$\mathbb{R}^4$ **DE ASİMPTOTİK VE EŞLENİK DOĞRULTUYA SAHİP YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU**

ÇİĞDEM TOPTAŞ

T. C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{R}^4$ DE ASİMPTOTİK VE EŞLENİK DOĞRULTUYA SAHİP YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Çiğdem TOPTAŞ

Prof. Dr. Kadri ARSLAN

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2017

TEZ ONAYI

Çiğdem TOPTAŞ tarafından hazırlanan "$\mathbb{R}^4$ de Asimtotik ve Eşlenik Doğrultuya Sahip Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Üye: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Doç. Dr. Günay ÖZTÜRK
Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../….

İmza

Çiğdem TOPTAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$\mathbb{R}^4$ DE ASİMPTOTİK VE EŞLENİK DOĞRULTUYA SAHİP YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Çiğdem TOPTAŞ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu çalışmada $\mathbb{R}^4$ deki asimptotik ve eşlenik doğrultulara sahip yüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyinin birinci ve ikinci temel formu, Gauss eğriliği temel tanımı ve kavramları verilmiştir.

Üçüncü bölümde $\mathbb{R}^4$ deki yüzeyler üzerindeki noktaların tiplerinin bir sınıflandırılması verilmiştir. Aslında 1. normal uzayın boyutu (nokta eş boyutu) ve ikinci temel form matrisinin diskriminantı bu noktaların tipini tayin etmektedir. Örnek olarak, Vranceanu yüzeyinin nokta eş boyutunun 2 olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu yüzeyin parabolik noktalara sahip olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

Dördüncü bölümde $\mathbb{R}^4$ deki lineer kongrüanslar ele alınmıştır. Bu bölümde Aminov yüzeyleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eşlenik yön, Asimptotik yön, Gauss eğriliği, Ortalama Eğrilik

2017, v+29 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A CHARACTERIZATION OF SURFACES IN $\mathbb{R}^4$ WHICH HAS ASYMPTOTIC AND CONJUGATE DIRECTIONS

Çiğdem TOPTAŞ

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

In this thesis, a characterization of surfaces in $\mathbb{R}^4$ which has asymptotic and conjugate directions is given.

This thesis consist of four chapters.

First chapter is introduction.

In the second chapter, some basic definitions and theorems of first and second fundamental forms and curvatures of the surfaces $M \subset \mathbb{R}^4$ are given. These basic concepts will be use in the other chapters.

In the third chapter, the types of points on the surfaces $M \subset \mathbb{R}^4$ are considered. The dimension of first normal space and discriminant of the second fundamental matrix characterizes the type of the points which are parabolic, hyperbolic or elliptic type. It has been shown that the dimension of first normal space of Vranceanu surface is 2. Furthermore the necessary and sufficient condition for Vranceanu surface to has parabolic points is given.

In the fourth chapter linear congruences of the surfaces are considered. Some of the original results related with the Aminov surfaces are obtained.

Key Words: Conjugate direction, Asymptotic direction, Gaussian curvature, Mean curvature **2017, v+29 pages.**

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, desteğini asla benden esirgemeyen, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla benim yanımda olduğunu her zaman hissettiren, engin bilgi ve fikirleriyle beni aydınlatan ve yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN' a yürekten teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini çok gördüğüm, kendisinden çok şey öğrendiğim sayın Doç. Dr. Betül BULCA' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Bu günlere gelmemde madden ve manen çok emeği geçen, bana verdikleri değer ve sevgiyle her problemi aşmama yardımcı olan aileme sonsuz teşekkürler.

Çiğdem TOPTAŞ
.. / .. / ….

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklit uzayı
$\lVert\ ,\rVert$	Norm
X	Regüler yama
M	Yüzey
I	1. temel form
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^{\perp}(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
∇	M üzerinde afin koneksiyon
$\tilde{\nabla}$	$\tilde{M}$ üzerinde afin koneksiyon
$\nabla^{\perp}$	Nornal koneksiyon
$<,>$	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
h	İkinci temel form
A_{ξ}	Şekil operatörü
T_pM	p noktasında teğet uzay
$T_p^{\perp}M$	p noktasında normal uzay
K	Gauss eğriliği
N_i	Normal vektörleri

1. GİRİŞ

Bu çalışmada $\mathbb{R}^4$ deki asimptotik ve eşlenik doğrultulara sahip yüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyinin birinci temel formu, ikinci temel formu ve Gauss eğriliği ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde 1. normal uzayın boyutu (nokta eş boyutu) ve ikinci temel form matrisinin diskriminantı yardımıyla $\mathbb{R}^4$ deki yüzeyler üzerindeki noktaların tiplerinin bir sınıflandırılması verilmiştir. Örnek olarak, $M \subset \mathbb{R}^4$ Vranceanu yüzeyinin her $p \in M$ noktası M nin bir parabolik noktası olması için gerek ve yeter şart M nin döngü eğrisinin düz bir doğru olmasıdır. Ayrıca $M \subset \mathbb{R}^4$ Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin her bir $p \in M$ noktasının M nin bir hiperbolik noktası olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

Dördüncü bölümde, M ve M^* 4-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^4$ deki yüzeyler olmak üzere $\psi : M \to M^*$ dönüşümü lokal difeomorfizminin bir lineer kongrüans olması ile ilgili sonuçlar verilmiştir. $\mathbb{R}^4$ deki Aminov yüzeyi ve genelleştirilmiş Aminov yüzeyinin regüler eşlenik yüzey ağına sahip olmadığı gösterilmiştir. Ayrıca, Aminov yüzeyinin bir asimptotik yüzey ağına sahip (P-yüzeyi) olabilmesi için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Özellikle, $\mathbb{R}^4$'deki yüzeylerin ikinci temel formu, Gauss ve Weingarten eşitlikleri, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

M yüzeyi $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ yaması ile verilsin. M nin $p \in X(u,v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, X_u ve X_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M nin ***birinci temel formu***

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.1}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$E = \langle X_u, X_u \rangle,$$
$$F = \langle X_u, X_v \rangle, \tag{2.2}$$
$$G = \langle X_v, X_v \rangle$$

1. temel form katsayıları olup $\langle , \rangle$ bir Öklit iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.2) yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2 \tag{2.3}$$

elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \neq 0$ ise $X(u,v)$ yaması ***regülerdir*** denir (Gray 1993).

Şu andan itibaren aksi söylenmedikçe $X(u,v)$ yaması regüler kabul edilecektir ve

$$EG - F^2 = W^2 \tag{2.4}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. $\mathbb{R}^4$ de Riemann koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\forall X_i, X_j \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin ***ikinci temel form dönüşümü***

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M) \ ; h(X_i, X_j) = \tilde{\nabla}_{X_i} X_j - \nabla_{X_i} X_j, \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.5) eşitliği ***Gauss denklemi*** olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.2.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu taktirde N_1, N_2, M nin normal vektörleri ve $\forall X_i \in \chi(M)$ olmak üzere M nin ***şekil operatörü dönüşümü***

$$A : \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) \to \chi(M);\ A_{N_\alpha} X_i = -\tilde{\nabla}_{X_i} N_\alpha + \nabla^{\perp}_{X_i} N_\alpha \quad , \quad 1 \leq i, \alpha \leq 2 \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_{N_\alpha} X_i$, N_α ya karşılık gelen şekil operatörü ve $\nabla^{\perp}$ ise $\chi^{\perp}(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. Literatürde (2.6) eşitliği ***Weingarten denklemi*** olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.3.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u,v)$ yamasının 2. mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} ve normal vektör alanları N_1, N_2 olmak üzere M nin ***ikinci temel form katsayıları***

$$\begin{aligned} L_{11}^{\alpha} &= \langle X_{uu}, N_\alpha \rangle, \\ L_{12}^{\alpha} &= \langle X_{uv}, N_\alpha \rangle, \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \\ L_{22}^{\alpha} &= \langle X_{vv}, N_\alpha \rangle \end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır (Aminov 2001), (Mello 2003).

