ALT GRAFLARIN ZAGREB İNDEKSLERİ

MÜGE TOGAN

T. C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ALT GRAFLARIN ZAGREB İNDEKSLERİ

Müge TOGAN

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

(Danışman)

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2014

TEZ ONAYI

Müge TOGAN tarafından hazırlanan “Alt Grafların Zagreb İndeksleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Üye: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Ahmet Tekcan İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. İlhan TAPAN İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Ahmet Sinan Çevik İmza
Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Basri Çelik İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

12/12/2014

İmza

Müge TOGAN

ÖZET

Doktora Tezi

ALT GRAFLARIN ZAGREB İNDEKSLERİ

Müge TOGAN

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu çalışmada alt graflar tanıtılmış, r-alt graflar tanımlanmış ve bu alt grafların on çeşit Zagreb indeksleri hesaplanmış ve r-alt graflar için bazı eşitsizlikler verilmiştir. Bu uygulama Zagreb indekslerinin hesabında, grafların her bir köşesinin tek tek dereceleri ile uğraşmak yerine, sadece grafın kenar ve köşe sayılarının bilinmesinin yeterli olduğunu gösteren bir çalışmadır ve Zagreb indekslerinin hesabında büyük kolaylık sağlamaktadır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup bu bölümde konunun literatür özeti yapılmış ve çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ile bunların eşindeksleri, birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri ile bunların eşindeksleri, total çarpımsal toplam Zagreb indeksi ile çarpımsal toplam Zagreb indeksi tanımlanarak bu indekslerin tümü için bazı sınırlar ve birbirleriyle ilişkilerini veren bazı eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde iyi bilinen yol graf, devir graf, yıldız graf, tam graf, iki parçalı tam graf ve tadpole grafların on çeşit Zagreb indeksleri hesaplanarak birbirleriyle ilişkilerini veren bazı sonuçlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde iyi bilinen bazı alt grafların ve r-alt grafların on çeşit Zagreb indeksleri hesaplanarak alt grafların çeşitli Zagreb indeksleri arasında birtakım eşitsizlikler verilmiştir. Son bölümde verilen tüm sonuçlar bu tez çalışmasında elde edilmiş orijinal sonuçlardır.

Anahtar Kelimeler: Graf, Zagreb İndeks, Çarpımsal Zagreb İndeks, Çarpımsal Toplam Zagreb İndeks, Alt Graf, r-alt Graf

2014, viii + 59 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

ZAGREB INDICES of SUBDIVISION GRAPHS

Müge TOGAN

Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL

In this work, subdivision graphs are recalled, r-subdivision graphs are defined and ten types of Zagreb indices of these graphs are calculated. This application shows that it is enough to know only the number of vertices and edges of the graphs, instead of dealing with the degrees of all vertices of the graphs and it provides great convenience for the calculation of the Zagreb indices.

This thesis consists of four chapters. First chapter is introduction, and a brief summary of related literature and the necessary preliminaries are given in this chapter. Some basic concepts which will be used in the forthcoming chapters are introduced here. In the second chapter, Zagreb and multiplicative Zagreb indices and coindices of graphs, total multpilicative sum Zagreb index and multpilicative sum Zagreb index are introduced and some results and theorems for all these Zagreb indices are given. In the third chapter, ten types of Zagreb indices are calculated for some well-known graphs, such as path graph, cycle graph, star graph, complete graph, complete bipartite graph and tadpole graph and some results are obtained. In the fourth chapter, ten types of Zagreb indices of subdivision and r-subdivision graphs for some well-known graphs are given and some inequalities which shows the relations between several Zagreb indices of subdivision graphs are obtained.

Key Words: Graph, Zagreb Index, Multiplicative Zagreb Index, Multiplicative Sum Zagreb Index, Subdivision Graph, Subgraph, r-Subdivision Graph

2014, viii + 59 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca bilgi, fikir ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, anlayışı ve sabrıyla her zaman yanımda olduğunu hissettiren, kendisinden çok şey öğrendiğim ve kendisini örnek aldığım değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e içtenlikle teşekkür ederim. Ayrıca manevi desteğini her zaman hissettiğim ve bu süreçte bana destek olan değerli hocam Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e ile çalışma ve yol arkadaşım Aysun YURTTAŞ'a teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemde en büyük paya sahip olan, maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen, bana verdikleri sevgi ve güvenle birçok zorluğu aşmama yardımcı olan, ne olursa olsun arkamda olup herşeye karşı güçlü hissetmemi sağlayan canım annem, babam ve kardeşime sonsuz teşekkürler. Sahip olduğum en değerli varlığım, günüme gün, hayatıma anlam katan, varlığıyla beni güçlü, umutlu ve sonsuz mutlu kılan biricik oğlum Kıvanç Kayra TOGAN'a ve her zaman eğitim hayatımda ilerlememi destekleyen, bunun için arkamda olan sevgili eşim Yasin TOGAN'a teşekkür ederim.

Tüm bunların yanı sıra yurt içi doktora burs programı ile maddi yönden beni destekleyerek yolumu tamamlamama yardımcı olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ayrıca manevi desteklerini üzerimden esirgemeyen, burada isimlerini tek tek zikredemediğim tüm sevdiklerime de teşekkürlerimi sunarım.

Müge TOGAN

12/12/2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
G	Graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
d_v	v köşesinin derecesi
Δ_G	G grafının maksimum derecesi
δ_G	G grafının minimum derecesi
$\bar{G}$	G grafının tümleyeni (complement)
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir graf
P_n	n köşeli yol graf
S_n	n köşeli yıldız graf
T_n	n köşeli ağaç graf
$K_{t,s}$	İki parçalı tam graf
$T_{t,s}$	Tadpole graf
$S(G)$	G grafının alt grafı
$S^r(G)$	G grafının r-alt grafı
M_1	Birinci Zagreb indeksi
M_2	İkinci Zagreb indeksi
$\overline{M_1}$	Birinci Zagreb eşindeksi
$\overline{M_2}$	İkinci Zagreb eşindeksi
Π_1	Birinci çarpımsal Zagreb indeksi
Π_2	İkinci çarpımsal Zagreb indeksi

$\overline{\Pi_1}$	Birinci çarpımsal Zagreb eşindeksi
$\overline{\Pi_2}$	İkinci çarpımsal Zagreb eşindeksi
Π^{T}	Total çarpımsal toplam Zagreb indeksi
Π_1^*	Çarpımsal toplam Zagreb indeksi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

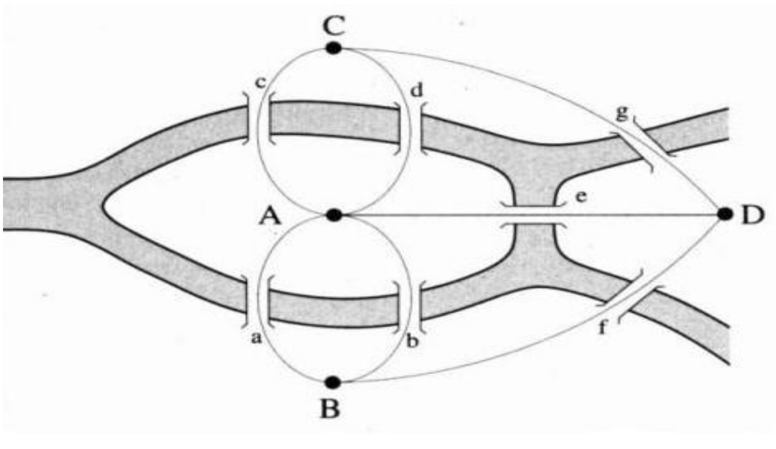
1. GİRİŞ VE TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Giriş

Leonhard Euler tarafından yazılmış bir makalenin 1736 yılında basılması tarihi, graf teorinin (çizge kuramı) kesin başlangıç tarihidir. O makalenin arkasındaki asıl fikir *Königsberg'in yedi köprüsü* olarak bilinen şimdi popüler olan problemden çıkmış olmasıdır.

Ortaya çıkışının sebebi Königsberg adlı 4 anakaradan oluşan Prusya (Almanya) şehrinde, bu 4 anakarayı birbirine bağlayan 7 köprüdür. Şehrin içinden geçen akarsu ve köprüler ilginç bir yapı oluşturmuştur.

Problem şu idi: Herhangi bir anakaradan başlayarak ve bu 7 köprü bir ve sadece bir kere kullanılarak "aynı noktaya dönen bir yürüyüş", yani tam bir tur gerçekleştirilebilir miydi? Birçok insan bunu deneyerek yapmaya çalışsa da kimse başarılı olamamıştı. Konu üzerine kafa yoran Leonhard Euler, bu problemle ilgili bir makale yayımladı: *"Seven Bridges of Königsberg"*. Hatta bu problemi genel bir şekilde inceledi ve bunu teoremlerle kuramlaştırdı.



Şekil 1.1. Königsberg'in 7 köprüsü probleminin grafı

Euler'e göre bir grafik üzerinde her bir köşe bir ve sadece bir kez kullanılarak kapalı bir tur yapılabilmesi için her köşenin derecesinin çift olması gerekir (köşenin derecesi, komşu köşelerle oluşturduğu kenarların sayısı anlamına gelir). Bundan dolayı bu koşulları sağlayan grafiklere "Euler turu" adı verilmiştir.

Grafik olarak çizilmiş Königsberg 7 köprü probleminde, Şekil 1.1, 2 tane köşenin derecesi tek olduğu için Euler turu olmadığı anlaşılmış ve insanlar da rahatlamıştır.

Euler bu teoremi ortaya attıktan sonra Hierholzer, Fleury gibi matematikçiler Euler turlarında manuel kapalı yürüme bulma algoritmaları geliştirmişlerdir. Bu algoritmaların özyineli (recursive) olması bilgisayarda çok rahat programlanmasını sağlamış ve Euler turu yaratmak kolaylaşmıştır.

Graf çizilirken, öncelikle noktalar yardımıyla objeler belirlenir. Sonrasında, çizgiler yardımıyla aradaki bağlantılar belirlenir. Eğer çizilecek graf yönlü bir grafsa bağlantıların yönlerininde belirtilmesi gerekmektedir.

Graf teorinin bilgisayar ve matematik bilimlerindeki uygulamaları daha çok göze çarpsa da, fizik, biyoloji, kimya bilimlerinde ve hatta linguistikte bile uygulamalarını görmek mümkündür. Dillerdeki parçalı yapılardan dolayı graf teorisi linguistik biliminde kullanılmaktadır. Biyolojide, popülasyonların gösterimi, hastalık bölgelerinin ve yayılma alanlarının gösterilmesi, hayvanların yaşadığı habitatların gösterimi yine graf teorisi sayesinde mümkündür. Bilgisayar ve matematik bilim dallarına katkısı biraz daha büyüktür. Mesela, "minimum geren ağaç", "en kısa yol problemi" ve "network akış problemi" gibi birçok problem graf teorisi yardımıyla çözülmüştür. Ayrıca, kimya ve fizik bilimlerinde kullanılan molekül yapıları graflar yardımıyla gösterilmektedir. Kimyasal graf teorinin temel fikri; moleküllerin fiziko-kimyasal özelliklerinin kolay elde edilebilmesi için, karşılık gelen graflar yardımıyla çalışılabilmesine dayanır. Kimyasal graflar, atomların grafın köşelerini ve kimyasal bağların grafın kenarlarını temsil ettiği molekül modelleridir. Moleküler grafları tanımlamada çeşitli graf teorik değişmezler kullanılır. Kimyasal graf teoride bu değişmezler, topolojik indeksler olarak da bilinirler. Topolojik indeksler, sayısal yapı-aktivite ilişkisi modellerinde (QSPR/QSAR) açıklayıcı olarak kullanılırlar. En eski graf değişmezlerinden ikisi, iyi bilinen birinci ve ikinci Zagreb indeksleridir. İlk kez Gutman ve Trinasjstic tarafından moleküler yapı üzerinde toplam π-elektron enerjisinin bağlılığının incelenmesiyle tanıtılmıştır. Gutman ve Trinasjstic eşlenik sistemlerin toplam π-elektron enerjisinin tahmini için bir formül türetmişlerdir. Sonraları Zagreb indeksleri yapı-özellik modellerinde kullanılmıştır. Birinci ve ikinci Zagreb indeksleri, moleküler karbon atom iskeletinin dallanma dercesini yansıtır. Kimyasal ilişkileri nedeniyle birinci Zagreb indeksi kimya literatüründe çok sayıda çalışmaya konu olmuştur ve birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Nikolic ve ark. 2003, Gutman ve Das 2004, Zhou ve Gutman 2004, Braun ve ark. 2005, Khalifeh ve ark. 2009). Birinci Zagreb indeksi, bazı bilim adamlarınca "Gutman indeksi" olarak da isimlendirilir.

İkinci Zagreb indeksi ise ilk olarak 1972 yılında ele alınmış ve o zamandan beri 2003 yılına kadar ikinci Zagreb indeksiyle ilgili kimya ve matematik literatüründe neredeyse hiç sonuç bulunmamaktadır. Das ve Gutman 2003 yılında ikinci Zagreb indeksi ve eşindeksi (coindex) için bazı tanımlamalar, sınır ve sonuçlar vermiştir. Zagreb indeksleri ve diğer biçimleri, moleküler karmaşıklık, asimetri, ZE-izomerizm, heterosistemler vb. konuları çalışmak için kullanılmıştır (Nikolic ve ark. 2003, Gutman ve Das 2004, Zhou 2004, Zhou ve Gutman 2005, Trinajstic ve ark. 2010).

Yakın zamanda Todeschini ve Consonni (2010) toplamsal graf değişmezlerinin çarpımsal versiyonlarını ortaya koymuştur. Bu çarpımsal versiyonların Zagreb indekslerine uygulanması, birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indekslerinin ortaya çıkmasına öncülük etmiştir. Ağaç grafları için bu çarpımsal Zagreb indekslerinin özellikleri yakın zamanda Gutman (2011) tarafından çalışılmıştır. Çarpımsal Zagreb indekslerinin matematiksel özellikleri ve uygulamaları Todeschini ve ark. (2010), Todeschini ve Consonni (2010), Eliasi ve ark. (2012), Liu ve Zhang (2012), Xu ve ark. (2013) tarafından verilmiştir.

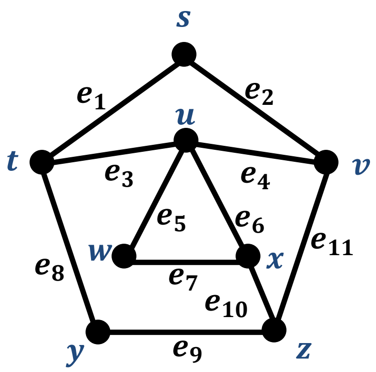
1.2. Temel Kavramlar

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanımlanacak ve graflarla ilgili bazı özellikler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için Bondy ve Murty (1976), Biggs ve ark. (1986), Foulds (1992), Aldous ve Wilson (1995), Gross ve Yellen (2006) ve Balakrishnan ve Ranganathan (2012) veya diğer temel graf teorisi kitapları incelenebilir.

1.2.1. Tanım. Köşeler olarak adlandıran noktalar ile köşeleri birleştiren ve kenar olarak adlandırılan çizgilerden oluşan diyagrama *graf* denir.

G bir graf olmak üzere, G grafının köşe kümesi $V(G)$ ile kenar kümesi ise $E(G)$ ile gösterilir. Buna göre G grafı $G=(V,E)$ ile de gösterilir. Bir G grafında köşe kümesinin eleman sayısı n ve kenar kümesinin eleman sayısı m ile gösterilir, yani $|V(G)|=n$ ve $|E(G)|=m$'dir.

Kenar oluşturan $p,q \in V(G)$ köşelerine *komşudur* denir.



Şekil 1.2. *G* grafı

Şekil 1.2'de verilen G grafının köşe kümesi $V(G)=\{s,t,u,v,w,x,y,z\}$ ve kenar kümesi $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11}\}$'dir.

1.2.2. Tanım. Tek parçadan oluşan bir grafa *bağlantılı graf*, aksi halde *bağlantısız graf* denilir.

1.2.3. Tanım. İki köşeyi birleştiren birden fazla kenar varsa bunlara *çoklu kenar*; bir köşeyi kendine birleştiren bir kenara da *döngü* denir. Bu iki tür kenarı olmayan graflara *basit graf* denir.

