T. C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKSİZ GRUPLAR ve TEMEL BÖLGELER

Betül Gezer

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2005

T. C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKSİZ GRUPLAR ve TEMEL BÖLGELER

Betül Gezer

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2005

Bu tez 09.08.2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Osman Bizim (Danışman)   Doç. Dr. İ.Naci Cangül   Yrd. Doç. Dr. Akif Çimenoğlu

ÖZET

Süreksiz ve ayrık gruplar otomorf fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutar. Temel bölge ise süreksiz ve ayrık gruplar kavramı için önemli bir kavramdır. Bu çalışmada süreksiz gruplar, ayrık gruplar ile temel bölgeler arasındaki ilişki incelenmiştir.

Giriş kısmında, otomorfik fonksiyonlar, süreksiz ve ayrık gruplar kısaca betimlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın ikinci ve üçüncü bölümündeki incelemeler için gerekli olan kavramlar verilmiştir. İlk olarak topolojik dönüşüm grupları ve ayrık grupların tanımı ve temel özellikleri belirtilmiştir. Daha sonra doğrusal dönüşümler tanıtılmış ve temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Ayrık gruplar için temel bölgenin incelenmesinde gerekli olan kavramlar ise hiperbolik geometri kısmında verilmiştir.

İkinci bölümde, süreksiz ve ayrık grup kavramları tanıtıldıktan sonra bu grupların temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Süreksiz ve ayrık gruplar arasındaki ilişki belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde çalışmanın temelini oluşturan temel bölge kavramı üzerinde durulmuştur. Bu kısımda ilk olarak genel süreksiz gruplar için temel bölge kavramı ve temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin alt grupları için temel bölge kavramı üzerinde durulmuştur. Son olarak bir temel bölgenin alanının hesaplanması ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Süreksiz grup, ayrık grup, temel bölge

ABSTRACT

Discontinuos and discrete groups have significant place in the theory of automorphic functions. The concept of fundamental region has importance for the discontinuos and discrete groups. In this work, the relations between discontinuos groups, discrete groups and fundamental regions are studied.

At the introduction, some important ideas are briefly described. In the first chapter, basic notions which are necessary in the second and third chapters are given. First of all, definitions and fundamental properties of general topological groups and discrete groups are recalled. Then linear transformations are introduced and their fundamental properties are given. Fundamental ideas which are necessary to study fundamental regions of discrete groups are given in the section concerned with hyperbolic geomety.

In the second chapter, discontinuos and discrete groups are introduced, and then the relations between these groups are discussed.

In the third chapter, the concept of a fundamental region which forms the basis of this study is considered. Firstly the concept of a fundamental region and some examples of it are given for the general discontinuos groups. Then this discussion is done for $PSL(2, \boldsymbol{R})$. Lastly, computation of hyperbolic area of the fundamental region is given.

Key Words: Discontinuos groups, discrete groups, fundamental region

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$A(\Gamma)$	Adi noktalar kümesi
$D(\Omega)$	Dirichlet bölgesi
Ω_f	f nin periyotlarının kümesi
$(g; m_1, \ldots, m_r)$	Γ Fuchs grubunun simgesi
$D_p(\Gamma)$	Γ için p mekezli Dirichlet bölgesi
$GL(2, \boldsymbol{C})$	Genel lineer grup
Σ	Genişletilmiş karmaşık düzlem
$\mu(E)$	Hiperbolik alan
$\rho(p,q)$	Hiperbolik uzaklık
$h(\gamma)$	Hiperbolik uzunluk
$L(\Gamma)$	Limit noktaları kümesi
$SL(2, \boldsymbol{C})$	Özel lineer grup
$PSL(2, \boldsymbol{Z}[i])$	Picard grubu
$PGL(2, \boldsymbol{C})$	Projektif genel lineer grup
$PSL(2, \boldsymbol{C})$	Projektif özel lineer grup
$\mathrm{Aut}(\Sigma)$	Σ nın otomorfizmleri
$\mathrm{iz}(T)$	T dönüşümünün izi
$\boldsymbol{U}$	Üst yarı düzlem

ŞEKİLLER DİZİNİ Sayfa

GİRİŞ

Otomorf fonksiyonlar teorisi, modern karmaşık analizin en çok çalışılan dallarından birisidir. Analitik fonksiyonlar teorisi ile grup teorinin birleşimi olarak düşünülebilecek otomorf fonksiyonlar teorisi, topoloji, hiperbolik geometri gibi bazı temel matematik dallarını da kullanarak topolojik ve geometriksel sonuçlarda doğurur. Kabaca betimlemek gerekirse, Γ düzlemin doğrusal dönüşümlerinin bir grubu olmak üzere Γ altında denk olan noktalarda aynı değeri alan f analitik fonksiyonuna *otomorf fonksiyon* denir. Otomorf fonksiyonlar teorisinde ise süreksiz ve ayrık gruplar oldukça önemli bir yere sahiptir. Sözü edilen Γ grubunun süreksiz olması gerekir, yani f fonksiyonunun tanım kümesindeki her z noktasının Γ nın elemanları altındaki resimlerinin oluşturduğu kümenin limit noktası olmaması gerekir.

Süreksiz ve ayrık gruplar içinde temel bölge kavramı bir vazgeçilmezdir. Düzlemdeki her bir noktanın birer temsilcisini bulunduran bu özel küme üzerinde grubun hareketinin belirlenmesi ile grubun düzlem üzerindeki hareketi elde edilir. Γ grubu altında denk olan noktalar düzlemin denklik sınıfına ayrışımını verir. Kabaca her bir denklik sınıfından sadece birer tane temsilci bulunduran kümeye *temel bölge* denir. Her bir grup için temel bölge var olduğu gibi temel bölgenin bulunma yöntemi de bir tek değildir. Bu çalışmada süreksiz (ayrık) bir grup için temel bölgenin nasıl bulunduğu belirtildikten sonra temel bölge yardımıyla grubun temsilini elde edeceğiz.

Çalışmanın ilk bölümünde, daha sonra ihtiyaç duyulacak bazı temel kavramların tanımları ve temel teoremler verilecektir. İkinci bölümde süreksiz ve ayrık gruplar ele alınacaktır. Süreksiz grup kavramı tanımlandıktan sonra süreksiz grupların temel özellikleri verilecek ve ayrık gruplar ile süreksiz gruplar arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Son bölümde ise temel bölge kavramı tanımlanacak, temel özellikleri ve bazı gruplar için temel bölge örnekleri verilecektir.

1. BÖLÜM
ÖNBİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız bazı temel kavramları tanımlayacağız ve bazı temel teoremler vereceğiz, bu bölüm diğer bölümler için bir taban oluşturacaktır. Ayrık ve süreksiz gruplar birer topolojik dönüşüm grubu oldukları için ilk olarak topolojik dönüşüm grubu kavramı tanımlanacak ve temel özellikleri belirtilecektir. Daha sonra doğrusal dönüşümlerin özellikleri ve bu bölümün sonunda hiperbolik geometri ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

1.1. TOPOLOJİK DÖNÜŞÜM GRUPLARI

1.1.1. Tanım. G hem bir grup hem de Hausdorff uzayı olsun. Eğer her $g, h\in G$ için

$$m: G \times G \longrightarrow G,\ m(g, h) = gh$$

ve

$$i: G \longrightarrow G,\ i(g) = g^{-1}$$

üzerine dönüşümleri sürekli ise G ye bir *topolojik gruptur* denir.

Örneğin, $m(z, w) = z + w$, $i(z) = -z$ grup işlemleri sürekli olduğundan $(\boldsymbol{C}, +)$ bir topolojik gruptur. Eğer karmaşık sayıların çarpımı işlemiyle düşünülürse,

$$S^1 = \{z\in \boldsymbol{C} : |z| = 1\}$$

birim çemberi de bir topolojik gruptur.

Topolojik grupların en önemli özelliklerinden birisi, G topolojik grubunun herhangi bir $g\in G$ noktasının komşuluğu ile G nin birim öğesi olan e nin bir komşuluğunun topolojik eş yapılı olmasıdır, yani G topolojik grubunun birim öğesinin komşulukları ailesi bilindiğinde G nin topolojik yapısı da bilinmiş olur.

1.1.2. Tanım. G bir topolojik grup ve X herhangi bir uzay olsun. Eğer her $g, h\in G$ ve her $x\in X$ için

$$\Lambda : G \times X \longrightarrow X,\ \Lambda(g, x) = g\Lambda x$$

sürekli dönüşümü

$$i. \quad g\,\Lambda(h\,\Lambda x) = gh\,\Lambda x$$

$$ii. \quad e\,\Lambda x = x$$

koşullarını gerçekliyorsa $[G, X]$ ikilisine bir *topolojik dönüşüm* grubu denir.

Örneğin G, $\boldsymbol{R}^n$ üzerindeki tüm homojen doğrusal dönüşümlerin kümesi olmak üzere $[G, \boldsymbol{R}^n]$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

Şimdi de ayrık grup tanımını vereceğiz. Ayrık gruplar teorisi ile ilgili kitaplar incelendiğinde farklı gibi görünen birçok ayrık grup tanımına rastlanabilir. Burada bunlardan iki tanesini vereceğiz.

1.1.3. Tanım. G bir topolojik grup olsun.

(1) G nin öğelerinin hiçbirisi G nin bir yığılma noktası değil ise G ye *ayrık grup* denir.

(2) Her $g \in G$ öğesi için $\{g\}$ kümesi g nin bir komşuluğu ise G ye *ayrık grup* denir.

Yukarıda verilen tanımdaki ayrık grup tanımlarının denk olduğu kolayca görülebilir. İlk olarak (1) in (2) yi gerektirdiğini görelim. Herhangi bir g öğesinin, varsayım gereği, $(N \setminus \{g\}) \cap G = \phi$ olacak biçimde bir N komşuluğu vardır. Ancak $N \setminus \{g\} \subset G$ olduğundan "$(N \setminus \{g\}) \cap G = \phi \Leftrightarrow N \setminus \{g\} = \phi \Leftrightarrow N = \{g\}$" dir, yani $\{g\}$ kümesi g öğesinin bir komşuluğudur.

Diğer yandan, her g için $\{g\}$, g nin bir komşuluğu olmasına rağmen G nin yığılma noktaları kümesinin boş olmadığını varsayalım. O halde G nin g_o gibi bir yığılma noktası vardır. Dolayısıyla g_o ın her N komşuluğu için $(N \setminus \{g_o\}) \cap G \neq \phi$ olur. Ancak $N = \{g_o\}$ olarak alınabileceğinden $(\{g_o\} \setminus \{g_o\}) \cap G = \phi$ olur ki bu g_o noktasının bir yığılma noktası olması ile çelişir. Bu nedenle G kümesinin hiç yığılma noktası yoktur.

1.1.4.Örnek 1. $\boldsymbol{Z}$ tamsayılar kümesi, $\boldsymbol{R}$ nin bir ayrık alt kümesidir.

2. $\boldsymbol{R}$ nin her bir sonlu alt kümesi de $\boldsymbol{R}$ nin bir ayrık alt kümesidir.

3. $\{ \frac{1}{n} \mid n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\}$ kümesi ***R*** nin ayrık bir alt kümesidir. Ancak,

$$A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\} \cup \{0\}$$

kümesi ise ***R*** nin ayrık bir alt kümesi değildir, çünkü 0 noktası A kümesinin bir yığılma noktasıdır.

4. $\boldsymbol{R}^n$ nin ayrık alt grupları $\{0\}$ veya $1 \leq m \leq n$ olmak üzere $\boldsymbol{Z}^m$ ye izomorfiktir.

5. Her $z \in \boldsymbol{C}$ için $f(z + \omega) = f(z)$ özelliğindeki ω sayısına f fonksiyonunun *periyodu*, $\omega \neq 0$ sayısı f için bir periyot ise f ye *periyodik fonksiyon* denir. Ω_f ile ***C*** üzerinde tanımlı sabit olmayan meremorf f fonksiyonunun peryotlarının kümesini gösterirsek, Ω_f , ***C*** nin bir ayrık alt kümesidir. Belli bir $\omega \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ için

$$\Omega_f = \{ n\omega \mid n \in \boldsymbol{Z} \}$$

biçiminde ise f ye *basit periyodik fonksiyon*, belli bir $\omega_1, \omega_2 \in \boldsymbol{C}$ için

$$\Omega_f = \{ n\omega_1 + m\omega_2 \mid m, n \in \boldsymbol{Z} \}$$

biçiminde ise *çifte periyodik fonksiyon* denir.

6. ***C*** nin ayrık alt grupları $\{0\}$, ***Z*** veya $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ ye izomorfturlar. ***Z*** ye izomorf olan alt gruplar belli bir $\omega \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ için $\Omega = \{ n\omega \mid n \in \boldsymbol{Z} \}$, $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ ye izomorf olan alt gruplar ise belli bir $\omega_1, \omega_2 \in \boldsymbol{C}$ için (ω_1, ω_2 lineer bağımsız olmak üzere) $\Omega = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid m, n \in \boldsymbol{Z} \}$ biçimindedirler (Jones ve Singerman 1987).

1.1.5. Tanım. $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olmak üzere $g(x) = y$ olacak biçimde bir $g \in G$ varsa x ve y noktalarına (G altında) *denktirler* denir. Herhangi bir $x \in X$ noktasına denk olan tüm noktaların kümesine x noktasının *yörüngesi* denir ve bu küme Gx simgesiyle gösterilir, yani

$$Gx = \{ y \in X \mid \text{belli bir } g \in G \text{ için } g(x) = y \}$$

dir.

Bu denklik bağıntısı X uzayını denklik sınıflarına ayırır, tüm G yörüngelerinin kümesi X/G simgesiyle gösterilir ve X/G ye *yörünge uzayı* (ya da *bölüm uzayı*) denir.

$$p\colon X \longrightarrow X/G,\ p(x) \longrightarrow Gx$$

izdüşüm dönüşümü olmak üzere X/G bölüm uzayı üzerindeki topoloji

$$\tau = \{\ T \subset X/G \mid p^{-1}(T) \in \tau_X \}$$

dir ve bu topoloji ile X/G bölüm uzayı bir topolojik uzaydır. Yörünge uzayı kavramı, ayrık gruplar, Riemann yüzeyleri ve 3-boyutlu manifoldlar teorisinde önemli bir yer tutar.

1.1.6. Tanım. $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun.

1. Her bir $x \in X$ için $g(x) = x$ özelliğindeki $g \in G$ öğelerinin oluşturduğu kümeye x noktasının *kalımlaştırıcısı* (*sabitleştiricisi*) denir ve bu küme $S(x)$ simgesiyle gösterilir. Benzer şekilde $A \subset X$ ise

$$S(A) = \{g \in G \mid g(A) = A\}$$

olarak tanımlanır.

2. H, G nin bir alt grubu olsun. H nin G deki *normalleştiricisi* $N_G(H)$ simgesiyle gösterilir ve

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\ \}$$

olarak tanımlanır.

3. H alt grubunun G deki *merkezleştiricisi* $C_G(H)$ simgesiyle gösterilir ve

$$C_G(H) = \{g \in G \mid \text{her } h \in H \text{ için } gh = hg\}$$

olarak tanımlanır.

1.2. DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

$\boldsymbol{C}_\infty = \Sigma$ ile göstereceğimiz genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmleri $T : \Sigma \to \Sigma$ meremorf, birebir ve üzerine dönüşümlerdir. Bu dönüşümlerin kümesi Aut (Σ) ile gösterilir. Aşağıdaki teorem bu kümenin hangi dönüşümlerden oluştuğunu belirtmektedir.

1.2.1. Teorem. Aut $(\Sigma) = \{\, T \mid T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \;\; a, b, c, d \in \boldsymbol{C}$ ve $ad - bc \neq 0\}$ dir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. "T: $\Sigma \to \Sigma$ meremorftur $\Leftrightarrow$ T bir rasyonel fonksiyondur" ve "T rasyonel fonksiyonu birebirdir $\Leftrightarrow$ T nin derecesi birdir." olduğundan $az + b$ ve $cz + d$ polinomları aralarında asal yani $ad - bc \neq 0$ olmak üzere,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindedir.

1.2.2. Tanım. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki dönüşümlere *doğrusal dönüşümler* veya *Möbiüs dönüşümleri* denir.

1.2.3. Doğrusal Dönüşümlerin Özellikleri. Şimdi doğrusal dönüşümlerin özellikleri üzerinde duracağız;

1. $a, b, c, d \in \boldsymbol{C}$ sayıları T doğrusal dönüşümünü bir tek şekilde belirlemez. Eğer $\lambda \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ ise $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ sayıları da aynı T dönüşümünü belirtir.

2. Aut(Σ), fonksiyonların birleşimi işlemine göre bir gruptur. Bu grubun özdeşlik öğesi,

$$a = d \neq 0 \text{ ve } b = c = 0$$

olmak üzere,

$$I(z) = z$$

dönüşümü ve

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

dönüşümünün tersi,

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

dönüşümüdür.

3. Aut(Σ) nın öğeleri Σ nın homeomorfizmleridir. Gerçektende $T\in$Aut(Σ) meremorf olduğundan süreklidir ve $T^{-1}\in$Aut(Σ) olduğundan T^{-1} de süreklidir.

4. a, b, c, $d\in\boldsymbol{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

biçimindeki dönüşümlere ise Σ nın *anti-otomorfizmleri* denir. Her bir T anti-otomorfizmini, Σ nın bir otomorfizminin karmaşık eşleniği olarak düşünebiliriz. İki anti-otomorfizmin bileşkesi bir otomorfizm ve bir otomorfizm ile bir anti-otomorfizmin bileşkesinin bir anti-otomorfizm olduğu açıktır.

1.2.4. *GL*(2, *C*) Matris Grubu ve Aut(*Σ*)

$$GL(2, \boldsymbol{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d\in\boldsymbol{C} \text{ ve } ad-bc\neq 0 \right\}$$

kümesi ile Aut(Σ) arasında oldukça sıkı bir ilişki vardır.

$$\theta : GL(2, \boldsymbol{C}) \longrightarrow \text{Aut}(\Sigma),\ \theta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T,\quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçiminde tanımlanan θ dönüşümü bir grup homomorfizmdir. Gerçektende her bir M, $N\in GL(2, \boldsymbol{C})$ için

$$\theta(NM) = U\circ T = \theta(N)\circ\theta(M)$$

dir.

