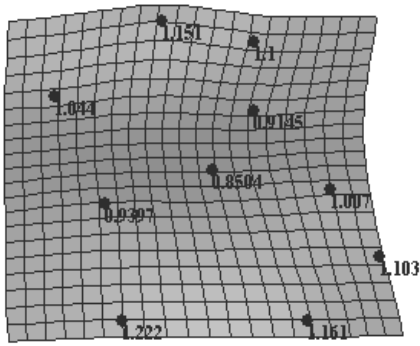
Şekil 4.1.3. Sağlak kadında sağ B den sol B ye İnce levha dönüşümü. En büyük genişleme 1 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 3 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



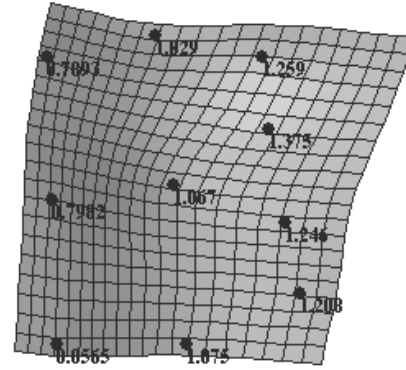
**Şekil 4.1.4.** Solak erkekte sol B den sağ B ye İnce levha dönüşümü. En büyük genişleme 7 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 1 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



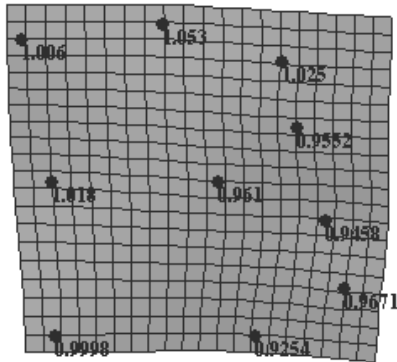
**Şekil 4.1.5.** Solak kadında sol B den sağ B ye İnce levha dönüşümü. En büyük genişleme 10 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 2 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



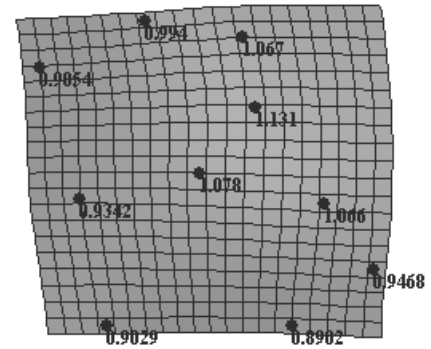
**Şekil 4.1.6.** Sağ B de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 1 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 5 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.1.7.** Sağ B de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 6 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 9 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.1.8.** Sol B de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 8 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 2 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.1.9.** Sol B de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 6 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 2 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.

#### 4.1.2. Şekil değişkenlikleri ve riemann uzaklıkları

Çizelge 4.1.1. Şekil değişkenlikleri

		Kadın	Erkek
Sağlak	Sağ B deki şekil değişkenliği	0.1891	0.2112
	Sol B deki şekil değişkenliği	0.2009	0.2065
Solak	Sağ B deki şekil değişkenliği	0.2060	0.2197
	Sol B deki şekil değişkenliği	0.1818	0.1845

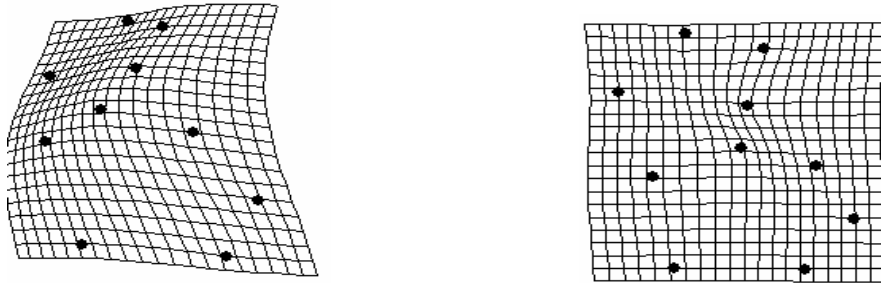
Çizelge 4.1.2. Sağ ve sol B de kadın ile erkek ortalama şekilleri arasındaki riemann uzaklıkları

		Kadın ile erkek ortalama şekilleri arası riem. uzaklığı
SAĞLAK	SAĞ B	0.1056
	SOL B	0.0433
SOLAK	SAĞ B	0.0967
	SOL B	0.493

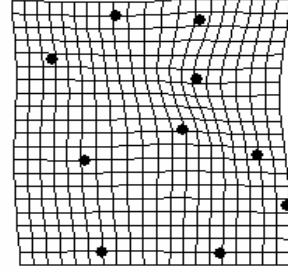
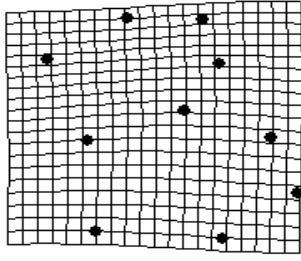
Çizelge 4.1.3. Kadın ve erkekte sağ B ile sol B ortalama şekilleri arasındaki riemann uzaklığı

		Sağ B ile Sol B ortalama şekilleri arası riem. uzaklığı
SAĞLAK	KADIN	0.0810
	ERKEK	0.1367
SOLAK	KADIN	0.1216
	ERKEK	0.1101

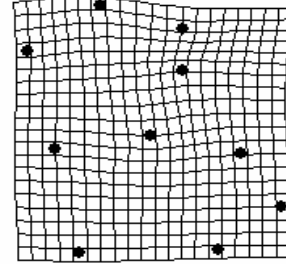
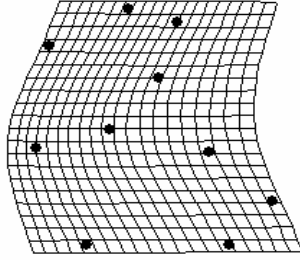
#### 4.1.3. Kısmi warp ayrışmaları



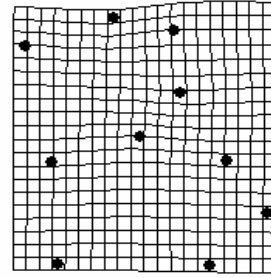
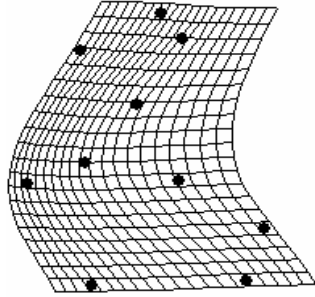
Şekil 4.1.10. Sağlak erkekte sağB den sol B ye dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



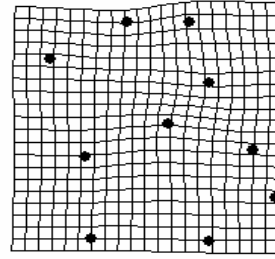
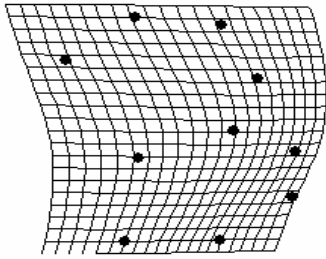
Şekil 4.1.11. Sağlak kadında sağB den solB ye dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.1.12. Solak erkekte solB den sağ B ye dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı

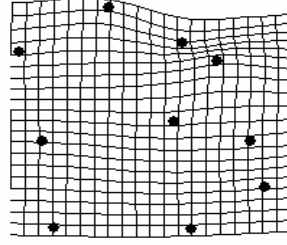
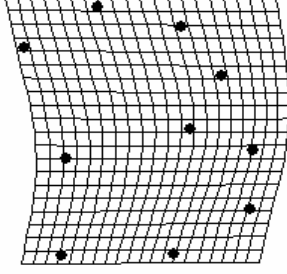


Şekil 4.1.13. Solak kadında solB den sağ B ye dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı

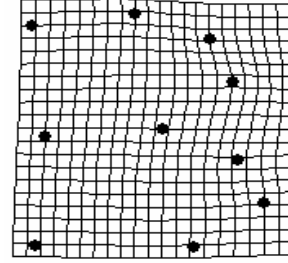
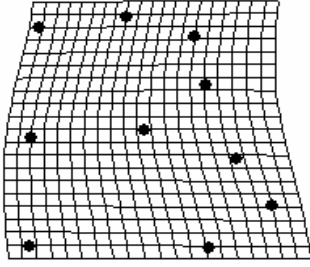


Şekil 4.1.14. Sağ B de sağlak kadından sağlak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. warpı

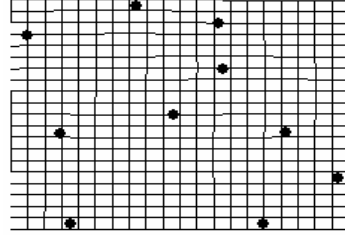
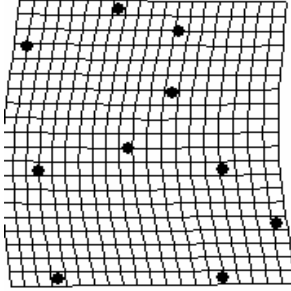




Şekil 4.1.15. Sağ B de solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



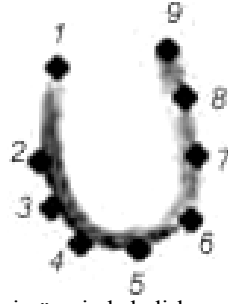
Şekil 4.1.16. Sol B de sağlak kadından sağlak erkeğe dönüşümün Sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.1.17. Sol B de solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı

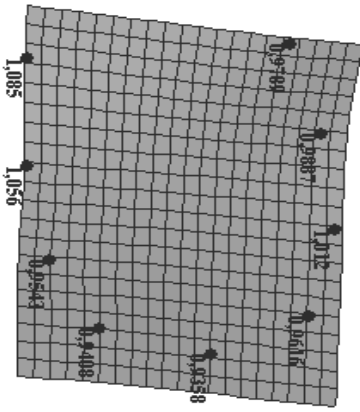
#### 4.2. U Harfi

U harfinin üzerinde 9 adet nirengi noktası belirlenmiştir. Şekil 4.2.1 de işaretlenen nirengi noktaları gösterilmektedir. 4.2.1. bölümde; genişleme daralma katsayılarını gösteren 8 adet ince levha dönüşümü ızgarası verilmiştir ve en yüksek genişleme ve daralmanın gerçekleştiği nirengi noktaları belirtilmiştir. Dönüşümlerdeki şekil değişkenlikleri (Tanım 1.4.7) ve ortalama şekiller arasındaki riemann uzaklıkları (Tanım 1.6.6) 4.2.2. bölümde ele alınmıştır. 4.2.3. bölümde ise dönüşümlerin sırasıyla en geniş ölçekli değişimini açıklayan ve en yerel değişimi gösteren kısmi warp ayrışmaları bulunmaktadır.

