T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNVARYANT ALTMANİFOLDLAR

ÜLKÜ ULUTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2005

ÖZET

Bu çalışmada Riemanniann manifoldlar,Riemannian çarpım manifoldları, bu manifoldlar üzerindeki invaryant ve yarı invaryant alt manifoldlar ve eğrilikleri ele alınmıştır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Riemannian çarpım manifoldları ve bazı örnekler verildi.

Dördüncü bölümde Riemannian çarpım manifoldların invaryant altmanifoldlarının düşey ve yatay distribüsyonları ile Riemannian çarpım manifoldların invaryant altmanifoldlarının lokal simetrik ve gerçel uzay formunda olmaları ele alınmıştır.

Beşinci bölüm lokal Riemannian manifold olunması için Riemann Çarpım manifoldlarının yarı invaryant altmanifold olması için gerek ve yeter şartlar verildi.Ayrıca bu manifoldların integrallenebilir distribüsyonlar, total umbilik yarı invaryant altmanifold gibi temel özellikleri ele alınmıştır.

Altıncı bölüm Riemann çarpım manifoldların Riemannian eğrilik tensorlerini ve Riemannian Chrisstoffel eğrilik tensorlerini ele almıştır.

ABSTRACT

In this thesis we consider Riemannian manifolds, Riemannian product manifolds,on the manifolds so invariant and semi invariant submanifolds and curvatures.

This study consists of six chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, some basic definitions and notions which will be used in other chapters are given.

In the third chapter, some examples of Riemanniann product manifolds are given.

In the fourth chapter, the vertical and horizontal distributions of an invariant submanifold of a Riemannian product manifold and on an invariant submanifold of a Riemannian product manifold to be a locally symmetric and real space form are investigated.

In the fifth chapter, necessary and sufficient conditions are given on a semi-invariant submanifold of a Riemann product manifold to be a locally Riemannian manifold.As well fundamental properties of these submanifolds are investigated such as integrability of distributions, totally umbilical semi-invariant submanifold.

In the sixth chapter, the Riemannian curvature tensor and the Riemannian-Christoffel curvature tensor of a product Riemannian manifold are given.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$M, \widetilde{M}$	Manifold
$M_1 \times M_2$	Çarpım manifoldu
$g, \widetilde{g}$	Metrik tensör
C^{∞}	Diferansiyellenebilme
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$C^{\infty}(M, \mathbb{R})$	M den $\mathbb{R}$ ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
D ve $D^{\perp}$	Distribüsyonlar
∇	M üzerinde afin koneksiyon
$\widetilde{\nabla}$	$\widetilde{M}$ üzerinde afin koneksiyon
$\overline{\nabla}$	Van-der Waerden –Bortolotti koneksiyonu
$[\,,]$	Lie parantez operatörü
g	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
h	İkinci temel form
f	İmmersiyon
A_{ξ}	Şekil operatörü
NM	M nin normal demeti
T_pM	p noktasında teğet uzay
$T^{\perp}M$	p noktasında normal uzay
γ	eğri
$\lVert H \rVert = \alpha$	Ortalama eğrilik
H	Ortalama eğrilik vektörü
K	Kesitsel eğrilik
S	Ricci eğrilik
C	Weyl konformal eğrilik operatörü

M(c)	Sabit kesitsel eğrilik
$(\pi_i)_*$	Kanonik izdüşüm
∂	Kısmi türev
$\Gamma_{i\,j}^{k}$	Christoffel Sembolü
$T_1,\ T_2$	Düşey ve yatay distribüsyonlar
S_1,S_2	Ortogonal projeksiyon dönüşümleri
$f_1\ ,f_2$	İmmersiyonlar
$\lVert , \rVert$	Norm
R	M nin eğrilik tensörü
$\widetilde{R}$	$\widetilde{M}$ nin eğrilik tensörü
T^2	Tor yüzeyi

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2. 1: M n- boyutlu diferansiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den R ye C^∞ fonksiyonlarının uzayı $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, R)$$

şeklinde bir metrik tanımlı ise M ye bir *Riemann manifoldu* denir. Burada g ye *Riemann metriği* (veya metrik tensör) adı verilir.(Chen 1973).

Tanım 2. 2: M C^∞ manifold ve M üzerinde tanımlı $\chi(M)$; C^∞ tipinde vektör alanları uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty(M, R)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları için

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

iii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

özelliklerini sağlarsa ∇ ya M üzerinde bir Afin koneksiyon adı verilir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2. 3: (M,g) bir Riemann manifold, ∇, M üzerinde tanımlı bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (sıfır torsiyon)

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği)

şartları sağlanıyorsa ∇ ya M üzerinde sıfır torsionlu Riemann koneksiyonu yada Levi-Civita koneksiyonu adı verilir (Chen 1973 ve Hacısalihoğlu 1980). Bu koneksiyon kısaca M deki Riemann Koneksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2. 4: M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\xrightarrow{2-lineer} \chi(M) \\ (X,Y) &\to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup $\forall X, Y \in \chi(U)$ türevlenebilir (yani C^∞ sınıfından) vektör alanı çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ biçiminde üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir. Böylece aşağıdaki özelliler sağlandığında ∇ ya *Lineer Koneksiyon* (veya kovaryant türev)adı verilir(Hacısalihoğlu 1980);

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y; \quad f \in C^\infty(M, IR)$

iii) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iv) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y.$

Tanım 2. 5: M, N sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifold $f : M \to N$ C^∞ dönüşümünün $boy(f_*(T_P M)) = q$ ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı q olup $rank(f) = q$ ile gösterilir. Eğer $boyM = rankf$ ise f ye immersiyon (daldırma) M yede N nin immersed altmanifoldu denir.

f immersiyonu 1-1 ise f ye imbeding (gömme) M yede N nin gömülen altmanifoldu yada sadece altmanifoldu denir. (Chen 1973).

Tanım 2. 6: (M,g) ve (N, $\tilde{g}$) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldlar ve $f : M \to N$ ye bir immersiyon olsun. $\forall X, Y \in T_P M$ için

$$\tilde{g}((f_*)_p X, (f_*)_p Y) = g(X,Y) \tag{2.1}$$

ise f'ye izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon)adı verilir. (Chen 1973).

Tanım 2. 7: $U \subset M$ üzerinde $\Gamma_{i\ j}^{k}$ fonksiyonları

$$\nabla_i(\frac{\partial}{\partial y_i}) = \sum \Gamma_{i\ j}^{k}(\frac{\partial}{\partial y_k})$$

olmak üzere $\Gamma_{i\ j}^{k}$ katsayılarına ∇ nın *koneksiyon katsayıları*(yada Christoffel sembolleri*)* adı verilir.

Tanım 2. 8: (M ,g) bir Riemannian manifold ve üzerindeki Riemannian konneksiyon koneksiyonu ∇ olsun**.**

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X \quad , \quad Y \quad , \quad Z) &\to R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

ile tanımlanan *R*,*M* üzerinde (1,3)- tensör alanıdır ve bu tensör alanı *M* nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır.(Chen 1973)

Teorem 2. 1: (M ,*g*) bir Riemannian manifold ve eğrilik tensör alanı *R* olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

i) $R(X,Y) = -R(Y,X)$,

ii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,Y)X = 0$,

iii) $g(R(X,Y)Z,W)=-g(R(X,Y)W,Z)$,

iv) $g(R(X,Y)Z,W)= g(R(Z,W)X,Y)$.

İspat: (Chen 1973).

Tanım 2. 9: (M ,g) bir Riemannian manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı π olmak üzere V,W$\in \pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu;

$$Q(V,W)=g(V,V)g(W,W)-g(V,W)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V,W) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)} \tag{2.2}$$

olup buna π nin kesitsel eğriliği denir ve $K(\pi)$ ile gösterilir(Chen 1973).

Tanım 2. 10: *M, m* boyutlu Riemann manifold olsun. (m $\rangle$ 2). *M* de $\forall$ *X,Y,Z*$\in \chi(M)$ ortonormal vektör alanları olmak üzere *K(X,Y,Z,X)=0* ise *K, M* nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü iken M *sabit kesitsel eğriliklidir.* $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için *M, c* sabit eğriliğine sahip ise *M* nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü

$$K(X,Y,Z,W) = c\{g(Z,Y)g(X,W) - g(Z,X)g(Y,W)\}$$

eşitliği ile gösterilir(Chen 1973).

Tanım 2. 11: (M ,g) *n*-boyutlu bir Riemannian manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$,lokal vektör alanları olsunlar.

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \to R$$

$$(X,Y) \to S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \qquad (2.3)$$

şeklinde tanımlı (0,2)-tipindeki tensör alanına, *M* üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2. 12: (M ,g) *n*-boyutlu bir Riemannian manifoldu olsun.Eğer S=λg ise *M* ye Einstein manifold denir. Burada λ, *M* üzeinde diferensiyellenebilir bir fonksiyondur.(Besse 1987).

Tanım 2. 13: (*M,g*) bir Riemann manifold olsun.*M* üzerinde bir vektör alanı ξ ve bir r-form ω olmak üzere V_2,...........,$V_r \in T_pM$ (r ≥ 1) vektörleri için *M* üzerinde

$$(C_\xi \omega)(p)(V_2, ..., V_r) = \omega(\xi(p), V_2, ..., V_r) \qquad (2.4)$$

biçiminde tanımlanan $C_\xi \omega$ (r – 1) formuna ω nun ξ ile kontraksiyonu adı verilir(Long 1995).

Tanım 2. 14: Her bir $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ için (*M,g*) nin *Weyl konformal eğrilik operatörü*

$$\widetilde{C} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$\widetilde{C}(X_1,X_2)X_3=\widetilde{R}(X_1,X_2)X_3+\frac{1}{n-2}\left(\frac{\rho}{n-1}X_1\Lambda X_2-(X_1\Lambda\widetilde{S}X_2+\widetilde{S}X_1\Lambda X_2)\right)X_3$$

(2.5)

ve *Weyl konformal eğrilik tensörü*

$$\widetilde{C}:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^{\infty}(M,R)$$

$$C(X_1,X_2,X_3,X_4)=g(\widetilde{C}(X_1,X_2)X_3,X_4)$$

şeklinde tanımlanır. Bununla beraber n ≥ 4 için eğer $C=0$ ise M ye konformal flat dir denir. Eğer n=3 ise M için her zaman $C=0$ dır(Chen 1973).

$$\nabla_U V=\nabla_U^{M_2}V-g(U,V)$$

$$=\nabla_U^{M_2}V-g_{M_2}(U,V)$$

ve $\widetilde{M}^{n+d}$ sırasıyla n ve $n+d$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M^n, $\widetilde{M}^{n+d}$ nin alt manifoldu ve $\widetilde{\nabla}$ de $\widetilde{M}^{n+d}$ deki Riemannian konneksiyon olsun. M^n bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p M^n$ ve normal uzayı $(T_p M^n)^{\perp}$ olmak üzere

$$T_p(\widetilde{M}^{n+d})=T_p M^n\oplus(T_p M^n)^{\perp}$$

dir. Böylece $\forall X,Y\in\chi(M^n)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X Y=\tan(\widetilde{\nabla}_X Y)+nor(\widetilde{\nabla}_X Y)$$
$$=\nabla_X Y+nor(\widetilde{\nabla}_X Y)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca ∇ nın M^n üzerinde indirgenmiş metriğe göre bir Riemann konneksiyonu olduğu gösterilebilinir. (O’Neill 1983).