Üstelik Aut(Σ) tanımı gereği θ bir epimorfizmdir. θ dönüşümünün çekirdeği ise

$$\boldsymbol{K} = \ker(\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\} \right\} = \{ \lambda I \mid \lambda\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\}\}$$

dır. Dolayısıyla,

"M, $N \in GL(2,\boldsymbol{C})$ aynı T dönüşümünü belirtir $\Leftrightarrow$ $M^{-1}N \in \boldsymbol{K}$, yani belli bir $\lambda \neq 0$ için $N = \lambda M$ dir."

Eğer birinci izomorfizm teoremi uygulanırsa;

$$\mathrm{Aut}(\Sigma) \cong GL(2, \boldsymbol{C}) \,/\, \boldsymbol{K} = GL(2, \boldsymbol{C}) \,/\, \{\, \lambda \mathrm{I} \mid \lambda \neq 0\}$$

olur. $GL(2, \boldsymbol{C}) \,/\, \boldsymbol{K}$ bölüm grubuna projektif genel lineer grup denir ve $PGL(2, \boldsymbol{C})$ ile gösterilir. Bu nedenle bazı durumlarda T dönüşümü yerine T yi veren matrisi de kullanabiliriz.

Her M, $N \in GL(2, \boldsymbol{C})$ için $\det(NM) = \det(N) \cdot \det(M)$ olduğundan

$$\det\colon GL(2, \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$$

dönüşümü bir homomorfizmdir. Bu homomorfizmin çekirdeği, $GL(2, \boldsymbol{C})$ nin normal alt grubudur ve $SL(2, \boldsymbol{C})$ ile gösterilir, yani

$$SL(2, \boldsymbol{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \boldsymbol{C} \text{ ve } ad-bc = 1 \right\}$$

dir.

det fonksiyonu üzerine olduğundan $GL(2, \boldsymbol{C}) / SL(2, \boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{C}^*$ dır.

Eğer $N \in GL(2, \boldsymbol{C})$ ise $\det(N) = \lambda^2$ ve $M \in SL(2, \boldsymbol{C})$ olmak üzere

$$N = \lambda M$$

biçiminde yazılabilir ve üstelik $\theta(N) = \theta(M)$ dir. Bu nedenle Σ nın her bir otomorfizmi,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçiminde yazılabilir, yani

$$\theta(SL(2, \boldsymbol{C})) = \mathrm{Aut}\ (\Sigma)$$

dır ve $\theta(SL(2, \boldsymbol{C})) = PSL(2, \boldsymbol{C})$ olarak yazılır.

1.2.5. Konformluk ve Doğrusal Dönüşümler.

S_1 ve S_2 iki yüzey olmak üzere $f\colon S_1 \to S_2$ dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in S_1$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 da bir *konform dönüşümdür* denir.

Aşağıdaki teorem bir dönüşüm konform dönüşüm olduğunu göstermekte oldukça kullanışlı bir teoremdir.

Teorem. f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu z_0 noktasında bir konform dönüşümdür. (Başkan 1998)

Bu teoremi kullanarak $PSL(2, \boldsymbol{C})$ nin öğelerinin, yani Σ nın otomorfizmlerin konform dönüşümler olduğunu görelim. $T \in PSL(2, \boldsymbol{C})$ dönüşümünü $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçiminde alalım. Bu durumda

$$T'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

ve böylece her bir $z \in \boldsymbol{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\}$ için $T'(z) \neq 0, \infty$ olduğundan T dönüşümü $\boldsymbol{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\}$ üzerinde konformdur.

Şimdi T nin Σ nın tamamında konform olduğunu görelim. Bunun için aşağıdaki halleri dikkate alalım.

i. $z = \infty$ ve $T(z) \neq \infty$ olsun. Bu durumda $c \neq 0$ dır. $J(z) = \dfrac{1}{z}$ olmak üzere

$$U = T \circ J$$

dönüşümü $U(z) = \dfrac{a+bz}{c+dz}$ dir ve üstelik $U'(0) = -\dfrac{1}{c^2} \neq 0, \infty$ olduğundan, U dönüşümü $z = 0$ noktasında konform, dolayısıyla da T dönüşümü $z = \infty$ da konformdur.

ii. $z = \infty$ ve $T(z) = \infty$ ise $c = 0$ ve $a \neq 0$ dır, bu durumda

$$V = J \circ T \circ J$$

dönüşümü $V(z) = \dfrac{c+dz}{a+bz}$ biçimindedir ve dolayısıyla $V'(0) = \dfrac{1}{a^2} \neq 0, \infty$ olur. Bu ise V nin $z = 0$ noktasında, dolayısıyla da T nin $z = \infty$ da konform olduğunu gösterir.

iii. $z = -\dfrac{d}{c} \neq \infty$ ve $T(z) = \infty$ olması halinde $c \neq 0$ dır, bu durumda

$$W = J \circ T$$

dönüşümü $W(z) = \dfrac{cz+d}{az+b}$ biçimindedir ve dolayısıyla $W'(-\dfrac{d}{c}) = -c^2 \neq 0, \infty$ olduğundan W, $z = -\dfrac{d}{c}$ noktasında konformdur. Böylece T, $z = \infty$ da konformdur.

1.2.6. Çemberler ve Doğrusal Dönüşümler.

$S^2 \subset \boldsymbol{R}^3$ bir küre ve Π, $\boldsymbol{R}^3$ de bir düzlem olsun. $S^2 \cap \Pi$ kümesine S^2 küresinde bir *çember* denir.

$S^2 \cap \Pi$, S^2 küresinde bir çember olduğunda $|S^2 \cap \Pi|>1$ dir, yani Π düzlemi S^2 küresine teğet değildir.

Şimdi aşağıda tanımlanacak olan izdüşüm fonksiyonu ile, S^2 küresinde herhangi bir çember yardımıyla düzlemdeki bir çemberin nasıl elde edilebileceğini görelim. Bunun için ilk olarak Σ genişletilmiş karmaşık düzlemini $\boldsymbol{R}^3$ deki $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ küresi ile özdeşleyelim.

$\boldsymbol{C}$ düzlemini $\boldsymbol{C} = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}\}$ olarak düşünelim ve S^2 küresinin kuzey kutbunu $N = (0, 0, 1)$ noktası ile gösterelim. $\boldsymbol{C}$ kompleks düzlemi üzerindeki herhangi bir P noktasını kürenin kuzey kutbu olan N noktasına bir doğru ile birleştirdiğimizde bu doğru, P, Q ve N doğrusal olacak şekilde küre üzerinde bir $Q \in S^2 \setminus \{N\}$ noktasından geçer. Böylece P noktası $\boldsymbol{C}$ karmaşık düzlemini taradığında doğrunun diğer ucu, N kuzey kutbundan geçmek üzere, Q noktası da N hariç kürenin tüm noktalarını tarar. Dolayısıyla

$$\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \boldsymbol{C}$$

dönüşümü birebir ve örten bir dönüşümdür. Diğer yandan $z = x + iy$ olmak üzere $P = (x, y, 0)$ ve $Q = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$ olarak alırsak P, Q ve N doğrusal olduğundan

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1-x_3}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikler yardımıyla $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \boldsymbol{C}$ dönüşümünü

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Diğer yandan, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ eşitliğini kullanarak

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{2-2x_3}{(1-x_3)^2} = \frac{2}{(1-x_3)}$$

ve böylece π^{-1}: C $\to S^2\setminus\{N\}$ dönüşümü de

$$x_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+1},\quad x_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+1},\quad x_3 = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

eşitlikleri ile verilir. O halde π ve π^{-1} dönüşümleri süreklidir ve dolayısıyla π dönüşümü bir homeomorfizmdir. Son olarak, $\pi(N) = \infty$ olarak tanımlayarak, $\pi : S^2\setminus\{N\} \to \boldsymbol{C}$ dönüşümünü $\pi : S^2 \to \Sigma$ dönüşümüne genişletmiş oluruz.

$\pi : S^2 \to \Sigma$ dönüşümü birebir ve üzerine dönüşüm olduğundan *Σ da bir çemberi* S^2 küresindeki herhangi bir çemberin π altındaki görüntüsü olarak tanımlayabiliriz. $C\in\Sigma$ çemberi Π düzleminde,

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\boldsymbol{R})$$

eşitliği ile ifade edebiliriz, bu eşitlikte

$$x_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+1},\quad x_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+1},\quad x_3 = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

değerleri yerine yazılırsa, $z = x + iy$ olmak üzere

$$2\alpha x + 2\beta y + \gamma\,(\,|\,z\,|^2 - 1\,) = \delta\,(\,|\,z\,|^2 + 1\,)$$

eşitliği elde edilir. Eğer $a = \gamma - \delta\in\boldsymbol{R}$, $b = \alpha - i\beta\in\boldsymbol{C}$, $c = -(\gamma + \delta)\in\boldsymbol{R}$ olarak alınırsa C çemberi

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\,\bar{z} + c = 0 \qquad (1)$$

eşitliği ile ifade edilmiş olur. Eğer yukarıdaki denklemde $z = x + iy$ yazarsak C çemberi

$$ax^2 + ay^2 + 2\alpha x + 2\beta y + c = 0 \qquad (2)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. $|S^2\cap\Pi|>1$ olması $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ olacak şekilde bir $(x_1, x_2, x_3)\in\Pi$ noktasının varlığını gerektirir. Bu ise $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > \delta^2$ eşitsizliğine denktir. a, b, c terimlerini dikkate alırsak bu eşitsizlik $b\bar{b} > ac$ eşitsizliğine denk olur. Eğer $b\bar{b} > ac$ ise (1) eşitliği her zaman Σ da bir çember belirtir. $a \neq 0$ olmak üzere (2) eşitliğini

$$\left(x + \frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{a}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - ac}{a^2},$$

biçiminde düzenlersek C çemberi merkezi $(-\frac{\alpha}{a}, -\frac{\beta}{a})$ ve yarıçapı $\frac{(\alpha^2 + \beta^2 - ac)^{1/2}}{a}$ olan bir çember olduğunu görürüz. Bunu kompleks koordinatlarda ifade edecek olursak, C nin merkezi $-\frac{\bar{b}}{a}$, yarıçapı $\frac{(b\bar{b} - ac)^{1/2}}{a}$ dir.

Eğer $a = 0$ ise (1) eşitliği bir doğru denklemi gösterir ki bu doğruları yarıçapı sonsuz olan çemberler olarak düşüneceğiz.

Teorem. $PSL(2, \boldsymbol{C})$ grubu çemberler ailesini invaryant bırakır, yani her $T \in PSL(2, \boldsymbol{C})$ ve her C çemberi için $T(C)$ de bir çemberdir. (Conway 1995)

İspat. Herhangi bir çemberin denkleminin $a, c \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \quad (1)$$

biçiminde olduğunu ve bu çemberi merkezinin $-\dfrac{\bar{b}}{a}$, yarıçapının da $\dfrac{(b\bar{b} - ac)^{1/2}}{a}$ olduğunu yukarıda belirtmiştik. Bu çembere $w = T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ dönüşümünü uygulayalım.

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad \bar{z} = \frac{-\bar{d}\bar{w} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{w} - \bar{a}}$$

olduğundan, bu değerler (1) eşitliğinde yerine konulursa

$$[Ad\bar{d} - B\bar{c}d - \bar{B}c\bar{d} + Cc\bar{c}]w\bar{w} + [A\bar{b}d - B\bar{a}d + \bar{B}\bar{b}c - C\bar{a}c]w +$$
$$[-Ab\bar{d} + Bb\bar{c} + \bar{B}a\bar{d} - Ca\bar{c}]\bar{w} + Ab\bar{b} - B\bar{a}b - \bar{B}a\bar{b} + Ca\bar{a} = 0$$

elde edilir. Bu son eşitlikte a ve c gerçel sayılar olduğundan $w\bar{w}$ nin katsayısı ve sabit terimi gerçeldir. w ile $\bar{w}$ nin katsayıları da birbirinin eşleniği olduğundan bu eşitlik bir çember belirtmektedir.

1.2.7. Geçişlilik ve Doğrusal Dönüşümler

G bir grup, Ω bir küme olmak üzere her $\alpha, \beta \in \Omega$ için $g(\alpha) = \beta$ olacak biçimde belli bir $g \in G$ varsa G grubu Ω kümesi üzerinde *geçişli* hareket eder denir.

Daha genel olarak, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ ve $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$, Ω kümesinin farklı öğelerinin k-lıları olmak üzere $j = 1, 2, \ldots, k$ için $g(\alpha_j) = \beta_j$ olacak biçimde belli bir $g \in G$ varsa G grubu Ω kümesi üzerinde *k-geçişli* hareket eder denir.

$PGL(2, \boldsymbol{C})$ grubu Σ üzerinde üç geçişlidir, yani z_1, z_2, z_3 noktaları Σ da farklı üç nokta ise $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = \infty$ olacak biçimde bir tek T doğrusal dönüşümü vardır. Gerçektende $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$ ve $T(z) = \dfrac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}$ olarak alınırsa, T dönüşümü z_1, z_2, z_3 noktalarını sırasıyla 0,1, ∞ a resmeder. $ad - bc = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) \neq 0$ ve T dönüşümü $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçiminde olduğundan $PGL(2, \boldsymbol{C})$ nin bir elemanıdır. Eğer $z_1 = \infty$ ise $z_1 \to \infty$ için limit alınırsa $T(z) = -\dfrac{(z_2 - z_3)}{(z_3 - z)}$, $z_2 = \infty$ ise $z_2 \to \infty$ için limit alınırsa $T(z) = -\dfrac{(z - z_1)}{(z_3 - z)}$ ve son olarak $z_3 = \infty$ ise $z_3 \to \infty$ için limit alınırsa $T(z) = -\dfrac{(z - z_1)}{(z_1 - z_2)}$ olur. Her halde $T \in PGL(2, \boldsymbol{C})$ dönüşümü z_1, z_2, z_3 noktalarını sırasıyla 0, 1 ve ∞ noktalarına resmeder.

Şimdi T dönüşümünün bir tek olduğunu görelim. Eğer $U \in PGL(2, \boldsymbol{C})$ dönüşümü de z_1, z_2, z_3 noktalarını sırasıyla 0, 1 ve ∞ noktalarına resmediyorsa UT^{-1} dönüşümü 0, 1, ∞ noktalarını sabit bırakır. Eğer $UT^{-1}(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ olarak alınırsa, $UT^{-1}(0) = \dfrac{a0+b}{c0+d} = 0$, yani $b = 0$, $UT^{-1}(1) = \dfrac{a1+b}{c1+d} = \dfrac{a}{c+d} = 1$, yani $a = c + d$ ve $UT^{-1}(\infty) = \dfrac{b}{d} = \infty$ eşitliğinden $d = 0$ ve böylece $a = c$ olur. O halde $UT^{-1}(z) = z$ özdeşlik dönüşümüdür, yani $U = T$ dir.

Böylece özdeşlikten farklı bir doğrusal dönüşümün üç tane sabit noktasının olamayacağı sonucu da elde edilmiş olur.

(z_1, z_2, z_3) ve (w_1, w_2, w_3), Σ daki farklı noktaların oluşturduğu üçlüler ise $T(z_j) = w_j$ $(j = 1, 2, 3)$ olacak biçimde bir tek T doğrusal dönüşümü vardır. Gerçektende, $U, V \in PGL(2, \boldsymbol{C})$ ve $j = 1, 2, 3$ için $U(z_j) = V(w_j) = 0, 1, \infty$ ise $T = V^{-1}U \in PGL(2, \boldsymbol{C})$ dönüşümü de $j = 1, 2, 3$ için z_j noktalarını w_j noktalarına resmeder. Eğer $S \in PGL(2, \boldsymbol{C})$ ve $j = 1, 2, 3$ için z_j noktalarını w_j noktalarına resmediyorsa U ve VS dönüşümlerinin her ikisi de z_j noktalarını sırasıyla 0, 1, ∞ noktalarına resmeder. O halde, $U = VS$ ve buradan $S = V^{-1}U = T$ dir. Dolayısıyla, eğer T doğrusal dönüşümü Σ nın üç noktasını sabit bırakıyorsa T özdeşlik dönüşümdür. T nin sabit bıraktığı noktalar z_1, z_2, z_3 ise T ve I dönüşümlerinin ikisi içinde $T(z_j) = I(z_j) = z_j$ $(j = 1, 2, 3)$ olur, bu özellikteki dönüşüm bir tek olduğundan $T = I$ dir.

1.2.8. Çapraz Oran ve Doğrusal Dönüşümler.

z_0, z_1, z_2, z_3 noktaları Σ nın farklı dört noktası olmak üzere,

$$\lambda = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_0)}$$

değerine z_0, z_1, z_2, z_3 noktalarının *çapraz oranı* denir. Doğrusal dönüşümler dört noktanın çapraz oranını invaryant bırakır. Gerçektende, $a, b, c, d \in \boldsymbol{C}$, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ise $T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)$ noktalarının çapraz oranı

$$\kappa = \frac{\left(\dfrac{az_0 + b}{cz_0 + d} - \dfrac{az_1 + b}{cz_1 + d}\right)\left(\dfrac{az_2 + b}{cz_2 + d} - \dfrac{az_3 + b}{cz_3 + d}\right)}{\left(\dfrac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \dfrac{az_2 + b}{cz_2 + d}\right)\left(\dfrac{az_3 + b}{cz_3 + d} - \dfrac{az_0 + b}{cz_0 + d}\right)}$$

$$= \left[\frac{(az_0 + b)(cz_1 + d) - (az_1 + b)(cz_0 + d)}{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_1 + d)}\right]\left[\frac{(az_2 + b)(cz_3 + d) - (az_3 + b)(cz_2 + d)}{(az_3 + b)(cz_0 + d) - (az_0 + b)(cz_3 + d)}\right]$$

$$= \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_0)} = \lambda$$

dır.

1.2.9. İnversiyon ve Doğrusal Dönüşümler.

C, Σ da denklemi $az\bar{z} + bz + \bar{b}\,\bar{z} + c = 0$ ($a, c \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{C}$) olan bir çember olmak üzere C nin merkezi p ve yarıçapı r olsun. Her bir $z \in \boldsymbol{C} \setminus \{p\}$ noktası için z ve p den geçen doğru üzerinde

$$|z - p| \,.\, |w - p| = r^2$$

özelliğinde bir tek w noktası vardır. w noktasına z noktasının C çemberine göre *inversi* denir ve $I_C(z) = w$ olarak tanımlanan I_C dönüşümüne de C çemberine göre *inversiyon* adı verilir.