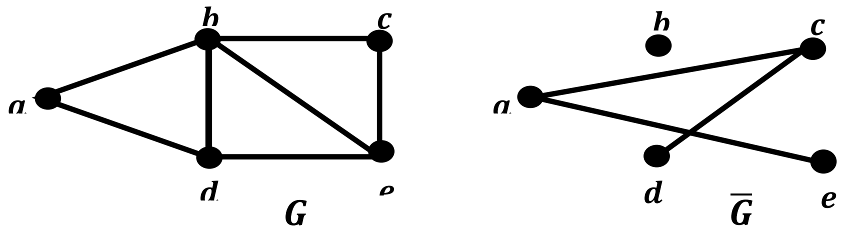
1.2.4. Tanım. G döngüsüz bir graf ve $v \in V(G)$ olsun. v'de buluşan kenarların sayısına v'nin *derecesi* (katlılığı) denilir ve *deg(v)*, d_v ya da $d_G(v)$ ile gösterilir.

1.2.5. Tanım. G grafının *maksimum* ve *minimum derecesi* sırasıyla

$$\Delta(G) = max\{d_G(v)|v \in G\} \quad \text{ve} \quad \delta(G) = min\{d_G(v)|v \in G\}$$

olarak tanımlanır.

1.2.6. Tanım. Bir G grafının *tümleyeni (complement*), G grafıyla aynı köşe kümesine ve G grafında kenar oluşturmayan köşelerin birleştirilmesiyle elde edilen kenar kümesine sahip olan bir graftır ve bu graf $\bar{G}$ ya da G^c ile gösterilir.



Şekil 1.3. $\boldsymbol{G}$ grafı ve $\overline{\boldsymbol{G}}$ tümleyeni

1.2.7. Tanım. G grafında tüm köşe dereceleri eşit ise G grafına *regüler graf* denir. Her bir köşenin derecesi *r* ise G'ye *r-regüler graf* adı verilir.

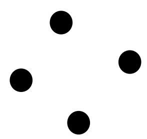
1.2.8. Teorem. G grafı n köşeli ve r-regüler olsun. Bu takdirde G grafının $\frac{nr}{2}$ kenarı vardır.

1.2.9. Lemma (El Sıkışma Lemması). Bir G grafında köşe derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katına eşittir. Yani, $v \in V(G)$ ve $|E(G)| = m$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} d_{v_i} = 2m$$

dir.

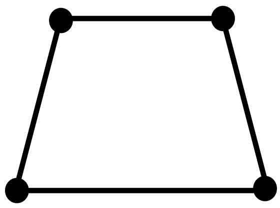
1.2.10. Tanım. Kenarı bulunmayan graflara *boş* (*null*) *graf* adı verilir ve *n* köşeli bir boş graf N_n ile gösterilir.



Şekil 1.4. $\boldsymbol{N_4}$ boş grafı

1.2.11. Tanım. Bir G grafında G'nin kenarlarının *uv, vw, wx,..., yz* şeklindeki bir sıralanışına *patika* denir. Eğer $z = u$ ise bu patikaya *kapalı patika* adı verilir. Bir patikanın tüm kenarları farklı ise *iz* adı verilir. Ayrıca ilk ve son köşeleri hariç, tüm köşeleri farklı olan en az üç köşeli kapalı bir ize *devir* denir.

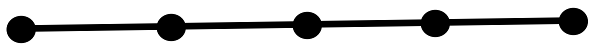
1.2.12. Tanım. Tek bir devirden oluşan grafa *devir grafı (cycle graph)* denilir ve n köşeli bir devir grafı C_n ile gösterilir.



Şekil 1.5. $\boldsymbol{C_4}$ devir grafı

Devir graflar 2-regüler graflardır.

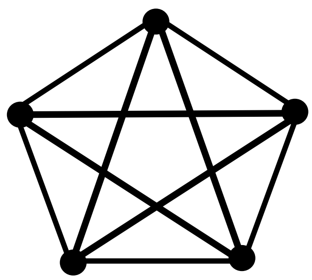
1.2.13. Tanım. Bir tek patikadan oluşan graflara *yol (path) grafı* denir ve n köşeli bir yol grafı P_n ile gösterilir. P_n'nin $n-1$ kenarı vardır ve C_n'den bir tek kenar çıkarılarak elde edilir.



Şekil 1.6. $\boldsymbol{P_5}$ yol grafı

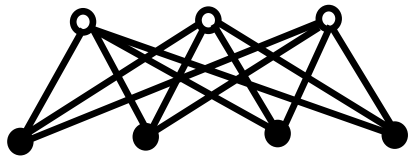
1.2.14. Tanım. Her köşe çiftinin, tam bir kenarla birleştirildiği graflara *tam (complete) graf* denilir ve n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir.

K_n tam grafı $(n-1)$-regüler bir graftır.



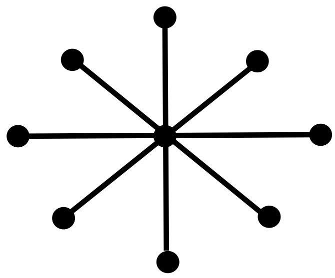
Şekil 1.7. $\boldsymbol{K_5}$ tam grafı

1.2.15. Tanım. Köşe kümesi A ve B gibi iki parçaya ayrılabilen ve her bir kenarı, A'daki bir köşeyi B'deki bir köşeye birleştirilerek oluşturulan graflara *iki parçalı (bipartite) graf* denilir. Eğer bir iki parçalı grafta A'nın her bir köşesi B'nin her bir köşesiyle birleştirilmişse grafa *iki parçalı (complete bipartite) tam graf* denir ve A, s köşeye B, t köşeye sahipse böyle bir graf $K_{s,t}$ ile gösterilir.



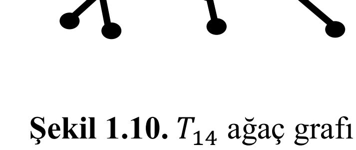
Şekil 1.8. $\boldsymbol{K_{3,4}}$ iki parçalı tam grafı

1.2.16. Tanım. $K_{1,s}$ şeklindeki bir grafa *yıldız (star) graf* adı verilir ve n köşeli bir yıldız graf S_n ile gösterilir.



Şekil 1.9. $\boldsymbol{S_9}$ yıldız grafı

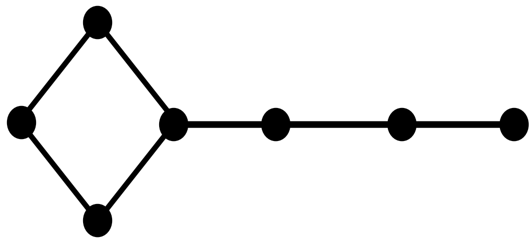
1.2.17. Tanım. Hiç bir devir bulundurmayan bağlantılı graflara *ağaç (tree)* denir ve n köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir.



Şekil 1.10. T_{14} ağaç grafı

Tüm ağaçlar için $d_{n-1} = d_n = 1$'dir. Aynı zamanda $d_1 = 2$ olan ağaç, P_n yol grafıdır ve $d_1 = n - 1$ olan ağaç, S_n yıldız grafıdır. Yol grafta $n_1 = 2,\ n_{n-1} = 1$ ve $k \neq 1, 2$ için $n_k = 0$'dır.

1.2.18. Tanım. P_{s+1} yol grafına C_t devir grafının katılmasıyla elde edilen grafa *tadpole (larva) graf* denir ve $T_{t,s}$ ile gösterilir. Açıkça, $T_{t,s}$ tadpole grafının köşe sayısı $n = t + s$ ve kenar sayısı da $m = t + s$'dir.



Şekil 1.11. $\boldsymbol{T_{4,3}}$ tadpole grafı

2. GRAFLARIN ZAGREB İNDEKSLERİ

2.1. Giriş

Bu kısımda birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ile eşindeksleri (coindices), birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri ile eşindeksleri, total çarpımsal toplam Zagreb indeksi (total multiplicative sum Zagreb index) ve çarpımsal toplam Zagreb indeksi (multiplicative sum Zagreb index) tanımlanarak bu indekslerin birbirleriyle olan bağıntıları ve indekslerin her biri için üst sınırlar verilecektir.

2.2. Birinci ve İkinci Zagreb İndeksleri

En eski graf değişmezlerinden ikisi, iyi bilinen birinci ve ikinci Zagreb indeksleridir. İlk kez Gutman ve Trinasjstic (1972) tarafından moleküler yapı üzerinde toplam π-elektron enerjisinin bağlılığının incelenmesiyle tanıtılmıştır. Gutman ve Trinasjstic eşlenik sistemlerin toplam π-elektron enerjisi için tahminlerde iki terimin ortaya çıktığını bulmuşlardır:

$$\sum_{köşeler} (d_u)^2 \qquad \text{ve} \qquad \sum_{kenarlar} d_u . d_v$$

Burada d_u, moleküler grafın u köşesinin derecesidir. Bu iki sayının moleküler yapıyı yansıttığı fark edilmiştir. Bu bakış açısı Gutman ve ark. (1975) tarafından ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Sonraları Zagreb indeksleri yapı-özellik modellerinde kullanılmıştır. Balaban ve ark. (1983) tarafından isimlendirilmiştir.

Bu kısımda, birinci ve ikinci Zagreb indeksleri tanımlanarak bunların temel özellikleri verilecektir.

2.2.1. Tanım. Bir G grafının birinci Zagreb indeksi $M_1(G)$ ve ikinci Zagreb indeksi $M_2(G)$, en eski ve en çok çalışılan topolojik indeksler arasındadırlar. Bir G grafında $d_G(v)$ ya da d_v ile v köşesinin derecesi gösterilmek üzere, bu indeksler

$$M_1(G) = \sum_{v \in V(G)} d_G(v)^2 \quad \text{ve} \quad M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u) d_G(v)$$

şeklinde tanımlanırlar. Alternatif olarak birinci Zagreb indeksi

$$M_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_G(u) + d_G(v))$$

olarak da tanımlanır. $M_1(G)$ ifadesi, iyi bilinen

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m \tag{2.1}$$

sonucu ile kıyaslanmalıdır. n_k ile, G grafında derecesi k olan köşelerin sayısı ifade edilsin. Bu takdirde, $\sum_{k \geq 0} n_k = n$'dir ve (2.1)'den

$$\sum_{k \geq 0} k n_k = 2m$$

elde edilir. Bu eşitlik birinci Zagreb indeksinin tanımında yerine konursa

$$M_1(G) = \sum_{k \geq 0} k^2 n_k$$

elde edilir.

2.2.2. İddia. Tüm basit, bağlantılı G grafları için

$$\frac{M_1(G)}{n} \leq \frac{M_2(G)}{m}$$

eşitsizliği geçerlidir ve bu sınır tam graflar için dardır.

İddianın genel olarak doğru olmadığı, 6 köşeli yıldız ve bir üçgen içeren bir graf ile 46 köşeli ve 110 kenarlı, bağlantılı graf ters örnekleri bulunarak gösterilmiştir. Yine de, iddianın kimyasal graflar için geçerli olduğu ispatlanmıştır (Hansen ve Vukicevic 2007).

2.2.3. Teorem. $M_1(G) \geq \frac{4m^2}{n}$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G grafının regüler olmasıdır (Ilic ve Stevanovic 2009).

İspat. İstenileni göstermek için $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ ve $(1, 1, \ldots, 1)$ vektörlerinde Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılırsa

$$M_1(G) \cdot n = \left({d_1}^2 + {d_2}^2 + \ldots + {d_n}^2\right) \cdot (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)$$

$$\geq (d_1 \cdot 1 + d_2 \cdot 1 + \cdots + d_n \cdot 1)^2 = (2m)^2$$

elde edilir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G grafının regüler olması yani $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$ olmasıdır.

2.2.4. Teorem. $M_2(G) \geq \frac{4m^3}{n^2}$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G grafının regüler olmasıdır (Ilic ve Stevanovic 2009).

İspat. İlk olarak aritmetik ve geometrik ortalama arasındaki eşitsizlik kullanılırsa;

$$\frac{M_2(G)}{m} = \frac{\sum_{(i,j)\in E} d_i d_j}{m} \geq \sqrt[m]{\prod_{(i,j)\in E} d_i d_j} = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{n} {d_i}^{d_i}}$$

elde edilir. $d_i \geq 1$ olduğundan eşitsizliğin iki tarafının logaritması alınırsa

$$\ln \frac{M_2(G)}{m} \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \ln d_i$$

bulunur ve ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif reel sayıları için

$$x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 + \cdots + x_n \ln x_n \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

eşitsizliğininin geçerli olduğu önermesi kullanılırsa

$$\ln \frac{M_2(G)}{m} \geq \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right) \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \right) = \frac{1}{m} 2m \cdot \ln \frac{2m}{n} = 2 \ln \frac{2m}{n}$$

bulunur ve buradan $M_2(G) \geq \frac{4m^3}{n^2}$ elde edilir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G grafının regüler olması yani $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$ olmasıdır.

2.2.5. Önerme. Bir G grafında maksimum derece Δ olmak üzere

$$\frac{M_1(G)}{n} \leq \frac{\Delta M_1(G)}{2m} \text{ ve } \frac{M_2(G)}{m} \leq \frac{\Delta M_1(G)}{2m}$$

eşitsizlikleri vardır. Eşitsizliklerin ikisinde de eşitliğin geçerli olabilmesi için gerek ve yeter şart G grafının regüler olmasıdır (Ilic ve Stevanovic 2009).

İspat. İkinci eşitsizlik $2M_2(G) \leq \Delta M_1(G)$'ye denk iken ilk eşitsizlik açıkça $2m \leq n\Delta$'ya denktir. O halde

$$2M_2(G) = \sum_{(i,j)\in E} 2d_i d_j \leq \sum_{(i,j)\in E} (d_i^2 + d_j^2) \leq \sum_{i\in V} d_i \cdot d_i^2 \leq \sum_{i\in V} \Delta d_i^2 = \Delta M_1(G)$$

dir. Eşitsizliklerin ikisinde de eşitliğin geçerli olabilmesi için gerek ve yeter şart her $1 \leq i \leq n$ için $d_i = \Delta$ olmasi yani G grafının regüler olmasıdır.

2.2.6. Lemma. G bağlantılı, n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$M_1(G) \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right)$$

dir (Caen 1998).

2.2.7. Lemma. G bağlantılı, n köşeli ve $m > 0$ kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$M_1(G) = m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right)$$

eşitliğinin geçerli olması için gerek ve yeter şart G grafının S_n, K_n veya $K_{n-1} \cup K_1$ graflarından birine izomorf olmasıdır (Das 2004).

2.2.8. Lemma. G grafı m kenarlı, n köşeli, Δ maksimum dereceli ve δ minimum dereceli bir graf olsun. Bu durumda $M_1(G) \leq 2m(\Delta + \delta) - n\Delta\delta$'dir. Eşitlik ancak ve ancak G'deki tüm köşelerin derecelerinin ya Δ ya da δ derecelerine sahip olması durumunda geçerlidir (Das 2004).

2.2.9. Önerme. G, m köşeli ve n kenarlı basit bir graf olsun. Bu takdirde

$$M_1(\bar{G}) = M_1(G) + 2(n-1)(\bar{m} - m)$$

dir (Ashrafi ve ark. 2010).

2.2.10. Teorem. G grafı n köşeye sahip bir graf olmak üzere

$$M_1(G) + M_1(\bar{G}) \leq n(n-1)^2$$

dir (Das ve ark. 2009).

2.2.11. Lemma. G basit, bağlantılı bir graf olmak üzere

$$M_2(G) + M_2(\bar{G}) = \left(n - \frac{3}{2}\right) M_1(G) + \frac{n(n-1)^3}{2} - 3m(n-1)^2 + 2m^2$$

eşitliği sağlanır (Das ve Gutman 2004).

2.2.12. Teorem. G grafı n köşeli bir graf iken

$$M_2(G) + M_2(\bar{G}) \leq \frac{n(n-1)^3}{2}$$

dir (Das ve ark 2009).

