

**T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

E^n deki ELASTİK EĞRİLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Betül BULCA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

BURSA 2008

**T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

E^n deki ELASTİK EĞRİLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Betül BULCA

**Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

BURSA 2008

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^n deki ELASTİK EĞRİLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Betül BULCA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2008

Bu Tez tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

.....

.....

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ


Eⁿ deki ELASTİK EĞRİLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Betül BULCA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008

Bu Tez 16.07.2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy
çokluğu ile kabul edilmiştir.


Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)


Post-Dr. Ceylan Meroth


Assoc. Dr. Arhan Gürke

ÖZET

Bu çalışmada E^n deki elastik eğriler ele alınmıştır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde elastik eğriler incelenmiştir. İlk olarak Euler-Lagrange Denklemleri, daha sonra yüzeyler üzerindeki elastik eğriler ve dönel yüzey ile küre üzerindeki elastik eğriler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde eğrilerin minimal enerjileri hesaplanmıştır. Bazı örnekler verilmiştir..

Beşinci bölümde elastik şeritlerin Kirchhoff modeli ele alınmıştır.

Altıncı bölümde manyetik alanlar incelenmiş ve bazı örnekler verilmiştir.

Yedinci bölümde DNA'nın elastik şerit modeli incelenmiştir.

ABSTRACT

In this thesis we consider elastic curves in E^n .

This study consists of seven chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, some basic definitions and notions which will be used in other chapters are given.

In the third chapter, we consider elastic curves, Euler-Lagrange Equation is obtained, elastic curves on surfaces, ruled surfaces and spheres are investigated.

In the fourth chapter, minimal energy of some curves are calculated.

In the fifth chapter, Kirchhoff model of elastic rod is defined.

In the sixth chapter magnetic fields are considered and given some examples.

In the final chapter, elastic rod model of DNA is investigated.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3. ELASTİK EĞRİLER.....	7
3. 0. Giriş	7
3. 1. Euler-Lagrange Denklemleri.....	7
3. 2. Yüzeyley Üzerindeki Elastik Eğriler.....	10
3. 3. Dönel Yüzeyley Üzerindeki Elastik Eğriler.....	11
3. 4. Küre Üzerindeki Elastik Eğriler.....	17
4. EĞRİLERİN MİNİMAL ENERJİLERİ.....	22
5. ELASTİK ŞERİTLERİN KIRCHHOFF MODELİ.....	27
5. 0. Giriş.....	27
5. 1. Uzay Eğrileri ve Şeritler.....	27
5. 2. Kirchhoff Denklemleri.....	31
5. 3. Basit Denge Durumundaki Çözümler.....	34
6. MANYETİK VORTİSLER.....	38
6.0. Manyetik Alanlar.....	38
6.1. Örnekler.....	39
7. DNA nın ELASTİK ŞERİT MODELİ	46
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	50
TEŞEKKÜR	51

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1 Dönel Yüzeyin Elastik Eğrisi.....	17
Şekil 2 Dönel Yüzey.....	17
Şekil 3 Elastik Çubuk.....	28
Şekil 4 Helis.....	37
Şekil 5 DNA nın Elastik Şerit Modeli.....	47

SİMGELER DİZİNİ

M, \tilde{M}	Manifold
g, \tilde{g}	Metrik tensör
C^∞	Diferansiyellenebilme
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	M den \mathbb{R} ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
D	Normal koneksiyon
∇	M üzerinde afin koneksiyon
$\tilde{\nabla}$	\tilde{M} üzerinde afin koneksiyon
$\bar{\nabla}$	Van-der Waerden –Bortolotti koneksiyonu
$[,]$	Lie parantez operatörü
\langle , \rangle	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
h	İkinci temel form
f	İmmersiyon
A_ξ	Şekil operatörü
NM	M nin normal demeti
$T_p M$	p noktasında teğet uzay
$T^\perp M$	p noktasında normal uzay
H	Ortalama eğrilik vektörü
ω_A^B	Koneksiyon 1-form
∂	Kısmi türev
Δ	Laplas operatörü
Δ^D	D ye karşılık gelen laplas operatörü
γ	Eğri
$\ , \ $	Norm
κ	Eğrinin 1. eğriliği Eğrinin 2. eğriliği(torsiyonu)
P	Polinom

1. GİRİŞ

Bu çalışmada IE^n deki elastik eğriler ele alınmıştır.

Düzlemdeki elastik bir eğriler (elastica) ilk defa 1740 yılında Bernoulli tarafından ele alınmıştır. Bu eğriler $\int_{\gamma} \kappa^2$ elastik enerjisinin kritik noktaları olarak ele alındı. Daha sonra 1743 yılında düzlemdeki elastik eğriler Euler tarafından sınıflandırıldı. Daha sonra 1928 yılında Radon tarafından çalışıldı. Son yıllarda reel uzay formlarındaki elastik eğriler birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Bryant ve Griffiths 1986, Jurđjevic 1995, Langer ve Singer 1984).

Daha genel olarak türevlenebilir bir $P(\kappa)$ fonksiyonu tanımlandığında γ nın eğrilik enerji fonksiyonu $\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} P(\kappa)$ şeklinde ifade edilir. IE^3 deki bir eğrinin enerjisi ilk defa Blaschke tarafından (Blaschke 1930) da ortaya atılmıştır. Bu çalışma Radon problemi olarak da bilinir. Son yıllarda eğrilik fonksiyonu $P(\kappa) = \kappa^r$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ alınarak bazı çalışmalar yapılmıştır. Böylece Θ nın kritik noktaları genelleştirilmiş r -elastica olarak adlandırılır. Eğer $r=0$ ise $P(\kappa)$ sabittir ve Θ nın genelleştirilmiş 0-elastica basitçe geodeziklerdir. Eğer $r=1$ ise Θ toplam eğrilik fonksiyoneldir. Bu durum (Arroyo ve ark. 2000) ve (Arroyo ve ark. 2002) de çalışılmıştır. Eğer $r=2$ ise klasik elastik eğriler söz konusudur. Bu durumda 2-küre üzerindeki kapalı elastik eğriler (Langer ve Singer 1984) çalışmasında incelenmiştir. Son yıllarda (Arroyo ve ark. 2003) $P(\kappa) = \kappa^2 + \lambda$ halini 2-küre üzerinde incelemişlerdir.

Bu çalışma birinci bölüm giriş olmak üzere yedi bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde elastik eğriler incelenmiştir. İlk olarak Euler-Lagrange Denklemleri, daha sonra yüzeyler üzerindeki elastik eğriler ve dönel yüzey ile küre üzerindeki elastik eğriler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde eğrilerin minimal enerjileri hesaplanmıştır. Bazı örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde elastik şeritlerin Kirchhoff modeli ele alınmıştır.

Altıncı bölümde manyetik alanlar incelenmiş ve bazı örnekler verilmiştir.

Yedinci bölümde DNA nın elastik şerit modeli incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan teorem ve tanımlarla bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 2. 1: M n -boyutlu diferansiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den \mathbb{R} ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir metrik tanımlı ise M ye bir *Riemann Manifoldu* denir. Burada g ye *Riemann metriği* (veya metrik tensör) adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2. 2: M diferansiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) ; (X, Y) \rightarrow \nabla (X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\text{i) } \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\text{ii) } \nabla_{fX + gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$$

$$\text{iii) } \nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$$

lineerlik özelliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir *Afin Koneksiyon* adı verilir (Hacısalıhoğlu 1980). Burada ∇_X operatörüne *X e göre kovaryant türev* denir.

Tanım 2. 3: M bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir Afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y \in \chi(M)$ için, ∇ dönüşümü

$$\text{i) } \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (\text{sıfır torsiyon})$$

$$\text{ii) } X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (\text{koneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği})$$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu* (veya M nin Levi-Civita Koneksiyonu) adı verilir (Chen 1973 ve Hacısalıhoğlu 1980). Bu koneksiyon kısaca M deki Riemann Koneksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2. 4: M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(M) ; (X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir türevlenebilir (yani C^∞ sınıfından) $X, Y \in \chi(U)$ vektör alanı çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ biçiminde üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir. Böylece aşağıdaki özellikler sağlandığında ∇ ya *Linear Koneksiyon* (veya *kovaryant türev*) adı verilir (Hacısalıhoğlu 1980);

- i) $\nabla_{X+Z} Y = \nabla_X Y + \nabla_Z Y ; X, Y, Z \in \chi(M)$
- ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y ; f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
- iii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- iv) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y.$

Tanım 2. 5: M ve \tilde{M} sırasıyla n ve $n+d$ -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $f: M \rightarrow \tilde{M}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için

$$df_p: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(\tilde{M})$$

dönüşümü birebir ise f ye bir *immersiyon* (*daldırma*) denir. Ayrıca, $f: M \rightarrow \chi(M)$ bir homeomorfizm ise f ye bir *imbedding* (*gömme*) denir. Eğer $M^n \subseteq \tilde{M}^{n+d}$ ve $f: M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü bir gömme ise M ye \tilde{M} nin n -boyutlu bir *immersed* (gömülen) *altmanifoldu* adı verilir. Bununla beraber f bir immersiyon olmak üzere $\forall X, Y \in T_p M$ için,

$$\langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{f(p)} = \langle X, Y \rangle_p$$

şartını sağlıyorsa f ye bir *izometrik immersiyon* adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2. 6: $M^n \subseteq \tilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold ve $\tilde{\nabla}$ da \tilde{M} de kovaryant türev olsun. Böylece her $X, Y \in \chi(M)$ ve her p için $(\tilde{\nabla}_X Y)_p$ tanımlıdır. Ayrıca $(\nabla_X Y)_p \in T_p M$ ve $h_p(X, Y) \in T_p^\perp M$

olmak üzere,

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + h_p(X, Y) \quad (2.1)$$

biçiminde *Gauss Denklemi* elde edilir. Burada h , M nin ikinci temel formudur. Eğer $h = 0$ ise M ye *total* (*toplam*) *geodezik* denir (Chen 1973).

Önerme 2. 7: $M^n \subseteq \tilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold ve g ile \tilde{g} de sırasıyla M ve \tilde{M} üzerinde tanımlı metrikler olsun. Böylece $h(X, Y)$ M üzerinde bir normal vektör alanı olup simetrik ve 2-lineerdir. Ayrıca ∇ da M üzerinde indirgenmiş $g = f^*(\tilde{g})$ metriğinin bir Riemann koneksiyonudur.

Tanım 2. 8: $M^n \subseteq \tilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold olmak üzere M ye normal bir birim normal vektör alanı ξ olsun. Böylece $\tilde{\nabla}_X \xi$ nin teğet bileşeni $-A_\xi(X)$ ve normal bileşeni $D_X \xi$ olmak üzere;

$$(\tilde{\nabla}_X \xi)_X = -(A_\xi(X))_X + (D_X \xi)_X \quad (2.2)$$

şeklinde *Weingarten Denklemi* elde edilir. Burada A_ξ ya şekil operatörü, D ye de M nin NM normal demetindeki (normal) koneksiyonu denir.

Önerme 2. 9: i) $A_\xi(X)$, ξ ve X üzerinde 2-lineerdir.

ii) M nin her bir ξ normal vektörü ve X, Y tanjant vektörleri için

$$g(A_\xi(X), Y) = \tilde{g}(h(X, Y), \xi) \quad (2.3)$$

dır.

Tanım 2. 10: M bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann koneksiyonu olsun. Böylece;

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi için,

$$\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0 \quad (2.4)$$

eşitliği sağlanıyorsa α ya M de bir *geodezik eğri* ve $\forall X \in \chi(M)$ için $\alpha(0) = p$ ve $\alpha'(0) = X_p$ olacak şekilde tanımlanan $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ geodeziğine (p, X_p) nin belirlediği geodezik adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2. 11: $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi, $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ şartını sağlıyorsa α ya bir *regüler eğri* denir (O'Neill 1966).

3. ELASTİK EĞRİLER

3.0. Giriş

Bu bölümde yüzey üzerindeki elastik eğrileri ele alınmıştır.