$z \to p$ için $w \to \infty$ ve $z \to \infty$ için $w \to p$ olduğundan $I_C(p) = \infty$ ve $I_C(\infty) = p$ olarak tanımlayarak I_C yi Σ nın bir dönüşümü olarak düşünebiliriz. Bu durumda $I_C^2 = I$ ve

$$\text{“}I_C(z) = z \Leftrightarrow z \in C\text{“}$$

olduğu açıktır.

I_C dönüşümü, $p = -\dfrac{\overline{b}}{a}$ ve $r^2 = \dfrac{b\overline{b} - ac}{a^2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$I_C\,(z) = -\frac{\overline{b}\,\overline{z} + c}{a\overline{z} + b}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Teorem. C, Σ da bir çember ve T bir doğrusal dönüşüm ise $T(C) = C^*$ da Σ bir çemberdir ve üstelik

$$I_{C^*} = T\,I_C T^{-1}$$

dir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. Eğer $z \in C^*$ ise $I_{C^*}\,(z) = z$ ve üstelik $T^{-1}(z) \in C$ olduğundan $I_C\,T^{-1}(z) = T^{-1}(z)$ dir. Eğer S dönüşümünü $S = T\,I_C T^{-1}\,I_{C^*}\,(z)$ olarak tanımlarsak her $z \in C^*$ için

$$\mathrm{S(z)} = T\,I_C T^{-1}\,I_{C^*}\,(z) = T\,I_C T^{-1}(\mathrm{z}) = TT^{-1}\,(z) = z$$

dir. Dolayısıyla S dönüşümü C^* çemberini sabit bırakır. S dönüşümü iki otomorfizm ve iki anti otomorfizmin bileşimi olduğundan bir otomorfizmdir dolayısıyla $S \in PGL(2, \boldsymbol{C})$ dir. S dönüşümü C^* çemberini sabit bıraktığından Σ nın en az üç noktasını sabit bırakır, dolayısıyla S dönüşümü özdeşlik dönüşümdür. Böylece

$$T\,I_C T^{-1} = I_{C^*}{}^{-1} = I_{C^*}$$

olur, dolayısıyla T dönüşümü C ye göre invers olan nokta çiftlerini $T(C) = C^*$ ye göre invers olan nokta çiftlerine resmeder.

1.2.10. Eşleniklik sınıfları ve Dönüşümlerin Sınıflandırılması

S ve T iki doğrusal dönüşüm olmak üzere STS^{-1} dönüşümüne T nin *bir değişimi (transform)* denir.

A bir küme ve $T(A) = B$ ise $STS^{-1}(S(A)) = S(B)$ yani STS^{-1} dönüşümü $S(A)$ kümesini $S(B)$ kümesine resmeder. Dolayısıyla T nin STS^{-1} değişimi sadece düzlemdeki koordinatların değişimine sebep olur.

Tanım. G bir grup ve $g, h \in G$ olsun. Eğer $g = aha^{-1}$ olacak biçimde bir $a \in G$ öğesi varsa g ile h öğeleri G de *eşleniktir* denir.

Eşleniklik bir denklik bağıntısıdır ve denklik bağıntısının G de ayırdığı denklik sınıflarına *eşleniklik sınıfı* denir. İki eşlenik öğe aynı geometrik özelliklere (örneğin; sabit nokta sayısı ve mertebe gibi) sahip olduğundan bir grubu eşleniklik sınıflarına ayırmak oldukça önemlidir.

T bir doğrusal dönüşüm olmak üzere $T(z) = z$ özelliğindeki noktalara T dönüşümünün *sabit noktaları* denir.

Eğer $T(z) = z$ ise S(z) noktası $V = STS^{-1}$ dönüşümünün sabit noktası olur,

$$V(S(z)) = STS^{-1}(S(z)) = ST(z) = S(z)$$

yani V, T nin eşleniği ise V nin sabit noktaları $S(z)$ dir.

Bazı hallerde keyfi sabit noktaları olan herhangi bir T dönüşümüyle işlemler yapmak yerine sabit noktaları 0, ∞, i v.b. olan dönüşümlerle işlemler yapmak daha cazip olabilir. Bu nedenle her bir dönüşümün sabit noktalarına göre eşleniklik sınıflarını oluşturmak yararlı olacaktır.

İlk olarak bir doğrusal dönüşümün sabit noktalarını belirleyelim. Bunun için $ad - bc = 1$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

dönüşümünü dikkate alalım. $T(z) = z$ eşitliğinden

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ikinci derece bir eşitlik olduğundan T doğrusal dönüşümünün Σ da en fazla iki sabit noktasının olduğu görülür. Bu eşitliğin determinantı, $ad - bc = 1$ olduğundan,

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4$$

dir. T dönüşümünün *izi*

$$\text{iz}(T) = a + d$$

olarak tanımlanır ve bir dönüşümün sabit noktalarının sayısı dönüşümün izinin karesine bağlıdır.

i. $\text{iz}^2(T) = (a + d)^2 = 4$ olması halinde $\Delta = 0$ dır ve bu durumda dönüşümün bir tek sabit noktası vardır.

ii. $\text{iz}^2(T) = (a + d)^2 > 4$ olması halinde $\Delta > 0$ olacağından dönüşümün farklı iki sabit noktası vardır.

iii. $\mathrm{iz}^2(T) = (a+d)^2 < 4$ olması halinde $\Delta < 0$ olacağından dönüşümün yine iki farklı sabit noktası olur.

O halde,

$(a+d)^2 \neq 4$ ise T nin Σ da iki farklı sabit noktası,

$(a+d)^2 = 4$ ise T nin Σ da bir sabit noktası

vardır.

Şimdi dönüşümleri sabit noktalarına bağlı olarak eşleniklik sınıflarına ayıralım. $\lambda \in \boldsymbol{C} \backslash \{0\}$ olmak üzere

$$U_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z, & \lambda \neq 1 \\ z+1, & \lambda = 1 \end{cases}$$

dönüşümünü dikkate alalım. T özdeşlikten farklı bir doğrusal dönüşüm ise belli bir $\lambda \in \boldsymbol{C} \backslash \{0\}$ için T ve U_λ eşleniktir. Bunu görelim, T dönüşümünün tek sabit noktasının z_0 olduğunu varsayalım. Bu durumda $S(z_0) = \infty$ olacak şekilde $S \in PSL(2, \boldsymbol{C})$ vardır ve STS^{-1} dönüşümü de sadece ∞ u sabit bırakır, yani belli bir $t \in \boldsymbol{C} \backslash \{0\}$ için $STS^{-1}(z) = z + t$ dir. Eğer $V(\mathrm{z}) = \frac{z}{t}$ olarak alınırsa $VSTS^{-1}V^{-1}(z) = z + 1$ olur. Dolayısıyla

$$(VS)T\,(VS)^{-1} = U_1$$

olup T ve U_1 eşleniktir. Eğer T dönüşümünün sabit noktaları z_1, z_2 ise $W(z_1) = 0$ ve $W(z_2) = \infty$ olacak biçimde $W \in PSL(2, \boldsymbol{C})$ vardır ve WTW^{-1} dönüşümü de 0 ve ∞ noktalarını sabit bırakır. Dolayısıyla da belli bir $\lambda \in \boldsymbol{C} \backslash \{0, 1\}$ için

$$WTW^{-1} = U_\lambda$$

olduğu açıkça görülür.

Diğer yandan "U_κ, U_λ ya eşleniktir $\Leftrightarrow \kappa = \lambda$ veya $\kappa = \frac{1}{\lambda}$ dır." Gerçektende, U_1 dönüşümü sadece ∞ noktasını sabit bıraktığından her $S \in PSL(2, \boldsymbol{C})$ için SU_1S^{-1} dönüşümü sadece $S(\infty)$ noktasını sabit bırakır. Böylece $\lambda \neq 1$ olmak üzere U_λ dönüşümü 0 ve ∞ noktalarını sabit bıraktığından, U_1 dönüşümü U_λ $(\lambda \neq 1)$ dönüşümü ile eşlenik olamaz.

Eşleniklik ile dönüşümlerin izlerinin kareleri arasında da bir ilişki vardır. T_1 ve T_2 iki doğrusal dönüşüm olmak üzere "T_1 ve T_2 eşleniktir $\Leftrightarrow$ $\mathrm{iz}^2(T_1) = \mathrm{iz}^2(T_2)$" dir, yani iz^2 fonksiyonu eşleniklik bağıntısı altında değişmezdir.

Eğer κ, $\lambda \neq 1$ olmak üzere U_κ, U_λ dönüşümüne eşlenik ise $\mathrm{iz}^2(U_\kappa) = \mathrm{iz}^2(U_\lambda)$ ve böylece

$$\kappa + \frac{1}{\kappa} + 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$

dır. Bu eşitlik $\kappa = \lambda$ veya $\kappa = \frac{1}{\lambda}$ olduğunu gösterir. Tersine $J(z) = \frac{1}{z}$ olmak üzere

$$J\, U_\kappa\, J^{-1} = U_{1/\kappa}$$

olduğundan U_κ ve $U_{1/\kappa}$ eşleniktir.

Dikkat edilirse T, belli bir U_λ ($\lambda \in \boldsymbol{C}\backslash\{0\}$) ile eşlenik ise T aynı zamanda $U_{1/\lambda}$ ya eşlenik olacağından λ, T dönüşümünün eşleniklik sınıfını bir tek şekilde belirleyemez. Bu nedenle T nin eşleniklik sınıfını belirlemek için $\{\lambda, 1\backslash\lambda\}$ çifti dikkate alınır, bu çifte *T dönüşümünün çarpanı* denir. O halde, "T_1 ve T_2 doğrusal dönüşümleri eşleniktir $\Leftrightarrow$ T_1 ve T_2 aynı çarpana sahiptirler." olduğu açıktır. Dolayısıyla bir dönüşümün çarpanı da eşleniklik sınıflarının belirlenmesinde iz^2 fonksiyonu kadar etkilidir. Bu iki değişmez arasındaki ilişkiyi

$$\mathrm{iz}^2(T) = \mathrm{iz}^2(U_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$

eşitliği ile belirtebiliriz. λ ve $\frac{1}{\lambda}$ sayılarının

$$z^2 + (2 - \mathrm{iz}^2(T))\, z + 1 = 0$$

ikinci derece denklemin kökleri olduğu açıktır.

Şimdi doğrusal dönüşümleri sabit noktalarına göre isimlendirelim;

"$z_0 \in \Sigma$ noktası T dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır $\Leftrightarrow$ $\mathrm{iz}^2(T) = 4$ $\Leftrightarrow \lambda = 1$" olması halinde T dönüşümüne *parabolik dönüşüm* denir.

Dolayısıyla $V(z_0) = \infty$ özelliğindeki belli bir V dönüşümü için $T = V^{-1} U_1 V$ olarak yazılabilir. Her $z \in \Sigma$ için

$$\lim_{n\to\infty} U_1^{\,n}(z) = \lim_{n\to\infty} (z + n) = \infty$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} T^n(z) = \lim_{n\to\infty} V^{-1}\, U_1{}^n\, V(z) = V^{-1}(\infty) = z_0$$

olur. Böylece her bir $z\in\Sigma$ noktasının T^n dönüşümleri ile resimleri, n sayısı büyüdükçe, T dönüşümünün sabit noktası olan z_0 a doğru yaklaşırlar.

Eğer T parabolik değilse T nin z_1 ve z_2 gibi iki sabit noktası vardır. $V(z) = \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ olarak alınırsa bu dönüşüm T nin sabit noktalarını, sırasıyla, 0 ve ∞ noktalarına resmeder. Böylece belli $\lambda \neq 0, 1$ için $VTV^{-1} = U_\lambda$ dönüşümü 0 ve ∞ noktalarını sabit bırakır. O halde,

$$U_\lambda{}^n(z) = \lambda^n z$$

dir.

i. $|\lambda| < 1$ olması halinde her $z \neq \infty$ için $\lim_{n\to\infty} U_\lambda{}^n(z) = 0$ ve böylece her $z \neq z_2$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n(z) = z_1,$$

ii. $|\lambda| > 1$ olması halinde ise $z \neq 0$ için $\lim_{n\to\infty} U_\lambda{}^n(z) = \infty$ ve böylece her $z \neq z_1$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n(z) = z_2.$$

Böylece $|\lambda| \neq 1$ olması halinde $z \neq z_1, z_2$ noktalarının her birisi, n sayısı büyüdükçe T^n dönüşümleri ile T nin sabit noktalarının birinden diğerine doğru yaklaşırlar. Bu şekildeki doğrusal dönüşümlere, λ nın gerçel ve pozitif olması halinde *hiperbolik dönüşüm* diğer hallerde *loksodromik dönüşüm* denir.

Eğer $|\lambda| = 1$ ise $U_\lambda(z) = \lambda z$ dönüşümü Σ nın bir dönmesidir. Bu durumda $\lambda = e^{i\theta}$ olmak üzere $U_\lambda(z) = e^{i\theta} z$ olarak yazılabilir. $z \neq 0, \infty$ için $U_\lambda{}^n(z)$ nin limitinin olmadığı açıktır. Dolayısıyla $z \neq z_1, z_2$ için $T^n(z)$ nin de limiti yoktur. Bu özellikteki T dönüşümüne *eliptik dönüşüm* denir.

Buna göre, "T U_λ ile eşleniktir $\Leftrightarrow \mathrm{iz}^2(T) = \mathrm{iz}^2(U_\lambda)$" ve üstelik $\mathrm{iz}^2(U_\lambda) = \lambda + \dfrac{1}{\lambda} + 2$ olduğundan

$$T \text{ eliptik} \Leftrightarrow 0 \leq \mathrm{iz}^2(T) < 4$$

$$T \text{ parabolik} \Leftrightarrow \mathrm{iz}^2(T) = 4$$

$$T \text{ hiperbolik} \Leftrightarrow \mathrm{iz}^2(T) > 4$$

$$T \text{ loksodromik} \Leftrightarrow \mathrm{iz}^2(T) < 0 \text{ veya } \mathrm{iz}^2(T) \notin \boldsymbol{R}.$$

T bir doğrusal dönüşüm olmak üzere $T^m = I$ özelliğindeki en küçük *m* pozitif tamsayısına *T dönüşümünün mertebesi* ya da *periyodu* denir. Eğer bu özellikte bir *m* sayısı yok ise *T* dönüşümüne *sonsuz periyotludur* denir.

Eğer *T* özdeşlikten farklı sonlu periyotlu bir dönüşüm ise *T* eliptik bir dönüşümdür. Gerçektende, *T* dönüşümü belli bir U_λ ile eşlenik ise her bir $n \in \boldsymbol{Z}$ için T^n de $U_\lambda{}^n$ ile eşleniktir, ve böylece U_λ sonlu periyotludur. Eğer $\lambda = 1$ ise $U_1^n(z) = z + n$ olur ki bu durumda U_1 dönüşümü sonsuz periyotludur. O halde $\lambda \neq 1$ dir. Böylece $U_\lambda^n(z) = \lambda^n z$ olur, *T* sonlu periyotlu olduğundan *T* nin periyodunu *m* olarak alırsak, $U_\lambda^m = I$ olur, bu ise $\lambda^m = 1$ ve dolayısıyla $|\lambda| = 1$ olduğunu, yani *T* dönüşümünün eliptik olduğunu gösterir.

O halde, eliptik olmayan dönüşümlerin her birisi sonsuz periyotludur diyebiliriz.

Bununla birlikte her bir *T* eliptik dönüşümü sonlu periyotlu olmak zorunda değildir. $\theta \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere $\lambda = e^{i\theta}$ olarak alınırsa "U_λ eliptik $\Leftrightarrow$ θ, 2π nin bir tam katı değildir" ve "U_λ sonlu periyotludur $\Leftrightarrow$ θ, 2π nin bir rasyonel katıdır." olduğu dikkate alınırsa θ nın 2π nin bir irrasyonel katı olması halinde U_λ nın sonsuz periyotlu bir eliptik dönüşüm olduğu görülür.

Şimdi $T(z)$ olmak üzere bir *T* dönüşümünün normal biçimlerini belirtebiliriz. Eğer *T* sabit noktası z_1 olan bir parabolik dönüşüm ise bu dönüşüm,

$$\frac{1}{T(z)-z_1} = \frac{1}{z-z_1} + c$$

biçiminde, eğer *T* sabit noktaları z_1 ve z_2 olan bir parabolik olmayan bir dönüşüm ise bu dönüşüm,

$$\frac{T(z)-z_1}{T(z)-z_2} = \kappa\, \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

biçimindedir. *T* nin izi ve çarpanı,

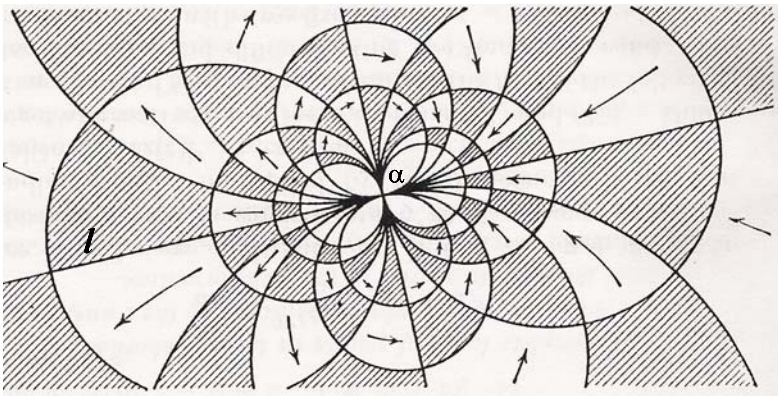
$$\kappa + \kappa^{-1} = \lambda^2 - 2,\ \ \kappa^{1/2} + \kappa^{-1/2} = \lambda$$

bağıntılarını gerçekler. Bu bağıntılar T nin parabolik dönüşüm olması halinde de ($\kappa = 1$ olarak tanımlanarak) gerçeklenir.

Bir T dönüşümü tarafından kendi üzerine resmedilen çember veya doğruya T dönüşümünün *sabit çemberi* veya *sabit doğrusu* denir.