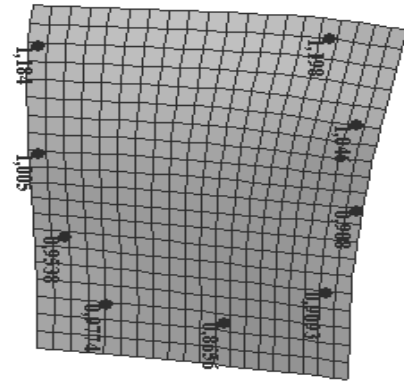


Şekil 4.2.1. U harfinin üzerinde belirlenen 9 adet nirengi noktası

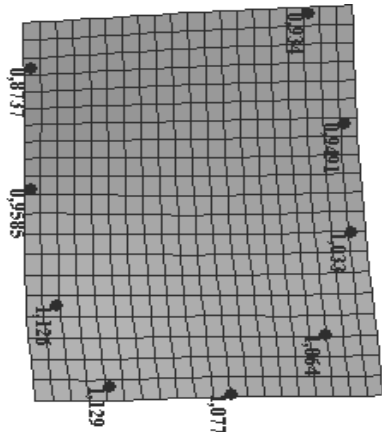
#### 4.2.1. İnce levha dönüşümü ızgaraları



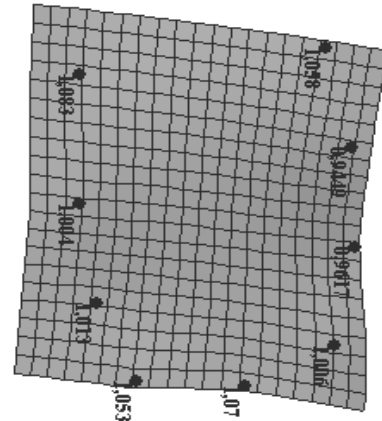
Şekil 4.2.2. Sağlak erkekte sağ U dan sol U ya ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 1 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 5 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



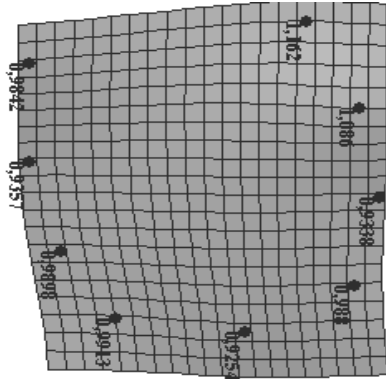
Şekil 4.2.3. Sağlak kadında sağ B den sol B ye ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 9 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 5 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



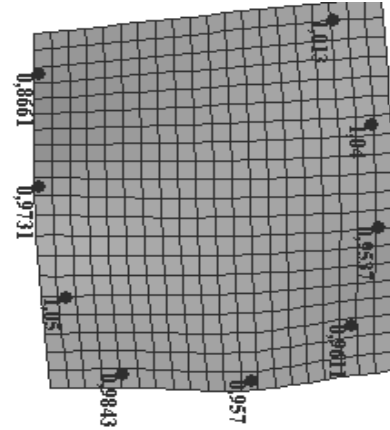
Şekil 4.2.4. Solak erkekte sol U dan sağ U ya ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 4 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 1 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



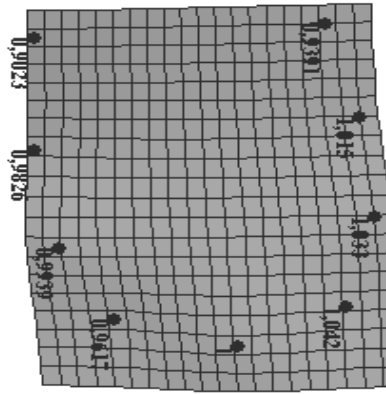
Şekil 4.2.5. Solak kadında sol U dan sağ U ya ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 1 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 8 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



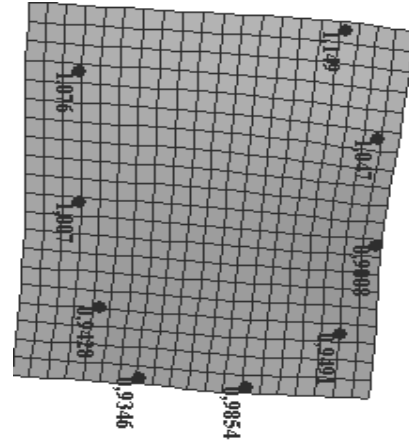
**Şekil 4.2.6.** Sağ U da sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 9 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 5 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.2.7.** Sağ U da solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 3 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 7 nolu nirengi noktasında oluşmuştur



**Şekil 4.2.8.** Sol U da sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 6 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 1 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.2.9.** Sol U da solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 9 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 4 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.

#### 4.2.2. Şekil değişkenlikleri ve riemann uzaklıkları

**Çizelge 4.2.1.** Şekil Değişkenlikleri

		Kadın	Erkek
Sağlak	Sağ U daki şekil değişkenliği	0.1954	0.1777
	Sol U daki şekil değişkenliği	0.1647	0.1730
Solak	Sağ U daki şekil değişkenliği	0.1532	0.1923
	Sol U daki şekil değişkenliği	0.1565	0.1494

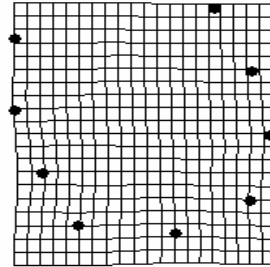
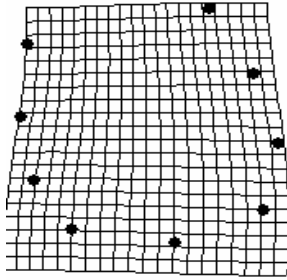
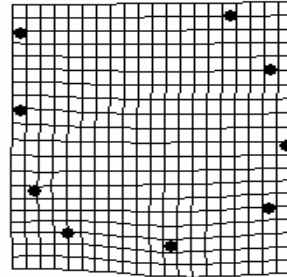
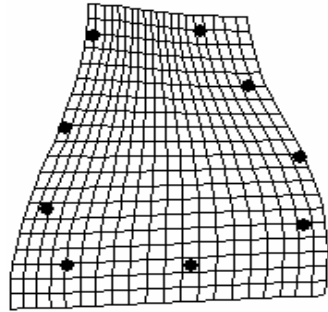
**Çizelge 4.2.2.** Sağ U ve Sol U da kadın ile erkek ortalama şekilleri arasındaki riemann uzaklıkları

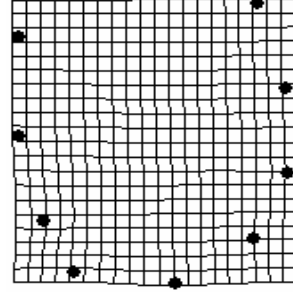
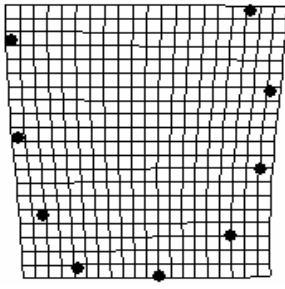
		Kadın ile erkek ortalama şekil arası riem. uzaklığı
Sağlak	Sağ U	0.0489
	Sol U	0.0365
Solak	Sağ U	0.0400
	Sol U	0.0384

**Çizelge 4.2.3.** Kadın ve erkekte Sağ U ile sol U ortalama şekilleri arasındaki riemann uzaklığı

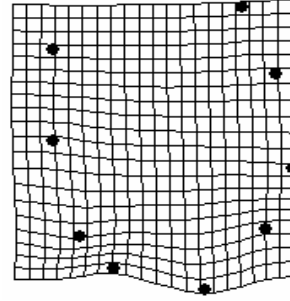
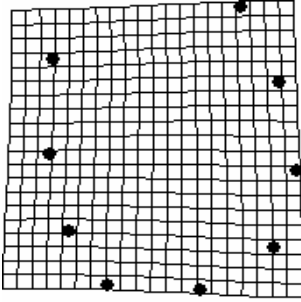
		Sağ U ile Sol U ortalama şekil arası Riem. uzaklığı
Sağlak	Kadın	0.0723
	Erkek	0.0440
Solak	Kadın	0.0398
	Erkek	0.0554

### 4.2.3. Kısmi warp ayrışmaları

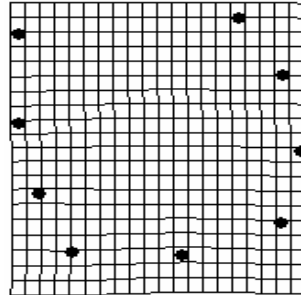
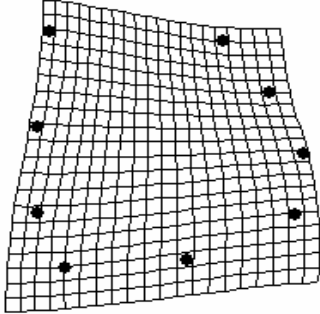
**Şekil 4.2.10.** Sağlak erkekte sağ U dan sol U ya dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı**Şekil 4.2.11.** Sağlak kadında sağ U dan sol U ya dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