Herhangi $X_i, X_j \in T_p(M)$ için

$$\langle A_{N_\alpha} X_i, X_j \rangle = \langle h(X_i, X_j), N_\alpha \rangle = L_{ij}^{\alpha} \ , \ 1 \leq i, j \leq 2, 1 \leq \alpha \leq 2, \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$h(X_i, X_j) = \sum_{\alpha=1}^{2} L_{ij}^{\alpha} N_\alpha, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \tag{2.9}$$

dir.

Tanım 2.4.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu durumda *M nin* ***Christoffel sembolleri*** Γ_{ij}^{k} $(1 \leq i, j, k \leq 2)$

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{11}^{2}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}$$
$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{12}^{2}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)} \tag{2.10}$$
$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma_{22}^{2}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\Gamma_{21}^{1}=\Gamma_{12}^{1}$ ve $\Gamma_{21}^{2}=\Gamma_{12}^{2}$ dir (Gray 1993).

Sonuç 2.5.: $M\subset\mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $F=0$ için M nin Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{E_u}{2E}=\frac{1}{E}\langle X_{uu},X_u\rangle \qquad \Gamma_{11}^{2}=\frac{-E_v}{2G}=-\frac{1}{G}\langle X_{uv},X_u\rangle$$
$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{E_v}{2E}=\frac{1}{E}\langle X_{uv},X_u\rangle \qquad \Gamma_{12}^{2}=\frac{G_u}{2G}=\frac{1}{G}\langle X_{uv},X_v\rangle \tag{2.11}$$
$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{-G_u}{2E}=-\frac{1}{E}\langle X_{uv},X_v\rangle \qquad \Gamma_{22}^{2}=\frac{G_v}{2G}=\frac{1}{G}\langle X_{vv},X_v\rangle$$

İspat: (Bulca 2012)

Önerme 2.6.: $M\subset\mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $\forall X_u,X_v\in\chi(M)$ ve $\{N_1,N_2\}\in\chi^{\perp}(M)$ için

$$X_{uu}=\tilde{\nabla}_{X_u}X_u=\Gamma_{11}^{1}X_u+\Gamma_{11}^{2}X_v+L_{11}^{1}N_1+L_{11}^{2}N_2$$
$$X_{uv}=\tilde{\nabla}_{X_u}X_v=\Gamma_{12}^{1}X_u+\Gamma_{12}^{2}X_v+L_{12}^{1}N_1+L_{12}^{2}N_2 \tag{2.12}$$
$$X_{vv}=\tilde{\nabla}_{X_v}X_v=\Gamma_{22}^{1}X_u+\Gamma_{22}^{2}X_v+L_{22}^{1}N_1+L_{22}^{2}N_2$$

dir (Gray 1993).

Böylece (2.12), (2.5) ve (2.6) denklemleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.7.: $M\subset\mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin.Bu takdirde

$$h(X_u,X_u)=L_{11}^{1}N_1+L_{11}^{2}N_2$$
$$h(X_u,X_v)=L_{12}^{1}N_1+L_{12}^{2}N_2 \tag{2.13}$$
$$h(X_v,X_v)=L_{22}^{1}N_1+L_{22}^{2}N_2$$

dir.

Sonuç 2.8.: $M\subset\mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
h(X_u, X_u) &= X_{uu} - \Gamma_{11}^1 X_u - \Gamma_{11}^2 X_v \\
h(X_u, X_v) &= X_{uv} - \Gamma_{12}^1 X_u - \Gamma_{12}^2 X_v \qquad (2.14) \\
h(X_v, X_v) &= X_{vv} - \Gamma_{22}^1 X_u - \Gamma_{22}^2 X_v
\end{aligned}
$$

dir.

Sonuç 2.9.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $F = 0$ ise bu takdirde

$$
\begin{aligned}
h(X_u, X_u) &= X_{uu} - \frac{1}{E}\langle X_{uu}, X_u \rangle X_u + \frac{1}{G}\langle X_{uv}, X_u \rangle X_v \\
h(X_u, X_v) &= X_{uv} - \frac{1}{E}\langle X_{uv}, X_u \rangle X_u - \frac{1}{G}\langle X_{uv}, X_v \rangle X_v \qquad (2.15) \\
h(X_v, X_v) &= X_{vv} + \frac{1}{E}\langle X_{uv}, X_v \rangle X_u - \frac{1}{G}\langle X_{vv}, X_v \rangle X_v
\end{aligned}
$$

İspat: (Bulca 2012).

Tanım 2.10.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu durumda M nin ***Gauss eğrilik fonksiyonu***

$$
K = \frac{1}{W^2} \sum_{\alpha=1}^{2} (L_{11}^{\alpha} L_{22}^{\alpha} - (L_{12}^{\alpha})^2) \qquad (2.16)
$$

dir (Aminov 1994), (Mello 2009).

Tanım 2.11.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v) : (u,v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde her $\{X_1, X_2\} \in \chi(M)$ ve $\{N_1, N_2\} \in \chi^{\perp}(M)$ ortonormal bazları için M nin ***ortalama eğrilik vektör alanı***

$$
\vec{H} = \sum_{\alpha=1}^{2} H_{\alpha} N_{\alpha} \qquad (2.17)
$$

dir. Burada

$$
H_{\alpha} = \frac{1}{2W^2} \sum_{i=1}^{2} \left(G L_{11}^{\alpha} - 2F L_{12}^{\alpha} + E L_{22}^{\alpha} \right) \qquad (2.18)
$$

M nin i.nci ortalama eğrilik fonksiyonudur. Bununla birlikte M nin ***ortalama eğrilik fonksiyonu*** $H = \left\| \vec{H} \right\|$ dir (Mello 2003).

Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 2.12.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin.Bu takdirde $T_p(M)$ nin bir $\{X_u, X_v\}$ bazı için M nin Gauss eğriliği

$$K=\frac{1}{W^2}\left(\langle h(X_u,X_u),h(X_v,X_v)\rangle-\langle h(X_u,X_v),h(X_u,X_v)\rangle\right) \tag{2.19}$$

dir (Bulca 2012).

Sonuç 2.13.: $M\subset\mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $\chi(M)$ nin bir $\{X_u,X_v\}$ bazı için M nin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H}=\frac{1}{2W^2}\left(Eh(X_v,X_v)-2Fh(X_u,X_v)+Gh(X_u,X_u)\right) \tag{2.20}$$

dir (Bulca 2012).

3. $\mathbb{R}^4$ UZAYINDAKİ YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ NOKTALARIN SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde 4-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^4$'deki yüzeyler üzerindeki noktaların bir sınıflandırılması verilmiştir. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda $\mathbb{R}^4$ deki eşlenik ve asimptotik doğrultular ile ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır. İkinci kısım da ise $\mathbb{R}^4$ deki bazı yüzeyler üzerindeki noktaların sınıflandırılması verilmiştir. Üçüncü kısımda ise $\mathbb{R}^4$ deki yüzeylerin eşlenik yüzey ağları ele alınmıştır.

3.1. Asimptotik ve Eşlenik Doğrultular

$M \subset \mathbb{R}^4$ regüler bir yüzey olsun. N_α normal vektörüne karşılık gelen ikinci temel form katsayıları L_{ij}^{α} olmak üzere M yüzeyinin p noktasındaki ***nokta-eşboyutu***

$$esboy_p = rank\begin{pmatrix} L_{11}^1 & L_{12}^1 & L_{22}^1 \\ L_{11}^2 & L_{12}^2 & L_{22}^2 \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

biçiminde tanımlanır. Bazı kaynaklarda p noktasındaki nokta-eşboyutu p noktasında ***1.normal uzayın boyutu*** olarak da ifade edilir.