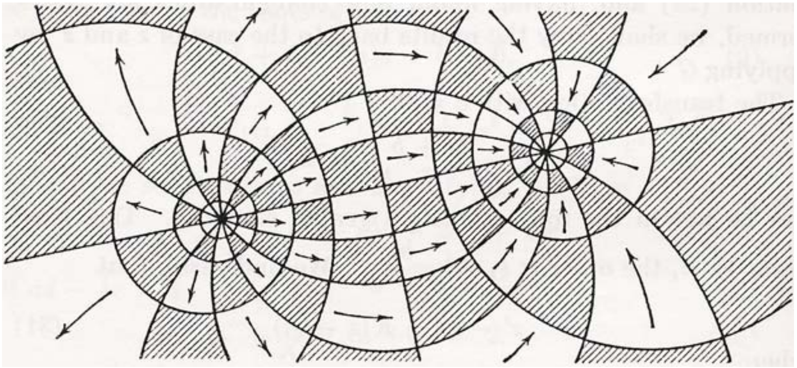
Şimdi doğrusal dönüşümlerin sabit çemberleri ve sabit doğrularını belirleyeceğiz.

1. Eğer T parabolik bir dönüşüm ve α, T nin sabit noktası ise α noktasından geçen öyle bir l doğrusu vardır ki T nin her bir sabit çemberi bu doğruya α noktasında teğettir. Tersine α noktasında bu doğruya teğet olan her bir çember de T dönüşümünün sabit çemberidir. T dönüşümü her bir sabit çemberin içinde kalan bölgeyi invaryant bırakır. Sabit çemberler ailesine dik olan ve α noktasında birbirlerine teğet olan bir başka çember ailesi daha vardır ve bu aile de T ile kendi üzerine resmedilir.



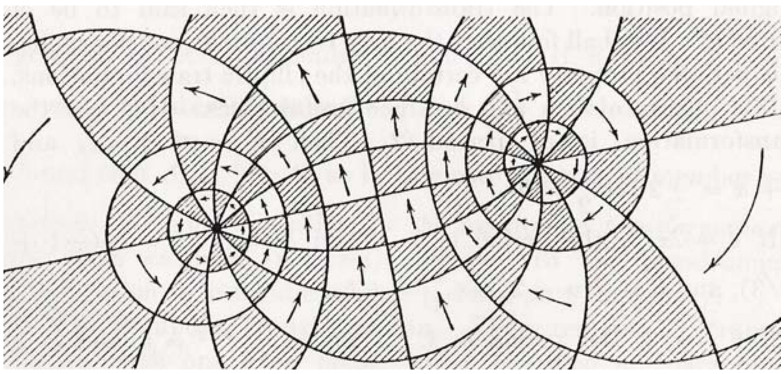
Şekil 1.2.1. Parabolik Dönüşümlerin Sabit Çemberleri

2. Eğer T hiperbolik bir dönüşüm ise T nin sabit noktalarından geçen her bir çember bir sabit çemberdir ve tersine her bir sabit çember T nin sabit noktalarından geçer. Dolayısıyla T dönüşümü her bir sabit çemberin içini invaryant bırakır. Sabit çemberler ailesine dik olan çemberlerin ailesi T dönüşümü ile kendi üzerine resmedilir.



Şekil 1.2.2. Hiperbolik Dönüşümlerin Sabit Çemberleri

3. Eğer T eliptik bir dönüşüm ise T nin sabit noktalarından geçen her bir çember T dönüşümü ile T nin sabit noktalarından geçen diğer çemberin üzerine resmedilir. Sabit noktalardan geçen çemberler ailesine dik olan çemberler ailesinin her bir elemanı dönüşümün sabit çemberleridir. T dönüşümü her bir sabit çemberin içini invaryant bırakır.



Şekil 1.2.3. Eliptik Dönüşümlerin Sabit Çemberleri

4. Eğer T loksodromik bir dönüşüm ise κ çarpanı gerçel ve negatif olmadıkça sabit çemberler yoktur. Diğer halde ise T nin sabit noktalarından geçen bir çember sabit çemberdir, ancak bu halde T dönüşümü sabit çemberin içini dışına resmeder. Bir loksodromik dönüşüm bir çemberin içini hiçbir zaman invaryant bırakmaz.

1.3. *PSL*(2, ***R***) ve ÖZELLİKLERİ

Doğrusal dönüşümler içinde katsayıları gerçel olan dönüşümler oldukça önemli özelliklere sahiptirler. Bu nedenle $PSL(2, \boldsymbol{C})$ yerine $PSL(2, \boldsymbol{R})$ ve bunun alt gruplarının özellikleri ile ilgileneceğiz. Aşağıdaki teorem $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin $\boldsymbol{U}$ üst yarı düzleminin otomorfizmlerinin bir grubu olduğunu gösterir.

1.3.1. Teorem. Bir T doğrusal dönüşümün üst yarı düzlemi kendi üzerine resmetmesi için gerek ve yeter şart katsayılarının gerçel olmasıdır.(Başkan 1998)

İspat. İlk olarak $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \boldsymbol{C},\ ad - bc = 1)$ dönüşümünün üst yarı düzlemi üst yarı düzleme resmettiğini kabul edelim. İlk olarak $c \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda T ve T^{-1}dönüşümleri sürekli olduğundan $T(\infty) = \dfrac{a}{c}$, $T^{-1}(\infty) = \dfrac{-d}{c}$ ve $T(0) = \dfrac{b}{d}$ olup bu değerlerin hepsi birer gerçel sayıdır. O halde

$$T(z) = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

dönüşümü gerçel katsayılı olduğundan determinantı $\Delta = (ad - bc)c^{-2} = c^{-2}$ ve

$$\mathrm{Im}T(z) = \Delta\ \mathrm{Im}z\ |z + dc^{-1}|^{-2} \text{ dir.}$$

Varsayım gereği hem $\mathrm{Im}T(z)$ hem de Imz pozitif olduklarından $\Delta = c^{-2} > 0$ yani $c \in \boldsymbol{R}$ olmalıdır, dolayısıyla $a, b, d \in \boldsymbol{R}$ olur.

Eğer $c = 0$ ise $T^{-1}(0) = \dfrac{-b}{a}$ olduğundan benzer yöntemle $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ olduğu görülür.

Şimdi tersini görelim. $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ ise $z = x + iy$ $(y > 0)$ olmak üzere her $z \in \boldsymbol{U}$ için $\mathrm{Im}T(z) = y\ |cz + d|^{-2} > 0$ olduğundan $T(z) \in \boldsymbol{U}$ dur.

Diğer yandan $\Delta < 0$ ise $\mathrm{Im}T(z) = y\ |z + dc^{-1}|^{-2} < 0$ olur. Bu ise T doğrusal dönüşümün üst yarı düzlemi alt yarı düzleme resmettiğini gösterir.

Çalışmamızda $PSL(2, \boldsymbol{R})$ ve alt gruplarının üzerinde duracağımızdan şimdi $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin öğelerini sınıflandıracağız ve bu öğelerin eşleniklik sınıflarını inceleyeceğiz. Bunun için aşağıdaki teorem faydalı olacaktır.

1.3.2. Teorem. *i*) $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{U}$ üzerinde geçişlidir.

ii) $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde çifte geçişlidir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. *i*) Eğer $a + ib\in \boldsymbol{U}$ ise a>0 dır. Bu durumda $T\in PSL(2, \boldsymbol{R})$ öğesini $T(z) = az + b$ biçiminde seçersek $T(i) = ai + b$ olur. Böylece $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin hareketi (geçişli) altında i nin yörüngesi $\boldsymbol{U}$ dur. Dolayısıyla $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{U}$ üzerinde geçişli hareket eder, yani belli bir $T\in PSL(2, \boldsymbol{R})$ ile $\boldsymbol{U}$ daki herhangi iki nokta birbirine resmedilebilir.

ii) Şimdi $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde çifte geçişli olduğunu görelim. Bunun için $a>b$ olmak üzere herhangi a, $b\in\boldsymbol{R}$ için S dönüşümünü $S(z) = \dfrac{z-a}{z-b}$ biçiminde seçersek bu dönüşüm (a, b) ikilisini $(0, \infty)$ ikilisine resmeder.

Diğer yandan $T(z) = \dfrac{-1}{z}$ dönüşümü $(0, \infty)$ ikilisini $(\infty, 0)$ a ve $V(z) = z + b$ dönüşümü $(0, \infty)$ ikilisini (∞, b) ye resmeder. Böylece $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin hareketi altında $(0, \infty)$ un yörüngesi (a, b) ikililerinden ibarettir. Bu ise $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde çifte geçişli hareket ettiğini gösterir.

Şimdi $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun öğelerinin eşleniklik sınıflarını belirleyeceğiz. Daha önce $PSL(2, \boldsymbol{C})$ için yapılanlar ile burada yapılacak olanlar benzeşebilir, ancak $PSL(2, \boldsymbol{C})$ de, $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin iki öğesi eşlenik olduğunda bu iki öğe $PSL(2, \boldsymbol{R})$ de eşlenik olmayabilir.

İlk olarak $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin öğelerinin sabit noktalarının neler olduğunu belirleyelim. a, b, c, $d\in\boldsymbol{R}$ olduğu dikkate alınırsa

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

denklemin kökleri T nin sabit noktalarıdır ve üç hal söz konusudur.

1. Hal. T nin $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde bir sabit noktası vardır.

2. Hal. T nin $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde iki farklı sabit noktası vardır.

3. Hal. T nin sabit noktaları gerçel olmayan karmaşık eşlenik sayılardır.

Bu halleri dikkate alarak aşağıdaki sınıflandırmayı yapabiliriz.

1. Parabolik Öğeler ($|a+d| = 2$). T sabit noktası $\alpha \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ olan bir parabolik öğe olsun. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin öğeleri $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ kümesini $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ üzerine resmettiğinden $S(\alpha) = \infty$ olacak şekilde bir $S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ dönüşümü vardır. O halde STS^{-1} dönüşümü de sabit noktası ∞ olan bir parabolik dönüşümdür. Dolayısıyla bu dönüşüm,

$$W = STS^{-1} : z \to z + t \quad (t \in \boldsymbol{R} \backslash \{0\})$$

biçimindedir. Eğer $V(z) = \dfrac{1}{|t|} z$ ise $VTV^{-1}: z \to z \pm 1$ olur (işaret $t<0$ veya $t>0$ olmasına göre değişir). O halde, $z + 1$ ile $z - 1$ dönüşümleri $PSL(2, \boldsymbol{R})$ de eşlenik olmadığından, $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin parabolik öğelerinin iki eşleniklik sınıfı vardır.

2. Hiperbolik Öğeler ($|a+d| > 2$). T sabit noktaları $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ olan bir hiperbolik öğe olsun. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubu $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerinde çifte geçişli olduğundan α noktasını 0 noktasına, β noktasını ∞ noktasına resmeden bir $S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ dönüşümü vardır. O halde daha önce tanımladığımız U_λ dönüşümü

$$U_\lambda(z) = STS^{-1}(z) = \lambda z \quad (\lambda \in \boldsymbol{R} \backslash \{0,1\})$$

biçimindedir. Eğer $B(z) = -\dfrac{1}{z}$ ise $BU_\lambda B^{-1} = U_{1/\lambda}$ olur ki böylece U_λ ile $U_{1/\lambda}$ dönüşümleri $PSL(2, \boldsymbol{R})$ de eşlenik olurlar. "U_κ, U_λ ya eşleniktir $\Leftrightarrow \kappa = \lambda$ veya $\kappa = \dfrac{1}{\lambda}$ dır" olduğundan $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin her bir hiperbolik öğesi U_λ biçimindeki bir tek öğeyle eşleniktir.

3. Eliptik Öğeler ($|a+d| < 2$). T sabit noktası $\alpha \in \boldsymbol{U}$ olan bir eliptik öğe olsun. $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{U}$ üzerinde geçişli olduğundan $S(\alpha) = i$ olacak şekilde bir $S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ dönüşümü vardır. Bu durumda $S(\overline{\alpha}) = \overline{i} = -i$ olacağından $W = STS^{-1}$ dönüşümü sabit noktaları i ve $-i$ olan bir eliptik öğedir. Dolayısıyla W dönüşümünü

$$\frac{W(z) - i}{W(z) + i} = \lambda \frac{z - i}{z + i}$$

biçiminde ifade edebiliriz. $W \in PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ kümesini kendi üzerine resmettiğinden $W(\beta) \in \boldsymbol{R}$ olacak şekilde bir $\beta \in \boldsymbol{R}$ vardır. Dolayısıyla,

$$\left| \frac{W(\beta) - i}{W(\beta) + i} \right| = \left| \frac{\beta - i}{\beta + i} \right| = 1$$

olacağından $\lambda = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) olur. Böylece sabit noktaları α ve $\overline{\alpha}$ olan T dönüşümü

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i}=e^{i\theta}\,\frac{z-i}{z+i}$$

dönüşümü ile eşlenik olur.

1. 3. 3. Uyarı 1. $PSL(2, \boldsymbol{C})$ de olduğu gibi $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin sonlu periyotlu öğeleri de sadece eliptik öğelerdir.

2. Bir loksodromik öğe için $a + d$ gerçel olmadığından $PSL(2, \boldsymbol{R})$ de loksodromik öğe bulunmaz.

1. 4. SABİT NOKTA KÜMELERİ

İki dönüşümün değişmeli olması ile bu dönüşümlerin sabit noktalarının arasında oldukça sıkı bir ilişki vardır. Aşağıda verilecek olan teoremler bu ilişkileri daha iyi belirtecektir. $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin sabit noktalarının kümesini F_T ile gösterelim.

1.4.1. Teorem. T, $S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ ve $ST = TS$ ise S dönüşümü T nin sabit noktalarının kümesini kendi üzerine resmeder, yani $S(F_T) = F_T$ dir. Benzer şekilde T dönüşümü de S nin sabit noktalarının kümesini kendi üzerine resmeder. (Başkan 1980)

İspat. $p \in F_T$ olduğunu varsayarsak,

$$S(p) = ST(p) = TS(p) = T(S(p))$$

yani $S(p) \in F_T$ dir. Teoremin son kısmının ispatı S yerine T, T yerine S koyarak görülür.

Bu teorem yardımıyla $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin bazı özel dönüşümlerinin merkezleştiricilerini belirleyebiliriz.

İlk olarak parabolik bir dönüşümün merkezleştiricisini belirleyelim. Bunun için tüm parabolik dönüşümlerin eşlenik olduğu $T(z) = z + 1$ parabolik öğesini dikkate alalım. Bu durumda eğer $S \in C_{PSL(2, \boldsymbol{R})}(T)$ ise $ST = TS$ olur. $T(\infty) = \infty$ ve $F_T = \{\infty\}$ olduğundan $S(\infty) = \infty$ olmalıdır. Dolayısıyla S dönüşümü $S(z) = az + b$ biçimindedir. Ancak $ST = TS$ olacağı dikkate alınırsa $a = 1$ olduğu görülür. Böylece,

$$C_{PSL(2, \boldsymbol{R})}(T) = \{ z \to z + k | \; k \in \boldsymbol{R}\}$$

dir. Benzer şekilde $T(z) = z - 1$ içinde

$$C_{PSL(2, \boldsymbol{R})}(T) = \{ z \to z + k | \; k \in \boldsymbol{R}\}$$

olduğu görülür.

Şimdi de $T(z) = \lambda z$ ($\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$) hiperbolik öğesinin merkezleştiricisini belirleyelim. T dönüşümünün sabit nokta kümesi $F_T = \{0, \infty\}$ olduğundan T dönüşümünün merkezleştiricisi bu kümeyi kendi üzerine resmedecek dönüşümlerden oluşmalıdır. Dolayısıyla $\mu > 0$ olmak üzere bu dönüşümler $S(z) = \mu z$ biçimindeki dönüşümlerdir, yani

$$C_{PSL(2, \boldsymbol{R})}(T) = \{ z \to \mu z \mid \mu > 0\}$$

olur.

Son olarak sabit noktaları i ve $-i$ olan

$$\frac{T(z)-i}{T(z)+i} = e^{i\theta}\,\frac{z-i}{z+i}\ (\ 0 \leq \theta < 2\pi)$$

eliptik dönüşümünün merkezleştiricisi ise

$$C_{PSL(2,\boldsymbol{R})}(T) = \{\ W \mid \frac{W(z)-i}{W(z)+i} = e^{i\Phi}\,\frac{z-i}{z+i},\ \ 0 \leq \Phi < 2\pi\ \}$$

dir.

Böylece oldukça sık kullanılacak olan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

1.4.2.Teorem. T, $S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ özdeşlikten farklı iki dönüşüm olsun."$TS = ST \Leftrightarrow F_T = F_S$" dir.

İspat. ($\Rightarrow$) T sabit noktası α olan parabolik öğe ise $TS(\alpha) = ST(\alpha) = S(\alpha)$ olduğundan T, $S(\alpha)$ noktasını da sabit bırakır. T parabolik bir dönüşüm olduğu için bir tek sabit noktası vardır, dolayısıyla $S(\alpha) = \alpha$, yani α noktası S dönüşümünün de sabit noktasıdır. Şimdi S nin α noktasından başka sabit noktasının olmadığını görelim. Eğer S dönüşümü bir $\beta \neq \alpha$ noktasını da sabit bıraksaydı $ST(\beta) = TS(\beta) = T(\beta)$ yani S dönüşümü, $T(\beta)$ noktasını da sabit bırakırdı. Ancak bu durumda S dönüşümünün α, β ve $T(\beta)$ gibi üç sabit noktası olurdu. O halde $T(\beta) = \beta$ ya da $T(\beta) = \alpha$ olmalıdır. T dönüşümü birebir olduğundan $T(\beta) = \alpha$ olamaz. Ancak $T(\beta) = \beta$ da olamaz, çünkü T dönüşümünün sadece bir tane sabit noktası vardır. Dolayısıyla S nin de α dan farklı sabit noktası olamaz, yani $F_T = F_S = \{\alpha\}$ dır.