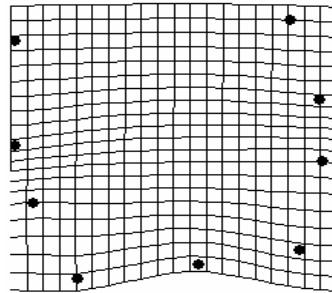
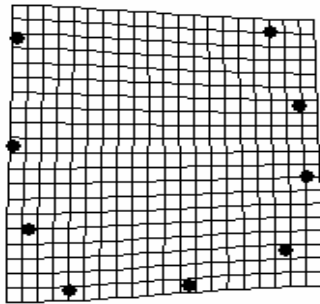
Şekil 4.2.12. Solak erkekte sol U dan sağ U ya dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



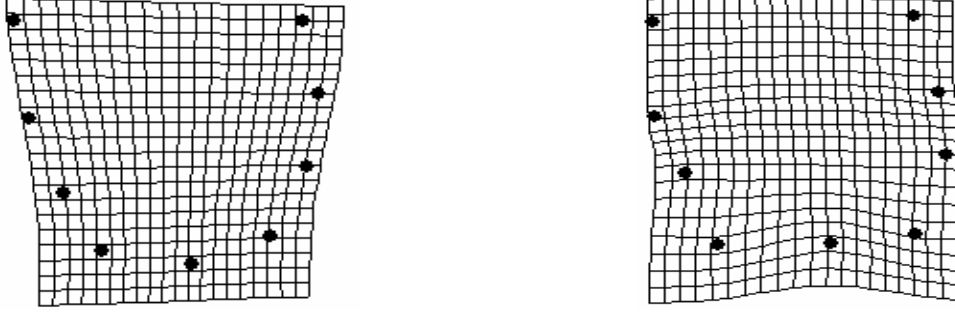
Şekil 4.2.13. Solak kadında sol U dan sağ U ya dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



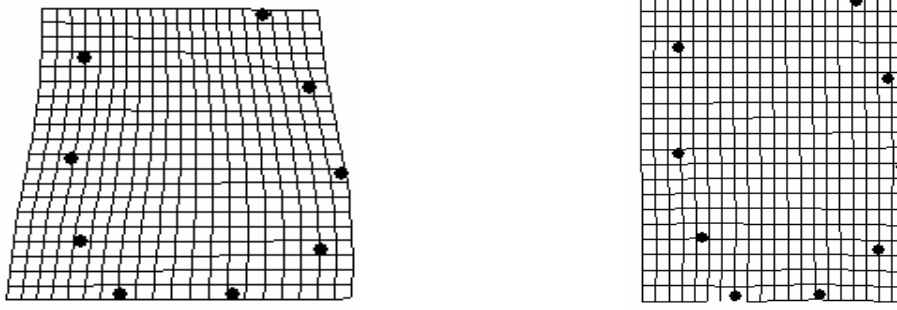
Şekil 4.2.14. Sağ U da sağlak kadından sağlak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. warpı



Şekil 4.2.15. Sağ U da solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



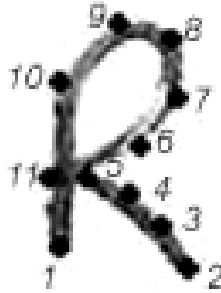
Şekil 4.2.16. Sol U da sağlak kadından sağlak erkeğe dönüşümün Sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.2.17. Sol U da solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı

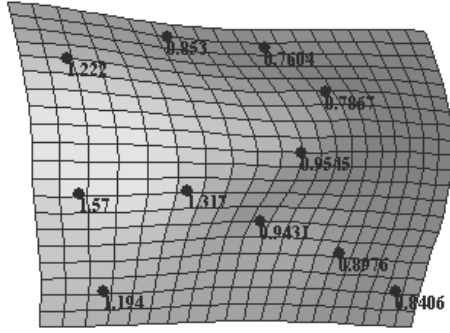
### 4.3. R Harfi

R harfinin üzerinde 11 adet nirengi noktası işaretlenmiştir. Şekil 4.3.1 işaretlenen nirengi noktalarını göstermektedir. 4.3.1. bölümde; genişleme daralma katsayılarını gösteren 8 adet ince levha dönüşümü ızgarası verilmiştir ve en yüksek genişleme ve daralmanın gerçekleştiği nirengi noktaları belirtilmiştir. Dönüşümlerdeki şekil değişkenlikleri (Tanım 1.4.7) ve ortalama şekiller arasındaki riemann uzaklıkları (Tanım 1.6.6) 4.3.2. bölümde ele alınmıştır. 4.3.3. bölümde ise dönüşümlerin kısmi warp ayrışımına yer verilmiştir. Bu bölümde özellikle dönüşümlerin sırasıyla en geniş ölçekli değişimini açıklayan ve en yerel değişimi gösteren kısmi warp ayrışimleri bulunmaktadır.

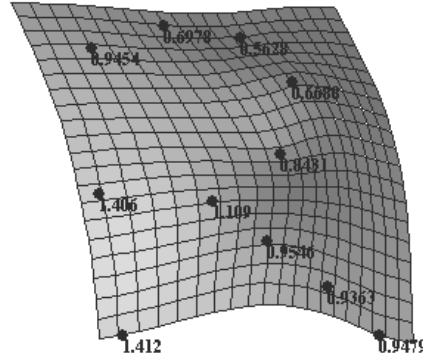


Şekil 4.3.1. R harfinin üzerinde belirlenen 11 adet nirengi noktası.

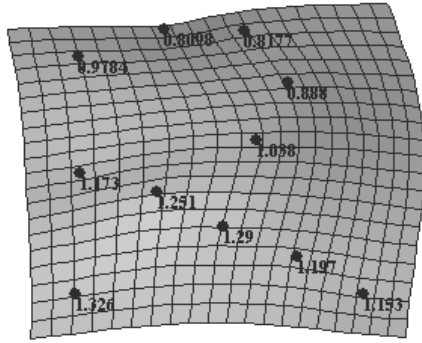
### 4.3.1. İnce Levha dönüşümü ızgaraları



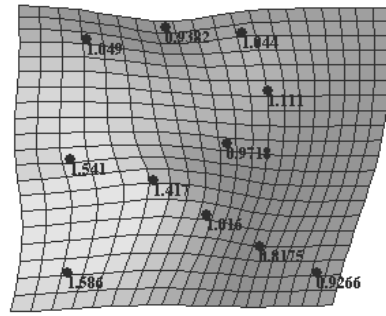
**Şekil 4.3.2.** Sağlak erkekte sağ R den sol R ye ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 11 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 8 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



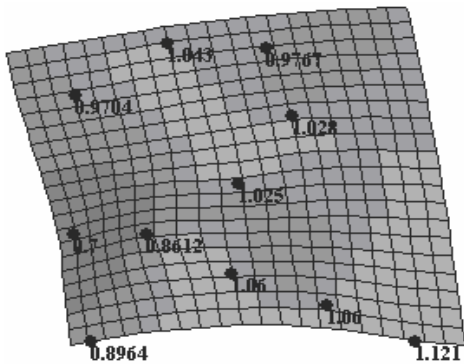
**Şekil 4.3.3.** Sağlak kadında sağ R den sol R ye ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 1 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 8 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



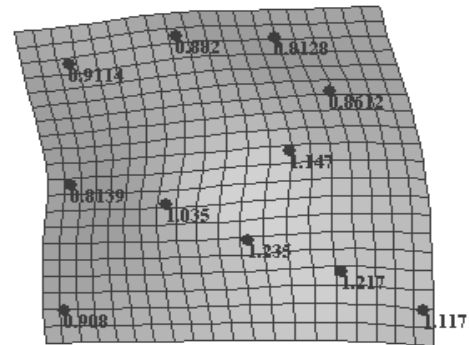
**Şekil 4.3.4.** Solak erkekte sol R den sağ R ye ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 1 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 8 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



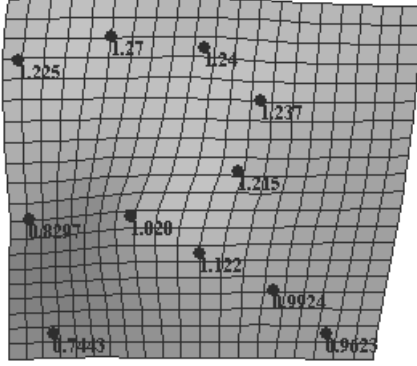
**Şekil 4.3.5.** Solak kadında sol B den sağ B ye İnce levha dönüşümü. En büyük genişleme 1 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 9 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



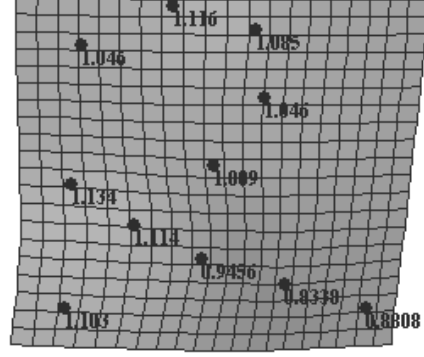
**Şekil 4.3.6.** Sağ R de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 2 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 11 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.3.7.** Sağ R de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 4 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 8 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.3.8.** Sol R de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 7 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 1 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.3.9.** Sol R de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 11 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 3 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.