3.1 Euler–Lagrange Denklemleri

M , $g = \langle , \rangle$ metriği ile verilen n -boyutlu Riemannian manifoldu olmak üzere ∇ ve R sırasıyla M üzerinde Levi–Civita koneksiyonu ve eğrilik tensörü olsun.

Tanım 3.1.1 $\gamma: I = [0,1] \rightarrow M$ türevlenebilir (C^∞ sınıfından) bir eğri olsun. Böylece $\forall t \in [0,1]$ ve $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$ için $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$, $\Gamma(s, 0) = \gamma(0)$ ve $\Gamma(s, 1) = \gamma(1)$ biçiminde tanımlanan $\Gamma: (-\epsilon, \epsilon) \times [0,1] \rightarrow M$ dönüşümüne γ eğrisinin bir varyasyonu adı verilir (O’Neill, 1983).

Tanım 3.1.2 $\gamma: I = [0,1] \rightarrow M$ eğrisinin varyasyonu

$$\Gamma(w, t) = \gamma_w(t): (-\epsilon, \epsilon) \times I \rightarrow M^n, \Gamma(0, t) = \gamma(t)$$

biçiminde verilsin. Bu eğrinin γ boyunca varyasyon vektör alanı

$$W = W(t) = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \right|_{s=0} \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır (Arroyo ve ark.).

M üzerinde türevlenebilir eğrilerin uzayını

$$\Omega_{pq} = \{ \gamma \mid \gamma: I=[0,1] \rightarrow M, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \}$$

biçiminde tanımlayalım.

Tanım 3.1.3 Türevlenebilir bir $P(t)$ fonksiyon için Ω_{pq} üzerine etki eden eğrilik enerji fonksiyonu

$$\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} P(\kappa) \quad (3.1.2)$$

ile tanımlanır (Arroyo ve ark.).

Verilen bir $\gamma \in \Omega_{pq}$ eğrisinin birim teğet ve normal vektörleri sırasıyla $T(t)$ ve $N(t)$ olsun. Böylece γ eğrisinin eğriliği

$$\kappa(t) = \|\nabla_T T\| \quad (3.1.3)$$

dir.

Eğrilik enerji fonksiyonunun varyasyon eğrisine kısıtlanması aynı sembol ile temsil edilsin. Yani,

$$\Theta(w) = \Theta(\gamma_w(t)). \quad (3.1.4)$$

olsun. Ayrıca $\Theta(w)$ nın birinci türevini hesaplamak için aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır:

$$\mathcal{K} = P'(\kappa) N \quad (3.1.5)$$

$$\mathcal{J} = \nabla_T \mathcal{K} + (2\kappa P'(\kappa) - P(\kappa)) T, \quad (3.1.6)$$

$$\mathcal{E} = \nabla_T \mathcal{J} + P'(\kappa) R(N, T)N. \quad (3.1.7)$$

Burada

$$P'(\kappa) = \frac{dP}{d\kappa} \quad (3.1.8)$$

dır.

Böylece birinci Frenet formülü

$$\nabla_T T = \kappa N \quad (3.1.9)$$

dır.

Önerme 3.1. 4 $\gamma \in \Omega_{pq}$ eğrisinin varyasyonu $\Gamma(w,s) = \gamma_w(t)$ olsun. Yukarıdaki gösterimler ve şartlar altında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\frac{d}{dw} \Theta(w) \Big|_{w=0} = \int_0^L \langle E, W \rangle ds + B[W, \gamma]_0^L. \quad (3.1.10)$$

Burada

$$B[W, \gamma]_0^L = [\langle \mathcal{K}, \nabla_T W \rangle - \langle J, W \rangle] \quad (3.1.11)$$

dır (Arroyo 2001) .

O halde e_1 ve e_2 sırasıyla M nin p ve q noktalarındaki sabit teğet vektörleri biçiminde tanımlansın. Bu tür eğriler $\tilde{\Omega}_{pq} \subset \Omega_{pq}$ alt uzayının elemanları olsun. Böylece

$$\frac{d\gamma}{ds}(0) = e_1, \quad \frac{d\gamma}{ds}(1) = e_2 \quad (3.1.12)$$

eşitlikleri sağlanır.

Bununla birlikte Θ eğrilik enerji fonksiyonu, M^n deki düzgün kapalı eğri uzayı Ω ya da uçlarındaki Frenet çatısı sabitlenmiş eğrilerin uzayı olan $\tilde{\Omega}_{pq}$ ye etki edebilir. Bazı durumlarda yukarıda belirtilen sınır terimleri etkisiz olabilir. Böylece Θ nın $\tilde{\Omega}_{pq}$ daki kritik

noktası Euler-Lagrange denklemi $\mathcal{E} = 0$ ile karakterize edilebilir. Böylece (3.1.5)-(3.1.7) denklemlerinden

$$\nabla_T^2 (P'(\kappa)N) + \nabla_T ((2\kappa P'(\kappa) - P(\kappa))T) + P'(\kappa)R(N, T)N = 0 \quad (3.1.13)$$

elde edilir (Arroyo ve ark.).

3.2 Yüzeyler Üzerindeki Elastik Eğriler

Tanım 3.2.1 (M^2, g) , 2-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^2$ biçiminde tanımlanan γ eğrisinin büküm enerjisi

$$F^\lambda(\gamma) = \oint_\gamma P(\kappa); P(\kappa) = \kappa^2 + \lambda \quad (3.2.1)$$

ile tanımlanır. $F^\lambda(\gamma)$ nın kritik noktası (3.1.7) denklemi ile verilen \mathcal{E} vektörü yardımıyla oluşturulan Euler-Lagrange denklemi $\mathcal{E} = 0$ ile karakterize edilebilir. Böylece (3.2.1) değeri (3.1.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$2\kappa''(s) + \kappa^3(s) + 2\kappa(s)G(s) - \lambda\kappa(s) = 0 \quad (3.2.2)$$

elde edilir. Burada

$$G(s) = g(R(T, N)T, N) \quad (3.2.3)$$

M nin Gauss eğriliğidir. Böylece (3.2.2) eğrilik denklemini sağlayan γ eğrisine M üzerinde *elastik eğri (elastica)* adı verilir. Eğer $\lambda = 0$ ise eğri *serbest elastik eğri (free elastica)* adını alır. Burada T ve N varyasyon eğrinin birinci ve ikinci Frenet elemanlarıdır.

Önerme 3.2.2 (M^2, g) , 2-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^2$ biçiminde tanımlanan γ eğrisi geodezik olmayan sabit eğrilikli bir eğri olsun. Böylece

γ eğrisinin bir elastik eğri olması için gerek ve yeter şart M nin Gauss eğriliği G nin sabit olmasıdır.

İspat. (3.2.2) denkleminde ispat aşıkardır. \in

3.3. Dönel Yüzeyler Üzerindeki Elastik Eğriler

Bu bölümde $M^2 \subset E^3$ dönel yüzey olarak ele alınacaktır. Yani M yüzeyi düzlemsel, regüler bir C eğrisinin bir eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilir. Farz edelim ki C eğrisi xz -düzleminin bir eğrisi olup bu eğriyi z -ekseni etrafında döndürelim. Ayrıca

$$\alpha(s) = (r(s), g(s)) ; a < s < b; r(s) > 0 \quad (3.3.1)$$

eğrisi C nin yay uzunluğu ile verilen bir parametrelendirilmesi olsun. z -ekseni etrafında dönme açısı u olsun. Bu dönel yüzey

$$f(s, u) = (r(s)\cos(u), r(s)\sin(u), g(s)) \quad (3.3.2)$$

yaması ile tanımlanır.

Bu durumda C nin her bir noktası γ_s ile gösterilen paraleller oluşturur. Bu eğriler t yay uzunluğu ile aşağıdaki şekilde parametrelendirilebilir;

$$\gamma_s(t) = \left(r(s) \cos \frac{t}{r(s)}, r(s) \sin \frac{t}{r(s)}, g(s) \right); 0 \leq t \leq 2\pi r(s) \quad (3.3.3)$$

γ_s eğrisinin M üzerindeki eğrilik fonksiyonu κ_s olsun. Böylece γ_s nin birim teğet vektörü

$$T_s(t) = \gamma'_s(t) = \frac{d}{dt} (\gamma_s(t)) = \left(-\sin \frac{t}{r(s)}, \cos \frac{t}{r(s)}, 0 \right) \quad (3.3.4)$$

Ayrıca M nin γ_s boyunca birim normal vektör alanı N ile gösterilirse,

$$N(s,t) = \left(-g'(s) \cos \frac{t}{r(s)}, -g'(s) \sin \frac{t}{r(s)}, r'(s) \right) \quad (3.3.5)$$

dir.

Önerme 3.3.1 (3.3.2) yaması ile verilen dönel yüzeyin paraleli γ_s nin birim teğet vektörü $T_s(t)$ ise

$$\nabla_{T_s(t)} T_s(t) = \left(-\frac{(r'(s))^2}{r(s)} \cos \frac{t}{r(s)}, -\frac{(r'(s))^2}{r(s)} \sin \frac{t}{r(s)}, -\frac{r'(s)g'(s)}{r(s)} \right) \quad (3.3.6)$$

dir. Burada ∇ , M yüzeyinin Levi-Civita koneksiyonudur.

İspat M nin ve E^3 ün Levi-Civita koneksiyonları sırasıyla ∇ ve $\tilde{\nabla}$ olmak üzere Gauss denkleminde

$$\tilde{\nabla}_{T_s(t)} T_s(t) = \nabla_{T_s(t)} T_s(t) + \langle S(T_s(t)), T_s(t) \rangle N(s,t) \quad (3.3.7)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\nabla_{T_s(t)} T_s(t) = \lambda_1 f_u(s,u) + \lambda_2 f_s(s,u) \quad (3.3.8)$$

dır. Burada

$$f_s(s,u) = (r'(s) \cos u, r'(s) \sin u, g'(s)) \quad (3.3.9)$$

$$f_u(s,u) = (-r(s) \sin u, r(s) \cos u, 0) \quad (3.3.10)$$

dir. Böylece (3.3.8) eşitliği (3.3.7) de yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_{T_s(t)} T_s(t) = \lambda_1 f_u(s,t) + \lambda_2 f_s(s,t) + \langle S(T_s(t)), T_s(t) \rangle N(s,t) \quad (3.3.11)$$

elde edilir. Bununla birlikte $\gamma_s(t)$ nin ikinci türevi

$$\tilde{\nabla}_{T_s(t)} T_s(t) = \gamma_s''(t) = \frac{d^2}{dt^2} (\gamma_s(t)) = \frac{-1}{r(s)} \left(\cos \frac{t}{r(s)}, \sin \frac{t}{r(s)}, 0 \right) \quad (3.3.12)$$

dir. Son iki denklemin $f_s(s,t)$ ile iç çarpımından

$$\langle \gamma_s''(t), f_s(s,t) \rangle = \frac{-r'(s)}{r(s)} \quad (3.3.13)$$

$$\langle f_s(s,t), f_s(s,t) \rangle = 1; (\alpha(s) = (r(s), g(s)) \text{ birim hızlı eğri})$$

bulunur. Son eşitliklerden

$$\lambda_1 = 0 \text{ ve } \lambda_2 = \frac{\langle \gamma_s''(t), f_s(s,u) \rangle}{\langle f_s(s,u), f_s(s,u) \rangle} = \frac{-r'(s)}{r(s)} \quad (3.3.14)$$

sonucuna varılır. Böylece (3.3.8), (3.3.9) ve (3.3.14) eşitliklerinden (3.3.6) eşitliği elde edilir. €

Sonuç 3.3.2. (3.3.2) yaması ile verilen dönele yüzeyin paraleli γ_s nin eğriliği

$$(\kappa_s(t))^2 = \frac{(r'(s))^2}{r^2(s)} \quad (3.3.15)$$

dir.

İspat. Üreteç eğrisi $\alpha(s) = (r(s), g(s))$ birim hızlı olduğundan $r'(s)^2 + g'(s)^2 = 1$ dir.