T dönüşümünün α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ gibi iki farklı sabit noktalarının olduğunu, yani T dönüşümünün hiperbolik bir dönüşüm olduğunu varsayalım. $TS(\alpha) = ST(\alpha) = S(\alpha)$ ve $TS(\beta) = ST(\beta) = S(\beta)$ olduğundan T dönüşümü, $S(\alpha)$ ve $S(\beta)$ noktalarını sabit bırakır. T dönüşümünün sabit noktaları α ve β olduğu için aşağıdaki iki olasılık söz konusudur;

(i) $S(\alpha) = \alpha$, $S(\beta) = \beta$

(ii) $S(\alpha) = \beta$, $S(\beta) = \alpha$

Birinci halde $F_S = \{\alpha, \beta\}$ olduğundan istenen elde edilmiş olur. İkinci halde ise $S(\alpha) = \beta$ ve $S(\beta) = \alpha$ olduğundan $S^2(\alpha) = S\,S(S(\alpha)) = S(\beta) = \alpha$ ve $S^2(\beta) = S(S(\beta)) = S(\alpha) = \beta$ olduğu görülür. S dönüşümü α ve β noktalarını sabit bırakmadığına göre S dönüşümünün α

ve β dan farklı olan γ gibi bir başka sabit noktası vardır. Bu durumda S dönüşümü γ noktasını sabit bıraktığından S^2 dönüşümü de γ noktasını sabit bırakır. O halde S^2 dönüşümünün α, β ve γ gibi farklı üç sabit noktası vardır ve dolayısıyla $S^2 = I$ dır. S sonlu mertebeli olduğundan, bir eliptik öğedir. S eliptik olduğundan üst yarı düzlemde α ve β noktalarından farklı olan τ gibi bir sabit noktası vardır. $TS = ST$ olduğundan $ST(\tau) = TS(\tau) = T(\tau)$ yani S dönüşümü $T(\tau)$ noktasını sabit bırakır. Dolayısıyla $T(\tau) = \tau$ ya da $T(\tau) = \bar{\tau}$ dir. T, $\boldsymbol{U}$ üst yarı düzlemi kendi üzerine resmettiğinden $T(\tau) = \tau$ dur. Bu ise τ noktasının α ya da β olduğunu gösterir. Halbuki τ noktasının α ve β dan farklı olduğunu varsaymıştık. O halde bu hal söz konusu değildir, yani $F_T = F_S = \{\alpha, \beta\}$ dır.

T dönüşümünün α ve $\bar{\alpha}$ gibi iki sabit noktası olduğunu varsayalım. $TS(\alpha) = ST(\alpha) = S(\alpha)$ ve $TS(\bar{\alpha}) = ST(\bar{\alpha}) = S(\bar{\alpha})$ olduğundan aşağıdaki iki hal söz konusudur.

i. $S(\alpha) = \alpha,\quad S(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$

ii. $S(\alpha) = \bar{\alpha},\quad S(\bar{\alpha}) = \alpha$

Birinci halde $F_S = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$ olduğu hemen görülür. İkinci halde ise S dönüşümü $\boldsymbol{U}$ nun otomorfizmi olduğundan söz konusu değildir. Yani bu durum da $F_T = F_S = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$ dir.

(⇐) $F_T = F_S$ olduğunu varsayalım. T ve S dönüşümlerinin ya ikisi de parabolik, ya da ikisi de parabolik olmayan dönüşümlerdir. Şimdi bunları ayrı ayrı inceleyelim.

i. T ve S dönüşümlerinin ikisi de parabolik ve $F_T = F_S = \{\alpha\}$ olsun. Bu durumda $W(\alpha) = \infty$ olacak biçimde bir $W \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ öğesi bulabiliriz. Dolayısıyla $T' = WTW^{-1}$ ve $S' = WSW^{-1}$ olarak alınırsa $T'(\infty) = \infty$ ve bu dönüşüm T dönüşümünün eşleniği olduğundan başka sabit noktası yoktur. O halde λ bir gerçel sayı olmak üzere

$$T'(z) = z + \lambda$$

biçimindedir. Benzer şekilde μ bir gerçel sayı olmak üzere

$$S'(z) = z + \mu$$

olduğu görülür. $T'S'(z) = T'(z + \mu) = z + \mu + \lambda = z + \lambda + \mu = S'(z + \lambda) = S'T'(z)$ olduğundan

$$T'S' = S'T'$$

olduğu görülür.

ii. T ve S dönüşümlerinin ikisi de ne parabolik olmayan dönüşümler ve $F_T = F_S = \{\alpha, \beta\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $W(\alpha) = 0$ ve $W(\beta) = \infty$ olacak biçimde bir $W \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ öğesi bulabiliriz. Dolayısıyla $T' = WTW^{-1}$ dönüşümü 0 ve ∞ noktalarını sabit bırakan bir dönüşümdür. O halde $k>0$, $k \neq 1$ olmak üzere $T'(z) = kz$ biçimindedir. Benzer şekilde $S'(z) = \lambda z$ ($\lambda>0$, $\lambda \neq 1$) olduğu görülür. Böylece

$$T'S'(z) = T'(\lambda z) = k\lambda z = \lambda kz = S'(kz) = S'T'(z)$$

elde edilir.

Böylece $PSL(2, \boldsymbol{R})$ deki dönüşümlerin merkezleştiricileri için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

1.4.3. Teorem. $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ bir hiperbolik (parabolik, eliptik) dönüşüm ise T dönüşümünün $PSL(2, \boldsymbol{R})$ deki merkezleştiricisi özdeşlik öğesi ve T ile aynı sabit nokta kümesine sahip tüm hiperbolik (parabolik, eliptik) dönüşümlerden oluşur. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. $S \in C_{PSL(2,\, \boldsymbol{R})}(T)$ ise $ST = TS$ olacağından yukarıdaki teorem gereği $F_T = F_S$ dir. Dolayısıyla T dönüşümünün $PSL(2, \boldsymbol{R})$ deki merkezleştiricisi sadece aynı cins ve aynı sabit nokta kümesine sahip olan dönüşümlerden oluşacaktır.

Dönüşümlerin sabit nokta kümelerinden faydalanarak dönüşümlerin komütatörlerini de belirleyebiliriz.

T ve S parabolik olmayan ve ortak bir sabit noktaları ∞ diğer sabit noktaları ise farklı olan iki dönüşüm olsun. Bu durumda

$$W = TST^{-1}S^{-1}$$

dönüşümü özdeşlikten farklıdır ve üstelik,

$$W(\infty) = TST^{-1}S^{-1}(\infty) = \infty$$

özelliğinde bir parabolik dönüşümdür. Dolayısıyla da bu dönüşüm belli bir $\lambda \in \boldsymbol{R}$ için

$$W(z) = z + \lambda$$

biçimindedir, yani bir parabolik dönüşümdür.

T ve S sabit noktaları farklı olan iki parabolik dönüşüm olduğunu varsayalım. Bu durumda ise

$$W = TST^{-1}S^{-1}$$

dönüşümü bir hiperbolik dönüşümdür.

1. 5. HİPERBOLİK GEOMETRİ.

PSL(2, ***R***) grubu ile hiperbolik geometri arasındaki ilişki Henri Poincare tarafından 1882'de yayınlanan bir makalede belirtilmiştir. Hiperbolik geometrinin temelleri ise Bolyai ve Lobatchewsky tarafından atılmıştır. Hiperbolik geometri Euclidean geometrisindeki paralellik aksiyomunun değiştirilmesi ile elde edilmiştir. Bilindiği gibi Euclidean geometrisinde paralellik aksiyomu, "bir l doğrusu üzerinde bulunmayan bir P noktasından l doğrusunu kesmeyen bir tek doğru vardır" biçimindedir. Hiperbolik geometrinin paralellik aksiyomu ise "bir l doğrusu üzerinde bulunmayan bir P noktasından l doğrusunu kesmeyen sonsuz sayıda doğru vardır" biçimindedir. Hiperbolik geometri yerine çoğu zaman Non Euclidean geometri adı da kullanılır.

Hiperbolik geometri için çeşitli modeller vardır. Burada üst yarı düzlem modelini oluşturacağız (birim disk modeli de çok kullanılan bir modeldir) ve bu modeli kullanacağız. Bu gösterimde hiperbolik düzlem üst yarı düzlemdir, üst yarı düzlemdeki noktalar (bildiğimiz noktalar) H-nokta, gerçel eksene dik olan çemberlerin üst yarı düzlemde kalan kısımları ile gerçel eksene dik olan bildiğimiz Euclidean doğrularının üst yarı düzlemde kalan kısımları H- doğru olarak adlandırılır. p ve q iki H-nokta olmak üzere bunları birleştiren H-doğrunun p ve q noktaları arasındaki kısmına p ve q noktalarını birleştiren H-doğru parçası denir. Kesişen iki H-doğru arasındaki açı bu iki H-doğrunun kesiştiği noktadaki teğetleri arasındaki Euclidean anlamında ölçülen açıdır (Burada H öneki hiperbolik kavramını belirtmektedir).

Hiperbolik geometrideki uzaklık ve alan kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1.5.1. Tanım. $\gamma : [0, 1] \to \boldsymbol{U}$, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ parçalı diferansiyellenebilir eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$h(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt = \int_{\gamma} \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y} dt$$

ve ölçülebilir bir E kümesinin hiperbolik alanı,

$$\mu(E) = \iint_E \frac{dxdy}{y^2}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu tanımlar yardımıyla p ve q noktalarını H-uzaklık bu iki noktayı birleştiren H-doğrunun uzunluğu olarak tanımlanır. Böylece $\boldsymbol{U}$ üzerinde adına hiperbolik metrik denen, bir metrik elde edilmiş olur. Bu metrik ile birlikte düşünüldüğünde $\boldsymbol{U}$, hiperbolik düzlem için bir model oluşturur. Hiperbolik metriğin $\boldsymbol{U}$ ya kondurduğu topoloji ile $\boldsymbol{U}$ üzerindeki topoloji aynıdır.

$PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun öğeleri hiperbolik geometrinin eşmetrileridir. Aşağıdaki teorem $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin bu özelliğini belirtmektedir.

1.5.2. Teorem. $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ olmak üzere

$$i)\ h(T(\gamma)) = h(\gamma)$$

$$ii)\ \mu(T(E)) = \mu(E)$$

dir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. *i*) $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \boldsymbol{R},\ ad - bc = 1)$ olarak alalım. O halde bu dönüşümün türevi

$$\frac{dT}{dz} = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

biçimindedir. Diğer yandan

$$T(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|\,cz+d\,|^2} = \frac{(acz\bar{z}+bd)(adz+bc\bar{z})}{|\,cz+d\,|^2}$$

ve $z = x + iy$, $T(z) = u + iv$ olarak alınırsa

$$v = \frac{y}{(cz+d)^2}$$

elde edilir ki bu durumda

$$\left|\frac{dT}{dz}\right| = \frac{v}{y}$$

olur. Böylece

$$h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dT}{dt}\right| dt}{v} = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dT}{dz}\frac{dz}{dt}\right| dt}{v} = \int_0^1 \frac{v\left|\frac{dz}{dt}\right| dt}{yv} = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right| dt}{y} = h(\gamma)$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

ii) $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \boldsymbol{R},\ ad - bc = 1)$ ve $z = x + iy$, $T(z) = u + iv$ olarak alalım.

Bu durumda Cauchy Riemann eşitliklerini kullanarak

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{dT}{dx}\right|^2 = \left|\frac{dT}{dz}\right|^2 = \frac{1}{(cz+d)^4}$$

eşitliklerini elde ederiz. Böylece

$$\mu(T(E)) = \iint_{T(E)} \frac{dudv}{v^2} = \iint_E \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{dxdy}{v^2}$$

ve

$$\left|\frac{dT}{dz}\right| = \frac{v}{y}$$

eşitliğini kullanarak

$$\mu(T(E)) = \iint_E \frac{1}{|cz+d|^4} \frac{|cz+d|^4}{y^2} dxdy = \mu(E)$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

1.5.3. Sonuç. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ hiperbolik uzaklığı invaryant bırakır, yani $p, q \in \boldsymbol{U}$ ve $\rho(p, q)$, p ve q noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık olmak üzere her $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ için

$$\rho(p, q) = \rho(T(p), T(q)).$$

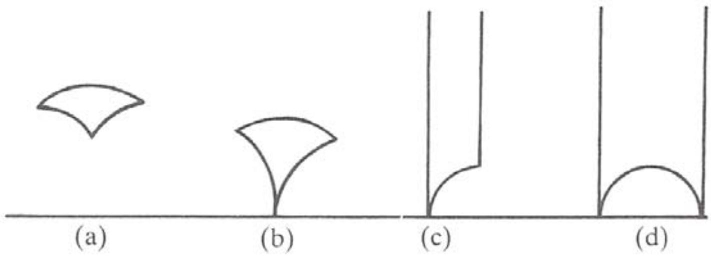
Dolayısıyla $PSL(2, \boldsymbol{R})$ hiperbolik eşmetrilerin bir grubudur. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. p ve q noktalarını birleştiren γ H-doğru parçasının resmi, $T(p)$ ve $T(q)$ noktalarını birleştiren $T(\gamma)$ H-doğru parçasıdır ve yukarıdaki teorem gereği

$$h(T(\gamma)) = h(\gamma)$$

dir.

U nun kapanışında kapalı olan *n* tane hiperbolik doğru parçasıyla sınırlı kümelere *n* kenarlı hiperbolik poligon, iki hiperbolik doğru parçasının kesiştiği noktaya ise poligonun *köşesi* denir. Bir poligonun $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$üzerinde bir köşesi olabilir ancak gerçel eksenin bir parçası bir hiperbolik poligonun kenarı olamaz. Aşağıdaki şekillerde hiperbolik 3-genler görülmektedir.



Şekil 1.5.1. Hiperbolik Üçgenler.

Dikkat edilirse bu üçgenlerden birisinin tüm köşeleri ***U*** da, ikincisinin bir köşesi ***R*** üzerinde, üçüncüsünün iki köşesi $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$da, sonuncusunun ise tüm köşeleri $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedir.

Hiperbolik bir bölgenin hiperbolik alanının hesaplanması için bir eşitlik daha önce verilmişti. Özel olarak bir hiperbolik üçgenin alanı Gauss–Bonet teoremi kullanılarak hesaplanabilir. Bu teorem, bir hiperbolik üçgenin alanının tamamen iç açılarına bağlı olarak hesaplanabileceğini belirtir. Bu teorem daha sonra bazı grupların temel bölgelerinin alanının hesaplanmasında kullanılacaktır.

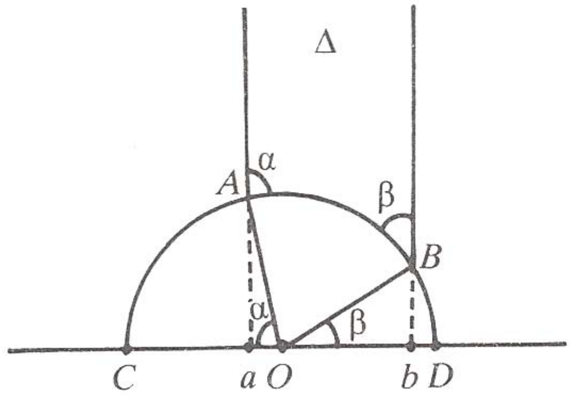
1.5.4. Teorem (Gauss–Bonet). Δ, açıları α, β, γ olan bir hiperbolik üçgen olsun. Bu durumda $\mu(\Delta)$ sonludur ve

$$\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

dır. (Başkan 1980)

İspat. Δ hiperbolik üçgeninin köşelerinin bulunduğu yerlere göre aşağıdaki olasılıklar söz konusudur

1.hal. İlk olarak Δ *H*-üçgeninin iki kenarının dikey *H*-doğrular olduğu durumu inceleyelim.



Şekil 1.5.2. Δ *H*-üçgeninin alanı

Bu halde Δ *H*-üçgeninin tabanı bir Euclidean yarı çemberdir. $z \to z + \lambda$ ($\lambda \in \boldsymbol{R}$) ve $z \to \mu z$ ($\mu > 0$) dönüşümlerini uygularsak bu yarı çemberin yarıçapını 1 ve merkezini 0 olarak alabiliriz. Böylece Δ *H*-üçgenini $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile sınırlandırılmış olarak düşünebiliriz. Burada $A\hat{O}C$ ve $B\hat{O}D$ açıları sırasıyla α ve β dır. O halde, Δ *H*-üçgeninin *H*-alanı

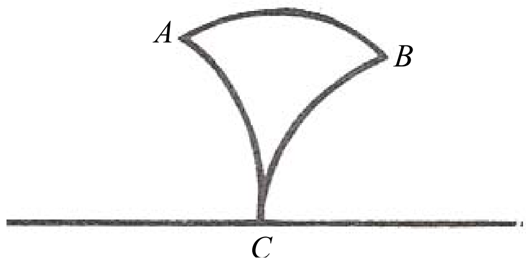
$$\mu(\Delta) = \iint_{\Delta} \frac{dxdy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

olur. $0 \le \theta < \pi$ olmak üzere $x = \cos\theta$ dönüşümü yapılırsa Δ *H*-üçgeninin *H*-alanı

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta \, d\theta}{\sin\theta} = \pi - (\alpha + \beta)$$

olur.

2. Hal. Δ *H*-üçgeninin bir *C* köşesi gerçel eksen üzerinde olsun. Bu durumda *C* köşesi



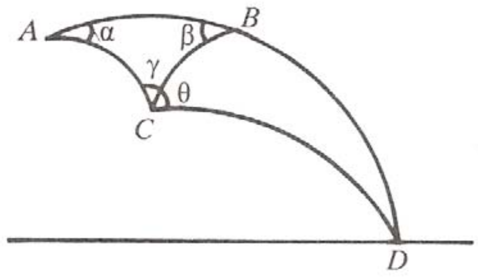
Şekil 1.5.3. Δ *H*-üçgeninin alanı

bir $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ öğesi ile ∞ noktasına resmedilir. Böylece Δ H-üçgeninin H-alanı ve açıları değişmediğinden H-alan 1. hal gereği

$$\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta)$$

olur.

3. Hal. A, B, C noktaları Δ H-üçgeninin köşeleri olmak üzere bu köşelerin hiçbiri $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde bulunmasın. Eğer AB, H-doğru parçası $\boldsymbol{R}$ yi bir D noktasında kesecek



Şekil 1.5.4. Δ H-üçgeninin alanı

şekilde uzatılırsa Δ_1 köşeleri A, C, D olan H-üçgen olmak üzere $\Delta = \Delta_1 \setminus \Delta_2$ olur ve Δ_2 köşeleri B, C, D olan H-üçgendir. Böylece

$$\begin{aligned} \mu(\Delta) &= \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) \\ &= \pi - (\alpha + \gamma + \theta) - [\, \pi - \theta - (\, \pi - \beta) \,] \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

olur.

Bu teoremi kullanılarak Gauss–Bonet formülünü poligonlara genişletebiliriz.

1.5.5. Sonuç. Eğer Π açıları $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ olan n-kenarlı bir poligon ise

$$\mu(\Pi) = (n-2)\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

dir.