#### 4.3.2. Şekil değişkenlikleri ve riemann uzaklıkları

**Çizelge 4.3.1.** Şekil Değişkenlikleri

		Kadın	Erkek
Sağlak	Sağ R deki şekil değişkenliği	0.1986	0.2031
	Sol R deki şekil değişkenliği	0.2575	0.2206
Solak	Sağ R deki şekil değişkenliği	0.2125	0.2381
	Sol R deki şekil değişkenliği	0.2142	0.1935

**Çizelge 4.3.2.** Sağ R ve Sol R de kadın ile erkek ortalama şekilleri arası riemann uzaklıkları

		Kadın ile erkek ortalama şekil arası riem. uzaklığı
Sağlak	Sağ R	0.0795
	Sol R	0.0889
Solak	Sağ R	0.0679
	Sol R	0.0519

**Çizelge 4.3.3.** Kadın ve erkekte Sağ R ile Sol R ortalama şekilleri arasındaki riemann uzaklığı

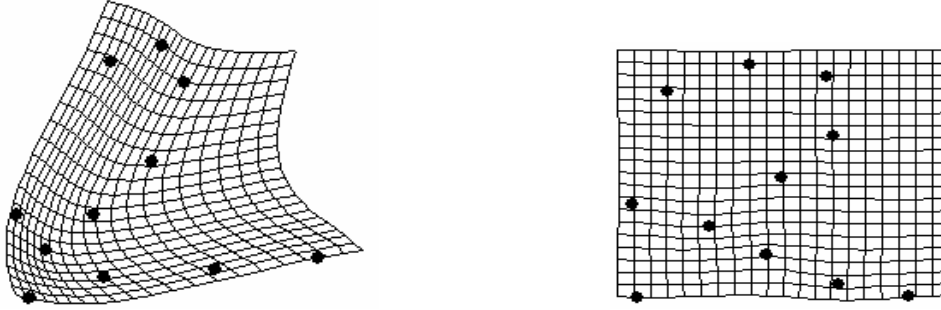
		Sağ R ile Sol R arası Rieman. Uzaklığı
Sağlak	Kadın	0.1984
	Erkek	0.1476
Solak	Kadın	0.1489
	Erkek	0.1528



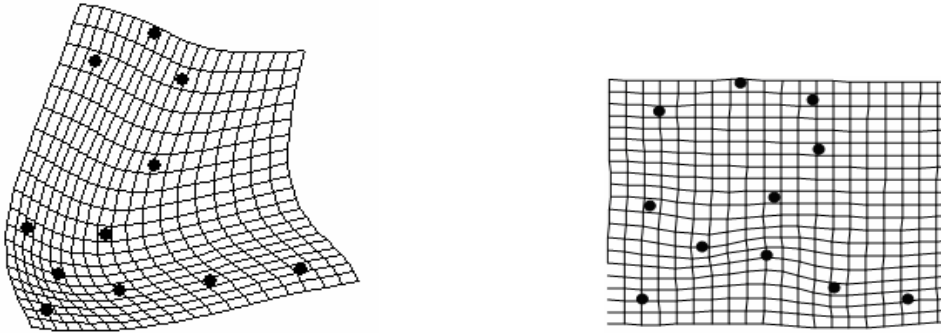
### 4.3.3. Kısmi warp ayrışımları



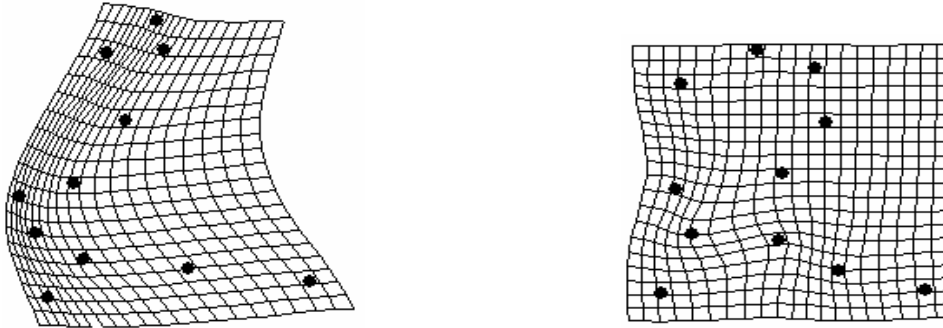
Şekil 4.3.10. Sağlak erkekte sağ R den sol R ye dönüşümünün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



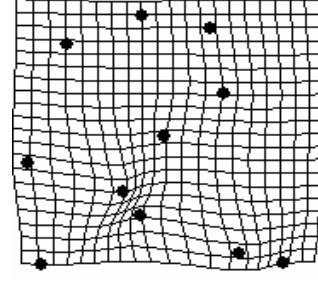
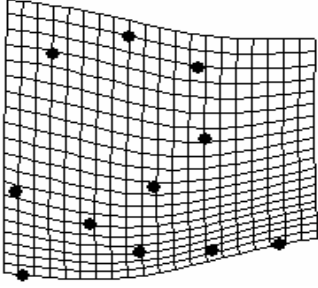
Şekil 4.3.11. Sağlak kadında sağ R den sol R ye dönüşümünün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



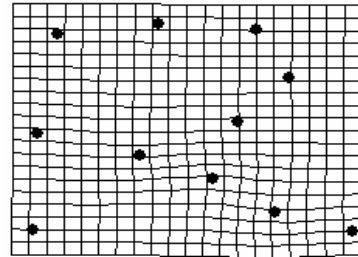
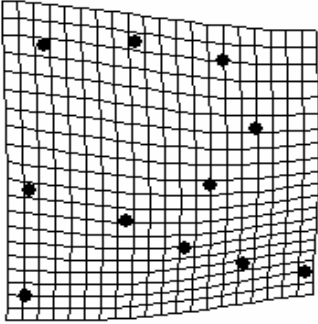
Şekil 4.3.12. Solak erkekte sol R den sağ R ye dönüşümünün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



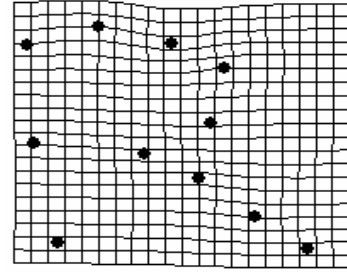
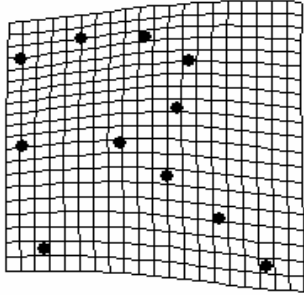
Şekil 4.3.13. Solak kadında sol R den sağ R ye dönüşümünün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



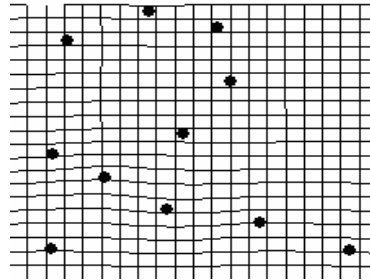
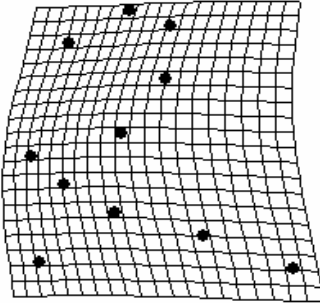
Şekil 4.3.14. Sağ R de sağlıklı kadından sağlıklı erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. warpı



Şekil 4.3.15. Sağ R de solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.3.16. Sol R de sağlıklı kadından sağlıklı erkeğe dönüşümün Sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.3.17. Sol R de solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı

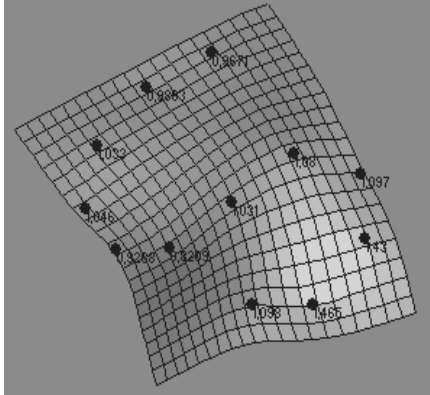
#### 4.4. S Harfi

S harfinin üzerinde 12 adet nirengi noktası belirlenmiştir. Şekil 4.4.1 belirlenen nirengi noktalarını göstermektedir. 4.4.1. bölümde; genişleme daralma katsayılarını gösteren 8 adet ince levha dönüşümü ızgarası verilmiştir ve en yüksek genişleme ve daralmanın gerçekleştiği nirengi noktaları belirtilmiştir. Dönüşümlerdeki şekil değişkenlikleri (Tanım 1.4.7) ve ortalama şekiller arasındaki riemann uzaklıkları (Tanım 1.6.6) 4.4.2. bölümde ele alınmıştır. 4.4.3. bölümde ise dönüşümlerin kısmi warp ayrışımına yer verilmiştir. Bu bölümde özellikle dönüşümlerin sırasıyla en geniş ölçekli değişimini açıklayan ve en yerel değişimi gösteren kısmi warp ayrışimleri bulunmaktadır.

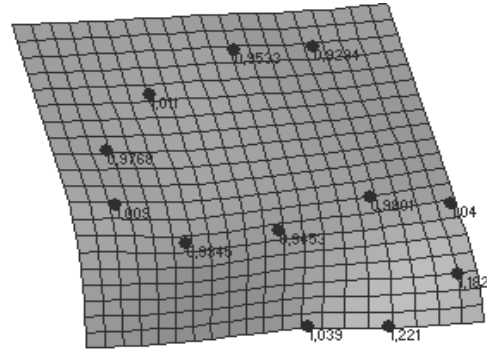


Şekil 4.4.1. S harfi üzerinde belirlenen 12 adet nirengi noktası.