Önerme 2. 1: $M^n\subseteq\widetilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold ve g ile de sırasıyla M ve üzerinde tanımlı metrikler olsun. Böylece $h(X,Y)$ M^n üzerinde bir normal vektör alanı olmak üzere

$$h:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M)^{\perp}$$

$$(X\ ,\ Y)\quad\rightarrow\ h(X,Y)=\widetilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y \tag{2.6}$$

biçiminde gösterilen h ikinci temel form olup 2- lineer ve simetriktir.

İspat:(Chen1973).

Tanım 2. 15: $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ bir altmanifold ve $\widetilde{\nabla}$ da ; $\widetilde{M}$ de kovaryant türev olsun. Böylece her $\forall X,Y \in \chi(M)$ ve her p için $(\nabla_X Y)_p \in T_p M$ ve $h_p(X,Y) \in T_p^{\perp} M$ ikinci temel form olmak üzere,

$$(\widetilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + h_p(X,Y) \tag{2.7}$$

şeklinde *Gauss denklemi* elde edilir(Chen 1973)

Tanım 2. 16: $g(X,Y) = g_1((\pi_1)_* X, (\pi_1)_* Y) + g_2((\pi_2)_* X, (\pi_2)_* Y)$ bir altmanifold olmak üzere M ye normal bir birim normal vektör alanı ξ olsun. Böylece $\widetilde{\nabla}_X \xi$ nın teğet bileşeni $A_\xi X$ ve normal bileşeni $D_X \xi$ olmak üzere,her $p \in M$ için;

$$(\widetilde{\nabla}_X \xi)_p = -(A_\xi X)_p + (D_X \xi)_p \tag{2.8}$$

biçiminde *Weingarten denklemi* denir. Burada A_ξ ya şekil operatörü,

$$A_\xi : \chi(M) \to \chi(M)$$
$$X \to A_\xi(X) = -\tan(\nabla_X \xi)$$

D ye de M^n nin normal demetindeki (normal) koneksiyonu denir(Chen 1973).

Teorem 2. 2: $A_\xi X$, ξ ve X üzerinde 2-lineerdir.

İspat: (Chen 1973).

Teorem 2. 3: $\forall X,Y \in \chi(M)$, $\xi \in \chi(M^{\perp})$, ∇ ; M de Riemann koneksiyon , $\widetilde{\nabla}$; $\widetilde{M}$ de Riemann koneksiyon , g ; M nin Riemann metriği , $\widetilde{g}$; $\widetilde{M}$ nin Riemann metriği olmak üzere $g(X,\xi) = 0$ ise

$$\widetilde{g}(h(X,Y),\xi) = g(Y, A_\xi X) \tag{2.9}$$

eşitliği ile gösterilir.

İspat: (Chen 1973).

Tanım 2. 17: $\overline{\nabla}$ Vander Waerden Bortolotti koneksiyonu

$$\overline{\nabla}h : \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)^{\perp}$$
$$(X,Y,Z) \qquad \to (\overline{\nabla}h)(X,Y,Z) = (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) \qquad (2.1$$
$$= D_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z)$$

0)

şeklinde tanımlanır(Chen 1984).

Önerme 2. 2: $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$,$\forall\xi,\eta\in\chi(M^{\perp})$ ve∇ , R nin$M$ üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ve $\widetilde{\nabla},\widetilde{R}$ nin $\widetilde{M}$ üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) = \widetilde{g}(R(X,Y)Z,W) + \widetilde{g}(h(X,W),h(Y,Z)) - \widetilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)) \qquad (2.11)$$

eşitliği elde edilir.

İspat: (Chen 1984).

Önerme 2. 3: $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$,$\forall\xi,\eta\in\chi(M)^{\perp}$ ve∇ , R nin$M$ üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ve $\widetilde{\nabla},\widetilde{R}$ nin $\widetilde{M}$ üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olmak üzerinde $R(X,Y)Z$ nin normali $(R(X,Y)Z)^{\perp}$ olarak tanımlanırsa Codazzi denklemi olarak adlandırılan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = g(\widetilde{R}(X,Y)Z,\eta) = (\widetilde{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\widetilde{\nabla}_Y h)(X,Z) \qquad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: (Chen 1984).

Tanım 2. 18: $\forall X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için $(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z)$ eşitliğinden $(R(X,Y)Z)^{\perp} = 0$ (3.7) oluyorsa M manifolduna eğrilik invaryant altmanifoldu adı verilir. Burada $R^{\perp}$ ise D normal koneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörüdür. Diğer bir şekilde $R^{\perp} = 0$ ise M ye flat normal koneksiyon adı verilir. M nin normal koneksiyonunun flat olması için gerek ve yeter şart M nin şekil operatörünün köşegenleştirilebilir olması gereklidir.

Tüm hiperyüzeyler için $R^{\perp}=0$ olduğu açıktır(Chen 1984).

Önerme 2. 4: $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ ve $\forall\xi,\eta\in\chi(M^{\perp})$ olmak üzere $R(X,Y)Z$ nin normali $(R(X,Y)Z)^{\perp}$ olarak tanımlanırsa Ricci denklemi:

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,\eta)=\tilde{g}(\tilde{R}^{\perp}(X,Y)\xi,\eta)-\tilde{g}(\left[A_{\xi},A_{\eta}\right]X,Y) \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: (Chen 1984).

Tanım 2. 19: N nin n boyutlu altmanifoldu M olsun.

$$H=\tfrac{1}{n}\sum h(e_i,e_i) \tag{2.14}$$

Biçiminde tanımlanan H vektör alanına M nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. H ortalama eğrilik vektörünün normu $\|H\|$ ya da M nin ortalama eğriliği adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2. 20: Ortalama eğrilik vektörü $H=0$ ise M manifoldu minimaldir (Chen 1973).

Tanım 2. 21: $f:M\to M$ izometrik immersiyonu total geodezik $\Leftrightarrow$ $h=0$ (Chen 1973).

Tanım 2. 22: (N,g) Riemann manifoldunun bir alt manifoldu (M,g) olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ olmak üzere

$$h(X,Y)=g(X,Y)H \tag{2.15}$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye total umbilik altmanifold adı verilir(Chen 1973).

Tanım 2. 23: (N,g) Riemann manifoldunun bir alt manifoldu (M,g) olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ olmak üzere

$$g(h(X,Y),H)=\lambda g(X,Y) \tag{2.16}$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise M ye pseudo-umbilik altmanifold denir.(Chen 1973).

M nin r- boyutlu bir S disitribüsyonu denildiğinde M nin her p noktasına T_pM nin r-boyutlu bir alt tanjant uzayı karşılık getirilmesi anlaşılacaktır.(Yano and Kon 1984).

Tanım 2.24: M ‘nin r-boyutlu distribüsyonu S olsun.Eğer S nin tanım bölgesindeki her p noktasının r boyutlu bir S_p altuzayının baz vektörleri X_1 ,X_2,...,X_r olmak üzere bu komşuluktaki her q noktası için S_q X_1(q) ,X_2(q),...,X_r(q) tarafından geriliyor ise S diferensiyellenebilirdir denir. (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.21: (M,g) n boyutlu bir Riemann manifold, S bir distribüsyon olmak üzere eğer $\forall$ X,Y $\in$S için $[X,Y]\in S$ ise S involutivedir denir.(Yano and Kon 1984).

Teorem.2.5:(Frobenius teoremi) Bir distribüsyon integrallenebilirdir ancak veya ancak distribüsyon involutivedir.

3. RİEMANNİAN ÇARPIM MANİFOLDLARI

Bu bölümde Riemann manifoldların çarpım manifoldları tanıtılmıştır.

(M_1,g_1), (M_2,g_2) Riemann manifoldları ve M, $M_1 \times M_2$ nin çarpım manifoldu ve.i=1,2 için $(\pi_i)_* : M \to M_i$ kanonik izdüşümü göstersin.

Tanım 3. 1 : $\forall X,Y \in \chi(M)$ için M üzerinde

$$g(X,Y) = g_1((\pi_1)_* X,(\pi_1)_* Y) + g_2((\pi_2)_* X,(\pi_2)_* Y)$$

şeklinde tanımlı g Riemann metriği ile belli (M,g) 2-lisine (M_1,g_1) ve(M_2,g_2) nin Riemann çarpım manifoldu denir(O’Neill1983)

Not: Bundan böyle g_1 ve g_2 , M_1 ve M_2 nin Riemann metrik tensör alanı olmak üzere

$$g((\pi_1)_* X, (\pi_1)_* Y) = g_1(X_1, Y_1)$$

$$g((\pi_2)_* X, (\pi_2)_* Y) = g_2(X_2, Y_2)$$

eşitliklerinin geçerli olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 3. 1:(Tor yüzeyi) R^4 deki

$$x(\theta,\varphi) = (a\cos\frac{\theta}{a}, a\sin\frac{\theta}{a}, b\cos\frac{\varphi}{b}, b\sin\frac{\varphi}{b})$$

parametrelendirilmesi ile verilen tor yüzeyi T^2 ile gösterilip,

$$f_1 : S_1 \to R^2 \qquad , \qquad f_2 : S_2 \to R^2$$

$$\theta \to f_1(x) = (a\cos\frac{\theta}{a}, a\sin\frac{\theta}{a}) \qquad \theta \to f_2(x) = (b\cos\frac{\varphi}{b}, b\sin\frac{\varphi}{b})$$

immersiyonları yardımıyla aşağıdaki çarpım immersiyonu elde edilir.

$$f = f_1 \times f_2 : S_1 \times S_2 \to R^2 \times R^2 = R^4$$

$$(\theta,\varphi) \to f(\theta,\varphi) = (f_1(\theta), f_2(\theta))$$

$$= (a\cos\frac{\theta}{a}, a\sin\frac{\theta}{a}, b\cos\frac{\varphi}{b}, b\sin\frac{\varphi}{b})$$

Bu immersiyon R^4 de bir Tor yüzeyi gösterir.

Önerme 3. 1:$M = M_1 \times M_2$ bir katlı çarpım olsun. $X, Y \in \chi(M_1)$, $U, V \in \chi(M_2)$ ise o zaman,

i) $\nabla_X Y = \nabla_X^{M_1} Y$

ii) $\nabla_X V = \nabla_V X = 0$

iii) $\nabla_U V = \nabla_U^{M_2} V$

dir.

İspat: (O'Neill.B 1983).

Teorem 3. 1: $(\pi_1)_* : T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) \to TM_1$

$$(\pi_2)_* : T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) \to TM_2$$

projeksiyon dönüşümleri olsun.

1) $(\pi_1)_* + (\pi_2)_* = \mathrm{I}$

2) $(\pi_1)_*^{\,2} = (\pi_1)_*, (\pi_2)_*^{\,2} = (\pi_2)_*$

3) $(\pi_1)_* \circ (\pi_2)_* = (\pi_2)_* \circ (\pi_1)_* = 0$

(3.14)

özellikleri sağlanır (O'Neill1983).