2.2.13. Teorem. Basit ve bağlantılı bir G grafı için

$$M_1(G) + 2M_2(G) \leq 4m^2$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart G'nin n köşeli bir tam graf olmasıdır (Das ve Gutman 2004).

2.2.14. Teorem. Basit ve bağlantılı bir G grafında maksimum derece Δ, minimum derece δ olmak üzere

$$M_2(G) \leq 2m^2 - (n-1)m\delta + \frac{1}{2}(\delta - 1)M_1(G)$$

eşitsizliği vardır. G, bir regüler graf ya da yıldız grafsa eşitlik sağlanır (Das ve Gutman 2004).

2.2.15. Teorem. Basit ve bağlantılı bir G grafında $M_2(G) - M_1(G) \geq 11m - 12$ eşitsizliği sağlanır. Sınır dardır ve eşitlik sadece G'nin $\Delta = 3$ ve $\delta = 2$ köşeli, basit, bağlantılı graf olması ve dereceleri 2 olan komşu köşe çiftlerinin olmaması durumunda geçerlidir (Caporossi ve ark. 2010).

2.2.16. Önerme. Basit ve bağlantılı bir G grafında maksimum derece Δ, minimum derece δ olmak üzere $M_1(G) \geq \frac{M_2(G)}{\Delta} + \delta m$ eşitsizliği vardır. G bir regüler grafsa eşitlik sağlanır (Reti 2012).

2.2.17. Önerme. Basit ve bağlantılı bir G grafında maksimum derece Δ, minimum derece δ olmak üzere

$$M_1(G) \leq \frac{M_2(G)}{\delta} + \delta m \text{ ve } M_1(G) \leq \frac{M_2(G)}{\Delta} + \Delta m$$

eşitsizliği vardır. Her iki durumda da eşitsizliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart G'nin regüler ya da bağlantılı, sınıf 1-biregüler graf olmasıdır (Reti 2012).

2.2.18. Sonuç. Önerme 2.2.17'deki eşitsizlikler kullanılıp taraf tarafa toplanırsa

$$M_1(G) \leq \frac{1}{2}\left\{M_2(G)\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\delta}\right) + m(\Delta + \delta)\right\} = \frac{\Delta + \delta}{2}\left\{\frac{M_2(G)}{\Delta\delta} + m\right\}$$

ve

$$M_1(G) \leq \sqrt{\left(\frac{M_2(G)}{\delta} + \delta m\right)\left(\frac{M_2(G)}{\Delta} + \Delta m\right)}$$

eşitsizlikleri bulunur. Her iki durumda da eşitlik hem G'nin regüler hem de bağlantılı, sınıf 1-biregüler graf olması durumunda sağlanır (Reti 2012).

2.2.19. Sonuç. $\delta \leq [d] = \frac{2m}{n} \leq \Delta$ olduğundan Önerme 2.2.17'deki eşitsizlikler kullanılırsa

$$M_1(G) \leq \frac{M_2(G)}{\delta} + [d]m = \frac{M_2(G)}{\delta} + \frac{2m^2}{n}$$

ve benzer şekilde

$$M_1(G) \leq \frac{M_2(G)}{[d]} + \Delta m = \frac{nM_2(G)}{2m} + \Delta m$$

elde edilir. Eşitliğin G'nin regüler graf olması durumunda sağlandığı açıktır (Reti 2012).

2.2.20. Teorem. G, n köşeli ve m kenarlı ve $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, K_{r+1} içermeyen bir graf olsun. Bu takdirde

$$M_1(G) \leq \tfrac{2r-2}{r} nm \quad \text{ve} \quad M_2(G) \leq \tfrac{2}{r} m^2 + \tfrac{(r-1)(r-2)}{r^2} n^2 m$$

sınırları vardır ve eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin $r = 2$ için iki parçalı tam graf olması ve $r \geq 3$ için G'nin regüler, r-parçalı tam graf olmasıdır (Zhou 2007).

2.3. Birinci ve İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksleri

Bu kısımda, birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri tanımlanarak bunların temel özellikleri verilecektir. Todeschini ve Consonni (2010) yakın zamanda Zagreb indekslerinin aşağıdaki şekilde tanımlanan çarpımsal şeklini önermişlerdir:

2.3.1. Tanım. Bir G grafının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri

$$\Pi_1(G) = \prod_{v \in V(G)} d_G(v)^2 \qquad \text{ve} \qquad \Pi_2(G) = \prod_{uv \in E(G)} d_G(u) d_G(v)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu iki graf değişmezi Gutman (2011) tarafından adlandırılmıştır.

Narumi ve Katayama (1980) basit, derece bazlı bir çarpımsal açıklayıcı ortaya çıkarmışlardır. $NK(G) = \prod_{x \in V(G)} d(x)$ ile tanımladıkları bu indeks günümüzde Narumi-Katayama indeksi olarak bilinmektedir. $\Pi_1(G)$ çarpımsal Zagreb indeksi sadece $NK(G)$'nin karesidir.

2.3.2. Lemma. Bağlantılı bir G grafında

$$\Pi_2(G) = \prod_{v \in V(G)} d_G(v)^{d_G(v)}$$

sağlanır (Xu ve ark. 2013).

2.3.3. Lemma. G bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\Pi_2(G) \geq \Pi_1(G)$$

dir ve eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart $n \geq 3$ olmak üzere, G'nin P_n ya da C_n graflarından birine eşit olmasıdır (Reti ve Gutman 2012).

2.3.4. Lemma. G bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\Pi_1(G) \leq \left(\frac{2m}{n}\right)^{2n}$$

dir ve eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin regüler olmasıdır (Reti ve Gutman 2012).

2.3.5. Teorem. G, n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda,

$$\Pi_1(G) \leq \left(\frac{2m}{n}\right)^{2}$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak G'nin bir $\frac{2m}{n}$ regüler graf olması durumunda geçerlidir (Liu ve Zhang 2012).

2.3.6 Sonuç. G; $2n$ köşeli, bağlantılı, iki parçalı bir graf ise $\Pi_1(G) \leq n^{4n}$ olur. Eşitlik ancak ve ancak G'nin bir $K_{n,n}$ iki parçalı grafı olması durumunda geçerlidir (Liu ve Zhang 2012).

2.3.7. Lemma. G bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\Pi_1(G) \leq \left(\frac{M_1(G)}{n}\right)^{n}$$

dir ve eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin regüler olmasıdır (Reti ve Gutman 2012).

2.3.8. Sonuç. Sabit bir köşe sayısına sahip, bağlantılı tüm graflar arasında yıldız graf, en küçük birinci çarpımsal Zagreb indeksine sahiptir (Gutman 2011).

2.3.9. Sonuç. G, $n \geq 3$ köşeli ve m kenarlı, bağlantılı bir graf ise $(n-1)^2 \leq \Pi_1(G) \leq (n-1)^{2m}$'dir. Sol tarafta eşitliğin geçerli olabilmesi için gerek ve yeter şart $G \cong S_n$ olması ve sağ tarafta eşitliğin geçerli olabilmesi için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ olmasıdır (Eliasi ve ark. 2012).

2.3.10. Lemma. G bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde $\Pi_2(G) \geq \left(\frac{2m}{n}\right)^{2m}$'dir ve eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin regüler olmasıdır (Reti ve Gutman 2012).

2.3.11. Lemma. Herhangi bir bağlantılı, n köşeli G grafı için

$$\Pi_2(G) \leq \Pi_2(K_n) = (n-1)^{n(n-1)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ olmasıdır (Reti ve Gutman 2012).

2.3.12. Lemma. G bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\Pi_2(G) \leq \left(\frac{M_2(G)}{m}\right)^m$$

dir ve eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin regüler olmasıdır (Reti ve Gutman 2012).

2.3.13. Teorem. G bağlantılı, aşikar olmayan n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\Pi_2(G) \leq \left(\frac{M_1(G)}{2m}\right)^{2m}$$

dir ve eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin $\frac{2m}{n}$-regüler olmasıdır (Liu ve Zhang 2012).

2.3.14. Teorem. G, n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. O halde

$$\sqrt[n]{\Pi_1(G)} \leq \sqrt[m]{\Pi_2(G)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Dahası, eşitlik regüler graflar için sağlanır (Eliasi ve Vukiceviv 2013).

2.3.15. Teorem. G, minimum derecesi δ olan bir basit, bağlantılı graf olsun. Bu takdirde

$$\Pi_2(G) \leq \frac{\Pi_1(G)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\delta^{n(n-1)-2m}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart her bir $v \in V(G)$ köşesi için eğer $vu \notin E(G)$ ise $d_v = \delta$ olacak şekilde bir $u \in V(G)$ köşesinin bulunmasıdır (Eliasi ve Vukiceviv 2013).

2.4. Birinci ve İkinci Zagreb Eşindeksleri

Bu alt bölümde birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri (coindices) tanıtılıp temel özellikleri verilecektir.

2.4.1. Tanım. G grafının *birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri*

$$\overline{M_1}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (d_G(u) + d_G\,(v))$$

$$\overline{M_2}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u) d_G(v)$$

olarak tanımlanır.

G'nin kenar oluşturmayan köşe ikililerinin dereceleri alınarak bu indeksler hesaplanır.

2.4.2. Lemma. G bağlantılı grafı, n köşeli ve m kenarlı olsun. Bu takdirde

$$\overline{M_1}(G) = 2m(n-1) - M_1(G)$$

ve

$$\overline{M_2}(G) = 2m^2 - M_2(G) - \frac{1}{2}M_1(G)$$

dir (Ashrafi ve ark. 2010).

2.4.3. Lemma. G basit bir graf ise $\overline{M_1}(G) = \overline{M_1}(\bar{G})$'dir (Ashrafi ve ark. 2010).

İspat. Lemma 2.4.2, $\bar{G}$'ye uygulanırsa

$$\overline{M_1}(\bar{G}) = 2\bar{m}(n-1) - M_1(\bar{G})$$

elde edilir. Önerme 2.2.9'da $M_1(\bar{G})$ yerine konulursa

$$\overline{M_1}(\bar{G}) = 2\bar{m}(n-1) - M_1(G) - 2(n-1)(\bar{m} - m)$$

elde edilir ki bu Lemma 2.4.2'deki $\overline{M_1}(G)$'yi verir. Böylece bütün basit graflar için verilen lemma geçerli olur.

Sonuç 2.4.4. G bağlantılı, aşikar olmayan n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\Pi_2(G) \leq \left[\frac{2m(n-1) - \overline{M_1}(G)}{2m}\right]^{2m}$$

dir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin $\frac{2m}{n}$-regüler bir graf olmasıdır (Liu ve Zhang 2012).

İspat. Lemma 2.4.2 ve Teorem 2.3.13'den istenen sonuç kolayca elde edilir.

2.5. Birinci ve İkinci Çarpımsal Zagreb Eşindeksleri

Bu alt bölümde birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri (coindices) tanıtılıp bazı özellikleri verilecektir. İki yeni graf değişmezi olan birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri, $i = 1, 2$ için $\overline{M_i}$ eşindekslerinin çarpımsal versiyonları olarak Xu ve ark. (2013) tarafından tanımlanmışlardır.

2.5.1. Tanım. G herhangi bir graf olmak üzere, birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri

$$\overline{\Pi_1}(G) = \prod_{uv \notin E(G)} (d_G(u) + d_G(v))$$

ve

$$\overline{\Pi_2}(G) = \prod\nolimits_{uv \notin E(G)} d_G(u) d_G(v)$$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer G grafında $uv \notin E(G)$ olacak şekilde u, v köşeleri bulunmuyorsa bu çarpımsal indeksler özel olarak 1 şeklinde tanımlanır.

2.5.2. Lemma. Bağlantılı bir G grafı için

$$\overline{\Pi_2}(G) = \prod_{v \in V(G)} d_G(v)^{n-1-d_G(v)}$$

eşitliği geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

İspat. $\Pi_2(G)$'nin tanımından görülür ki, her $v \in V(G)$ köşesi için $d_G(v)$ çarpanı $\Pi_2(G)$'de $n - 1 - d_G(v)$ kez oluşur.

2.5.3. Teorem. Bağlantılı bir G grafı için

$$\Pi_2(G) \cdot \overline{\Pi_2}(G) = \left(\Pi_1(G)\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

eşitliği sağlanır (Xu ve ark. 2013).

İspat. Lemma 2.3.2 ile Lemma 2.5.2'den ve birinci ile ikinci çarpımsal Zagreb indekslerinin tanımlarından teoremin ispatı kolayca elde edilir.

2.5.4. Teorem. G bağlantılı, aşikar olmayan n köşeli ve m kenarlı bir graf ve G'nin maximum derecesi Δ olsun. Bu takdirde

$$\overline{\Pi_2}(G) \geq \Pi_1(G)^{\frac{n-1-\Delta}{2}}$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin $\frac{2m}{n}$-regüler graf olmasıdır (Nezhad ve ark. 2014).

İspat. $\overline{\Pi_2}(G)$ indeksinin tanımı kullanılarak

$$\overline{\Pi_2}(\mathrm{G}) = \prod_{i=1}^{n} d_i^{n-1-d_i} \geq \prod_{i=1}^{n} d_i^{n-1-\Delta} = \Pi_1(\mathrm{G})^{\frac{n-1-\Delta}{2}}$$

elde edilir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = \Delta$ olması yani G'nin $\frac{2m}{n}$-regüler graf olmasıdır.

2.5.5. Teorem. *n* köşeli ve *m* kenarlı bağlantılı bir G grafı için

$$\overline{\Pi_2}(\mathrm{G}) \leq \left(\frac{2(n-1)m - M_1(G)}{n(n-1) - 2m}\right)^{n(n-1)-2m}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak G'nin bir $\frac{2m}{n}$-regüler graf olması durumunda geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

2.5.6. Sonuç. *n* köşeli ve *m* kenarlı, bağlantılı bir G grafı için

$$\overline{\Pi_2}(\mathrm{G}) \leq \left(\frac{\overline{\mathrm{M}_1}(\mathrm{G})}{n(n-1) - 2m}\right)^{n(n-1)-2m}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak G'nin bir $\frac{2m}{n}$-regüler graf olması durumunda geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

2.5.7. Teorem. G bağlantılı, aşikar olmayan n köşeli ve m kenarlı bir graf ve G'nin maximum derecesi Δ, minimum derecesi δ olsun. Bu takdirde

$$\overline{\Pi_2}(\mathrm{G}) \geq \left(\frac{\delta}{2\Delta}\right)^{n(n-1)-2m} \overline{\Pi_1}(\mathrm{G})^2$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin $\frac{2m}{n}$-regüler graf olmasıdır (Nezhad ve ark. 2014).

İspat. $\overline{\Pi_1}(\mathrm{G})$ ve $\overline{\Pi_2}(\mathrm{G})$ indekslerinin tanımından

$$\frac{\overline{\Pi_2}(\mathrm{G})}{\overline{\Pi_1}(\mathrm{G})^2} = \prod_{uv\notin E(G)} \frac{d_u d_v}{{d_u + d_v}^2} \geq \prod_{uv\notin E(G)} \frac{\delta^2}{4\Delta^2} = \left(\frac{\delta^2}{4\Delta^2}\right)^{\binom{n}{2}-m} = \left(\frac{\delta}{2\Delta}\right)^{n(n-1)-2m}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin geçerli olabilmesi için gerek ve yeter şart G'nin herhangi iki komşu olmayan u ve v köşeleri için $d_u = d_v = \delta = \Delta$ olması yani G'nin $\frac{2m}{n}$-regüler bir graf olmasıdır.

2.5.8. Teorem. G bağlantılı, aşikar olmayan n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\overline{\Pi_2}(\mathrm{G}) \geq \Pi_1(\mathrm{G})^{\frac{n}{2}} \left[\frac{n+2m}{2m + M_1(G)}\right]^{n+2m}$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin $\frac{2m}{n}$-regüler graf olmasıdır (Nezhad ve ark. 2014).

2.5.9. Sonuç. G bağlantılı, aşikar olmayan n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\overline{\Pi_2}(\mathrm{G}) \geq \Pi_1(\mathrm{G})^{\frac{n}{2}} \left[\frac{n+2m}{2mn - \overline{M_1}(G)}\right]^{n+2m}$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin $\frac{2m}{n}$-regüler graf olmasıdır (Nezhad ve ark. 2014).