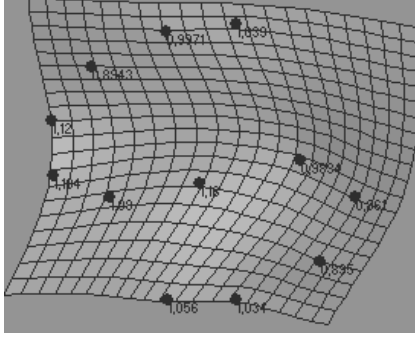
#### 4.4.1. İnce levha dönüşümü ızgaraları



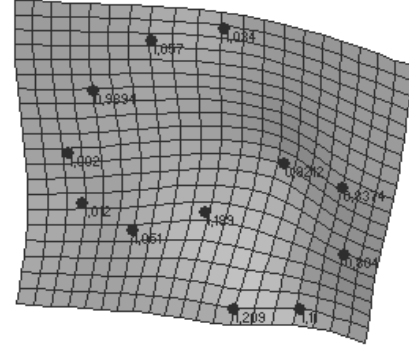
Şekil 4.4.2. Sağlak erkekte sağ S den sol S ye ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 11 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 6 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



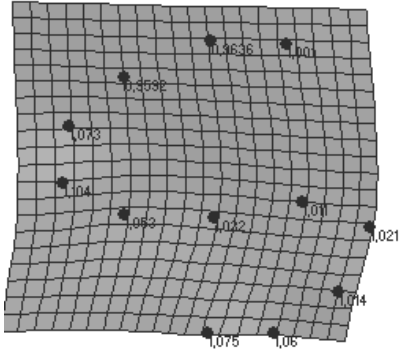
Şekil 4.4.3. Sağlak kadında sağ S den sol S ye ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 11 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 6 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



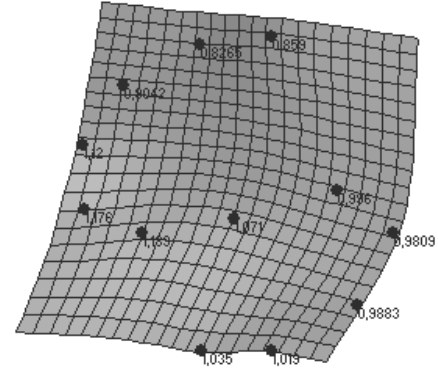
**Şekil 4.4.4.** Solak erkekte sol S den sağ S ye İnce levha dönüşümü. En büyük genişleme 5 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 9 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



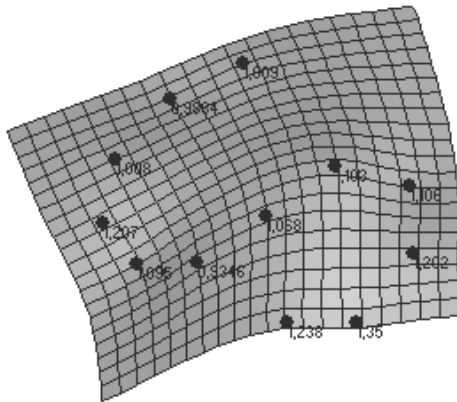
**Şekil 4.4.5.** Solak kadında sol S den sağ S ye İnce levha dönüşümü. En büyük genişleme 12 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 10 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



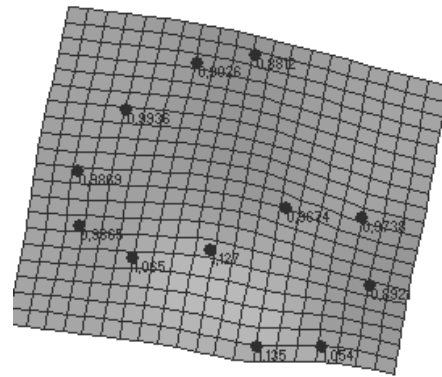
**Şekil 4.4.6.** Sağ S de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 12 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 3 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.4.7.** Sağ S de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 5 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 2 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.4.8.** Sol S de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 1 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 6 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.4.9.** Sol S de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 12 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 1 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.

#### 4.4.2. Şekil değişkenlikleri ve riemann uzaklıkları

Çizelge 4.4.1. Şekil değişkenlikleri

		Kadın	Erkek
Sağlak	Sağ S deki şekil değişkenliği	0.2439	0.2846
	Sol S deki şekil değişkenliği	0.2406	0.2773
SOLAK	SAG S deki şekil değişkenliği	0.2436	0.3077
	SOL S deki şekil değişkenliği	0.2213	0.2524

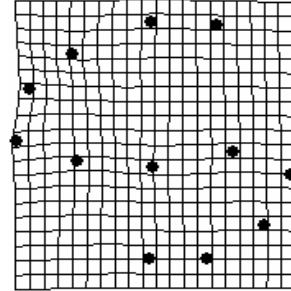
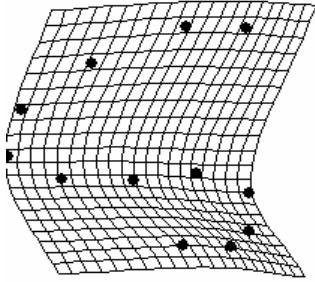
Çizelge 4.4.2. Sağ S ve Sol S de kadın ile erkek ortalama şekilleri arasındaki riemann uzaklıkları

		Kadın ile erkek ortalama şekilleri arası riem. uzaklığı
SAĞLAK	Sağ S	0.0837
	Sol S	0.1546
SOLAK	Sağ S	0.1156
	Sol S	0.0437

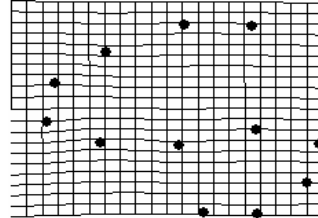
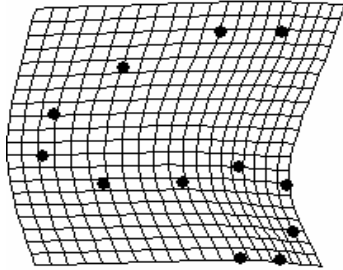
Çizelge 4.4.3. Kadın ve erkte Sağ S ile sol S ortalama şekilleri arası Rieman. uzaklığı

		Sağ S ile sol S ortalama şekilleri arası Rieman. uzaklığı
Sağlak	Kadın	0.0817
	Erkek	0.1273
Solak	Kadın	0.1134
	Erkek	0.1959

#### 4.4.3. Kısmi warp ayrışmaları



Şekil 4.4.10. Sağlak erkte sağ S den sol S ye dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



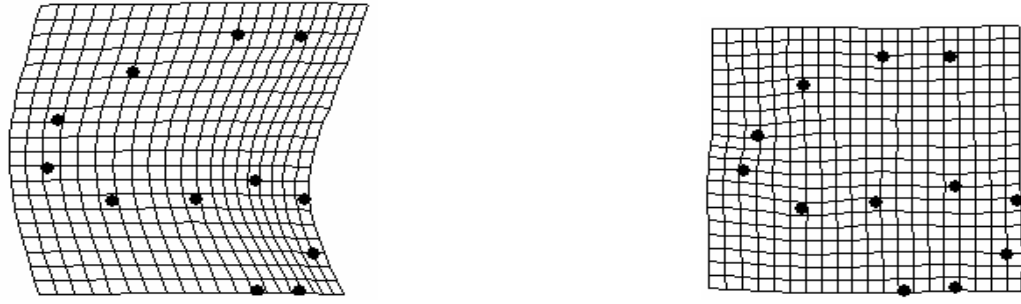
Şekil 4.4.11. Sağlak kadında sağ S den sol S ye dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.4.12. Solak erkekte sol S den sağ S ye dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.4.13. Solak kadında sol S den sağ S ye dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.4.14. Sağ S de sağlak kadından sağlak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. warpı



Şekil 4.4.15. Sağ S de solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



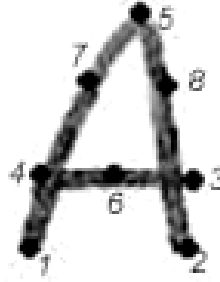
Şekil 4.4.16. Sol S de sağlak kadından sağlak erkeğe dönüşümün Sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.4.17. Sol S de solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı

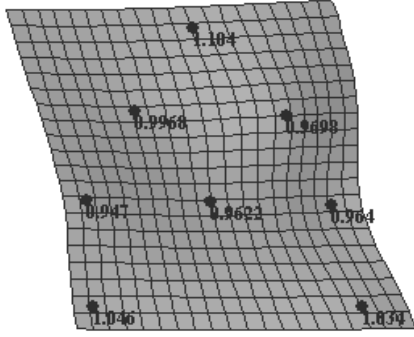
#### 4.5. A Harfi

A harfinin üzerinde 9 adet nirengi noktası belirlenmiştir. Şekil 4.5.1 de belirlenen nirengi noktaları gösterilmektedir. 4.5.1. bölümde; genişleme daralma katsayılarını gösteren 8 adet ince levha dönüşümü ızgarası verilmiştir ve en yüksek genişleme ve daralmanın gerçekleştiği nirengi noktaları belirtilmiştir. Dönüşümlerdeki şekil değişkenlikleri (Tanım 1.4.7) ve ortalama şekiller arasındaki riemann uzaklıkları (Tanım 1.6.6) 4.5.2. bölümde ele alınmıştır. 4.5.3. bölümde ise dönüşümlerin sırasıyla en geniş ölçekli değişimini açıklayan ve en yerel değişimi gösteren kısmi warp ayrışmaları bulunmaktadır.

