T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MEROMORF HARMONİK FONKSİYONLAR

Hakan BOSTANCI

Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2008

T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MEROMORF HARMONİK FONKSİYONLAR

Hakan BOSTANCI

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 25/07/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK (Danışman)   Prof. Dr. Ahmet CENGİZ   Doç. Dr. Sibel YALÇIN

Prof. Dr. M. Naci ÖZER   Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verildi. Ayrıca bu bölümde birim diskte analitik olmak üzere $h(0) = g(0) = h'(0) - 1 = 0$ şeklinde normalize edilmiş, yön koruyan harmonik yalınkat $f = h + \overline{g}$ tipindeki fonksiyonların S_H sınıfı ve bunun alt sınıflarının temel özellikleri incelendi.

İkinci bölümde, birim diskin dışında meromorf harmonik fonksiyonların Σ_H sınıfı ile ilgili temel özellikler verildi ve Σ_H sınıfının $\Sigma_H(\lambda, \alpha)$ ve $\Sigma_H(a, b)$ ile adlandırılan iki özel alt sınıfı çalışıldı. Bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı tahminleri, distorsiyon ve alan teoremleri verildi.

Üçüncü bölümde, orijinde kutup noktası olan meromorf harmonik fonksiyonların $MHS^*_{SC}(\alpha)$ ve $MHS^*_S(n, \alpha)$ sınıfları ile $0 \le p < 1$ olmak üzere p noktasında kutba sahip olan meromorf harmonik fonksiyonların $S_H(p)$ sınıfı incelendi.

Anahtar Kelimeler : Meromorf harmonik, yıldızıl, konveks, simetrik

ABSTRACT

This work consists of three chapters. In the first chapter, basic definitions and theorems, which will be used in other chapters are given. Furthermore, the class S_H of sense preserving univalent harmonic functions $f = h + \overline{g}$ normalized by $h(0) = g(0) = h'(0) - 1 = 0$, where h and g are analytic on the unit disk, and fundamental properties of its subclasses are examined in this chapter.

In the second chapter, fundamental properties the class Σ_H of meromorphic harmonic functions in the exterior unit disc are given, and two special subclasses $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ and $\Sigma_H(a,b)$ of the class Σ_H are worked. Coefficient relations, area and distortion theorems are given for functions in these classes.

In the third chapter, subclasses $MHS^*_{SC}(\alpha)$ and $MHS^*_S(n,\alpha)$ of the class of meromorphic harmonic functions with a pole at the origin, and the calass $S_H(p)$ of the class of meromorphic harmonic functions with a pole at the p point for $0 \le p < 1$ are examined.

Key words : Meromorphic harmonic, starlike, convex, symmetric

İÇİNDEKİLER Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Δu	u nun Laplasiyeni
$f \circ g$	f ile g fonksiyonlarının bileşkesi
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{D}$	Birim disk
J_f	f fonksiyonunun Jakobiyeni
$\bar{f}$	f fonksiyonunun eşleniği
D_f	$(\lvert f_z \rvert + \lvert f_{\bar{z}} \rvert)/(\lvert f_z \rvert - \lvert f_{\bar{z}} \rvert)$
f_z	f fonksiyonunun z ye göre kısmi türevi
$f_{\bar{z}}$	f fonksiyonunun $\bar{z}$ ye göre kısmi türevi
$\partial\mathbb{D}$	$\mathbb{D}$ nin sınırı
$\mathrm{Re}\{f\}$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\arg\{f\}$	f fonksiyonunun argümenti
$\mathrm{Im}\{f\}$	f fonksiyonunun imajiner kısmı
$\widetilde{\mathbb{D}}$	Birim diskin dışı
$f(\mathbb{D})$	$\mathbb{D}$ nin f fonksiyonu altındaki resmi
$f * F$	F fonksiyonu ile f fonksiyonunun Hadamard çarpımı
$F \prec f$	F nin görüntü bölgesi f nin görüntü bölgesi tarafından kapsanmıştır (Sabordinasyon).
$\lvert f \rvert$	f fonksiyonunun modülü
d_f	f fonksiyonunun çapı (diameter)
$\overline{\mathbb{D}}$	$\mathbb{D}$ nin kapanışı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi

GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, meromorf harmonik fonksiyonlar sınıfının bazı alt sınıfları için katsayı bağıntıları, distorsiyon ve alan teoremleri elde edip ekstremal (uç) problemleri çözmektir. Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın birinci bölümde, ikinci ve üçüncü bölümlerde sıkça kullanacağımız bazı tanımlar ve sonuçlar verildi. Ayrıca bu bölümde h ve g fonksiyonları birim diskte analitik olmak üzere $h(0)=g(0)=h'(0)-1=0$ şeklinde normalize edilmiş, yön koruyan harmonik yalınkat $f=h+\overline{g}$ tipindeki fonksiyonların S_H sınıfı ve bunun alt sınıflarının temel özellikleri verildi.

İkinci bölümde, ilk olarak birim diskin dışında meromorf harmonik fonksiyonların Σ_H sınıfı ile ilgili temel özellikler verildi. Sonra $0 \le \lambda \le 1$ ve $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}+\overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}}$$

biçiminde ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}\left[(n+\alpha)\,|\,a_n\,|+(n-\alpha)\,|\,b_n\,|\right]\le 1$$

katsayı bağıntısını sağlayan meromorf harmonik fonksiyonların $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ sınıfı ve a ve b reel sayıları $-1,\,-1/2,\,-1/3,\ldots$ den farklı olmak üzere

$$t_a(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{1+(n+1)a}z^{-n} \quad \text{ve} \quad t_b(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{1+(n+1)b}z^{-n}$$

biçiminde tanımlı $t_a(z)$, $t_b(z)$ fonksiyonları ile tipik reel harmonik f fonksiyonunun Hadamard çarpımlarıyla elde edilen

$$F=H+\overline{G}=f*(t_a+\overline{t_a})*(t_b+\overline{t_b})$$

fonksiyonlarının $\Sigma_H(a,b)$ sınıfı incelendi. Bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı tahminleri, distorsiyon ve alan teoremleri verildi.

Çalışmamızın üçüncü bölümü iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda,

$$Tf(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) - \overline{f(-\bar{z})}\right] \text{ ve } D^n f(z) = D^n h(z) + (-1)^n \overline{D^n g(z)}$$

operatörleri için $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{D(\alpha D + (1+\alpha)D^{\circ})\, f(z)}{(\alpha D + (1+\alpha)D^{\circ})\ Tf(z)}\right\} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan orijinde kutup noktası olan meromorf harmonik fonksiyonların $MHS_{SC}^{*}(\alpha)$ sınıfı ve

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{2D^{n+1} f(z)}{D^n f(z) - D^n f(-z)}\right\} > \alpha$$

eşitsizliğini sağlayan meromorf harmonik fonksiyonların $MHS_S^{*}(n,\alpha)$ sınıfı incelendi.

İkinci kısımda ise $0 \leq p < 1$ ve $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere $\mathbb{D} \setminus \{p\}$ halka bölgesinde

$$h(z) = \frac{\alpha}{z-p} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$$

veya $\mathbb{D}_p = \{z \ :\ 0 < |z-p| < 1-p\}$ halka bölgesinde

$$h(z) = \frac{\alpha}{z-p} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-p)^n \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-p)^n$$

biçiminde seri açılımına sahip $h(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları için

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + A \log|z-p|$$

biçimindeki p noktasında kutba sahip ve $\lim_{z \to p} f(z) = \infty$ özelliğindeki meromorf harmonik fonksiyonların $S_H(p)$ sınıfı incelendi.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, reel ve sanal kısımları eşlenik olmak zorunda olmayan kompleks değerli harmonik yalınkat fonksiyonların bazı sınıfları hakkında genel bilgiler verildi. Bu fonksiyonlar analitik olmadığından, analitik yalınkat fonksiyonlarda olmayan bazı zorluklarla karşılaşmak kaçınılmaz olmaktadır. Konform dönüşümlerin bir genellemesi olan bu fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma James Clunie ve Terry Sheil-Small (1984) tarafından yapılmıştır. Konuyla ilgili makalelerinde, bu dönüşümlerin bazı sınıflarında tahminlerin kesin biçimlerini büyük oranda belirleyememiş olmalarına rağmen, daha genel sınıfta katsayı tahminlerini, distorsiyon teoremlerini ve örtme teoremlerinin benzerlerini elde ettiler. Adı geçen bu çalışmada bazı geometrik özellikteki harmonik dönüşümler için oldukça güzel tahminler ortaya çıkardılar. Yapılan bu ilk çalışma, bu alanda çalışan bir kısım matematikçilerin dikkatini çekti ve böylece harmonik yalınkat dönüşümler yeni ve aktif araştırma alanı kazanmış oldu.

1.1. Harmonik Fonksiyonlar

Bir D bölgesinde tanımlı reel değerli $u(x,y)$ veya $u(z)$ fonksiyonu D de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve Laplace denklemi denilen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna D de *reel harmonik fonksiyon* denir. Eğer, $u = u(x,y)$ ve $v = v(x,y)$ fonksiyonları *xy*-düzleminde bir D bölgesini uv-düzleminde bir B bölgesine bire bir ve harmonik olarak dönüştürüyorsa, $f(z) = u(z) + iv(z)$ fonksiyonuna D de *harmonik yalınkat fonksiyon* denir. Buna göre, kompleks değerli harmonik yalınkat bir fonksiyon, reel ve imajiner kısımları reel harmonik olan ve bir bölgeyi bire bir harmonik olarak dönüştüren bir fonksiyondur. Bu fonksiyonlar analitik olmak zorunda olmadığından analitik yalınkat fonksiyonlar için geçerli olan bazı özellikler harmonik yalınkat fonksiyonlar için geçerli değildir. Örneğin analitik fonksiyonlar bileşke altında korunmasına rağmen, harmonik fonksiyonlar korunmaz. Yani, f harmonik φ analitik fonksiyonu için $f \circ \varphi$ harmonik olmasına rağmen, $\varphi \circ f$ fonksiyonunun harmonik olması gerekmez. Analitik fonksiyonların sınıfı bir cebir oluşturmasına rağmen, harmonik fonksiyonların sınıfı oluşturmaz. Ayrıca bir harmonik yalınkat dönüşümün tersi de harmonik olmak zorunda değildir. Üstelik harmonik dönüşümlerin sınır davranışları *konform dönüşüm* denilen analitik yalınkat fonksiyonlardan çok daha karmaşıktır. Bununla birlikte, konform dönüşümlerin bilinen teorisi bir şekilde harmonik dönüşümlere taşınabilir (Duren 2004).

$\mathbb{C}$ kompleks düzleminde basit bağlantılı her hangi bir bölgede harmonik yalınkat dönüşümleri çalışmak yerine, birim diskte çalışmak genelliği bozmaz. Çünkü f, basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinden G bölgesi üzerine harmonik yalınkat bir dönüşüm ve φ de $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ açık birim diskini D bölgesi üzerine konform olarak resmeden bir dönüşümü ise $F = f \circ \varphi$, $\mathbb{D}$ diskini G üzerine resmeden harmonik yalınkat bir dönüşüm olur. Bu durumda esas dönüşüm ise $f = F \circ \varphi^{-1}$ biçimindedir.

En basit harmonik yalınkat dönüşüm örneği konform olması gerekmeyen $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$, $|\alpha| \neq |\beta|$ biçimindeki afin dönüşümledir. Bu dönüşümler kompleks düzlemden kendisi üzerine harmonik dönüşümler dönüşümlerdir.

Bir afin dönüşüm ile bir harmonik yalınkat dönüşümün bileşkesi olan $\alpha f + \gamma + \beta \bar{f}$ dönüşümü yine bir harmonik yalınkat dönüşümdür. Diğer bir örnek; $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ dönüşümüdür. Bu dönüşüm $\mathbb{D}$ birim diskinde yalınkat ve harmonik olup, $\mathbb{D}$ diskini $|w| = \frac{3}{2}$ çemberi ile çevrelenmiş bir eğrisel üçgen içine resmeder. Benzer şekilde $n \geq 2$ için $f(z) = z + \frac{1}{n}\bar{z}^n$ fonksiyonu da harmonik yalınkat olup, bu dönüşüm altında açık birim diskin görüntüsü, $|w| = (n+1)/n$ çemberi içinde kalan $n+1$ köşeli eğrisel bir çokgendir (Duren 2004).

$f = u + iv$ fonksiyonunun *Jakobiyeni*

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

biçiminde tanımlanır. Eğer f fonksiyonu analitik ise $J_f(z) = |f'(z)|^2$ dir. Analitik bir f fonksiyonunun bir z noktasında yerel olarak yalınkat olması için gerek ve yeter şart

$J_f(z) \neq 0$ olmasıdır (Clunie ve Sheil-Small 1984). Hans Lewy 1936 da bu sonucun harmonik yalınkat dönüşümler için de geçerli olduğunu gösterdi. Bir D bölgesinde harmonik yalınkat bir f fonksiyonu için $J_f(z) > 0$ ise f ye *yön koruyan*, $J_f(z) < 0$ ise f ye *yönü ters çeviren* denir. Eğer f yön koruyan ise $\bar{f}$ eşlenik fonksiyonu yönü ters çevirendir.

$f = u + iv$ fonksiyonunun Jakobiyeni $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$ biçiminde de ifade edilebilir. Sonuç olarak, $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$ olduğu yerlerde f fonksiyonu yerel olarak yalınkat ve yön koruyan, $|f_z(z)| < |f_{\bar{z}}(z)|$ olduğu yerlerde f yönü ters çeviren bir fonksiyondur. Eğer f fonksiyonu yön koruyan ise

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin geometrik bir yorumu; f fonksiyonu sonsuz küçük bir çemberi, büyük ve küçük eksenleri oranı

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olan sonsuz küçük bir elips üzerine resmeder biçimindedir. $D_f = D_f(z)$, $1 \leq D_f(z) < \infty$, oranına f fonksiyonunun z noktasındaki *genleşmesi* (dilatation) denir. K, $1 \leq K < \infty$ özelliğinde sabit bir sayı olmak üzere verilen bir bölgede $|D_f(z)| \leq K$ ise yön koruyan bir f homeomorfizmine *kuasikonform* veya *K-kuasikonform dönüşüm* denir. Buna göre 1-kuasikonform dönüşümler konform dönüşümlerdir. $\mu_f = f_{\bar{z}} / f_z$ oranına f fonksiyonunun *kompleks genleşmesi* denir. Eğer f yön koruyan bir dönüşüm ise $0 \leq |\mu_f| < 1$ olduğu açıktır. Ayrıca $|D_f(z)| \leq K$ olması için gerek ve yeter şart $|\mu_f(z)| \leq (K-1)/(K+1)$ olmasıdır. Yani yön koruyan bir homeomorfizmin kuasikonform olması için gerek ve yeter şart verilen bir bölgede onun kompleks genleşmesinin $|\mu_f(z)| \leq K < 1$ olmasıdır. Harmonik fonksiyonlar teorisinde $\nu_f = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ oranına *ikinci kompleks genleşme* denir ve μ_f kompleks genleşmesinden daha fazla kullanılır. $|\nu_f| = |\mu_f|$ olduğundan f fonksiyonunun kuasikonform olması için gerek ve yeter şart $|\nu_f| \leq K < 1$ olmasıdır.

Teorem 1.1.1. f bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yerel olarak yalınkat ve yön koruyan olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart $\omega = \nu_f = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonunun D de analitik olmasıdır.

İspat. f fonksiyonunun D de yerel olarak yalınkat ve $J_f(z) > 0$ olduğunu kabul edelim. $\overline{f_{\bar{z}}} = \omega f_z$ eşitliğinin $\bar{z}$ ye göre türevi ve $(\bar{f})_{\bar{z}} = \overline{f_z}$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}}\, \omega + f_z\, \omega_{\bar{z}} \tag{1.1}$$

elde edilir. f harmonik olduğundan $f_{z\bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta f = 0$ olup (1.1) bağıntısı gereği D de $\omega_{\bar{z}} = 0$ elde edilir. Bu da ω fonksiyonunun D de analitik olduğunu gösterir.

Tersine eğer ω, D de analitik ise $\omega_{\bar{z}} = 0$ olup (1.1) eşitliğinden $\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}}\, \omega$ olur. f fonksiyonu D de yerel olarak yalınkat ve $J_f(z) > 0$ olduğundan, her $z \in D$ için $|\omega(z)| < 1$ dir. O halde $\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}}\, \omega$ eşitliği ancak $f_{z\bar{z}} = 0$ olması durumunda sağlanır. Bu ise f fonksiyonunun D de harmonik olduğu gösterir. ■

Bu teorem özellikle yön koruyan f harmonik yalınkat dönüşümün ikinci kompleks genleşmesi olan $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonunun analitik ve modülünün 1 den daha küçük olduğunu gösterir. Bu yüzden $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonuna f fonksiyonunun *analitik genleşmesi* veya kısaca *genleşmesi* de denilir. Ayrıca, "$\omega \equiv 0$ olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun analitik olmasıdır" önermesinin doğruluğu açıktır.

1.2. Harmonik Yalınkat Fonksiyonların S_H Sınıfı

Bu kısımda yalınkat analitik fonksiyonların genellemesi olarak harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı ve bu sınıfa ait bazı önemli özelliklerden bahsedildi.

$\mathbb{D}$ birim diskinde analitik h ve g fonksiyonları için $\mathbb{D}$ de harmonik bir f fonksiyonu

$$f = h + \bar{g}, \qquad g(0) = 0$$

biçiminde yazılabilir ve buna f fonksiyonunun *standart gösterimi* denir (Clunie ve Sheil-Small 1984). Üstelik böyle bir yazılım tektir. Gerçekten; f harmonik fonksiyon iken f_z fonksiyonunun analitik olduğu göz önüne alınırsa, $\mathbb{D}$ diskinde analitik bir h fonksiyonu için $h' = f_z$ dir. $g = \bar{f} - \bar{h}$ denirse, h fonksiyonunun tanımı gereği $\mathbb{D}$ diskinde

$$g_{\bar{z}} = \overline{f_z} - \overline{h_z} = 0$$

olur. Bu ise g fonksiyonunun $\mathbb{D}$ de analitik olduğunu gösterir. Bu temsilin tekliği hem analitik hem de anti-analitik yani bir analitik fonksiyonun eşleniği, fonksiyonunun sabit olması gerçeğine bağlı olmak zorundadır. Eğer f reel değerli ise temsil $f = h + \bar{h} = \operatorname{Re}(2h)$ eşitliğine indirgenir ve teklik bir imajiner sabit farkıyla ortaya çıkar.

$\mathbb{D}$ diskinde h ve g analitik fonksiyonlarının seri açılımları

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

olmak üzere $\mathbb{D}$ de yön koruyan $f = h + \bar{g}$ harmonik yalınkat fonksiyonu için $|g'(z)| < |h'(z)|$ dir. Bu durum $h'(z) \neq 0$ olduğunu gösterir. Bu yüzden $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ almak genelliği bozmayacaktır. Böylece $\mathbb{D}$ diskinde

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \tag{1.2}$$

özelliğinde yön koruyan harmonik yalınkat dönüşümlerinin S_H sınıfı oluşturulmuş olur. Buna göre S_H sınıfının, analitik yalınkat fonksiyonların bilinen S sınıfını kapsadığı açıktır. $f = h + \bar{g} \in S_H$ fonksiyonunun analitik kısmı olan h fonksiyonu yerel olarak yalınkat olmasına rağmen $\mathbb{D}$ diskinde yalınkat olması gerekli değildir. S_H normal bir ailedir. Yani S_H sınıfındaki her fonksiyon dizisi $\mathbb{D}$ diskinde yerel olarak düzgün yakınsak bir alt diziye sahiptir. Diğer yandan, S_H sınıfına ait bir fonksiyon dizisinin limit fonksiyonu harmonik olmasına rağmen yalınkat olmak zorunda olmadığından S_H kompakt değildir. Gerçekten

$$f_n(z) = z + \frac{n}{n+1}\bar{z}$$

biçiminde tanımlanan $f_n \in S_H$ afin dönüşümlerin bir dizisini göz önüne alalım. $z = x + iy$ için $f_n(z) \to f(z) = 2x$ yakınsaması $\mathbb{D}$ diskinde düzgündür ancak limit fonksiyonu yalınkat değildir.