γ_s eğrisinin M deki eğriliğinin karesi

$$(\kappa_s(t))^2 = \left\| \nabla_{T_s(t)} T_s(t) \right\|^2 \quad (3.3.16)$$

dir. Ayrıca (3.3.6) eşitliği yardımıyla

$$\|\nabla_{T_s(t)} T_s(t)\|^2 = \frac{(r'(s))^2}{r^2(s)} \quad (3.3.17)$$

elde edilir. Böylece (3.3.16) ve (3.3.17) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir. €

Böylece Önerme 3.2.2 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.3 $M^2 \subset E^3$ bir dönele yüzey olsun. M nin paralellerinin eğrilikleri sabit olduğundan $\gamma_s(t)$ nin kapalı bir elastik eğri olabilmesi için M nin Gauss eğriliği G sabit olmalıdır.

Önerme 3.3.4 $M^2 \subset E^3$ dönele yüzeyi $\alpha(s) = (r(s), g(s))$; $a < s < b$; $r(s) > 0$ birim hızlı üreteç eğrisiyle verilsin. M nin paraleli γ_s nin serbest elastik eğri olabilmeleri için gerek ve yeter şart

$$2r(s)r''(s) = (r'(s))^2 \quad (3.3.18)$$

olmasıdır.

İspat $\alpha(s) = (r(s), g(s))$ birim hızlı üreteç eğrisiyle verilen dönele yüzeyin Gauss eğriliği

$$G(s,t) = -\frac{r''(s)}{r(s)} \quad (3.3.19)$$

dir (O'Neill, 1997 s.235). Böylece (3.3.15) ve (3.3.19) eşitlikleri (3.2.2) de yerine yazılırsa (3.3.18) eşitliği elde edilir. €

Açıklama 3.3.5 (3.3.18) eşitliğinden $r'(s) \neq 0$ olmalıdır. Eğer $r'(s) = 0$ olursa

$$(\kappa_s(t))^2 = \|\nabla_{T_s} T_s(t)\|^2 = \frac{(r'(s))^2}{r^2(s)} = 0$$

elde edilir. Buradan γ_s eğrisi M nin bir geodeziği olur. Böylece (3.2.2) Euler denklemini aşikar bir çözüme sahiptir.

Teorem 3.3.6 $M^2 \subset E^3$ yüzeyi (3.3.2) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. Böylece M yüzeyinin paralelleri serbest elastik eğri olması için gerek ve yeter şart;

(1) $\alpha(s)$ bir doğru ($f \in \mathbb{R}^+$) ve dönel yüzey dik dairesel silindirdir, yada

$$(2) \alpha(s) = \left((as+b)^2, \frac{(as+b)\sqrt{1-4a^2(as+b)^2}}{2a} + \frac{1}{4a^2} \arctan\left(\frac{2a(as+b)}{\sqrt{1-4a^2(as+b)^2}}\right) + c \right)$$

olmasıdır (Şekil 1). Burada $-\frac{2ab+1}{2a^2} \leq s \leq \frac{1-2ab}{2a^2}$ ve $b \in \mathbb{R}$ dir.

İspat. Farz edelim ki $\alpha(s)$ eğrisi bir doğru olmasın yani dönel yüzey dairesel bir silindir olmasın. Bu takdirde γ_s eğrisinin serbest elastik eğri olması için gerek ve yeter şart (3.3.18) diferansiyel denkleminin sağlanmasıdır. Böylece

$$r''(s) = \frac{(r'(s))^2}{2r(s)} \quad (3.3.20)$$

olmalıdır. Bu diferansiyel denklemi

> ode1:= 2*diff(r(s),s,s)*r(s) = (diff(r(s),s)^2);

> dsolve(ode1);

Maple programı ile çözdürülürse

$$ode1 = 2 \left(\frac{d^2}{ds^2} r(s) \right) r(s) = \left(\frac{d}{ds} r(s) \right)^2$$

$$r(s) = 0, r(s) = C_1^2 s^2 + \frac{1}{2} C_1^2 C_2 s + \frac{1}{4} C_2^2$$

elde edilir. Son denklemde $\frac{C_1}{2} = a$ ve $\frac{C_2}{2} = b$ alınırsa

$$r(s) = (as+b)^2; \quad (3.3.21)$$

şeklinde düzenlenebilir. Üreteç eğrisi $\alpha(s) = (r(s), g(s))$ birim hızlı olduğundan

$$g'(s) = \sqrt{1 - (r'(s))^2} \quad (3.3.22)$$

$$r'(s) = 2a(as+b)$$

dir. Bu diferansiyel denklemi

$$> \text{ode2} := \text{diff}(g(s), s) = (1 - 4a^2(a*s+b)^2)^{1/2};$$

$$> \text{dsolve}(\text{ode2});$$

Maple programı ile çözdürülürse

$$\text{odel2} := \frac{d}{ds} g(s) = \sqrt{1 - 4a^2(as+b)^2}$$

$$g(s) = -\frac{(-8a^4s - 8a^3b)\sqrt{1 - 4a^4s^2 - 8a^3sb - 4a^2b^2}}{16a^4} + \frac{1}{4} \frac{\arctan\left(\frac{2a^2\left(s + \frac{b}{a}\right)}{\sqrt{1 - 4a^4s^2 - 8a^3sb - 4a^2b^2}}\right)}{a^2} + CI$$

bulunur. Son eşitlik düzenlenirse

$$g(s) = \frac{(as+b)\sqrt{1 - 4a^2(as+b)^2}}{2a} + \frac{1}{4a^2} \arctan\left(\frac{2a(as+b)}{\sqrt{1 - 4a^2(as+b)^2}}\right) + c$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar \in

Uygulama 3.3.7 Üreteç eğrisi

$$\alpha(s) = \left((as + b)^2, \frac{(as + b)\sqrt{1 - 4a^2(as + b)^2}}{2a} + \frac{1}{4a^2} \arctan\left(\frac{2a(as + b)}{\sqrt{1 - 4a^2(as + b)^2}}\right) + c \right)$$

ile $\alpha(s)$ nin oluşturduğu dönel yüzeyin grafikleri

```
> U:=(s+2)^2:
```

```
> V:=(s+2)*(sqrt(1-4*(s+2)^2))/2+(1/4)*arctan((2*s+4)/sqrt(1-4*(s+2)^2)):
```

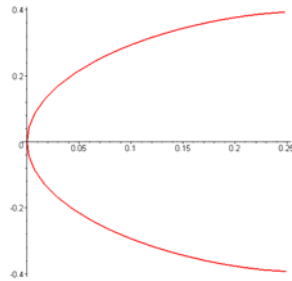
```
> a:=U*cos(u):
```

```
> b:=U*sin(u):
```

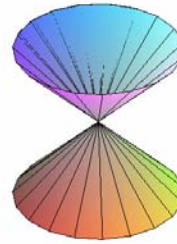
```
> c:=V:
```

```
> plot3d([a, b, c], s=-4..4, u=-4..4, grid=[25,25]);
```

Maple komutu yardımıyla $a = 1$, $b = 2$ ve $c = 0$ değerleri için grafiği sırasıyla Şekil 1 ve Şekil 2 de verilmiştir.



Şekil 1.



Şekil 2.

3.4. Küre Üzerindeki Elastik Eğriler

$S^2(G)$ sabit eğrilikli 2- küre olsun. Küre üzerinde regüler türevlenebilir eğrilerin uzayı D ile gösterilsin. Yani

$$D = \left\{ \gamma: I \rightarrow S^2(G); \gamma \in C^4(I); \frac{d\gamma}{dt} \neq 0 \right\} \quad (3.4.1)$$

olsun. Verilen bir $\gamma \in D$ eğrisi için

$$V(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \gamma' \quad (3.4.2)$$

teğet vektörü $T(t)$ ise birim teğet vektörü belirtsin. Ayrıca $v(t) = \|V, V\|^{1/2}$ γ nın hızını, $N(t)$ birim normal vektörünü ve κ da γ nın $S^2(G)$ deki yönlü geodezik eğriliğini belirtsin. Böylece $P(t)$, C^∞ sınıfından bir fonksiyon olmak üzere D üzerindeki eğrilik enerji fonksiyonu

$$\Theta(\gamma) = \oint_\gamma P(\kappa) = \int_0^L P(\kappa) ds = \int_0^1 P(\kappa) v dt \quad (3.4.3)$$

dır.

Ayrıca D uzayı içinde $\gamma(t)$ noktasından geçen bir başka $\Gamma(w)$ eğrisi γ nın varyasyonu olarak

$$\Gamma(w, t) = \gamma_w(t): (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbf{I} \rightarrow S^2(G), \Gamma(0, t) = \gamma(t) \quad (3.4.4)$$

biçiminde tanımlanır ve bu eğrinin γ boyunca varyasyon vektör alanı

$$V=V(w,t), W=W(w,t), T=T(w,t), v=v(w,t), N=N(w,t) \quad (3.4.5)$$

$$W = W(t) = (\partial\gamma/\partial w)(0, t)$$

ile gösterilir (Arroyo ve ark.). Ayrıca s yay parametresi olmak üzere $V=V(w,s)$, $W=W(w,s)$, $T=T(w,s)$, $v=v(w,s)$, vb.,dir. Burada, L γ nın yay uzunluğu ise $s \in [0, L]$ dir.

Eğrilik enerji fonksiyonunun varyasyon eğrisine kısıtlanışı aynı sembol ile temsil edilsin. Yani,

$$\Theta(w) = \Theta(\gamma_w(t)). \quad (3.4.6)$$

olsun. Ayrıca $\Theta(w)$ nin birinci türevini hesaplamak için aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır:

$$\mathcal{K} = P'(\kappa) N \quad (3.4.7)$$

$$J = \frac{dP'(\kappa)}{ds} + (2\kappa P'(\kappa) - P(\kappa)) T, \quad (3.4.8)$$

$$E = \nabla_T J + P'(\kappa) R(N, T)N. \quad (3.4.9)$$

Burada

$$P'(\kappa) = \frac{dP}{d\kappa} \quad (3.4.10)$$

dır.

$$\begin{aligned} J &= \nabla_T K + (2\kappa P'(\kappa) - P(\kappa))T \\ &= \frac{dP'}{ds} N - \kappa P' T + 2\kappa P' T - P T \\ &= (\kappa P' - P)T + \frac{dP'}{ds} N \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned} E &= \nabla_T J + P'(\kappa)R(N, T)N \\ &= (\kappa P'' + P' - P')T + (\kappa P' - P)\kappa N + \frac{d^2 P'}{ds^2} N - \kappa \frac{dP'}{ds} T + P'GN \\ &= \left((\kappa^2 + G)P' + \frac{d^2 P'}{ds^2} - \kappa P \right) N \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Böylece (3.4.11) ve (3.4.12) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\mathcal{K} = P'(\kappa) N \quad (3.4.13)$$

$$J = (\kappa P' - P)T + \frac{dP'}{ds} N \quad (3.4.14)$$

$$E = \left((\kappa^2 + G)P' + \frac{d^2P'}{ds^2} - \kappa P \right) N \quad (3.4.15)$$

Frenet formülü $\nabla_T T = \kappa N$ kullanılarak ve integre edilerek aşağıdaki önerme elde edilebilir (J. Langer and D.A. Singer, 1984).

Önerme 3.4.1 (birinci değişim formülü). $\Gamma(w,s)=\gamma_w(t)$ D uzayındaki γ eğrisinin bir varyasyonu ve $\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} P(\kappa)$ da eğrilik enerji fonksiyonu olsun. Bu takdirde sınır terimi

$$B[W, \gamma]_0^L = [\langle \mathcal{K}, \nabla_T W \rangle - \langle \mathcal{J}, W \rangle] \quad (3.4.16)$$

olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$\frac{d}{dw} \Theta(w) \Big|_{w=0} = \int_0^L \langle E, W \rangle ds + B[W, \gamma]_0^L. \quad (3.4.17)$$

Θ nın kritik noktası bazı uzaylarda Euler-Lagrange denklemi $E=0$ ile karakterize edilebilir.