İspat. Teorem 2.5.8 ve Lemma 2.4.2 kullanılarak istenen sonuca kolayca ulaşılır.

2.6. Total Çarpımsal Toplam Zagreb İndeksi ve Çarpımsal Toplam Zagreb İndeksi

Bu alt bölümde total çarpımsal toplam Zagreb indeksi (total multiplicative sum Zagreb index) ve çarpımsal toplam Zagreb indeksi (multiplicative sum Zagreb index) tanımlanıp bu indekslerle ilgili, ileriki bölümlerde kullanılacak olan bir takım bağıntılar verilecektir.

2.6.1. Tanım. Bir G grafının total çarpımsal toplam Zagreb indeksi

$$\Pi^{\mathrm{T}}(\mathrm{G}) = \prod_{u,v \in V(G)} (d_G(u) + d_G(v))$$

şeklinde tanımlanır.

2.6.2. Tanım. Bir G grafının çarpımsal toplam Zagreb indeksi

$$\Pi_1^*(\mathrm{G}) = \prod_{uv \in E(G)} (d_G(u) + d_G(v))$$

şeklinde tanımlıdır.

2.6.3. Lemma. Bağlantılı bir G grafında

$$\Pi_1^*(\mathrm{G}) \cdot \overline{\Pi_1}(\mathrm{G}) = \Pi^{\mathrm{T}}(\mathrm{G})$$

özelliği geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

2.6.4. Teorem. Sabit bir köşe sayısına sahip, bağlantılı tüm graflar arasında yol graf, minimal çarpımsal toplam Zagreb indeksine sahiptir (Eliasi ve ark. 2012).

2.6.5. Sonuç. G, $n \geq 3$ köşeli ve m kenarlı bağlantılı bir graf olmak üzere

$$3^{2n-2m}4^{3m-2n} \leq \Pi_1^*(\mathrm{G}) \leq (2n-2)^m$$

dir. Sol tarafta eşitliğin geçerli olabilmesi için gerek ve yeter şart $G \cong P_n$ olması ve sağ tarafta eşitliğin geçerli olabilmesi için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ olmasıdır (Eliasi ve ark. 2012).

2.6.6. Teorem. G basit, bağlantılı ve n köşeli bir graf olsun. Bu takdirde $\Pi_1(\mathrm{G}) \leq \Pi_1^*(\mathrm{G})$'dir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart $G \cong C_n$ olmasıdır (Eliasi ve Vukicevic 2013).

2.6.7. Teorem. G, m kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\sqrt{\Pi_2(\mathrm{G})} \leq \frac{\Pi_1^*(\mathrm{G})}{2^m}$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik sadece regüler graflar için geçerlidir (Eliasi ve Vukicevic 2013).

İspat. Dikkat edilirse

$$\frac{\sqrt{\Pi_2(\mathrm{G})}}{\Pi_1^*(\mathrm{G})} = \frac{\prod_{uv\in E(G)} \sqrt{d_u d_v}}{2^m \prod_{uv\in E(G)} \frac{d_u + d_v}{2}} = \frac{1}{2^m} \prod_{uv\in E(G)} \frac{\sqrt{d_u d_v}}{\frac{d_u + d_v}{2}} \leq \frac{1}{2^m}$$

dir. Buna göre, eşitliğin geçerliliği için gerek ve yeter şart her $uv \in E(G)$ kenarı için $d_u = d_v$ olması, yani G'nin regüler graf olması gerektiği açıktır.

2.6.8. Teorem. G, maximum derecesi Δ, minimum derecesi δ olan m kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\sqrt{\Pi_2(\mathrm{G})} \geq \Pi_1^*(\mathrm{G}) \left(\frac{\sqrt{\Delta\delta}}{\Delta + \delta} \right)^m$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart G'nin her bir kenarı için, kenarı oluşturan köşelerin dereceleri Δ ve δ olmalıdır (Eliasi ve Vukicevic 2013).

2.6.9. Sonuç. G, n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\sqrt{\Pi_2(\mathrm{G})} \geq \Pi_1^*(\mathrm{G}) \left(\frac{\sqrt{n-1}}{n} \right)^m$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart G'nin bir yıldız graf olmasıdır (Eliasi ve Vukicevic 2013).

3. BAZI GRAFLARIN ZAGREB TİPİ GRAF İNDEKSLERİ

Bu bölümde iyi bilinen boş graf N_n, yol graf P_n, devir graf C_n, yıldız graf S_n, tam graf K_n, iki parçalı tam graf $K_{t,s}$, tadpole $T_{t,s}$ grafları için tüm Zagreb tipi indeksleri hesaplanarak bu indeksler arasında bazı bağıntılar elde edilmiştir.

Regüler graflar, birinci Zagreb indeksi söz konusu olduğunda ilgi çekicidirler. Kimyasal graf teoride son zamanlardaki çalışmalarda derecesi 3 olan regüler graflar daha çok incelenmiştir çünkü bu graflar fulleren, nanotüp ve benzer karbon-atom salkımlarını temsil ederler. Regüler graflar için $M_1(G) = nr^2$'dir. Birinci ve ikinci Zagreb indeksleri P_n yol graf için hesaplanarak

$$M_1(P_n) = 2 \cdot 1^2 + (n-2) \cdot 2^2 = 4n - 6$$
$$M_2(P_n) = 2(1 \cdot 2) + (2 \cdot 2)(n-3)$$

bulunur. Yıldız grafta ise $n_1 = n-1,\ n_{n-1} = 1$ ve $k \neq 1, n-1$ için $n_k = 0$'dır. Buna göre, $M_1(S_n) = (n-1) \cdot 1^2 + 1 \cdot (n-1)^2 = n(n-1)$ ve $M_2(S_n) = [1 \cdot (n-1)](n-1) = (n-1)^2$ bulunur. Diğer graf çeşitleri içinde benzer işlemler yapılarak aşağıdaki çizelge oluşturulabilir:

Çizelge 3.1. Bazı grafların birinci ve ikinci Zagreb indeksleri

	$\boldsymbol{M_1(G)}$	$\boldsymbol{M_2(G)}$
$\boldsymbol{N_n}$	0	0
$\boldsymbol{P_n}$	$4n-6$	$4n-8$
$\boldsymbol{C_n}$	$4n$	$4n$
$\boldsymbol{S_n}$	$n(n-1)$	$(n-1)^2$
$\boldsymbol{K_n}$	$n(n-1)^2$	$\binom{n}{2}(n-1)^2$
$\boldsymbol{K_{t,s}}$	$ts(t+s)$	t^2s^2
$\boldsymbol{T_{t,s}}$	$2^2(t+s)+2$	$4(t+s+1)$

Benzer şekilde, P_n ve S_n grafları için birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri de hesaplanırsa

$$\Pi_1(P_n) = (1^2)^2 \cdot (2^2)^{(n-2)} = 2^{2n-4}$$

$$\Pi_2(P_n) = (1 \cdot 2)^2 \cdot (2 \cdot 2)^{(n-3)} = 2^{2n-4}$$

ve yıldız grafta ise,

$$\Pi_1(S_n) = (1^2)^{(n-1)} \cdot (n-1)^2 = (n-1)^2$$

$$\Pi_2(S_n) = [1 \cdot (n-1)]^{(n-1)} = (n-1)^{(n-1)}$$

elde edilir ve diğer graf çeşitleri için de benzer işlemler yapılarak aşağıdaki çizelge oluşturulur:

Çizelge 3.2. Bazı grafların birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri

	$\mathbf{\Pi_1(G)}$	$\mathbf{\Pi_2(G)}$
$\boldsymbol{N_n}$	0	0
$\boldsymbol{P_n}$	2^{2n-4}	2^{2n-4}
$\boldsymbol{C_n}$	2^{2n}	2^{2n}
$\boldsymbol{S_n}$	$(n-1)^2$	$(n-1)^{(n-1)}$
$\boldsymbol{K_n}$	$(n-1)^{2n}$	$(n-1)^{n(n-1)}$
$\boldsymbol{K_{t,s}}$	$t^{2s} \cdot s^{2t}$	ts^{ts}
$\boldsymbol{T_{t,s}}$	$2^{2(t+s-2)} \cdot 3^2$	$2^{2(t+s-2)} \cdot 3^3$

Aynı graflar için total çarpımsal toplam Zagreb indeksi ve çarpımsal toplam Zagreb indeksleri hesaplanarak aşağıdaki çizelge oluşturulabilir:

Örneğin $T_{t,s}$ tadpole grafı için bu indeksler tanımları kullanılarak hesaplanırsa,

$$\Pi^{\mathrm{T}}(T_{t,s}) = (2+2)^{\left[\binom{t-1}{2}+\binom{s-1}{2}+(t-1)(s-1)\right]} \cdot (2+3)^{s-1+t-1} \cdot (2+1)^{s-1+t-1} \cdot (3+1)$$

$$= 2^{t^2+ts+s^2-4(t+s)+7} \cdot 3^{t+s-2} \cdot 5^{t+s-2}$$

$$\Pi_1^*(\mathrm{G}) = (2+2)^{s-2+t-2} \cdot (2+3)^3 \cdot (2+1) = 2^{2(s+t-4)} \cdot 5^3 \cdot 3$$

olarak bulunur ve aynı işlemler diğer graf çeşitleri için de yapılır.

Çizelge 3.3. Bazı grafların total çarpımsal toplam Zagreb indeksleri ve çarpımsal toplam Zagreb indeksleri

	$\Pi^{\mathrm{T}}(\mathrm{G})$	$\Pi_1^*(\mathrm{G})$
N_n	0	0
P_n	$3^{2(n-2)} \cdot 2^{(n-3)(n-2)+1}$	$3^2 \cdot 2^{2(n-3)}$
C_n	$2^{n(n-1)}$	2^{2n}
S_n	$2^{\binom{n-1}{2}} \cdot n^{n-1}$	n^{n-1}
K_n	$(2n-2)^{\binom{n}{2}}$	$(2n-2)^{\binom{n}{2}}$
$K_{t,s}$	$(2t)^{\binom{s}{2}} \cdot (2s)^{\binom{t}{2}} \cdot (t+s)^{ts}$	$(t+s)^{ts}$
$T_{t,s}$	$2^{t^2+ts+s^2-4(t+s)+7} \cdot 3^{t+s-2} \cdot 5^{t+s-2}$	$2^{2(t+s-4)} \cdot 3 \cdot 5^3$

Benzer şekilde, birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri için aşağıdaki çizelge elde edilir:

Çizelge 3.4. Bazı grafların birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri

	$\overline{\mathrm{M}_1}(\mathrm{G})$	$\overline{\mathrm{M}_2}(\mathrm{G})$
N_n	$n(n-1)^2$	$\binom{n}{2}(n-1)^2$
P_n	$2(n-2)^2$	$2n^2-10n+13$
C_n	$2^2\left[\binom{n}{2}-n\right]$	$2^2\left[\binom{n}{2}-n\right]$
S_n	$(n-1)(n-2)$	$\binom{n-1}{2}$
K_n	0	0
$K_{t,s}$	$ts(t+s-2)$	$t^2 \cdot \binom{s}{2} + s^2 \cdot \binom{t}{2}$
$T_{t,s}$	$2(t+s)^2-6(t+s)-2$	$2(t+s)^2-6(t+s)-2$

Benzer işlemler birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri için yapılarak aşağıdaki sonuçlar bulunur:

Çizelge 3.5. Bazı grafların birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri

	$\overline{\Pi_1}(G)$	$\overline{\Pi_2}(G)$
N_n	$[2(n-1)]^{\binom{n}{2}}$	$(n-1)^{n(n-1)}$
P_n	$3^{2(n-3)} \cdot 2^{(n-3)(n-4)+1}$	$2^{(n-3)(n-2)}$
C_n	$2^{2\left[\binom{n}{2}-n\right]}$	$2^{2\left[\binom{n}{2}-n\right]}$
S_n	$2^{\binom{n-1}{2}}$	1
K_n	1	1
$K_{t,s}$	$(2t)^{\binom{s}{2}} \cdot (2s)^{\binom{t}{2}}$	$t^{s(s-1)} \cdot s^{t(t-1)}$
$T_{t,s}$	$2^{t^2+ts+s^2-6(t+s)+15} \cdot 3^{t+s-3} \cdot 5^{t+s-5}$	$2^{(t+s)^2-5(t+s)+6} \cdot 3^{t+s-4}$

3.1. Sonuç. Yol graf P_n, devir graf C_n, yıldız graf S_n, tam graf K_n, iki parçalı tam graf $K_{t,s}$, tadpole $T_{t,s}$ grafları için Zagreb tipi indeksleri arasında bazı bağıntılar verilmiştir:

i. $M_2(K_n) = \frac{(n-1)}{2} M_1(K_n)$

ii. $M_1(S_n) - M_2(S_n) = n-1$

iii. $\Pi_1(P_n) = \Pi_2(P_n)$

iv. $\Pi_1(C_n) = \Pi_2(C_n)$

v. $\Pi_1(S_n) = M_2(S_n)$

vi. $\Pi_1(S_n) \cdot \Pi_2(S_n) = (n-1)^{n(n+1)}$

vii. $\Pi_1(S_n) - M_1(S_n) = 1-n$

viii. $\Pi_2(K_n) - \Pi_1(K_n) = (n-1)^n[\Pi_2(S_n) - \Pi_1(S_n)]$

ix. $\Pi_1(K_n) + \Pi_2(K_n) = (n-1)^n[\Pi_1(S_n) + \Pi_2(S_n)]$

x. $\Pi_1(K_n) \cdot \Pi_2(K_n) = (n-1)^{n(n+1)}$

xi. $\Pi_1(K_n) = [\Pi_1(S_n)]^n$

xii. $\Pi_2(K_n) = [\Pi_2(S_n)]^n$

İspat. Sonuçlar yukarıda yer alan çizelgelerin tümünden elde edilir.

3.2. Teorem. G, n köşeli ve tam graf K_n ile tümleyeni $\overline{K}_n$'den farklı bir graf olmak üzere

$$M_2(\overline{K}_n) \leq M_2(G) \leq M_2(K_n)$$

yani $0 \leq M_2(G) \leq \frac{1}{2}n(n-1)^3$'dir (Das ve Gutman 2004).

3.3. Lemma. Bağlantılı, n köşeli bir graf göz önüne alındığında, n köşeli bir ağaç graf minimum ikinci Zagreb indeksine sahiptir (Das ve Gutman 2004).

3.4. Teorem. T, n köşeli bir ağaç graf olsun. Eğer T'nin ikinci Zagreb indeksi maksimumsa T bir yıldız graftır (Das ve Gutman 2004).

3.5. Teorem. T, yıldız graf S_n ve yol graf P_n'den farklı ve n köşeli ve bir ağaç graf olmak üzere

$$M_2(P_n) < M_2(T) < M_2(S_n)$$

dir (Das ve Gutman 2004).

3.6. Lemma. T, n köşeli bir ağaç graf olmak üzere

$$\overline{M_1}(S_n) \leq \overline{M_1}(T) \leq \overline{M_1}(P_n)$$

eşitsizlikleri vardır (Ashrafi ve ark. 2011).

3.7. Lemma. T, n köşeli bir ağaç graf olmak üzere

$$\overline{M_2}(S_n) \leq \overline{M_2}(T) \leq \overline{M_2}(P_n)$$

eşitsizlikleri vardır (Ashrafi ve ark. 2011).

3.8. Teorem. $n \geq 5$ olmak üzere n köşeye sahip ağaçların kümesi $\mathcal{T}_n$ ile gösterilsin ve $T_n \in \mathcal{T}_n, T_n \ncong P_n, S_n$ olsun. Bu takdirde

$$\Pi_1(S_n) \leq \Pi_1(T_n) \leq \Pi_1(P_n) \text{ ve } \Pi_2(P_n) \leq \Pi_2(T_n) \leq \Pi_2(S_n)$$

ifadeleri geçerlidir (Gutman 2011).