Her bir $f \in S_H$ fonksiyonu için $|b_1| < |a_1| = 1$ olduğundan

$$\varphi(w) = \frac{w - \overline{b_1}\overline{w}}{1 - |b_1|^2} \tag{1.3}$$

fonksiyonu yön koruyan bir afin dönüşümdür. Böylece

$$f_0 = \varphi \circ f = h_0 + \overline{g}_0$$

fonksiyonu

$$h_0(0) = g_0(0) = 0\,, \quad h'(0) = 1 \text{ ve } g'(0) = 0$$

özelliğinde yön koruyan harmonik yalınkat bir dönüşümdür. Bu yüzden $f_0 \in S_H$ fonksiyonu ek olarak $g'(0) = 0$ özelliğine de sahiptir. $g'(0) = 0$ özelliğindeki bütün $f \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı S_H^0 ile gösterilir.

Eğer $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ ise bu takdirde $g'(0) = 0$ ve $|g'(z)/h'(z)| < 1$ olup Schwarz lemması gereği $|g'(z)| \le |z||h'(z)|$ olduğu açıktır. Buna göre $f \in S_H^0$ ise $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ genleşmesi için $|\omega(z)| \le |z|$ olduğu görülür.

Eğer $f \in S_H$ fonksiyonunu $f_0 \in S_H^0$ fonksiyonuna taşıyan $f \to f_0 = \varphi \circ f$ dönüşümünün tersi alınırsa $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ elde edilir. Böylece $|b_1| < 1$ özelliğindeki belli bir $g'(0) = b_1$ sayısı için S_H sınıfı ile S_H^0 sınıfı arasında bire-bir bir bağıntı kurulmuş olur. Bu durum S_H sınıfında çözümü güç olan bir çok problemin S_H^0 sınıfında çözünü yapılarak tekrar S_H sınıfına taşımasını sağlar. Aşağıdaki Clunie ve Sheil-Small'a (1984) ait sonuçlar bununla ilgili olup ekstremal problemlerin çalışmasında önemli bir yere sahiptirler.

Teorem 1.2.1. S_H sınıfı normaldir. S_H^0 sınıfı normal ve kompakttır.

Teorem 1.2.2. $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için $|b_2| \le \frac{1}{2}$ dir.

Henüz S_H^0 sınıfı dolayısıyla da S_H sınıfı için genel katsayı bağıntıları ispat edilememiştir. Ancak Clunie ve Sheil-Small (1984), $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için katsayı tahminlerinin

$$|a_n| \le \frac{1}{6}(2n+1)(n+1), \quad |b_n| \le \frac{1}{6}(2n-1)(n-1) \quad \text{ve} \quad ||a_n| - |b_n|| \le n \tag{1.4}$$

olduğunu ifade etmişlerdir. Bu tahminlerine

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

olmak üzere *harmonik Koebe fonksiyonu* denilen $K = h + \overline{g}$ fonksiyonundan hareketle ulaşmışlardır. Gerçekten (1.4) bağıntısı için eşitlik harmonik Koebe fonksiyonu için sağlanır. $k(z) = z/(1-z)^2$ *analitik Koebe fonksiyonu* için

$$K = h + \overline{g} = h - g + 2\operatorname{Re}\{g\} = k + 2\operatorname{Re}\{g\}$$

veya

$$K(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right\} + i\ \operatorname{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\} \tag{1.5}$$

olarak yazılabileceğinden, $K \in S_H^0$ fonksiyonu birim diski reel eksenden $(-\infty, -\frac{1}{6}]$ çıkarılmış kompleks düzlem üzerine bire bir ve harmonik olarak resmeder. Koebe fonksiyonunun analitik yalınkat fonksiyonların S sınıfında oynadığı rolü Harmonik Koebe fonksiyonu S_H^0 sınıfında oynar.

$f_0 \in S_H^0$ ve $|b_1| < 1$ olmak üzere her bir $f = h + \overline{g} \in S_H$ fonksiyonu $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ biçiminde yazılabileceğinden (1.4) bağıntısı gereği $f \in S_H$ fonksiyonları için katsayı bağıntılarının

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1) \quad \text{ve} \quad |b_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1) \tag{1.6}$$

olduğu görülür. Ayrıca (1.4) ve (1.6) bağıntılarından S_H^0 sınıfında $|a_2| \le \frac{5}{2}$, S_H sınıfında ise $|a_2| < 3$ tahminleri elde edilebilir.

1.3. Konveks Harmonik Fonksiyonlar

Bu kısımda, birim diskin konveks bölgeler üzerine harmonik yalınkat dönüşümlerin genel özellikleri verildi. Özellikle, bu dönüşümlerin yapısal özelliği ile ilgili Rado-Kreser-Choquet teoremi ve katsayı eşitsizlikleri üzerinde duruldu.

Teorem 1.3.1 (Rado-Kneser-Choquet). $\Omega \subset \mathbb{C}$, Γ Jordon eğrisi tarafından sınırlanmış konveks bir bölge ve φ de $\partial\mathbb{D}$ den Γ üzerine bir homeomorfizm olsun. Bu takdirde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,\varphi(e^{it})\,dt, \tag{1.7}$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinden Ω üzerine bir konveks harmonik yalınkat dönüşümdür (Duren 2004).

Özel olarak, $\theta = \theta(t)$, $\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi$ özelliğinde $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan sürekli bir fonksiyon ise $\mathbb{D}$ diskinden yine kendi üzerine yön koruyan harmonik bir dönüşüm

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,e^{i\theta(t)}\,dt \tag{1.8}$$

biçimindedir. Tersine (1.8) tipindeki her bir fonksiyon $\overline{\mathbb{D}}$ kapanışında sürekli ve bir $f(e^{it}) = e^{i\theta(t)}$ sınır fonksiyonuna sahiptir.

Konveks konform dönüşümlerle ilgili bazı sonuçlar konveks harmonik yalınkat dönüşümlere genişletilebilir. (1.2) bağıntısını sağlayan birim diskin konveks bölgeler üzerine bütün yön koruyan $f = h + \overline{g}$ harmonik yalınkat dönüşümlerin sınıfı C_H ile gösterilir. Konveksliği ve yönü koruyan (1.3) afin dönüşümü ile $f = h + \overline{g} \in C_H$ fonksiyonunun bileşkesi olan $\varphi \circ f$ fonksiyonu da konveks olup bu fonksiyonların sınıfı C_H^0 ile gösterilir. Böylece, $f \in C_H$ ise $f_0 = (f - \overline{b_1}\,\overline{f})/(1-|b_1|^2) \in C_H^0$ ve $f_0 \in C_H^0$ ise $f = f_0 + \overline{b_1}\,\overline{f_0} \in C_H$ olur.

Clunie ve Sheil-Small'a (1984) ait olan aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 1.3.2. Her bir $f \in C_H^0$ fonksiyonunun $f(\mathbb{D})$ görüntü kümesi tüm $|w| < \frac{1}{2}$ diskini bulundurur.

İspat. Hipotez gereği $f(\mathbb{D})$ konvekstir. Eğer $w \notin f(\mathbb{D})$ ise uygun bir rotasyonla her $z \in \mathbb{D}$ için $\operatorname{Re}\{e^{i\theta}[f(z) - w]\} > 0$ yapılabilir. $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu için

$$\varphi(z) = e^{i\theta}[h(z) - w] + e^{-i\theta} g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

denirse $\operatorname{Re}\{\varphi(z)\} > 0$ olur. Buna göre $c_0 = -e^{i\theta} w$ ve $c_1 = e^{i\theta}$ dır. Böylece reel kısmı pozitif analitik fonksiyonlar için geçerli olan katsayı bağıntısından

$$1 = |e^{i\theta}| = |c_1| \leq 2|c_0| = 2|-e^{i\theta} w| = 2|w|$$

veya $|w| \geq \frac{1}{2}$ elde edilir. ■

Teorem 1.3.3. $f = h + \overline{g} \in C_H$ ise bu takdirde her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\{(e^{i\alpha} h'(z) + e^{-i\alpha} g'(z))(e^{i\beta} - e^{-i\beta} z^2)\} > 0$$

olacak şekilde α ve β açıları vardır.

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.3.4. $f \in C_H^0$ ise *f* fonksiyonunun katsayıları $n = 2,3,...$ için

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2}, \quad |b_n| \leq \frac{n-1}{2} \quad \text{ve} \quad ||a_n| - |b_n|| \leq 1$$

eşitsizliklerini sağlar. Eşitlik

$$L(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{z}{1-z}\right\} + i \operatorname{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\} \tag{1.9}$$

fonksiyonu için geçerlidir. Bu fonksiyon birim diski $\operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemin tamamı üzerine yön koruyan harmonik yalınkat olarak dönüştürür.

1.4. Yıldızıl Harmonik Fonksiyonlar

Birim diskin $f \in S_H$ fonksiyonu altında görüntüsü orijine göre yıldızıl bir bölge ise f fonksiyonuna *yıldızıl harmonik yalınkat fonksiyon* denir. Bunun anlamı $f(\mathbb{D})$

görüntü kümesinin tamamı orijinden görünmesidir. Bir başka değişle, $w_0 = f(z_0)$ noktası f fonksiyonunun görüntü kümesine ait ise orijin ile w_0 noktasını birleştiren doğru parçası da görüntü kümesine aittir. Orijine göre yıldızıl bir bölgenin sınır eğrisine *yıldızıl eğri* denir. Eğer f birim çemberi yıldızıl bir eğriye dönüştürüyor ise bu takdirde $\arg\{f(e^{i\theta})\}$ fonksiyonu θ fonksiyonunun azalmayan fonksiyonu yani

$$\frac{d}{d\theta}\arg\{f(e^{i\theta})\} \geq 0$$

dır. Bu kısımda, yıldızıl olan $f \in S_H^0$ dönüşümlerinin genel özellikleri ile S_H^0 sınıfı için tahmin edilen fakat henüz ispatlanamayan (1.4) bağıntılarının yıldızıl fonksiyonlar için ispatlandığı gösterildi.

Teorem 1.4.1. Her bir yıldızıl $f \in S_H^0$ fonksiyonu (1.4) eşitsizliklerini sağlar. Eşitlik $K(z)$ harmonik Koebe fonksiyonu için geçerlidir. Ayrıca her bir yıldızıl $f \in S_H$ fonksiyonu (1.6) bağıntısını sağlar (Clunie ve Sheil-Small 1984).

Sonuç 1.4.2. Her bir yıldızıl $f \in S_H^0$ fonksiyonu için

$$|f(z)| \leq \frac{1}{3}\frac{3r + r^3}{(1-r)^3}, \qquad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik harmonik Koebe fonksiyonu için geçerlidir.

Gerçekten, Teorem 1.4.1 gereği

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\, r^n \\
&\leq \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(n+1)r^n + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(n-1)r^n \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2+1)r^n = \frac{1}{3}\frac{3r + r^3}{(1-r)^3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem analitik yalınkat fonksiyonlar için geçerli olan Alexander teoreminin harmonik yalınkat fonksiyonlara kısmi bir genellemesidir.

Teorem 1.4.3. $f = h + \overline{g} \in S_H$ yıldızıl bir fonksiyon, H ve G

$$zH'(z) = h(z), \qquad zG'(z) = -g(z) \qquad \text{ve} \qquad H(0) = G(0) = 0$$

özelliğinde analitik fonksiyonlar ise bu takdirde $F = H + \overline{G}$, C_H sınıfına ait konveks bir fonksiyondur (Duren 2004).

Bu teoremin tersi genelde harmonik yalınkat fonksiyonlar için doğru değildir. Yani $F = H + \overline{G}$, C_H sınıfına ait konveks bir fonksiyon iken $h(z) = zH'(z)$ ve $g(z) = -zG'(z)$ olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu yıldızıl olmak zorunda değildir. Örneğin, (1.9) da verilen L fonksiyonu için $L = H + \overline{G}$ alındığında elde edilecek olan $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu yalınkat değildir.

1.5. Tipik Reel Fonksiyonlar

Birim diskte kompleks değerli harmonik bir f fonksiyonu için ancak ve ancak z reel iken $f(z)$ reel ise f fonksiyonuna *tipik reel fonksiyon* denir. $h(0) = g(0) = 0$, $|h'(0)| = 1$ ve $0 < r < 1$ için $f(r) > 0$ özelliklerindeki bütün yön koruyan tipik reel harmonik $f = h + \overline{g}$ fonksiyonların sınıfı T_H ile gösterilir. T_H sınıfının $g'(0) = 0$ özelliğindeki alt sınıfı T_H^0 ile gösterilir. Burada $h'(0) = 1$ olması gerekmediği gibi tipik reel harmonik bir fonksiyonun yalınkat olması da gerekli değildir. Ancak, her bir reel katsayılı $f \in S_H$ fonksiyonu tipik reeldir ve T_H sınıfına aittir. Gerçekten, $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun bütün a_n ve b_n katsayıları reel ise bu takdirde her $z \in \mathbb{D}$ için $\overline{f(z)} = \overline{h(z)} + g(z) = f(\overline{z})$ dir. Öte yandan, $f(z)$ fonksiyonunun reel olması için gerek ve yeter şart $\overline{f(z)} = f(z)$ olmasıdır. Böylece, $f(z)$ reel iken $f(z) = f(\overline{z})$ elde edilir. Eğer f yalınkat ise bu durum $z = \overline{z}$ için geçerli olabilir. Bunun anlamı $f(z)$ ancak z reel olduğunda reeldir. Böylece $f \in T_H$ dır.

Eğer $f = h + \overline{g} \in T_H$ ise bu takdirde $\operatorname{Im}\{z\} > 0$ için $\operatorname{Im}\{f(z)\} > 0$ ve $\operatorname{Im}\{z\} < 0$ için $\operatorname{Im}\{f(z)\} < 0$ dır.

$$\operatorname{Im}\{f(z)\} = \operatorname{Im}\{h(z) + \overline{g(z)}\} = \operatorname{Im}\{h(z) - g(z)\}$$

olduğundan, f fonksiyonunun tipik reel olması için gerek ve yeter şart $\varphi = h - g$ analitik fonksiyonunun tipik reel olması gerektiği açıktır. Bir analitik tipik reel fonksiyonu reel katsayılara sahip olduğundan her bir $f \in T_H$ fonksiyonu için $a_n - b_n$ ($n = 1,2,...$) reeldir. $\overline{a_1} - \overline{b_1}$ reel ve $|b_1| < |a_1| = 1$ olduğundan

$$f_0(z) = \frac{\overline{a_1} f(z) - \overline{b_1}\,\overline{f(z)}}{1 - |b_1|^2} = h_0(z) + \overline{g_0(z)} \tag{1.10}$$

yön koruyan tipik reel harmonik bir fonksiyondur ve $f_0(0) = 0$, $h_0'(0) = 1$ ve $g_0'(0) = 0$ özelliklerini sağlar. Böylece, $f_0 \in T_H^0$ dır. Tersine (1.10) bağıntısından

$$f(z) = a_1 f_0(z) + \overline{b_1}\,\overline{f_0(z)} \tag{1.11}$$

olarak verilebilir. Ayrıca, $f_0 \in T_H^0$ fonksiyonu için f fonksiyonu (1.10) biçiminde ve a_1 ve b_1, $|b_1| < |a_1| = 1$, $a_1 + \overline{b_1} > 0$ özelliğinde herhangi iki sabit ise $f \in T_H$ olduğu açıktır.

Aşağıdaki teorem tipik reel fonksiyonların katsayı bağıntıları ile ilgilidir.

Teorem 1.5.1. Eğer $f = h + \overline{g} \in T_H^0$ ise bu takdirde $a_1 = 1$ ve $n = 2,3,...$ için (1.4) ve $f \in T_H$ ise (1.6) eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik harmonik Koebe fonksiyonu için geçerlidir (Clunie ve Small 1984).

2. BİRİM DİSKİN DIŞINDA MEROMORF HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, öncelikle birim diskin dışında tanımlı yön koruyan meromorf harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfları ile ilgili yapılan çalışmalar, temel kavramlar başlığı altında verildi. Daha sonra birim diskin dışında meromorf harmonik yalınkat fonksiyonların iki sınıfı tanımlanarak ve bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri ile bazı sonuçlar elde edildi.

2.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda birim diskin dışı olan $\widetilde{\mathbb{D}} = \{z : |z| > 1\}$ bölgesinde tanımlı yön koruyan meromorf harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı ve alt sınıfları hakkında genel bilgiler verildi. Bu fonksiyon sınıfları ilk olarak Hengartner ve Schober (1987) tarafından çalışılmış olup, çeşitli yazarlar tarafından değişik alt sınıfları incelenmiştir. Aşağıda, gelecek bölümlerde kullanılacak olan bu çalışmalarda elde edilen bazı sonuçlar verildi. Önce Hengartner ve Schober'e (1987) ait birim diskin dışında yön koruyan meromorf harmonik yalınkat fonksiyonların yapısını verelim.

Teorem 2.1.1. f, $\widetilde{\mathbb{D}}$ da kompleks değerli yön koruyan harmonik yalınkat ve $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ özelliğinde bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, f fonksiyonu

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + A\log|z| \tag{2.1}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$h(z) = \alpha z + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \quad \text{ve} \quad g(z) = \beta z + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \tag{2.2}$$

$\widetilde{\mathbb{D}}$ da analitik, $A \in \mathbb{C}$ ve $0 \leq |\beta| < |\alpha|$ dır. Ayrıca $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ analitik ve $|\omega(z)| < 1$ şartını sağlar.

Bu teoremin bir sonucu olarak Silverman ve Jahangiri (1999), (1.11) tipindeki fonksiyonların aşağıdaki katsayı bağıntısını sağlamaları durumunda yalınkat olduklarını gösterdi.

Teorem 2.1.2. (2.1) ve (2.2) bağıntıları ile verilen f fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|a_n|+|b_n|\right) \leq |\alpha|-|\beta|-|A|$$

ise f $\widetilde{\mathbb{D}}$ da yön koruyan ve yalınkattır.

(2.1) ile verilen f fonksiyonuna

$$w \to \frac{\overline{\alpha} w - \overline{\beta w} - \overline{\alpha} a_0 + \overline{\beta a_0}}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}$$

afin dönüşümü uygulandığında $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ve $a_0 = 0$ elde edilerek, f fonksiyonu normalize edilmiş olur. Böylece,

$$h(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \tag{2.3}$$

olmak üzere $\widetilde{\mathbb{D}}$ da yön koruyan meromorf harmonik yalınkat fonksiyonların (2.1) tipindeki f fonksiyonunun Σ'_H sınıfı elde edilir. Ayrıca Σ'_H sınıfının logaritmik singüleritesiz alt sınıfı Σ_H ile gösterilir. Buna göre $\Sigma_H = \{f \in \Sigma'_H : A = 0\}$ dır. Analitik yalınkat fonksiyonlarda olduğu gibi S_H ile Σ'_H sınıfları arasında birebir bir geçiş yoktur. Son olarak, Σ'_H sınıfında sıfırı olmayan fonksiyonların

$$\Sigma_H^0 = \{f - c : f \in \Sigma'_H \quad \text{ve} \quad c \notin f(\widetilde{\mathbb{D}})\}$$

sınıfını tanımlayalım.