Yani

$$(\kappa^2 + G)P'(\kappa) + \frac{d^2P'}{ds^2} = \kappa P(\kappa) \quad (3.4.18)$$

dır.

I. Durum: $\frac{dP'}{ds} = 0$ ise $P(\kappa) = \kappa + \lambda$ dır.

- $\lambda = 0$ ise kritik nokta yoktur.
- $\lambda \neq 0$ ise kapalı kritik noktalar $\frac{G}{\lambda}$ eğrilikli çemberlerdir.

Bu sonuç aslında toplam eğrilik fonksiyonludur.

II. Durum: $\frac{dP'}{ds} \neq 0$ ise $E = 0$ Θ uzayındaki λ eğrisinin kritik noktasıdır. Euler-Lagrange denklemlerinin integralini kolaylaştırmak için ilk önce ilk integrale bakmalıyız.(3.4.13), (3.4.14) ve (3.4.15) eşitlikleri yardımıyla

$$E = \nabla_T J + GK \quad (3.4.19)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= \langle E, J \rangle = \langle \nabla_T J + GK, J \rangle = \langle \nabla_T J, J \rangle + G \langle K, J \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} [\langle J, J \rangle + G \langle K, K \rangle(s)] \\ &= \frac{1}{2} [\langle \nabla_T J, J \rangle + \langle J, \nabla_T J \rangle + G \langle \nabla_T K, K \rangle + G \langle K, \nabla_T K \rangle] \\ &= \langle \nabla_T J, J \rangle + G \langle \nabla_T K, K \rangle \end{aligned}$$

eşitliği ile birlikte

$$\langle J, J \rangle = (\kappa P'(\kappa) - P(\kappa))^2 + \left(\frac{dP'}{ds} \right)^2 \quad (3.4.20)$$

$$\langle K, K \rangle = (P'(\kappa))^2 \quad (3.4.21)$$

olmak üzere

$$\langle J, J \rangle + G \langle K, K \rangle = d \quad (3.4.22)$$

γ eğrisi boyunca sabit olur. Böylece

$$\left(\frac{dP'}{ds} \right)^2 + (\kappa P'(\kappa) - P(\kappa))^2 + G(P'(\kappa))^2 = d \quad (3.4.23)$$

dır.

4. EĞRİLERİN MİNİMAL ENERJİLERİ

Bir eğrinin toplam enerjisi

$$E_{\text{top}}=E_{\text{iç}}+E_{\text{dış}} \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlanır.

$\alpha : I \rightarrow E^3$ statik uzay eğrisi olsun. İç enerji genellikle bükülme (bend) enerjisi olarak

$$E_{\text{bend}}(\alpha) = \int \kappa^2(t) \|\alpha'(t)\| dt \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada κ, α eğrisinin eğriliğidir.

α eğrisinin gerilme (stretch) enerjisi ise

$$E_{\text{stretch}}(\alpha) = \int \|\alpha'(t)\| dt \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilir.

3D eğrileri için burulma (torsion) bükülmenin (twisting) büyüklüğünü belirtir (düzlemsel eğrilerin burulması sıfırdır). Bükülme (twisting) iç enerjiye aşağıda belirtilen E_{twist} terimini ilave ederek kısıtlanabilir

$$E_{\text{twist}}(\alpha) = \int \tau^2(t) \|\alpha'(t)\| dt \quad (4.4)$$

Burada τ, α eğrisinin burulmasıdır (Veltkamp ve Wesselink,1995).

Bükülme (twisting) enerjisinin minimize edilmesi düzlemde bulunan her nokta için eğrinin kısıtlanmasını sağlar. (4.2),(4.3) ve (4.4) ifadelerinin interaktif programlama modelleriyle değerlendirilmesi ve minimize edilmesi hesapları oldukça zor olabilir. Bu yüzden bu ifadeler aşağıdaki gibi kısıtlandırılmıştır

$$\tilde{E}_{\text{stretch}}(\alpha) = \int \|\alpha'(t)\|^2 dt \quad (4.5)$$

$$\tilde{E}_{\text{bend}}(\alpha) = \int \|\alpha''(t)\|^2 dt \quad (4.6)$$

$$\tilde{E}_{\text{twist}}(\alpha) = \int \|\alpha'''(t)\|^2 dt \quad (4.7)$$

Çoğunlukla da bu yaklaşık ifadeler kullanılmaktadır (Hagen ve Schulze,1991).

Bundan sonraki üç alt başlık eğrinin belli bir parçasına etki eden bend, twist ve stretch enerjilerine dayanan operatörleri ifade edecektir. Buradaki bütün enerji terimlerinde yer alan $f(t)$ operatörün eğri boyunca kuvvetini ifade eden yük fonksiyonudur.

Tanım 4.1. (gerdirme) (tightener):

Gerdirme (tightener) operatörü belirli bir uzunluğa kısıtlanmış eğrinin bu kısıtlanıştaki gerginliğini belirtir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$E_{\text{tight}}(\alpha) = \int_{\vartheta}^{\omega} f(t) \|\alpha'(t)\|^2 dt \quad (4.8)$$

Bu ifade gerilme (stretch) enerjisinin yaklaşık durumuna benzemektedir.

Tanım 4.2. (doğrusallaştırma) (straightener):

Doğrusallaştırma operatörü bükülmeyi (bending) eğrinin belirli bir kısmına kısıtlar. Bu operatör

$$E_{\text{str}}(\alpha) = \int_{\vartheta}^{\omega} f(t) \|\alpha''(t)\|^2 dt \quad (4.9)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 4.3 (düzleştirme) (flattener):

Düzleştirme (flattener) operatörü eğrinin düzlemsel olmasını yani bir düzlemde yatmasını sağlamaya çalışır. Düzleştirme operatörü

$$E_{\text{flat}}(\alpha) = \int_{\vartheta}^{\omega} f(t) \|\alpha'''(t)\|^2 dt \quad (4.10)$$

biçiminde tanımlanır.

Bu da eğrinin belli bir kesimindeki yük fonksiyonuyla birlikte bükülme (twist) enerjisinin bir yaklaşık ifadesi olarak verilebilir.

Örnek 4.4. $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ eğrisi ve $f(t) = t$ fonksiyonu alalım (bak Şekil 3).

Böylece α eğrisinin yüksek mertebeli türevleri

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\alpha''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

$$\alpha'''(t) = (a \sin t, -a \cos t, 0)$$

ve α nın eğrilik ve burulması sırasıyla

$$\kappa(t) = a$$

$$\tau(t) = -b$$

dır. Böylece α eğrisinin yukarıda tanımlanan enerjileri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} E_{bend}(\alpha) &= \int \kappa^2(t) \|\alpha'(t)\| dt = \int a^2 \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt \\ &= \int a^2 \sqrt{a^2 + b^2} dt = (a^2 \sqrt{a^2 + b^2})t \end{aligned}$$

$$E_{stretch}(\alpha) = \int \|\alpha'(t)\| dt = \int \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \int \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

$$\begin{aligned} E_{twist}(\alpha) &= \int \tau^2(t) \|\alpha'(t)\| dt = \int b^2 \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt \\ &= \int b^2 \sqrt{a^2 + b^2} dt = (b^2 \sqrt{a^2 + b^2})t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{stretch}(\alpha) &= \int \|\alpha'(t)\|^2 dt = \int \left(\sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} \right)^2 dt \\ &= \int (a^2 + b^2) dt = (a^2 + b^2)t \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_{bend}(\alpha) = \int \|\alpha''(t)\|^2 dt = \int \left(\sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \right)^2 dt = \int a^2 dt = a^2 t$$

$$\tilde{E}_{twist}(\alpha) = \int \|\alpha'''(t)\|^2 dt = \int \left(\sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \right)^2 dt = \int a^2 dt = a^2 t$$

$$E_{tight}(\alpha) = \int_0^\pi f(t) \|\alpha'(t)\|^2 dt = \int_0^\pi t(a^2 + b^2) dt = \frac{a^2 + b^2}{2} t^2 \Big|_0^\pi = \frac{(a^2 + b^2)\pi^2}{2}$$

$$E_{str}(\alpha) = \int_0^\pi f(t) \|\alpha''(t)\|^2 dt = \int_0^\pi a^2 t dt = \frac{a^2}{2} t^2 \Big|_0^\pi = \frac{a^2 \pi^2}{2}$$

$$E_{flat}(\alpha) = \int_0^\pi f(t) \|\alpha'''(t)\|^2 dt = \int_0^\pi a^2 t dt = \frac{a^2}{2} t^2 \Big|_0^\pi = \frac{a^2 \pi^2}{2}$$

elde edilir.

Örnek 4.5. $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ eğrisi ve $f(t) = t$ fonksiyonu alalım (bak Şekil 4).

Böylece α eğrisinin yüksek mertebeli türevleri

$$\alpha'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

$$\alpha''(t) = (-2 \sin t - t \cos t, 2 \cos t - t \sin t, 0)$$

$$\alpha'''(t) = (-3 \cos t + t \sin t, -3 \sin t - t \cos t, 0)$$

ve α nın eğrilik ve burulması sırasıyla

$$\kappa(t) = \sqrt{4 + t^2}$$

$$\tau(t) = -\frac{2}{4 + t^2}$$

dır. Böylece α eğrisinin yukarıda tanımlanan enerjileri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} E_{\text{bend}}(\alpha) &= \int \kappa^2(t) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int (4 + t^2) \sqrt{\cos^2 t + t^2 \sin^2 t - 2t \sin t \cos t + \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 2t \sin t \cos t + 1} dt \\ &= \int (4 + t^2) \sqrt{t^2 + 2} dt = \frac{7t\sqrt{t^2 + 2}}{4} - \frac{7}{2} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right) + \frac{t(t^2 + 2)^{3/2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{stretch}}(\alpha) &= \int \|\alpha'(t)\| dt = \int \sqrt{\cos^2 t + t^2 \sin^2 t - 2t \sin t \cos t + \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 2t \sin t \cos t + 1} dt \\ &= \int \sqrt{t^2 + 2} dt = \frac{t\sqrt{t^2 + 2}}{2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{twist}}(\alpha) &= \int \tau^2(t) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int \frac{4}{(4 + t^2)^2} \sqrt{\cos^2 t + t^2 \sin^2 t - 2t \sin t \cos t + \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 2t \sin t \cos t + 1} dt \\ &= \int \frac{4}{(4 + t^2)^2} \sqrt{t^2 + 2} dt = \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2}t}{2\sqrt{t^2 + 2}}\right) - \frac{t}{2\sqrt{t^2 + 2}(-2 + \frac{t^2}{t^2 + 2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\text{stretch}}(\alpha) &= \int \left(\sqrt{\cos^2 t + t^2 \sin^2 t - 2t \sin t \cos t + \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 2t \sin t \cos t + 1} \right)^2 dt \\ &= \int (t^2 + 2) dt = \frac{t^3}{3} + 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\text{bend}}(\alpha) &= \int \left(\sqrt{4 \sin^2 t + 4t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t + 4 \cos^2 t - 4t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t} \right)^2 dt \\ &= \int (t^2 + 4) dt = \frac{t^3}{3} + 4t \end{aligned}$$

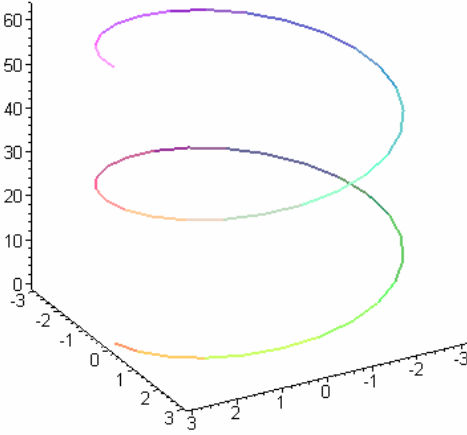
$$\begin{aligned}\tilde{E}_{\text{twist}}(\alpha) &= \int \left(\sqrt{9\cos^2 t - 6t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + 9\sin^2 t + 6t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t} \right)^2 dt \\ &= \int (t^2 + 9)dt = \frac{t^3}{3} + 9t\end{aligned}$$

$$E_{\text{tight}}(\alpha) = \int_0^{\pi} (t^3 + 2t)dt = \frac{t^4}{4} + t^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{4} + \pi^2$$

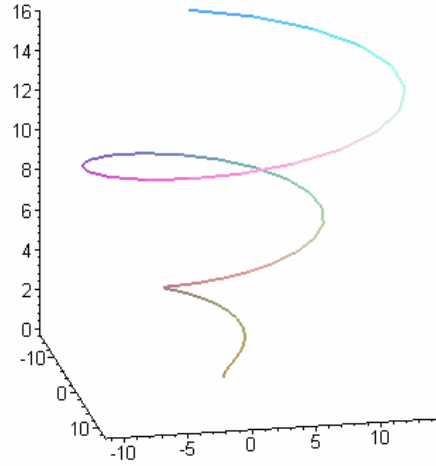
$$E_{\text{str}}(\alpha) = \int_0^{\pi} (t^3 + 4t)dt = \frac{t^4}{4} + 2t^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{4} + 2\pi^2$$

$$E_{\text{flat}}(\alpha) = \int_0^{\pi} (t^3 + 9t)dt = \frac{t^4}{4} + \frac{9}{2}t^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{4} + \frac{9}{2}\pi^2$$

elde edilir.