İspat: $u \in TM_1, u = (u_1, u_2)$

1) $((\pi_1)_* + (\pi_2)_*)(u) = (\pi_1)_*(u) + (\pi_2)_*(u)$

$$= (\pi_1)_*(u_1, u_2) + (\pi_2)_*(u_1, u_2)$$

$$= (u_1, 0) + (0, u_2)$$

$$= (u_1, u_2)$$

$$= I(u)$$

$\Rightarrow ((\pi_1)_* + (\pi_2)_*)(u) = I(u)$

$\Rightarrow (\pi_1)_* + (\pi_2)_* = I$

2) $(\pi_1)_*^{\,2} = (\pi_1)_* \circ (\pi_1)_*$

$$= (\pi_1)_*((\pi_1)_*(u_1, u_2))$$

$$= (\pi_1)_*(u)$$

$$= (\pi_1)_*(u, 0)$$

$\Rightarrow (\pi_1)_*^{\,2} = (\pi_1)_*$

3) $(\pi_1)_* \circ (\pi_2)_* = (\pi_1)_*((\pi_2)_*(u_1, u_2))$

$$= (\pi_1)_*(u_2)$$

$$= (\pi_1)_*(0, u_2)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow (\pi_1)_* \circ (\pi_2)_*(u) = 0(u)$

$\Rightarrow ((\pi_1)_* \circ (\pi_2)_*) = 0$.□

Teorem 3.2: $(\pi_1)_* : T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) \to TM_1$

$(\pi_2)_* : T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) \to TM_2$

projeksiyon dönüşümleri olsun.

$(\pi_1)_* + (\pi_2)_* = \mathrm{I}$ olduğunu göstermiştik. $F = (\pi_1)_* - (\pi_2)_*$ olmak üzere $F^2 = \mathrm{I}$ dır. (X.Senlin ve N.Yilong 2000).

İspat:

$F = (\pi_1)_* - (\pi_2)_*$

$$F^2 = ((\pi_1)_* - (\pi_2)_*) \circ ((\pi_1)_* - (\pi_2)_*) F = (\pi_1)_* - (\pi_2)_*$$

$$= ((\pi_1)_* \circ (\pi_1)_*) - ((\pi_1)_* \circ (\pi_2)_*) - ((\pi_2)_* \circ (\pi_1)_*) + ((\pi_2)_* \circ (\pi_2)_*)$$

$$= (\pi_1)_*^{\,2} + (\pi_2)_*^{\,2}$$

$$= (\pi_1)_* + (\pi_2)_* = \mathrm{I}\,.\square$$

Önerme 3.2: $(M_1 \times M_2, g), (M_1, g_1), (M_2, g_2); \forall X, Y \in T(M_1 \times M_2)$ olmak üzere F simetriktir. Yani

$$g(FX, Y) = g(X, FY) \tag{3.15}$$

dir. (X.Senlin ve N.Yilong 2000).

İspat:

$$\tilde{g}(FX, Y) = \tilde{g}_1(\pi_*(FX), \pi_*(Y)) + \tilde{g}_2(\sigma_*(FX), \sigma_*(Y))$$

$$= \tilde{g}_1(\pi_*(\pi_* - \sigma_*)(X), \pi_*(Y)) + \tilde{g}_2(\sigma_*(\pi_* - \sigma_*)(X), \sigma_*(Y))$$

$$= \tilde{g}_1(\pi_*(X), \pi_*(Y)) + \tilde{g}_1(-(\pi_*\sigma_*)(X), \pi_*(Y))$$

$$+ \tilde{g}_2(\sigma_*\pi_*(X), \sigma_*(Y)) + \tilde{g}_2(-\sigma_*\sigma_*(X), \sigma_*(Y))$$

$$= \tilde{g}_1(\pi_*(X), \pi_*(Y)) - \tilde{g}_2(\sigma_*(X), \sigma_*(Y))$$

$$= \tilde{g}_1(\pi_*(X), \pi_*(Y)) + \tilde{g}_2(\sigma_*(X), -\sigma_*(Y))$$

$$= \tilde{g}((\pi_* + \sigma_*)(X), (\pi_* - \sigma_*)(Y))$$

$$= \tilde{g}(\mathrm{I}(X), F(Y))$$

$= \tilde{g}(X, F(Y)).$ □

Sonuç 3.1: $(M_1 \times M_2, g), (M_1, g_1), (M_2, g_2)$, $X, Y \in T(M_1 \times M_2)$ olmak üzere

$$g(FX, FY) = g(X, Y) \tag{3.16}$$

dir. (X.Senlin ve N.Yilong 2000).

İspat: Burada F nin simetrikliğinden yararlanacağız.

$g(FX, FY) = g(F^2 X, Y)$

$= g(\mathrm{I}X, Y)$

$= g(X, Y)$.□

Sonuç 3.2: $(\nabla_X F)Y = 0; X, Y \in T(M_1 \times M_2)$ (X.Senlin ve N.Yilong 2000).

4. RİEMANNİAN ÇARPIM MANİFOLDLARININ İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde Riemann çarpım manifoldlarının invaryant altmanifoldlarının yatay ve düşey distribisyonları tanılacaktır. Riemannian çarpım manifoldlarının invaryant altmanifoldlarının lokal simetrik olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir

$(M, g) = (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ Riemann çarpım manifoldu olsun.*N,M* nin m-boyutlu altmanifoldu olsun. $X \in \chi(N)$ vektör alanı için fX ve ωX sırasıyla FX in teğet ve normal bileşenleri olmak üzere;

$$FX = fX + \omega X \tag{4.1}$$

dır. $V \in \chi(N)^{\perp}$ nin normal vektörü olsun. BV ve CV sırasıyla FV nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere;

$$FV = BV + CV \tag{4.2}$$

dir.Bu ifadelerden yararlanarak $X \in \chi(N)$ ve $V \in \chi(N)^{\perp}$ için

$$f^2 X = X - B\omega X \, , \omega fX + C\omega X = 0 \, , \tag{4.3}$$

ve

$$C^2 V = V - \omega BV \, , fBV + BCV = 0 \, , \tag{4.4}$$

daha fazlası $\forall X, Y \in \chi(N)$ için

$$g(fX, Y) = g(X, fY) \, , g(X, Y) = g(fX, fY) + g(\omega X, \omega Y) \tag{4.5}$$

denklemleri elde edilir.

Tanım 4. 1: Eğer $\forall x \in N$ için $F(T_x N) \subset T_x N$ ise N ye $M = M_1 \times M_2$ çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu denir. (Yano ve ark.1984)

Eğer *N, M* nin invaryant alt manifoldu ise (4.1) den ω özdeş olarak sıfır olur.

(4.3) ve (4.5) denklemleri.

$$f^2 = \mathrm{I}, \; g(fX, fY) = g(X, Y)$$

formuna indirgenir.

$M = M_1 \times M_2$ Riemann çarpım manifoldunun bir invaryant altmanifoldu N ise $f^2 = \mathrm{I}$ eitliğinden

$$T_1 = \left\{ X \in \Gamma(TN) \middle| fX = X \right\}$$

ve

$$T_2 = \left\{ X \in \Gamma(TN) \middle| fX = -X \right\}$$

yatay ve düşey distribüsyonlarını böylecede $TN = T_1 \oplus T_2$ parçalanışını elde etmiş oluruz.

T_1 ve *T_2* ye karşılık gelen integral manifoldları bu bölümde sırasıyla *N_1* ve *N_2* ile göstereceğiz(Atçeken ve Keleş 2004)

Örnek 4. 1: $M = R^3 \times R^3$ *(i=1,2)* için R^3 ün standart metrik tensörü $g = g_1 \times g_2$ ile tanımlı Riemann çarpım manifoldu olsun. *M* nin bir altmanifoldu *N* olmak üzere

$$N = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \right) \in R^6 \middle| x_3 = x_2 + \sin x_1, x_5 = \cos x_4 \right\}$$

eşitliği ile gösterilsin.

$$f_1 : N_1 \to R^3 = M_1 \qquad , \qquad f_2 : N_2 \to R^3 = M_2$$

$$(x_1, x_2) \to (x_1, x_2, x_2 + \sin x_1) \qquad (x_4, x_6) \to (x_4, \cos x_4, x_6)$$

immersiyonları yardımıyla aşağıdaki immersiyonu tanımlayalım:

$$f = f_1 \times f_2 : N = N_1 \times N_2 \to M_1 \times M_2 = R^3 \times R^3 = R^6$$

$$(x_1, x_2, x_4, x_6) \to (x_1, x_2, x_2 + \sin x_1, x_4, \cos x_4, x_6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (1, 0, \cos x_1, 0, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (0, 1, 1, 0, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = (0, 0, 0, 1, -\sin x_4, 0) = \frac{\partial}{\partial x_4} - \sin x_4 \frac{\partial}{\partial x_5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_6} = (0, 0, 0, 0, 0, 1) = \frac{\partial}{\partial x_6}$$

Böylece ,

$$\chi(N) = Span\left\{U_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, U_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}, U_3 = \frac{\partial}{\partial x_4} - \sin x_4 \frac{\partial}{\partial x_5}, U_4 = \frac{\partial}{\partial x_6}\right\}$$

elde edilir.

Düşey ve yatay distribisyonlar sırasıyla $T_1 = Span\{U_1, U_2\}, T_2 = Span\{U_3, U_4\}$ dir.

Normal uzay ise

$$\chi(N)^{\perp} = Span\left\{V_1 = \cos x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}, V_2 = \sin x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_5}\right\}.$$

$(\pi_1)_* + (\pi_2)_* = I \quad , \quad (\pi_1)_* - (\pi_2)_* = F$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
F(u_1) &= F(\frac{\partial}{\partial x_1}) + \cos x_1 F(\frac{\partial}{\partial x_3}) \\
&= ((\pi_1)_* - (\pi_2)_*)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos x_1((\pi_1)_* - (\pi_2)_*)\frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= (\pi_1)_*(\frac{\partial}{\partial x_1}) - (\pi_2)_*(\frac{\partial}{\partial x_1}) + \cos x_1(\pi_1)_*(\frac{\partial}{\partial x_3}) - \cos x_1(\pi_2)_*(\frac{\partial}{\partial x_3}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} = u_1
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $F(u_2)=u_2$, $F(u_3)=-u_3$, $F(u_4)=-u_4$ olduğu gösterilebilir.

Böylece $\chi(N)$ baz vektörler F altında olur.Düşey ve yatay distribisyonla sırasıyla $T_1 = Span\{U_1, U_2\}, T_2 = Span\{U_3, U_4\}$ dir (Atçeken ve Keleş 2004).

Önerme 4. 1: *N*, $M = M_1 \times M_2$ nin invaryant altmanifoldu ise *F* nin simetrikliğinden $x \in N$ için $F(T_x N^{\perp}) \subset T_x N^{\perp}$ dir.

İspat: *F* nin simetrikliği yani (3.15) denkleminden elde edilebilir(X.Senlin ve N.Yilong 2000). □

Önerme 4. 2: *N*, $M = M_1 \times M_2$ nin invaryant altmanifoldu ve için Levi-Civita ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla *N* ve *M* nin Levi-Civita konneksiyonu olsunlar. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(N)$ için

$$\tilde{\nabla}_x FY = F\tilde{\nabla}_x Y$$

$$\nabla_x fY + h(X, fY) = F\nabla_x Y + Fh(X,Y)$$

$$\nabla_x fY + h(X, fY) = f\nabla_x Y + Fh(X,Y)$$

$$(\nabla_x f)Y = 0, Fh(X,Y) = h(X, fY) \tag{4.6}$$

dır (Atçeken ve Keleş 2004).