4. ALT GRAFLARIN ZAGREB İNDEKSLERİ

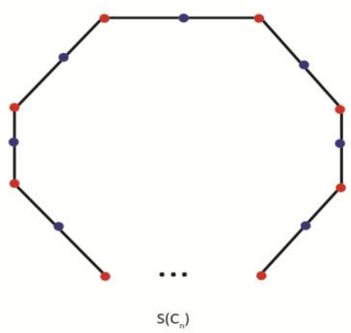
4.1. Bilinen Bazı Grafların Alt Graflarının Zagreb İndeksleri

Bu kısımda iyi bilinen yol graf P_n, devir graf C_n, yıldız graf S_n, tam graf K_n, iki parçalı tam graf $K_{t,s}$, tadpole $T_{t,s}$ grafların alt graflarının 10 çeşit Zagreb indeksleri elde edilmiştir. Bu uygulama Zagreb indekslerinin hesabında, grafların her bir köşesinin tek tek dereceleri ile uğraşmak yerine, sadece grafın kenar ve köşe sayılarının bilinmesinin yeterli olduğunu gösteren bir çalışmadır ve Zagreb indekslerinin hesabında büyük kolaylık sağlamaktadır.

4.1.1. Tanım. Bir basit G grafının her bir kenarına ekstra bir köşe eklenerek elde edilen yeni grafa G'*nin alt grafı* denir ve $S(G)$ ile gösterilir. Diğer bir deyişle alt graf, G'nin her bir kenarının, uzunluğu 2 olan bir yol grafla değiştirilmesiyle elde edilen graftır.

Bu çalışmada $S(G)$ alt grafının köşe ve kenar sayıları sırasıyla, $n(S_1)$ ve $m(S_1)$ ile gösterilecektir.

Örneğin Şekil 4.1'de C_n devir grafının $S(C_n)$ alt grafı verilmiştir.



Şekil 4.1. $\boldsymbol{C_n}$ devir grafının $\boldsymbol{S(C_n)}$ alt grafı

Teorem 4.1.2. $S(G)$, G grafının bir alt grafı olsun. Bu takdride

$$\frac{M_1(S(G))}{n+m} \leq \frac{M_2(S(G))}{2m}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G'nin bir regüler graf olmasıdır (Ilic ve Stevanovic 2009).

İspat. $S(G)$ alt grafında yeni eklenen köşelerin dereceleri 2 iken G'nin köşe dereceleri aynıdır. Buradan

$$M_1(S(G)) \; = \; M_1(G) \; + 2^2 \; \cdot m \tag{4.1}$$

yazılabilir. G'nin alt grafı oluşturulurken, her bir (i,j) kenarı, $2d_i$ ve $2d_i$ ağırlıklı 2 parçaya bölündüğünden

$$M_2(S(G)) = \sum_{(i,j)\in E}\left(2d_i + 2d_j\right) = 2\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \; = 2M_1(G) \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.1) ve (4.2) formülleri ve Teorem 2.2.3 kullanılarak

$$M_1\big(S(G)\big) = M_1(G) + 4m \geq \frac{4m^2}{n} + 4m = \frac{4m^2 + 4nm}{n} = \frac{4m(m+n)}{n}$$

$$n \cdot M_1\big(S(G)\big) \geq 4m(m+n) \Leftrightarrow \; nM_1\big(S(G)\big) - 4m^2 - 4mn + m \cdot M_1\big(S(G)\big) \geq m \cdot M_1\big(S(G)\big)$$

$$(n+m)\big[M_1\big(S(G)\big) - 4m\big] \geq mM_1\big(S(G)\big)$$

$$\frac{M_1\big(S(G)\big) - 4m}{m} \geq \frac{M_1\big(S(G)\big)}{n+m}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{M_1\big(S(G)\big)}{n+m} \leq \frac{M_1\big(S(G)\big)}{m} - 4 = \frac{M_1(G) + 4m}{m} - 4 = \frac{\frac{M_2\big(S(G)\big) + 8m}{2}}{m} - 4$$

$$= \frac{M_2\big(S(G)\big) + 8m - 8m}{2m}$$

yazılarak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3. $S(G), G$'nin bir alt grafı olmak üzere

$$M_1\big(S(G)\big) = \frac{M_2\big(S(G)\big)}{2} + 2m \cdot S(G)$$

bağıntısı vardır (Reti 2012).

Teorem 4.1.4. G grafının ve onun alt grafı $S(G)$'nin köşe ve kenar sayıları sırasıyla $n, m, n(S_1), m(S_1)$ olsun. Bu takdirde yol, devir graf, yıldız, tam ve iki parçalı tam graf ile tadpole grafların alt graflarının birinci ve ikinci Zagreb indeksleri

$$M_1\big(S(G)\big) = \begin{cases} 8n - 10;\ G = P_n, n \geq 2 \\ 8n;\ G = C_n, n > 2 \\ (n-1)(n+4); G = S_n, n \geq 2 \\ n^3 - n;\ G = K_n, n \geq 2 \\ ts(t+s+4);\ G = K_{t,s}, \forall t,s > 0 \\ 2(4t+4s+1);\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \end{cases}$$

ve

$$M_2\big(S(G)\big) = \begin{cases} 8n - 12;\ G = P_n, n \geq 2 \\ 8n;\ G = C_n, n > 2 \\ 2n(n-1);\ G = S_n, n \geq 2 \\ 2n(n-1)^2;\ G = K_n, n \geq 2 \\ 2ts(t+s);\ G = K_{t,s}, \forall t,s > 0 \\ 4(2t+2s+1);\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \end{cases}$$

olarak hesaplanmıştır.

İspat. $G = P_n,\ n \geq 2$ olsun. Burada $m = n - 1$'dir. Ayrıca $S(P_n) = P_{2n-1}$'dir. Bu takdirde $n(S_1) = 2n - 1$ ve $m(S_1) = 2(n-1)$ olur.

Şekil 4.2. $\boldsymbol{S(P_n)}$ alt grafı

$S(P_n) = P_{2n-1}$ grafının iki uç köşesinin derecesi 1, kalan $2n-3$ tane köşenin tümünün dereceleri 2'dir. O halde $M_1(G)$ indeksinin tanımı uygulanırsa

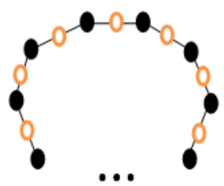
$$M_1(S(P_n)) = M_1(P_{2n-1}) = 2.1^2 + (2n-3).2^2 = 8n - 10$$

bulunur. Ayrıca $M_2(G)$'nin tanımından

$$\begin{aligned} M_2\big(S(P_n)\big) &= M_2(P_{2n-1}) = 1.2 + 2.2 + 2.2 + \cdots + 2.2 + 2.1 \\ &= 4(m(S_1) - 2) + 4 = 4(m(S_1) - 2) + 4 = 4(m(S_1) - 1) \\ &= 4(2(n-1) - 1) = 8n - 12 \end{aligned}$$

elde edilir.

$G = C_n,\ n > 2$ olsun. Burada $m = n$'dir. Ayrıca $S(C_n) = C_{2n}$'dir. Bu takdirde $n(S_1) = 2n$ ve $m(S_1) = 2n$'dir.



Şekil 4.3. $\boldsymbol{S(C_n)}$ alt grafı

$S(C_n) = C_{2n}$ grafının köşelerinin tümünün dereceleri 2'dir. O halde $M_1(G)$'nin tanımı uygulanırsa

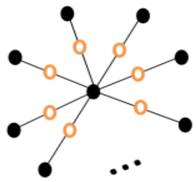
$$M_1(S(C_n)) = M_1(C_{2n}) = 2n.2^2 = 8n$$

ve $M_2(G)$ indeksinin tanımından

$$M_2(S(C_n)) = M_2(C_{2n}) = 2.2 + 2.2 + 2.2 + \ldots + 2.2 = 4 \cdot m(S_1) = 4.2n = 8n$$

elde edilir.

$G = S_n,\ n \geq 2$ olsun. Burada $m = n - 1$'dir. Bu takdirde $S(S_n)$ için $n(S_1) = 2n - 1$ ve $m(S_1) = 2n - 2$'dir.



Şekil 4.4. $\boldsymbol{S(S_n)}$ alt grafı

$S(S_n)$ grafı, derecesi $n-1$ olan bir orta köşeye; derecesi 1 olan $n-1$ tane uç köşeye ve $n-1$ tane yeni eklenen, derecesi 2 olan köşelere sahiptir. O halde $M_1(G)$ indeksinin tanımı uygulanırsa

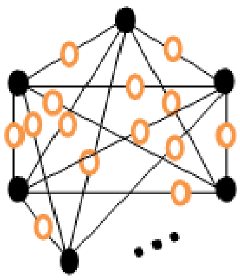
$$\begin{aligned} M_1(S(S_n)) &= 1(n-1)^2 + (n-1).1^2 + (n-1).2^2 \\ &= (n-1)[n-1+1+4] = (n-1)(n+4) \end{aligned}$$

ve $M_2(G)$'nin tanımından

$$M_2(S(S_n)) = (n-1).1.2 + (n-1).(n-1).2 = 2n(n-1)$$

elde edilir.

Dördüncü olarak, $G = K_n,\ n \geq 2$ olsun. Burada $m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$'dir. Bu takdirde $S(K_n)$ için $n(S_1) = \frac{n(n+1)}{2}$ ve $m(S_1) = n(n-1)$'dir.



Şekil 4.5. $\boldsymbol{S(K_n)}$ alt grafı

$S(K_n)$ grafı, derecesi $n-1$ olan n tane eski köşeye; derecesi 2 olan $m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tane yeni eklenen köşeye sahiptir. O halde $M_1(G)$'nin tanımı uygulanırsa

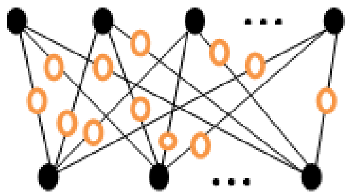
$$M_1(S(K_n)) \; = n(n-1)^2 + \binom{n}{2}(n-1).2^2 = n(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2}.4$$

$$= n(n-1)(n+1) \; = n^3 - n$$

bulunur ve $M_2(G)$, tanımı gereği derecesi 2 olan yeni eklenen köşelerle dereceleri $n-1$ olan eski köşelerin çarpımıyla elde edilir:

$$M_2\big(S(K_n)\big) = m(S_1).(n-1).2 \; = n(n-1)(n-1).2 \; = n(n-1)^2.$$

$G = K_{t,s},\; t,s \geq 0$ olsun. Burada $n = t+s,\; m = ts$'dir. Bu takdirde $S\big(K_{t,s}\big)$ için $n(S_1) = t+s+ts$ ve $m(S_1) = 2ts$'dir.



Şekil 4.6. $S\big(K_{t,s}\big)$ alt grafı

$S\big(K_{t,s}\big)$ grafı, derecesi s olan t tane eski köşeye; derecesi t olan s tane eski köşeye; derecesi 2 olan $m = ts$ tane yeni eklenen köşeye sahiptir. O halde $M_1(G)$'nin tanımı uygulanırsa

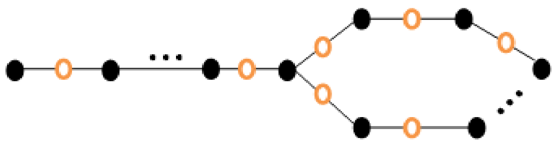
$$M_1(S(K_{t,s})) \; = t.s^2 + s.t^2 + ts.2^2 \; = ts(t+s+4)$$

bulunur ve $M_2(G)$'nin tanımından

$$M_2\left(S\big(K_{t,s}\big)\right) = t.s.2t + t.s.2s \; = 2ts(t+s)$$

elde edilir.

Son olarak, $G = T_{t,s}$ tadpole graf olsun. $T_{t,s}$ grafının C_t ve P_{s+1} graflarının birleşimi olduğu hatırlanırsa, $t + s \leq 4$ için $T_{t,s}$ grafının P_{t+s} grafına eşit olduğu görülür. O halde $t \geq 3$ ve $s \geq 3$ varsayılabilir. $T_{t,s}$ grafı için $n = t + s = m$'dir.



Şekil 4.7. $\boldsymbol{S(T_{t,s})}$ alt grafı

Bu takdirde $S(T_{t,s})$ için $n(S_1) = m(S_1) = 2(t + s)$'dir. $S(T_{t,s})$ grafı, yol grafın uç köşesinde derecesi 1 olan bir tane köşeye; yol ve devir grafın birleşim köşesi olan derecesi 3 olan bir köşeye sahiptir ve kalan tüm $2(t + s - 1)$ tane köşenin derecesi 2'dir. O halde $M_1(G)$'nin tanımı uygulanırsa

$$M_1(S(T_{t,s})) = 1.3^2 + 1.1^2 + 2(t + s - 1).2^2 = 2(4t + 4s + 1)$$

elde edilir ve $M_2(G)$'nin tanımından

$$M_2(S(T_{t,s})) = 3(3.2) + 1(1.2) + (2s - 2).2.2 + (2t - 2).2.2 = 4(2t + 2s + 1)$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5. G grafının ve onun alt grafı $S(G)$'nin köşe ve kenar sayıları sırasıyla $n, m, n(S_1), m(S_1)$ olsun. Bu takdirde yol, devir graf, yıldız, tam ve iki parçalı tam graf ile tadpole grafların alt graflarının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri

$$\Pi_1(S(G)) = \begin{cases} 2^{4\mathrm{n}-6}; \ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{4n}; \ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 2^{2n-2} \cdot (n-1)^2; \ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n-1)^{2n} \cdot 2^{n(n-1)}; \ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ s^{2t} \cdot t^{2s} \cdot 2^{2t \cdot s}; \ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 9 \cdot 2^{4(t+s-1)}; \ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\Pi_2\big(S(G)\big) = \begin{cases} 2^{4\mathrm{n}-6};\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{4n};\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 2^{2n-2} \cdot (n-1)^{n-1};\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (2n-2)^{n(n-1)};\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (4t \cdot s)^{t \cdot s};\ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 27 \cdot 2^{4(t+s-1)};\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

İspat. Teorem yıldız graf S_n için ispatlanmıştır. Teorem 4.1.4'ün ispatında tüm graf çeşitlerinin dereceleri ve aynı dereceli köşelerin sayısı verildiğinden diğer graflar için ispat aynı yöntemle, benzer şekilde yapılmaktadır.

G bir yıldız graf olsun. S_n yıldız grafının alt grafı, $n(S_1) = m + n = 2n - 1$ köşeye ve $m(S_1) = 2(n-1)$ kenara sahiptir. $S(S_n)$ grafı, derecesi $n-1$ olan bir orta köşeye; derecesi 1 olan $n-1$ tane köşeye ve $n-1$ tane yeni eklenen, derecesi 2 olan köşelere sahiptir. Birinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımı kullanılarak

$$\Pi_1\big(S(S_n)\big) = (n-1)^{2\cdot 1} \cdot 1^{2\cdot(n-1)} \cdot 2^{2(n-1)} = (n-1)^2 . 2^{2(n-1)}$$

yıldız grafın alt grafının birinci çarpımsal Zagreb indeksi hesaplanır.

$S(S_n)$ grafında iki çeşit kenar vardır:

1. u, derecesi 1 olan uç köşe; v, derecesi 2 olan yeni eklenmiş köşe ve $(u, v) \in E$ olmak üzere, $n-1$ tane $(u, v) \in E$ kenarı vardır.
2. u, derecesi $n-1$ olan orta köşe; v, derecesi 2 olan yeni eklenmiş köşe ve $(u, v) \in E$ olmak üzere, yine $n-1$ tane $(u, v) \in E$ kenarı vardır.