Schwarz lemması ve Teorem 2.1.1 kullanılarak Hengartner ve Schober (1987) aşağıdaki sonuçları elde ettiler.

Teorem 2.1.3. (a) Eğer $f \in \Sigma'_H$ ise bu takdirde $|A| \leq 2$ ve $|b_1| \leq 1$ dir.

(b) Eğer $f \in \Sigma_H$ ise bu takdirde $|b_1| \leq 1$ ve $|b_2| \leq \frac{1}{2}(1-|b_1|^2) \leq \frac{1}{2}$ dir.

İspat. $\widetilde{\mathbb{D}}$ da analitik ve $|w(z)| \leq 1$ özelliğindeki bir $w(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + \ldots$ fonksiyonu için $|w_0| \leq 1$ ve $|w_1| \leq 1 - |w_0|$ eşitsizlikleri sağlanır.

$f \in \Sigma'_H$ ise f fonksiyonu (2.3) ile birlikte (2.1) tipinde olup

$$a(z) = \frac{2zg'(z) + \overline{A}}{2zh'(z) + A} = \frac{1}{2}\overline{A} z^{-1} - \left(b_1 + \frac{1}{4}|A|^2\right) z^{-2}$$

$$-\left(2b_2-\frac{1}{2}\overline{A}a_1-\frac{1}{2}Ab_1-\frac{1}{8}A|A|^2\right)z^{-3}+\ldots$$

fonksiyonu $\widetilde{\mathbb{D}}$ da analitik ve f yön koruyan olduğundan $|a(z)|<1$ dir. Maksimum prensibi gereği $w(z)=z\,a(z)$ fonksiyonu için $|w(z)|\leq 1$ dir. Böylece $|\frac{1}{2}\overline{A}|\leq 1$ ve $|b_1+\frac{1}{4}|A|^2|\leq 1-|\frac{1}{2}\overline{A}|^2$ elde edilir. Bu durum $|b_1|\leq 1$ olmasını gerektirir.

Eğer $f\in\sum_H$ ise bu takdirde $A=0$, $a(z)=-b_1z^{-2}-2b_2z^{-3}+\cdots$ ve $w(z)=z^2\,a(z)$ olup $|w(z)|\leq 1$ dır. Böylece $|b_1|\leq 1$ ve $|b_2|\leq\frac{1}{2}(1-|b_1|^2)\leq\frac{1}{2}$ elde edilir.

Her iki eşitsizlik kesin olup eşitlik $f(z)=z-1/\overline{z}+2\log|z|$ ve $f(z)=z+1/(2\overline{z}^2)$ fonksiyonları için geçerlidir. ■

Aşağıdaki sonuç distorsiyon teoremi ile ilgilidir.

Teorem 2.1.4. Eğer $f-c\in\Sigma_H^0$ ise bu takdirde her $z\in\widetilde{\mathbb{D}}$ için $|f(z)|\geq|z|/[4(1+|z|)^2]$ dir. Ayrıca $f(\widetilde{\mathbb{D}})$, $\{w:|w|>16\}$ kümesini kapsar ve $|c|<16$ dır(Hengartner ve Schober 1987).

Teoremde c sabiti için elde edilen sınır aşağıdaki sonucun ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

Sonuç 2.1.5. Eğer $f\in\Sigma_H$ ise bu takdirde $f(\widetilde{\mathbb{D}})\supset\{w:|w|>16\}$ dır.

Gelecek teorem bahsi geçen sınıfların kompaktlığı ile ilgilidir.

Teorem 2.1.6. Σ_H^0, $\sum_H'$ ve $\sum_H$ sınıfları lokal düzgün yakınsaklık topolojisine göre kompaktırlar.

Tanım 2.1.7. Düzlemde konveks bir bölgenin sınır noktalarından çizilen teğetlerden karşılıklı olarak paralel olanlar arasındaki uzaklığın en büyüğüne bölgenin *çapı* (*diameter*) denir.

Aşağıdaki teorem $\mathbb{C}\setminus f(\widetilde{\mathbb{D}})$ atlanmış kümesinin alt sınırının b_1 katsayısına bağlı olarak elde edilebileceğini gösterir.

Teorem 2.1.8. $f \in \Sigma'_H$ olsun. $\mathbb{C}\setminus f(\widetilde{\mathbb{D}})$ kümesinin d_f çapı için

$$d_f \geq 2\,|1+b_1|$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik $|b_1|<1$ ve $|A| \leq (1-|b_1|^2)/|1+b_1|$, $|b_1|=1$ ve $A=0$ veya $b_1=-1$ ve $|A|\leq 2$ olduğunda

$$f(z) = z + b_1/\bar{z} + A\log|z|$$

fonksiyonu için geçerlidir.

Aşağıdaki teorem klasik alan teoremiyle ilgilidir.

Teorem 2.1.9. (2.1) ile verilen $f \in \Sigma'_H$ fonksiyonu (2.3) seri açılımına sahip olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(|a_k|^2 - |b_k|^2) \leq 1 + 2\operatorname{Re} b_1$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak $\mathbb{C}\setminus f(\widetilde{\mathbb{D}})$ alanının sıfır olması durumunda geçerlidir.

Σ_H sınıfına ait ve tipik reel olan fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıf Σ_{TH} ve orijine göre yıldızıl olan fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıf Σ_H^* ile gösterilir. Ayrıca, Σ_H^* sınıfına ait olan ve

$$h(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \quad \text{ve} \quad g(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}\,; \quad a_k \geq 0\,,\ b_k \geq 0$$

olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonların oluşturduğu alt sınıf Σ_{RH}^* ile gösterilir. Σ_H^* ve Σ_{RH}^* sınıfları ile bunların alt sınıfları J. M. Jahangiri ve H. Silverman (2002) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada özellikle, $f \in \Sigma_{RH}^*$ olması için gerek ve yeter şartın $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \leq 1$ olduğu sonucu bulunmuştur. Ayrıca benzer sonuçlar fonksiyonun konveks olması durumu için de verilmiştir. Bu sonuçlar daha genel olarak

$$\mathrm{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(z)}{\frac{\partial}{\partial\theta}z}\right\}>\alpha;\quad 0\le\alpha<1,\quad \lambda\ge 0 \text{ ve } z\in\widetilde{\mathbb{D}}$$

şartını sağlayan $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarının oluşturduğu $\Sigma_H R(\alpha,\lambda)$ sınıfı için O. P. Ahuja ve J. M. Jahangiri (2002) tarafından genelleştirilmiştir. Ayrıca bu konuda O. P. Ahuja ve J. M. Jahangiri (2003), J. W. Thompson (2003) ve T. Rosy ve ark. (2002) çalışmışlardır.

2.2. $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ Sınıfı

Metin Öztürk ve Sibel Yalçın (2002), $\mathbb{D}$ birim diskinde

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n} \tag{2.4}$$

tipinde olan ve λ, $0\le\lambda\le1$, $|a_1|=1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}[(n-\alpha)|a_n|+(n+\alpha)|b_n|]\le 2 \tag{2.5}$$

katsayı bağıntısını sağlayan, yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların oluşturduğu $SH(\lambda,\alpha)$ sınıfı ile onun $b_1=0$ özelliğindeki $SH^0(\lambda,\alpha)$ alt sınıfını çalışmışlardır. Bu kısımda önce, (2.5) bağıntısına benzer bir bağıntının meromorf harmonik fonksiyonlar için sağlanması durumunda elde edilecek fonksiyonların sınıfı tanımlandı ve bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları ile distorsiyon teoremleri verildi. Ayrıca bu fonksiyonlar ile tipik reel meromorf harmonik fonksiyonlar arasındaki ilişki elde edildi. Daha sonra, birim diskin dışında meromorf harmonik tipik reel fonksiyonların Hadamard çarpımıyla elde edilen $\Sigma_H(a,b)$ sınıfı için benzer özellikler incelendi.

$0\le\lambda\le1$ ve $0\le\alpha<1$ olmak üzere

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^{-k}+\overline{\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^{-k}} \tag{2.6}$$

biçiminde olan ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}\left[(n+\alpha)\,|\,a_n\,|+(n-\alpha)\,|\,b_n\,|\right]\le 1 \tag{2.7}$$

katsayı bağıntısını sağlayan fonksiyonların sınıfını $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ ile gösterelim. Öncelikle hedefimiz bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları ile distorsiyon teoremleri vermektir. Daha sonra bu fonksiyonlar ile tipik reel meromorf harmonik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi kurmaktır. $\lambda=0$ ve $\lambda=1$ olması durumunda sınıfımız sırasıyla $\widetilde{\mathbb{D}}$ da α mertebeli yıldızıl ve konveks harmonik fonksiyon sınıflarını oluştururlar. Önce bu kavramları tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. $0\le\alpha<1$, $0\le\theta<2\pi$, $z=re^{i\theta}$, $|z|=r>1$ olmak üzere her z için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg f(re^{i\theta})\right)=\operatorname{Im}\frac{\partial}{\partial\theta}(\log f(re^{i\theta}))=\operatorname{Re}\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\ge\alpha \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ fonksiyonuna $\widetilde{\mathbb{D}}$ da α *mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyon* denir. α mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\Sigma_H(0,\alpha)$ ile gösterilecek.

Eğer $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg\left(\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right)\right\}=\operatorname{Re}\frac{z^2h''(z)+zh'(z)+\overline{z^2g''(z)+zg'(z)}}{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}\ge\alpha \tag{2.9}$$

ise *f* fonksiyonuna $\widetilde{\mathbb{D}}$ da α *mertebeli harmonik konveks fonksiyon* denir. α mertebeli harmonik konveks fonksiyonların sınıfı $\Sigma_H(1,\alpha)$ ile gösterilecek.

Her iki $\Sigma_H(0,\alpha)$ ve $\Sigma_H(1,\alpha)$ sınıfları Jahangiri ve Silverman (1999) tarafından çalışılmıştır.

Konuyla ilgili ilk sonucumuz $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların hangi özelliklere sahip olduğu ile ilgilidir.

Teorem 2.2.2. $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların bir sınıfıdır.

İspat. $f \in \Sigma_H(\lambda,\alpha)$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu (2.3) biçiminde olup, Teorem 2.1.1 gereği $\widetilde{\mathbb{D}}$ da harmoniktir. Şimdi f fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterelim. Bunun için $1<|z_1|\leq|z_2|$ özelliğinde farklı z_1 ve z_2 noktalarını göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
|f(z_1)-f(z_2)| &\geq |h(z_1)-h(z_2)|-|g(z_1)-g(z_2)| \\
&> |z_1-z_2| \left[1-\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\left|\frac{1}{z_1^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{z_2^{n-1}}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\left|\frac{1}{z_1^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{z_2^{n-1}}\right|\right)\right] \\
&\geq |z_1-z_2| \left[1-|z_1|^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n|a_n|+n|b_n|\right)\right] \\
&\geq |z_1-z_2| \left[1-|z_1|^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}(n+\alpha)|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}(n-\alpha)|b_n|\right)\right] \\
&\geq |z_1-z_2|(1-|z_1|^{-1})>0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum f fonksiyonunun $\widetilde{\mathbb{D}}$ da yalınkat olduğunu gösterir.

f fonksiyonunun yön koruyan olduğuna gelince; $|z|=r>1$ için

$$\begin{aligned}
|h'(z)| &\geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n||z|^{-n-1}=1-\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|r^{-n-1}>1-\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n| \\
&\geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}(n+\alpha)|a_n| \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}(n-\alpha)|b_n| \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|>\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|r^{-n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n||z|^{-n-1}\geq|g'(z)|
\end{aligned}$$

olur. Bu ise f fonksiyonun $\widetilde{\mathbb{D}}$ da yön koruyan olduğunu gösterir. ■

Gelecek teorem λ sayısının büyümesi ile sınıfın büyümesinin ters orantılı olduğunu ifade eder.

Teorem 2.2.3. $0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\leq1$ için $\Sigma_H(\lambda_2,\alpha)\subset\Sigma_H(\lambda_1,\alpha)$ dır.

İspat. $\lambda_1\leq\lambda_2$ ve $f\in\Sigma_H(\lambda_2,\alpha)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_1(n-1)+1}{1-\alpha}[(n+\alpha)|a_n|+(n-\alpha)|b_n|]$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_2(n-1)+1}{1-\alpha}[(n+\alpha)|a_n|+(n-\alpha)|b_n|]$$
$$\leq 1$$

eşitsizliğinden $f\in\Sigma_H(\lambda_1,\alpha)$ elde edilir. ■

Teorem 2.2.4. $f=h+\overline{g}\in\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ ise

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}+\lambda(z^2h''(z)+\overline{z^2g''(z)+2zg'(z)})}{(1-\lambda)(h(z)+\overline{g(z)})+\lambda(zh'(z)-\overline{zg'(z)})}\right\}:=\operatorname{Re}\{w\}\geq\alpha \qquad (2.10)$$

dir.

İspat. $f=h+\overline{g}\in\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ olsun. Bu durumda (2.10) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için iyi bilinen

$$\operatorname{Re}w\geq\alpha \iff |1-\alpha+w|\geq|1+\alpha-w|$$

önermesinden faydalanacağız. Buna göre

$$\Big|(1-\alpha)[(1-\lambda)(h(z)+\overline{g(z)})+\lambda(zh'(z)-\overline{zg'(z)})]+zh'(z)-\overline{zg'(z)}$$
$$+\lambda(z^2h''(z)+\overline{z^2g''(z)+2zg'(z)})\Big|-\Big|(1+\alpha)[(1-\lambda)(h(z)+\overline{g(z)})$$
$$+\lambda(zh'(z)-\overline{zg'(z)})]-zh'(z)+\overline{zg'(z)}-\lambda(z^2h''(z)+\overline{z^2g''(z)+2zg'(z)})\Big|$$

$$=\left|(2-\alpha)z+\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n+1)-1](n-\alpha-1)a_nz^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n-1)+1](n-\alpha+1)\overline{b_nz^{-n}}\right|$$
$$-\left|\alpha z-\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n+1)-1](n+\alpha+1)a_nz^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n-1)+1](n-\alpha-1)\overline{b_nz^{-n}}\right|$$

$$\geq 2(1-\alpha)|z|-2\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n+1)-1](n+\alpha)|a_n||z|^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n-1)+1](n-\alpha)|b_n||z|^{-n}$$

$$\geq 2(1-\alpha)|z|-2\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n-1)+1](n+\alpha)|a_n||z|^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n-1)+1](n-\alpha)|b_n||z|^{-n}$$

$$=2(1-\alpha)|z|\left\{1-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}(n+\alpha)|a_n||z|^{-n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}(n-\alpha)|b_n||z|^{-n-1}\right)\right\}$$

$$\geq 2(1-\alpha)|z|\left\{1-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}(n+\alpha)|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}(n-\alpha)|b_n|\right)\right\}\geq 0$$

bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. ■

Aşağıdaki teorem $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların distorsiyon özelliği ile ilgilidir.

Teorem 2.2.5. $f = h+\overline{g} \in \Sigma_H(\lambda,\alpha)$ ve $|z| = r > 1$ için

$$r-(1-\alpha)r^{-1} \le |f(z)| \le r+(1-\alpha)r^{-1}$$

dır. Eşitlik

$$f(z) = z \pm \frac{1-\alpha}{\overline{z}}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $f = h+\overline{g} \in \Sigma_H(\lambda,\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| z+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n z^{-n}} \right| \le |z| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)|z|^{-n} \\
&\le |z| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)|z|^{-1} \\
&\le |z| + \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda(n-1)+1][(n+\alpha)|a_n| + (n-\alpha)|b_n|]|z|^{-1} \\
&\le |z| + (1-\alpha)|z|^{-1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| z+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n z^{-n}} \right| \ge |z| - \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)|z|^{-n} \\
&\ge |z| - \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)|z|^{-1} \\
&\ge |z| - \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda(n-1)+1]((n+\alpha)|a_n| + (n-\alpha)|b_n|)|z|^{-1} \\
&\ge |z| - (1-\alpha)|z|^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.2.5 den şu geometrik yorumu çıkarabiliriz: $A = \{w : |w| < \alpha\}$ olmak üzere $\widetilde{\mathbb{D}}$ bölgesinin $f = h+\overline{g} \in \Sigma_H(\lambda,\alpha)$ fonksiyonları altındaki resmi $\mathbb{C} \setminus A$ bölgesinin alt kümesidir.

Tanım 2.2.6. *A* kümesi $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer her $x, y \in A$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $[\lambda x + (1-\lambda)y] \in A$ ise *A* kümesine *konvekstir* denir. Eğer her $x, y \in A$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $z \neq \lambda x + (1-\lambda)y$ ise $z \in A$ noktasına *A* kümesinin bir *uç* (*ekstrem*) *nokta*sı denir. *A* kümesini bütün uç noktalarının kümesi E_A ile gösterilir. Eğer *A*, topolojik vektör uzayın bir alt kümesi ise *A* kümesini kapsayan bütün kapalı konveks kümelerin en küçüğüne *A* kümesinin *kapalı konveks zarfı* denir ve $\overline{co}A$ ile gösterilir.

Krein-Milman Teoremi (Dunford ve Schwartz 1958), yerel konveks topolojik bir vektör uzayın kompakt bir alt kümesinin kapalı konveks zarfı ile uç noktalarının kapalı konveks zarfının bir birine eşit olduğunu söyler. Yani kompakt bir *A* alt kümesi için $\overline{co}A = \overline{co}E_A$ dir. Üstelik $\overline{co}A$ kompakt ise $E_{\overline{co}A} \subset A$ dır.

Kapalı konveks kümeler ve onların uç noktaları lineer homeomorfizmler altında korunur.

Teorem 2.2.7. *X* ve *Y* iki topolojik vektör uzayı ve $L : X \to Y$ bir lineer homeomorfizm olsun. Eğer $A \subset X$ ise bu takdirde $\overline{co}L(A) = L(\overline{co}A)$ ve $E_{\overline{co}L(A)} = L(E_{\overline{co}A})$ dır (G. Schober 1975).

Sürekli fonksiyonların bir alt vektör uzayı olan $\Sigma_H(\lambda, \alpha)$ sınıfının uç noktaları, genel olarak, $\Sigma_H(\lambda, \alpha)$ sınıfına ait $f_1, f_2, ... f_n$ fonksiyonları ve $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ özelliğindeki $\lambda_k \geq 0$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k$ biçiminde yazılamaması demektir. Başka bir deyişle, eğer bir uç nokta $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k$ biçiminde yazılmış ise durumunda en az bir f_k fonksiyonunun $\Sigma_H(\lambda, \alpha)$ sınıfına ait olmaması demektir.

Şimdi $\Sigma_H(\lambda, \alpha)$ sınıfının yeni bir alt sınıfını tanımlayalım. $a_n \geq 0$ ve $b_n \geq 0$ olmak üzere

$$h(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

biçiminde seri açılımına sahip h ve g fonksiyonları için $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ sınıfına ait bütün $f = h + \overline{g}$ fonksiyonların sınıfını $\overline{\Sigma}_H(\lambda,\alpha)$ ile gösterelim. Buna göre $\overline{\Sigma}_H(\lambda,\alpha) \subset \Sigma_H(\lambda,\alpha)$ olduğu açıktır.

Gelen teorem yeni sınıfın uç noktalarını belirler.