Tanım 3.1.1.: $M \subset \mathbb{R}^4$, $\rho(u,v)$ pozisyon vektörü ile verilen bir regüler yüzey olsun.

Böylece, $p \in M$ noktasındaki teğet düzlemi T_pM deki yön vektörleri

$$X = X_1\rho_u + X_2\rho_v ; Y = Y_1\rho_u + Y_2\rho_v \tag{3.1.2}$$

olmak üzere

$$\sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}^1 X_i Y_j = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}^2 X_i Y_j = 0 \tag{3.1.3}$$

eşitlikleri sağlanırsa X ve Y ye ***eşlenik doğrultular*** adı verilir. Bununla birlikte, T_pM teğet düzleminde kendisine eşlenik olan X vektörüne ***asimptotik doğrultu*** denir (Gorkavy 2005).

Bu durumda, X teğet vektörünün bir asimptotik doğrultu olabilmesi için

$$\sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}^{1} X_i X_j = 0 \text{ ve } \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}^{2} X_i X_j = 0 \tag{3.1.4}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Açık olarak X ve Y vektörlerine eşlenik doğrultuların varlığı (3.1.3) denklem sisteminin çözülebilir olmasına bağlıdır. Bu nedenle, eşlenik doğrultulara sahip olma koşulu (3.1.3) denkleminin Y_1 ve Y_2 ye bağlı lineer denklem sistemi olarak;

$$\begin{pmatrix} L_{11}^{1} X_1 + L_{12}^{1} X_2 & L_{12}^{1} X_1 + L_{22}^{1} X_2 \\ L_{11}^{2} X_1 + L_{12}^{2} X_2 & L_{12}^{2} X_1 + L_{22}^{2} X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.5}$$

biçiminde ifade edilir. Böylece, (3.1.5) denklem sisteminin dejenere olmayan bir Y_1, Y_2 çözümü olabilmesi için

$$\det \begin{pmatrix} L_{11}^{1} X_1 + L_{12}^{1} X_2 & L_{12}^{1} X_1 + L_{22}^{1} X_2 \\ L_{11}^{2} X_1 + L_{12}^{2} X_2 & L_{12}^{2} X_1 + L_{22}^{2} X_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.1.6}$$

olmalıdır. Yani;

$$X_1^{2} \begin{vmatrix} L_{11}^{1} & L_{11}^{2} \\ L_{12}^{1} & L_{12}^{2} \end{vmatrix} + X_1 X_2 \begin{vmatrix} L_{11}^{1} & L_{11}^{2} \\ L_{22}^{1} & L_{22}^{2} \end{vmatrix} + X_2^{2} \begin{vmatrix} L_{12}^{1} & L_{12}^{2} \\ L_{22}^{1} & L_{22}^{2} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.1.7}$$

olmasıdır. Benzer şekilde, aynı denklem Y_1, Y_2 için de sağlanır. Böylece T_pM düzleminin $X = (X_1; X_2)$ ve $Y = (Y_1; Y_2)$ eşlenik doğrultuları (3.1.7) denkleminin çözümünden elde edilir. Açık olarak, (3.1.7) denkleminin çözülebilir olması L_{ij}^{α} fonksiyonlarına bağlıdır. Bu nedenle aşağıdaki durumlar söz konusudur;

<u>I. Durum</u>: $esboy_p = 2$ olsun.

Bu durumda, (3.1.7) denkleminin dejenere olmaması için gerek ve yeter koşul $esboy_p = 2$ olmasıdır. Bu nedenle, (3.1.7) denkleminin çözümleri

$$D = \left(L_{11}^{1} L_{22}^{2} - L_{22}^{1} L_{11}^{2}\right)^2 - 4\left(L_{11}^{1} L_{12}^{2} - L_{12}^{1} L_{11}^{2}\right)\left(L_{12}^{1} L_{22}^{2} - L_{22}^{1} L_{12}^{2}\right) \tag{3.1.8}$$

diskriminantının işaretine bağlıdır. Bu durumda, aşağıdaki alt durumlar söz konusudur;

i) $D > 0$ hali:

Bu halde $X = (X_1; X_2)$ ve $Y = (Y_1; Y_2)$ vektörleri (3.1.7) denkleminin farklı iki çözümüdür. Bu vektörler T_pM düzleminde eşlenik doğrultuları oluşturur. Bu durumdaki $p \in M$ noktasına M yüzeyinin bir ***hiperbolik noktası*** adı verilir. Tüm noktaları eliptik olan yüzeye **Cartan yüzeyi** denir.

ii) $D = 0$ hali:

Bu halde $X = (X_1; X_2)$ vektörü (3.1.7) denkleminin bir tek çözümüdür. Bu vektör T_pM düzleminde asimptotik doğrultu oluşturur. Bu durumdaki $p \in M$ noktasına M yüzeyinin bir ***parabolik noktası*** adı verilir. Tüm noktaları eliptik olan yüzeye **P-yüzeyi** denir.

iii) $D < 0$ hali:

Bu halde (3.1.7) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü yoktur. Bu nedenle T_pM düzlemi ne asimptotik ne de eşlenik doğrultuları sahiptir. Bu durumdaki $p \in M$ noktasına M yüzeyinin bir ***eliptik noktası*** adı verilir. Tüm noktaları eliptik olan yüzeye **E-yüzeyi** denir.

II. Durum: $esboy_p = 1$ olsun.

Bu halde (3.1.7) denklemi dejenere olacaktır. Bu nedenle T_pM düzleminde her bir X doğrultusu iyi-tanımlı bir Y eşlenik doğrultuya sahip olacaktır. Bu durumda 1. normal uzayın boyutu 1'e eşit olduğundan $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $\mathbb{R}^3$ de yatan bir yüzeydir.

III. Durum: $esboy_p = 0$ olsun.

Bu halde T_pM düzlemindeki tüm doğrultular eşli eşleniktir (pairwise conjugate).

3.2. Örnekler

Bu kısımda 4-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^4$ de bazı yüzeyler üzerindeki noktaların sınıflandırılması verilmiştir.

Örnek 3.2.1.: (***Vranceanu yüzeyi***)

4-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^4$ de

$$\rho(u,v) = \left(f(v)\cos cu, f(v)\sin cu, g(v)\cos du, g(v)\sin du \right) \tag{3.2.1}$$

pozisyon vektörü ile verilen yüzey ***genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi*** olarak bilinir (Moore 1919). Burada $f(v)$ ve $g(v)$ türevlenebilir fonksiyonlar ve $\alpha(v) = \left(f(v), g(v) \right)$ döngü eğrisi olup

$$c^2 f(v)^2 + d^2 g(v)^2 > 0 \ \ ve \ \left(f'(v) \right)^2 + \left(g'(v) \right)^2 > 0$$

regüler olma şartları sağlanır (Ganchev ve Milousheva 2008), (Arslan ve ark. 2012). Bununla birlikte, (3.2.1) parametrelendirilmesi ile verilen genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinde $c = d = 1$ ve

$$f(v) = r(v)\cos v, \ g(v) = r(v)\sin v \tag{3.2.2}$$

alındığında elde edilen rotasyon yüzeyi ***Vranceanu yüzeyi*** adını alır (Vranceanu 1977), (Arslan ve ark. 2011) .