İspat: *F* nin paralelliğinden yani

$(\tilde{\nabla}_X F)Y = 0 \Rightarrow \tilde{\nabla}_X FY - F\tilde{\nabla}_X Y = 0$

$\Rightarrow \tilde{\nabla}_X FY = F\tilde{\nabla}_X Y$

elde edilir.

N,*M* nin invaryant altmanifoldu olduğundan $Y \in \chi(N)$ ise $F(Y) \in \chi(N)$ olacaktır.

$\tilde{\nabla}_X FY = \nabla_X FY + h(X, FY)$

$\qquad = \nabla_X fY + h(X, fY)$ (1)

$F(\tilde{\nabla}_X Y) = F(\nabla_X Y + h(X,Y))$

$$= F\nabla_X Y + Fh(X,Y)$$

$$= f\nabla_X Y + Fh(X,Y)\,(2)$$

(1) ve (2) eşitliklerinden

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y \Rightarrow (\nabla_X f)Y = 0\,,\, Fh(X,Y) = h(X,fY)$$

eşitlikleri elde edilir.□

Teorem 4. 1: N , $M = M_1 \times M_2$ Riemann çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. O zaman N_1 ve N_2 ,N nin total geodezik altmanifoldları olur .Dahası N_1 ve N_2 sırasıyla M_1 ve M_2 nin altmanifoldları olurlar(Atçeken ve Keleş 2004).

İspat: $\forall X \in \chi(N_1)$, $\forall Z \in \chi(N)$ için (4.6) nolu denklemden

$$f\nabla_Z X = \nabla_Z fX = \nabla_Z X \tag{4.7}$$

yani $f\nabla_Z X \in T_1$ elde edilir.

Böylece T_1 distribisyonu pareleldir.Aynı yolla T_2 distribisyonununda parelel olduğu gösterilebilir. $\forall X,Y \in \chi(N_1)$ için

$$f[X,Y] = f(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \nabla_X fY - \nabla_Y fX = \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y].$$

dir. Buradan

Böylelikle T_1 düşey distribisyonun involutive olduğu elde edilir..Benzer yolla T_2 ninde yatay distribisyonunda involutive olduğu kolaylıkla elde edilebilir. Bu ise
T_1 ve T_2 integrallenebilir olması demektir.

N den N_1 ‘e indirgenmiş konneksiyonu ∇^1 ile gösterilim.

$$f\nabla_X Y = \nabla_X fY = \nabla^1_X fY + h_1(X,fY) = \nabla_X Y$$

$$= \nabla^1_X Y - h_1(X,Y)$$

$$= f(\nabla^1_X Y + h_1(X,Y))$$

$$= f(\nabla^1_X Y + h_1(X,Y))$$

$$= \nabla^1_X Y - h_1(X,Y)$$

eşitliklerden

$$\nabla^1_X Y + h_1(X,Y) = \nabla^1_X Y - h_1(X,Y)$$

$$2h_1(X,Y)=0 \Rightarrow h_1(X,Y)=0$$

dır. N_1,N nin total geodeziğidir. Benzer şekilde N_2 'ninde N 'de total geodezik olduğu gösterilebilir. Böylece N bir lokal Riemann çarpım manifoldudur.

$$V_p=\left\{X\in\Gamma(T(M_1\times M_2))\middle| FX=X\right\}$$

ve

$$V_q=\left\{X\in\Gamma(T(M_1\times M_2))\middle| FX=-X\right\}$$

distribisyonlarını tanımlayalım.

$(\pi_1)_*^{\,2}=(\pi_1)_*,(\pi_2)_*^{\,2}=(\pi_2)_*,(\pi_1)_*+(\pi_2)_*=I,(\pi_1)_*(\pi_2)_*=(\pi_2)_*(\pi_1)_*=0$ ifadesinden $\forall X\in\chi(T_1)$ için

$$(\pi_1)_*X=\frac{1}{2}(I+F)X=\frac{1}{2}(X+FX)=\frac{1}{2}(X+fX)=X$$

ve

$$QX=\frac{1}{2}(I-F)X=\frac{1}{2}(X-FX)=\frac{1}{2}(X-fX)=0$$

dir. Böylece $\forall X\in\chi(N)$ için $X\in\chi(V_p)$ dir.Aynı yolla $\forall Y\in\chi(T_2)$ için $Y\in\chi(V_q)$ olduğu gösterilebilir. V_p ve V_q distribisyonlarının integral manifoldları sırası ile M_1 ve M_2 dir.Ayrıca N_1 ve N_2, M_1 ve M_2 nin altmanifoldlarıdırlar.□

Teorem 4. 2: $M=M_1\times M_2$ Riemann çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu N olsun .R ve K sırası ile Riemann Eğrilik tensörü ve Riemann Christoffel tensörü olmak üzere f fonksiyonu $\forall X,Y,Z,W\in\chi(N)$ için;

i) $R(X,Y)fZ=fR(X,Y)Z$

ii) $R(fX,fY)=R(X,Y)$

iii) $K(fX,fY,fZ,fW)=K(fX,fY,Z,W)=K(X,Y,fZ,fW)=K(X,Y,Z,W)$

iv) $K(X,fY,fZ,W)=K(X,fY,Z,fW)=K(fX,Y,fZ,W)$

eşitlikleri sağlanır(Atçeken ve Keleş 2004).

İspat: (3.17) ve (4.6) denklemlerinden

i) $R(X,Y)fZ = \nabla_X \nabla_Y fZ - \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_{[X,Y]} fZ$

$$= \nabla_X f \nabla_Y Z - \nabla_Y f \nabla_X Z - f \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$= f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z)$$

$$= fR(X,Y)Z$$

dir.

ii) K Riemann eğrilik tensörünün özelliklerinden

$$g(R(fX,fY)Z,W) = K(Z,W,fX,fY) = g(R(Z,W)fX,fY)$$
$$= g(fR(Z,W)X,fY) = g(R(Z,W)X,Y)$$
$$= g(R(X,Y)Z,W)$$

dir. Böylece $R(fX,fY) = R(X,Y)$ ifadesini tanımlayabiliriz.

iii) $K(fX,fY,fZ,fW) = g(R(fX,fY)fZ,fW) = g(fR(fX,fY)Z,fW) \pm$
$$= g(R(fX,fY)Z,W) = K(fX,fY,Z,W)$$
$$= g(R(Z,W)fX,fY) = g(fR(Z,W)X,fY)$$
$$= g(R(Z,W)X,Y) = K(X,Y,Z,W)$$
$$= g(R(X,Y)fZ,fW) = K(X,Y,fZ,fW).$$

iv) K Riemann eğrilik tensörünün özelliklerinden

$$K(X,fY,fZ,W) = g(R(X,fY)fZ,W) = g(R(X,fY)Z,W)$$
$$= g(R(Z,fY)Z,fW) = K(X,fY,Z,fW)$$
$$= -g(fR(fY,X)Z,W) = -g(R(fY,X)fZ,W)$$
$$= -g(fR(fY,X)Z,W) = -g(R(fY,X)fZ,W)$$
$$= -g(R(fZ,W)fY,X) = -g(R(fZ,W)Y,fX)$$
$$= K(fX,Y,fZ,W)$$

dir. □

Teorem 4. 3: $M = M_1 \times M_2$ Riemann çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu N ise N karışık geodezik altmanifolddur(Atçeken ve Keleş 2004).

İspat: h; N nin ikinci temel formu olmak üzere $\forall X \in \chi(T_1)$ ve $\forall Y \in \chi(T_2)$ için $h(X,Y)=0$ eşitliği gösterilebilir. (3.17) ve (4.6) denklemlerinden $\forall X,Y \in \chi(N)$ için

$$h(fX, fY) = h(X,Y)$$

ve

$$h(X, fY) = Fh(X,Y)$$

eşitliklerine sahip oluruz. Böylece $\forall X \in \chi(T_1)$ ve $\forall Y \in \chi(T_2)$ için

$$h(X,Y) = -h(X,Y)$$

eşitliğinden $h(X,Y)=0$ sonucuna ulaşılmışolunur.□

Tanım 4. 2: T_1 ve T_2 ortogonal tamamlayıcı iki distribisyon olsun. $TN = T_1 \oplus T_2$ ile gösterilsin. Bunun yanı sıra $\chi(T_1)$ ve $\chi(T_2)$ için

$$S_1 = \frac{1}{2}(I+f) : \Gamma(TN) \to \Gamma(T_1)$$

ve

$$S_2 = \frac{1}{2}(I-f) : \Gamma(TN) \to \Gamma(T_2)$$

ifadeleri $\chi(N)$ nin ortogonal projeksiyon dönüşümleridir. Buradan

$$S_1 + S_2 = I, S_1^2 = S_1, S_2^2 = S_2, S_1S_2 = S_2S_1 = 0, f = S_1 - S_2.$$

eşitliklerini tanımlayabiliriz. Dahası fazlası $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TN)$ için

$$\nabla_Y S_1 X = \nabla_{(S_1+S_2)Y} S_1 X = \nabla_{S_1Y} S_1 X + \nabla_{S_2Y} S_1 X \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= \nabla_{(S_1+S_2)Y}(S_1+S_2)X = \\ &= \nabla_{S_1Y} S_1 X + \nabla_{S_1Y} S_2 X + \nabla_{S_2Y} S_1 X + \nabla_{S_2Y} S_2 X \end{aligned} \tag{4.9}$$

dir. N nin total geodezik altmanifoldları N_1 ve N_2 integral manifoldları ,∇ Levi-Civita koneksiyonu ve $\forall X,Y,Z \in \chi(N)$ için

$$g(\nabla_{S_2Y}S_1X,S_2Z)=S_2Yg(S_1X+S_2Z)-g(\nabla_{S_2Y}S_2Z,S_1X)$$
$$=0-g(\nabla_{S_2Y}S_2Z,S_1X)=0$$

dir. Böylece $\nabla_{S_2Y}S_1X\in\Gamma(T_1)$ için

$$S_1(\nabla_{S_2Y}S_1X)=\nabla_{S_2Y}S_1X \tag{4.10}$$

ve

$$S_2(\nabla_{S_2Y}S_1X)=0 \tag{4.11}$$

eşitlikleri gösterilmiş olunur.Aynı yolla $\forall X,Y,\in\chi(N)$ için

$$S_1(\nabla_{S_1Y}S_2X)=0 \tag{4.12}$$

ve

$$S_2(\nabla_{S_1Y}S_2X)=\nabla_{S_1Y}S_2X \tag{4.13}$$

eşitliklerine ulaşılmış olunur.(4.9),(4.10) ve (4.12) den

$$S_1(\nabla_YX)=S_1\nabla_{S_1Y}S_1X+S_1\nabla_{S_1Y}S_2X+S_1\nabla_{S_2Y}S_1X+S_1\nabla_{S_2Y}S_2X$$
$$=\nabla_{S_1Y}S_1X+\nabla_{S_2Y}S_1X \tag{4.14}$$

dir. $\forall X,Y,\in\chi(N)$ için (4.7) ve(4.13) den

$$\begin{aligned}(\nabla_YS_1)X&=\nabla_YS_1X-S_1(\nabla_YX)\\&=\nabla_YS_1X-\nabla_{S_1Y}S_1X-\nabla_{S_2Y}S_1X\\&=\nabla_{S_1Y}S_1X+\nabla_{S_2Y}S_1X-\nabla_{S_1Y}S_1X-\nabla_{S_2Y}S_1X\\&=0\end{aligned}$$

dır.Böylece X ve Y keyfi vektör alanları için $\nabla S_1=0$ sonucuna ulaşılır.Aynı sebepten dolayı $\nabla S_2=0$ eşitliği elde edilir.