Teorem 2.2.7. $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun $\overline{\Sigma}_H(\lambda,\alpha)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart $h_0(z) = z$, $g_0(z) = z$, $n = 1,2,\ldots$ için

$$h_n(z) = z + \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n+\alpha)} z^{-n}, \quad g_n(z) = z + \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n-\alpha)} (\overline{z})^{-n}$$

ve $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = 1$, $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$, olmak üzere f fonksiyonunun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(x_n h_n + y_n g_n)$$

biçiminde yazılmasıdır. Özel olarak $\overline{\Sigma}_H(\lambda,\alpha)$ sınıfının uç noktaları $n = 0,1,\ldots$ için $\{h_n\}$ ve $\{g_n\}$ fonksiyonlarıdır.

İspat. Önce yeter şartı ispat edelim. Hipotezde verilen şartlar altında

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(x_n h_n + y_n g_n) \\ &= x_0 h_0 + y_0 g_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[x_n\left(z + \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n+\alpha)} z^{-n}\right)\right. \\ &\qquad \left. + y_n\left(z + \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n-\alpha)} (\overline{z})^{-n}\right)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n)z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n+\alpha)} x_n z^{-n} + \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n-\alpha)} y_n (\overline{z})^{-n}\right] \end{aligned}$$

olur. f fonksiyonunun $\overline{\Sigma}_H(\lambda,\alpha)$ sınıfına ait olması için (2.10) eşitsizliğini sağlaması gerekir. Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n-1)+1]\left\{(n+\alpha)\left(\frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n+\alpha)} x_n\right) + (n-\alpha)\left(\frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n-\alpha)} y_n\right)\right\}$$

$$= (1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = (1-\alpha)[1-(x_0+y_0)] \leq 1-\alpha$$

elde edilir. Böylece $f \in \overline{\Sigma}_H(\lambda,\alpha)$ dir.

Tersine, $f = h + \overline{g} \in \Sigma_H(\lambda, \alpha)$ olsun. Böylece hipotezde verilenler ışığında $n = 1, 2, \ldots$ için

$$|a_n| = \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n+\alpha)} x_n \text{ ve } |b_n| = \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n-\alpha)} y_n$$

olarak seçilirse

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| z^{-n} + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| z^{-n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n+\alpha)} x_n z^{-n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n-\alpha)} y_n \overline{z}^{-n}$$

$$= x_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(z + \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n+\alpha)} z^{-n} \right)$$

$$+ y_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \left(z + \frac{1-\alpha}{[\lambda(n-1)+1](n-\alpha)} \overline{z}^{-n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x_n h_n + y_n g_n)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 2.2.8. $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}}$ ve $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{-n} + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{-n}}$ olmak üzere f ve F fonksiyonlarının *konvülasyonu* veya *Hadamard çarpımı*

$$(f * F)(z) = f(z) * F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_n z^{-n} + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n B_n z^{-n}} \qquad (2.11)$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıdaki teorem $\Sigma_H(\lambda, \alpha)$ sınıfının Hadamard çarpımına göre kapalı olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.9. Eğer f ve F fonksiyonları $\Sigma_H(\lambda, \alpha)$ sınıfına ait ise $f * F$ Hadamard çarpımı da bu sınıfta aittir.

İspat. $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{-n}+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^{-n}}$ ve $F(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}A_n z^{-n}+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}B_n z^{-n}}$ olsun. $F\in\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ olduğundan $|A_n|\le 1$ ve $|B_n|\le 1$ dir. Bu eşitsizliklerden faydalanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}[(n+\alpha)\,|a_nA_n|+(n-\alpha)\,|b_nB_n|]$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n-1)+1}{1-\alpha}[(n+\alpha)\,|a_n|+(n-\alpha)\,|b_n|]\le 1$$

olduğu görülür. Bu ise $f*F\in\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ olduğunu gösterir. ■

Aşağıdaki teorem $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ sınıfının konveks kombinasyonlara göre kapalı olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.10. $\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ sınıfı konveks kombinasyon altında kapalıdır.

İspat. $i=1,2,3,\ldots$ için $f_i(z)\in\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ olsun. Bu takdirde her bir f_i fonksiyonu

$$f_i(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{i_n}z^{-n}+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_{i_n}z^{-n}}$$

gösterimine sahip ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n-1)+1][(n+\alpha)\,|a_{i_n}|+(n-\alpha)\,|b_{i_n}|]\le 1-\alpha \tag{2.12}$$

katsayı bağıntısını sağlar. $0\le t_i\le 1$ için $\sum_{i=1}^{\infty}t_i=1$ olmak üzere f_i fonksiyonlarının konveks kombinasyonu

$$\sum_{i=1}^{\infty}t_i\ f_i(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_i a_{i_n}\right)z^{-n}+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_i b_{i_n}\right)z^{-n}}$$

biçiminde olup (2.12) bağıntısı gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n-1)+1]\left[(n+\alpha)\left|\sum_{i=1}^{\infty}t_i a_{i_n}\right|+(n-\alpha)\left|\sum_{i=1}^{\infty}t_i b_{i_n}\right|\right]$$

$$\le\sum_{i=1}^{\infty}t_i\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(n-1)+1][(n+\alpha)a_{i_n}+(n-\alpha)b_{i_n}]\right\}$$

$$\le\sum_{i=1}^{\infty}t_i(1-\alpha)=1-\alpha$$

elde edilir. Böylece $\sum_{i=1}^{\infty}t_i\ f_i(z)\in\Sigma_H(\lambda,\alpha)$ olduğu görülür. ■

2.3. $\Sigma_H(a,b)$ Sınıfı

α ve β reel sayıları $-1, -1/2, -1/3, \ldots$ sayılarından farklı olmak üzere $\mathbb{D}$ birim diskinde

$$t_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(n-1)\alpha} z^n \qquad \text{ve} \quad t_\beta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(n-1)\beta} z^n$$

biçiminde tanımlı analitik $t_\alpha(z)$, $t_\beta(z)$ fonksiyonları ve harmonik tipik reel

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$$

fonksiyonunun Hadamard çarpımı yardımıyla

$$F = H + \overline{G} = f * (t_\alpha + \overline{t_\alpha}) * (t_\beta + \overline{t_\beta})$$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonlarının sınıfı Metin Öztürk ve Sibel Yalçın (2000) tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır. Bu kısımda benzer tanımlama meromorf harmonik fonksiyonlar sınıfı için yapılacaktır. a ve b reel sayıları $-1, -1/2, -1/3, \ldots$ den farklı olmak üzere

$$t_a(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{1+(n+1)a} z^{-n} \qquad \text{ve} \qquad t_b(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{1+(n+1)b} z^{-n}$$

biçiminde tanımlı $t_a(z)$ ve $t_b(z)$ fonksiyonları ve $f \in \Sigma_{TH}$ fonksiyonunun Hadamard çarpımlarıyla elde edilen

$$F = H + \overline{G} = f * (t_a + \overline{t_a}) * (t_b + \overline{t_b})$$

fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfı $\Sigma_H(a,b)$ ile gösterelim. Buna göre $\Sigma_H(a,b)$ sınıfına ait bir F fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(z) &= H(z) + \overline{G(z)} \\ &= z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{[1+(n+1)a][1+(n+1)b]} z^{-n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{b_n}}{[1+(n+1)a][1+(n+1)b]} (\overline{z})^{-n} \\ &= z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{-n} + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{-n}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

biçiminde bir seri açılımına sahiptir.

Tersine, $f \in \sum_{TH}$ olacak şekilde uygun olarak seçilmiş $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ katsayıları için (2.13) tipinde bir F fonksiyonu $\Sigma_H(a,b)$ sınıfındadır.

Teorem 2.3.1. $F = H + \overline{G}$ fonksiyonu $\Sigma_H(a,b)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} f(z) &= ab[z^2H''(z) + \overline{z^2G''(z)}] - [a + b(1+a)][zH'(z) + \overline{zG'(z)}] \\ &\quad + (1+a)(1+b)F(z) \end{aligned} \tag{2.14}$$

olacak şekilde bir $f \in \sum_{TH}$ fonksiyonu vardır. Tersine herhangi bir $f \in \sum_{TH}$ fonksiyonu için (2.13) tipinde ve (2.14) denkleminin çözümü olan bir $F \in \Sigma_H(a,b)$ fonksiyonu vardır.

İspat. $F \in \Sigma_H(a,b)$ olsun. $t_0(z)$ fonksiyonu $t_0(z) = -a\,z\,t_a'(z) + (1+a)t_a(z)$ veya $t_0(z) = -bz\,t_b'(z) + (1+b)t_b(z)$ biçiminde yazılabileceğinden herhangi bir $f \in \sum_{TH}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) * (t_0(z) + \overline{t_0(z)}) * (t_0(z) + \overline{t_0(z)}) \\ &= (h(z) + \overline{g(z)}) * [-a(z\,t_a'(z) + \overline{z\,t_a'(z)}) + (1+a)(t_a(z) + \overline{t_a(z)})] \\ &\quad * [-b\,(z\,t_b'(z) + \overline{z\,t_b'(z)}) + (1+b)(t_b(z) + \overline{t_b(z)})] \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} h(z) &= abh(z) * z\,t_a'(z) * z\,t_b'(z) - a(1+b)h(z) * z\,t_a'(z) * t_b(z) \\ &\quad - b(1+a)h(z) * t_a(z) * z\,t_b'(z) + (1+a)(1+b)h(z) * t_a(z) * t_b(z) \\ &= abz^2H''(z) - [a + b(1+a)]zH'(z) + (1+a)(1+b)H(z) \end{aligned} \tag{2.15}$$

ve

$$\begin{aligned} g(z) &= abg(z) * z\,t_a'(z) * z\,t_b'(z) - a(1+b)g(z) * z\,t_a'(z) * t_b(z) \\ &\quad - b(1+a)g(z) * t_a(z) * z\,t_b'(z) + (1+a)(1+b)g(z) * t_a(z) * t_b(z) \\ &= abz^2G''(z) - [a + b(1+a)]z\,G'(z) + (1+a)(1+b)G(z) \end{aligned} \tag{2.16}$$

olur. Böylece $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu için (2.12) ve (2.13) bağıntılarından (2.14) bağıntısı elde edilir.

Tersine $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ fonksiyonu Σ_{TH} sınıfına ait olsun. Bu takdirde (2.15) ve (2.16) eşitliklerinden H ve G fonksiyonları (2.14) bağıntısını sağlar. h ve g fonksiyonları $\widetilde{\mathbb{D}}$ da analitik olduklarından H ve G fonksiyonları da $\widetilde{\mathbb{D}}$ da analitiktir. Böylece $z\in\widetilde{\mathbb{D}}$ için

$$H(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}A_n z^{-n} \qquad \text{ve} \qquad G(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}B_n z^{-n}$$

biçimindedir. (2.15) ve (2.16) bağıntılarından

$$z+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{-n}=\sum_{n=-1}^{\infty}[1+(n+1)a][1+(n+1)b]A_n z^{-n}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^{-n}=\sum_{n=-1}^{\infty}[1+(n+1)a][1+(n+1)b]B_n z^{-n}$$

olduğu görülür. Böylece $H(z)=h(z)*t_a(z)*t_b(z)$ ve $G(z)=g(z)*t_a(z)*t_b(z)$ olup $F=H+\overline{G}=(h+\overline{g})*(t_a+\overline{t_a})*(t_b+\overline{t_b})\in\Sigma_H(a,b)$ elde edilir.■

Teorem 2.3.2. Eğer $F\in\Sigma_H(a,0)$ ise bu takdirde $z\in\widetilde{\mathbb{D}}$ için

$$F(z)=\frac{1}{a}\int_0^1\xi^{\frac{1}{a}}\,f(\tfrac{z}{\xi})\,d\xi$$

olacak şekilde bir $f\in\Sigma_{TH}$ fonksiyonu vardır.

İspat. Tanımdan dolayı $F\in\Sigma_H(a,0)$ fonksiyonu için

$$F(z)=f(z)*(t_a(z)+\overline{t_a(z)}) \tag{2.17}$$

olacak şekilde bir $f\in\Sigma_{TH}$ fonksiyonu vardır. Ayrıca $z\in\widetilde{\mathbb{D}}$ için $t_a(z)$ fonksiyonunun

$$t_a(z)=\frac{1}{a}\int_0^1\xi^{\frac{1}{a}-1}\frac{z^2}{z-\xi}\,d\xi$$

biçimindeki integral temsilleri (2.14) de yerine yazılırsa

$$F(z)=f(z)*\frac{1}{a}\int_0^1\xi^{\frac{1}{a}-1}\left(\frac{z^2}{z-\xi}+\overline{\frac{z^2}{z-\xi}}\right)d\xi$$

ifadesi elde edilir ve bu ifade de

$$f(z) * \left(\frac{z^2}{z-\xi} + \overline{\frac{z^2}{z-\xi}} \right) = \xi\, h(\frac{z}{\xi}) + \overline{\xi\, g(\frac{z}{\xi})}$$

eşitliği yerine yazıldığında ispat tamamlanır. ■

Benzer şekilde, eğer $F \in \Sigma_H(0,b)$ ise bu takdirde $z \in \widetilde{\mathbb{D}}$ için

$$F(z) = \frac{1}{b} \int_0^1 \xi^{\frac{1}{a}} f(\tfrac{z}{\xi})\, d\xi \tag{2.18}$$

olacak şekilde (2.18) eşitliğini sağlayan bir $f \in \sum_{TH}$ fonksiyonu vardır.

Şimdi $\Sigma_H(a,b)$ sınıfına ait ve her $z \in \widetilde{\mathbb{D}}$ için $H(z) \neq G(z)$ bağıntısını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu alt sınıfı $\Sigma'_H(a,b)$ ile gösterelim. Bu sınıfa ait bazı sonuçları vermeden önce ispatta kullandığımız S. H. Jun'a ait iki lemmayı verelim.

Lemma 2.3.3. $K(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^{-n}$, $\widetilde{\mathbb{D}}$ da analitik, tipik reel ve her $z \in \widetilde{\mathbb{D}}$ için $K(z) \neq 0$ eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $K(z)$ reel katsayılı ve

$$\operatorname{Im}\{K(z)\} = \begin{cases} >0 & ; \operatorname{Im}\{z\} > 0 \text{ ise} \\ <0 & ; \operatorname{Im}\{z\} < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir (Jun 2000).

Lemma 2.3.4. $K(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^{-n}$, $\widetilde{\mathbb{D}}$ da analitik, tipik reel ve her $z \in \widetilde{\mathbb{D}}$ için $K(z) \neq 0$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyon olsun. Bu takdirde $L(\zeta) = \{K(1/\zeta)\}^{-1}$ biçiminde tanımlanan L fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde analitik ve tipik reeldir (Jun 2000).

Aşağıdaki lemma, Lemma 2.3.3 ün $\Sigma'_H(a,b)$ sınıfına uygulamasından başka bir şey değildir.

Lemma 2.3.5. $F = H + \overline{G} \in \Sigma'_H(a,b)$ ise

$$K(z) = H(z) - G(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n)\, z^{-n}$$

fonksiyonu tipik reel ve reel katsayılı olup

$$\operatorname{Im}\{H(re^{i\theta}) - G(re^{i\theta})\} = \begin{cases} >0 & ; \ 0 < \theta < \pi \text{ ise} \\ <0 & ; -\pi < \theta < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

Teorem 2.3.6. Eğer $F = H + \overline{G} \in \Sigma'_H(a,b)$ ise bu takdirde $\zeta \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\frac{1}{(H(1/\zeta)-G(1/\zeta))}\right\} > 0 \tag{2.19}$$

dir. Tersine, eğer $H(\infty)=\infty$, $G(\infty)=0$, $A_n = \overline{A_n}$, $B_n = \overline{B_n}$ ($n = 1,2,3,\dots$) , $z \in \widetilde{\mathbb{D}}$ için $H(z) \neq G(z)$ ve $K(z) = H(z) - G(z)$ fonksiyonu (2.19) bağıntısını sağlıyorsa $F = H + \overline{G}$ fonksiyonu $\Sigma'_H(a,b)$ sınıfına aittir.

İspat. $F = H + \overline{G} \in \Sigma'_H(a,b)$ olsun. Bu durumda, Lemma 2.2.4 den

$$K(z) = H(z) - G(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n)z^{-n}$$

fonksiyonunun $\widetilde{\mathbb{D}}$ da tipik reel analitik olduğu ve Lemma 2.2.5 ten de

$$L(\zeta) = \{K(1/\zeta)\}^{-1} = \zeta + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n \zeta^n$$

fonksiyonunun $\mathbb{D}$ diskinde tipik reel analitik olduğu görülür. Böylece W.Rogosinski'nin 1932 deki çalışmasından

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\frac{1}{(H(1/\zeta)-G(1/\zeta))}\right\} > 0$$

elde edilir (Rogosinski 1932).

Tersine $H(\infty)=\infty$, $G(\infty)=0$ ve $z \in \widetilde{\mathbb{D}}$ için $H(z) \neq G(z)$ olsun. Böylece, $L(\zeta) = \{K(1/\zeta)\}^{-1} = \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \zeta^n$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde analitiktir. Ayrıca $A_n = \overline{A_n}$, $B_n = \overline{B_n}$ ve $L(\zeta)$ fonksiyonu (2.19) bağıntısını sağladığından S.Yalçın ve M.Öztürk'ün (2000) çalışmasında verilen Teorem 3.2 gereği $K(z) = H(z) - G(z)$ fonksiyonu $\widetilde{\mathbb{D}}$ da tipik reel harmoniktir. Böylece $F = H + \overline{G} \in \Sigma'_H(a,b)$ dir. ■

Teorem 2.3.7. Eğer $F(z) = H(z) + \overline{G(z)} = z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{-n} + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{-n}}$ fonksiyonu $\sum'_H(a,b)$ sınıfına ait ise aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$|A_1 - B_1| \le 3/[1+2a][1+2b], \quad |A_2 - B_2| \le 2/[1+3a][1+3b]$$
$$|A_3 - B_3| \le 8/[1+4a][1+4b], \quad |A_4 - B_4| \le 12/[1+5a][1+5b] \tag{2.20}$$
$$|A_5 - B_5| \le 28/[1+6a][1+6b], \quad |A_6 - B_6| \le 52/[1+7a][1+7b].$$

İspat. $K(z) = H(z) - G(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} S_n z^{-n}$, $S_n = A_n - B_n$ ve $L(\zeta) = \{K(1/\zeta)\}^{-1}$ olsun. Teorem 2.3.6 nın ispatında verildiği gibi $L(\zeta)$, $\mathbb{D}$ diskinde tipik reel analitiktir. Böylece, $n = 1,2,3,\ldots$ için

$$|A_n| = \frac{|a_n|}{[1+(n+1)a][1+(n+1)b]} \quad \text{ve} \quad |B_n| = \frac{|b_n|}{[1+(n+1)a][1+(n+1)b]}$$

olduğundan S. H. Jun’un 2000 deki çalışmasında verilen Teorem 2.6 (Jun 2000) gereği (2.20) bağıntısı ile verilen katsayı bağıntıları elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

3. BİRİM DİSKDE BASİT KUTUP NOKTASINA SAHİP MEROMORF HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Çalışmamızın önceki bölümünde birim diskin dışında meromorf harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfları incelendi. Bu bölümde ise birim diskin içinde meromorf harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfları iki kısım da incelendi. Birinci kısımda orijinde basit kutup noktasına sahip olan meromorf harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı, ikinci kısımda birim diskte orijin dışında basit kutup noktasına sahip meromorf harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı ele alındı. Her iki kısımda verilen sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları, distorsiyon ve alan teoremleri verildi.