Vranceanu yüzeyinin 1. ve 2. temel form katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} E &= \langle \rho_u(u,v), \rho_u(u,v) \rangle = (r(v))^2, \\ F &= \langle \rho_u(u,v), \rho_v(u,v) \rangle = 0, \\ G &= \langle \rho_v(u,v), \rho_v(u,v) \rangle = (r(v))^2 + (r'(v))^2 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned} L_{11}^1 &= \langle \rho_{uu}(u,v), N_1(u,v) \rangle = \frac{(r(v))^2}{\sqrt{(r(v))^2 + (r'(v))^2}}, \\ L_{22}^1 &= \langle \rho_{vv}(u,v), N_1(u,v) \rangle = \kappa_\alpha, \\ L_{22}^2 &= \langle \rho_{vv}(u,v), N_2(u,v) \rangle = -r(v), \\ L_{12}^1 &= L_{22}^2 = L_{11}^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

dir. Burada

$$\kappa_\alpha = \frac{-r(v)r''(v) + 2(r'(v))^2 + (r(v))^2}{\sqrt{(r(v))^2 + (r'(v))^2}} \tag{3.2.5}$$

$\alpha(v) = \left(r(v)\cos v, r(v)\sin v \right)$ döngü eğrisinin eğriliğidir (Arslan ve ark. 2012).

Böylece, $r(v) \neq 0$ olduğundan Vranceanu yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki nokta-eşboyutu (3.2.4) yardımıyla

$$esboy_p = rank\begin{pmatrix} L_{11}^1 & 0 & L_{22}^1 \\ 0 & L_{12}^2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \tag{3.2.6}$$

dir. Buradan, (3.2.4) deki eşitlikler (3.1.8) de yerine yazılırsa D diskriminantı

$$D = 4L_{11}^1 L_{22}^1 \left(L_{12}^2\right)^2 = \frac{4\kappa_\alpha r(v)^4}{\sqrt{(r(v))^2 + (r'(v))^2}} \tag{3.2.7}$$

biçimine dönüşür. Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme 3.2.2.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.2) parametrelendirilmesi ile verilen bir Vranceanu yüzeyi olsun. Bu takdirde, $p \in M$ noktası M nin bir parabolik noktası olması için gerek ve yeter koşul $\alpha(v)$ döngü eğrisinin düz bir doğru olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: $p \in M$ noktası M nin bir parabolik noktası ise $D = 0$ dır. Ayrıca, $r(v) \neq 0$ olduğunda (3.2.7) denkleminden $\kappa_\alpha = 0$ bulunur. Böylece, $\alpha(v)$ döngü eğrisi bir düz doğrudur.

$(\Leftarrow)$: Aşikardır. □

Sonuç 3.2.3.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.2) parametrelendirilmesi ile verilen bir Vranceanu yüzeyi olsun. Bu taktirde, $p \in M$ noktası M nin bir parabolik noktası olması için gerek ve yeter koşul

$$r(v) = \frac{1}{a\sin v - b\cos v};\ a,b \in R \tag{3.2.8}$$

olmasıdır.

İspat. $\kappa_\alpha = 0$ olduğundan (3.2.5) denkleminden

$$r(v)r''(v) + 2r'(v)^2 + r(v)^2 = 0 \tag{3.2.9}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Böylece (3.2.9) diferansiyel denkleminin çözümünden (3.2.8) elde edilir (bkz. Ek1). □

$\alpha(v)$ döngü eğrisi birim hızlı bir eğri ise aşağıdaki sonuç elde edilir;

Önerme 3.2.4.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.2) parametrelendirilmesi ile verilen bir Vranceanu yüzeyi olsun. Bu takdirde, $p \in M$ noktası M nin bir hiperbolik noktası ise aşağıdaki durumlardan biri söz konusudur;

i) $\alpha(v)$ döngü eğrisi bir birim çemberdir,

ii) $\alpha(v) = \pm\sin(c \pm v)(\cos v, \sin v)$ dir,

iii) $\alpha(v) = \pm\cos(c \pm v)(\cos v, \sin v)$ dir, veya

iv) $\alpha(v) = a\sin(v) \pm b\cos(v)(\cos v, \sin v)$, $a^2 + b^2 = 1$ dir.

İspat. $\alpha(v)$ döngü eğrisi birim hızlı bir eğri olduğundan $\|\alpha'(v)\| = \sqrt{r(v)^2 + r'(v)^2} = 1$ ve $\kappa_\alpha = \|\alpha''(v)\|$ dır. Böylece

$$r(v) + r'(v) = 1 \qquad (3.2.10)$$

diferansiyel denkleminin çözümünden

$r(v) = \pm 1$, $r(v) = \pm\sin(c \pm v)$, $r(v) = \pm\cos(c \pm v)$, veya $r(v) = a\sin(v) \pm b\cos(v)$, $a^2 + b^2 = 1$ elde edilir (Ek 2). □

Örnek 3.2.5.: 4-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^4$ de

$$\rho(u,v) = \left(f_1(u), f_2(u), f_3(u)\cos v, f_3(u)\sin v\right) \qquad (3.2.11)$$

pozisyon vektörü ile verilen yüzey ***Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyi*** olarak bilinir (Arslan ve ark. 2017). Burada $f_1(u)$, $f_2(u)$ ve $f_3(u) > 0$ türevlenebilir fonksiyonlardır. Bu yüzeyin 1. ve 2. temel form katsayıları sırasıyla

$$E = \langle \rho_u, \rho_u \rangle = 1,$$
$$F = \langle \rho_u, \rho_v \rangle = 0, \qquad (3.2.12)$$
$$G = \langle \rho_v, \rho_v \rangle = f_3^2(u)$$

$$
\begin{aligned}
L_{11}^1 &= \langle \rho_{uu}(u,v), N_1(u,v)\rangle = \kappa \ ; \kappa \neq 0, \\
L_{12}^1 &= \langle \rho_{uv}(u,v), N_1(u,v)\rangle = 0, \\
L_{22}^1 &= \langle \rho_{vv}(u,v), N_1(u,v)\rangle = -\frac{f_3 f_3''}{\kappa}, \\
L_{11}^2 &= \langle \rho_{uu}(u,v), N_2(u,v)\rangle = 0, \\
L_{12}^2 &= \langle \rho_{uv}(u,v), N_2(u,v)\rangle = 0, \\
L_{22}^2 &= \langle \rho_{vv}(u,v), N_2(u,v)\rangle = -\frac{f_3 \kappa_1}{\kappa}
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

dir. Burada

$$\kappa_1 = f_1' f_2'' - f_2' f_1'' \tag{3.2.14}$$

türevlenebilir fonksiyondur (Bulca ve ark. 2012). Böylece, (3.2.4) yardımıyla Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki nokta-eşboyutu

$$esboy_p = rank \begin{pmatrix} L_{11}^1 & 0 & L_{22}^1 \\ 0 & 0 & L_{22}^2 \end{pmatrix} = 2 \tag{3.2.15}$$

dir. Buradan, (3.2.13) deki eşitlikler (3.1.8) de yerine yazılırsa D diskriminantı $D = \left(L_{11}^1 L_{22}^2\right)^2$ biçimine dönüşür. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.2.6.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.11) parametrelendirilmesi ile verilen Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyinin olsun. Bu takdirde, $\kappa_1 \neq 0$ için her bir $p \in M$ noktası M nin bir hiperbolik noktasıdır.

Sonuç 3.2.7.: $\kappa_1 = 0$ için (3.2.11) parametrelendirilmesi ile verilen $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $\mathbb{R}^3$ de yatan bir yüzeydir. Bu durumdaki her bir $p \in M$ noktası M yüzeyinin bir parabolik noktasıdır.

3.3. Yüzeylerin Eşlenik Ağları

Tanım 3.3.1.: $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ yüzeyi $\rho(u,v)$ yaması ile verilen bir regüler yüzey ve $\{N_1, N_2, ..., N_n\}$ normal uzayının bir bazı olsun. Bu taktirde, $\rho(u,v)$nin ikinci mertebeden kısmi türevi $\rho_{uv}(u,v)$ olmak üzere

$$\langle \rho_{uv}(u,v), N_\alpha \rangle = 0 \tag{3.3.1}$$

şartı sağlanırsa (u,v) ye $\rho(u,v)$nin ***eşlenik koordinatları*** adı verilir. Bu eşlenik koordinat eğrileri ile oluşan yüzey ağına ***eşlenik yüzey ağı*** denir. Basitliğin hatırına eşlenik yüzey ağı (u,v) ile ifade edilir.