İspat. $A_1,\dots, A_n$, Π poligonunun köşeleri ve O noktası $OA_1,\dots, OA_n$ H-doğru parçaları Π poligonunun içinde kalacak şekilde Π nin içinde bir nokta olsun. Böylece OA_1A_2, OA_2A_3, …, OA_nA_1 üçgenlerinin H-alanlarını toplayarak

$$\mu(\Pi) = (n-2)\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

eşitliğini elde ederiz.

1.6. YANSIMALAR VE ÜÇGEN GRUPLAR

1.6.1.Tanım. Q bir H-doğru olmak üzere, Q nun her bir noktasını sabit bırakan $\boldsymbol{U}$ nun özdeşlikten farklı H-eşmetrisine Q da bir *H- yansıma* denir.

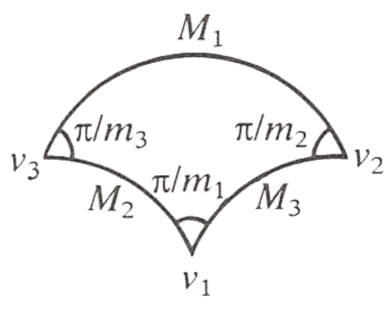
Özel olarak sanal eksene göre Euclidean yansıma olan $R_0(z) = -\bar{z}$ aynı zamanda bir H-yansımadır. Q_0 sanal eksen ve Q herhangi bir H-doğru olmak üzere $T(Q) = Q_0$ özelliğinde bir $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ vardır. T de bir H-eşmetri olduğundan $T^{-1}R_0T$, Q da bir H-yansıma olur. R_0 ın mertebesi 2 olduğundan her bir yansımanın da mertebesi 2 dir.

Her bir H-yansıma $\boldsymbol{U}$ nun bir anti-konform homeomorfizmidir yani açıları korur fakat yönlerini değiştirir. Eğer B, $\boldsymbol{U}$ nun bir anti konform homeomorfizmi ise $R_0B = T$, $\boldsymbol{U}$ nun bir konform homeomorfizmi olur ve dolayısıyla $PSL(2, \boldsymbol{R})$ dedir. O halde $B = R_0T$ yazılabilir ve böylece her bir H-yansıması,

$$z \to \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \boldsymbol{R} \text{ ve } ad - bc = -1$$

biçiminde olur.

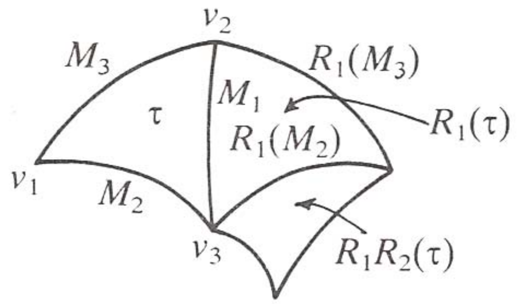
τ, köşeleri v_1, v_2, v_3, bu köşelerdeki açıları $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3}$ ve bu köşelerin karşısındaki kenarları M_1, M_2, M_3 olan bir H-üçgen olsun.



Şekil 1.6.1. τ Hiperbolik Üçgen.

$i = 1,2,3$ olmak üzere R_i, M_i kenarını bulunduran H-doğrudaki H-yansıma ve Γ^*, R_1, R_2, R_3, ile üretilen grup olsun. $R_i \notin PSL(2, \boldsymbol{R})$ olduğundan Γ^* bir Fuchsian grup değildir. Eğer $\Gamma = \Gamma^* \cap PSL(2, \boldsymbol{R})$ olarak alınırsa $\Gamma^* = \Gamma \cup R_1\Gamma$ olduğu görülür.

τ, H-üçgeninin R_1 H-yansıması altındaki resmi $R_1(\tau)$ hiperbolik üçgenin kenarları $R_1(M_1) = M_1$, $R_1(M_2)$ ve $R_1(M_3)$ dür. $R_1R_2R_1^{-1}$, $R_1(M_2)$ yi nokta nokta sabit bıraktığından $R_1R_2R_1^{-1}$, $R_1(M_2)$ de bir H-yansımasıdır. Bu yansıma $R_1(\tau)$ yu $R_1R_2R_1^{-1}(R_1(\tau)) = R_1R_2(\tau)$ ye resmeder.



Şekil 1.6.2. τ Hiperbolik Üçgenin Resimleri.

Bu şekilde devam ederek, v_3 köşesini saran hiperbolik üçgenlerin τ, $R_1(\tau)$, $R_1R_2(\tau)$, $R_1R_2R_1(\tau)$, … , $(R_1R_2)^{m_3-1}R_1(\tau)$ olduğu görülür. R_1R_2, v_3 köşesini sabit bırakan iki H-yansımanın çarpımıdır fakat bu dönüşüm v_3 köşesi etrafında $\frac{2\pi}{m_3}$ açılık bir hiperbolik dönme olarak düşünülebilir ve dolayısıyla $(R_1R_2)^{m_3} = I$ dır.

τ nun, Γ^* ın öğeleri altındaki resimleri, yani

$$\{\, T(\tau) \mid T \in \Gamma^* \}$$

kümesi $\boldsymbol{U}$ nun bir döşemesini oluşturur. τ nun herhangi iki resmi üst üste gelmeyeceği gibi $\boldsymbol{U}$ nun her bir noktası τ nun belli bir Γ^*- resmide bulunmaz.

p, τ nun herhangi bir noktası olmak üzere p nin Γ^*- resimleri döşemenin diğer üçgenlerinin noktaları olacaktır ve dolayısıyla ayrık bir küme oluşturacaklardır. Böylece $\boldsymbol{U}$ nun her bir Γ- yörüngesi ayrık bir küme olur ve Γ bir Fuchsian gruptur. Bu şekilde oluşturulan Γ Fuchsian grubuna *üçgen grup* denir.

2. BÖLÜM
SÜREKSİZ VE AYRIK GRUPLAR

Bu bölümde süreksiz ve ayrık grup kavramları tanımlandıktan sonra süreksiz ve ayrık grupların temel özellikleri üzerinde durulacaktır. Özellikle, otomorf fonksiyonlar teorisinin temel kavramı olan süreksiz grup ve ayrık grup kavramları arasındaki ilişki belirtilecektir. Bir grubun limit noktaları kümesi ve süreksizlik bölgesi tanımı verilerek grubun temel bölgesi kavramına giriş için bir ortam hazırlanacaktır.

2.1. SÜREKSİZLİK

Birinci bölümde Σ genişletilmiş karmaşık düzlemin tüm homeomorfizmlerinin

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in \boldsymbol{C} \text{ ve } ad - bc = 1$$

biçimindeki dönüşümler olduğunu belirtmiştik. Bundan sonra bu dönüşümlerin gerçel katsayılılarının oluşturduğu

$$PSL(2, \boldsymbol{R}) = \{\, T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \; a, b, c, d \in \boldsymbol{R} \text{ ve } ad - bc = 1\}$$

grubunun özellikleri ile ilgileneceğiz.

2.1.1. Tanım. $\Gamma \subset PSL(2, \boldsymbol{R})$ ve $\alpha \in \Sigma$ olsun. Eğer $T_n(z) \to \alpha$ olacak biçimde Γ nın farklı elemanlarından oluşan bir sonsuz (T_n) dizisi ve bir $z \in \Sigma$ noktası var ise α noktasına Γ nın bir *limit noktası* denir. Γ nın limit noktalarının kümesi $L(\Gamma)$ ile gösterilir ve bu kümeye de Γ nın *limit kümesi* adı verilir.

Eğer α noktası Γ grubu için bir limit noktası değilse α noktasına Γ için bir *adi noktadır* denir ve adi noktaların kümesi de $A(\Gamma)$ ile gösterilir.

2.1.2. Uyarı 1. Tanımlar dikkate alınırsa $L(\Gamma)$ ve $A(\Gamma)$ kümeleri Σ da birbirinin tümleyenidirler.

2. Tanımda sözü geçen (T_n) dönüşümler dizisi farklı öğelerden oluştuğu halde $(T_n(z))$ dizisinin farklı noktalardan oluşması gerekmez.

3. Eğer α noktası sonsuz çoklukta farklı $T \in \Gamma$ dönüşümünün sabit noktası ise α noktasının Γ grubu için bir limit noktası olacağı açıktır.

4. Eğer α noktası sonsuz mertebeli bir $T \in \Gamma$ dönüşümünün sabit noktası ise α noktası Γ grubunun bir limit noktasıdır.

5. $\Gamma = \{\ T \mid T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$ ve $ad - bc = 1\}$ modüler grubu için $L(\Gamma) = \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$dur.

6. Γ, $T(z) = kz$ ($k>0$) dönüşümü ile üretilmiş bir devirli grup ise $L(\Gamma) = \{0, \infty\}$dur.

Bir grubun limit ve adi noktası tanımlarından faydalanılarak süreksizlik kavramı tanımlanabilir.

2.1.3. Tanım. Eğer α, Γ grubunun bir adi noktası ise Γ grubuna *α noktasında süreksizdir* denir. Eğer Γ grubu bir S kümesinin her bir noktasında süreksiz ise Γ grubuna *S kümesinde süreksizdir* denir.

Eğer bir grup belli bir kümede süreksiz ise kısaca Γ grubuna *süreksiz grup* denir.

2.1.4. Uyarı 1. Tanımdan "Γ bir süreksiz grup $\Leftrightarrow$ $A(\Gamma) \neq \phi$" olduğu açıktır.

2. Eğer $S \subset A(\Gamma)$ ise Γ grubuna S kümesinde süreksizdir.

3. Eğer Γ grubu α noktasında süreksiz ise z noktası ne olursa olsun α noktası Γ_z yörüngesinin bir yığılma noktası olamaz.

4. Her bir $T \in \Gamma$ için $T(L(\Gamma)) = L(\Gamma)$ ve $T(A(\Gamma)) = A(\Gamma)$ dır.

5. $L(\Gamma)$ kapalı, $A(\Gamma)$ açık bir kümedir.

6. $\Lambda \subset \Gamma$ ise $A(\Lambda) \subset A(\Gamma)$ dır, dolayısıyla süreksiz bir grubun alt grubu da süreksizdir. Diğer yandan $|\ \Gamma : \Lambda\ |$ = sonlu ise $A(\Lambda) = A(\Gamma)$ dır. O halde süreksiz bir alt grubun bir gruptaki indeksi sonlu ise grubun kendisi de süreksizdir.

7. $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ için $A(T\,\Gamma T^{-1}) = T(A(\Gamma))$ dır.

2.1.5. Örnek 1. Γ sonlu bir grup olsun. Bu durumda Γ süreksizdir. Γ sonlu bir grup olduğundan farklı öğelerden oluşan bir (T_n) dönüşümler dizisi bulundurmaz.

2. Γ geçişli bir grup ve $\Gamma_z = \Sigma$, yani Γ nın tek bir yörüngesi var ise Γ süreksiz değildir.

3. Γ, belli bir T dönüşümü ile üretilmiş bir devirli grup yani $\Gamma = \{ I, T, T^2, \ldots, T^n, \ldots \}$ olsun.

i) Eğer T bir eliptik dönüşüm değilse Γ, T dönüşümünün sabit nokta veya sabit noktaları dışında her yerde süreksizdir.

ii) Eğer T bir eliptik dönüşüm ise, T dönüşümünün sonlu mertebeli olması halinde Γ her yerde süreksiz, T dönüşümünün sonsuz mertebeli olması halinde ise Γ hiçbir yerde süreksiz değildir.

İlk olarak T nin bir eliptik öğe olmadığını varsayalım, bu durumda T dönüşümü sonlu mertebeli olamaz. T dönüşümünün bir sabit noktası T dönüşümünün tüm kuvvetlerinin de (ki bu dönüşümlerin her birisi farklıdır) bir sabit noktası olacağından bu sabit nokta Γ nın bir limit noktası olur. Bu sabit nokta dışındaki tüm noktalar ise birer adi noktadır. Gerçektende $T^n(z) \to z_0$ ise z_0 noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır ve dolayısıyla T dönüşümünün z_0 noktasından başka limit noktası yoktur.

Şimdi de T dönüşümünün sonlu mertebeli bir eliptik dönüşüm olduğunu varsayalım. Bu durumda Γ sonlu bir gruptur ve limit noktası olamaz. Dolayısıyla Γ süreksizdir.

Son olarak T dönüşümünün sonsuz mertebeli bir eliptik dönüşüm olduğunu varsayalım. O halde T dönüşümü

$$\frac{T(z)-z_1}{T(z)-z_2} = e(\kappa)\,\frac{z-z_1}{z-z_2}, \quad e(\kappa) = e^{2\pi i\kappa}$$

biçimindedir ve $n_j \to \infty$ için $e(\kappa_{n_j}) \to 1$ özelliğinde bir dizi vardır, böylece T^{n_j} dönüşümleri farklı olmak üzere $T^{n_j}(z) \to z$ olur. Bu ise z noktasının Γ grubu için bir adi nokta olmadığını gösterir, z noktası keyfi bir nokta olduğundan düzlemin her bir noktası Γ için bir limit noktasıdır. O halde Γ hiçbir yerde süreksiz değildir.

Sonuç olarak eğer Γ süreksiz bir grup ise Γ da sonsuz mertebeli bir eliptik öğe bulunmaz.

4. Otomorf fonksiyonlar ve eliptik fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip ve $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin bir alt grubu olan

$$\Gamma = \{\, T : T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \boldsymbol{Z},\ ad - bc = 1\}$$

modüler grup önemli bir süreksiz grup örneğidir. $T \in \Gamma$ ise $T(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U}$ yani Γ nın üst yarı düzlemi kendi üzerine resmettiğini daha önce belirtmiştik. Şimdi Γ nın $\boldsymbol{U}$ da süreksiz olduğunu görelim. Bunun için tersine Γ nın $\boldsymbol{U}$ üzerinde süreksiz olmadığını varsayalım. O halde $z, z_0 \in \boldsymbol{U}$, $T_n(z) = x_n + iy_n \to z_0 = x_0 + iy_0$ olacak biçimde Γ da farklı öğelerden oluşan sonsuz bir (T_n) dizisi vardır. Bu dizinin terimlerinden

$$-\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}(T_n(z)) - \mathrm{Re}(z_0) \le \frac{1}{2} \qquad (*)$$

özelliğinde olanları seçelim. $T_n(z) \to z_0$ olduğundan

$$y_n = \frac{y}{(c_n x + d_n)^2 + y^2 c_n^2} \longrightarrow y_0$$

olur. Bu ise $\{(c_n x + d_n)^2 + y^2 c_n^2\}$ kümesinin sınırlı ve dolayısıyla (T_n) dizisinin katsayılarının (c_n) ve (d_n) dizilerinin sınırlı olduğunu gösterir. c_n ler birer tamsayıdır ve dolayısıyla farklı değerlerin sadece sonlu sayıda olabileceğini düşünebiliriz. Benzer durum d_n ler için de söz konusudur. Dolayısıyla (T_n) dizisini oluşturan dönüşümler için (c_n, d_n) çiftlerinin sayısı sadece sonlu çokluktadır. (c, d) bu özellikteki bir çift olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, (T_n) dizisinin bir öğesi olsun. Eğer

$$T_1(z) = \frac{a'z + b'}{cz + d}$$

dönüşümü de (T_n) dizisinin bir öğesi ise $T_1T^{-1}(z) = \dfrac{z + ab' - a'b}{0z + 1}$ ve belli bir m tamsayısı için $m = ab' - a'b$ olmak üzere $T_1T^{-1}(z) = z + m$ olmak zorundadır. Böylece

$$T_1(z) = \frac{(a + mc)z + (b + md)}{cz + d}$$

olur. Dikkat edilirse $T_1(z) = T(z) + m$ den başka bir şey değildir, ancak (*) eşitsizliğini gerçekleyecek bir tek m değeri vardır. Bir başka değişle (T_n) dizisine ait olan bir T dönüşümü (c, d) sıralı ikilisiyle bir tek şekilde belirlenmiştir. Böylece (T_n) dizisinin sadece sonlu tane terimden oluştuğu sonucu elde edilir ki bu dizinin sonsuz bir dizi olması ile çelişir. O halde Γ, $\boldsymbol{U}$ üzerinde süreksizdir.

Γ modüler grubun her bir alt grubu da $\boldsymbol{U}$ üzerinde süreksizdir.

Benzer şekilde Γ nın $\boldsymbol{L}$ alt yarı düzleminde de süreksiz olduğu görülebilir. Ancak Γ, $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$da süreksiz değildir.

2.1.6. Uyarı. Yukarıdaki 3. örnekten, süreksiz bir grupta sonsuz mertebeli bir eliptik öğe bulunamayacağı görülür.

2.1.7. Teorem. (T_n), $PSL(2, \boldsymbol{R})$ de bir dizi ve $T\in PSL(2, \boldsymbol{R})$ olsun. Eğer $(T_n) \to T$ ise her $z\in\Sigma$ için $(T_n(z)) \to T(z)$ dir. (Lehner 1966)

İspat. $(T_n) \to T$ ise $(T^{-1}T_n) = (W_n) \to I$ olacağı açıktır. Dönüşümlerin matris gösterimleri yardımıyla,

$$(W_n) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere $a_n \to 1$, $d_n \to 1$, $b_n \to 0$ ve $c_n \to 0$ dır. Diğer yandan $W_n(z)$, katsayıların rasyonel bir fonksiyonudur ve $n \to \infty$ için $c_nz + d \to 1$ olduğundan a_n, b_n, c_n ve d_n katsayılarına göre süreklidir. Üstelik

$$W_n(\infty) = \frac{a_n}{c_n} \to \infty$$

olur. Böylece $W_n(z) \to z$, yani $(T_n(z)) \to T(z)$ dir.

2.1.8. Teorem. Bir süreksiz grup sayılabilirdir. (Lehner 1964)

İspat. $\Gamma \subset PSL(2, \boldsymbol{R})$ süreksiz bir grup olmak üzere $T \in \Gamma$ öğesini $(a, b, c, d) \in \boldsymbol{R}^4$ noktası ile özdeşleyelim. Bu noktaların kümesine S dersek $S \subset \boldsymbol{R}^4$ olur. Tersine Γ nın sayılabilir olmadığını varsayarsak bu S kümesinin de sayılabilir olmadığını gösterir. Dolayısıyla S kümesinin (a_0, b_0, c_0, d_0) gibi bir limit noktası olur. Eğer

$$T(z) = \frac{a_0 z + b_0}{c_0 z + d_0}$$

olarak alınırsa, Γ da $(T_n) \rightarrow T$ olacak biçimde farklı öğelerden oluşan bir (T_n) dizisi elde edilir. Her $z \in \Sigma$ için $(T_n(z)) \rightarrow T(z)$ olduğunu biliyoruz. Keyfi bir $z_0 \in \Sigma$ için $T(z) = z_0$ eşitliği z ye göre çözülebilir. Bu ise her bir $z_0 \in \Sigma$ noktasının bir limit noktası olduğunu gösterir, yani Γ süreksiz değildir. Bu ise varsayım ile çelişkidir. O halde Γ sayılabilirdir.