Şekil 3



Şekil 4

5. ELASTİK ŞERİTLERİN KIRCHHOFF MODELİ

5.0 Giriş

Elastik şerit çalışmaları özellikle DNA ve proteinlerin biyomatematikselleştirilmesiyle bağlantılı olarak artan bir çalışma konusudur. Bu ince şeritlerin temel özelliği bir uzay eğrisi olmasıdır. Elastik şeritlerin statik enerjisi burulma (bend) ve bükülme (twist) enerjileriyle alakalıdır. Bu model Kirchhoff tarafından 1859'da dengedeki ince şeritlerin şekil ve dinamiğini belirtmek amacıyla açıklanmıştır.

5.1. Uzay Eğrileri ve Şeritler

$\alpha(s) = I \subset R \rightarrow R^3$ durağan uzay eğrisini türevlenebilir bir fonksiyon olarak ele alalım. $\forall s \in I$ parametresi için Frenet elemanları teğet, normal ve binormal vektörleri $(T(s), N(s), B(s))$ olsun. Teğet vektörü birim vektör olmak üzere

$$T(s) = \frac{d\alpha}{ds} \quad (5.1.1)$$

şeklinde ve $\kappa(s)$ eğrinin $\forall s$ noktasındaki eğriliği olmak üzere

$$\kappa(s) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| \quad (5.1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan κ eğrilik, τ burulma olmak üzere Frenet-Serret denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \kappa N(s), \\ \frac{dN}{ds} &= -\kappa T(s) + \tau B(s), \\ \frac{dB}{ds} &= -\tau N(s). \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

dir.

Tanım 5.1.1 Bir ince şerit (Kirchhoff şeridi) verilen bir α eğrisi ile dik kesitlerin merkezlerinin geometrik yeri $(d_1(s), d_2(s), d_3(s))$ lokal baz vektörlerinin birleştirilmesiyle elde edilir.

Bu lokal baz

$$(d_3(s), d_2(s), d_1(s)) = (T(s), N(s), B(s)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.1.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ϕ şeridin d_1 vektörü ile N normal vektörü arasındaki bükülme açısıdır.

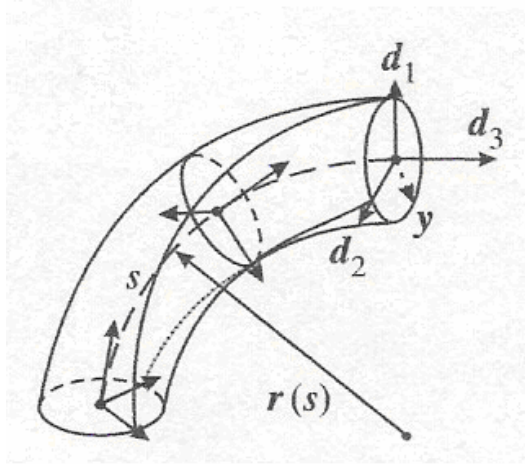
Ayrıca lokal baz elemanları $(d_3(s), d_2(s), d_1(s))$ 'in türev bileşenleri bükülme vektörü

$$k(s) = k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 \quad (5.1.5)$$

yardımıyla

$$\frac{dd_i}{ds} = k(s) \times d_i(s) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad \langle d_i, d_j \rangle = \delta_{ij} \quad (5.1.6)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada \times vektörel çarpımdır. Buradaki k_3 bileşeni bükülme yoğunluğu olarak adlandırılır ve yay uzunluğu boyunca $\{d_1, d_2, d_3\}$ bazının d_3 teğet vektörü etrafındaki dönme miktarını ölçer (Goriely, Nizette ve Tabor, 2001).



Şekil 5 Elastik Çubuk

Tanım 5.1.2 Kirchhoff şeridinin torku $M(s)$ olmak üzere

$$M(s) = Sk(s) \quad ; \quad S = \text{diag}(1, a, b) \quad (5.1.7)$$

dir. Burada a sabiti kesitlerin asimetrisini ölçer, b sabiti ise burulma sertliğidir.

Özellikle ($a = 1$) simetrik ve ($b = 1$) hiperelastik şeritler için

$$M(s) = k(s) \quad (5.1.8)$$

dir.

Genel durumda, (5.1.5) ve (5.1.7) yardımıyla Kirchhoff şeridinin torku $M(s)$

$$M(s) = k_1(s)d_1(s) + ak_2(s)d_2(s) + bk_3(s)d_3(s) \quad (5.1.9)$$

şeklinde tanımlanır (Dandoloff ve Grahovski,2005).

Ayrıca Kirchhoff şeridinin elastik enerjisi

$$E = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \langle M(s), k(s) \rangle ds = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} (k_1^2(s) + ak_2^2(s) + bk_3^2(s)) ds \quad (5.1.10)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $s_1, s_2 \in I$ dir.

Kirchhoff şeridinin gerilimi $F(s)$ olmak üzere lineer ve açılal moment korunumu dolayısıyla statik Kirchhoff denklemleri:

$$\frac{dF}{ds} = 0 \quad (5.1.11)$$

$$\frac{dM}{ds} + d_3(s) \times F(s) = 0 \quad (5.1.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Bükülme vektörü $k(s)$, (5.1.4) ve (5.1.5) eşitlikleri yardımıyla ϕ açısının fonksiyonu cinsinden

$$k(s) = (k_1(s), k_2(s), k_3(s)) = (\kappa(s) \sin \phi, \kappa(s) \cos \phi, \tau + \frac{d\phi}{ds}) \quad (5.1.13)$$

olarak ifade edilir. Burada $\frac{d\phi}{ds}$ *intrinsik burulma yoğunluğu* olarak adlandırılır. İntrinsik

bükülmeye sahip olmayan şeride Frenet şeridi denir. Frenet şeridi için B ile d_2 arasındaki büküm açısı ϕ sabittir.

O halde Kirchhoff şeridinin gerilimi $F(s)$ $\{d_1, d_2, d_3\}$ cinsinden

$$F(s) = F_1(s)d_1(s) + F_2(s)d_2(s) + F_3(s)d_3(s) \quad (5.1.14)$$

şeklinde yazabiliriz. Bununla birlikte (5.1.11) ve (5.1.12) denklemleri yardımıyla aşağıdaki adi denklem sistemi elde edilir:

$$F_{1,s} + k_2 F_3 - k_3 F_2 = 0 \quad (5.1.15)$$

$$F_{2,s} + k_3 F_1 - k_1 F_3 = 0 \quad (5.1.16)$$

$$F_{3,s} + k_1 F_2 - k_2 F_1 = 0 \quad (5.1.17)$$

$$F_1 = -a k_{2,s} + (b-1) k_1 k_3 \quad (5.1.18)$$

$$F_2 = k_{1,s} + (b-a) k_2 k_3 \quad (5.1.19)$$

$$b k_{3,s} + (a-1) k_1 k_2 = 0 \quad (5.1.20)$$

Burada $F_{i,s} = \frac{dF_i}{ds}$ dir.

Bununla birlikte $\kappa(s) = \kappa_0$ sabit alındığında (5.1.13)-(5.1.20) denklemleri yardımıyla aşağıdaki statik Sine-Gordon denklemi elde edilir:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{(a-1)}{b} \kappa_0^2 \sin u(s) = 0 \quad u(s) = 2\phi(s) \quad (5.1.21)$$

Bu denklem aşağıdaki gibi çok geniş fiziksel problemlerin çözümünde kullanılır (Dandoloff ve Grahovski,2005):

- Yük, yoğunluk ve dalga materyallerinde,
- Membran eğimli dalgalarında,
- Josephon doğrularının manyetik akışlarında,
- Sarkaç burulmalarında,
- Quantum alanı teorisinin iki boyutlu temel parçacık modellerinde,
- Kristal çıkıntılarının yayılmasında,
- Magnetik kristallerin Bloch wall hareketlerinde.

5.2. Kirchhoff Denklemleri

İnce tüp $x=x(s,t)$ ye bağlı ve yay uzunluğu s ile parametrelendirilmiş 3-boyutlu uzaydaki düzgün x dönüşümüyle ifade edilebilir. Burada x fonksiyonunu en az ikinci dereceden türevlenebilir bir fonksiyon olarak ele alalım. $(\)'$ ifadesi s ye bağlı türevi, $(\dot{\ })$ ifadesi ise zamana bağlı türevi belirtir.

Lokal ortonormal bazlar (ya da yönetici bazlar) eğrinin her noktası için

$$d_i = d_i(s,t) \quad i=1,2,3$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$d_3 = x'$$

olmak üzere d_3 teğet vektörü olarak seçilir.

Diğer ortonormal vektörler d_1 ve d_2 , d_3 e dik olacak şekilde düzlemde yatarlar. Yani şeridin kesitinin temel eksenleri boyunca bulunurlar. s ve t nin her değeri için bu vektörler $\{d_1, d_2, d_3\}$ şeklinde sağ el ortonormal bazları olarak seçilirler.

Buna göre bükülme vektörü

$$k = k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 \quad (5.2.1)$$

ve germe vektörü

$$w = w_1 d_1 + w_2 d_2 + w_3 d_3 \quad (5.2.2)$$

şeklindedir. Bu vektörler eğri boyunca aşağıdaki germe ve bükülme denklemleri ile uzayı ve zaman değişimini kontrol ederler.

$$d_i' = k \times d_i \quad i=1,2,3 \quad d_i \bullet d_j = \delta_{ij} \quad (5.2.3)$$

$$\dot{d}_i = w \times d_i$$

k ve w nin yönetici bazları içindeki bileşenleri

$$k = \sum_{i=1}^3 k_i d_i \quad (5.2.4)$$

ve

$$w = \sum_{i=1}^3 w_i d_i \quad (5.2.5)$$

şeklinde tanımlanır. k_1 ve k_2 eğrilik bileşenleri ve k_3 ise şeridin bükülme yoğunluğudur. Bükülme ve germe denklemlerinin çözümü $x(s,t)$ eğrisini vermek için integre edilebilen $d_3(s,t)$ yi belirtir. d_1 eğrinin normal vektörü olarak seçilirse d_2 binormal vektör olur ve lokal bazlarda çok iyi bilinen Frenet çatısına kısıtlanabilir.