(3.3.1) denkleminden ρ_{uv} vektör değerli fonksiyonu ρ_u ve ρ_v teğet vektörleri tarafından gerilen T_pM teğet uzayda yatar; yani,

$$\rho_{uv} = \Gamma_{12}^1 \rho_u + \Gamma_{12}^2 \rho_v \tag{3.3.2}$$

olup buna ρ_{uv} nın ***Laplas eşitliği*** ve

$$h = \left(\Gamma_{12}^1\right)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2,\ k = \left(\Gamma_{12}^2\right)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 \tag{3.3.3}$$

fonksiyonlarına da ***Laplas invaryantları*** adı verilir.

Eğer, $\Gamma_{12}^1 \neq 0$ ise eşlenik (yüzey) ağı ***v-yön normallidir***, $\Gamma_{12}^2 \neq 0$ ise ***u-yön normallidir*** denir.

Varış uzayındaki (3.3.1) ile oluşturulacak bir eşlenik (yüzey) ağını aşağıdaki sonuç en iyi şekilde açıklamaktadır.

Önerme 3.3.2.: $(u,v) \in D$ koordinatları $M \subset \mathbb{R}^4$ regüler yüzeyinin eşlenik koordinatları olsun. Bu taktirde (u,v) koordinatları v-yön normallidir $\Leftrightarrow$ $\tilde{\rho}(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi vardır öyleki herhangi $(u,v) \in D$ için $\rho(u,v)$ ve $\tilde{\rho}(u,v)$ noktalarını birleştiren $\overline{\rho\tilde{\rho}}$ doğrusu $\rho_v(u,v)$ ve $\tilde{\rho}_u(u,v)$ vektörlerinin ikisine birden paraleldir.

İspat. $(\Leftarrow)$: $\tilde{\rho}(u,v)$ yamasıyla önermedeki şartları sağlasın. Bu taktirde $\overline{\rho\tilde{\rho}}$ doğrusunun $\tilde{\rho}(u,v) - \rho(u,v)$ pozisyon vektörü $\rho_v(u,v)$ ve $\tilde{\rho}_u(u,v)$ vektörlerine paraleldir. Yani,

$$\begin{aligned}\rho_v(u,v) &= a(\tilde{\rho}(u,v)-\rho(u,v)) \\ \tilde{\rho}_u(u,v) &= b(\tilde{\rho}(u,v)-\rho(u,v))\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

dir. Burada a, b türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece (3.3.4) deki vektör değerli fonksiyonların kısmi türevleri yardımıyla

$$\rho_{uv} = a_u(\tilde{\rho}-\rho)+a(\tilde{\rho}_u-\rho_u) \tag{3.3.5}$$

elde edilir. Böylece, (3.3.4)'ten

$$\frac{\rho_v}{a} = (\tilde{\rho}-\rho), \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho_v}{a}+\rho$$

dır. Bu ifadeler (3.3.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\rho_{uv} &= a_u\left(\left(\frac{\rho_v}{a}+\rho\right)-\rho\right)+a\left(\frac{b}{a}\rho_v-\rho_u\right) \\ &= -a\rho_u+\left(\frac{a_u}{a}+b\right)\rho_v\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

bulunur. Buradan (3.3.2) ve (3.3.6) yardımıyla

$$\Gamma_{12}^1 = -a$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{a_u}{a}+b$$

dir. Bu da bize (u,v) koordinatları eşlenik yüzey ağı oluşturduğunu gösterir.

$(\Rightarrow)$ Tersine; (u,v) koordinatları v-yön normalli eşlenik ağını oluştursun.Yani; $\Gamma_{12}^1 \neq 0$'dır. Bu taktirde $\rho(u,v)$ yaması (3.3.2) denklemini sağlar. Ayrıca

$$\tilde{\rho}(u,v) = \rho(u,v)-\frac{1}{\Gamma_{12}^1}\rho_v(u,v) \tag{3.3.7}$$

yamasını tanımlayalım. Buradan (3.3.7) nin kısmı türevi (3.3.2) ve (3.3.3) denklemleri yardımıyla

$$\tilde{\rho}_u = \frac{h}{\left(\Gamma_{12}^1\right)^2}\rho_v \tag{3.3.8}$$

biçimine dönüşür. Böylece (3.3.7) ve (3.3.8) denklemlerinden

$$\tilde{\rho}(u,v)-\rho(u,v) = -\frac{1}{\Gamma_{12}^1}\rho_v(u,v)$$

ve

$$\tilde{\rho}(u,v)-\rho(u,v) = -\frac{\left(\Gamma_{12}^1\right)^2}{h\Gamma_{12}^1}\tilde{\rho}_u(u,v)$$

elde edilir. Bu da bize $\overline{\rho\tilde{\rho}}$ doğrusunun $\rho_v(u,v)$ ve $\tilde{\rho}_u(u,v)$ vektörlerinin ikisine birden paralel olduğunu gösterir. □

Tanım 3.3.3.: $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ yüzeyinin normal eşlenik yüzey ağına sahip olması durumunda aşağıdaki iki dönüşüm tanımlanabilir;

$$\rho_1(u,v) = \rho(u,v) - \frac{1}{\Gamma_{12}^1}\rho_v \tag{3.3.9}$$

$$\rho_{-1}(u,v) = \rho(u,v) - \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\rho_u . \qquad (\Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2 \neq 0) \tag{3.3.10}$$

Bu dönüşümlere M nin ***Laplas dönüşümleri*** adı verilir.

Önerme 3.3.4.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi eşlenik u-yön normalli koordinatlara sahip olsun. Bu taktirde (3.3.10) Laplas dönüşümü ile verilen M_{-1} yüzeyinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$-\left(\left(\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\right)_v + \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\Gamma_{12}^1\right) = \frac{1}{\left(\Gamma_{12}^2\right)^2}\left(\left(\Gamma_{12}^2\right)_v - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1\right) \neq 0$$

olmasıdır.

İspat. İlk olarak, (3.3.10) un kısmi türevlerinden, M_{-1} in teğet vektörleri

$$\left(\rho_{-1}\right)_u = \left(1 - \left(\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\right)_u - \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\Gamma_{11}^1 - \frac{1}{\left(\Gamma_{12}^2\right)^2}\Gamma_{11}^2\right)\rho_u - \frac{1}{\left(\Gamma_{12}^2\right)^2}\sum_{\alpha=1}^{2} L_{11}^{\alpha} N_{\alpha}$$

$$\left(\rho_{-1}\right)_v = -\left(\left(\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\right)_v + \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\Gamma_{12}^1\right)\rho_u$$

dir. Dolayısıyla M_{-1} yüzeyinin regüler olması için gerek ve yeter şart

$$-\left(\left(\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\right)_v + \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\Gamma_{12}^1\right) \neq 0$$

olmasıdır. □

4. LİNEER KONGRÜANSLAR

Bu bölümde 4-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^4$ deki yüzeyleri üzerindeki lineer kongrüanslar ele alınmıştır.

4.1. Lineer Kongrüanslar

M ve M^* 4-boyutlu Öklit uzayı $\mathbb{R}^4$ deki yüzeyler olmak üzere $\psi : M \to M^*$ dönüşümü bir lokal difeomorfizm olsun. Bu taktirde her $p \in M$ için p noktasını $\psi(p) = p^* \in M^*$ noktasına bağlayan doğru M ve M^* yüzeylerinin her ikisine birden teğet ise ψ dönüşümü "***çift teğet özeliği***" ni sağlıyor denir. Bu şekilde çift teğet özeliğini sağlayan ψ lokal difeomorfizmine bir ***lineer kongrüans*** adı verilir.