2.2. AYRIKLIK

Bu kısımda daha önce verilen ayrık grup tanımını $PSL(2, \boldsymbol{R})$ için tekrar ele alacağız. Daha önce verdiğimiz ayrık grup tanımını hatırlatarak başlayalım.

2.2.1. Tanım. $\Gamma \subset PSL(2, \boldsymbol{R})$ olsun. Eğer Γ da farklı öğelerden oluşan ve yakınsak olan bir (T_n) dizisi yok ise Γ ya *ayrıktır* denir.

Buradaki yakınsaklık $z\in\Sigma$ noktasındaki noktasal yakınsaklıktır. Bazı kitaplarda ayrık grup tanımı, grubun öğelerinin oluşturduğu diziler yardımıyla, aşağıdaki teoremdeki gibi ifade edilir. Ayrıklık ile ilgili birçok teoremin ispatında da bu tanım kullanılır.

2.2.2. Teorem. Γ ayrıktır $\Leftrightarrow$ (T_n) ler Γ nın farklı öğelerinin bir dizisi olmak üzere $(T_n) \rightarrow I$ olacak biçimde bir (T_n) dizisi yoktur. (Lehner 1964)

İspat. $(\Rightarrow)$ Eğer $(T_n) \rightarrow I$ olacak biçimde bir (T_n) dizisi var ise Γ, yakınsak bir (T_n) dizisi bulunduruyor demektir, bu ise Γ nın ayrık olması ile çelişkidir, yani bu özellikte bir dizi yoktur.

$(\Leftarrow)$ Γ ayrık değilse, Γ da farklı öğelerin $(T_n) \rightarrow T$ olacak biçimde bir (T_n) dizisi ve üstelik $(T_n^{-1}) \rightarrow T^{-1}$ olacak biçimde T^{-1} dönüşümü vardır. Böylece $(T_{n+1}T_n^{-1}) \rightarrow TT^{-1} = I$ olur. Eğer $(T_{n+1}T_n^{-1})$ dizisi sadece sonlu çoklukta farklı öğe bulunduruyorsa, öyle bir N sayısı vardır ki her $n>N$ için $T_{n+1}T_n^{-1} = I$ olur, bu ise (T_n) dizisinin farklı öğelerden oluştuğu varsayımı ile çelişir. Böylece $(T_{n+1}T_n^{-1})$ dizisi sonsuz çoklukta terimlerden oluşur, bu dizinin terimleri W_m ile gösterilirse

$$W_{\mathrm{m}} = T_{m+1}T_m^{-1} \rightarrow I$$

olur.

Aşağıdaki teorem üzerinde çalıştığımız iki önemli kavram olan süreksizlik ile ayrıklık arasındaki ilişkiyi belirtmektedir.

2.2.3. Teorem. $\Gamma \subset PSL(2, \boldsymbol{R})$ olsun. Γ süreksizdir $\Leftrightarrow$ Γ ayrıktır. (Lehner 1964)

İspat. ($\Rightarrow$) Süreksiz bir grubun ayrık olduğu açıktır. Gerçektende, eğer Γ ayrık değilse farklı öğelerden oluşan bir (T_n) dizisi için $(T_n) \rightarrow I$ dır. Böylece her bir z için $T_n(z) \rightarrow z$ elde edilir ki bu Γ nın hiçbir yerde süreksiz olmadığını gösterir.

($\Leftarrow$) Γ ayrık olsun. Γ nın $\boldsymbol{U}$ da süreksiz olduğunu göstermek için $L(\Gamma) \subset \boldsymbol{R}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için her hangi $z_0 = x_0 + iy_0$, $(y_0 > 0)$ noktasının Γ nın bir limit noktası olduğunu varsayalım. O halde belli bir $z \in \boldsymbol{U}$ için $T_n(z) \rightarrow z_0$ olacak biçimde bir (T_n) dizisi vardır. Diğer yandan $PSL(2, \boldsymbol{R})$ geçişli olduğundan $A(i) = z$ olacak biçimde bir $A \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ dönüşümü vardır. Böylece $(T_n A(i)) \rightarrow z_0$, $T_n' = A^{-1}\ T_n\ A$ ve $z_1 = A^{-1}(z_0)$ olmak üzere $T_n'(i) \rightarrow z_1$ olur. Dikkat edilirse $T_n' \in \Gamma' = A^{-1}\Gamma A$ dır. $L(\Gamma') = A^{-1}L(\Gamma)$ ve $L(\Gamma)$ nın ikisi birden gerçel olacaklarından $L(\Gamma')$ nün gerçel olduğunu görelim.

$$T_n'(z) = \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n}$$

olarak alınırsa, $z_1 \in \boldsymbol{U}$ olduğundan

$$\operatorname{Im}(T_n'(i)) = \frac{1}{\gamma_n^2 + \delta_n^2} \rightarrow \operatorname{Im} z_1 > 0$$

ve

$$|T_n'(i)|^2 = \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{\gamma_n^2 + \delta_n^2} \rightarrow |z_1|^2 > 0$$

Birinci yakınsamadan $\{\gamma_n\}$ ve $\{\delta_n\}$ kümelerinin, ikinci yakınsamadan ise $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ kümelerinin sınırlı olduğunu görürüz. Böylece bu dizinin bir (T_m') alt dizisini seçebiliriz ki bu Γ' nün ayrık olmadığını belirtir. Dolayısıyla da Γ ayrık olamaz. Benzer şekilde z_0 alt yarı düzlemde de alınırsa aynı sonuç çıkar. Böylece $L(\Gamma)$ nın gerçel olduğu görülür. Dolayısıyla Γ $\boldsymbol{U}$ da süreksizdir.

Bu teoremin bir sonucu olarak,

2.2.4. Sonuç. Γ ayrık bir grup ise $L(\Gamma) \subset \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$dur.

2.2.5. Uyarı 1. Süreksiz bir grubun ayrık olacağı açıktır. Ancak bazı hallerde ayrık gruplar süreksiz olmayabilir. Örneğin

$$PSL(2, \boldsymbol{Z}[i]) = \Lambda = \{\ T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}[i]\ \text{ ve } ad - bc = 1\}$$

olarak tanımlanan *Picard grubu* ayrık bir grup olmakla birlikte bu grup $\boldsymbol{U}$ da süreksiz değildir ve $\boldsymbol{U}$ limit noktalarının kümesidir, yani $L(\Lambda) = \boldsymbol{U}$ dur.

2. Çalışmamızda $PSL(2, \boldsymbol{R})$ ve onun alt grupları ile ilgileneceğimizden, Teorem 2.2.3. gereği bizim için ayrıklık ve süreksizlik kavramları denk kavramlar olacaktır. Bu neden-le bundan sonra bu kavramlar birbirleri yerine kullanabilecektir.

2.3. FUCHS GRUPLARI

Bu kısımda özel birer ayrık grup olan Fuchs grupları üzerinde durulacak ve bunların temel özellikleri verilecektir.

2.3.1. Tanım. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin ayrık alt gruplarına *Fuchs grubu* denir.

Fuchs grupları sistematik olarak ilk defa 1880 yılında Poincare tarafından çalışılmıştır. Modüler grup ve üçgen gruplar en çok çalışılan Fuchs grup örnekleridir.

2.3.2. Örnekler 1. Bir hiperbolik öğe tarafından üretilmiş olan hiperbolik devirli gruplar, örneğin; $\lambda>1$ olmak üzere $T(z) = \lambda z$ öğesi ile üretilmiş olan hiperbolik devirli grup hiperbolik öğelerle, özdeşlik öğesinden oluşan bir Fuchs gruptur. Dikkat edilirse, bu grubu Γ ile gösterirsek $L(\Gamma) = \{0, \infty\}$dur, yani Γ, $\boldsymbol{U}$da süreksizdir (ayrıktır).

2. Bir parabolik öğe tarafından üretilmiş olan parabolik devirli gruplar, örneğin; $T(z) = z + 1$ dönüşümünün ürettiği parabolik devirli grup bir Fuchs gruptur.

3. Bir eliptik öğe tarafından üretilmiş olan eliptik devirli gruplar ayrıktır $\Leftrightarrow$ grubu üreten eliptik öğe sonludur, yani ayrık bir grupta sonsuz mertebeli eliptik öğe bulunmaz.

f çifte periyodik bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun periyotlarının kümesinin, belli $\omega_1,\omega_2 \in \boldsymbol{C}$ (ω_1,ω_2 $\boldsymbol{R}$ üzerinde doğrusal bağımsız) için

$$\Omega_f = \{\, n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \boldsymbol{Z} \,\}$$

biçiminde olduğunu daha önce belirtmiştik. Bu şekildeki Ω kümesine *kafes* ve $\{\omega_1,\omega_2\}$ çiftine de Ω kafesi için bir *taban* (baz) veya *üreteç çifti* denir. Ω kümesinin $\boldsymbol{C}$ nin bir ayrık altgrubu olduğunu da daha önce belirtmiştik.

Kafeslerin $\boldsymbol{C}$ üzerindeki hareketleri süreksizdir, yani her bir $z\in\boldsymbol{C}$ noktasının öyle birer komşuluğu vardır ki, kafeslerin özdeşlikten farklı öğeleri ile bu komşuluklar kendisi dışına taşınır, yani V_z, $z\in\boldsymbol{C}$ noktasının bir komşuluğu olmak üzere her $\omega\in\Omega$ için $\omega(V_z) \cap V_z = \phi$ olur. Benzer durum Fuchs grupları için maalesef söz konusu değildir.

Eğer Fuchs grubunun eliptik öğeleri var ise bu eliptik öğelerin üst yarı düzlemde sabit noktaları vardır ve bu sabit noktaların belirtilen özellikte birer komşuluğunu bulmak mümkün değildir. Bununla birlikte Fuchs grupları aşağıda tanımı verilecek anlamda süreksiz gruplardır.

2.3.3. Tanım. G, bir Y topolojik uzayının homeomorfizmlerinin bir grubu olsun. Her bir $y \in Y$ noktasının

"$g \in G$ için $g(V) \cap V \neq \phi$ ise $g(y) = y$ dir"

özelliğinde bir V komşuluğu var ise G grubuna Y üzerinde *has süreksiz* hareket ediyor denir.

Tanım dikkate alındığında, her bir süreksiz grubun has süreksiz olarak hareket ettiği hemen görülür. Ancak has süreksizlik kavramı süreksizlik kavramından daha zayıftır. İsmi nedeniyle has süreksizlik, süreksizlikten daha kuvvetli bir kavrammış gibi algılanmaktaysa da literatürde ısrarla has süreksizlik kavramı kullanılmaktadır. Örneğin, $z \to e^{\frac{2\pi i}{n}} z$ $(n = 2, 3, \ldots)$ ile üretilmiş olan $\boldsymbol{C}$ nin homeomorfizmlerinin sonlu grubu $\boldsymbol{C}$ üzerinde has süreksiz hareket etmekle birlikte süreksiz değildir.

Aşağıdaki teorem Fuchs gruplarının $\boldsymbol{U}$ üzerinde has süreksiz olarak hareket ettiğini göstermektedir.

2.3.4. Teorem. Γ, $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin bir alt grubu olsun.

(i) Γ bir Fuchs grubudur $\Leftrightarrow$ Γ, $\boldsymbol{U}$ üzerinde has süreksiz hareket eder.

(ii) Γ bir Fuchs grubu ve $p \in \boldsymbol{U}$ noktası Γ nın belli bir öğesinin sabit noktası olsun. p noktasının öyle bir W komşuluğu vardır ki, W komşuluğunun hiçbir noktası Γ nın özdeşlikten farklı bir öğesinin sabit noktası olamaz. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. İlk olarak bir Γ Fuchs grubunun $\boldsymbol{U}$ üzerinde has süreksiz hareket ettiğini görelim. $z_o \in \boldsymbol{U}$ ve $\overline{B_\varepsilon(z_o)}$, z_o merkezli, $\varepsilon>0$ yarıçaplı kapalı hiperbolik disk olsun. $\overline{B_\varepsilon(z_o)}$ kompakt olduğundan

$$\{T\in\Gamma \mid T(z_o)\in \overline{B_\varepsilon(z_o)}\}$$

sonlu bir kümedir. O halde öyle bir $0<\delta<\varepsilon$ sayısı vardır ki $\overline{B_\delta(z_o)}$ kapalı diski z_o noktasının Γ yörüngesinden bir başka nokta bulundurmaz. Eğer $V = \overline{B_{\delta/2}(z_o)}$ olarak alırsak, belli $S\in\Gamma$ için $V\cap S(V) \neq \phi$ olması halinde $S(z)\in V$ olacak biçimde bir $z\in V$ vardır. Böylece

$$\rho(z, z_o) < \frac{\delta}{2}, \; \rho(S(z), z_o) < \frac{\delta}{2}$$

ve dolayısıyla

$$\rho(z_o, S(z_o)) \leq \rho(z_o, S(z)) + \rho(S(z), S(z_o)) = \rho(z_o, S(z)) + \rho(z, z_o) < \delta$$

olur, ancak $\delta>0$ sayısının tanımı dikkate alınırsa $S(z_o) = z_o$ olduğu görülür. Dolaysıyla Γ, $\boldsymbol{U}$ üzerinde has süreksiz hareket eder.

(*i*) kısmının ispatını tamamlamadan önce (*ii*) yi görelim, bunun için p noktasının $S \neq I$ dönüşümünün sabit noktası olduğunu varsayalım. İspatın ilk kısmından, p noktasının öyle bir W komşuluğu vardır ki $W\cap S(W) \neq \phi$ olması halinde $S(p) = p$ olduğunu biliyoruz. Eğer $q\in W$ noktası bir $T \neq I$ dönüşümünün sabit noktası ise $W\cap T(W) \neq \phi$ ve böylece $T(q) = q$ olur. Ancak bu $T \neq I$ dönüşümünün $\boldsymbol{U}$ da iki sabit noktası olduğunu gösterir ki bu bir çelişkidir, dolayısıyla $p = q$ dur.

Şimdi ispatın (*i*) kısmını tamamlayalım, yani $\boldsymbol{U}$ üzerinde has süreksiz hareket eden bir $\Gamma\subset PSL(2, \boldsymbol{R})$ alt grubunun ayrık, yani Fuchs grubu olduğunu görelim. Tersine Γ nın ayrık olmadığını varsayalım. Γ nın özdeşlikten farklı öğeleri ile sabit bırakılamayan bir $s\in\boldsymbol{U}$ noktası seçelim. Γ ayrık olmadığından Γ nın farklı öğelerinden oluşan $T_k \to I$ özelliğinde bir (T_k) dizisi vardır. Böylece $T_k(s) \to s$ olur. s noktası Γ nın öğelerinin sabit noktası olmadığından $(T_k(s))$ dizisinin terimleri farklıdır. O halde, yakınsama gereği, s noktasının her bir komşuluğu, s noktasının Γ-yörüngesinden sonsuz çoklukta öğe bulundurur. Bu ise Γ nın has süreksiz olmadığını gösterir ki bu bir çelişkidir.

2.3.5. Sonuç. $\Gamma \subset PSL(2, \boldsymbol{R})$ olsun. Γ bir Fuchs grubudur $\Leftrightarrow$ her $z \in \boldsymbol{U}$ için z noktasının Γ yörüngesi Γ_z, $\boldsymbol{U}$ nun bir ayrık alt kümesidir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. ($\Rightarrow$) İlk olarak Γ_z nin ayrık olduğunu varsayalım. Bu durumda z merkezli, $\varepsilon>0$ yarıçaplı açık bir $B_\varepsilon(z)$ hiperbolik diski vardır ve bu disk Γ_z yörüngesinin z den başka hiçbir noktasını bulundurmaz. Eğer $V \subset B_{\varepsilon/2}$ olarak alınırsa, yukarıdaki teoremin ispatındaki düşünce ile, $V \cap S(V) \neq \phi$ olması halinde $S(z) = z$ olduğu sonucu elde edilir. Böylece, yine yukarıdaki teorem gereği, Γ bir Fuchs grubudur.
($\Leftarrow$) Tersine Γ bir Fuchs grubu ise $\boldsymbol{U}$ üzerinde has süreksiz hareket eder ve böylece her Γ_z yörüngesi $\boldsymbol{U}$ da ayrıktır.

Buna göre, $z \in \boldsymbol{U}$ ve (T_k), Γ nın farklı öğelerinin bir dizisi olmak üzere eğer $(T_k(z)) \rightarrow \alpha \in \Sigma$ ise $\alpha \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ dur, yani tüm Γ Fuchs grupları için $L(\Gamma) \subset \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ dur.

2.3.6. Teorem. Γ aynı sabit nokta kümesine sahip öğelerden oluşan bir Fuchs grubu ise Γ devirli bir gruptur. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. Eğer $S \in \Gamma$ bir hiperbolik öğe ise S dönüşümünün 0 ve ∞ noktalarını sabit bıraktığını varsayabiliriz. Bu durumda $S \in \Gamma$ bir hiperbolik (parabolik, eliptik) dönüşüm ise S dönüşümünün Γ daki merkezleştiricisi özdeşlik öğesi ve S ile aynı sabit nokta kümesine sahip tüm hiperbolik (parabolik, eliptik) dönüşümlerden oluştuğundan Γ nın tüm dönüşümleri hiperboliktir ve üstelik 0, ∞ noktalarını sabit bırakırlar. O halde Γ, $H = \{ T \mid T(z) = \lambda z, \lambda > 0 \}$ grubunun ayrık bir alt grubudur. H, topolojik grup olarak, pozitif reel sayıların çarpımına göre bir grup olan $\boldsymbol{R}^*$ a izomorf ve $\boldsymbol{R}^*$ da topolojik grup olarak $\boldsymbol{R}$ ye izomorftur. Dolayısıyla $\boldsymbol{R}$ nin her bir ayrık alt grubu sonsuz devirli olduğundan Γ da sonsuz devirlidir.