Şimdi R ile N nin Riemann eğrilik tensörünü tanımlayalım. $\forall X,Y,\in\chi(N)$ için

$$R(X,Y)S_1Z=S_1R(X,Y)Z\in\Gamma(T_1)$$

ve

$$R(X,Y)S_2Z=S_2R(X,Y)Z\in\Gamma(T_2)$$

dir. Böylece Teorem4.3 den

$$R(S_1X,S_2Y)=0 \tag{4.15}$$

N için X tanjant vektörü olmak üzere S_1X+S_2X ifadesi ile gösterilebilir. Böylece

$$R(X,Y)=R(S_1X,S_1Y)+R(S_2X,S_2Y)$$

eşitliği elde edilmiş olunur. $\forall X,Y,Z\in\chi(N)$ için I.Bianchi eşitliği ve (4.15) den

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= R(S_1X,S_1Y)Z+R(S_2X,S_2Y)Z\\
&= R(S_1X,S_1Y)S_1Z+R(S_1X,S_1Y)S_2Z\\
&\quad +R(S_2X,S_2Y)S_1Z+R(S_2X,S_2Y)S_2Z\\
&= R(S_1X,S_1Y)S_1Z-R(S_2Z,S_1X)S_1Y\\
&\quad -R(S_1Y,S_2Z)S_1X-R(S_1Z,S_2X)S_2Y\\
&\quad -R(S_2Y,S_1Z)S_2X+R(S_2X,S_2Y)S_2Z\\
&= R(S_1X,S_1Y)S_1Z-R(S_2X,S_1Y)S_1Z\end{aligned}$$

dir.

$$R(S_1X,S_1Y)S_1Z=R_1(S_1X,S_1Y)S_1Z$$

ve

$$R(S_2X,S_2Y)S_2Z=R_2(S_2X,S_2Y)S_2Z$$

eşitliklerinden R_1 ve R_2 nin N_1 ve N_2 integral manifoldlarının Riemann eğrilik tensörleri olduğu kolaylıkla görülebilir ve buradan

$X=X_1+X_2, Y=Y_1+Y_2, Z=Z_1+Z_2\in\chi(T_1\oplus T_2)$ için

$$R(X,Y,Z)=R_1(X_1,Y_1)Z_1+R_2(X_2,Y_2)Z_2 \qquad (4.16)$$

sonucuna ulaşılınır(Atçeken ve Keleş 2004).

Önerme 4. 3: $M=M_1\times M_2$ Riemann çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu N olsun. N_1 ve N_2 integral manifoldlarının düşey ve yatay distribisyonları sırası ile T_1 ve T_2 olsun. N düzlemsel manifolddur gerek ve yeter şart N_1 ve N_2 de düzlemsel manifolddurlar(Atçeken, Keleş 2004).

İspat: $\forall X,Y$ ve Z ; N de ortonormal vektör alanları olmak üzere (4.16) dan $R_1=R_2=0$ ise $R=0$ dır.Böylelikle

$$K_1(X_1,Y_1,Z_1,X_1)=K_2(X_2,Y_2,Z_2,X_2)=0 \qquad (4.17)$$

Sonuç olarak N_1 ve N_2 sabit kesitsel eğriliklidirler.(4.17) eşitliğinden N de

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2), Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 + Y_2) \text{ ve } Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_1 + Z_2)$$

ortonormal vektör alanları için

$$K(X,Y,Z,X) = \frac{1}{4}K_1(X_1,Y_1,Z_1,X_1) + \frac{1}{4}K_2(X_2,Y_2,Z_2,X_2) = 0$$

ifadesinden N nin sabit kesitsel eğrilikli olduğu söylenebilir.□

.

Teorem 4. 4: $M = M_1 \times M_2$ Riemann çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu ne negatif nede pozitiftir(Atçeken, Keleş 2004).

İspat: $M = M_1 \times M_2$ Riemann çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu N ve sabit kesitsel eğriliğini $c \neq 0$ alalım. *M(c)* nin Riemann eğrilik tensörü ifadesi ve $\forall X, Y, Z, W \in \chi(N)$ için

$$K(X,Y,Z,W) = c\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\} \tag{4.18}$$

dir. Teorem 4.2. nin iii) şıkkından

$$K(fX, fY, fZ, fW) = K(fX, fY, Z, W) \tag{4.19}$$

eşitliğindeki $Z = Z_1 \in \chi(T_1)$ ve $W = W_2 \in \chi(T_2)$ ifadelerinden

$$K(fX, fY, Z_1, W_2) = -K(fX, fY, Z_1, W_2)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece

$$K(fX, fY, Z_1, W_2) = 0$$

(4.18) ve (4.19) eşitliklerinden

$$c\{g(fY, Z_1)g(fX, W_2) - g(fX, Z_1)g(fY, W_2)\} = 0$$

dır. $c \neq 0$ için

$$g(fY, Z_1)g(fX, W_2) = g(fX, Z_1)g(fY, W_2)$$

T_1 ve T_2 ortogonal distribisyonları için

$$Z_1 g(fX, W_2) = W_2 g(fX, Z_1)$$

eşitlikleri sağlanır.□

5.RİEMANN ÇARPIM MANİFOLDUNUN YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDU

Tanım 5. 1: $\widetilde{M}$ bir Riemann çarpım manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. $TM = D \oplus D^{\perp}, F(D) = D$ ve $F(D^{\perp}) \subset TM^{\perp}$ olacak şekilde M, D ve $D^{\perp}$ şeklinde iki distribüsyonlarına sahip ise M ye $\widetilde{M}$ nin yarı invaryant alt manifoldu denir.

$TM^{\perp} = F(D^{\perp}) \oplus V$ ifadesinde V, $TM^{\perp}$ deki $F(D^{\perp})$ in ortogonal tamamlayıcısı olarak tanımlanır.(4.1) denkleminden

$$fX = F(\pi_1)_* X \text{ ve } wX = F(\pi_2)_* X$$

eşitlikleri gösterilebilir(Şahin ve Atçeken 2003).

Tanım5. 2: D ve $D^{\perp}$ in distribüsyonları p ve q olmak üzere $q = 0$ için bir yarı-invaryant altmanifold invaryant alt manifold, $p = 0$ için bir yarı-invaryant altmanifold anti-invaryant altmanifolddur(Şahin ve Atçeken 2003).

Örnek 5. 1: $M = R^3 \times R^3$ *(i=1,2)* için R^3 ün standart metrik tensörü $g = g_1 \times g_2$ ile tanımlı Riemann çarpım manifoldu olsun. *M* nin bir altmanifoldu *N* olmak üzere

$$N = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| x_1 = x_6 + \tfrac{1}{2}(x_3 + x_4)^2, x_2 = x_5 \right\}$$

eşitliği ile gösterilsin.

$$f_1 : N_1 \to R^3 = M_1 \qquad , \qquad f_2 : N_2 \to R^3 = M_2$$

$$(x_3, x_4) \to (x_6 + \tfrac{1}{2}(x_3 + x_4)^2, x_5, x_3) \qquad (x_5, x_6) \to (x_4, x_5, x_6)$$

immersiyonları yardımıyla aşağıdaki immersiyonu tanımlayalım.

$$f = f_1 \times f_2 : N = N_1 \times N_2 \to M_1 \times M_2 = R^3 \times R^3 = R^6$$
$$(x_3, x_4, x_5, x_6) \to (x_6 + \tfrac{1}{2}(x_3, x_4)^2, x_5, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (x_3 + x_4, 0, 1, 0, 0, 0) = (x_3 + x_4)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = (x_3 + x_4, 0, 0, 1, 0, 0) = (x_3 + x_4)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_5} = (0, 1, 0, 0, 1, 0) = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_6} = (1, 0, 0, 0, 0, 1) = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_6}$$

Böylece,

$$\chi(N) = Span\left\{ U_1 = (x_3 + x_4)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}, U_2 = (x_1 + x_4)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}, U_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_5}, U_4 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_6} \right\}$$

$(\pi_1)_* + (\pi_2)_* = I$, $(\pi_1)_* - (\pi_2)_* = F$ olmak üzere

$$F(u_1) = (x_3 + x_4)F(\frac{\partial}{\partial x_1}) + F(\frac{\partial}{\partial x_3})$$

$$= (x_3 + x_4)((\pi_1)_* - (\pi_2)_*)\frac{\partial}{\partial x_1} + ((\pi_1)_* - (\pi_2)_*)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$= (x_3 + x_4)((\pi_1)_*(\frac{\partial}{\partial x_1}) - (\pi_2)_*(\frac{\partial}{\partial x_1})) + (\pi_1)_*(\frac{\partial}{\partial x_3}) - (\pi_2)_*(\frac{\partial}{\partial x_3})$$

$$= (x_3 + x_4)F(\frac{\partial}{\partial x_1}) + F(\frac{\partial}{\partial x_3}) = u_1$$

Benzer şekilde $F(u_2) = u_2$, $F(u_3) = -u_3$, $F(u_4) = -u_4$ olduğu gösterilebilir.

N nin M de invaryant altmanifold olduğu kolayca gösterilebilir. Düşey ve yatay distribisyonlar sırasıyla $T_1 = Span\{U_1, U_2\}, T_2 = Span\{U_3, U_4\}$ dir.

Dahası normal uzay ise

$\chi(N)^{\perp} = Span\{\xi_1 = \partial/\partial x_1 + (X_3 + X_4)\partial/\partial x_3 + (X_3 + X_4)\partial/\partial x_4 + \partial/\partial x_6, \xi_2 = \partial/\partial x_2 - \partial/\partial x_5\}$

şeklinde gösterilir(Şahin ve Atçeken 2003).

Tanım 5. 3: M ; $\widetilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun yarı invaryant alt manifoldu olsun. $X \in \chi(D)$ ve $Y \in \chi(D^{\perp})$ için eğer $h(X,Y) = 0$ ise M ye karışık geodezik yarı invaryant alt manifold denir(Şahin veAtçeken 2003).

Teorem 5. 1: $\widetilde{M}$ bir Riemann çarpım manifoldu ve M ; $\widetilde{M}$ nin yarı- invaryant alt manifoldu olsun. $\forall Z, W \in \chi(D)^{\perp}$ için

$$A_{FZ}W = -A_{FW}Z \tag{5.1}$$

dır(Şahin ve Atçeken 2003).

İspat: $\forall X \in \chi(M), \forall Z, W \in \chi(D)^{\perp} \Rightarrow FZ \in \chi(M)^{\perp}, FW \in \chi(M)^{\perp}$ için

(2.7) ,(2,8) ,(3.17) ve (4.1) denklemlerinden yararlanarak

$F(D) = D, F(D^{\perp}) \subset TM^{\perp}$

$TM^{\perp} = F(D^{\perp}) + V$

$D^{\perp} \subset TM, D \subset TM$

ifadelerini tanımlamıştık.

$(\widetilde{\nabla}_X F)Z = 0 \Rightarrow \widetilde{\nabla}_X FZ - F\widetilde{\nabla}_X Z = 0$

$\Rightarrow \widetilde{\nabla}_X FZ = F(\widetilde{\nabla}_X Z)$

$\Rightarrow -A_{FZ}X + D_X FZ = F(\underbrace{\nabla_X Z}_{T} + \underbrace{h(X,Z)}_{N})$

$\Rightarrow \underbrace{-A_{FZ}X}_{T} + \underbrace{D_X FZ}_{N} = \underbrace{F(\nabla_X Z)}_{T} + \underbrace{F(h(X,Z))}_{N}$ ifadesini W ile iç çarpımını alalım.