M ve M^* regüler yüzeyleri sırasıyla $\rho(u,v)$ ve $\rho^*(u,v)$ konum vektörleri ile verilsin. Ayrıca $\psi : M \to M^*$ dönüşümü çift teğet özeliğini sağlayan bir lokal difeomorfizm olsun. O halde, $p \in M$ noktasını $\psi(p) = p^* \in M^*$ noktasına bağlayan teğet doğrunun doğrultu vektörü

$$X = X_1\rho_u + X_2\rho_v \tag{4.1.1}$$

dır. Bu durumda M^* yüzeyinin konum vektörü

$$\rho^*(u,v) = \rho(u,v) + \varphi(u,v)\left(X_1\rho_u + X_2\rho_v\right) \tag{4.1.2}$$

parametrizasyonu ile tanımlanır. Burada, $\varphi(u,v)$ türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece ψ dönüşümü çift teğet özeliğini sağladığında X vektörü M^* yüzeyine de teğet olacaktır. Böylece, X vektörü ρ_u^* ve ρ_v^* teğet vektörlerinin bir lineer birleşimi olacaktır. Buradan, (4.1.2) nin kısmi türevleri ve Gauss eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\rho_u^* &= \left\{1+\left(\varphi(u,v)X_1\right)_u+\varphi(u,v)X_1\Gamma_{11}^1+\varphi(u,v)X_2\Gamma_{12}^1\right\}\rho_u \\ &+\left\{\left(\varphi(u,v)X_2\right)_u+\varphi(u,v)X_1\Gamma_{11}^2+\varphi(u,v)X_2\Gamma_{12}^2\right\}\rho_v \\ &+\sum_{\alpha=1}^{2}(\varphi(u,v)X_1L_{11}^\alpha+\varphi(u,v)X_2L_{12}^\alpha)N_\alpha,\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

$$\begin{aligned}\rho_v^* &= \left\{\left(\varphi(u,v)X_1\right)_v+\varphi(u,v)X_1\Gamma_{12}^1+\varphi(u,v)X_2\Gamma_{22}^1\right\}\rho_u \\ &+\left\{1+\left(\varphi(u,v)X_2\right)_v+\varphi(u,v)X_1\Gamma_{12}^2+\varphi(u,v)X_2\Gamma_{22}^2\right\}\rho_v \\ &+\sum_{\alpha=1}^{2}(\varphi(u,v)X_1L_{12}^\alpha+\varphi(u,v)X_2L_{22}^\alpha)N_\alpha,\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}A_1 &= 1+\left(\varphi(u,v)X_1\right)_u+\varphi(u,v)X_1\Gamma_{11}^1+\varphi(u,v)X_2\Gamma_{12}^1 \\ A_2 &= \left(\varphi(u,v)X_1\right)_v+\varphi(u,v)X_1\Gamma_{12}^1+\varphi(u,v)X_2\Gamma_{22}^1 \\ B_1 &= \left(\varphi(u,v)X_2\right)_u+\varphi(u,v)X_1\Gamma_{11}^2+\varphi(u,v)X_2\Gamma_{12}^2 \\ B_2 &= 1+\left(\varphi(u,v)X_2\right)_v+\varphi(u,v)X_1\Gamma_{12}^2+\varphi(u,v)X_2\Gamma_{22}^2 \\ C_1 &= \varphi(u,v)X_1L_{11}^1+\varphi(u,v)X_2L_{12}^1 \\ C_2 &= \varphi(u,v)X_1L_{12}^1+\varphi(u,v)X_2L_{22}^1 \\ D_1 &= \varphi(u,v)X_1L_{11}^2+\varphi(u,v)X_2L_{12}^2 \\ D_2 &= \varphi(u,v)X_1L_{12}^2+\varphi(u,v)X_2L_{22}^2\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

fonksiyonları yardımıyla

$$\begin{aligned}\rho_u^* &= A_1\rho_u+B_1\rho_v+C_1N_1+D_1N_2 \\ \rho_v^* &= A_2\rho_u+B_2\rho_v+C_2N_1+D_2N_2\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

bulunur. Buradan, çift-teğet özelliği

$$rank=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ X_1 & X_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2 \tag{4.1.7}$$

eşitliğine denktir. Burada (4.1.7) deki matrisin birinci ve ikinci satırlarının lineer bağımsız olması M^* yüzeyinin regüler olmasını gerektirir. Bununla birlikte, (4.1.7) eşitliği bilinmeyen $\varphi(u,v)$ fonksiyonuna göre bir cebirsel denklem sistemi oluşturur. Açık olarak, aşikâr olmayan bir $\varphi(u,v)$ çözümü elde edildiğinde $\psi : M \to M^*$ lineer kongrüansı da aşikar değildir; yani $\varphi(u,v)\neq 0$ dır. Ayrıca, X_1, X_2 fonksiyonları aynı anda sıfıra eşit olmadıklarından (4.1.7) denkleminden $C_1D_2 - C_2D_1 = 0$ olmalıdır. Böylece, (4.1.7) denklemi aşikâr olmayan bir $\varphi(u,v)$ çözüme sahip olduğundan

$$X_1^2\begin{vmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 \\ L_{12}^1 & L_{12}^2 \end{vmatrix} + X_1X_2\begin{vmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 \\ L_{22}^1 & L_{22}^2 \end{vmatrix} + X_2^2\begin{vmatrix} L_{12}^1 & L_{12}^2 \\ L_{22}^1 & L_{22}^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.1.8)$$

eşitliği sağlanır.(Gorkavy 2005).

Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme 4.1.1.: $M\subset\mathbb{R}^4$ her $p\in M$ noktasında nokta-eşboyutu $esboy_p = 2$ olan regüler bir yüzey olsun. Bu takdirde $\psi : M \to M^*$ dönüşümü aşikâr olmayan bir lineer kongrüansı ise M nin her bir $p\in M$ noktası hiperbolik ya da paraboliktir. Bununla birlikte $p\in M$ noktasını $\psi(p) = p^* \in M^*$ noktasına bağlayan teğet doğrunun doğrultu vektörü $X \in T_pM$ aşağıdaki özelikleri sağlar;

i) her bir $p\in M$ hiperbolik noktasındaki X doğrultusu iki eşlenik yönlerden birine karşılık gelir.

ii) her bir $p\in M$ parabolik noktasında X doğrultusu bir asimptotik yönü temsil eder.

Herhangi bir $\psi : M \to M^*$ lineer kongrüansın analitik temsilcisini bulmak için $X = X_1\rho_u + X_2\rho_v$ doğrultusu $X=\rho_u$ yada $X=\rho_v$ olarak seçilebilir. Farz edelim ki $X=\rho_u$ olsun. Bu taktirde (4.1.7) çift-teğet özelliğinden

$$rank\begin{pmatrix} 1+\varphi_u+\varphi\Gamma_{11}^1 & \varphi\Gamma_{11}^2 & \varphi L_{11}^1 & \varphi L_{11}^2 \\ \varphi_v+\varphi\Gamma_{12}^1 & 1+\varphi\Gamma_{12}^2 & \varphi L_{12}^1 & \varphi L_{12}^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad (4.1.9)$$

dir. Ayrıca, $esboy_p = 2$ olduğundan L_{11}^1 ve L_{11}^2 fonksiyonları aynı anda sıfıra eşit olamaz. Bu nedenle (4.1.9) un sağlanması için gerek ve yeter koşul

$1+\varphi\Gamma_{12}^{2}=0$ olmasıdır. O halde, $\Gamma_{12}^{2}\neq 0$ olması durumunda $\varphi(u,v)=-\dfrac{1}{\Gamma_{12}^{2}}$ aşikar olmayan bir çözümdür. Böylece M^{*} yüzeyinin (4.1.2) konum vektörü

$$\rho^{*}(u,v)=\rho(u,v)-\frac{1}{\Gamma_{12}^{2}}\rho_{u} \tag{4.1.10}$$

biçimine dönüşür.