Şerit üzerindeki materyal noktaları

$$X(s,t) = x(s,t) + r(s,t) \quad (5.2.6)$$

ile belirlensin. Burada

$$r(s,t) = x_1 d_1(s,t) + x_2 d_2(s,t) \quad (5.2.7)$$

temel aksellere bağlı olarak $x'(s)$ ye dik olan, $S(s)$ kesitlerinin üzerindeki noktanın pozisyonunu belirler. Kesitlerdeki toplam kuvvet $F = F(s,t)$ ve toplam moment $M = M(s,t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F = \int_{S(s)} p_s dS \quad (5.2.8)$$

$$M = \int_{S(s)} r \times p_s dS \quad (5.2.9)$$

Burada p_s , $S(s)$ kesitindeki alan başına kullanılan temas(contact) gücü belirtir. Bunu lokal yönetici (director) bazlarla yazacak olursak

$$F = \sum_{i=1}^3 f_i d_i \quad (5.2.10)$$

ve

$$M = \sum_{i=1}^3 M_i d_i \quad (5.2.11)$$

şeklinde olacaktır.

Denklemin türevini almak için bir boyutlu eleman olarak tanımlanan şerit uzunluk ds ve kesit $S(s)$ nin ince disklerine bölünür. Tüm bu diskler için lineer ve açısal momentumun etkileşim (conversation) kuralları uygulanır.

Sonuç olarak

$$F' + \int_{S(s)} f_{ext} dS = \int_{S(s)} \rho_0 \ddot{X} dS \quad (5.2.12)$$

$$M' + x' \times F + \int_{S(s)} r \times f_{ext} ds = \int_{S(s)} \rho_0 r \times \ddot{X} dS \quad (5.2.13)$$

dır. Burada f_{ext} dış kuvvettir ve hesaplamalarda göz ardı edilecektir ($f_{ext} = 0$).

Şeridin A alanında düzgün dairesel kesitleri olduğunu varsayalım. O halde (5.2.12) ve (5.2.13) eşitlikleri aşağıdaki sonuca basitleştirilebilir.

$$F' = 0 \quad (5.2.14)$$

$$M' + d_3 \times F = 0 \quad (5.2.15)$$

Bununla birlikte kuvvet $F(s,t)$ ve moment $M(s,t)$ olmak üzere Kirchhoff denklemleri şu şekilde de yazılabilir:

$$F'' = \xi A \ddot{d}_3 \quad (5.2.16)$$

$$M' + d_3 \times F = \xi (I_2 d_1 \times \ddot{d}_1 + I_1 d_2 \times \ddot{d}_2) \quad (5.2.17)$$

$$M = EI_1 k_1 d_1 + EI_2 k_2 d_2 + \mu J k_3 d_3 \quad (5.2.18)$$

Burada $(\cdot)'$ ve (\cdot) sırasıyla yay uzunluğu ve zaman bağlı türevler, ξ (sabit) şeridin birim hacim başına düşen kütlesi, A kesit alanı, I_1 ve I_2 nicelikleri kesitin baş eylemsizlik momentleri, E Young modülü, μ kesme modülü ve J de kesit şekline bağlıdır. Yarıçapın R

olduğu dairesel kesit alınması durumunda $I_1 = I_2 = \frac{J}{2} = \pi \frac{R^4}{4}$ seçilebilir. EI_1 ve EI_2 şeridin

temel bükülme sertliği ve μJ ise burulma sertliğidir. Gücün $d_3 \cdot F$ teğetsel bileşeni şerit boyunca gerilmesidir. (5.2.16)-(5.2.18) denklemleri dinamiksel Kirchhoff denklemlerini oluşturur. Bunlar $\{d_1, d_2, d_3\}$ bazları ve onların türevlerini kapsayan üç vektör denklemi, F kuvvet vektörü ve M dönme momentidir.

Kirchhoff modelini uzunluk, zaman ve kütle ölçülerini aşağıdaki gibi seçerek basitleştirebiliriz.

$$[L] = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \quad [T] = \sqrt{\frac{\xi I_1}{EA}} \quad [M] = \xi \sqrt{AI_1} \quad (5.2.19)$$

Burada

$$\frac{\partial}{\partial s} \rightarrow \sqrt{\frac{A}{I_1}} \frac{\partial}{\partial s} \quad \kappa \rightarrow \sqrt{\frac{A}{I_1}} \kappa \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow \frac{EA}{\xi I_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (5.2.20)$$

ve

$$F \rightarrow EAF \quad M \rightarrow E\sqrt{AI_1}M \quad (5.2.21)$$

dır. Bu şartlar altında Kirchhoff denklemleri şu şekilde yazılabilir.

$$F'' = \ddot{d}_3 \quad (5.2.22)$$

$$M' + d_3 \times F = ad_1 \times \ddot{d}_1 + d_2 \times \ddot{d}_2 \quad (5.2.23)$$

$$M = k_1 d_1 + ak_2 d_2 + bk_3 d_3 \quad (5.2.24)$$

Burada

$$a = \frac{I_1}{I_2} \quad \text{ve} \quad b = \frac{MJ}{EI_1} = \frac{J}{2I_1(1+\sigma)} \quad (5.2.25)$$

dır. Burada σ Poisson oranıdır.

5.3. Basit Denge Durumundaki Çözümler

Şeritler için Kirchhoff denklemlerinin denge çözümlerinin varlığını bulmak için (5.2.16)-(5.2.18) denklemlerini göz önüne almalıyız. Bunun için (5.2.16) denkleminin yay uzunluğuna bağlı olarak integralini alırız ve kuvvet vektörünü lokal bazlar cinsinden $F = F_1 d_1 + F_2 d_2 + F_3 d_3$ şeklinde yazarak aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$F_1' + k_2 F_3 - k_3 F_2 = 0 \quad (5.3.1)$$

$$F_2' + k_3 F_1 - k_1 F_3 = 0 \quad (5.3.2)$$

$$F_3' + k_1 F_2 - k_2 F_1 = 0 \quad (5.3.3)$$

$$k_1' + (b-a)k_2 k_3 - F_2 = 0 \quad (5.3.4)$$

$$ak_2' + (1-b)k_1 k_3 + F_1 = 0 \quad (5.3.5)$$

$$bk_3' + (a-1)k_1 k_2 = 0 \quad (5.3.6)$$

Eğer $a = 1$ olursa (5.3.6) denkleminde k_3 bükülme yoğunluğunun sabit olduğu görülür. $k_1=k_2=0$ için bu denklemlerin aşikâr denge çözümleri düzgün şeritlerdir. Bunu bu denklem sistemine uygulayacak olursak aşağıdaki formda genel bir çözüm elde ederiz.

$$k = k_3 d_3 \quad F = F_3 d_3 \quad (5.3.7)$$

Burada d_3 yay uzunluğu boyunca sabit yönlendirmeye sahiptir ve k_3 ile F_3 ise keyfi sabitlerdir. Bu nedenle verilen a ve b için bükülme yoğunluğu k_3 ve germe F_3 ile karakterize edilen düzgün şeritler iki parametrelili çözüm ailesi oluşturur.

Frenet eğriliği κ ve burulması τ sabit kabul edilerek ve bükülme vektörü için (5.1.13) eşitliği kullanılarak helisel çözümler elde edilir. Şimdi çelişkiyle tek uygun helisel şeritlerin Frenet şeritleri olduğu gösterilecek öyle ki şeritler sıfır iç bükülmeye sahip olsunlar. Bu durumda $a = 1$ durumunun aksine bükülme yoğunluğu k_3 sabitken bunu priori olarak farz edemeyiz. Bu yüzden (5.1.13) eşitliğinde ζ yi s nin keyfi bir fonksiyonu olarak alalım. O halde (5.3.1)-(5.3.6) denklemleri ζ ile aşağıdaki gibi yazılır.

$$F_1' - (\zeta' + \tau)F_2 + \kappa F_3 \cos \zeta = 0 \quad (5.3.8)$$

$$F_2' + (\zeta' + \tau)F_1 - \kappa F_3 \sin \zeta = 0 \quad (5.3.9)$$

$$F_3' + \kappa F_2 \sin \zeta - \kappa F_1 \cos \zeta = 0 \quad (5.3.10)$$

$$F_2 = \kappa[(b+1-a)\zeta' + (b-a)\tau] \cos \zeta \quad (5.3.11)$$

$$F_1 = \kappa[(b+a-1)\zeta' + (b-1)\tau] \sin \zeta \quad (5.3.12)$$

$$b\zeta'' = (1-a)\kappa^2 \sin \zeta \cos \zeta \quad (5.3.13)$$

Şimdi ζ nin şerit boyunca sabit olduğunu ve gerçekten $\frac{\pi}{2}$ nin bir katı olduğunu ispatlayalım. (5.3.8) ve (5.3.9) eşitliklerinin lineer kombinasyonunu ele alalım.

$$[F_1' - (\zeta' + \tau)F_2 + \kappa F_3 \cos \zeta] \sin \zeta + [F_2' + (\zeta' + \tau)F_1 - \kappa F_3 \sin \zeta] \cos \zeta = 0 \quad (5.3.14)$$

Buradan

$$F_1' \sin \zeta + F_2' \cos \zeta + (\zeta' + \tau)(F_1 \cos \zeta - F_2 \sin \zeta) = 0 \quad (5.3.15)$$

eşitliği elde edilir. (5.3.11) ve (5.3.12) eşitliklerini $\kappa \neq 0$ olmak üzere (5.3.15) eşitliğinde yerine yazarsak

$$[4b + 2(1-a)\cos 2\zeta]\zeta'' - (1-a)(2\zeta' + \tau)^2 \sin 2\zeta = 0 \quad (5.3.16)$$

elde edilir. (5.3.13) eşitliğini de (5.3.16) de yerine yazarsak

$$(1-a)\kappa^2 \sin 4\zeta + 2b[2\kappa^2 - 4\zeta'^2 - 4\tau\zeta' - \tau^2] \sin 2\zeta = 0 \quad (5.3.17)$$

eşitliğine ulaşırız. $\zeta' \neq 0$ olsun. (5.3.13) eşitliğinin her iki tarafını ζ' ile çarpıp bir kez integralini alırsak

$$b\zeta'^2 = (1-a)\kappa^2 \sin^2 \zeta + C = \frac{(1-a)\kappa^2}{2}(1 - \cos 2\zeta) + C \quad (5.3.18)$$

olur. Burada C integral sabitidir. (5.3.17) ile (5.3.18) eşitliklerinden ζ'^2 yi yok edebiliriz.

$$4b\tau\zeta' = 3(1-a)\kappa^2 \cos 2\zeta + 2(b+a-1)\kappa^2 - 4C - b\tau^2 \quad (5.3.19)$$

(5.3.19) eşitliğinin her iki tarafının karesini alarak ve ζ'^2 yi yok etmek için (5.3.18) eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$8b\tau^2[(1-a)\kappa^2(1 - \cos 2\zeta) + 2C] - [3(1-a)\kappa^2 \cos 2\zeta + 2(b+a-1)\kappa^2 - 4C - b\tau^2]^2 = 0 \quad (5.3.20)$$

ζ nin sabit olmadığı varsayılırsa $\cos 2\zeta$ nin her kuvvetinin katsayısı (5.3.20) eşitliğinde bağımsız olarak sıfırlanmalıdır. Bununla birlikte $\cos^2 2\zeta$ nin katsayısı $(-9(1-a)^2 \kappa^4)$ olmak üzere eğriliğin sıfırdan farklı herhangi bir değeri için negatiftir. O halde bu durum varsayımımızla çelişki oluşturur. (5.3.13) denkleminde geri dönüp $\zeta'' = 0$ alırsak

$$\zeta = n \frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.3.21)$$

elde edilir. Şimdi (5.3.8)-(5.3.13) denklemlerini çözebiliriz. Verilen κ ve τ için yalnızca n eşitliğine bağlı olarak iki çözüm ortaya çıkar. Helis ve halkalar n nin çift olması halinde yüksek bükülme sertliği d_2 nin yönü binormal boyunca yattığından binormal helis ve binormal halka olarak ifade edilirler. Eğer ilerde halkaların kapalı olması gerekirse sınır şartları $\frac{n}{2}$ tamsayısı olarak uygulanır. Helis ve halkalar n nin tek değerleri için yüksek bükülme sertliğinin yönü normal boyunca yattığından normal helis ve normal halka olarak adlandırılırlar. Her iki şeritte şekil 4 de verildiği gibi Frenet şeritleridir. Binormal durum için çözüm

$$k = \kappa l_2 + \tau l_3 \quad F = (b-a)\tau \kappa \quad (5.3.22)$$

ve normal durum için çözüm

$$k = \kappa d_1 + \tau d_3$$

$$F = (b-1)\tau\kappa$$

$$(5.3.23)$$

şeklindedir.



a) Binormal helis



b) Normal helis

Şekil 6.