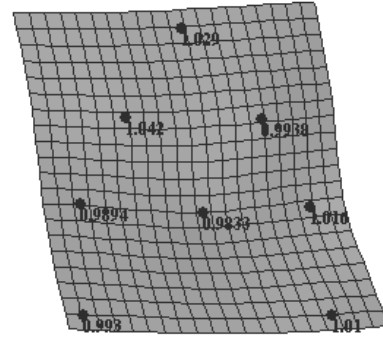


Şekil 4.5.1. A harfinin üzerinde belirlenen 8 adet nirengi noktası

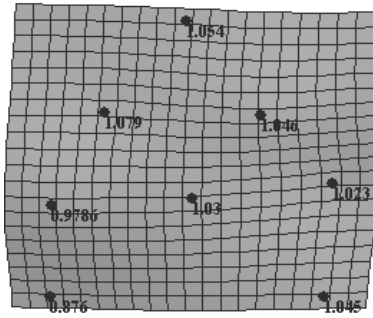
#### 4.5.1. İnce levha dönüşümü ızgaraları



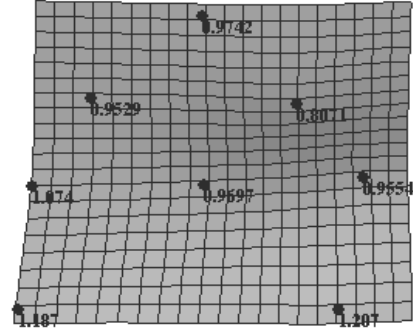
Şekil 4.5.2. Sağlak erkekde sağ A dan sol A ya ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 10 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 7 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



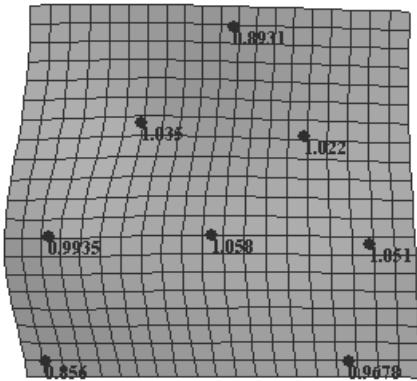
Şekil 4.5.3. Sağlak kadında sağ A dan sol A ya ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 10 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 7 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



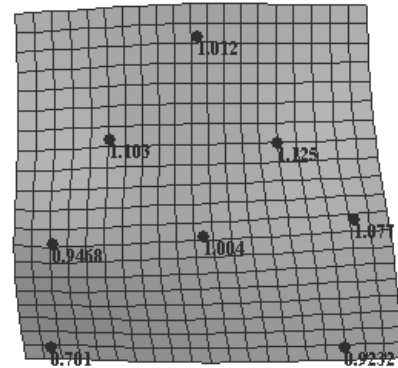
Şekil 4.5.4. Solak erkekde sol A dan sağ A ya ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 7 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 1 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



Şekil 4.5.5. Solak kadında sol A dan sağ A ya ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 10 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 2 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.

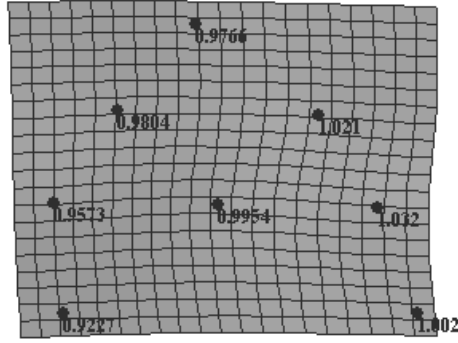


Şekil 4.5.6. Sağ B de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 1 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 5 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.

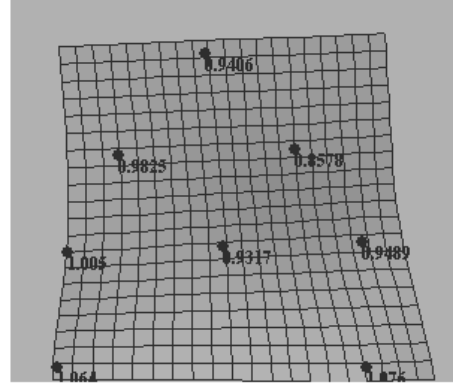


Şekil 4.5.7. Sağ B de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 6 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 9 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.





**Şekil 4.5.8.** Sol B de sağlak kadından sağlak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 8 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 2 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.



**Şekil 4.5.9.** Sol B de solak kadından solak erkeğe ince levha dönüşümü. En büyük genişleme 6 nolu nirengi noktasında en büyük daralma ise 2 nolu nirengi noktasında oluşmuştur.

#### 4.5.4. Şekil değişkenlikleri ve riemann uzaklıkları

**Çizelge 4.5.1.** Şekil değişkenlikleri

		Kadın	Erkek
Sağlak	Sağ A daki şekil değişkenliği	0.1835	0.2028
	Sol A daki şekil değişkenliği	0.2145	0.2261
Solak	Sağ A daki şekil değişkenliği	0.2102	0.2665
	Sol A daki şekil değişkenliği	0.2079	0.1979

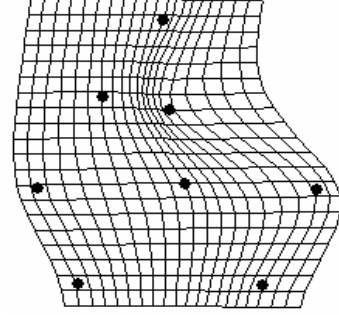
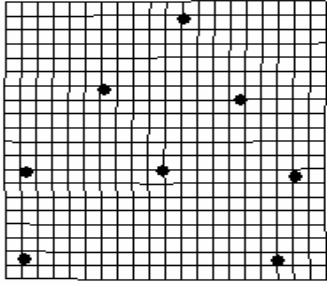
**Çizelge 4.5.2.** Sağ a ve sol a da kadın ile erkek ortalama şekilleri arasındaki riemann uzaklıkları

		Kadın ile erkek ortalama şekil arası riem. uzaklığı
Sağlak	Sağ A	0.0674
	Sol A	0.0403
Solak	Sağ A	0.0776
	Sol A	0.0621

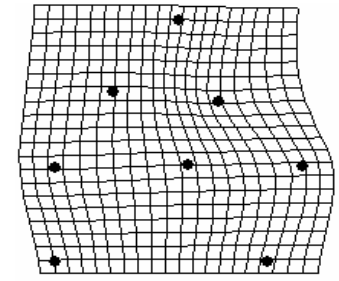
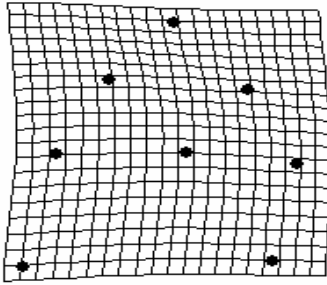
**Çizelge 4.5.3.** Kadın ve erkekte sağ A ile sol A ortalama şekilleri arasındaki riemann uzaklığı

		Sağ A ile sol A ortalama şekil arası riem. uzaklığı
Sağlak	Kadın	0.1100
	Erkek	0.1126
Solak	Kadın	0.0924
	Erkek	0.0712

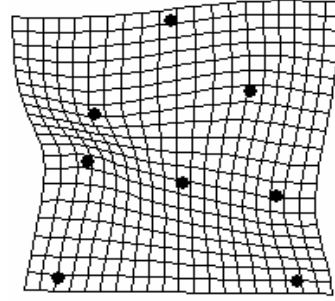
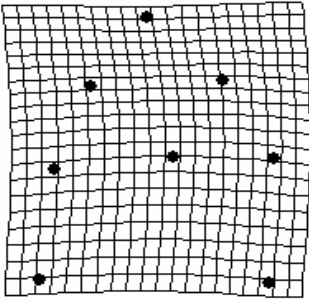
#### 4.5.5. Kısmi warp ayrışmaları



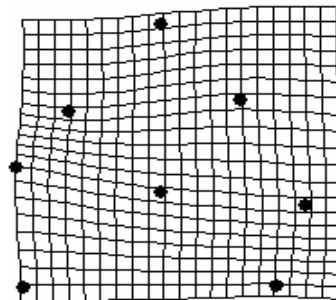
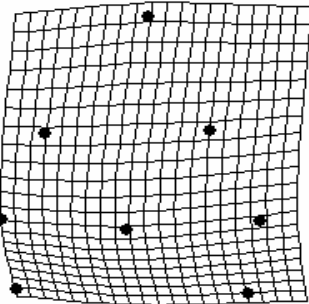
Şekil 4.5.10. Sağlak erkekte sağ A dan sol A ya dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



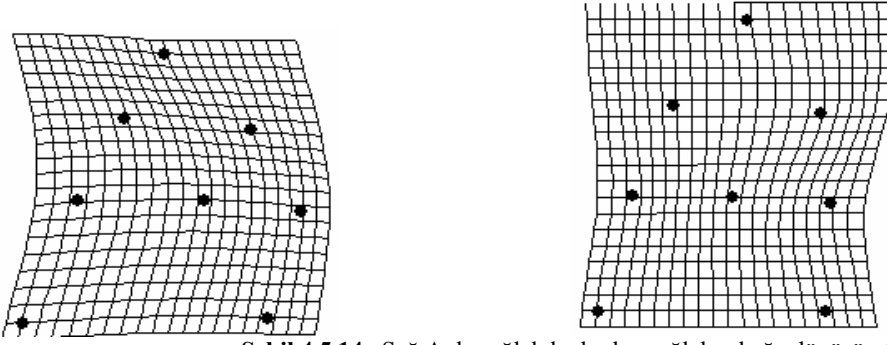
Şekil 4.5.11. Sağlak kadında sağ A dan sol A ya dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



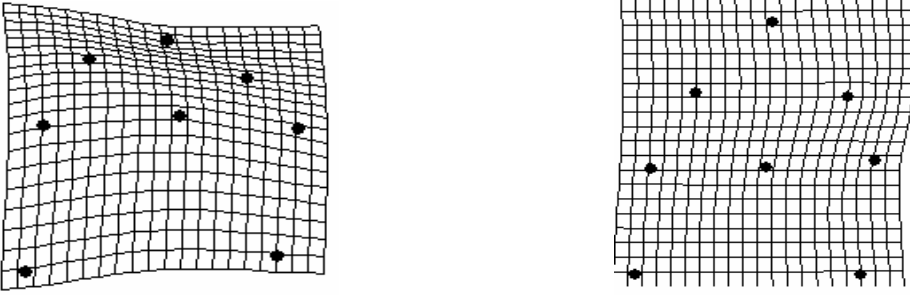
Şekil 4.5.12. Solak erkekte sol A dan sağ A ya dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