3.1. Orijinde Basit Kutup Noktasına Sahip Meromorf Harmonik Yalınkat Fonksiyonların $MHS_{SC}^{*}(\alpha)$ ve $MHS_{S}^{*}(n,\alpha)$ Sınıfları

Bu kısımda ilk olarak G. S. Salagean tarafından 1981 yılında analitik fonksiyonlar için tanımlanan Salagean operatörü ile Sakaguchi tarafından 1959 yılında tanımlanan simetrik noktaya göre yıldızıl fonksiyonlar tanımlanacak.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik olan $h(z)$ fonksiyonu için

$$D^{\circ}h(z)=h(z)\,,\ Dh(z)=zh'(z)$$

ve $n=1,2,...$ için

$$D^{n+1}h(z)=D(D^{n}h(z))$$

biçiminde tanımlanan D operatörüne *Salagean operatörü* denir (Salagean 1981).

Bu kavram harmonik fonksiyonlara ilk defa Jahangiri tarafından 2002 yılında aşağıdaki biçimde uyarlanmıştır.

$\mathbb{D}$ birim diskinde harmonik $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ fonksiyonu için Salagean operatörü

$$D^{\circ}f(z)=f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\,,\qquad Df(z)=Dh(z)-\overline{Dg(z)}=zh'(z)-\overline{zg'(z)}$$

ve $n=2,3,...$ için

$$D^{n}f(z)=D^{n}h(z)+(-1)^{n}\overline{D^{n}g(z)}$$

biçiminde tanımlanır (Jahangiri ve ark. 2002).

Tanım 3.1.2. $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik bir $f(z)$ fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)}\right\}>0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna *simetrik noktaya göre yıldızıl fonksiyon* denir (Sakaguchi 1959).

Simetrik noktaya göre harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı benzer şekilde tanımlanabilir. Bu durumda $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{2(zf_z(z) - \overline{zf_{\bar{z}}(z)})}{f(z) - f(-z)}\right\} > 0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f = h + \overline{g}$ fonksiyonuna *simetrik noktaya göre harmonik yıldızıl fonksiyon* denir.

Salagean ve Sakaguchi tarafından tanımlanan bu operatörler farklı çalışmalara zemin hazırlamıştır. Bu operatörler yardımıyla yeni operatörler ve harmonik fonksiyonların yeni alt sınıfları tanımlanmış ve çalışılmıştır. Bu çalışmalar aynı zamanda meromorf ve meromorf harmonik fonksiyonlar için de yapılmıştır.

Chen ve arkadaşları tarafından 1996 yılında orijinde basit kutup noktasına sahip ve $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ halka bölgesinde

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

biçiminde seri açılımına sahip meromorf yalınkat fonksiyonlar için T operatörünü

$$Tf(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) - \overline{f(-\bar{z})}\right]$$

biçiminde tanımlanarak, T ve D operatörü yardımıyla simetrik eşlenik noktaya göre yıldızıl olan meromorf fonksiyonların sınıfını tanımlandı (Chen ve ark. 1996).

Bu kısımda Chen ve arkadaşlarının yaptığı tanıma benzer şekilde meromorf harmonik fonksiyonların simetrik eşlenik noktaya göre yıldızıl olanlarının $MHS_{SC}^{*}(\alpha)$ sınıfı ile meromorf harmonik fonksiyonların Salagean operatörü yardımıyla $MHS_{S}^{*}(n,\alpha)$ sınıfı tanımlandı. Bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları ve alt sınıflarıyla ilgili sonuçlar elde edildi.

$h(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ halka bölgesinde analitik, orijinde basit kutup noktasına sahip ve rezidüsü 1 ve $g(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik olmak üzere $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ halka bölgesinde

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \tag{3.1}$$

biçiminde bir seri açılımına sahip meromorf harmonik yalınkat $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfını MH ile gösterelim. MH sınıfına ait ve her $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için,

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\right\} > 0 \tag{3.2}$$

bağıntısını sağlayan $f(z)$ fonksiyonuna $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ halka bölgesinde *meromorf harmonik yalınkat yıldızıl fonksiyon* denir ve bu tip fonksiyonların sınıfını MHS^* ile gösterelim.

Eğer MH sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{z^2 h''(z) + zh'(z) + \overline{z^2 g''(z) + zg'(z)}}{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}\right\} > 0 \tag{3.3}$$

bağıntısını sağlıyorsa f fonksiyonuna $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ halka bölgesinde *meromorf harmonik yalınkat konveks fonksiyon* denir ve bu tip fonksiyonların sınıfını MHC ile gösterelim.

Şimdi $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in MH$ fonksiyonları için T ve D operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

1) T operatörü :

$$Tf(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) - \overline{f(-\bar{z})}\right] = \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n - (-1)^n \overline{a}_n] z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\overline{b}_n - (-1)^n b_n] \bar{z}^n$$

2) D operatörü :

$$D^{\circ} f(z) = f(z) = h(z) + \overline{g(z)}, \qquad Df(z) = zh'(z) - \overline{zg'(z)}$$

ve $n = 1, 2, ...$ için

$$D^n f(z) = D^n h(z) + (-1)^n \overline{D^n g(z)}.$$

Buna göre

$$D^n h(z) = (-1)^n \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} k^n a_k z^k \qquad \text{ve} \qquad D^n g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^m b_k z^k$$

elde edilir.

Tanımdan hareketle D ve T operatörlerinin aşağıdaki özellikleri sağladığını görmek zor değildir.

a) Eğer $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $f, F \in MH$ ise bu takdirde

$$D[\lambda f + (1-\lambda)F] = \lambda Df + (1-\lambda)DF$$

ve

$$T[\lambda f + (1-\lambda)F] = \lambda Tf + (1-\lambda)TF\,.$$

b) $DT = TD.$

c) $TT = T.$

Böylece meromorf harmonik yalınkat fonksiyonlar için (3.2) bağıntısı ile verilen yıldızıllık kriteri D operatörüne bağlı olarak

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{Df(z)}{f(z)}\right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

ve (3.3) bağıntısı ile verilen konvekslik kriteri de

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{D^2 f(z)}{Df(z)}\right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Şimdi D ve T operatörleri yardımıyla yeni bir sınıf tanımlayalım.

Tanım 3.1.3. $f = h + \overline{g} \in MH$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için $\dfrac{h(z) + \overline{g(z)}}{zh'(z) - \overline{zg'(z)}} \neq 0$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{D(\alpha D + (1+\alpha)D^{\circ})\, f(z)}{(\alpha D + (1+\alpha)D^{\circ})\; Tf(z)}\right\} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna *eşlenik noktaya göre simetrik* α*-yıldızıl harmonik yalınkat fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların sınıfı $MHS^{*}_{SC}(\alpha)$ ile gösterilir. Bundan böyle $\alpha = 0$ olması durumunda $MHS^{*}_{SC}(0)$ yerine MHS^{*}_{SC} alınacak.

Aşağıdaki teorem $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonunun yıldızıl olması için gerekli şartı ifade eder.

Teorem 3.1.4. Eğer (3.1) bağıntısı ile verilen $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \le 1 \tag{3.4}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f \in MHS^*$ dır.

İspat. $p(z)$ fonksiyonunu özel olarak

$$p(z) = \begin{cases} -\dfrac{Df(z)}{f(z)} & ; \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ \quad 1 & ; \quad z = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa $f \in MHS^*$ olduğunu göstermek için

$$|p(z) - 1| < |p(z) + 1| \tag{3.5}$$

eşitsizliğinin her $z \in \mathbb{D}$ için sağlandığını göstermemiz yeterlidir. $p(z)$ fonksiyonunun seri açılımı (3.5) bağıntısında yerine yazıldığında $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_n z^{n+1} + |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \overline{b_n} \, \overline{z}^{n-1} \right| < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \tag{3.6}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left| 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n z^{n+1} + |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \overline{b_n} \, \overline{z}^{n-1} \right| \\ &\qquad > 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n z^{n+1} - |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \overline{b_n} \, \overline{z}^{n-1} \\ &\qquad \ge 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Ayrıca her $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için

$$|p(z) - 1| = \frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_n z^{n+1} + |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \overline{b_n} \, \overline{z}^{n-1} \right|}{\left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+1} + |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n} \, \overline{z}^{n-1} \right|}$$

ve

$$|p(z) + 1| = \frac{\left| 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n z^{n+1} + |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \overline{b_n} \, \overline{z}^{n-1} \right|}{\left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+1} + |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n} \, \overline{z}^{n-1} \right|}$$

olduğundan (3.6) ve (3.7) bağıntılarından (3.5) eşitsizliğinin her bir $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için korunduğu görülür. $z = 0$ durumunda ise eşitsizlik açıktır. Bu takdirde $p(z)$ reel kısmı pozitif harmonik yalınkat fonksiyonların PH sınıfına aittir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

Konvekslik için benzer sonuç aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 3.1.5. Eğer $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in MH$ fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|) \le 1$$

eşitsizliğini sağlıyorsa. Bu takdirde $f \in MHC$ dır. ■

Şimdiki teorem MHS^* sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı bağıntısını vermektedir.

Teorem 3.1.6. MHS^* sınıfına ait olan bir $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n|^2 - |b_n|^2) \le 1 \tag{3.8}$$

dır. Eşitlik, $f_0(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu MHS^* sınıfına ait olsun. Böylece $f(z)$ fonksiyonu $z \in \mathbb{D}$ için (3.5) eşitsizliğini sağlar. $f(z)$ fonksiyonunun (3.1) bağıntısında verilen seri açılımı (3.5) bağıntısında yerine yazıldığında her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_n z^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \overline{b_n z^n} z \right| < \left| 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \overline{b_n z^n} z \right|$$

elde edilir. Ayrıca $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $r \in (0,1)$ için

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_n r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \overline{b_n} r^{n+1} e^{-i(n-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

$$\le \int_0^{2\pi} \left| 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \overline{b_n} r^{n+1} e^{-i(n-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

eşitsizliği geçerlidir. $\{e^{in\theta}\}$ nın ortagonalliği gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n|^2 - |b_n|^2) r^{2(n+1)} \le 1 \qquad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) eşitsizliğinde $r \to 1^-$ için limit alınırsa (3.8) eşitsizliği elde edilir. $f_0(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$ fonksiyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n|^2 - |b_n|^2) = 1$ olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

Meromorf konveks harmonik yalınkat fonksiyonlar için benzer katsayı bağıntısı aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

Sonuç 3.1.7. Eğer $f(z) \in MHC$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (|a_n|^2 - |b_n|^2) \le 1$$

dir.

Aşağıdaki teorem MHS_{SC}^* sınıfı ile MHS^* sınıfı arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 3.1.8. $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \in MHS_{SC}^*$ ise $Tf \in MHS^*$ dır.

İspat. $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in MHS_{SC}^*$ olduğundan her $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için

$$-\frac{Df(z)}{Tf(z)} = -\frac{2(zh'(z) - \overline{zg'(z)})}{f(z) - \overline{f(-\bar{z})}} = p(z) \qquad (3.10)$$

ve $\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$ dır. Ayrıca

$$\overline{p(-\bar{z})} = -\frac{2(\overline{-\bar{z}h'(-\bar{z})} - (-\bar{z})g'(-\bar{z}))}{f(z) - \overline{f(-\bar{z})}} = -\frac{D(\overline{-f(-\bar{z})})}{Tf(z)} \qquad (3.11)$$

dir. Ayrıca (3.10) ve (3.11) bağıntılarından

$$-\frac{DTf(z)}{Tf(z)} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{Df(z) + D(\overline{-f(-\bar{z})})}{Tf(z)}\right\} = \frac{1}{2}(p(z) + \overline{p(-\bar{z})}) \qquad (3.12)$$

olduğu görülür. $\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$ olduğundan $\operatorname{Re}\{\overline{p(-\bar{z})}\} = \operatorname{Re}\{p(-\bar{z})\} > 0$ dır. (3.12) bağıntısından

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{DTf(z)}{Tf(z)}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{p(z) + \overline{p(-\bar{z})}\right\} > 0$$

elde edilir. Böylece $Tf \in MHS^*$ olduğu görülür. ■

$$Tf(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) - \overline{f(-\bar{z})}\right]$$
$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n - (-1)^n \bar{a}_n]z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\bar{b}_n - (-1)^n b_n]\bar{z}^n$$

olduğundan dolayı Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.8 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.9. $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \in MHS_{SC}^*$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4}[|a_n - (-1)^n \bar{a}_n|^2 - |\bar{b}_n - (-1)^n b_n|^2] \le 1$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left[|a_n|^2 - |b_n|^2 - (-1)^n\left(\operatorname{Re}(a_n)^2 - \operatorname{Re}(b_n)^2\right)\right] \le 2$$

dir.

Teorem 3.1.10. $\alpha \ge 0$ için $f \in MHS^*(\alpha)$ olsun. Bu takdirde

$$f^* = D_\alpha f = (\alpha D + (1+\alpha)D^\circ)f$$

olmak üzere $D_\alpha Tf \in MHS^*$ ve $Tf \in MHS_{SC}^*(\alpha)$ dır.

İspat. $f \in MHS^*(\alpha)$ iken $f^* \in MHS_{SC}^*$ olduğundan Teorem 3.1.8 gereği $Tf^* = TD_\alpha f \in MHS^*$ olduğu görülür. Ayrıca $TD = DT$ olduğundan $TD_\alpha = D_\alpha T$ elde edilir. Böylece $D_\alpha Tf(z) = TD_\alpha f(z) \in MHS^*$ dir. Üstelik $TT = T$ olduğundan her $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{D(\alpha D + (1+\alpha)D^\circ)\,Tf(z)}{(\alpha D + (1+\alpha)D^\circ)\,TTf(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{-\frac{D(D_\alpha Tf(z))}{D_\alpha Tf(z)}\right\} > 0$$

elde edilir. Bu ise Tf fonksiyonunun $MHS^*(\alpha)$ sınıfına ait olması demektir. ■

Teorem 3.1.11. Eğer (3.1) bağıntısı ile verilen $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+1}(|a_n| + |b_n|) \le 1 \tag{3.13}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(z) \in MHS_{SC}^*$ dır.

İspat. $p(z)$ fonksiyonu $p(0)=1$ ve $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ için $p(z)=-\dfrac{Df(z)}{Tf(z)}$ biçiminde tanımlandığında $f(z)\in MHS_{SC}^{*}$ olduğunu göstermek için $p(z)$ fonksiyonunun (3.5) bağıntısını sağladığını göstermek yetecektir. Bunun için de, $f(z)$ fonksiyonunun seri açılımından ve $p(z)$ fonksiyonunun tanımından hareketle yapılan hesaplamalar sonunda

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n-(-1)^n\frac{1}{2}\overline{a}_n\right\}z^{n+1}-|z|^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\overline{b}_n+\frac{1}{2}(-1)^n b_n\right\}\overline{z}^{n-1}\right|$$
$$<\left|2-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)a_n+(-1)^n\frac{1}{2}\overline{a}_n\right\}z^{n+1}+|z|^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\overline{b}_n-\frac{1}{2}(-1)^n b_n\right\}\overline{z}^{n-1}\right|$$

olduğunu veya onun yerine

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(n-\frac{1}{2}\right)\overline{b}_n+\frac{1}{2}(-1)^n b_n\right|+\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n-(-1)^n\frac{1}{2}\overline{a}_n\right|$$
$$+\left|\left(n-\frac{1}{2}\right)a_n+(-1)^n\frac{1}{2}\overline{a}_n\right|+\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)\overline{b}_n-\frac{1}{2}(-1)^n b_n\right|\leq 2$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. n değerleri sırası ile tek ve çift olarak alındığında

$$\left|\left(n-\frac{1}{2}\right)\overline{b}_n+\frac{1}{2}(-1)^n b_n\right|+\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n-(-1)^n\frac{1}{2}\overline{a}_n\right|$$
$$+\left|\left(n-\frac{1}{2}\right)a_n+(-1)^n\frac{1}{2}\overline{a}_n\right|+\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)\overline{b}_n-\frac{1}{2}(-1)^n b_n\right|$$
$$\leq 2\sqrt{n^2+1}(|a_n|+|b_n|)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

Sonuç 3.1.12. Her $n=1,2,\ldots$ için a_n katsayıları reel ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leq 1$$

ise $f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n}\in MHS_{SC}^{*}$ dır.

Gelecek teoremde MHS^*_{SC} sınıfının yapısal özelliği hakkında bilgi vermek için sabordinasyon prensibinden faydalanılacağından dolayı önce sabordinasyon tanımını verelim.

Tanım 3.1.13. f, $\mathbb{D}$ diskinde harmonik yalınkat bir fonksiyon ve $w(z)$, $|w(z)|\leq 1$, $w(0)=0$, $w'(0)>0$ şartlarını sağlayan $\mathbb{D}$ diskinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $z\in\mathbb{D}$ için $F(z)=f(w(z))$ ise F fonksiyonu f fonksiyonuna *sabordinedir* denir. Bu durum $F\prec f$ biçiminde gösterilir.

Teorem 3.1.14. Bir $f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n}$ fonksiyonu MHS^*_{SC} sınıfına ait ise

$$-\frac{DK(z)}{K(z)}=\frac{1}{2}(p(iz)+\overline{p(i\bar{z})})\,;\qquad z\in\mathbb{D}\setminus\{0\} \tag{3.14}$$

ve

$$Df(z)=zh'(z)-\overline{zg'(z)}=-ip(z)K(-iz)\,;\qquad z\in\mathbb{D}\setminus\{0\} \tag{3.15}$$

eşitliklerini sağlayan MHS^* sınıfına ait reel katsayılı $K(z)$ fonksiyonu ve PH sınıfına ait bir $p(z)$ fonksiyonu vardır.

İspat. $f\in MHS^*_{SC}$ kabul edelim. Bu takdirde $p(z)=-\dfrac{Df(z)}{Tf(z)}$ olmak üzere $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ için

$$Df(z)=zh'(z)-\overline{zg'(z)}=-p(z)Tf(z) \tag{3.16}$$

olacak şekilde $p\in PH$ fonksiyonu vardır.

$$Tf(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n-(-1)^n\overline{a}_n]z^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\overline{b}_n-(-1)^n b_n]\bar{z}^n$$

olduğundan, Teorem 3.1.10 gereği $Tf(z)\in MHS^*$ dır. Böylece $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{Df(z)}{f(z)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{1}{z}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}[a_n-(-1)^n\overline{a}_n]z^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}[\overline{b}_n-(-1)^n b_n]\bar{z}^n}{\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[a_n-(-1)^n\overline{a}_n]z^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[\overline{b}_n-(-1)^n b_n]\bar{z}^n}\right\}>0$$

dır.

$$s(z)=\frac{\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}[a_n-(-1)^n\overline{a}_n]z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}[\overline{b}_n-(-1)^n b_n]\overline{z}^n}{\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[a_n-(-1)^n\overline{a}_n]z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[\overline{b}_n-(-1)^n b_n]\overline{z}^n}$$

olarak tanımlanırsa, $s(z)$ fonksiyonu PH sınıfına ait olup $z\in\mathbb{D}$ için

$$s(z)\prec\frac{1}{(1-z)^2}-\frac{\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2}$$

dir. Burada $q(z)=(1-z)^{-2}-\overline{z}^2(1-\overline{z})^{-2}\in PH$ dir. Ayrıca Hadamard çarpımı yardımıyla $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ için

$$s(iz)=\frac{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}[a_n-(-1)^n\overline{a}_n]i^{n+1}z^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}[\overline{b}_n-(-1)^n b_n](-1)^n i^{n+1}z\overline{z}^n}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[a_n-(-1)^n\overline{a}_n]i^{n+1}z^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[\overline{b}_n-(-1)^n b_n](-1)^n i^{n+1}z\overline{z}^n}$$

$$=s(z)*\left(\frac{1}{1-iz}+\frac{1}{1+i\overline{z}}\right)\prec\frac{1}{(1-z)^2}-\frac{\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2} \tag{3.17}$$

elde ederiz. (3.17) denkleminden

$$K(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[a_n-(-1)^n\overline{a}_n]i^{n+1}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}[\overline{b}_n-(-1)^n b_n](-1)^n i^{n+1}\overline{z}^n$$

$$=Tf(z)*\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-iz}+\frac{1}{1+i\overline{z}}\right) \tag{3.18}$$

fonksiyonunun MHS^* sınıfına ait ve reel katsayılı olduğu görülür. Bu nedenle

$$Tf(z)=K(z)*\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{1+iz}+\frac{\overline{z}}{1+i\overline{z}}\right)=-K(-iz) \tag{3.19}$$

bulunur. Böylece (3.16) ve (3.19) bağıntılarından (3.15) bağıntısı elde edilir.