$\Rightarrow g(-A_{FZ}X, W) + g(\underbrace{D_X FZ}_{N}, \underbrace{W}_{D^{\perp}}) = g(F\nabla_X Z, W) + g(Fh(X,Z), W)$

$\Rightarrow -g(A_{FZ}X, W) = g(F\nabla_X Z, W) + g(Fh(X,Z), W)$, F simetrik olduğundan

$\Rightarrow -g(A_{FZ}X, W) = g(\underbrace{\nabla_X Z}_{TM}, \underbrace{FW}_{TM^{\perp}}) + g(h(X,Z), FW)$

$\Rightarrow -g(A_{FZ}X, W) = g(h(X,Z), FW)$

$\Rightarrow -g(A_{FZ}X, W) = g(A_{FW}Z, X)$

$\Rightarrow -g(A_{FZ}W, X) = g(A_{FW}Z, X)$

$\Rightarrow A_{FZ}W = A_{FW}Z. \square$

Lemma 5. 1: M ; $\widetilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun yarı invariant alt manifoldu olsun. .$\forall$ $X \in \chi(D)$ ve $\xi \in \chi(V)$ için

$$A_{\xi}FX = A_{F\xi}Z \tag{5.2}$$

dır(Şahin ve Atçeken 2003).

İspat: $\forall$ $X \in \chi(D), Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(V)$ ve $\widetilde{\nabla}$ Levi- Civita koneksiyonu için (3.17) denklemi yardımıyla

$(\widetilde{\nabla}_X F)Y = 0$

$\Rightarrow (\widetilde{\nabla}_X F)Y = \widetilde{\nabla}_X FY - F(\widetilde{\nabla}_X Y) = 0$

$\Rightarrow \widetilde{\nabla}_X FY = F(\widetilde{\nabla}_X Y)$

$\Rightarrow \nabla_X FY + h(X, FY) = F(\nabla_X Y + h(X,Y))$

ifadesinin her iki tarafınında $W \in \chi(V)$ ile iç çarpımı alındığı taktirde ;

$$\underbrace{\widetilde{g}(\nabla_X FY,W)}_{0}+\widetilde{g}(h(X,FY),W)=\underbrace{\widetilde{g}(F\nabla_X Y,W)}_{0}+\widetilde{g}(Fh(X,Y),W)$$

$$\widetilde{g}(h(X,FY),W)=\widetilde{g}(Fh(X,Y),W)$$

$$h(X,FY)=Fh(X,Y) \tag{5.3}$$

eşitliği elde edilir.

$(\widetilde{\nabla}_X F)\xi=0$

$\Rightarrow (\widetilde{\nabla}_X F)\xi=\widetilde{\nabla}_X F\xi-F(\widetilde{\nabla}_X\xi)=0$

$\Rightarrow \widetilde{\nabla}_X F\xi=F(\widetilde{\nabla}_X\xi)$

$\Rightarrow -A_{F\xi}Y+D_Y F\xi=F(-A_\xi Y+D_Y\xi)$

$\Rightarrow -A_{F\xi}Y+D_Y F\xi=-FA_\xi Y+FD_Y\xi$

eşitliğinin X ile iç çarpımını alalım.

$$\widetilde{g}(-A_{F\xi}Y,X)+\underbrace{\widetilde{g}(D_Y F\xi,X)}_{0}=\widetilde{g}(-FA_\xi Y,X)+\underbrace{\widetilde{g}(FD_Y\xi,X)}_{0}$$

$$\widetilde{g}(A_{F\xi}Y,X)=\widetilde{g}(FA_\xi Y,X)$$

$$\widetilde{g}(A_{F\xi}Y,X)=\widetilde{g}(A_\xi Y,FX)$$

$$\widetilde{g}(A_{F\xi}Y,X)=\widetilde{g}(h(FX\ \ ,Y),\xi)$$

(5.3) denkleminden

$$\widetilde{g}(Fh(X,Y),\xi)=\widetilde{g}(h(FX,Y),\xi)$$

$$-\widetilde{g}(A_{F\xi}Z,W)+\widetilde{g}(D_Z F\xi,W)=-\widetilde{g}(FA_\xi Z,W)+\widetilde{g}(FD_Z\xi,W)$$

$$-\widetilde{g}(A_{F\xi}Z,W)+\underbrace{\widetilde{g}(D_Z F\xi,W)}_{0}=-\underbrace{\widetilde{g}(A_\xi Z,FW)}_{0}+\widetilde{g}(D_Z\xi,FW)$$

$$\widetilde{g}(A_{F\xi}Z,W)=\widetilde{g}(\xi,D_\xi FW)$$

$$\widetilde{g}(h(X,Y),F\xi)=\widetilde{g}(h(FX,Y),\xi)$$

$$\widetilde{g}(A_{F\xi}X,Y)=\widetilde{g}(A_\xi FX,Y)$$

$$A_{F\xi}X=A_\xi FX$$

dir.□

Teorem 5. 2: $\widetilde{M}$ Riemann çarpım manifoldu ve M ; $\widetilde{M}$ nin yarı-invariant alt manifoldu olsun. $\forall\, Z, W \in \chi(D)^{\perp}$ için;

$$D_Z FW - D_W FZ \in \chi(D)^{\perp} \tag{5.4}$$

dir (Şahin ve Atçeken 2003).

İspat: (3.17) eşitliğinden

$$(\widetilde{\nabla}_X F)Y = 0$$

$$\widetilde{\nabla}_X FY = F\widetilde{\nabla}_X Y$$

$$\nabla_X FY + h(X, FY) = F\nabla_X Y + Fh(X, Y)$$

$$(\widetilde{\nabla}_X F)\xi = 0$$

$$\widetilde{\nabla}_X F\xi = F\widetilde{\nabla}_X \xi$$

$$-A_{F\xi}Z + D_Z F\xi = F(-A_\xi Z + D_Z \xi)$$

$$-A_{F\xi}Z + D_Z F\xi = -FA_\xi Z + FD_Z \xi$$

eşitliğinin her iki tarafınında W ile iç çarpımını aldığımız taktirde;

$$-\widetilde{g}(A_{F\xi}Z, W) + \widetilde{g}(D_Z F\xi, W) = -\widetilde{g}(FA_\xi Z, W) + \widetilde{g}(FD_Z \xi, W)$$

eşitliği elde edilmiş olunur.

$$g(\underbrace{\xi}_{N}, \underbrace{FW}_{\Gamma(V)}) = 0$$

ifadesinin türevi alındığı taktirde

$$g(D_Z \xi, FW) + g(\xi, D_Z FW) = 0$$

$$g(D_Z \xi, FW) = -g(\xi, D_Z FW)$$

$$-\widetilde{g}(A_{F\xi}Z, W) + \widetilde{g}(D_Z F\xi, W) = -\widetilde{g}(FA_\xi Z, W) + \widetilde{g}(FD_Z \xi, W)$$

$$-\widetilde{g}(A_{F\xi}Z, W) + \underbrace{\widetilde{g}(D_Z F\xi, W)}_{0} = -\underbrace{\widetilde{g}(A_\xi Z, FW)}_{0} + \widetilde{g}(D_Z \xi, FW)$$

$$-\widetilde{g}(A_{F\xi}Z, W) = \widetilde{g}(D_Z \xi, FW)$$

$$\widetilde{g}(A_{F\xi}Z, W) = \widetilde{g}(\xi, D_Z FW) \tag{5.5}$$

Eşitliğinde Z ile W nin yerlerini değiştirilerek

$$\widetilde{g}(A_{F\xi}W,Z)=\widetilde{g}(\xi,D_{W}FZ)$$

elde edilen denklemin (5.5) ile farkını aldığımız taktirde

$$\widetilde{g}(D_{Z}FW-D_{W}FZ,\xi)=0$$

denklemi elde edilir. Böylece

$$D_{Z}FW-D_{W}FZ\in\Gamma(FD^{\perp})$$

dır.□

Teorem 5. 3: M , $\widetilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun yarı invaryant altmanifoldu olmak üzere;

D integrallenebilirdir. $\Leftrightarrow$ $\forall\ X\in\chi(D)\ ve\ W\in\chi(D^{\perp})\ için\ \ h(X,W)\in\chi(V)\ dir.$ (5.6)

(Şahin ve Atçeken 2003).

İspat: (3.2), (3.17) ve (5.1) denklemleri yardımıyla

$$F\left[Z,W\right]=2A_{FZ}W+\nabla_{Z}^{\perp}FW-\nabla_{W}^{\perp}FZ$$

eşitliği elde edilebilir.

$$F\left[Z,W\right]=2A_{FZ}W+\nabla_{Z}^{\perp}FW-\nabla_{W}^{\perp}FZ$$

$$F\left[Z,W\right]=2\underbrace{A_{FZ}W}_{T}+\underbrace{D_{Z}FW-D_{W}FZ}_{\Gamma(D^{\perp})}$$

$$\begin{aligned}F\left[Z,W\right]&=F(\widetilde{\nabla}_{Z}W-\widetilde{\nabla}_{W}Z)\\&=F(\widetilde{\nabla}_{Z}W)-F(\widetilde{\nabla}_{W}Z)\\&=\widetilde{\nabla}_{Z}FW-\widetilde{\nabla}_{W}FZ\\&=-A_{FW}Z+D_{Z}FW+A_{FZ}W-D_{W}FZ\\&=2A_{FZ}W+D_{FW}Z-D_{FZ}W\quad\in\Gamma(D^{\perp})\end{aligned}$$

Böylece (5.1), (3.16) ifadelerinden yararlanarak

$$g(F\left[Z,W\right],X)=2g(A_{FZ}W,X)$$

$$\underbrace{g(\left[Z,W\right],\underbrace{FX}_{\Gamma(D)})}_{0}=2g(\underbrace{h(X,W)}_{\Gamma(V)},\ \underbrace{FZ}_{F(D^{\perp})})\quad;\left[Z,W\right]\in\Gamma(D^{\perp})$$

Böylece

$$h(X,W)\in\Gamma(V)$$

dir.□

Teorem 5. 4: M ; $\widetilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun yarı-invariant altmanifoldu olmak üzere;

D integrallenebilirdir. $\Leftrightarrow$ $\forall X,Y\in\chi(D)$ için $h(X,FY)=h(Y,FX)$ dir. (5.7)

(Şahin ve Atçeken 2003).