Tüm bu bilgiler ikinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımına uygulanırsa,

$$\Pi_2\big(S(S_n)\big) = (1 \cdot 2)^{(n-1)} \cdot [(n-1) \cdot 2]^{(n-1)} = 2^{2(n-1)} \cdot (n-1)^{(n-1)}$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6. G grafının ve onun alt grafı $S(G)$'nin köşe ve kenar sayıları sırasıyla $n, m, n(S_1), m(S_1)$ olsun. Bu takdirde yol, devir graf, yıldız, tam ve iki parçalı tam graf ile tadpole grafların alt graflarının çarpımsal toplam Zagreb indeksleri

$$\Pi_1^*\big(S(G)\big) = \begin{cases} 9\cdot 2^{4n-8};\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{4n};\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 3^{n-1}\cdot (n+1)^{n-1};\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n+1)^{n(n-1)};\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (s+2)^{t\cdot s}\cdot (t+2)^{t\cdot s};\ G = K_{t,s}, \forall t,s > 0 \text{ ise} \\ 2^{4(t+s-2)}\cdot 3\cdot 5^3;\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

İspat. $\Pi_1^*(G)$ indeksinin tanımı gereği, $\Pi_1^*\big(S(G)\big)$ indeksini hesaplamak için Teorem 4.1.4'ün ispatındaki $M_2\big(S(G)\big)$ indeksinde çarpma ve toplama işlemlerinin yerleri değiştirilirse, tüm graf çeşitleri için istenen sonuç elde edilir.

Teroem 4.1.7. Bilinen bazı graf çeşitlerinin $S(G)$ alt grafları için total çarpımsal toplam Zagreb indeksleri

$$\Pi^{\mathrm{T}}\big(S(G)\big) = \begin{cases} 2^{4n^2-14n+13}\cdot 3^{4n-6};\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{2n(2n-1)};\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 2^{\frac{3}{2}(n-1)(n-2)}\cdot 3^{(n-1)^2}\cdot [n(n+1)]^{(n-1)};\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n+1)^{nm}\cdot (n-1)^{n(n-1)/2}\cdot 2^{m(m-1)+n(n-1)/2};\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{t\cdot s(t\cdot s-1)+[t(t-1)+s(s-1)]/2}\cdot s^{t(t-1)/2}\cdot t^{s(s-1)/2} \\ \cdot (t+2)^{t\cdot s^2}\cdot (s+2)^{t^2\cdot s}\cdot (t+s)^{t\cdot s};\ G = K_{t,s}, \forall t,s > 0 \text{ ise} \\ 2^{4(t+s)^2-10(t+s)+8}\cdot 3^{2(t+s-1)}\cdot 5^{2(t+s-1)};\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

İspat. $\Pi^{\mathrm{T}}\big(S(G)\big)$, $V(G)$ kümesindeki her bir köşe çiftinin derecelerinin toplamının çarpımı olarak tanımlandığından ve Teorem 4.1.4'ün ispatında tüm graf çeşitlerinin dereceleri ve aynı dereceli köşelerin sayısı verildiğinden ispat, istenilen graftaki tüm köşelerin dereceleri yardımıyla tanımdan kolayca elde edilebilir.

Teorem 4.1.8. G grafının ve onun alt grafı $S(G)$'nin köşe ve kenar sayıları sırasıyla $n, m, n(S_1), m(S_1)$ olsun. Bu takdirde yol, devir graf, yıldız, tam ve iki parçalı tam graf ile tadpole grafların alt graflarının birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri

$$\overline{M_1}(S(G)) = \begin{cases} 8n^2 - 24n + 18; G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 4n(2n-3);\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ (n-1)(7n-12);\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ n(n-1)(n^2-3);\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ t \cdot s(3t + 3s + 4ts - 8);\ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 8(t+s)^2 - 12(t+s) - 2;\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\overline{M_2}(S(G)) = \begin{cases} 8n^2 - 28n + 26;\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 4n(2n-3);\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ (n-1)\left(\frac{11}{2}n - 10\right);\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ \frac{n(n-1)}{2}(4n^2 - 9n + 3);\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ t \cdot s\left[8ts - \frac{5}{2}(t+s) - 2\right];\ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 8(t+s)^2 - 12(t+s) - 5;\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

İspat. Teorem tam graf K_n için ispatlanmıştır. Teorem 4.1.4'te istenen tüm graflar için $M_1(S(G))$ indeksleri verilmiştir. Lemma 2.4.2 ve $M_1(S(G))$ yardımıyla diğer graflar için ispat aynı yöntemle, benzer şekilde yapılmaktadır.

G bir tam graf olsun. K_n tam grafının alt grafı, $n(S_1) = m + n = \frac{n(n+1)}{2}$ köşeye ve $m(S_1) = 2m = n(n-1)$ kenara sahiptir. Teorem 4.1.4'te $M_1(S(K_n))$ verilmiştir. Buna göre Lemma 2.4.2 yardımıyla

$$\begin{aligned} \overline{M_1}\big(S(K_n)\big) &= 2[m(S_1)](n(S_1) - 1) - M_1\big(S(K_n)\big) \\ &= 2n(n-1)\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) - (n^3 - n) \\ &= 2n(n-1) \cdot \frac{(n+2)(n-1)}{2} - n(n-1)(n+1) \\ &= n(n-1)[(n-1)(n+2) - n - 1] = n(n-1)(n^2-3) \end{aligned}$$

bulunur.

İkinci Zagreb eşindeksinin ispatı yıldız graf için verilmiştir. $\overline{M_2}\big(S(S_n)\big)$ indeksinde dört çeşit girdi vardır:

i) u ve v, dereceleri 1 olan uç köşeler olsun. Böyle bir u köşesi için $n-2$ tane v köşesi vardır öyle ki $uv \notin E(G)$. Bu şekildeki köşe çiftleri $\overline{M_2}(S(S_n))$'ye $1 \cdot 1 \cdot \binom{m}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \binom{n-1}{2}$ şeklinde eklenir.

ii) u, derecesi 1 olan uç köşe; v, derecesi 2 olan yeni eklenmiş köşe olsun. Her u için, $m = n-1$ tane eklenmiş v köşesi vardır ve bunlardan 1 tanesi u ile kenar oluşturur. Böylece $n-2$ tanesi u ile kenar oluşturmaz. Bu işlem her bir u için düşünülürse bu şekildeki köşe çiftleri $\overline{M_2}(S(S_n))$'ye $1 \cdot 2 \cdot (n-2)(n-1)$ şeklinde eklenir.

iii) u ve v, dereceleri 2 olan ve yeni eklenmiş orta köşeler olsun. Bunların hiç biri birbirleriyle kenar oluşturmadığından bu şekildeki $uv \notin E(G)$ köşe çiftleri $\overline{M_2}(S(S_n))$'ye $2 \cdot 2 \cdot \binom{m}{2} = 2 \cdot 2 \cdot \binom{n-1}{2}$ şeklinde eklenir.

iv) u, derecesi 1 olan uç köşe; v, derecesi $n-1$ olan yıldız grafın orta köşesi olsun. Bu şekildeki $\forall u, v \in V(G)$ için $uv \notin E(G)$ olduğundan bu köşe çiftleri $\overline{M_2}(S(S_n))$'ye $1 \cdot (n-1) \cdot (n-1)$ şeklinde eklenir.

Tüm girdilerden

$$\overline{M_2}(S(S_n)) = 1 \cdot 1 \cdot \binom{n-1}{2} + 1 \cdot 2 \cdot (n-2)(n-1)$$

$$+2 \cdot 2 \cdot \binom{n-1}{2} + 1 \cdot (n-1) \cdot (n-1)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2) + 4(n-1)(n-2) + 4(n-1)(n-2) + 2(n-1)^2}{2}$$

$$= \frac{9(n-1)(n-2)+2(n-1)^2}{2} = (n-1) \cdot \frac{9(n-2)+2(n-1)}{2} = (n-1)(\frac{11n}{2} - 10)$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.1.9. G grafının ve onun alt grafı $S(G)$'nin köşe ve kenar sayıları sırasıyla $n, m, n(S_1), m(S_1)$ olsun. Bu takdirde yol, devir graf, yıldız, tam ve iki parçalı tam graf ile tadpole grafların alt graflarının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri

$$\overline{\Pi_1}(S(G)) = \begin{cases} 2^{4n^2-18n+21} \cdot 3^{4n-8};\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 4^{n(2n-3)};\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 2^{3\binom{n-1}{2}} \cdot n^{n-1} \cdot 3^{(n-1)(n-2)};\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{\frac{n^2(n-1)^2}{4}} \cdot (n-1)^{\binom{n}{2}} \cdot (n+1)^{\frac{n^3-3n^2+2n}{2}};\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{t\cdot s(ts-1)} \cdot (2t)^{\binom{s}{2}} \cdot (2s)^{\binom{t}{2}} \cdot (t+2)^{ts(s-1)} \cdot (s+2)^{ts(t-1)} \\ \cdot (s+t)^{t\cdot s};\ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 2^{2[2(t+s)^2-7(t+s)+8]} \cdot 3^{2t+2s-3} \cdot 5^{2s+2t-5};\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\overline{\Pi_2}(S(G)) = \begin{cases} 4^{(n-2)(2n-3)};\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 4^{n(2n-3)};\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 4^{(n-1)(n-2)} \cdot (n-1)^{n-1};\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{4}} \cdot (n-1)^{\frac{n^2(n-1)}{2}};\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{ts(t+s+ts-3)} \cdot t^{s(s+ts-1)} \cdot s^{t(t+ts-1)};\ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 2^{2(s+t-1)(2s+2t-3)} \cdot 3^{2(t+s-2)};\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

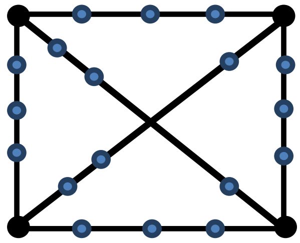
şeklinde hesaplanmıştır.

İspat. Teorem 4.1.6 ve Teorem 4.1.7'de verilen değerlere Lemma 2.6.3 uygulanarak $\overline{\Pi_1}(S(G))$ istenen tüm graf çeşitleri için hesaplanır. Ayrıca, Teorem 4.1.4'ün ispatında istenen tüm grafların her bir köşesinin dereceleri ve aynı dereceli köşe sayıları verilmiştir. Bu değerlere Lemma 2.5.2 uygulanarak $\overline{\Pi_2}(S(G))$ indeksleri hesaplanır.

4.2. r-Alt Grafların Zagreb İndeksleri

Bu kısımda r-alt graflar ilk kez Togan, Yurttaş ve Cangül tarafından tanımlanarak, r-alt grafların Zagreb indeksleriyle ilgili bir takım eşitsizlikler elde edilmiştir.

Tanım 4.2.1. Bir basit G grafının her bir kenarına ekstra r adet köşe eklenerek elde edilen yeni grafa G'nin r-alt grafı denir ve $S^r(G)$ ile gösterilir. r-alt graf, G'nin her bir kenarının, uzunluğu $r+1$ olan bir yol grafla değiştirilmesiyle elde edilen graf olarak da tanımlanır. Açıkça, $r = 1$ durumu $S(G) = S^1(G)$ alt grafını verir.



Şekil 4.8. $\boldsymbol{S^3(K_4)}$ alt grafı

Teorem 4.2.2. G, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf ve $S^r(G)$ de G'nin bir r-alt grafı olmak üzere, r-alt grafının birinci ve ikinci Zagreb indeksleri

$$M_1\big(S^r(G)\big) = M_1(G) + 4mr \ \text{ ve } M_2\big(S^r(G)\big) = 2M_1(G) + 4m(r-1)$$

dir.

İspat. Bir G grafı için

$$M_1\big(S^r(G)\big) = \sum_{i=1}^{n+rm} d_i^2$$

dir. r-alt grafı oluşturulurken eklenen yeni köşelerin tümünün $d_{n+1}, d_{n+2}, \dots, d_{n+rm}$ dereceleri 2 olduğundan

$$M_1\big(S^r(G)\big) = \sum_{i=1}^{n+rm} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i=n+1}^{n+rm} d_i^2 = M_1(G) + 4mr$$

elde edilir. İkinci olarak, G'nin r-alt grafı oluşturulurken, her bir (i,j) kenarı, $2d_i$, $2d_i$, $r-1$ tane $2 \cdot 2$ ağırlıklı $r+1$ parçaya bölündüğünden

$$M_2\big(S^r(G)\big) = \sum_{(i,j)\in E} \big(2d_i + 2d_j + 4(r-1)\big)$$

$$= \sum_{(i,j)\in E} \big(2d_i + 2d_j\big) + \sum_{(i,j)\in E} 4(r-1) = 2M_1(G) + m \cdot 4(r-1)$$

bulunur.

4.2.3. Sonuç. G, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf ve $S^r(G)$ de G'nin bir r-alt grafı olsun. Bu takdirde $S^r(G)$'nin birinci ve ikinci Zagreb indeksleri arasında

$$\frac{M_1\big(S^r(G)\big)}{m+nr} \leq \frac{M_2\big(S^r(G)\big)+4(mr-m)}{2m}$$

şeklinde bir eşitsizlik geçerlidir.

İspat. Teorem 2.2.3 ve Teorem 4.2.2'den yararlanılarak ispat aşağıdaki şekilde yapılır:

$$M_1\big(S^r(G)\big) = M_1(G) + 4mr \geq \frac{4m^2}{n} + 4mr = \frac{4m^2+4nmr}{n} = \frac{4m(m+nr)}{n}$$

$$\geq \frac{4m(m+nr)}{nr}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$nr \cdot M_1\big(S^r(G)\big) \geq 4m(m+nr) \Leftrightarrow nrM_1\big(S^r(G)\big) - 4m^2 - 4mnr \geq 0$$

$$nrM_1\big(S^r(G)\big) - 4m^2 - 4mnr + m \cdot M_1\big(S^r(G)\big) \geq m \cdot M_1\big(S^r(G)\big)$$

$$(nr+m)\big[M_1\big(S^r(G)\big) - 4m\big] \geq mM_1\big(S^r(G)\big)$$

$$\frac{M_1\big(S^r(G)\big)-4m}{m} \geq \frac{M_1\big(S^r(G)\big)}{nr+m}$$

$$\frac{M_1\big(S^r(G)\big)}{nr+m} \leq \frac{M_1\big(S^r(G)\big)}{m} - 4 = \frac{M_1(G)+4mr}{m} - 4$$

$$= \frac{\frac{M_2\big(S^r(G)\big)-4mr+4m}{2}+4mr}{m} - 4 = \frac{M_2\big(S^r(G)\big)+4(mr-m)}{2m}$$

istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.4. G, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf ve $S^r(G)$ de G'nin bir r-alt grafı olmak üzere, r-alt grafının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri

$$\Pi_1(S^r(G)) = 2^{2rm} \cdot \Pi^1(G) \quad \text{ve} \quad \Pi_2(S^r(G)) = 2^{2rm} \cdot \Pi_2(G)$$

şeklindedir.

İspat. Bir G grafının r-alt grafı oluşturulurken eklenen yeni köşelerin tümünün $d_{n+1}, d_{n+2}, \dots, d_{n+rm}$ dereceleri 2 olduğundan

$$\Pi_1\big(S^r(G)\big) = \prod_{i=1}^{n+rm} d_i^2 = \prod_{i=1}^{n} d_i^2 \cdot \prod_{i=n+1}^{n+rm} d_i^2 = \Pi_1(G) \cdot 2^{2rm}$$

bulunur. Benzer şekilde, G'nin r-alt grafı oluşturulurken, her bir (i,j) kenarı, $2d_i$, $2d_i$, $r-1$ tane $2 \cdot 2$ ağırlıklı $r+1$ parçaya bölündüğünden

$$\Pi_2\big(S^r(G)\big) = \prod_{(i,j)\in E} \left[2d_i \cdot 2d_j \cdot (2 \cdot 2)^{(r-1)}\right]$$

$$= \prod_{(i,j)\in E} \big(2d_i \cdot 2d_j\big) \cdot \prod_{(i,j)\in E} 4^{(r-1)}$$

$$= 2^{2m} \cdot \prod_{(i,j)\in E} d_i d_j \cdot 4^{m(r-1)} = 2^{2mr} \cdot \Pi_2(G)$$

sonucuna ulaşılır.