Şimdi K fonksiyonunun (3.14) denklemini sağladığını gösterelim. Her $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ için $p(z)=-\dfrac{Df(z)}{Tf(z)}$ olduğundan $\overline{p(-\overline{z})}=-\dfrac{D\overline{(-f(-\overline{z}))}}{Tf(z)}$ olur. Böylece,

$$-\frac{DTf(z)}{Tf(z)}=-\frac{1}{2}\left\{\frac{Df(z)+D\overline{(-f(-\overline{z}))}}{Tf(z)}\right\}=\frac{1}{2}(p(z)+\overline{p(-\overline{z})})$$

ve

$$-\frac{DK(z)}{K(z)}=\left(-\frac{DTf(z)}{Tf(z)}\right)*\left(\frac{1}{1-iz}+\frac{1}{1+i\overline{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(p(z) + \overline{p(-\bar{z})}) * \left(\frac{1}{1-iz} + \frac{1}{1+i\bar{z}} \right)$$
$$= \frac{1}{2}(p(iz) + \overline{p(i\bar{z})})$$

elde edilir. $p(z) \in PH$ olduğundan (3.14) denkleminin sağlandığı görülür.

Tersine, $f \in MH$ ise (3.14) ve (3.15) bağıntılarını sağlayan bir $p \in PH$ fonksiyonu ile reel katsayılı bir $K \in MHS^*$ fonksiyonları için $f \in MHS^*_{SC}$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için sadece $Tf(z) = -iK(-iz)$ olduğunu göstermek yetecektir. (3.15) bağıntısından $p(z) = \frac{Df(z)}{iK(-iz)}$ ve $\overline{p(-\bar{z})} = -\frac{D\overline{(f(-\bar{z})}}{i\overline{K(-i\bar{z})}}$ dır. $K(-iz) = \overline{K(i\bar{z})}$ olduğundan

$$-\frac{DK(-iz)}{K(-iz)} = \frac{1}{2}(p(z) + \overline{p(-\bar{z})}) = \frac{1}{2}\left(\frac{Df(z)}{iK(-iz)} - \frac{D\overline{(f(-\bar{z}))}}{i\overline{K(-i\bar{z})}} \right) = \frac{DTf(z)}{iK(-iz)} = -i\frac{DTf(z)}{K(-iz)}$$

olur. Bu son ifadeden $Tf(z) = -iK(-iz)$ eşitliği elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. ■

Çalışmamızın bu kısmında, R. A.Al-Khal ve H. A. Al-Kharsani tarafından (Al-Khal ve Al-Kharsani 2007) Salagean operatörü yardımıyla oluşturulan meromorf fonksiyonların benzer sınıfı meromorf harmonik fonksiyonların için oluşturuldu.

Tanım 3.1.15. $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere (3.1) bağıntısını ve

$$\mathrm{Re}\left\{ -\frac{2D^{n+1}f(z)}{D^n f(z) - D^n f(-z)} \right\} > \alpha \tag{3.20}$$

eşitsizliğini sağlayan meromorf harmonik f fonksiyonlarının sınıfını $MHS^*_S(n,\alpha)$ ile gösterelim. Ayrıca $a_k \ge 0,\ b_k \ge 0$ olmak üzere $MHS^*_S(n,\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların

$$h_n(z) = \frac{(-1)^n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \qquad \text{ve} \qquad g_n(z) = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \tag{3.21}$$

özelliğindeki h_n ve g_n fonksiyonları için $f_n = h_n + \overline{g}_n$ fonksiyonlarının sınıfını $\overline{MHS}^*_S(n,\alpha)$ ile gösterelim.

Aşağıdaki teorem $MHS_S^*(n,\alpha)$ sınıfı için gereklilik şartını ifade etmektedir.

Teorem 3.1.16. (3.1) biçiminde verilen $f(z)$ fonksiyonu için

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(|a_{2k}|+|b_{2k}|)(2k)^{n+1}+((2k-1+\alpha)|a_{2k-1}|+(2k-1-\alpha)|b_{2k-1}|)(2k-1)^n]$$

$$\leq 1-\alpha \tag{3.22}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ halka bölgesinde harmonik yalınkat ve yön koruyandır. Ayrıca $f\in MHS_S^*(n,\alpha)$ dır.

İspat. $0<|z_1|\leq|z_2|<1$ için

$$\begin{aligned}
\left|f(z_1)-f(z_2)\right| &\geq \left|h(z_1)-h(z_2)\right|-\left|g(z_1)-g(z_2)\right| \\
&\geq \frac{\left|z_1-z_2\right|}{|z_1||z_2|}-\left|z_1-z_2\right|\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)\left|z_1^{k-1}+\cdots+z_2^{k-1}\right| \\
&> \frac{\left|z_1-z_2\right|}{|z_1||z_2|}\left[1-|z_2|^2\sum_{k=1}^{\infty}k(|a_k|+|b_k|)\right] \\
&= \frac{\left|z_1-z_2\right|}{|z_1||z_2|}\left[1-|z_2|^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}2k(|a_{2k}|+|b_{2k}|)\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)(|a_{2k-1}|+|b_{2k-1}|)\right)\right] \\
&> \frac{\left|z_1-z_2\right|}{|z_1||z_2|}\left[1-\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}(|a_{2k}|+|b_{2k}|)\right. \\
&\qquad\left.-\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^n(2k-1+\alpha)|a_{2k-1}|-\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^n(2k-1-\alpha)|b_{2k-1}|\right]
\end{aligned}$$

olur. (3.22) bağıntısı gereği son eşitsizlik negatif değildir. Böylece $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ halka bölgesinde yalınkattır. $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ halka bölgesinde yön koruyan olduğunu göstermek için $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ halka bölgesinde $|h'(z)|\geq|g'(z)|$ olduğunu göstermek yeterlidir. O halde,

$$\begin{aligned}
|h'(z)| &\geq 1-\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k||z|^{k-1}=1-\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k|r^{k-1}>1-\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k| \\
&\geq 1-\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}|a_{2k}|-\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^n(2k-1+\alpha)|a_{2k-1}|
\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}|b_{2k}|+\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{n}(2k-1-\alpha)|b_{2k-1}|$$
$$\geq \sum_{k=1}^{\infty}2k|b_{2k}|+\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)|b_{2k-1}|>\sum_{k=1}^{\infty}k|b_k|r^{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}k|b_k||z|^{k-1}\geq|g'(z)|$$

dır.

Son olarak $f(z)\in MHS_S^*(n,\alpha)$ olduğunu gösterelim.

$$D^n f(z)=D^n h(z)+(-1)^n\overline{D^n g(z)}$$

ve

$$T^n(z)=D^n h(z)+(-1)^n\overline{D^n g(z)}-D^n h(-z)-(-1)^n\overline{D^n g(-z)}$$

olmak üzere $0\leq\alpha<1$ için

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{2D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)-D^n f(-z)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{-\frac{2D^{n+1}h(z)-2(-1)^n\overline{D^{n+1}g(z)}}{T^n(z)}\right\}\geq\alpha$$

olur. $f(z)\in MHS_S^*(n,\alpha)$ olduğunu göstermek için iyi bilinen

$$\operatorname{Re}w\geq\alpha\Leftrightarrow|1-\alpha+w|\geq|1+\alpha-w|$$

önermesinden faydalanacağız. Buna göre

$$\left|1-\alpha-\frac{2D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)-D^n f(-z)}\right| \geq \left|1+\alpha+\frac{2D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)-D^n f(-z)}\right|$$

veya denk bir ifadeyle

$$\left|2D^{n+1}f(z)-(1-\alpha)(D^n f(z)-D^n f(-z))\right|$$

$$-\left|2D^{n+1}f(z)+(1+\alpha)(D^n f(z)-D^n f(-z))\right| \geq 0$$

olduğunu göstermeliyiz. $D^n f(z)$ ve $D^{n+1}f(z)$ operatörlerinin seri açılımlarından

$$\left|\frac{2(-1)^n}{z}-2\sum_{k=1}^{\infty}k^{n+1}a_k\,z^k+2(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}k^{n+1}\overline{b_k}\,\overline{z}^k\right.$$

$$+(1-\alpha)\left[\frac{(-1)^n}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}k^n a_k\,z^k+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}k^n\overline{b_k}\,\overline{z}^k+\frac{(-1)^n}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}k^n a_k\,z^k\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}k^n\overline{b_k}\,\overline{z}^k\right]\right|-\left|\frac{2(-1)^n}{z}-2\sum_{k=1}^{\infty}k^{n+1}a_k\,z^k+2(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}k^{n+1}\overline{b_k}\,\overline{z}^k\right.$$

$$-(1+\alpha)\left[\frac{(-1)^n}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}k^n a_k\,z^k+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}k^n\overline{b_k}\,\overline{z}^k+\frac{(-1)^n}{z}\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{\infty}k^n a_k\,z^k+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}k^n\overline{b_k}\,\overline{z}^k\right]\right|$$

$$=\left|\frac{2(2-\alpha)(-1)^n}{z}-\sum_{k=1}^{\infty}(2k-(1-\alpha)+(-1)^k(1-\alpha))\,k^n a_k\,z^k)\right.$$

$$\left.+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}(2k+(1-\alpha)-(-1)^k(1-\alpha))\,k^n\overline{b_k}\,\overline{z}^k\right|$$

$$-\left|\frac{2\alpha(-1)^n}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}(2k+(1+\alpha)-(-1)^k(1+\alpha))k^n a_k\,z^k\right.$$

$$\left.-(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}(2k-(1-\alpha)+(-1)^k(1+\alpha))k^n\overline{b_k}\,\overline{z}^k\right|$$

$$=\left|\frac{2(2-\alpha)(-1)^n}{z}-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-2+\alpha)(2k-1)^n a_{2k-1}\,z^{2k-1}\right.$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}a_{2k}\,z^{2k}+2(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}\overline{b}_{2k}\overline{z}^{2k}$$

$$\left.+2(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}(2k-\alpha)(2k-1)^n\overline{b}_{2k-1}\overline{z}^{2k-1}\right|-\left|\frac{2\alpha(-1)^n}{z}+2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}a_{2k}\,z^{2k}\right.$$

$$-2(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}\overline{b_{2k}}\overline{z}^{2k}-2(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}(2k-2+\alpha)(2k-1)^n\overline{b_{2k-1}}\overline{z}^{2k-1}\Bigg|$$

$$\geq\frac{2(2-\alpha)}{|z|}-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-2+\alpha)(2k-1)^n|a_{2k-1}||z|^{2k-1}$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}|a_{2k}||z|^{2k}-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}|b_{2k}||z|^{2k}$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-\alpha)(2k-1)^n|b_{2k-1}||z|^{2k-1}-\frac{2\alpha}{|z|}$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k+\alpha)(2k-1)^n|a_{2k-1}||z|^{2k-1}$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}|a_{2k}||z|^{2k}-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}|b_{2k}||z|^{2k}$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-2+\alpha)(2k-1)^n|b_{2k-1}||z|^{2k-1}$$

$$\geq\frac{4(1-\alpha)}{|z|}\Bigg[1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^{n+1}}{1-\alpha}(|a_{2k}|+|b_{2k}|)$$

$$+\frac{(2k-1)^n}{1-\alpha}\big[(2k-1+\alpha)|a_{2k-1}|+(2k-1-\alpha)|b_{2k-1}|\big]\Bigg]$$

elde edilir. (3.22) bağıntısı gereği son eşitliğin negatif olmadığı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Aşağıdaki teorem $f_n\in\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şartı vermektedir.

Teorem 3.1.17. h_n ve g_n fonksiyonları (3.21) biçiminde olmak üzere $f_n=h_n+\overline{g}_n$ olsun. Bu takdirde $f_n\in\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(a_{2k}+b_{2k})(2k)^{n+1}+((2k-1+\alpha)a_{2k-1}+(2k-1-\alpha)b_{2k-1})(2k-1)^n]\leq 1-\alpha \quad (3.23)$$

bağıntısının sağlanmasıdır.

İspat. $\overline{MHS}_S^*(n,\alpha) \subset MHS_S^*(n,\alpha)$ olduğundan teoremin yeter şartını ispatlamamız yeterlidir. Hipotezde verilen f_n fonksiyonu ve $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{2D^{n+1}f(z)}{D^n f(z) - D^n f(-z)}\right\} \geq \alpha$$

olarak tanımlanırsa

$$\phi(z) = \frac{2}{z} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^n a_{2k-1} z^{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^n b_{2k-1} \bar{z}^{2k-1}$$

fonksiyonu için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{2(1-\alpha)}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}(2k+\alpha-(-1)^k\alpha)k^n a_k z^k}{\phi(z)} + \frac{(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty}(2k-\alpha+(-1)^k\alpha)k^n b_k \bar{z}^k}{\phi(z)}\right\} \geq 0$$

veya

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{2(1-\alpha)}{z} - 2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1} a_{2k} z^{2k}}{\phi(z)} - \frac{2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1+\alpha)(2k-1)^n a_{2k-1} z^{2k-1}}{\phi(z)}\right.$$

$$\left. - \frac{2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1-\alpha)(2k-1)^n b_{2k-1}\bar{z}^{2k-1}}{\phi(z)} - \frac{2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1} b_{2k} z^{2k}}{\phi(z)}\right\} \geq 0 \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.24) eşitsizliği $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ halka bölgesindeki bütün z noktaları için sağlanmalıdır. Özel olarak (3.24) bağıntısının sol tarafında $0 < z = r < 1$ seçilirse

$$\frac{1-\alpha - \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1+\alpha)(2k-1)^n a_{2k-1} r^{2k}}{r\phi(r)/2} - \frac{\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1} a_{2k} r^{2k+1} + (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1} b_{2k} r^{2k+1}}{r\phi(r)/2}$$

$$- \frac{(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1-\alpha)(2k-1)^n b_{2k-1} r^{2k}}{r\phi(r)/2} \quad (3.25)$$

elde edilir. Eğer (3.23) eşitsizliği sağlanmazsa, 1’e yeterince yakın r değerleri için (3.25) bağıntısındaki sayı negatif olur. Böylece (3.25) sayısını negatif yapan (0,1) aralığında bir $z_0 = r_0$ sayısı mevcuttur. Bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi $f_n = h_n + \overline{g}_n \in \overline{MHS}^*_S(n,\alpha)$ fonksiyonları için distorsiyon teoremi verelim.

Teorem 3.1.18. $0 < |z| = r < 1$ için $f_n = h_n + \overline{g}_n \in \overline{MHS}^*_S(n,\alpha)$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{r} - \frac{1-\alpha}{2^{n+1}} r \leq |f_n(z)| \leq \frac{1}{r} + \frac{1-\alpha}{2^{n+1}} r$$

dir.

İspat. $f_n = h_n + \overline{g}_n \in \overline{MHS}^*_S(n,\alpha)$ olsun. f_n fonksiyonunun mutlak değeri alınırsa

$$|f_n(z)| = \left| \frac{(-1)^n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k + (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k z^k} \right| \leq \frac{1}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) r^k$$

$$\leq \frac{1}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) r \leq \frac{1}{r} + \frac{1-\alpha}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{1-\alpha} (|a_k| + |b_k|) r \leq \frac{1}{r} + \frac{1-\alpha}{2^{n+1}} r$$

ve

$$|f_n(z)| = \left| \frac{(-1)^n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k + (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k z^k} \right| \geq \frac{1}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) r^k$$

$$\geq \frac{1}{r} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) r \geq \frac{1}{r} - \frac{1-\alpha}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{1-\alpha} (|a_k| + |b_k|) r \geq \frac{1}{r} - \frac{1-\alpha}{2^{n+1}} r$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.1.19. $A = \left\{ w : |w| < \dfrac{2^{n+1} - 1 + \alpha}{2^{n+1}} \right\}$ olmak üzere $f_n = h_n + \overline{g}_n \in \overline{MHS}^*_S(n,\alpha)$ ise $f_n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus A$ dır.

Teorem 3.1.20. $f_n = h_n + \overline{g}_n \in \overline{MHS}^*_S(n,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $k = 1, 2, \ldots$ için

$$h_{n_0}(z) = g_{n_0}(z) = \frac{(-1)^n}{z}, \quad h_{n_{2k-1}}(z) = \frac{(-1)^n}{z} + \frac{1-\alpha}{(2k-1)^n (2k-1+\alpha)} z^{2k-1},$$

$$h_{n_{2k}}(z) = \frac{(-1)^n}{z} + \frac{1-\alpha}{(2k)^{n+1}} z^{2k}, \quad g_{n_{2k-1}}(z) = \frac{(-1)^n}{z} + \frac{(-1)^n (1-\alpha)}{(2k-1)^n (2k-1-\alpha)} \overline{z}^{2k-1},$$

$$g_{n_{2k}}(z) = \frac{(-1)^n}{z} + \frac{(-1)^n (1-\alpha)}{(2k)^{n+1}} \overline{z}^{2k}$$

ve $x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$ için $\sum_{k=0}^{\infty}(x_k + y_k) = 1$ olmak üzere f_n fonksiyonunun

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(x_k h_{n_k} + y_k g_{n_k})$$

biçiminde yazılmasıdır. Özellikle $\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ sınıfının uç noktaları $\{h_{n_k}\}$ ve $\{g_{n_k}\}$ dır.

İspat. Hipotezde verilen şartlar altında

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(x_k h_{n_k} + y_k g_{n_k}) \\ &= x_0 h_{n_0} + y_0 g_{n_0} + \frac{(-1)^n}{z}\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) + \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1}\frac{1-\alpha}{(2k-1)^n(2k-1+\alpha)}z^{2k-1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k}\frac{1-\alpha}{(2k)^{n+1}}z^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} y_{2k-1}\frac{(-1)^n(1-\alpha)}{(2k-1)^n(2k-1-\alpha)}\overline{z}^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} y_{2k}\frac{1-\alpha}{(2k)^{n+1}}\overline{z}^{2k} \\ &= \frac{(-1)^n}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(x_k + y_k) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{(2k-1)^n(2k-1+\alpha)}x_{2k-1}z^{2k-1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{(2k)^{n+1}}x_{2k}z^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-\alpha)}{(2k-1)^n(2k-1-\alpha)}y_{2k-1}\overline{z}^{2k-1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-\alpha)}{(2k)^{n+1}}y_{2k}\overline{z}^{2k} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1+\alpha)(2k-1)^n\left\{\frac{1-\alpha}{(2k-1)^n(2k-1+\alpha)}x_{2k-1}\right\} \\ &+\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1-\alpha)(2k-1)^n\left\{\frac{1-\alpha}{(2k-1)^n(2k-1-\alpha)}y_{2k-1}\right\} \\ &+\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{n+1}\left\{\frac{1-\alpha}{(2k)^{n+1}}(x_{2k}+y_{2k})\right\} = (1-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) \leq 1-\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f_n \in \overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ dir.