İspat:

(2.7) ,(2.8) ,(3.17) (4.1) denklemleri yardımıyla

$$(\widetilde{\nabla}_X F)Y=0$$

$$\widetilde{\nabla}_X FY-F\widetilde{\nabla}_X Y=0$$

$$\widetilde{\nabla}_X FY=F\widetilde{\nabla}_X Y$$

$$\underbrace{\nabla_X FY}_{T}+\underbrace{h(X,FY)}_{N}=\underbrace{F\nabla_X Y}_{T}+\underbrace{Fh(X,Y))}_{N}$$

$$\nabla_X FY+h(X,FY)=f\nabla_X Y+w\nabla_X Y+Fh(X,Y)$$

denklemi ile X ile Y nin yerlerini değiştirilerek

$$\nabla_Y FX+h(Y,FX)=f\nabla_Y X+w\nabla_Y X+Fh(Y,X)$$

elde ettiğimiz bu iki denklemin farkını aldığımız taktirde

$$F[X,Y]+h(X,FY)-h(Y,FX)=F([X,Y])$$

$$h(X,FY)-h(Y,FX)=0$$

$$h(X,FY)=h(Y,FX)$$

eşitliği elde edilmiş olunur.□

6.RİEMANN ÇARPIM MANİFOLDLARI ÜZERİNDE EĞRİLİK ŞARTLARI

Teorem 6.1:M de X,Y,Z keyfi ortonormal vektör alanları ise K Riemann-Christoffel eğrilik tensörü ve g, M nin Riemann metriği olmak üzere ;

$$K(X,Y,Z,X) = c\left\{g(Z,Y)g(X,X) - g(Z,X)g(Y,X)\right\} = 0$$

olup böylece sabit kesitsel eğrilikli bir Riemann manifold olan eliptik,hiperbolik ve düzlemin sabit kesitsel eğrilikleri sırasıyla pozitif,negatif ve sıfırdır.Bir düzlem manifoldu için Riemann eğrilik tensörü sıfırdır.

İspat:(Atçeken ve Keleş2003).

Tanım 6.1: ∇ ile tanımlı R ,Rieman eğrilik tensörü paralel ise bir Riemann manifoldu lokal simetrik manifold olarak adlandırılır. $\nabla R=0$ dır.(Atçeken ve Keleş 2003).

Teorem 6.2: M, $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun c sabit eğrilikli total umbilik altmanifoldu olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde Mnin eğrilik vektör alanı H olmak üzere M nin aynı zamanda sabit kesitsel eğriliği $c+\|H\|^2$ dir.

İspat: (Atçeken ve Keleş 2003).

Teorem 6.3: (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının bir çarpım manifoldu $(M_1 \times M_2, g)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M_1 \times M_2)$ için R ve S eğriliklerinden yararlanarak

a) $R(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z$

b) $R(JX, JY) = R(X,Y)$

c) $S(JX, JY) = S(X,Y)$

eşitlikleri gösterilebilir(Atçeken ve Keleş 2003).

İspat:

a) J nin paralelizmliğinden yararlanarak $\nabla J = 0$ dan

$$\begin{aligned} R(X,Y)JZ &= \nabla_X \nabla_Y JZ - \nabla_Y \nabla_X JZ - \nabla_{[X,Y]} JZ \\ &= \nabla_X J \nabla_Y Z - \nabla_Y J \nabla_X Z - J \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= J \nabla_X \nabla_Y Z - J \nabla_Y \nabla_X Z - J \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= J(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z) \\ &= JR(X,Y). \end{aligned}$$

b)Benzer olarak,

$$\begin{aligned} g(R(JX,JY)Z,W) = K(JX,JY,Z,W) &= K(Z,W,JX,JY) \\ &= g(R(Z,W)JX,JY) = g(JR(Z,W)X,JY) \\ &= g(R(Z,W)X,Y) = K(Z,W,X,Y) \\ &= K(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) . \end{aligned}$$

Buradan $R(JX, JY) = R(X,Y)$ sonucunu çıkarabiliriz.

c) $$S(JX,JY) = \sum_{i=1}^{n+m} g(R(e_i, JX)JY, e_i) = \sum_{i=1}^{n+m} g(R(Je_i, X)Y, Je_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+m} g(R(e_i, X)Y, e_i) = S(X, Y)$$

Teorem 6.4: (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının bir çarpım manifoldu $(M_1 \times M_2, g)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M_1 \times M_2)$ için $R(X, Y)(\pi_1)_* Z \in \chi(M_1)$, $R(X, Y)(\pi_2)_* Z \in \chi(M_2)$ olmak üzere $\nabla P = 0$ ise

$$R(X, Y)(\pi_1)_* Z = (\pi_1)_* R(X, Y)Z$$

dır(Atçeken ve Keleş 2003).

İspat:

$$R(X, Y)(\pi_1)_* Z = \nabla_X \nabla_Y (\pi_1)_* Z - \nabla_Y \nabla_X (\pi_1)_* Z - \nabla_{[X,Y]} (\pi_1)_* Z$$

$$= \nabla_X (\pi_1)_* \nabla_Y Z - \nabla_Y (\pi_1)_* \nabla_X Z - (\pi_1)_* \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$= (\pi_1)_* \nabla_X \nabla_Y Z - (\pi_1)_* \nabla_Y \nabla_X Z - (\pi_1)_* \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$= (\pi_1)_* (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z)$$

$$= (\pi_1)_* R(X, Y)Z \; .\square$$

Teorem 6.5: (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının bir çarpım manifoldu $(M_1 \times M_2, g)$ manifold ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M_1 \times M_2)$ için $R(X, Y)(\pi_1)_* Z \in \chi(M_1)$, $R(X, Y)(\pi_2)_* Z \in \chi(M_2)$ olmak üzere

$$R(X, Y)Z = R_1(X_1, Y_1)Z_1 + R_2(X_2, Y_2)Z_2 \tag{6.1}$$

dır(Atçeken ve Keleş 2003).

İspat: $X = X_1 + X_2, Y = Y_1 + Y_2 \in \chi(M_1 \times M_2)$ için Teorem 6.4 den ve Bianchi eşitsizliğini kullanarak

$$R(X, Y)Z = R(X_1, Y_1)Z + R(X_2, Y_2)Z$$

$$= (\pi_1)_* R(X_1, Y_1)Z + (\pi_2)_* R(X_1, Y_1)Z + (\pi_1)_* R(X_2, Y_2)Z + (\pi_2)_* R(X_2, Y_2)Z$$

$$= R(X_1, Y_1)(\pi_1)_* Z + R(X_2, Y_2)(\pi_2)_* Z + (\pi_2)_* (-R(Y_1, Z)X_1 - R(Z, X_1)Y_1)$$

$$+ (\pi_1)_* (-R(Y_2, Z)X_2 - R(Z, X_2)Y_2)$$

$$= R(X_1,Y_1)Z_1 + R(X_2,Y_2)Z_2 - R(Y_1,Z)(\pi_2)_* X_1 - R(Z,X_1)(\pi_2)_* Y_1$$
$$-R(Y_2,Z)(\pi_1)_* X_2 - R(Z,X_2)(\pi_1)_* Y_2$$
$$= R(X_1,Y_1)Z_1 + R(X_2,Y_2)Z_2.$$

ifadesinde $R(X_1,Y_1)Z_1$ ve $R(X_2,Y_2)Z_2$ yerine

$$R_1(X_1,Y_1)Z_1 = R(X_1,Y_1)Z_1 \qquad \text{ve} \qquad R_2(X_2,Y_2)Z_2 = R(X_2,Y_2)Z_2$$

ifadelerini aldığımız taktirde

R_1 ve R_2 sırasıyla $(M_1,g_1)\ ve\ (M_2,g_2)$ Riemann manifoldlarının Riemann eğrilik tensörleri olsun. Böylece;

$$R(X,Y)Z = R_1(X_1,Y_1)Z_1 + R_2(X_2,Y_2)Z_2$$

ifadesine sahipiz.□

Teorem 6.6: (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) Riemann manifoldlarının bir çarpım manifoldu $(M_1 \times M_2, g)$ manifoldu lokal simetrik manifolddur. $\Leftrightarrow (M_1,g_1)\ ve\ (M_2,g_2)$ lokal simetrik manifolddurlar(Atçeken ve Keleş 2003).

İspat: $(M_1 \times M_2, g)$ lokal simetrik ise $\nabla R = \nabla R_1 + \nabla R_2 = 0$ dır. $J = (\pi_1)_* - (\pi_2)_*$, $J(\pi_1)_* = (\pi_1)_*\ ve\ J(\pi_2)_* = -(\pi_2)_*$ ifadelerinden

$$JR = JR_1 + JR_2 = J(\pi_1)_* R + J(\pi_2)_* R = (\pi_1)_* R - (\pi_2)_* R = R_1 - R_2$$

eşitliğini elde ederiz. J paralel olduğundan

$$\nabla R = \nabla R_1 + \nabla R_2 = 0 \tag{6.2}$$

dır.

$$\begin{aligned} J\nabla R &= J\nabla R_1 + J\nabla R_2 \\ \nabla JR &= \nabla JR_1 + \nabla JR_2 \\ &= \nabla R_2 - \nabla R_2 = 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

(6.2) ve (6.3) eşitliklerinden $\nabla R_2 = \nabla R_2 = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Buradan $(M_1,g_1)\ ve\ (M_2,g_2)$ ifadelerinin lokal simetrik manifold oldukları anlaşılır.

Diğer taraftan $(M_1, g_1)\, ve\, (M_2, g_2)$ lokal simetrik manifoldlar olsunlar. $\nabla R_2 = \nabla R_2 = 0$ olduğundan $\nabla R = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Buradan $(M_1 \times M_2, g)$ nin lokal simetrik manifold olduğunu söyleyebiliriz.□

Teorem 6.7: (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının bir çarpım manifoldu $(M_1 \times M_2, g)$ çarpım manifoldu olsun.

$(M_1 \times M_2, g)$ Riemann çarpım manifoldu bir Ricci flat manifoldudur. $\Leftrightarrow$ (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları Ricci flat manifoldlardır(Atçeken ve Keleş 2003).

İspat: $(M_1 \times M_2, g)$ Riemann çarpım manifoldu bir Ricci flat manifold ise

$$S(X, Y) = S_1(X_1, Y_1) + S_2(X_2, Y_2) = 0$$

olup diğer taraftan

$$S(X, JY) = S_1(X_1, Y_1) - S_2(X_2, Y_2) = 0$$

ifadesini elde ederiz. Buradan

$$S_1(X_1, Y_1) = S_2(X_2, Y_2)$$

sonucunu çıkarabiliriz. Böylece (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının Ricci flat manifoldlardır.Terside kolaylıkla gösterilebilir.□

Teorem 6. 8: (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının bir çarpım manifoldu $(M_1 \times M_2, g)$ çarpım manifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M_1 \times M_2)$ için

a) $K(JX, JY, JZ, JW) = K(JX, JY, Z, W) = K(X, Y, JZ, JW) = K(X, Y, Z, W)$

b) $K(X, JY, JZ, W) = K(X, JY, Z, JW) = K(JX, Y, JZ, W)$

ifadelerini tanımlayabiliriz(Atçeken ve Keleş 2003).