6. MANYETİK GİRDAPLAR (VORTICES)

6.0. Manyetik Alanlar

(M,g) 3-boyutlu yönlendirilmiş Rieman manifoldu olsun. Sıfır divergensli vektör alanı $V \in \chi(M)$ manyetik olarak tanımlanır. Burada

$$\operatorname{div}(V) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad V = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (6.0.1)$$

şeklindedir.

V nin ϕ Lorentz kuvveti her $X \in \chi(M)$ için (M,g) manifoldundaki vektörel çarpım ile

$$\phi(X) = V \times X \quad (6.0.2)$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki Lorentz kuvveti eşitliğini sağlayan her manyetik alan, yörüngeleri M deki γ eğrileri olan manyetik akımlar oluştururlar.

$$\nabla_{\gamma} \gamma' = V \times \gamma' \quad (6.0.3)$$

Burada ∇ (M,g) nin Levi-Civita koneksiyonudur.

$\{T = \gamma', N, B\}$ γ birim eğrisinin M deki Frenet çatısı ve κ ile τ ise sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulması olsun. Frenet denklemleri M de verilen V manyetik alanı ile birleştirilmiş manyetik akımlara ait olan eğriyi karakterize etmekte kullanılabilir. Bunun için γ boyunca

$$\omega(s) = g(V(s), \gamma'(s)) = \langle V(s), \gamma'(s) \rangle \quad (6.0.4)$$

ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. Burada $V(s)$, V manyetik alanının $\gamma(s)$ noktasındaki değeridir. Böylece aşağıdaki önerme söylenebilir.

Birim hızlı γ eğrisinin V manyetik alanının manyetik yörüngesi olması için gerek ve yeter şart V nin γ boyunca

$$V(s) = \omega(s)T(s) + \kappa(s)B(s) = \langle V(s), \gamma'(s) \rangle T(s) + \kappa(s)B(s) \quad (6.0.5)$$

şeklinde yazılabilmesidir.

Not olarak özellikle V her bir manyetik yörünge boyunca rectifying düzlemlerin alanlarında yatar. Böylece her bir manyetik yörüngeyle birleştirilmiş ω fonksiyonu γ nın quasi-slope olarak adlandırılacaktır.

6.1 Örnekler

Örnek 6.1.1. (Öklidyen uzayda Lancret eğriler)

$M=IE^3$ üzerinde vektör alanı

$$V(x, y, z) = f(x, y) \partial_z \quad (6.1.1)$$

şeklinde tanımlansın. Burada f , z ye bağlı olmayan düzgün bir fonksiyondur. Basit bir hesaplamayla gösterilen

$$\nabla_x V = X(f) \partial_z \quad (6.1.2)$$

eşitliği

$$\text{div}(V) = \partial_z f = 0 \quad (6.1.3)$$

olduğunu ispatlar. Sonuç olarak V , IE^3 de manyetik alan olarak tanımlanır. Diğer yandan β

$z=0$ düzleminde birim hızlı eğri olsun ve $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ olarak seçilsin. O halde IE^3

de α birim eğrisi

$$\alpha(s) = \sin \theta \beta(s) + s \cos \theta \partial_z \quad (6.1.4)$$

ile tanımlanır. Buna Lancret eğrisi ya da genel helis denir. Eğer $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ise sağa

döndürülmüş(right handed) yoksa sola döndürülmüş(left handed) bir eğridir. Burada

$$\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s)) \quad (6.1.5)$$

olmak üzere (6.1.5) eşitliğini (6.1.4) de yerine koyarak $\alpha(s)$ yi

$$\alpha(s) = \sin \theta (\beta_1(s), \beta_2(s)) + s \cos \theta (0, 0, 1) = (\sin \theta \beta_1(s), \sin \theta \beta_2(s), s \cos \theta) \quad (6.1.6)$$

şeklinde yazabiliriz. Aynı zamanda

$$\vec{u} = \cos \theta T + \sin \theta B \Rightarrow \langle \vec{u}, \alpha'(s) \rangle = \cos \theta = s b t. \quad (6.1.7)$$

eşitliği sağlanıyorsa α ya genel helis denir. α eğrisini eğrilik ve burulması β nın eğrilik fonksiyonu κ_β ve eğim θ ile

$$\kappa_\alpha(s) = (\sin \theta) \kappa_\beta(s) \quad (6.1.8)$$

$$\tau_\alpha(s) = (\cos \theta) \kappa_\beta(s) \quad (6.1.9)$$

şeklinde hesaplanabilir. Şimdi (6.1.8) ve (6.1.9) eşitliklerini ispatlayalım.

α ve β fonksiyonları ile bunların yüksek mertebeden türevlerini ele alalım.

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \sin \theta \beta(s) + s \cos \theta z \\ \alpha'(s) &= \sin \theta \beta'(s) + \cos \theta z & \beta(s) &= (\beta_1(s), \beta_2(s)) \\ \alpha''(s) &= \sin \theta \beta''(s) & \beta'(s) &= (\beta_1'(s), \beta_2'(s)) \\ \alpha'''(s) &= \sin \theta \beta'''(s)\end{aligned}\quad (6.1.10)$$

Frenet formüllerinden

$$\begin{bmatrix} T_\beta' \\ N_\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\beta \\ -\kappa_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\beta \\ N_\beta \end{bmatrix}\quad (6.1.11)$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}T_\beta' &= \kappa_\beta N_\beta \\ N_\beta' &= -\kappa_\beta T_\beta\end{aligned}\quad (6.1.12)$$

elde edilir. (6.1.12) eşitliği ise

$$\begin{aligned}T_\beta(s) &= (\beta_1'(s), \beta_2'(s)) \\ N_\beta(s) &= (-\beta_2'(s), -\beta_1'(s))\end{aligned}\quad (6.1.13)$$

şeklinde yazılabilir. (6.1.12) ve (6.1.13) eşitliklerinden

$$(\beta_1''(s), \beta_2''(s)) = \kappa_\beta (-\beta_2'(s), -\beta_1'(s))\quad (6.1.14)$$

sonucuna varılır. (6.1.14) eşitliğinin her iki tarafı N_β' ile çarpılıp düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned}\kappa_\beta &= \left\langle (-\beta_2'(s), -\beta_1'(s)), (\beta_1''(s), \beta_2''(s)) \right\rangle \\ \Rightarrow \kappa_\beta &= \beta_1''(s) \beta_2'(s) + \beta_2''(s) \beta_1'(s)\end{aligned}\quad (6.1.15)$$

elde edilir. β birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\kappa_\beta(s) = \|\beta''(s)\|\quad (6.1.16)$$

dir. Eğrilik tanımından

$$\kappa_\alpha = \left\langle V_1', V_2' \right\rangle\quad (6.1.17)$$

$$V_1 = \alpha'(s), \quad V_2 = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}, \quad V_3 = V_1 \times V_2 \quad (6.1.18)$$

eşitlikleri kullanılarak (6.1.8) eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \left\langle \alpha'', \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \right\rangle \\ \kappa_\alpha &= \left\langle \sin \theta \beta''(s), \frac{\sin \theta \beta''(s)}{\sin \theta \|\beta''(s)\|} \right\rangle \\ &= \frac{\sin^2 \theta \langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle}{\sin \theta \|\beta''(s)\|} \\ &= \sin \theta \frac{\|\beta''(s)\|^2}{\|\beta''(s)\|} \\ &= \sin \theta \|\beta''(s)\| \\ \Rightarrow \kappa_\alpha &= \sin \theta \kappa_\beta \end{aligned}$$

Aynı şekilde (6.1.9) eşitliği de aşağıdaki işlemlerle ispatlanabilir.

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \left\langle V_2', V_3 \right\rangle \\ V_2' &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \right) = \frac{d}{ds} (N_\beta) = N_\beta' = -\kappa_\beta T_\beta \\ V_3 &= V_1 \times V_2 = \alpha'(s) \times \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ &= (\sin \theta T_\beta + \cos \theta \partial_z) \times N_\beta \\ &= \sin \theta (T_\beta \times N_\beta) + \cos \theta (\partial_z \times N_\beta) \\ &= \sin \theta \partial_z - \cos \theta T_\beta \\ \tau_\alpha &= \left\langle V_2', V_3 \right\rangle = \left\langle -\kappa_\beta T_\beta, \sin \theta \partial_z - \cos \theta T_\beta \right\rangle = \cos \theta \kappa_\beta \\ \Rightarrow \tau_\alpha &= \cos \theta \kappa_\beta \end{aligned}$$

Ayrıca α boyunca

$$\partial_z = \cos \theta T + \sin \theta B \quad (6.1.19)$$

dir. Bu nedenle

$$f(\beta(s)) = \kappa\beta(s) \quad (6.1.20)$$

seçilerek α nın V nin manyetik yörüngesi olduğu elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} V &= f(x, y)\partial_z \\ V(s) &= \kappa\beta(s)(\cos \theta T + \sin \theta B) \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

dir.

Örnek 6.1.2. (3-küre üzerinde Lancret eğrileri)

$\pi : S^3 \rightarrow S^2$ şeklinde tanımlanan Hopf dönüşümü matematikte olduğu kadar fizikte de önemli bir konudur.

$$S^3 = \{z = (z_1, z_2) \in C^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

birim küre olsun. S^3 üzerindeki Killing vektör alanı η

$$\eta(z) = iz = (iz_1, iz_2)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu da

$$\phi_t : S^3 \rightarrow S^3 \quad t \in IR$$

ayrıntılı (global) bir parametrelili izometrilere grubunu

$$\phi_t(z) = e^{it} z$$

fonksiyonuyla oluşturur.

η yörüngeleri olmak üzere Hopf dönüşümleri geodezik lifli (fiber) Rieman daldırma (submersion) oluşturur. Herhangi bir $f : S^2 \rightarrow IR$ düzgün fonksiyonu, π Hopf dönüşüm ile $\bar{f} = f \circ \pi$ yi elde etmek için S^3 e taşınabilir. Böylece vektör alanı $V = \bar{f}\eta$ olur. Sonuçta V sıfır divergenslidir ve bu yüzden S^3 de manyetik alan olarak tanımlanır. Yani manyetik akımları Hopf alanı ile sabit açı yapan eğrilerle oluşturulan alana *Hopf manyetik alanı* denir. Bu eğri Hopf tüpünde geodezik olarak

$$T_\beta = \pi^{-1}(\beta)$$

yatar. Burada tüpün kesitleri S^2 de β etrafında kurulmuştur. Sonuçta S^3 deki her Lancret eğrisi, f fonksiyonu uygun kesitler boyunca eğrilik fonksiyonu olarak seçildiği takdirde, bir manyetik alanın manyetik yörüngesidir.

Örnek 6.1.3. (Kirchhoff elastik şeridi)

Tanım 6.1.4. $\gamma : [0,1] \rightarrow S^2(G)$ sabit kısmi G eğrilikli 2-küreye gömülmüş regüler eğri olsun. Eğer

$$\frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial k}{\partial w} = 0 \quad (6.1.22)$$

şeklinde W yönlü herhangi bir değişme varsa W vektör alanı γ boyunca Killing alanıdır.