Tersine $f_n \in \overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ olsun. Böylece $k = 1,2,\ldots$ için h_{n_k} ve g_{n_k} hipotezde verilenler fonksiyonlar ve $x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$ olmak üzere,

$$a_{2k} = \frac{(2k)^{n+1}}{1-\alpha} x_{2k}, \qquad a_{2k-1} = \frac{(2k-1)^n (2k-1+\alpha)}{1-\alpha} x_{2k-1}$$

ve

$$b_{2k} = \frac{(2k)^{n+1}}{1-\alpha} y_{2k}, \qquad b_{2k-1} = \frac{(2k-1)^n (2k-1-\alpha)}{1-\alpha} y_{2k-1}$$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
f_n(z) &= h_n(z) + \overline{g_n(z)} \\
&= \frac{(-1)^n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k + (-1)^n \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (x_k + y_k) \frac{(-1)^n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1} \\
&\quad + (-1)^n \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} z^{2k}} + (-1)^n \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} z^{2k-1}} \\
&= x_0 \frac{(-1)^n}{z} + y_0 \frac{(-1)^n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k} \frac{(2k)^{n+1}}{1-\alpha} z^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} \frac{(2k-1)^n (2k-1+\alpha)}{1-\alpha} z^{2k-1} \\
&\quad + (-1)^n \overline{\sum_{k=1}^{\infty} y_{2k} \frac{(2k)^{n+1}}{1-\alpha} z^{2k}} + (-1)^n \overline{\sum_{k=1}^{\infty} y_{2k-1} \frac{(2k-1)^n (2k-1-\alpha)}{1-\alpha} z^{2k-1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (x_k h_{n_k} + y_k g_{n_k})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Gelecek teoremde ise $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$ bölgesinin çapı için bir alt sınır b_1 katsayısına bağlı olarak verilmektedir.

Teorem 3.1.22. $f \in MHS_S^*(n,\alpha)$ olmak üzere $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$ bölgesinin çapı olan d_f için

$$d_f \geq 2\,|1 + b_1|$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $0 < r < 1$ olmak üzere, $|z| = r$ çemberinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resminin çapı $d_f(r)$ ve $d_f^*(r) = \operatorname*{maks}_{|z|=r} |f(z) - f(-z)|$ olsun. O halde,

$$[d_f^*(r)]^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(re^{i\theta}) - f(-re^{i\theta}) |^2 \, d\theta$$

$$= 4\left[\frac{1}{r^2} + b_1 + \overline{b_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(| a_{2k-1} |^2 + | b_{2k-1} |^2) r^{2(2n-1)}\right]$$

dır. Bu takdirde $d_f(r) \geq d_f^*(r)$ olup $r \to 1$ için $d_f(r) \to d_f$ olduğundan

$$d_f \geq 4\left[1 + 2\,\mathrm{Re}\, b_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(| a_{2k-1} |^2 + | b_{2k-1} |^2)\right]$$

elde edilir. Son eşitsizlikte bazı katsayıları ihmal ettiğimizde $d_f \geq 2\sqrt{| 1 + b_1 |^2}$ olur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.1.23. $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$f_n(z) = h_n(z) + \overline{g_n(z)} = \frac{(-1)^n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, z^k + (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, z^k$$

fonksiyonu $\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ sınıfına ve

$$F_n(z) = H_n(z) + \overline{G_n(z)} = \frac{(-1)^n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, z^k + (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} B_k \, z^k$$

fonksiyonu da $\overline{MHS}_S^*(n,\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde $f_n * F_n$ fonksiyonu $\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ sınıfına aittir ve $\overline{MHS}_S^*(n,\alpha) \subset \overline{MHS}_S^*(n,\beta)$ dır.

İspat. $f_n \in \overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ ve $F_n \in \overline{MHS}_S^*(n,\beta)$ olsun. f_n ve F_n fonksiyonlarının $f_n * F_n$ Hadamard çarpımının katsayılarının (3.23) bağıntısını sağladığını göstermek ispatı tamamlayacaktır. F_n fonksiyonunun katsayıları $| A_k | \leq 1$, $| B_k | \leq 1$, $k = 1,2,...$, olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_{2k}A_{2k}+b_{2k}B_{2k})\frac{(2k)^{n+1}}{1-\beta}+((2k-1+\beta)a_{2k-1}A_{2k-1}+(2k-1-\beta)b_{2k-1}B_{2k-1})\frac{(2k-1)^n}{1-\beta}\right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_{2k}+b_{2k})\frac{(2k)^{n+1}}{1-\beta}+((2k-1+\beta)a_{2k-1}+(2k-1-\beta)b_{2k-1})\frac{(2k-1)^n}{1-\beta}\right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_{2k}+b_{2k})\frac{(2k)^{n+1}}{1-\alpha}+((2k-1+\alpha)a_{2k-1}+(2k-1-\alpha)b_{2k-1})\frac{(2k-1)^n}{1-\alpha}\right]$$

$$\leq 1$$

elde edilir. Teorem 3.1.17 gereği $f_n * F_n \in \overline{MHS}_S^*(n,\alpha) \subset \overline{MHS}_S^*(n,\beta)$ olduğu görülür. ■

Gelecek teorem $\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ sınıfının konveks kombinasyon altında kapalı olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 3.1.24. $\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ sınıfı konveks kombinasyon altında kapalıdır.

İspat. $i=1,2,3,\ldots$ için f_{n_i} fonksiyonları

$$f_{n_i}(z)=\frac{(-1)^n}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{i_k}z^k+(-1)^n\overline{\sum_{k=1}^{\infty}b_{i_k}z^k}$$

olmak üzere $f_{n_i}(z)\in\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ dır. Teorem 3.1.17 gereği $i=1,2,3,\ldots$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(a_{i_{2k}}+b_{i_{2k}})(2k)^{n+1}+((2k-1+\alpha)a_{i_{2k-1}}+(2k-1-\alpha)b_{i_{2k-1}})(2k-1)^n]\leq 1-\alpha \qquad (3.26)$$

olduğundan $0\leq t_i\leq 1$ için $\sum_{i=1}^{\infty}t_i=1$ olmak üzere f_{n_i} fonksiyonlarının konveks kombinasyonu

$$\sum_{i=1}^{\infty}t_i f_{n_i}(z)=\frac{(-1)^n}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_i a_{i_k}\right)z^k+(-1)^n\overline{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_i b_{i_k}\right)z^k}$$

olup (3.26) gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k)^{n+1}}{1-\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}t_i\,(a_{i_{2k}}+b_{i_{2k}})+\frac{(2k-1)^n}{1-\alpha}\left(\frac{(2k-1+\alpha)}{1-\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}t_i a_{i_{2k-1}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{(2k-1-\alpha)}{1-\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}t_i b_{i_{2k-1}}\right]\leq\sum_{i=1}^{\infty}t_i=1$$

olduğu görülür. Böylece Teorem 3.1.17 gereği $\sum_{i=1}^{\infty}t_i\ f_{n_i}(z)\in\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ dır. ■

Şimdi vereceğimiz teorem $\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ sınıfı için klasik alan teorem verilecek.

Teorem 3.1.25. $f_n\in\overline{MHS}_S^*(n,\alpha)$ ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(|a_k|^2-|b_k|^2)\leq 1+2\operatorname{Re}b_1$$

dır. Eşitlik ancak ve ancak $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$ alanının sıfır olması durumunda gerçekleşir.

İspat. $C_r=\{z:0<|z|=r<1\}$ çemberinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resmi Γ_r eğrisi olsun. O halde, Γ_r eğrisi ile sınırlanan bölgenin alanı

$$\int_{\Gamma_r}\bar{f}df=\left[\frac{1}{2i}\int_{|z|=r}\bar{h}h'dz+\frac{1}{2i}\int_{|z|=r}g\overline{g'}d\bar{z}+\frac{1}{2i}\int_{|z|=r}gh'dz+\frac{1}{2i}\int_{|z|=r}\overline{h\,g'd\bar{z}}\right]$$
$$=\pi\left[\sum_{k=1}^{\infty}k(|a_k|^2-|b_k|^2)r^{2k}-\frac{1}{r^2}-2\operatorname{Re}b_1\right]$$

dır. $r\to 1$ için Γ_r eğrisi $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$ nin sınır eğrisine karşılık gelir $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$ bölgesinin sınırı saat yönünde yönlendirilmiş kapalı bir eğri olduğundan, son elde edilen eşitlikten $r\to 1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(|a_k|^2-|b_k|^2)-1-2\operatorname{Re}b_1\leq 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.2. Orijin Dışında Basit Kutup Noktası olan Meromorf Harmonik Fonksiyonların $S_H(p)$ Sınıfı

Önceki kısımda orijinde basit kutba sahip meromorf harmonik fonksiyonların $MHS_{SC}^{*}(\alpha)$ ve $MHS_{S}^{*}(n,\alpha)$ sınıfları incelendi. Bu kısımda ise $0 \le p < 1$ olmak üzere p noktasında basit kutba sahip ve $\lim_{z \to p} f(z) = \infty$ özelliğinde $\mathbb{D}$ birim diskinde tanımlı meromorf harmonik yalınkat yön koruyan fonksiyonların $S_H(p)$, $S'_H(p)$ sınıfları tanımlandı ve bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı bağıntıları, alan ve distorsiyon teoremleri verildi. Son olarak meromorf harmonik yalınkat yön koruyan yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için gereklilik şartları ifade ve ispat edildi.

$0 \le p < 1$ olmak üzere p noktasında kutba sahip ve $\lim_{z \to p} f(z) = \infty$ özelliğindeki harmonik fonksiyonlarının

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + A \log|z - p| \tag{3.27}$$

biçiminde bir gösterime sahip olduklarından 2. bölümde bahsedilmişti. Burada $h(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere $z \in \mathbb{D} \setminus \{p\}$ için

$$h(z) = \frac{\alpha}{z - p} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n \tag{3.28}$$

veya $z \in \mathbb{D}_p = \{z \ : \ 0 < |z - p| < 1 - p\}$ için

$$h(z) = \frac{\alpha}{z - p} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - p)^n \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - p)^n \tag{3.29}$$

biçiminde seriye açılımına sahipler. p noktasında kutba sahip ve $\lim_{z \to p} f(z) = \infty$ özelliğindeki (3.27) bağıntısını sağlayan meromorf harmonik yön koruyan yalınkat fonksiyonların sınıfını $S_H(p)$ ile gösterelim. Ayrıca $A = 0$ alınarak logaritmik singülerlik kaldırılabilir. Böylece,

$$S'_H(p) = \{ f \in S_H(p) : A = 0 \}$$

özelliğinde $S_H(p)$ sınıfının bir alt sınıfı tanımlanmış olur.

Teorem 3.2.1. (3.28) bağıntısını sağlayan h ve g fonksiyonları için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(|c_n| + |d_n|) \le \frac{|\alpha|}{(1 + p)^2} \tag{3.30}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu $\mathbb{D} \setminus \{p\}$ halka bölgesinde harmonik yalınkat, yön koruyan ve $S'_H(p)$ sınıfına aittir. Ayrıca, $0 \le p < 1$ olmak üzere $|z| = r < 1$ için

$$\frac{|\alpha|(1+p-r)}{(1+p)^2} < |f(z)| < \frac{|\alpha|(1+p+r)}{|r-p|(1+p)}$$

dır.

İspat. İlk olarak f fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterelim. $z_1 \neq p$, $z_2 \neq p$ ve $|z_1| \le |z_2| < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &\ge |h(z_1) - h(z_2)| - |g(z_1) - g(z_2)| \\
&\ge \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - p||z_2 - p|}\left[|\alpha| - |z_1 - p||z_2 - p|\sum_{n=1}^{\infty} n\,(|c_n| + |d_n|)\,|z_2|^{n-1}\right] \\
&> \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - p||z_2 - p|}\left[|\alpha| - (1+p)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\,(|c_n| + |d_n|)\,|z_2|\right] \\
&> \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - p||z_2 - p|}\left[|\alpha| - (1+p)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\,(|c_n| + |d_n|)\right] \ge 0
\end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{D} \setminus \{p\}$ halka bölgesinde yalınkattır. f fonksiyonunun yön koruyan olduğunu göstermek için $\mathbb{D} \setminus \{p\}$ halka bölgesinde $|h'(z)| > |g'(z)|$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. O halde, (3.30) bağıntısından dolayı

$$\begin{aligned}
|h'(z)| &= \frac{1}{|z-p|^2}\left|\alpha - (z-p)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}\right| \\
&\ge \frac{1}{|z-p|^2}\left[|\alpha| - |z-p|^2 \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|\right] \\
&> \frac{1}{(1+p)^2}\left[|\alpha| - (1+p)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|\right] \\
&\ge \frac{|\alpha|}{(1+p)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n| \ge \sum_{n=1}^{\infty} n|d_n||z|^{n-1} \\
&\ge |g'(z)|
\end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu yön koruyandır.

Son olarak f fonksiyonunun modülü için alt ve üst sınırları verelim. $|z| = r < 1$ için f fonksiyonunun modülü alınırsa (3.28) bağıntılarından

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \frac{\alpha}{z-p} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n} \right| \\
&\geq \frac{1}{|z-p|}\left[|\alpha| - |z-p| \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n| + |d_n|)|z|^n \right] \\
&> \frac{1}{(1+p)}\left[|\alpha| - (1+p) \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n| + |d_n|) r \right] \\
&\geq \frac{|\alpha|(1+p-r)}{(1+p)^2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \frac{\alpha}{z-p} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n} \right| \\
&\leq \frac{1}{|z-p|}\left[|\alpha| + |z-p| \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n| + |d_n|)|z|^n \right] \\
&< \frac{1}{|r-p|}\left[|\alpha| + (1+p) \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n| + |d_n|) r \right] \\
&\leq \frac{|\alpha|(1+p+r)}{|r-p|(1+p)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.2.1, $S'_H(p)$ sınıfına ait ve (3.30) bağıntısını sağlayan fonksiyonların yerel olarak sınırlı olduğunu ifade eder. Bu durum $S'_H(p)$ sınıfının normal olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.2. Eğer $f \in S_H(p)$ ise

$$|A| \leq 2|\alpha|/(1-p) \quad \text{ve} \quad |b_1| \leq |\alpha|/(1-p)$$

ve $f \in S'_H(p)$ ise

$$|b_1| \leq |\alpha|/(1-p)^2 \quad \text{ve} \quad |b_2| \leq |\alpha|/2(1-p)^3$$

dır. Eşitsizlikler kesin olup eşitlikler sırası ile

$$f(z) = \frac{\alpha}{z-p} - \frac{\alpha p}{1-p} + \frac{\alpha}{1-p}\bar{z} + \frac{2\alpha}{1-p}\log|z-p|$$

ve

$$f(z)=\frac{\alpha}{z-p}+\frac{\alpha}{(1-p)^2}\bar{z}$$

fonksiyonu için gerçeklenir.

İspat. (3.29) bağıntısı ile verilen $f\in S_H(p)$ fonksiyonu yön koruyan olduğundan f fonksiyonunun Jakobiyeni olan $|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2$ sayısı pozitiftir. Böylece

$$|f_{\bar{z}}(z)|=\left|g(z)+\frac{\bar{A}}{2(z-p)}\right|\leq|f_z|=\left|h'(z)+\frac{A}{2(z-p)}\right|$$

elde edilir. Son eşitlik özdeş olarak sıfır olursa f fonksiyonu sabit olmak zorundadır, bu durumda yalınkat olamaz.

$$\begin{aligned}a(z)=\frac{\overline{f_{\bar{z}}(z)}}{f_z(z)}&=\frac{2(z-p)^2g'(z)+\bar{A}(z-p)}{2(z-p)^2h'(z)+A(z-p)}\\&=\frac{2(z-p)^2g'(z)+\bar{A}(z-p)}{-2\alpha+2(z-p)^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right)+A(z-p)}\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $a(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}_p\cup\{p\}$ diskinde analitik ve $|a(z)|<1$ dir. Teoremde verilen eşitsizlikleri göstermek için, $\widetilde{\mathbb{D}}$ da analitik $w(z)=w_0+w_1z^{-1}+...$ açılımına sahip ve $|w(z)|<1$ bağıntısını sağlayan w fonksiyonu için iyi bilinen $|w_0|\leq 1$ ve $|w_1|\leq 1-|w_0|^2$ eşitsizliklerinden faydalanacağız.

$$\varphi(z)=\frac{1-p}{z}+p$$

fonksiyonu $\widetilde{\mathbb{D}}$ bölgesini $\mathbb{D}_p\cup\{p\}$ diskine konform olarak resmeder. Böylece

$$\begin{aligned}k(z)=a(\varphi(z))&=\frac{2(\varphi(z)-p)^2g'(\varphi(z))+\bar{A}(\varphi(z)-p)}{-2\alpha+2(\varphi(z)-p)^2\,(1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1})+A(\varphi(z)-p)}\\&=-(1-p)\frac{\bar{A}}{2\alpha}z^{-1}-(1-p)^2\left(\frac{b_1}{\alpha}+\frac{|A|^2}{4\alpha^2}\right)z^{-2}\\&\quad-(1-p)^3\left(\frac{2b_2}{\alpha}+\frac{\bar{A}a_1}{2\alpha^2}+\frac{A}{2\alpha^2}+\frac{A|A|^2}{8\alpha^3}\right)z^{-3}+...\end{aligned}\tag{3.31}$$

fonksiyonu $\widetilde{\mathbb{D}}$ da analitik ve $|k(z)|<1$ dir. Maksimum prensibi gereği $w(z)=zk(z)$ fonksiyonu da $|w(z)|<1$ eşitsizliğini sağladığından $w(z)$ sınırlıdır. O halde,

$$|A|\leq\frac{2|\alpha|}{1-p}$$

ve

$$\left|\frac{(1-p)^2 b_1}{\alpha}+\frac{(1-p)^2}{4\alpha^2}|A|^2\right|\le 1-\left|\frac{(1-p)\overline{A}}{2\alpha}\right|^2$$

olur. Böylece,

$$|b_1|\le\frac{|\alpha|}{1-p}$$

elde edilir.

$f\in S'_H(p)$ fonksiyonu için $A=0$ olduğundan (3.31) bağıntısı gereği

$$k(z)=-\frac{(1-p)^2 b_1}{\alpha}z^{-2}-\frac{2(1-p)^3 b_2}{\alpha}z^{-3}+\ldots$$

olur. Bu durumda $w(z)=z^2k(z)$ olarak seçildiğinde $w(z)$ fonksiyonu için $|w(z)|<1$ olup $w(z)$ sınırlıdır. O halde,

$$|b_1|\le\frac{|\alpha|}{(1-p)^2}$$

ve

$$\left|\frac{2(1-p)^3 b_2}{\alpha}\right|\le 1-\left|\frac{(1-p)^2 b_1}{\alpha}\right|^2$$

veya

$$|b_2|\le\frac{|\alpha|}{2(1-p)^3}\left(1-\left|\frac{(1-p)^2 b_1}{\alpha}\right|^2\right)\le\frac{|\alpha|}{2(1-p)^3}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

W. Hengartner ve G. Schober (1987) yerel kuasikonform fonksiyonların sınıfı için distorsiyon eşitsizliğini bulunduran aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat etmişlerdir.