İspat:

a) Teorem 6.3 den J paralel olduğundan

$$\begin{aligned} K(JX, JY, JZ, JW) &= g(R(JX, JY)JZ, JW) \\ &= g(JR(JX, JY)Z, JW) = g(R(JX, JY)Z, W) \end{aligned}$$

$$= g(R(X,Y)Z,W) = K(X,Y,Z,W)$$

$$K(JX,JY,JZ,JW) = g(R(JX,JY)JZ,JW)$$
$$= g(JR(JX,JY)Z,JW) = g(R(JX,JY)Z,W)$$
$$= K(JX,JY,Z,W) = K(JX,JY,Z,Y)$$
$$= g(R(JX,JY)Z,W) = g(JR(X,Y)Z,JW)$$
$$= g(R(X,Y)JZ,JW) = K(X,Y,JZ,JW)\,.$$

b) *R* ve *K* nın özelliklerini kullanarak benzer yollarla

$$K(X,JY,JZ,W) = g(R(X,JY)JZ,W) = g(JR(X,JY)Z,W)$$
$$= K(R(X,JY)Z,JW) = K(X,JY,Z,JW)$$
$$K(X,JY,JZ,W) = K(R(JZ,W)X,JY) = g(R(JZ,W)JX,Y)$$
$$= K(JZ,W,JX,Y) = K(JX,Y,JZ,W)$$
$$= K(JX,Y,Z,JW)\,.\square$$

X, $M_1 \times M_2$ nin keyfi tanjant vektör alanı olsun. M_1 ve M_2 nin tanjant vektör alanları $(\pi_1)_* X$ ve $(\pi_2)_* X$ olmak üzere $X = (\pi_1)_* X + (\pi_2)_* X$ dir. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının sırasıyla Riemann Christoffel sembolleri $K((\pi_1)_* X, (\pi_1)_* Y, (\pi_1)_* Z, (\pi_1)_* W)$ ve $K((\pi_2)_* X, (\pi_2)_* Y, (\pi_2)_* W, (\pi_2)_* Z)$ olduğu kolaylıkla görülebilir.Teorem6.3 ve Teorem6.8 ve (6.1) eşitliğinden

$$K(X,Y,Z,W) = K((\pi_1)_* X, (\pi_1)_* Y, (\pi_1)_* Z, (\pi_1)_* W) + K((\pi_2)_* X, (\pi_2)_* Y, (\pi_2)_* W, (\pi_2)_* Z)$$

ifadesi elde edilir.

$$X = X_1 + X_2, Y = Y_1 + Y_2, Z = Z_1 + Z_2, W = W_1 + W_2 \in \chi(M_1 \times M_2)$$

için K^1 ve K^2 sırasıyla (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının Riemann Christoffel eğrilik tensörleri olamak üzere

$$K(X,Y,Z,W) = K^1(X_1,Y_1,Z_1,W_1) + K^2(X_2,Y_2,Z_2,W_2) \qquad (6.4)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 6. 9: (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının bir çarpım manifoldu $(M_1 \times M_2, g)$ çarpım manifoldu olsun. $(M_1 \times M_2, g)$ Riemann çarpım manifoldu sabit kesitsel eğriliklidir. $\Leftrightarrow$ (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları sabit kesitsel eğriliklidir(Atçeken ve Keleş 2003).

İspat: $M_1 \times M_2$ Riemann çarpım manifoldu sabit kesitsel eğrilikli ise $M_1 \times M_2$ üzerinde $\forall X, Y, Z$ için ortonormal vektör alanları için $K(X, Y, Z, X) = 0$ eşitliği elde edilir. $\{X_1, Y_1, Z_1\}$ ve $\{X_2, Y_2, Z_2\}$ sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde ortonormal vektör alanları ise

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2), Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 + Y_2), Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_1 + Z_2)$$

ifadesi $M_1 \times M_2$ üzerinde ortonormal vektör alanıdır. Dahası g Riemannyan metrik tanımından $\{X, Y, JZ\}$ $M_1 \times M_2$ üzerinde ortonormal vektör alanıdırlar. Böylece (6.4) eşitliğinden

$$K(X, Y, Z, X) = \frac{1}{4}K_1(X_1, Y_1, Z_1, X_1) + \frac{1}{4}K_2(X_2, Y_2, Z_2, X_2) = 0$$

elde edilir. Ve Riemann çarpım manifoldları üzerinde ve

$$K(X, Y, JZ, X) = \frac{1}{4}K_1(X_1, Y_1, Z_1, X_1) - \frac{1}{4}K_2(X_2, Y_2, Z_2, X_2) = 0$$

olup $\{X_1, Y_1, Z_1\}$ ve $\{X_2, Y_2, Z_2\}$ sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde ortonormal vektör alanları için
$K_1(X_1, Y_1, Z_1, X_1) = K_2(X_2, Y_2, Z_2, X_2) = 0$ dır.(6.4) den $M_1 \times M_2$ üzerinde

$$\left\{X = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2), Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 + Y_2), Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_1 + Z_2)\right\}$$

ortonormal vektör alanları olmak üzere

$$4K(X, Y, Z, X) = K_1(X_1, Y_1, Z_1, X_1) + K_2(X_2, Y_2, Z_2, X_2) = 0$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $(M_1 \times M_2, g)$ sabit kesitsel eğriliklidir diyebiliriz.□

Sonuç 6. 1: (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlarının bir çarpım manifoldu $(M_1 \times M_2, g)$ çarpım manifoldu olsun. $(M_1 \times M_2, g)$ Riemann çarpım manifoldu eliptikdir.(hiperbolik veya düzlemsel) $\Leftrightarrow$ (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları eliptiktir.(hiperbolik veya düzlemsel) (Atçeken ve Keleş 2003).

Teorem 6.10: (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) sırasıyla p ve n-p boyutlu Riemann manifoldları ve M_1 ile M_2 nin bir Riemann çarpım manifoldu $(M_1 \times M_2, g)$ olsun. $(M_1 \times M_2, g)$ Riemann çarpım manifoldu konformal düzlemsel ise (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) konformal düzlemsel ve Einstein manifold olurlar. (Deszcz,R.1991)

İspat:

M_1 in bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$, M_2 nin bir ortonormal çatı alanı $\{e_{P+1} = f_1, e_{p+2} = f_2, \ldots, e_n = f_{n-p}\}$ olsun. K, K^1 ve K^2 sırasıyla M, M_1 ve M_2 nin eğrilik tensör alanları, S, S^1 ve S^2 sırasıyla M , M_1 ve M_2 nin Ricci eğrilik tensör alanlarını göstemek üzere bunların lokal koordinat bileşenleri sırasıyla aşağıdaki şekilde bulunur.

$$K_{abcd} = K(e_a, e_b, e_c, e_d) = K^1(e_a, e_b, e_c, e_d) = K^1_{abcd} \tag{6.5}$$

$$K_{a\alpha\beta d} = 0 \,, \; K_{\alpha\beta\gamma\delta} = K^2_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{6.6}$$

$$S_{ab} = S^1_{ab} \tag{6.7}$$

$$S_{a\alpha} = 0 \tag{6.8}$$

$$S_{\alpha\beta} = S^2_{\alpha\beta} \tag{6.9}$$

Burada $a,b,c,d \in \{1,2,\ldots\ldots,p\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{p+1, \ldots\ldots\ldots, n\}$ dir. C nin lokal bileşenleri

$$C_{abcd} = K^1_{abcd} - \frac{1}{n-2}(g^1_{ad}S^1_{bc} - g^1_{ac}S^1_{bd} + g^1_{bc}S^1_{ad} - g^1_{bd}S^1_{ac})$$

$$+ \frac{\kappa}{(n-1)(n-2)}(g^1_{bc}g^1_{ad} - g^1_{ac}g^1_{bd}) = C^1_{abcd} \,, \tag{6.10}$$

$$C_{\alpha ab\beta} = -\frac{1}{n-2}S^1_{ab}g^2_{\alpha\beta} - \frac{1}{n-2}g^1_{ab}S^2_{\alpha\beta}$$

$$+ \frac{1}{(n-1)(n-2)}\kappa g^1_{ab}g^2_{\alpha\beta} \,, \tag{6.11}$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = K^{2}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{n-2}(g^{2}_{\alpha\delta}S^{2}_{\beta\gamma} - g^{2}_{\alpha\gamma}S^{2}_{\beta\delta} + g^{2}_{\beta\gamma}S^{2}_{\alpha\delta} - g^{2}_{\beta\delta}S^{2}_{\alpha\gamma})$$

$$+\frac{\kappa}{(n-1)(n-2)}(g^{2}_{\beta\gamma}g^{2}_{\alpha\delta} - g^{1}_{\alpha\gamma}g^{1}_{\beta\delta}) = C^{2}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad (6.12)$$

$$C_{abc\alpha} = C_{ab\alpha\beta} = C_{a\alpha\beta\gamma} = 0 \qquad (6.13)$$

şeklinde olurlar.

Eğer C= 0 ise (6.10) ve (6.12) denklemlerinden C^{1} ve C^{2} sıfır olur. Şimdi (6.11) denklemine (a,b) üzerinden kontraksiyon uygulayacak olursak

$$0 = -\kappa^{1}g^{2}_{\alpha\beta} - pS^{2}_{\alpha\beta} + \frac{1}{(n-1)}\kappa p g^{2}_{\alpha\beta}$$

(6.14)

eşitliği elde edilir.Buradan;

$$S^{2}_{\alpha\beta} = (\frac{\kappa^{1}}{p} + \frac{1}{(1-n)}\kappa)g^{2}_{\alpha\beta}$$

elde edilir.Böylece M_2 Einstein manifold olur. Benzer şekilde M_1 inde Einstein manifold olduğu kabul edilir.

KAYNAKLAR

1) Atçeken, M., Keleş, S., 2003,On Product Riemannian Manifolds, Differential Geometry-Dynamical Systema,Fac. Sci. Univ. Inonu, Vol.5 No.1,pp.1-7.

2) Atçeken, M., Keleş, S., 2003, Two Teorems on Invariant Submanifolds of Riemannian Product Manifold, Indian J Pure and Appl Math,34(7):1035-1044.

3) Atçeken, M.,Keleş, S., 2004, On the Invariant Submanifolds of Product Riemannian Manifold, Acta Mathematica Scientia, Vol.24, No.4

4) Besse, A.L.,1987, Einstein Manifolds,Springer Verlag,510p.

5) Chen, B.Y., 1973, Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker Inc.,New York.

6) Chen, B.Y., 1984, Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type, World Scientific Publishing Co Pte Ltd.

7) Deszcz, R., 1991, On Four Dimensional Riemannian Warped Product Manifolds Satisfying Certain Pseudo Symmetry Curvature condıtıons.

8) Hacısalihoğlu, H.H., 1980, Diferansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi,895p

9) O'neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry,Academic Pres Inc., New York.

10) Senlin, X., Yilong, N., 2000, Submanifolds of Product Riemannian Manifold, Acta Mathematica Scientia,20(B) 213-218.

11) Yano, K., Kon, M., 1984, Structre on Manifolds, World Scientific Publishing Co. Ltd.

12) Şahin, B.,Atçeken ,M., 2003, Semi-Invariant Submanifolds of Riemannian Product Manifold , 53(C)42,53(C)15.

13) Lang, S.,1995, Differential and Riemannian manifolds, Springer-Verlag,360p.

İNDEKS

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana her türlü desteği veren ve yardımlarını esirgemeyen , bu çalışmayı yöneten sayın hocam Doç. Dr. Cengizhan MURATHAN'a , öneri ve görüşlerinden faydalandığım sayın hocalarım Prof. Dr. Kadri ARSLAN ve Doç. Dr. Rıdvan EZENTAŞ'a ve verdiği desteği ile her zaman yanımda olan arkadaşım Selen TÜRKAY' a sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmanın meydana gelmesinde beni sonuna kadar destekleyen ve moral kaynağı olan canım aileme çok teşekkür ediyorum. Bu çalışmamı canım annem ve babama ithaf ediyorum.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Kırşehir'de doğdu. İlk öğrenimini Bursa İstiklâl okulunda, orta ve lise öğrenimini Bursa Atatürk Lisesi'nde 1997 yılında tamamladı.1998 yılında Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başlayarak 2002 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Ocak 2003 de Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde Yüksek Lisans öğrenimine başladı.