Yardımcı teorem (Langer ve Singer,1984) yardımıyla W nin γ boyunca Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart

$$\langle \nabla_T W, T \rangle = 0 \quad (6.1.23)$$

$$\langle \nabla_T^2 W, N \rangle + G \langle W, N \rangle = 0 \quad (6.1.24)$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Önerme 6.1.5. $\gamma : I = [0,1] \rightarrow S^2(G)$, D uzayına etki eden Θ nin kritik noktası olan, S^2 ye gömülmüş regüler bir eğri olsun. O halde J vektör alanı γ boyunca Killing alanıdır. Bu nedenle bu vektör alanı $S^2(G)$ deki Killing alanının γ ya kısıtlanışdır(Arroyo ve ark. 2003)

İspat: $J = \frac{dP'(\kappa)}{ds} + (2\kappa P'(\kappa) - P(\kappa))T$ şeklinde tanımlanmış J vektör alanının Killing alanı olduğunu göstermek için (6.1.23) ve (6.1.24) eşitliklerini sağlatmalıyız. J vektör alanının tanımından

$$\nabla_T J = \left(\frac{d^2 P'}{ds^2} + (\kappa P'(\kappa) - P(\kappa)) \right) N \quad (6.1.25)$$

elde edilir. Buradan da (6.1.23) eşitliği kolayca sağlanmış olur. Eşitliğin tekrar türevi alınıp Euler-Lagrange denklemleri de kullanılarak

$$\langle \nabla_T^2 J, N \rangle = -G \frac{dP'}{ds} \quad (6.1.26)$$

olduğu görülür.

$$\langle J, N \rangle = \frac{dP'}{ds} \quad (6.1.27)$$

olduğundan (6.1.26) ve (6.1.27) yardımıyla (6.1.24) eşitliği sağlanmış olur ve böylece ispat tamamlanır.

(M,g) deki Kirchhoff elastik şeritlerini çalışmak için varyasyonel yaklaşım daha önceden elde edilmiş klasik yaklaşımlara eşittir. Bu modelde şeridin merkez doğru konumları γ eğrilerinin uygun uzayları için aşağıda verilen elastik enerji fonksiyonunun uçları olarak gözükebilir.

$$F(\gamma) = \int_{\gamma} \left[\frac{\lambda_3}{2} \kappa^2(s) + \lambda_2 \tau(s) + \lambda_1 \right] ds, \quad \lambda_3 \neq 0 \quad (6.1.28)$$

Şerit boyunca moment merkez doğru boyunca olan vektör alanına uyar.

$$M(s) = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} T(s) + \kappa(s) B(s) \quad (6.1.29)$$

Farzedelimki γ şerit konumunun merkez doğrusu olsun. Eğri, momentine göre bir parametrelili eğriler sınıfı elde etmek için aşağıdaki gibi değiştirilebilir.

$$\gamma_t(s) = \exp_{\gamma(s)}(tM(s)), \quad t \in IR \quad (6.1.30)$$

Burada $\gamma_t(s)$ nin hız, eğrilik ve burulma fonksiyonları sırasıyla $v(s,t) = \left\| \gamma'_t(s) \right\|$, $\kappa(s,t)$, $\tau(s,t)$ dir. Basit bir hesaplamayla bu fonksiyonların $t=0$ daki değişimleri bulunup çözüm uzayı 6-boyutlu olan $M(s)$ deki diferensiyel denklem sistemini oluşturan $M(v) = M(\kappa) = M(\tau) = 0$ eşitliği kontrol edilebilir. Diğer taraftan (M,g) deki herhangi bir Killing vektör alanının γ ya kısıtlanması lineer sisteminin çözümünü açıkça verir. Üstelik herhangi 3-boyutlu Riemann manifoldunun izometrilere grubu $I(M,g)$ nin boyutunun $boy(I(M,g)) \leq 6$ olduğu çok iyi bilinir. Bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart (M,g) nin sabit eğriliğe sahip olması ya da basit bağlantılı veya reel projektif 3 uzay olmasıdır (yüksek bükülmezlikli uzaylar). Sonuç olarak bu durumda Killing vektör alanlarının uzayı 6-boyutludur. O halde bu durumdan merkez doğru boyunca momentin bütün (M,g) manifoldunda bir Killing vektör alanı olduğu ortaya çıkar.

Sonuçta elastik şeridin merkez doğrusu yüksek bükülmezlikli uzaylarda şerit boyunca momenti sağlanan eğriye kısıtlanmış Killing manyetik alanın bir manyetik yörüngesidir.

7. DNA nın ELASTİK ŞERİT MODELİ

DNA halkalarına yaklaşık olan elastik şerit klasik Kirchhoff yaklaşımına göre yay uzunluğu s ile parametrelendirilir. Şeridin kesitlerinin merkezi her s noktası için merkez doğru $r(s)$ yi oluşturur. Lokal koordinat çatısı $\{d_1(s), d_2(s), d_3(s)\}$ her kesitin yönlendirilmesini belirler. Birim vektörler d_1 ve d_2 DNA kesitlerinin asal eksenini boyunca yatarlar. d_3 vektörü ise d_1 ve d_2 vektörlerine diktir. Bu vektörlerin bileşenleri Euler açıları yada Euler parametreleri olarak ifade edilebilir.

Şeridin şekli merkez doğrudaki eğrilik κ ve merkez doğru etrafındaki bükülme Ω ile ifade edilir. Eğrilik sırasıyla şeridin d_1 ve d_2 deki burulma büyüklüğüne göre κ_1 ve κ_2 olarak bileşenlerine ayrılır. Bükülme ise açılmış şerit için Ω_0 , sarılmış şerit için $\delta\Omega$ şeklinde dengede (intrinsik) olarak ayrıştırılır. Burada $\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega$ dır.

Eğrilikler ve bükülme k vektörüne gerilmiş formdadır.

$$\dot{d}_i = k \times d_i, \quad k = (\kappa_1, \kappa_2, \Omega) \quad (7.1)$$

(noktasal türev s ye bağlı türevdir.)

Şeridin geometrik açıklamasını tamamlamak için d_3 normalinin teğetle merkez doğrudaki çakışmasını sağlayan uzatılamazlık kısıtlamasını kullanırız.

$$\dot{r} = d_3 \quad (7.2)$$

Modelin dinamiksel değişkenleri dengede şeridin her kesitindeki elastik olmayan kuvvetleri $f(s)$ ve torkları $g(s)$ yi sağlayan elastik kuvvetler $n(s)$ ve torklar $m(s)$ dir.

$$\dot{n} + \dot{f} = 0, \quad \dot{m} + \dot{g} + \dot{r} \times \dot{n} = 0 \quad (7.3)$$

Kuvvet ve torkların DNA da etkili olmadığını yukarıda tanımlanan long-range etkileşimlere ait olmadığını kabul ediyoruz. Bu yüzden $f=0$ ve $g=0$ alıyoruz. Şeridin dinamiksel tanımını tamamlamak için κ_1 ve κ_2 eğriliklerindeki elastik tork m ve uzatılamazlık $\delta\Omega$ arasında lineer bağımlılık olduğunu kabul ediyoruz.

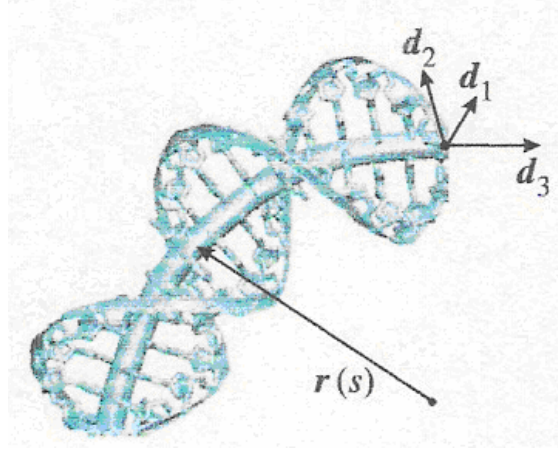
$$m = A_1 \kappa_1 d_1 + A_2 \kappa_2 d_2 + C \delta\Omega d_3 \quad (7.4)$$

Burada C , DNA bükülme modülü, $A_1 = \alpha C$ ve $A_2 = \beta C$ ise d_1 ve d_2 deki DNA burulma modülüdür.

Sonuçta (7.1) ve (7.2) nin geometriksel ve (7.3) ve (7.4) ün dinamiksel denklemleri boyutsuz yapılır ve Kirchhoff denklemleriyle birleştirilir.

Denklemlerin çözümü elastik kuvvet $n(s)$ ve tork $m(s)$ yi dengeleyen ve enerjiyi minimize eden elastik şerit $[r(s), k(s)]$ nin geometrisini verir.

$$U = \int_0^1 \left(\frac{\alpha \kappa_1^2}{2} + \frac{\beta \kappa_2^2}{2} + \frac{\delta \Omega^2}{2} \right) ds \quad (7.5)$$



Şekil 7

KAYNAKLAR

Arroyo J., Barros M. ve Garay O.J., 2000. Some Examples of Critical Points for the Total Mean Curvature Functional, Proc. Edinburg Math. Soc. Vol. 43, s. 1-17.

Arroyo J., Barros M. ve Garay O.J., 2002. Holography and Total Charge, J. Geom. Phys. Vol. 41, s. 65-72.

Arroyo J., Garay O.J. ve Mencia J.J., 2003. Closed Generalized Elastic Curves in $S^2(1)$, J. Geom. Phys. Vol. 48, s. 339-353.

Arroyo J., Garay O.J. ve Mencia J.J., 2004. Extremals of Curvature Energy Actions on Spherical Closed Curves, J. Geom. Phys. Vol. 51, s. 101-125.

Balaeff A., Mahadevan L. ve Schulten K., 1999. Elastic Rod Model of a DNA Loop in the Lac Operon, Phys. Rev. Lett. Vol. 83, s. 1900-4903.

Barros M. ve Garay O.J., 1996. Free Elastic Parallels in a Surface Revolution, The American Mathematical Monthly Vol. 103, s. 149-156.

Barros M. ve Romero A., 2007. Magnetic Vortices, Europhysics Letters Vol.77, s. 1-5

Blaschke W., 1930. Vorlesungen über Differential Geometrie Vol. 1, Verlag from J. Springer, Berlin.

Bryant R. ve Griffiths P., 1986. Reduction of Order for Constrained Variational Problems and $\int_{\gamma} (\kappa^2/2) ds$, Am. J. Math. Vol. 108, s. 525-570.

Carmo M.P., 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall.

Dandoloff R. ve Grahovski G., 2005. The Kirchhoff Rod as a XY Spin Chain Model, J. Phys.

Fonseca A. ve Aguiar M., 2003. Solving the Boundary Value Problem for Finite Kirchhoff Rods, Physica D. Vol. 181, s. 53-69.

Goriely A., Nizette M. ve Tabor M., 2001. On the Dynamics of Elastic Strips, J. Nonlinear Sci. Vol. 11, s. 3-48.

Goriely A. ve Tbaor M., 1996. New Amplitude Equations for Thin Elastic Rods, Phys. Rev. Lett. Vol. 77, s. 3537-3540.

Hagen H. ve Schulze G., 1991. Variational Principles in Curve and Surface Design, Geometric Modeling Methods and Applications, Springer-Verlag.

Jurdjevic V., 1995. Non-Euclidean Elastica, Am. J. Math. Vol. 117, s. 93-124.

Langer J. ve Singer D.A., 1984. The Total Squared Curvature of Closed Curves, J. Diff. Geom. Vol. 20, s. 1-22.

Love A., 1927. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications 4 th. Ed. Chaps. 18-21.

O'Neill B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Pres, Newyork.

Veltkamp R.C. ve Wesselink W., 1995. Modeling 3D Curves of Minimal Energy, Eurographics 95 Vol. 14, s. s97-110.

ÖZ GEÇMİŞ

Betül BULCA 03.08.1984 tarihinde Bursa'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Bursa'da tamamladıktan sonra 2002 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2006 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen, anlayışı ve sabrıyla yanımda olduğunu hissettiren, bilgi ve fikirleriyle ben yönlendiren ve en önemlisi yaptığım işi sevmemi sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a yürekten teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca manevi desteğini fazlasıyla gördüğüm sayın Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemdeki en büyük paya sahip olan, üzerimde madden ve manen emeği geçen, bana gösterdikleri sevgiyle ve güvenle birçok zorluğu aşmama yardımcı olan sevgili annem, babam ve ağabeyime sonsuz teşekkürler.