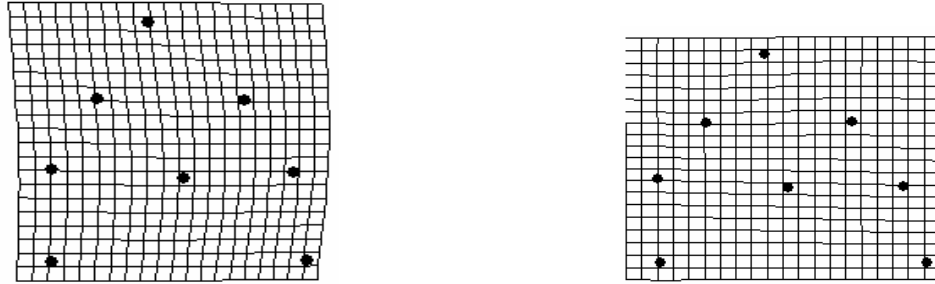
Şekil 4.5.13. Solak kadında sol A dan sağ A ya dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



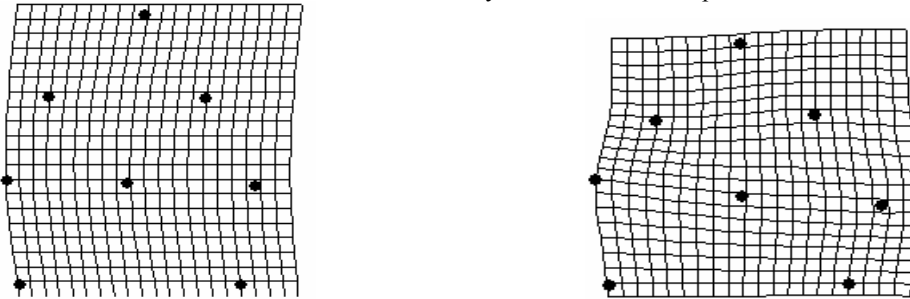
Şekil 4.5.14. Sağ A da sağlak kadından sağlak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. warpı



Şekil 4.5.15. Sağ A da solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.5.16. Sol A da sağlak kadından sağlak erkeğe dönüşümün Sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı



Şekil 4.5.17. Sol A da solak kadından solak erkeğe dönüşümün sırasıyla 1. ve 7. kısmi warpı

#### 4.6. Ana bileşenler analizi

Bu bölümde 2. bölümde anlatılan ana bileşenler analizinin uygulaması yer almaktadır. Harflerin üzerinde belirlenmiş olan nirengi noktalarının R programı aracılığı ile tanjant koordinatları elde edilmiş ve 2.4.2 de anlatıldığı gibi öz değerleri, ana bileşenleri ve ana bileşenlerin değişkenliği açıklama yüzdeleri hesaplanmıştır.

**Çizelge 4.6.1.** Sağ B harfinin ana bileşen analizi

Ana bileşen	Özdeğeri	Yüzdesi
1	0,0120145	25,891
2	0,00854209	18,408
3	0,00539654	11,629
4	0,00462066	9,9574
5	0,00361153	7,7828
6	0,00276553	5,9596
7	0,00206149	4,4425
8	0,0016784	3,6169
9	0,00126086	2,7171
10	0,000887253	1,912
11	0,000880475	1,8974
12	0,000666159	1,4356
13	0,000631511	1,3609
14	0,0004929	1,0622
15	0,000425978	0,91797
16	0,000273808	0,59005
17	0,000184774	0,39818
18	9,86756E-6	0,021264
19	2,76882E-15	5,9667E-12
20	-2,0184E-15	-4,3496E-12

**Çizelge 4.6.2.** Sol B harfinin ana bileşen analizi

Ana bileşen	Özdeğeri	Yüzdesi
1	0,0113201	28,719
2	0,00854537	21,679
3	0,00470008	11,924
4	0,00285368	7,2397
5	0,00260209	6,6014
6	0,00206286	5,2334
7	0,00162623	4,1257
8	0,00123676	3,1376
9	0,00106452	2,7007
10	0,0008044	2,0407
11	0,000699092	1,7736
12	0,000554096	1,4057
13	0,0004989	1,2657
14	0,000304048	0,77136
15	0,000237449	0,6024
16	0,000175941	0,44635
17	0,000119274	0,30259
18	1,23308E-5	0,031283
19	2,36908E-15	6,0103E-12
20	-5,46567E-16	-1,3866E-12

**Çizelge 4.6.3.** Sağ U harfinin Ana bileşen analizi

Ana bileşen	özdeğeri	yüzdesi
1	0,0130663	38,323
2	0,00746087	21,883
3	0,00354591	10,4
4	0,00272941	8,0054
5	0,00168276	4,9355
6	0,00119557	3,5066
7	0,00103905	3,0475
8	0,000838437	2,4591
9	0,00073776	2,1639
10	0,000427231	1,2531
11	0,000380656	1,1165
12	0,000314555	0,92259
13	0,000283482	0,83146
14	0,000221901	0,65084
15	0,000168179	0,49327
16	2,64459E-6	0,0077566
17	7,7038E-16	2,2595E-12
18	-6,5249E-16	-1,9138E-12

**Çizelge 4.6.4.** Sol U harfinin ana bileşen analizi

Ana bileşen	özdeğeri	yüzdesi
1	0,0102512	38,356
2	0,00551418	20,632
3	0,00400628	14,99
4	0,00142141	5,3184
5	0,00120758	4,5183
6	0,000965236	3,6116
7	0,000741384	2,774
8	0,00070675	2,6444
9	0,000515629	1,9293
10	0,00032594	1,2195
11	0,000295776	1,1067
12	0,000257041	0,96175
13	0,000209056	0,78221
14	0,000186136	0,69645
15	0,00011342	0,42438
16	9,25652E-6	0,034634
17	1,4114E-15	5,2809E-12
18	4,05421E-16	1,5169E-12

**Çizelge 4.6.5.** Sağ R harfinin ana bileşen analizi

Ana bileşen	özdeğeri	yüzdesi
1	0,0119039	24,311
2	0,00900304	18,387
3	0,00624113	12,746
4	0,00564096	11,52
5	0,00397724	8,1226
6	0,0024905	5,0863
7	0,00195989	4,0026
8	0,00166793	3,4064
9	0,00128455	2,6234
10	0,00112091	2,2892
11	0,000863763	1,764
12	0,00061882	1,2638
13	0,000582405	1,1894
14	0,00048837	0,99738
15	0,000380368	0,77682
16	0,000264623	0,54043
17	0,00023594	0,48185
18	0,000130574	0,26667
19	0,000105414	0,21528
20	4,71113E-6	0,0096214
21	1,04073E-14	2,1255E-11
22	-2,41861E-16	-4,9395E-13

**Çizelge 4.6.6.** Sol R harfinin ana bileşen analizi

Ana bileşen	özdeğeri	yüzdesi
1	0,0110936	24,429
2	0,00826471	18,2
3	0,00688831	15,169
4	0,00458446	10,096
5	0,00359662	7,9202
6	0,00221596	4,8798
7	0,0020522	4,5192
8	0,00134879	2,9702
9	0,00109997	2,4223
10	0,000997321	2,1962
11	0,000720052	1,5856
12	0,000616177	1,3569
13	0,000508682	1,1202
14	0,000424547	0,9349
15	0,000352584	0,77643
16	0,000247032	0,54399
17	0,00018682	0,4114
18	0,000122334	0,26939
19	7,67572E-5	0,16903
20	1,38859E-5	0,030578
21	1,42623E-15	3,1407E-12
22	-5,23355E-16	-1,1525E-12

**Çizelge 4.6.7.** Sağ S harfinin ana bileşen analizi

Ana bileşen	özdeğeri	yüzdesi
1	0,0283291	35,562
2	0,0150346	18,873
3	0,00897003	11,26
4	0,00662344	8,3146
5	0,00414348	5,2014
6	0,00368412	4,6248
7	0,00298478	3,7469
8	0,00254178	3,1908
9	0,00185635	2,3303
10	0,0011509	1,4447
11	0,000779359	0,97835
12	0,000668662	0,83939
13	0,000592691	0,74402
14	0,000522411	0,6558
15	0,000421742	0,52942
16	0,000365313	0,45859
17	0,000292593	0,3673
18	0,000235144	0,29518
19	0,00022093	0,27734
20	0,000116642	0,14642
21	0,000104467	0,13114
22	2,21102E-5	0,027756
23	7,91396E-15	9,9346E-12
24	-6,18759E-16	-7,7674E-13

**Çizelge 4.6.8.** Sol S harfinin ana bileşen analizi

Ana bileşen	özdeğeri	yüzdesi
1	0,0222771	32,973
2	0,013567	20,081
3	0,0099816	14,774
4	0,00495873	7,3395
5	0,00325261	4,8142
6	0,00280158	4,1467
7	0,00256476	3,7961
8	0,00192251	2,8455
9	0,00143859	2,1293
10	0,000902076	1,3352
11	0,00081209	1,202
12	0,000705842	1,0447
13	0,000569016	0,84221
14	0,000459041	0,67943
15	0,00031987	0,47344
16	0,000263489	0,38999
17	0,000214436	0,31739
18	0,000175729	0,2601
19	0,000158968	0,23529
20	0,000108675	0,16085
21	9,97127E-5	0,14759
22	8,97407E-6	0,013283
23	2,31484E-14	3,4262E-11
24	6,53983E-16	9,6797E-13