Reti ve Gutman bir G grafının çarpımsal Zagreb indeksleri için bazı sınır ve eşitsizlikler vermişlerdir. Bu formüllerin, Teorem 4.2.4'ten de yararlanarak, r-alt grafların çarpımsal Zagreb indekslerine uygulanmasıyla bazı sonuçlar elde edilmiştir:

Sonuç 4.2.5. G, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf için

$$\Pi_1\big(S^r(G)\big) \le 2^{2(n+rm)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{2n}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 2.3.4 ve Teorem 4.2.4 kullanılırsa

$$\frac{\Pi_1\big(S^r(G)\big)}{2^{2rm}} \le \left(\frac{2m}{n}\right)^{2n}$$

$$\Pi_1\big(S^r(G)\big) \le 2^{2rm} \cdot \left(\frac{2m}{n}\right)^{2n} \le 2^{2(n+rm)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{2n}$$

istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.6. G, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf olmak üzere

$$\Pi_1\big(S^r(G)\big) \leq 2^{2mr} \cdot \left(\frac{M_1(G)}{n}\right)^n$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 2.3.7 ve Teorem 4.2.3 kullanılırsa

$$\frac{\Pi_1\big(S^r(G)\big)}{2^{2mr}} \leq \left(\frac{M_1(G)}{n}\right)^n \Leftrightarrow \Pi_1\big(S^r(G)\big) \leq 2^{2mr} \cdot \left(\frac{M_1(G)}{n}\right)^n$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.7. G, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf olmak üzere

$$\Pi_1\big(S^r(G)\big) \leq 2^{2mr} \cdot \left(\frac{M_1(S(G) - 4m)}{n}\right)^n$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Sonuç 4.2.6'da $M_1(G)$ yerine (4.1)'deki değeri yazılarak Sonuç 4.2.7 elde edilir.

Sonuç 4.2.8. G, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf olmak üzere

$$\Pi_1\big(S^r(G)\big) \leq 2^{2mr} \cdot \left(\frac{M_1(S^r(G) - 4mr)}{n}\right)^n$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Sonuç 4.2.6'da $M_1(G)$ yerine Teorem 4.2.2'deki değeri yazılarak Sonuç 4.2.8 elde edilir.

Sonuç 4.2.9. G, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf olmak üzere

$$\Pi_2\big(S^r(G)\big) \geq 2^{2m(r+1)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{2m}$$

sınırı vardır.

İspat. Lemma 2.3.10 ve Teorem 4.2.4 kullanılırsa

$$\frac{\Pi_2\big(S^r(G)\big)}{2^{2rm}} \geq \left(\frac{2m}{n}\right)^{2m} \Leftrightarrow \Pi_2\big(S^r(G)\big) \geq 2^{2rm} \cdot \left(\frac{2m}{n}\right)^{2m} = 2^{2m(r+1)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{2m}$$

istenilen sonuç bulunur.

Sonuç 4.2.10. G, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf olmak üzere

$$\Pi_2\big(S^r(G)\big) \leq 2^{2mr} \cdot \left(\frac{M_2(G)}{m}\right)^m$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 2.3.12 ve Teorem 4.2.4 kullanılırsa

$$\frac{\Pi_2\big(S^r(G)\big)}{2^{2rm}} \leq \left(\frac{M_2(G)}{m}\right)^m \Leftrightarrow \Pi_2\big(S^r(G)\big) \leq 2^{2mr} \cdot \left(\frac{M_2(G)}{m}\right)^m$$

bulunur.

4.3. Bilinen Bazı Grafların r-Alt Graflarının Zagreb İndeksleri

Bu kısımda iyi bilinen yol graf P_n, devir graf C_n, yıldız graf S_n, tam graf K_n, iki parçalı tam graf $K_{t,s}$, tadpole $T_{t,s}$ grafların r-alt graflarının 10 çeşit Zagreb indeksleri elde edilmiştir. Bu uygulama Zagreb indekslerinin hesabında, grafların her bir köşesinin tek tek dereceleri ile uğraşmak yerine, sadece grafın kenar ve köşe sayılarının bilinmesinin yeterli olduğunu gösteren bir çalışmadır ve Zagreb indekslerinin hesabında büyük kolaylık sağlamaktadır.

Teorem 4.3.1. G grafının ve onun r-alt grafı $S^r(G)$'nin köşe ve kenar sayıları sırasıyla $n, m, n(S_r), m(S_r)$ olsun. Bu takdirde yol, devir graf, yıldız, tam ve iki parçalı tam graf ile tadpole grafların r-alt graflarının birinci ve ikinci Zagreb indeksleri

$$M_1(S^r(G)) = \begin{cases} 4nr - 4r + 4n - 6;\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 4n(r+1);\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ (n-1)(4r+n);\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n-1)^2.n + 2 \cdot r \cdot n(n-1);\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ ts(t+s+4r);\ G = K_{t,s}, \forall t,s > 0 \text{ ise} \\ 4(rt+t+rs+s)+2;\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

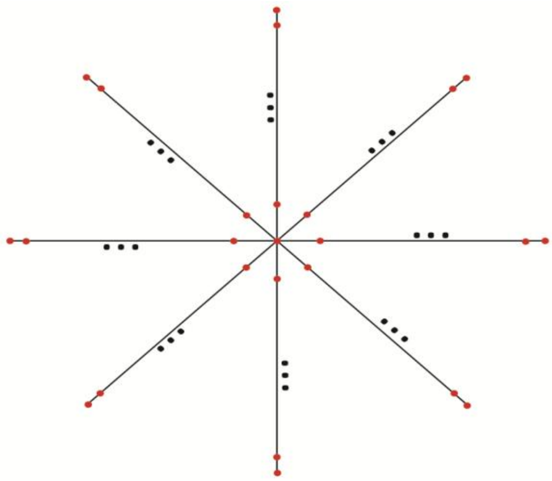
ve

$$M_2(S^r(G)) = \begin{cases} 4(nr - r + n - 2);\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 4n(r+1);\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 2(n-1)(n+2r-2);\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2n(n-1)(n+r-2);\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2st^2 + 2ts^2 + 4ts(r-1);\ G = K_{t,s}, \forall t,s > 0 \text{ ise} \\ 4[(r-1)t + 2t + rs + s + 1];\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir hesaplanmıştır.

İspat. Teorem yıldız graf S_n için ispatlanmıştır. Diğer graflar için ispat aynı yöntemle, benzer şekilde yapılmaktadır.

G bir yıldız graf olsun. S_n yıldız grafının r −alt grafı, $n(S_r) = mr + n = (n-1)r + n$ köşeye ve $m(S_r) = (r+1)(n-1)$ kenara sahiptir. $S^r(S_n)$ grafında derecesi $n-1$ olan 1 tane köşe, derecesi 1 olan $n-1$ tane köşe ve grafın herbir kenarı üzerinde derecesi 2 olan r tane köşe (toplam mr tane) vardır.



Şekil 4.9. Yıldız grafın $\boldsymbol{S^r(S_n)}$ $\boldsymbol{r}$-alt grafı

Birinci Zagreb indeksinin tanımı kullanılarak

$$M_1\big(S^r(S_n)\big) = (n-1)\cdot 1^2 + 1\cdot (n-1)^2 + (mr)\cdot 2^2$$

$$= n-1+(n-1)^2+4(n-1)r$$

$$= (n-1)(1+n-1+4r) = (n-1)(n+4r)$$

elde edilerek yıldız grafın r-alt grafının birinci Zagreb indeksi hesaplanır.

$S^r(S_n)$ grafında üç çeşit kenar vardır:

i) u, derecesi 1 olan uç köşe; v, derecesi 2 olan yeni eklenmiş köşe ve $(u,v) \in E$ olmak üzere, $n-1$ tane $(u,v) \in E$ kenarı vardır.

ii) u, derecesi $n-1$ olan orta köşe; v, derecesi 2 olan yeni eklenmiş köşe ve $(u,v) \in E$ olmak üzere, yine $n-1$ tane $(u,v) \in E$ kenarı vardır.

iii) u, v nin her ikisi de derecesi 2 olan yeni eklenen köşeler ve $(u,v) \in E$ olmak üzere, S_n yıldız grafının her bir kenarı üzerinde $r-1$ tane u, v köşe çifti vardır. Dolayısıyla bu şekildeki köşe çiftleri toplam $m(r-1)$ tanedir.

Tüm bu bilgiler ikinci Zagreb indeksinin tanımına uygulanırsa,

$$M_2\big(S^r(S_n)\big) = 1\cdot 2\cdot (n-1) + (n-1).2.(n-1) + 2\cdot 2\cdot m(r-1)$$

$$= 2(n-1) + 2(n-1)^2 + 4(n-1)(r-1)$$

$$= 2(n-1)[1+n-1+2(r-1)]$$

$$= 2(n-1)(n+2r-2)$$

ispat tamamlanmış olur.

Diğer graf çeşitleri için de toplam köşe ve kenar sayıları ile köşelerinin dereceleri ve aynı dereceli köşe sayıları verilsin:

$G = P_n$ yol grafı için, P_n'nin $r-$alt grafı, $n(S_r) = mr + n = (n-1)r + n$ köşeye ve $m(S_r) = (r+1)(n-1)$ kenara sahiptir. $S^r(P_n)$ grafında derecesi 1 olan 2 tane köşe ve derecesi 2 olan $(n-1)r + n - 2$ tane köşe vardır.

$G = C_n$ devir grafı için, C_n'nin $r-$alt grafı, $n(S_r) = mr + n = n(r+1)$ köşeye ve $m(S_r) = (r+1)n$ kenara sahiptir. $S^r(K_n)$ grafında tüm köşelerin dereceleri 2'dir yani derecesi 2 olan $n(r+1)$ tane köşe vardır.

$G = K_n$ tam grafı için, K_n'nin $r-$alt grafı, $n(S_r) = mr + n = \binom{n}{2}r + n$ köşeye ve $m(S_r) = (r+1)\binom{n}{2}$ kenara sahiptir. $S^r(K_n)$ grafında dereceleri $n-1$ olan n tane köşe ve dereceleri 2 olan $\binom{n}{2}r$ tane köşe vardır.

$G = K_{t,s}$ iki parçalı tam grafı için, $K_{t,s}$'nin $r-$alt grafı, $n(S_r) = mr + n = ts \cdot r + t + s$ köşeye ve $m(S_r) = ts(r+1)$ kenara sahiptir. $S^r(K_{t,s})$ grafında dereceleri s olan t tane köşe, dereceleri t olan s tane köşe ve dereceleri 2 olan $ts \cdot r$ tane köşe vardır.

$G = T_{t,s}$ tadpole grafı için, $T_{t,s}$'nin $r-$alt grafı, $n(S_r) = mr + n = (t+s)r + t + s = (r+1)(t+s)$ köşeye ve $m(S_r) = (t+s)(r+1)$ kenara sahiptir. $S^r(T_{t,s})$ grafında derecesi 3 olan 1 tane köşe, derecesi 1 olan 1 tane köşe ve dereceleri 2 olan $rt + rs + t + s - 2$ tane köşe vardır.

Tüm bu graf çeşitlerinde, köşelerinin dereceleri ve aynı dereceli köşelerinin sayıları, birinci ve ikinci Zagreb indekslerinin tanımlarında yerlerine konursa teoremin ispatı her bir graf için elde edilir.

Teorem 4.3.2. G grafının ve onun r-alt grafı $S^r(G)$'nin köşe ve kenar sayıları sırasıyla $n, m, n(S_r), m(S_r)$ olsun. Bu takdirde yol, devir graf, yıldız, tam ve iki parçalı tam graf ile tadpole grafların r-alt graflarının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri

$$\Pi_1\big(S^r(G)\big) = \begin{cases} 2^{2(nr-r+n-2)};\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{2n(r+1)};\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 2^{2r(n-1)} \cdot (n-1)^2;\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n-1)^{2n} \cdot 2^{rn(n-1)};\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ s^{2t} \cdot t^{2s} \cdot 2^{2rts};\ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 3^2 \cdot 2^{2(rt+rs+t+s-2)};\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\Pi_2\big(S^r(G)\big) = \begin{cases} 2^{2(nr-r+n-2)};\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{2n(r+1)};\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 2^{2r(n-1)} \cdot (n-1)^{(n-1)};\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n-1)^{n(n-1)} \cdot 2^{rn(n-1)};\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (ts)^{ts} \cdot 2^{2rts};\ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 3^3 \cdot 2^{2[(t+s)(r+1)-2]};\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

İspat. Teorem yıldız graf S_n için ispatlanmıştır. Diğer graflar için ispat aynı yöntemle, benzer şekilde yapılmaktadır.

G bir yıldız graf olsun. S_n yıldız grafının r −alt grafı, $n(S_r) = mr + n = (n-1)r + n$ köşeye ve $m(S_r) = (r+1)(n-1)$ kenara sahiptir. $S^r(S_n)$ grafında derecesi $n-1$ olan 1 tane köşe, derecesi 1 olan $n-1$ tane köşe ve grafın herbir kenarı üzerinde derecesi 2 olan r tane köşe (toplam mr tane) vardır.

Birinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımı kullanılarak

$$\Pi_1\big(S^r(S_n)\big) = (n-1)^{2\cdot 1} \cdot 1^{2\cdot(n-1)} \cdot 2^{2\cdot mr} = (n-1)^2 . 2^{2(n-1)r}$$

bulunarak yıldız grafın r-alt grafının birinci çarpımsal Zagreb indeksi hesaplanır.

$S^r(S_n)$ grafında üç çeşit kenar vardır:

i) u, derecesi 1 olan uç köşe; v, derecesi 2 olan yeni eklenmiş köşe ve $(u, v) \in E$ olmak üzere, $n-1$ tane $(u, v) \in E$ kenarı vardır.

ii) u, derecesi $n-1$ olan orta köşe; v, derecesi 2 olan yeni eklenmiş köşe ve $(u, v) \in E$ olmak üzere, yine $n-1$ tane $(u, v) \in E$ kenarı vardır.

iii) u, v nin her ikisi de derecesi 2 olan yeni eklenen köşeler ve $(u, v) \in E$ olmak üzere, S_n yıldız grafının her bir kenarı üzerinde $r-1$ tane u, v köşe çifti vardır. Dolayısıyla bu şekildeki köşe çiftleri toplam $m(r-1)$ tanedir.

Tüm bu bilgiler ikinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımına uygulanırsa,

$$\Pi_2\big(S^r(S_n)\big) = (1\cdot 2)^{(n-1)} \cdot [(n-1)\cdot 2]^{(n-1)} \cdot (2\cdot 2)^{m(r-1)}$$

$$= 2^{2(n-1)} \cdot (n-1)^{(n-1)} \cdot 2^{2(n-1)(r-1)}$$

$$= 2^{2r(n-1)} \cdot (n-1)^{(n-1)}$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3. r-alt grafı $S^r(G)$'nin, bazı graf çeşitleri için çarpımsal toplam Zagreb indeksleri

$$\Pi_1^*\big(S^r(G)\big) = \begin{cases} 3^2 \cdot 2^{2(nr-r+n-3)};\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{2n(r+1)};\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 3^{(n-1)} \cdot 2^{2(r-1)(n-1)} \cdot (n+1)^{(n-1)};\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n+1)^{n(n-1)} \cdot 2^{n(n-1)(r-1)};\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (s+2)^{ts} \cdot (2+t)^{ts} \cdot 2^{2m(r-1)};\ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 3 \cdot 5^3 \cdot 2^{2[2(t-1)+t(r-1)+(rs+s-2)]};\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. $\Pi_1^*(G)$ indeksinin tanımı gereği, $\Pi_1^*\big(S^r(G)\big)$ indeksini hesaplamak için Teorem 4.3.1'in ispatında $M_2\big(S^r(G)\big)$ indeksinde çarpma ve toplama işlemlerinin yerleri değiştirilirse, tüm graf çeşitleri için istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.3.4. Bilinen bazı graf çeşitlerinin r-alt grafı $S^r(G)$ için total çarpımsal toplam Zagreb indeksleri

$$\Pi^{\mathrm{T}}\big(S^r(G)\big) = \begin{cases} 2^{2\binom{nr-r+n-2}{2}+1} \cdot 3^{2(nr-r+n-2)};\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{(nr+n)(nr+n-1)};\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 3^{r(n-1)^2} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}+2\left[\binom{r}{2}(n-1)+\binom{rn-r}{2}\right]} \\ \quad \cdot n^{(n-1)} \cdot (1+n)^{r(n-1)};\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n+1)^{nmr} \cdot (2n-2)^{\binom{n}{2}} \cdot 2^{2\binom{rm}{2}};\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (s+t)^{ts} \cdot (2+t)^{ts^2 r} \cdot (2+s)^{t^2 sr} \\ \quad \cdot 2^{2\binom{tsr}{2}} \cdot (2s)^{\binom{t}{2}} \cdot (2t)^{\binom{s}{2}};\ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 2^{2\left[\binom{tr+t-1}{2}+\binom{sr+s-1}{2}+(rs+s-1)(rt+t-1)+1\right]} \\ \quad \cdot 5^{(rt+rs+t+s-2)} \cdot 3^{(rt+rs+t+s-2)};\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

İspat. $\Pi^{\mathrm{T}}\big(S^r(G)\big)$, $V(G)$ kümesindeki her bir köşe çiftinin derecelerinin toplamının çarpımı olarak tanımlıdır. Teorem 4.3.1'in ispatında verilen tüm graf çeşitlerinin köşelerinin dereceleri ve aynı dereceli köşe sayıları yardımıyla ispat, $\Pi^{T}\big(S^r(G)\big)$'nin tanımından kolayca elde edilebilir.