Benzer şekilde $X=\rho_{v}$ seçilirse $\varphi(u,v)=-\dfrac{1}{\Gamma_{12}^{1}}$ aşikar olmayan bir çözüm elde edilir. Böylece M^{*} yüzeyinin (4.1.2) yarıçap vektörü

$$\rho^{*}(u,v)=\rho(u,v)-\frac{1}{\Gamma_{12}^{1}}\rho_{v} \tag{4.1.11}$$

parametrizasyonuna sahip olur (Gorkavy 2005).

4.2. Monge Yaması ile Verilen Yüzeylerin Yüzey Ağları

$M\subset\mathbb{R}^{4}$ yüzeyi

$$\rho(u,v)=\left(u,v,f(u,v),g(u,v)\right)$$

(4.2.1)

koordinat yaması ile verilsin. Burada $f(u,v)$ ve $g(u,v)$ türevlenebilir fonksiyonlardır.

M nin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
E&=\langle\rho_{u}(u,v),\rho_{u}(u,v)\rangle=1+f_{u}^{2}+g_{u}^{2},\\
F&=\langle\rho_{u}(u,v),\rho_{v}(u,v)\rangle=f_{u}f_{v}+g_{u}g_{v},\\
G&=\langle\rho_{v}(u,v),\rho_{v}(u,v)\rangle=1+f_{v}^{2}+g_{v}^{2}.
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

dir. M nin normal uzayı

$$N_{1}(u,v)=\frac{1}{\sqrt{A}}\left(-f_{u},-f_{v},1,0\right)$$

$$N_{2}(u,v)=\frac{1}{W\sqrt{A}}\left(Bf_{u}-Ag_{u},Bf_{v}-Ag_{v},-B,A\right)$$

vektörleri tarafından gerilir. Burada

$$A = 1 + f_u^2 + f_v^2,$$
$$B = f_u g_u + f_v g_v$$

dir. Böylece M nin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
L_{11}^1 &= \langle \rho_{uu}(u,v), N_1(u,v) \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{W}}, \\
L_{12}^1 &= \langle \rho_{uv}(u,v), N_1(u,v) \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{W}} \\
L_{22}^1 &= \langle \rho_{vv}(u,v), N_1(u,v) \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{W}}, \\
L_{11}^2 &= \langle \rho_{uu}(u,v), N_2(u,v) \rangle = \frac{Ag_{uu} - Bf_{uu}}{W\sqrt{A}}, \\
L_{12}^2 &= \langle \rho_{uv}(u,v), N_2(u,v) \rangle = \frac{Ag_{uv} - Bf_{uv}}{W\sqrt{A}}, \\
L_{22}^2 &= \langle \rho_{vv}(u,v), N_2(u,v) \rangle = \frac{Ag_{vv} - Bf_{vv}}{W\sqrt{A}}
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

dir (Arslan ve ark. 2016). Böylece, M nin eşlenik yüzey ağına sahip olabilmesi için Tanım 3.3.1 den $L_{12}^1 = L_{12}^2 = 0$ olmalıdır. Buradan (4.2.3) eşitliklerinden $f_{uv} = g_{uv} = 0$ olmalıdır.

Tanım 4.2.1.: (4.2.1) koordinat yamasında

$$\begin{aligned}
f(u,v) &= r(u)\cos v \\
g(u,v) &= r(u)\sin v
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

alınırsa $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi ***Aminov yüzeyi*** olarak adlandırılır (Bulca ve Arslan 2013a). Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.2.2.: (4.2.4) koordinat yaması ile verilen Aminov yüzeyi eşlenik yüzey ağına sahip değildir.

İspat. (4.2.4) den

$$\begin{aligned}
f_{uv} &= -r'\sin v, \\
g_{uv} &= -r'\cos v,
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

bulunur. Buradan Aminov yüzeyinin 1. temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= 1 + f_u^2 + g_u^2 = 1 + (r')^2, \\
F &= f_u f_v + g_u g_v = 0, \\
G &= 1 + f_v^2 + g_v^2 = 1 + r^2.
\end{aligned}$$

ve Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{E_v}{2E} = 0,$$
$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{G_u}{2G} = \frac{rr'}{1+r^2}$$

dir. Böylece Aminov yüzeyinin eşlenik yüzey ağına sahip olması için $f_{uv} = g_{uv} = 0$ olmalıdır. O halde (4.2.5) eşitliklerinden $r'(u) = 0$ elde edilir. Böylece $\Gamma_{12}^{1} = 0, \Gamma_{12}^{2} = 0$ dir. Bu nedenle Aminov yüzeyi eşlenik yüzey ağına sahip değildir. □

Tanım 4.2.3.: (4.2.1) koordinat yamasında

$$\begin{aligned} &f(u,v) = r(u)\cos\alpha, \quad g(u,v) = r(u)\sin\alpha \\ &\alpha(u,v) = \varphi(u) + v \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

alınırsa $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi ***genelleştirilmiş Aminov yüzeyi*** olarak adlandırılır. Burada $\varphi(u)$ türevlenebilir fonksiyondur (Bulca ve Arslan 2013b).

Önerme 4.2.4.: (4.2.6) koordinat yamasıyla verilen genelleştirilmiş Aminov yüzeyi regüler eşlenik yüzey ağına sahip değildir.

İspat.(4.2.5) ve (4.2.6) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} f_u &= r'\cos\alpha - r\sin\alpha\varphi' \\ g_u &= r'\sin\alpha + r\cos\alpha\varphi' \\ f_{uv} &= -r'\sin\alpha - r\cos\alpha\varphi' \\ g_{uv} &= r'\cos\alpha - r\sin\alpha\varphi' \\ f_{uu} &= \left(r'' - r(\varphi')^2\right)\cos\alpha - \left(2r'\varphi' + r\varphi''\right)\sin\alpha \\ g_{uu} &= \left(r'' - r(\varphi')^2\right)\sin\alpha - \left(2r'\varphi' + r\varphi''\right)\cos\alpha \\ f_{vv} &= -r\cos\alpha \\ g_{vv} &= -r\sin\alpha \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

dir. Böylece M yüzeyinin eşlenik yüzey ağına sahip olabilmesi için $f_{uv} = g_{uv} = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. Buradan

$$r'\sin\alpha + \varphi' r\cos\alpha = 0$$
$$r'\cos\alpha - \varphi' r\sin\alpha = 0$$

olmalıdır. Bu denklem sistemin ortak çözümünden

$$\sin\alpha\left(r' + (\varphi')^2 r^2\right) = 0$$

dır. Buradan $r' = 0$ ve $\varphi' = 0$ olduğu görülür. Bu da bize M nin Aminov yüzeyi olduğunu gösterir. Bir önceki önermede Aminov yüzeyinin eşlenik yüzey ağına sahip olmadığı gösterilmiştir. □

Y. Teorem 4.2.5.: $M \subset \mathbb{R}^4$ lokal yüzeyi (4.2.1) Monge yaması ile verilsin. M nin $p = \rho(u,v)$ noktasında 2. temel form katsayıları L_{ij}^{α} olmak üzere

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} L_{11}^1 & L_{12}^1 \\ L_{11}^2 & L_{12}^2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_{11}^1 & L_{22}^1 \\ L_{11}^2 & L_{22}^2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} L_{12}^1 & L_{22}^1 \\ L_{12}^2 & L_{22}^2 \end{vmatrix} \tag{4.2.8}$$

tanımlansın. Bu taktirde M nin diskriminantı D

$$D = \Delta_2^2 - 4\Delta_1\Delta_3 \tag{4.2.9}$$

dır.