**Çizelge 4.6.9.** Sağ A harfinin ana bileşen analizi

Ana bileşen	özdeğeri	yüzdesi
1	0,0112499	22,104
2	0,00932239	18,317
3	0,00772062	15,17
4	0,00661934	13,006
5	0,00487683	9,5823
6	0,00418277	8,2185
7	0,00302457	5,9428
8	0,00116011	2,2794
9	0,000914137	1,7961
10	0,000658592	1,294
11	0,000622799	1,2237
12	0,000286662	0,56325
13	0,000252889	0,49689
14	2,82351E-6	0,0055478
15	1,48955E-15	2,9268E-12
16	4,59247E-16	9,0235E-13

**Çizelge 4.6.10.** Sol A harfinin ana bileşen analizi

Ana bileşen	özdeğeri	yüzdesi
1	0,0118272	25,028
2	0,0109388	23,148
3	0,00733293	15,517
4	0,00383761	8,1208
5	0,00358481	7,5859
6	0,00309222	6,5435
7	0,00266648	5,6426
8	0,00120821	2,5567
9	0,000964152	2,0403
10	0,00062781	1,3285
11	0,000516533	1,093
12	0,000420395	0,8896
13	0,000227209	0,4808
14	1,21639E-5	0,02574
15	1,25266E-15	2,6508E-12
16	-2,28213E-15	-4,8292E-12

## 5. SONUÇ

Bu tezin birinci ve ikinci bölümlerinde; şekil kavramı tanımlanmış, şekil analizinde nesnelere standartlaştırmak için kullanılan procrustes analizi ve şekil değişkenliğinin yorumlanmasını sağlayan ana bileşenler analizi anlatılmıştır. Tezin üçüncü bölümünde ise bir şekilden diğer şekle deformasyonun açıklandığı ve deformasyonun görsel ifadelerinin elde edildiği ince levha yöntemi ele alınmıştır. Bu modellemenin bir uygulaması olarak 80 adet denekten hem sağ el hem de sol el ile BURSA harflerinin yazılması istenmiş, elde edilen verilerin öncelikle procrustes analizi ile standartlaştırılması yapıp şekil koordinatları elde edilmiştir. Şekiller arasındaki uzaklıklar incelendiğinde kadın ile erkek arasındaki en büyük uzaklığın; B ve U harflerinde sağlamlarda sağ harfte, R ve S harflerinde sağlamlarda sol harfte, A harfinde solaklarda sağ harfte olduğu gözlemlenirken sağ ile sol harf arasındaki en büyük uzaklığın B ve A harflerinde sağlak erkekte, U ve R harflerinde sağlak kadında, S harfinde solak erkekte olduğu gözlemlenmiştir. Şekil değişkenliğinin genel bir ölçüsü olarak ise en büyük şekil değişkenliği B, S ve A harflerinde solak erkek sağ harfte, U harfinde sağlak kadın sağ harfte, R harfinde ise sağlak kadın sol harfte olduğu görülmüştür. Ana bileşenler analizi ile şekil değişkenliği yorumlandığında ilk üç ana bileşenin değişkenliği sırasıyla sağ ve sol harflerde olmak üzere B harfinde %56 ile %62, U harfinde %71 ile %74, R harfinde %55 ile %58, S harfinde %66 ile %68, A harfinde %55 ile %64 açıkladığı elde edilmiştir. Her bir harfe ince levha yöntemi uygulanarak 8 adet dönüşüm ızgaralar vasıtasıyla görselleştirilmiş ve her bir noktadaki genişleme ve daralma katsayıları belirtilmiştir. Harflerdeki genel ve yerel deformasyonlar kısmi warplar aracılığı ile yorumlanmıştır.

## KAYNAKLAR

- ADAMS, D.C., M.S. Rosenberg.1998. Partial warps, phylogeny and ontogeny. *Systematic Biology* 47(1) :168-173.
- AKÇA, M.,D., S., Doğan. 2002. Sayisal Goruntulerde Ana Bilesenler Donusumu. *Harita Dergisi*, Sayi 129,sf:1-15.
- ANDERSON, C.R. 1997. Object Recognition Using Statistical Shape Analysis . PhD thesis, University of Leeds.
- ASLAN, E., İ. Güney. 2007. Analyzing the S character with thin plate spline. *Journal of analysis and computation*. 2007.Vol:3 No:2
- ASLAN, E., İ. Güney, F.Gülsoy. 2006. Şekil Bozulmalarının ince levha dönüşümleri yardımıyla analizi. XIX.Ulusal Matematik Sempozyumu,Dumlupınar Üniversitesi,Kütahya.
- BACCETTI, T., L., Franchi, J.A., Mc Namara. 1999. Thin plate spline analysis of treatment effects of rapid maxillary expansion and face mask therapy in early class III malocclusions. *European journal of Orthodontics* 21:275-281.
- BOOKSTEIN, F.L. 1989. Principal Warps: Thin-Plate Splines and the Decomposition of Deformations. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, Vol II, No.6.
- BOOKSTEIN, F.L. 1991. *Morphometric tools for landmark data*. Cambridge University Press.
- COOTES, T.F., C.J.,Taylor, D.H., Cooper and J., Graham. 1992. Training models of shape from sets of examples. *British Machine Vision Conference* pp.9-18.
- COSTA, L. F., R. M., Cesar Jr. 2001. *Shape Analysis and Classification*, CRC Press, ISBN : 0-8493-3493-4.
- DRYDEN, I. L., K.V., Mardia. 1998. *Statistical Shape Analysis*, Wiley Press, ISBN: 0- 471-95816.
- HAMMER, O., D., Harper . 2006. *Paleontological Data Analysis*, Blackwell Publishing, ISBN: 1-4051-1544-5.
- GOODALL, C. 1991. Procrustes Methods in the Statistical Analysis of Shape. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*.Vol:43-2.285-339.
- GRAYBILL, F.A.1961. *An introduction To Linear Satatistical Models*. Mcgraw-Hill Book company.



- GÜNEY, İ., İ.Ercan, F. Gülsoy, G. Ocakoğlu, E. Aslan, S. Özdemir, Ö. Sevinç, İ. Kan. 2006. Thin plate spline ile corpus callasum şeklinin kadınların erkeklere göre deformasyonunun incelenmesi. IX. Biyoistatistik Kongresi, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi.
- HOTELLING, H. 1933. Analysis of Complex Statistical Variables into Principel Components. *Journal of Educational Psychology*. 24:417-441.
- JOLLIFFE I.T. 1986. *Principal component analysis*. Springer Verlag.
- KENDALL, D.G. 1984. Shape manifolds, procrustean metrics, and complex projective spaces. *Bull. London Math. Soc.* 16, 81-121.
- LELE, S.R., J.T. 2001. *An invariant approach to statistical analyses of shapes*. Chapman&Hall/CRC.
- ÖZDEMİR S.T., Ercan İ.,Sevinç Ö., Güney İ., Ocakoğlu G., Aslan E., Barut Ç.: Statistical shape analysis of differences in the shape of the Corpus Collasum between genders. 2007.*The Anatomical Record*. 290:825-830.
- RICHTSMEIER, J.T., J.M., Cheverud, S. Lele.1992. *Advances in anthropological morphometrics*. *Annu.Rev.Anthropol* 21:283-305.
- ROHLF, F. J. 1998. On applications of geometric morphometrics to studies of ontogeny and phylogeny, *Syst.Biol.* 47(1) : 147-158.
- SALAH, A., B.,Gökberk, L.,Akarun. 2006. Üç boyutlu yüz tanıma. GAP V. Mühendislik kongresi bildiriler kitabı.
- SIBSON R.1978. *Studies in the robustness of multidimensional scaling: Procrustes statistics*. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*.40:234-238.
- SIGNH, G.D., J.A. Mcnamara jr., S. Lozanoff. 1997. Thin plate spline analysis of the cranial base in subjects with Class III malocclusion. *European journal of orthodontics* 19:341-353.
- SMALL, C.R. 1996. *The Statistical Theory of shape*. Springer.
- STEGMANN, M.B., D.D., Gomez,. 2002. *A brief Introduction to Statistical Shape Analysis*. Informatics and Mathematical Modelling. Technical University of Denmark, DTU.
- SWİDERSKI, D.L.1993. Morphological evolution of the Scapula in tree squirrels, chipmunks, and ground squirrels: An analysis using thin plate splines. *Evolution* 47(6), 1854-1873.
- Thompson, D. W. 1917. *On growth and form*. The University Press. Cambridge

**ÖZGEÇMİŞ**

22.10.1982 yılında Bursa da doğan Elif ASLAN, ilk öğrenimini 1993 yılında Süleyman Çelebi İlköğretim okulunda ve orta öğrenimini 2000 yılında Bursa Ali Osman Sönmez Fen Lisesi'nde tamamladı. 2001 yılında Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı ve buradan 2005 yılında mezun oldu. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı ve akabinde aynı enstitüye araştırma görevlisi olarak atandı. Halen aynı görevi sürdürmektedir.

**TEŞEKKÜR**

Yüksek lisans eğitimim boyunca ilgisini, bilimsel desteğini üzerimden eksik etmeyen ve bu güzel konu ile tanışmamı sağlayan çok değerli hocam Doç.Dr.İbrahim GÜNEY'e, yapılan seminerlerle konuda gelişimimi sağlayan ve grup çalışmasının verimliliğini yaşatan Doç.Dr.İlker ERCAN'a, her türlü sorumu içtenlikle yanıtlayan Nottingham Üniversitesi'nden Prof.Dr.Ian L. DRYDEN'e, yurt içi yüksek lisans burs programı ile TÜBİTAK'a ve en önemlisi bugünlere gelmemi sağlayan, sevgisini ve sabrını hiçbir zaman benden esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.