Teorem 4.3.5. G grafının ve onun r-alt grafı $S^r(G)$'nin köşe ve kenar sayıları sırasıyla $n, m, n(S_r), m(S_r)$ olsun. Bu takdirde yol, devir graf, yıldız, tam ve iki parçalı tam graf ile tadpole grafların r-alt graflarının birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri

$$\overline{M_1}\big(S^r(G)\big) = \begin{cases} 2(n-1)(r+1)[(n-1)(r+1)-2]+2;\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2n(r+1)(nr+n-3);\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ (n-1)[2(r+1)^2(n-1)-(4r+n)];\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ n(n-1)(r+1)(rm+n-1) \\ -[n(n-1)^2+4rm];\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2ts(r+1)(tsr+t+s-1)-ts(t+s+4r);\ G = K_{t,s}, \forall t,s > 0 \text{ ise} \\ 2(r+1)(t+s)[(r+1)(t+s)-1] \\ -[4(r+1)(t+s)+2];\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\overline{M_2}\big(S^r(G)\big) = \begin{cases} 4\binom{nr-r+n-3}{2} + 4(nr-r+n)-10;\ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 4\left[\binom{n}{2}+\binom{rn}{2}+n(rn-2)\right];\ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ \binom{n-1}{2}+2[(r-1)(n-1)+r(n-1)(n-2)] \\ +(n-1)^2+4\left[\binom{r}{2}(n-1)+\binom{r(n-1)}{2}\right];\ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2n(n-1)\cdot[mr-(n-1)]+(n-1)^2\cdot\binom{n}{2} \\ +4\left[\binom{mr}{2}-(r-1)m\right];\ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (2t)[ts(sr-1)]+2s\cdot[ts(tr-1)]+t^2s^2+t^2\binom{s}{2}+s^2\binom{t}{2} \\ +4\left[\binom{r-1}{2}ts+r^2\binom{ts}{2}\right];\ G = K_{t,s}, \forall t,s > 0 \text{ ise} \\ 3+4\left[\binom{rs+s-2}{2}+\binom{tr+t-2}{2}+(tr+t-1)(sr+s-1)\right] \\ +2(rt+t+rs+s-3) \\ +6(rt+rs+s+t-5);\ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

İspat. Teorem tam graf K_n için ispatlanmıştır. Diğer graflar için ispat aynı yöntemle, benzer şekilde yapılmaktadır.

G bir tam graf olsun. K_n tam grafının $r-$alt grafı, $n(S_r) = mr + n = \binom{n}{2} r + n$ köşeye ve $m(S_r) = (r+1)\binom{n}{2}$ kenara sahiptir. Teorem 4.3.1'de $M_1(S^r(K_n))$ verilmiştir. Buna göre Lemma 2.4.2'deki eşitlikten

$$\begin{aligned}\overline{M_1}\big(S^r(K_n)\big) &= 2m(S_r)(n(S_r)-1) - M_1\big(S^r(K_n)\big)\\ &= 2m(r+1)(rm+n-1) - [(n-1)^2 \cdot n + 4rm]\end{aligned}$$

bulunur.

İkinci Zagreb eşindeksinin ispatı yıldız grafın r-alt grafı için verilmiştir. $\overline{M_2}\big(S^r(S_n)\big)$ indeksinde dört çeşit girdi vardır:

i) u ve v, dereceleri 1 olan uç köşeler olsun. Böyle bir u köşesi için $uv \notin E(G)$ olacak şekilde $n-2$ tane v köşesi vardır. Bu şekildeki köşe çiftleri $\overline{M_2}\big(S^r(S_n)\big)$'ye $1 \cdot 1 \cdot \binom{m}{2}$ şeklinde eklenir.

ii) u, derecesi 1 olan uç köşe; v, derecesi 2 olan yeni eklenmiş köşe olsun. u ve v'nin ikisi de G'nin aynı kenarı üzerindeyse her u için, r eklenmiş v köşesi vardır ve bunlardan 1 tanesi u ile kenar oluşturur. Böylece toplam $m(r-1) = (n-1)(r-1)$ tanesi v ile kenar oluşturmaz. Eğer u ve v, G'nin farklı kenarları üzerindeyseler her bir u için $uv \notin E(G)$ olacak şekilde $r(m-1)$ tane v köşesi vardır. Bu şekildeki köşe çiftleri $\overline{M_2}\big(S^r(S_n)\big)$'ye toplam $1 \cdot 2 \cdot [(n-1)(r-1) + r(m-1)(n-1)]$ şeklinde eklenir.

iii) u ve v'nin her ikisi de dereceleri 2 olan yeni eklenmiş köşeler olsun. Bu şekildeki her bir u köşesi için $S^r(S_n)$'nin u ile komşu olmayan bu v köşelerini saymak gereklidir. u ve v'nin ikisi de G'nin aynı kenarı üzerindeyse bunların sayısı $\binom{r}{2}$'dir. G'nin $n-1$ kenarı olduğundan bu köşelerin sayısı toplam $\binom{r}{2} \cdot (n-1)$'dir. Eğer u ve v, G'nin farklı kenarları üzerindeyseler bu köşelerin sayısı $\binom{r(n-1)}{2}$'dir. Komşu olmayan bu şekildeki köşeler $\overline{M_2}\big(S^r(S_n)\big)$'ye toplam $2 \cdot 2 \cdot \left[\binom{r}{2} \cdot (n-1) + \binom{r(n-1)}{2}\right]$ şeklinde eklenirler.

iv) u, derecesi 1 olan uç köşe; v, derecesi $n-1$ olan orta köşe olsun. Her bir u için bu köşeler komşu değildir ve bu köşelerin sayısı $1 \cdot (n-1) \cdot (n-1)$'dir.

Tüm girdilerden,

$$\overline{M_2}\big(S^r(S_n)\big) = \binom{n-1}{2} + 2 \cdot [(n-1)(r-1) + r(n-1)(n-2)]$$

$$+4 \cdot \left[\binom{r}{2} \cdot (n-1) + \binom{r(n-1)}{2}\right] + (n-1)^2$$

elde edilir.

Teorem 4.3.6. G grafının ve onun r-alt grafı $S^r(G)$'nin köşe ve kenar sayıları sırasıyla $n, m, n(S_r), m(S_r)$ olsun. Bu takdirde yol, devir graf, yıldız, tam ve iki parçalı tam graf ile tadpole grafların r-alt graflarının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri

$$\overline{\Pi_1}\big(S^r(G)\big) = \begin{cases} 2^{(nr-r+n-3)(nr-r+n-4)+1} \cdot 3^{2(nr-r+n-3)}; \ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{(nr+n)(nr+n-3)}; \ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 2^{\left[(r-1)(r-2)(n-1)+(rn-r)(rn-r-1)+\binom{n-1}{2}\right]} \cdot n^{(n-1)} \\ \cdot 3^{(rm-1)(n-1)} \cdot (1+n)^{(r-1)(n-1)}; \ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n+1)^{n(mr-n+1)} \cdot (2n-2)^{\binom{n}{2}} \cdot 4^{\binom{rm}{2}-(r-1)m}; \ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (t+s)^{st} \cdot (t+2)^{ts(sr-1)} \cdot (s+2)^{ts(tr-1)} \\ \cdot (2+2)^{\binom{r-1}{2}ts+r^2\binom{ts}{2}} \cdot (2s)^{\binom{t}{2}} \cdot (2t)^{\binom{s}{2}}; \ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 2^{2\left[\binom{rt+t-2}{2}+\binom{rs+s-2}{2}+(rs+s-1)(rt+t-1)+1\right]} \\ \cdot 3^{(rt+rs+t+s-3)} \cdot 5^{(rt+rs+t+s-5)}; \ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\overline{\Pi_2}\big(S^r(G)\big) = \begin{cases} 2^{(nr-r+n-2)(nr-r+n-3)}; \ G = P_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ 2^{(nr+n)(nr+n-3)}; \ G = C_n, n > 2 \text{ ise} \\ 2^{(n-1)(nr-r+n-3)} \cdot (n-1)^{r(n-1)}; \ G = S_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ (n-1)^{nrm} \cdot (2^{rm})^{(rm+n-3)}; \ G = K_n, n \geq 2 \text{ ise} \\ s^{(t+tsr-1)t} \cdot t^{(s+tsr-1)s} \cdot 2^{(t+s+tsr-3)rm}; \ G = K_{t,s}, \forall t, s > 0 \text{ ise} \\ 2^{[(r+1)(t+s)-3](rt+t+rs+s-2)} \cdot 3^{[(r+1)(t+s)-4]}; \ G = T_{t,s}, t \geq 3, s \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

İspat. Teorem 4.3.3 ve Teorem 4.3.4’te tüm graf türleri için $\Pi_1^*\big(S^r(G)\big)$ ve $\Pi^{\mathrm{T}}\big(S^r(G)\big)$ indeksleri hesaplanmıştır. Lemma 2.6.3’ten yararlanarak $\overline{\Pi_1}(S^r(G))$ indeksi kolayca hesaplanabilir. Ele alınan tüm graf türleri için bütün köşelerin dereceleri bilindiğinden Lemma 2.5.2’den yararlanarak $\overline{\Pi_2}(S^r(G))$ eşindeksi de elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Aldous, J.M., Wilson R.J. 1995. Graphs and applications.

Ashrafi, A.R., Doslic, T., Hamzeh, A. 2010. The Zagreb coindices of graph operations. *Discr. Appl. Math.*, 158: 1571–1578.

Bondy, J.A., Murty, U.S.R. 1976. Graph Theory with Applications. Macmillan Co., London.

Balaban, A.T., Motoc, I., Bonchev, D., Mekenyan, O. 1983. Topological indices for structure-activity correlations. *Topics Curr. Chem.*, 114: 21-55.

Biggs, N.L., Lloyd, E.K., Wilson, R.J. 1986. Graph Theory 1736-1936. Oxford University Press, London.

Balakrishnan, R., Ranganathan, K. 2012. A Textbook of Graph Theory (Second Edition). Springer, New York.

Caen, D. 1988. An upper bound on the sum of squares of degrees in a graph. *Discr. Math.*, 185: 245-248.

Das, K.C. 2004. Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph. *Discr. Math.*, 285: 57-66

Das, K.C., Gutman, I. 2004. Some properties of the second Zagreb index. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 52: 103-112.

Das, K.C., Gutman, I., Zhou, B. 2009. New upper bounds on Zagreb indices. J. Math. Chem., 46: 514-521.

Eliasi, M., Iranmanesh, A., Gutman, I. 2012. Multiplicative versions of first Zagreb index. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68: 217-230.

Eliasi, M., Vukicevic, D. 2013. Comparing the multiplicative Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 69:765-773.

Foulds, L.R. 1992. Graph Theory Applications. Springer, New York.

Gross, J.L., Yellen J. 2006. Graph Theory and Its Applications (Second Edition). CRC Press, USA.

Gutman, I., Trinajstic, N. 1972. Graph theory and molecular orbitals. Total π-electron energy of alternant hydrocarbons. *Chem. Phys. Lett.*, 17: 535-538.

Gutman, I., Ruscic, B., Trinajstic, N., Wilcox, C.F. 1975. Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes. *J. Chem. Phys.*, 62: 3399-3405.

Gutman, I., Das, K.C. 2004. The first Zagreb index 30 years after. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 50: 83-92.

Gutman, I. 2011. Multiplicative Zagreb indices of trees. *Bull. Soc. Math. Banja Luka*, 18:17-23.

Hansen, P., Vukicevic, D. 2007. Comparing Zagreb indices. *Croat. Chem. Acta*, 80: 165-168.

Ilic, A., Stevanovic D. 2009. On comparing Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 62:681-687.

Khalifeh, M.H., Azari, H.Y., Ashrafi, A.R. 2009. The first and second Zagreb indices of some graph operations. *Discrete Appl. Math.*, 157: 804-811.

Liu, J., Zhang, Q. 2012. Sharp upper bounds on multiplicative Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68:231-240.

Nezhad, F., Iranmanesh, A., Tehranian, A., Azari, M. 2014. Comparing the second multiplicative Zagreb coindex with some graph invariants. Transactions on Combinatorics, 3:31-41.

Nikolic, S., Kovacevic, G., Milicevic, A., Trinajstic, N. 2003. The Zagreb indices 30 years after. *Croat. Chem. Acta*, 76: 113-124.

Reti, T., Gutman, I. 2012. Relations between ordinary and multiplicative Zagreb indices. Bulletin of international Mathematical Virtual Institute, 2:133-140.

Reti, T. 2012. On the relationships between first and second Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68:169-188.

Trinajstic, N., Nikolic, S., Milicevic, A., Gutman, I. 2010. On Zagreb indices. Kem. Ind., 59: 577-589.

Todeschini, R., Ballabio, D., Consonni, V. 2010. Novel molecular descriptors based on functions of new vertex degrees. In: Ed.: Gutman, I., Furtula, B., Novel Molecular Structure Descriptors - Theory and Applications I, Univ. Kragujevac, Kragujevac, pp: 73-100.

Todeschini, R., Consonni, V. 2010. New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 64: 359-372.

Xu, K., Das, K.C., Tang, K. 2013. On the multiplicative Zagreb coindex of graphs. *Opuscula Math.*, 33: 191-204.

Zhou, B. 2004. Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 52:113-118.

Zhou, B., Gutman, I. 2004. Relations between Wiener, hyper-Wiener and Zagreb indices. *Chem. Phys. Lett.*, 394: 93-95.

Zhou, B., Gutman, I. 2005. Further properties of Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 54: 233-239.

Zhou, B. 2007. Remarks on Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 57: 591-596.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Müge TOGAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 02/07/1985
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Bursa Erkek Lisesi, 1998-2003
Lisans	: Kocaeli Kocaeli Üniversitesi, 2003-2004
Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi, 2004-2007
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi, 2007-2009

Çalıştığı Kurum ve Yıl	: -
İletişim (e–posta)	: capkinm@uludag.edu.tr

Yayınları:

Yurttas, A., Demirci, M., Ozbay, H., Capkin, M., Cangul, I. N. 2009. Construction of cycloidal free subgroups of Hecke groups of finite index. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 01/2009, 14(2).

Cetin, E., Ozbay, H., Togan, M., Cangul, I.N. 2011. "Properties of *n*-th Degree Bernstein Polynomials Properties of *n*-th Degree Bernstein Polynomials", International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics**,** Halkidiki, AIP Conf. Proc. **1389**, 392-395.

Togan, M., Ozgur, B., Cangul, I. N. 2011. Some Special Cases of the Minimal Polynomial of 2cos(π/q) over Q, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics. Halkidiki- Greece, AIP Conference Proceedings, Volume **1389**, Issue 1, p.375-377.

Akgunes N., Togan, M. 2012. Some graph theoretical properties over zero-divisor graphs of special finite commutative rings, Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang) 01/2012; 2(2), 305-315.

Cangul, I. N., Yurttas, A., Togan, M., Cevik, A.S. 2012. Some formulae for the Zagreb indices of graphs, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Kos, Greece, AIP Conf. Proc. **1479**, 365-367.

Das, K. Ch., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N., Cevik, A. S. 2013, The Multiplicative Zagreb Indices of Graph Operations. *Journal of Inequalities and Applications*, 90, doi:10.1186/1029-242X-2013-90.

Das K. Ch., Akgunes, N., Togan, M., Yurttaş, A., Cangul I. N., Cevik A. S. 2014. On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta (Accepted).