Lemma 3.2.3. Eğer f fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde

$$|f_{\bar z}(z)|\le|z||f_z(z)|$$

ve $\beta>1$ olmak üzere $z\to 0$ için

$$f(z)=z+O(|z|^{\beta})$$

bağıntılarını sağlayan bir difeomorfizmi ise

$$|f(z)| \geq \frac{|z|}{4(1+|z|)^2}$$

dir. Yani $f(\mathbb{D})$ görüntü bölgesi $\{w : |w| < 1/16\}$ diskini kapsar.

$S'_H(p)$ sınıfının sıfır değerini almayan fonksiyonlarının sınıfını

$$S_H^0(p) = \{f - c \ : \ f \in S'_H(p) \ \text{ve} \ c \notin f(\mathbb{D}_p)\}$$

ile gösterelim.

Aşağıdaki teorem $S'_H(p)$ sınıfına ait fonksiyonların almadığı değerler için bir sınır vermektedir.

Teorem 3.2.4. $S_H^0(p)$ sınıfına ait

$$f(z) = \frac{\alpha}{z-p} - c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-p)^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-p)^n} \tag{3.32}$$

fonksiyonu için

$$|f(z)| \leq \frac{4|\alpha|(1-p+|z-p|)^2}{(1-p)^2 \, |z-p|}$$

ve

$$|c| \leq \frac{16|\alpha|}{1-p}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.32) bağıntısı ile verilen f fonksiyonu $S_H^0(p)$ sınıfına ait olsun. O halde,

$$\widetilde{f}(z) = \frac{\alpha}{(1-p) f((1-p)z + p)}$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinin

$$|\widetilde{f}_{\bar{z}}(z)| \, / \, |\widetilde{f}_z(z)| = |a((1-p)z + p)| \leq |z|$$

ve $z \to 0$ için

$$\widetilde{f}(z) = z + z^2 + O(|z|^2)$$

bağıntılarını sağlayan difeomorfizmidir. Böylece Lemma 3.2.3 gereği, $r < 1-p$ için

$$|c| = \left| \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{4|\alpha|(1-p+r)^2}{(1-p)^2 r}$$

olur. Bu son eşitlikten $r \to 1-p$ için $|c| \leq \dfrac{16|\alpha|}{1-p}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

■

Teorem 3.2.4 den şu geometrik yorumu çıkarabiliriz: $\{w : |w| > 16|\alpha|/(1-p)\}$ bölgesi $\mathbb{D}_p$ halka bölgesinin $f = h + \overline{g} \in S_H^0(p)$ fonksiyonları altındaki resminin alt kümesidir.

Aşağıdaki teorem $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}_p)$ bölgesinin çapı için α ve b_1 katsayısına bağlı olarak bir alt sınır vermektedir.

Teorem 3.2.5. (3.29) bağıntısı ile verilen h ve g fonksiyonları için $f = h + \overline{g} \in S_H(p)$ olsun. Bu durumda $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}_p)$ bölgesinin çapı olan d_f için

$$d_f \geq \frac{2|\alpha + (1-p)^2 b_1|}{1-p} \tag{3.33}$$

eşitsizliğini sağlar. Eşitlik

$$|b_1| = |\alpha|/(1-p)^2 \quad \text{ve} \quad A = 0$$

veya

$$b_1 = -\alpha/(1-p)^2 \quad \text{ve} \quad |A| \leq 2|\alpha|/(1-p)$$

veya

$$|b_1| < |\alpha|/(1-p)^2 \quad \text{ve} \quad |A| \leq \frac{|\alpha|^3 - (1-p)^4 |\alpha| |b_1|^2}{(1-p)^2 \left| |\alpha| + (1-p)^2 b_1 \right|}$$

olmak üzere

$$f(z) = \frac{\alpha}{z-p} + b_1 \overline{z} - b_1 p + A \log|z-p|$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $0 < r < 1-p$ olmak üzere, $|z-p| = r$ çemberinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resminin çapı $d_f(r)$ ile gösterilsin. $d_f^*(r) = \underset{|z-p|=r}{\text{maks}} |f(z) - f(-z)|$ olarak tanımlanırsa $d_f(r) \geq d_f^*(r)$ ve $r \to 1-p$ için $d_f(r) \to d_f$ dir. O halde,

$$\begin{aligned}
\left[d_f^*(r)\right]^2 &\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(-re^{i\theta})|^2 \, d\theta \\
&= 4\left[\frac{|\alpha|^2}{r^2} + \overline{b_1}\alpha + |a_1|^2 r^2 + |b_1|^2 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{2n+1}|^2 + |b_{2n+1}|^2\right) r^{2(2n+1)}\right] \\
&\geq 4\,|b_1 r + \frac{\alpha}{r}|^2
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikten $r \to 1-p$ için (3.33) bağıntısı elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teoremde ise $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D} \setminus \{p\})$ bölgesinin çapı için bir alt sınır α ve b_1 katsayısına bağlı olarak verilmektedir.

Teorem 3.2.6. (3.28) bağıntısıyla verilen h ve g fonksiyonları için $f = h + \overline{g} \in S_H(p)$ olsun. Bu takdirde $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D} \setminus \{p\})$ bölgesinin çapı olan d_f için

$$d_f \geq 2\left|\alpha + d_1\right| \tag{3.34}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $p < r < 1$ olmak üzere, $|z| = r$ çemberinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resminin çapı $d_f(r)$ olsun. Teorem 3.2.5 in ispatında kullanılan yöntem gereği

$$\begin{aligned}
\left[d_f^*(r)\right]^2 &\geq 4\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha|^2 p^{2(2n-2)}}{r^{2(2n-1)}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} p^{2n-2}\,\text{Re}(\alpha\, d_{2n-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} |d_{2n-1}|^2 r^{2(2n-1)} \right.\\
&\qquad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} |c_{2n-1}|^2 r^{2(2n-1)}\right] \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha p^{2n-2}}{r^{2n-1}} + d_{2n-1} r^{2n-1}\right|^2 \geq 4\left|\frac{\alpha}{r} + d_1 r\right|^2
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizlikten $r \to 1$ için (3.34) bağıntısı elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teorem klasik alan teoremidir.

Teorem 3.2.7. (3.29) bağıntısıyla verilen h ve g fonksiyonları için $f = h + \overline{g} \in S'_H(p)$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{2n}(|a_n|^2 - |b_n|^2) \le \frac{|\alpha|^2 + 2(1-p)^2 \operatorname{Re}(\alpha\, b_1)}{(1-p)^2} \tag{3.35}$$

Ayrıca, eğer h ve g fonksiyonları (3.28) bağıntısını sağlıyorsa $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|c_n|^2 - |d_n|^2) - 2\sum_{n=2}^{\infty} np^{n-1} \operatorname{Re}(\alpha\, d_n) \le \frac{|\alpha|^2}{(1-p^2)^2} \tag{3.36}$$

dır. Eşitlikler ancak ve ancak $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}_p)$ ve $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D} \setminus \{p\})$ alanlarının sıfır olması durumunda geçerlidir.

İspat. $C_r = \{z : 0 < |z-p| = r < 1-p\}$ çemberinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resmi Γ_r eğrisi olsun. $r \to 1-p$ için Γ_r eğrisi $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}_p)$ nin sınır eğrisine yaklaşır. O halde, $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}_p)$ bölgesinin alanı;

$$\lim_{r\to 1-p} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} \overline{f} df$$

$$= \lim_{r\to 1-p} \left[\frac{1}{2i} \int_{|z-p|=r} \overline{h} h' dz + \frac{1}{2i} \int_{|z-p|=r} g \overline{g' dz} + \frac{1}{2i} \int_{|z-p|=r} g h' dz + \frac{1}{2i} \int_{|z-p|=r} \overline{h\, g' dz} \right]$$

$$= \pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n|^2 - |b_n|^2) - \frac{|a|^2}{(1-p^2)^2} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} \operatorname{Re}(b_n) \right]$$

dir. $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}_p)$ bölgesinin sınırı saat yönünde yönlendirilmiş kapalı bir eğri olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n|^2 - |b_n|^2) - \frac{|a|^2}{(1-p)^2} - 2\operatorname{Re}(\alpha b_1) \le 0$$

olur. Bu son eşitsizlikten (3.35) bağıntısı elde edilir.

Benzer şekilde, $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu (3.28) açılımına sahip ise $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D} \setminus \{p\})$ bölgesinin alanı

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{f} df = \pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(|c_n|^2 - |d_n|^2) - \frac{|\alpha|^2}{(1-p^2)^2} - 2\sum_{n=2}^{\infty} np^{n-1} \operatorname{Re}(\alpha\, d_n) \right]$$

olup sınır eğrisi saat yönünde yönlendirilmiş kapalı bir eğri olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|c_n|^2 - |d_n|^2) - 2\sum_{n=2}^{\infty} np^{n-1}\,\mathrm{Re}(\alpha\, d_n) \leq \frac{|\alpha|^2}{(1-p^2)^2}$$

olur. Böylece (3.36) bağıntısı elde edilmiş olur. ■

(3.29) bağıntısıyla verilen h ve g fonksiyonları için $\mathbb{D}_p$ halka bölgesini orijine göre yıldızıl bir bölgenin tümleyenine resmeden $f = h + \overline{g} \in S'_H(p)$ fonksiyonlarının sınıfını $S^*_H(p)$ ile gösterelim. Aşağıdaki sonuç bu sınıfla ilgilidir.

Teorem 3.2.8. h ve g fonksiyonları (3.29) bağıntısıyla verilmiş olsun. $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq \frac{|\alpha|}{(1+p)^2} \tag{3.37}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu $\mathbb{D}_p$ halka bölgesinde harmonik yalınkat, yön koruyan ve $S^*_H(p)$ sınıfına aittir.

İspat. Teorem 3.2.1 in ispatında izlenen yöntem uygulanırsa, f fonksiyonunun $\mathbb{D}_p$ halka bölgesinde harmonik yalınkat ve yön koruyan olduğu görülür.

Şimdi f fonksiyonunun $S^*_H(p)$ sınıfına ait olduğunu gösterelim. f fonksiyonunun $\mathbb{D}_p$ halka bölgesinde yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $0 < |z - p| = r < 1 - p$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(re^{i\theta})) &= \mathrm{Im}\frac{\partial}{\partial\theta}(\log f(re^{i\theta}))\\ &= \mathrm{Re}\frac{(z-p)h'(z) - \overline{(z-p)g'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\\ &:= \mathrm{Re}\frac{A(z)}{B(z)} \leq 0\end{aligned}$$

olmasıdır (Goodman 1983). Bu son eşitsizliğin sağlandığını göstermek için de

"$\mathrm{Re}[-A(z)/B(z)] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |1 - A(z)/B(z)| \geq |1 + A(z)/B(z)|$"

önermesinden veya denk olarak, $|A(z) - B(z)| - |A(z) + B(z)| \geq 0$ eşitsizliğinden faydalanılacak. O halde,

$|A(z) - B(z)| - |A(z) + B(z)|$

$$
\begin{aligned}
&= \left|(z-p)h'(z) - \overline{(z-p)g'(z)} - h(z) - \overline{g(z)}\right| \\
&\quad - \left|(z-p)h'(z) - \overline{(z-p)g'(z)} + h(z) + \overline{g(z)}\right| \\
&= \left| -2\alpha + (z-p)\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_n(z-p)^n - (z-p)\overline{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n(z-p)^n} \right| \\
&\quad - \left| (z-p)\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)a_n(z-p)^n - (z-p)^2\overline{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n(z-p)^n} \right| \\
&\geq 2\,|a| - |z-p|\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,|a_n|\,|z-p|^n - |z-p|\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,|b_n|\,|z-p|^n \\
&\quad - |z-p|\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,|a_n|\,|z-p|^n - |z-p|\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,|b_n|\,|z-p|^n \\
&\geq 2\left[\,|a| - |z-p|^2\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|)\right] \\
&> 2\left[\,|\alpha| - (1+p)^2\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|)\right] \geq 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teorem (3.37) bağıntısını sağlayan fonksiyonlar için distorsiyon özelliğini vermektedir.

Teorem 3.2.9. (3.29) ile verilen h ve g fonksiyonları için $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu (3.37) bağıntısını sağlıyorsa, $0 < |z-p| = r < 1-p$ için

$$
\frac{|\alpha|[(1+p)^2 - r^2]}{(1+p)^2 r} \leq |f(z)| \leq \frac{|\alpha|[(1+p)^2 + r^2]}{(1+p)^2 r} \tag{3.38}
$$

dır.

İspat. h ve g fonksiyonları (3.29) tipinde olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu (3.37) bağıntısını sağlasın. O halde $0 < |z-p| = r < 1-p$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\frac{\alpha}{z-p}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-p)^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-p)^n}\right| \\ &\geq \frac{1}{|z-p|}\left[|\alpha|-|z-p|\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)|z-p|^n\right] \\ &\geq \frac{1}{r}\left[|\alpha|-r^2\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)\right]\geq\frac{|\alpha|[(1+p)^2-r^2]}{(1+p)^2 r}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\frac{\alpha}{z-p}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-p)^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-p)^n}\right| \\ &\leq \frac{1}{|z-p|}\left[|\alpha|+|z-p|\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)|z-p|^n\right] \\ &\leq \frac{1}{r}\left[|\alpha|+r^2\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)\right]\leq\frac{|\alpha|[(1+p)^2+r^2]}{(1+p)^2 r}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

(3.38) eşitsizliğinin 2. kısmından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.10. Teorem 3.2.9 un hipotezleri altında

$$\left\{w\ :\ |w|<\frac{2|\alpha|p}{(1+p)^2}\right\}$$

diski $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D}_p)$ bölgesi tarafından kapsanır.

(3.29) bağıntısıyla verilen h ve g fonksiyonları için $f=h+\overline{g}\in S'_H(p)$ fonksiyonlarının görüntü bölgesinin tümleyeni konveks olanların sınıfını $S_{CH}(p)$ ile gösterelim. Şimdi bu sınıfla ilgili bir sonuç verelim.

Teorem 3.2.11. (3.29) bağıntısıyla verilen h ve g fonksiyonları için $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(|a_n|+|b_n|)\leq\frac{|\alpha|}{(1+p)^2} \tag{3.39}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde f fonksiyonu $\mathbb{D}_p$ halka bölgesinde harmonik yalınkat, yön koruyan ve $S_{CH}(p)$ sınıfına aittir.

İspat. Teorem 3.2.1 in ispatında kullanılan metodla, f fonksiyonunun $\mathbb{D}_p$ halka bölgesinde yalınkat ve yön koruyan olduğu gösterilebilir. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $0 < |z-p| = r < 1-p$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right\}\right) \leq 0$$

veya denk olarak

$$\operatorname{Re}\frac{(z-p)^2 h''(z) + (z-p)h'(z) + \overline{(z-p)^2 g''(z) + (z-p)g'(z)}}{(z-p)h'(z) - \overline{(z-p)g'(z)}} := \operatorname{Re}\frac{A(z)}{B(z)} \leq 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Goodman 1983) . Bu son eşitsizliğin sağlandığını göstermek için de iyi bilinen

$$\text{“}\operatorname{Re}[-A(z)/B(z)] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |1 - A(z)/B(z)| \geq |1 + A(z)/B(z)|\text{”}$$

önermesinden veya denk olarak, $|A(z) - B(z)| - |A(z) + B(z)| \geq 0$ eşitsizliğinden faydalanılacak. O halde, Teorem 3.2.9 da kullanılan yöntemle $f \in S_{CH}(p)$ olduğu görülür. ■

KAYNAKLAR

AHUJA, O.P. ve J.M. JAHANGIRI. 2002. Certain meromorphic harmonic functions. Bull. Malays.Math., Sci. Soc., 25(1): 1–10.

AHUJA, O.P. ve J.M. JAHANGIRI. 2003.Multivalent meromorphic harmonic functions. Adv. Stud.Contemp. Math. (Kyungshang), 7(2): 179–187.

AHLFORS, L.V. 1979. Complex Analysis, Third Edition., Mcgraw-Hill, New York, 336 p.

AL-KHAL, R. A. ve H. A. AL-KHARSANI. 2007. Salagean-Type Harmonic Univalent Functions with Respect to Symmetric Points. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 4: 1-13.

CHEN, M. P. , Z. -R. WU ve Z. -Z. ZOU. 1996. On Functions α -starlike with Respect to Symmetric Conjugate Points, J. Math. Anal. Appl., 201: 25-34.

CLUINE, J. ve T. SHEIL-SMALL. 1984. Harmonic Univalent Functions. Ann. Acad. Sci. Fenn.Ser. Al Math., 9: 3-25.

DUREN, P. 2004. Harmonic Mappings in The Plane, Cambridge University Pres, 212p.

DUREN, P. 1983. Univalent Functions. Cilt II Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 404 p.

HENGARTNER, W. ve G. SCHOBER. 1987. Univalent Harmonic Functions. Trans. Amer. Math. Soc., 299: 1-31.

JUN, S. H. 2000. Typically Real Harmonic Functions. Kangwean-Kyungki Math. Jour. 8(2): 135-138

JAHANGIRI, J.M. ve H. SILVERMAN. 1999. Meromorphic Univalent Harmonic Functions with Negative Coefficients. Bull. Korean Math. Soc. 36: 763-770.

LEWY, H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings., Bull. Amer.Math. Soc. 42: 689-692.

ÖZTÜRK, M. ve S. YALCIN. 2002. On univalent harmonic functions. J. Ineq. Pure Appl. Math., 3(4): 1–8.

ROGOSINSKI, W. 1932. Uber Positive Harmonische Entwicklungen und Typischreele Potenzreihen. Math. Zeit., 35: 93-121.

ROSY, T., B.A. STEPHEN, K.G. SUBRAMANIAN ve J.M. JAHANGIRI. 2002. A class of harmonic meromorphic functions, Tamkang J. Math., 33(1): 5–9.

SALAGEAN, G. S. 1981. Subclasses of Univalent Harmonic Functions, Complex Analysis-Fifth Romanian Finish Seminar, Bucharest, 1: 362-372.

SAKAGUCHI, K. 1959. On a certain univalent mapping. J.Math. Soc. Japan. 2 (1): 72-75.

SCHOBER, G. 1975. Univalent functions-selected topics, Lecture Notes in Mathematics, no.478, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 200 p.

THOMPSON, J.W. 2003. A family of meromorphic harmonic mappings, Complex Variables, 48(8): 627–648.

YALÇIN, S. ve M. ÖZTÜRK. 2000. Typically Real Harmonic Functions. General Mat., 8: 3-4

ZOU, Z. Z. ve Z. R. WU. 2001. On Meromorphically Starlike Functions and Functions Meromorphically Starlike with Respect to Symmetric Conjugate Points. J. Math. Anal. Appl. 261: 17-27.

ÖZ GEÇMİŞ

Hakan Bostancı 28.01.1977 tarihinde Bursa'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bursa'da tamamladıktan sonra 1994 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 1998 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Dumlupınar Üniversitesinde Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2001 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansını tamamladı. Aynı yıl askere gitti. Askerden gelince 2002 yılında 35. madde gereğince Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak Doktora eğitimi yapmak üzere görevlendirildi.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, maddi ve manevi desteğini asla benden esirgemeyen, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla benim yanımda olduğunu her zaman hissettiren, engin bilgi ve fikirleriyle beni aydınlatan ve yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK ve Doç. Dr. Sibel YALÇIN'a yürekten teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemde madden ve manen çok emeği geçen, bana verdikleri değer ve sevgiyle her problemi aşmama yardımcı olan sevgili eşime , anneme ve babama sonsuz teşekkürler.