İspat. (3.1.8) ve (4.2.8) eşitliklerinden (4.2.9) elde edilir. □

Önerme 4.2.6.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.2.4) parametrizasyonu ile verilen bir Aminov yüzeyi olsun. M nin asimptotik yüzey ağına sahip (P-yüzeyi) olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$f(u,v) = r\cos v, \quad g(u,v) = r\sin v$$

ya da

$$f(u,v) = (au+b)\cos v, \quad g(u,v) = (au+b)\sin v$$

parametrizasyonuna sahip olmasıdır.

İspat. (4.2.3) ve (4.2.8) eşitliklerinden

$$\Delta_1 = rr' \quad , \quad \Delta_2 = 0 \quad , \quad \Delta_3 = r'r''$$

elde edilir. Böylece M nin asimptotik yüzey ağına sahip (P-yüzeyi) olabilmesi için (4.2.9) denkleminden

$$\Delta_2^2 - 4\Delta_1\Delta_3 = -r(r')^2 r'' = 0$$

dır. Buradan $r \neq 0$ olduğundan $r' = 0$ ya da $r'' = 0$ dır. Buradan istenilen sonuç elde edilir. □

Sonuç 4.2.7.: $r' = 0$ durumunda M yüzeyi düzdür.

Genelleştirilmiş Aminov yüzeyi için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.2.8.: $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.2.6) yaması ile verilen genelleştirilmiş Aminov yüzeyi olsun. Bu taktirde M nin asimptotik yüzey ağına sahip (P-yüzeyi) olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$r^3(\varphi'')^2 - 4(r')^2 r'' = 0 \tag{4.2.10}$$

olmasıdır.

İspat.

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} f_{uv} & f_{vv} \\ g_{uv} & g_{vv} \end{vmatrix} \\ &= rr'\sin^2 v + r^2\cos\alpha\sin\alpha\varphi' + rr'\cos^2 v - r^2\cos\alpha\sin\alpha\varphi' \\ &= rr',\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} f_{uu} & f_{vv} \\ g_{uu} & g_{vv} \end{vmatrix} \\ &= -r\left(r'' - r(\varphi')^2\right)\cos\alpha\sin\alpha + r(2r'\varphi' + r\varphi'')\sin^2\alpha \\ &\quad + r\left(r'' - r(\varphi')^2\right)\cos\alpha\sin\alpha + r(2r'\varphi' + r\varphi'')\cos^2\alpha \\ &= r(2r'\varphi' + r\varphi''),\end{aligned}$$

(4.2.12)

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \begin{vmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ g_{uu} & g_{uv} \end{vmatrix} \\ &= r'\left(r'' - r(\varphi')^2\right)\cos^2\alpha + r'(2r'\varphi' + r\varphi'')\cos\alpha\sin\alpha \\ &\quad - r\left(r'' - r(\varphi')^2\right)\varphi'\cos\alpha\sin\alpha + r\varphi'(2r'\varphi' + r\varphi'')\sin^2\alpha \\ &\quad + r'\left(r'' - r(\varphi')^2\right)\sin^2\alpha + r'(2r'\varphi' + r\varphi'')\cos\alpha\sin\alpha \\ &\quad + r\left(r'' - r(\varphi')^2\right)\varphi'\cos\alpha\sin\alpha + r\varphi'(2r'\varphi' + r\varphi'')\cos^2\alpha \\ &= r'\left(r'' - r(\varphi')^2\right) + r\varphi'(2r'\varphi' + r\varphi'')\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

dir. Böylece M asimptotik yüzey ağına sahip (P-yüzeyi) ise (4.2.9) denklemi sağlandığından (4.2.11)- (4.2.13) eşitlikleri yardımıyla

$$r(2r'\varphi' + r\varphi'')^2 - 4r'\left[r'\left(r'' - r(\varphi')^2\right) + r\varphi'(2r'\varphi' + r\varphi'')\right] = 0$$

elde edilir. Bu denklem sadeleştirildiğinde (4.2.10) elde edilir. □

Örnek 4.2.9.:

$$\begin{aligned} f(u,v) &= (au+b)\cos(cu+d+v), \\ g(u,v) &= (au+b)\sin(cu+d+v) \end{aligned}$$

fonksiyonları ile verilen genelleştirilmiş Aminov yüzeyi bir P-yüzeyidir.

KAYNAKLAR

Aminov, Yu. 2001. The Geometry of Submanifolds. *Gordon and Breach Science Publishers, Singapore.*

Aminov, Yu. 1994. Surfaces in E^4 with a Gaussian Curvature Coinciding with a Gaussian Torsion up to the Sign. *Math. Notes*, 56: 1211-1215.

Arslan, K., Bayram, B.K., Bulca, B., Öztürk, G. 2012. Generalized Rotation Surfaces in E^4. Results. Math. 61(3-4): 315-327.

Arslan, K., Bayram, B.K., Bulca, B., Kim, Y.H., Murathan, C., Öztürk, G. 2011. Vranceanu Surfaces in E^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 42(1): 41-51.

Arslan, K., Bulca, B., Kosova, D. 2017. On Generalized Rotational Surfaces in Euclidean Spaces, J. Korean Math. Soc. 54(3): 999-1013.

Bulca, B., 2012. E^4 deki Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu, *Doktora Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı, Bursa.

Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B.K. and Öztürk, G., 2012. Spherical product surfaces in E^4. *An. St. Univ. Ovidius Constanta.* 20: 41-54.

Bulca, B., Arslan K. 2013a. Surfaces Given with the Monge Patch in E^4, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 9: 435-447.

Bulca, B., Arslan K. 2013b. Generalized Aminov Surfaces in E^4 . *Submitted in Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.*

Chen, B.Y. 1973. Geometry of Submanifolds. Dekker, New York.

Ganchev, G., Milousheva, V. 2008. Minimal Surfaces in The Four Dimensional Euclidean Space. ArXiv:0806.3334v1.

Gorkavy, V.A. 2005. Bianchi Congruences of Two-Dimensional Surfaces in E^4, Sbornik: Mathematics 196:10 1473–1493.

Gray, A. 1993. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press, Inc.

Mello, L.F. 2003. Mean Directionally Curved Lines on Surfaces Immersed in R^4. *Publ. Math.*, 47: 415-440.

Mello, L.F. 2009. Orthogonal asymptotic lines on Surfaces Immersed in R^4. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 39(5): 1597-1612.

Vranceanu, G. 1977. Surfaces de Rotation dans E^4. *Rev. Roum. Math. Pures Appl. 22,* 6: 857-862.

EKLER

EK1: (3.2.9) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden

```
> ode1:=-r(v)*diff(r(v),v,v)+r(v)^2+2*diff(r(v),v)^2=0;
```

$$ode1 := -\left(\frac{d^2}{dv^2} r(v)\right) r(v) + 2\left(\frac{d}{dv} r(v)\right)^2 + r(v)^2 = 0$$

```
> dsolve (ode1);
```

$$r(v) = \frac{1}{a\sin(v) - b\cos(v)}$$

elde edilir.

EK2: (3.2.10) diferansiyel denkleminin Maple 12 programı yardımıyla çözümünden

> ode1:=diff(r(v),v)^2+r(v)^2=1;

$$ode1 := -\left(\frac{d^2}{dv^2} r(v)\right)^2 + r(v)^2 = 1$$

> dsolve(ode);

$$r(v) = \pm 1, r(v) = \pm \sin(-v + c)$$

elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Çiğdem TOPTAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 19/07/1991
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Bursa Anadolu Erkek Lisesi, 2005-2009
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2009-2015
Çalıştığı Kurum ve Yıl	:
İletişim (e–posta)	: ciggdemtoptas@gmail.com