Eğer $S \in \Gamma$ bir parabolik öğe ise S dönüşümünün ∞ noktasını sabit bıraktığını varsayabiliriz. Bu durumda Γ nın tüm dönüşümleri paraboliktir ve ∞ noktasını sabit bırakırlar. O halde Γ, $H = \{ T \mid T(z) = z + k, k \in \boldsymbol{R} \}$ grubunun ayrık bir alt grubudur ve H

pozitif gerçel sayıların toplamına göre bir grup olan ***R*** ye izomorf ve ***R*** nin ayrık alt grubu sonsuz devirli olduğundan Γ sonsuz devirlidir.

Eğer Γ eliptik öğelerden oluşuyorsa Γ nın tüm dönüşümleri,

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i}=e^{i\theta}\,\frac{z-i}{z+i}\,,\ (0\le\theta<2\pi)$$

biçiminde olup S^1 e izomorf olan bir grup oluştururlar. S^1in ayrık bir alt grubu ise ancak sonlu devirli bir grup olacağından Γ da sonlu devirlidir.

2.3.7. Teorem. Her bir abelyen Fuchs grubu devirlidir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. Γ abelyen bir Fuchs grubu olsun. O halde herhangi S, $T\in\Gamma$ için $ST=TS$ olduğundan S ve T nin sabit nokta kümeleri aynıdır ve yukarıdaki teorem gereği Γ devirlidir.

2.3.8. Teorem. Γ devirli olmayan bir Fuchs grubu ise Γ nın $PSL(2, \boldsymbol{R})$ deki normalleştiricisi de bir Fuchs grubudur. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. Tersine Γ nın $PSL(2, \boldsymbol{R})$ deki normalleştiricisinin bir Fuchs grubu olmadığını varsayalım. Bu durumda Γ da $i\to\infty$ için $(T_i)\to I$ olacak biçimde farklı öğelerinin bir (T_n) dizisi vardır. O halde $S\in\Gamma$ $(S\neq I)$ ise $i\to\infty$ için $T_i\,S\,T_i^{-1}\to S$ olur. Γ ayrık olduğundan her $i>m$ için $T_i\,S\,T_i^{-1}=S$ olacak biçimde bir m sayısı vardır ve dolayısıyla i nin tüm bu değerleri için T_i ve S değişmeli olduğundan T_i ve S dönüşümleri aynı sabit nokta kümesine sahiptirler. Γ devirli olmadığından, yukarıdaki teorem gereği, abelyen değildir ve dolayısıyla S nin sabit nokta kümesinden farklı sabit nokta kümesine sahip olan bir $S'\in\Gamma$ öğesi vardır. Diğer yandan T_i dönüşümleri, yeterince büyük i ler için S' ile aynı sabit nokta kümesine sahiptir ve böylece S', S ile aynı sabit nokta kümesine sahip olur ki bu bir çelişkidir.

2.3.9. Teorem. Γ Fuchs grubu sadece parabolik dönüşümlerden oluşuyorsa bu dönüşümler ortak bir sabit noktası olan parabolik dönüşümlerdir, yani sabit nokta kümesi aynı olan dönüşümlerdir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. T, Γ nın özdeşlikten farklı herhangi bir öğesi olsun. T dönüşümünün sabit noktasının ∞ noktası olduğunu varsayarsak bu dönüşümü $T(z)=z+\lambda$, $\lambda\neq 0$ biçiminde ifade edebiliriz. $S\in\Gamma$ ve üstelik S dönüşümünün ∞ noktasını sabit bırakmadığını varsayalım. Bu durumda $c\neq 0$ olmak üzere

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçimindedir. O halde

$$W_n(z) = T^n\, S(z) = \frac{(a + n\lambda c)z + B}{Cz + d}$$

olur ve $\lambda c \neq 0$ olacağından yeterince büyük n sayıları için

$$|\ \text{iz}\ W_n\ | = |\ a + n\lambda c + d\ | = |\ a + d + n\lambda c\ | > 2$$

olur ki bu W_n dönüşümünün parabolik olmadığını gösterir. Dolayısıyla Γ da sadece aynı sabit nokta kümesine sahip olan parabolik dönüşümler bulunur.

Bu teoremden, sadece aynı sabit nokta kümesine sahip olan parabolik dönüşümlerin oluşturduğu grubun süreksiz (ayrık) olabileceği görülür.

3. BÖLÜM
TEMEL BÖLGELER

Kafesler, Euclidean eşmetrilerin süreksiz gruplarıdır. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin ayrık alt grupları olan Fuchs grupları ise hiperbolik eşmetrilerin süreksiz gruplarıdır. Temel bölge kavramı ise, her iki halde de, süreksiz gruplar için oldukça önemli bir kavramdır. Bu grupların $\boldsymbol{C}$ veya $\boldsymbol{U}$ üzerindeki hareketleri, temel bölge üzerindeki hareketleri ile belirlenebilir. Daha da fazlası, temel bölgenin bölüm uzayı ile grubun üzerinde hareket ettiği uzayın bölüm uzayı olan Riemann yüzeyleri bir birine homeomorf olan yüzeylerdir.

Bu kısımda ilk olarak genel süreksiz gruplar için temel bölge kavramı tanımlandıktan ve temel özellikleri verildikten sonra $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin alt grupları için temel bölge kavramına geçilecektir.

3.1. GENEL SÜREKSİZ GRUPLAR İÇİN TEMEL BÖLGE KAVRAMI

$\Omega = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n\in\boldsymbol{Z},\ \omega_1,\omega_2\in\boldsymbol{C}$ ve $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \notin \boldsymbol{R}\ \}$ kafesi verilsin ve $z_1, z_2\in\boldsymbol{C}$ olsun. Eğer $z_1 - z_2\in\Omega$ ise z_1 ve z_2 noktalarına Ω kafesine göre *denk noktalar* denir ve bu durum $z_1\sim z_2$ ile gösterilir. Denk noktaların oluşturduğu denklik sınıfları Ω da $z + \Omega$ kosetlerini oluşturur ve bu kosetlerin kümesi toplama işlemine göre bir gruptur.

$\omega\in\Omega$ olmak üzere $t_\omega : z \rightarrow z + \omega$ kayma dönüşümlerini dikkate alırsak Ω kafesini $\boldsymbol{C}$ üzerinde hareket eden dönüşümlerin grubu olarak da düşünebiliriz.

$$t_{(\omega_1+\omega_2)} = t_{\omega_1} \circ t_{\omega_2}$$

olacağından $\Omega \cong \{\ t_\omega \mid \omega\in\Omega\ \}$ dır, yani Ω kafesi, $\boldsymbol{C}$ üzerinde hareket eden kayma dönüşümlerinin grubu olarak da düşünülebilir.

Şimdi Ω kafesinin $\boldsymbol{C}$ üzerindeki bu hareketinin bazı özelliklerini belirtelim. Ω kafesine göre denk olmanın tanımı ve yukarıdaki izomorfizm dikkate alınırsa yukarıdaki denklik tanımı, "z_1, $z_2 \in \boldsymbol{C}$ noktaları Ω kafesine göre denktir $\Leftrightarrow$ Ω nın $\boldsymbol{C}$ üzerindeki bu hareketi altında z_1 ve z_2 noktaları aynı yörüngededir" biçiminde verilebilir.

3.1.1. Tanım. $\boldsymbol{C}$ nin kapalı bağlantılı olan bir P alt kümesi

i) Her $z \in \boldsymbol{C}$ noktası için P kümesinde Ω_z yörüngesinden en az bir nokta vardır (yani her bir $z \in \boldsymbol{C}$ noktası P kümesindeki belli bir noktaya denktir.)

ii) P kümesinin içinde aynı Ω yörüngesinden iki nokta yoktur (yani P kümesinin içindeki nokta çiftleri denk olamazlar)

şartlarını gerçekliyorsa P ye Ω kafesi için bir *temel bölge* denir.

Özel olarak P sonlu sayıda kenarı olan bir Euclidean poligon ise P ye Ω kafesi için bir *temel poligon* ve P paralel kenar ise P ye Ω kafesi için bir *temel paralel kenar* denir.

Eğer P, Ω kafesi için bir temel bölge ise belli bir $t \in \boldsymbol{C}$ noktası için

$$P + t = \{\, z + t \mid z \in P \,\}$$

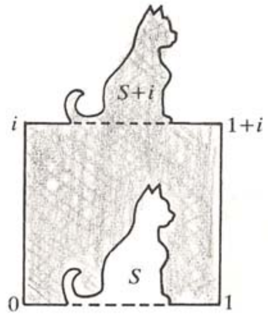
kümesi de Ω kafesi için bir temel bölgedir. Böylece Ω kafesi için bir temel bölgenin bir tek olmadığı gibi, uygun bir kaydırma ile temel bölgeyi istediğimiz noktaları, örneğin 0 noktasını, içinde bulunduran bir temel bölge haline de getirebiliriz. Bu nedenle, genellikle, orijine yakın olan ve geometrik olarak estetik olan temel bölgeler daha çok kullanılırlar.

Paralel kenar ve poligonlardan başka temel bölgelerde vardır. Örneğin, $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesi için *P,* köşeleri 0, ω_1, ω_2 , $\omega_1 + \omega_2$ olan temel paralel kenar olsun. Bu durumda

$$T(z) = z + \omega_2$$

dönüşümü P nin bir kenarını karşı kenarına resmeder.

Eğer P temel bölgesinden bir S parçasını keser ve karşı köşedeki $S + \omega_2$ üzerine yapıştırırsak elde ettiğimiz $(P \setminus S) \cup (S + \omega_2)$ kümesi de bir temel bölgedir. Benzer şekilde $U(z) = z - \omega_2$ ve $V(z) = z \pm \omega_1$ dönüşümlerini de kullanabiliriz.

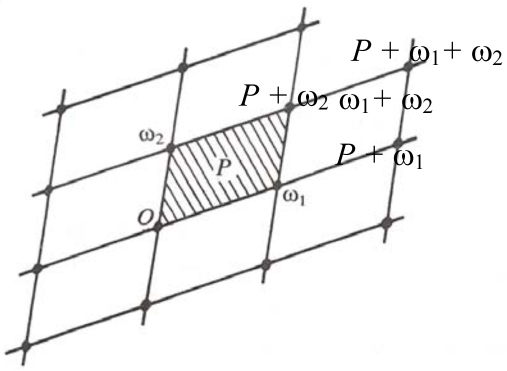


Şekil 3.1.1 $(P \setminus S) \cup (S + i)$ Temel Bölgesi

Temel bölge kavramının tanımındaki (i) ve (ii) koşulları dikkate alınırsa bu kümenin şu özellikleri ortaya çıkar.

i) Tanımdaki (i) koşulu gereği, eğer P, Ω kafesi için bir temel bölge ise P ve P nin (Ω nın hareketi altındaki) resimleri (yani P nin $\omega \in \Omega$ olmak üzere $P + \omega$ kaymaları) ile $\boldsymbol{C}$ düzlemi tam olarak örtülür (kaplanır).

ii) P kümesinde aynı yörüngeden iki nokta bulunmadığından bu örtme sırasında P ve P nin resimleri birbirleri ile sadece sınırda kesişebilirler, yani P ve P nin resimleri üst üste gelemezler.



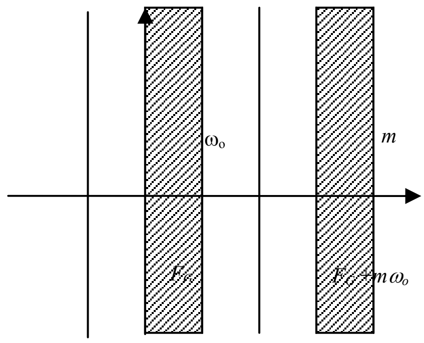
Şekil 3.1.2 $\boldsymbol{C}$ nin Bir Döşemesi

C nin bu şekilde, *P* ve *P* nin resimleri ile üst üste gelmeden ve açıkta nokta bırakmadan, örtülmesine ***C*** nin bir *döşemesi* denir.

3.1.2. Örnekler 1. $\omega_o \in \boldsymbol{C} \backslash \{0\}$ olmak üzere basit periyodik fonksiyonların kümesi

$$G = \{ f \mid f(z) = z + m\omega_o,\ m \in \boldsymbol{Z} \}$$

için periyot şeridi bir temel bölgedir. F_G, G için bir temel bölge ve $F_G + m\omega_o$ da G için bir temel bölgedir.

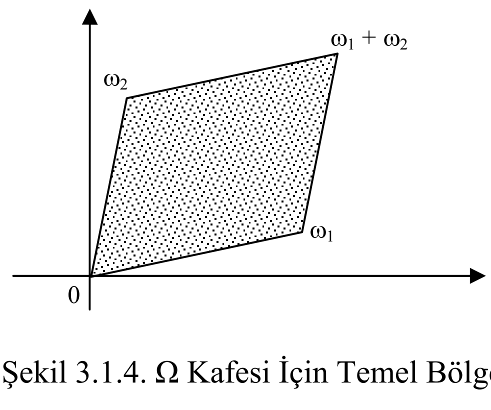


Şekil 3.1.3. $G = \{ f \mid f(z) = z + m\omega_o,\ m \in \boldsymbol{Z} \}$ Grubu İçin Bir Temel Bölge

2. Köşeleri 0, ω_1, ω_2 , $\omega_1 + \omega_2$ olan bir *P* paralel kenarı

$$\Omega = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \boldsymbol{Z},\ \omega_1, \omega_2 \in \boldsymbol{C} \text{ ve } \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \boldsymbol{R} \}$$

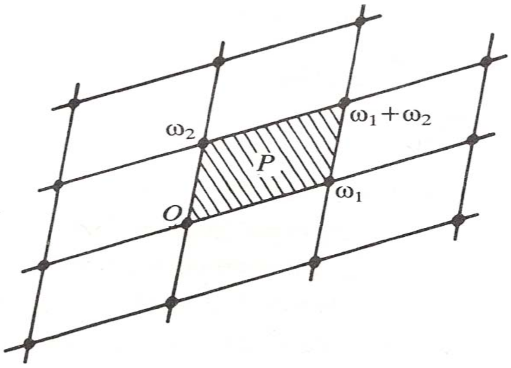
kafesi için bir temel bölgedir.



Şekil 3.1.4. Ω Kafesi İçin Temel Bölge

3. P, Ω kafesi için bir temel bölge olmak üzere P ve P nin resimleri ile $\boldsymbol{C}$ nin döşemesi

$$T_C = \{ P + \omega \mid \omega \in \Omega \} \text{dir.}$$



Şekil 3.1.5 P Temel Bölgesinin Resimleri İle $\boldsymbol{C}$ nin Bir Döşemesi

3.1.3. Tanım. Ω bir kafes olmak üzere

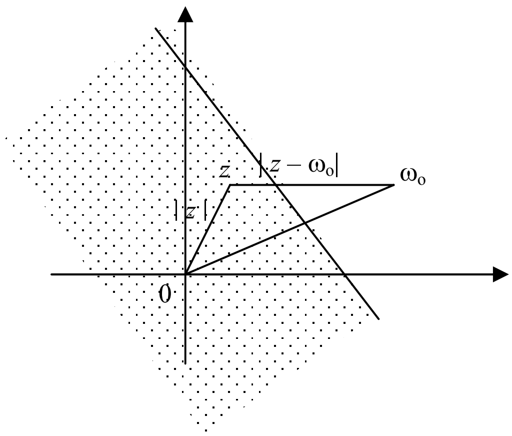
$$D(\Omega) = \{ z \in \boldsymbol{C} \mid \text{ her } \omega \in \Omega \text{ için } |z| \leq |z - \omega| \}$$

olarak tanımlanan $D(\Omega)$ kümesine *Dirichlet bölgesi* denir.

Dirichlet bölgesinin tanımına dikkat edilirse, bu bölge her $\omega \in \boldsymbol{C}$ için

$$|z| \leq |z - \omega|$$

eşitsizliğini gerçekleyen, yani 0 noktasına uzaklıkları, ω noktasına olan uzaklığından daha küçük olan, z noktalarının kümesidir. Doğal olarak $0 \in D(\Omega)$ dir, üstelik Ω ayrık olduğundan sıfırın bir komşuluğunu da bulundurur.

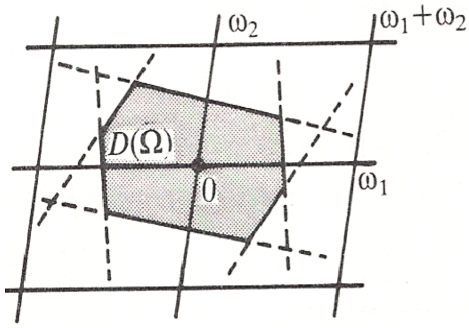


Şekil 3.1.6 Dirichlet Bölgesi

Belli bir ω_o için

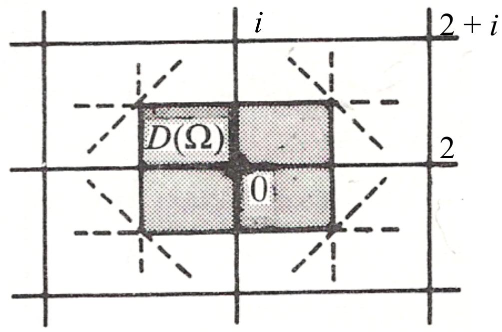
$$\{\, z\in \boldsymbol{C} :\ |\, z\,| \leq |\, z-\omega_o\,|\,\}$$

kümesi, 0 ve ω_o noktalarını birleştiren doğru parçasının orta dikmesiyle sınırlı kapalı yarı düzlemdir. Dolayısıyla $D(\Omega)$ bu şekildeki yarı düzlemlerin bir arakesitinden başka bir şey değildir, her bir yarı düzlem konveks olduğundan $D(\Omega)$ da konvekstir. $D(\Omega)$ nın boş olmadığı ise en azından $0\in D(\Omega)$ oluşundan açıktır. Dolayısıyla $D(\Omega)$ bir poligondur. Bu nedenle $D(\Omega)$ ya genellikle *Dirichlet poligonu* denir. $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesi için $D(\Omega)$ Dirichlet poligonu aşağıdaki şekilde bir altıgen poligondur.



Şekil 3.1.7 $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesi için $D(\Omega)$ Dirichlet poligonu

Diğer yandan $\Omega\,(2, i) = \{\, 2m + ni \mid m, n\in \boldsymbol{Z}\,\}$ kafesi için $D(\Omega)$ bir dikdörtgen olur.



Şekil 3.1.8 $\Omega(2, i)$ kafesi için $D(\Omega)$ Dirichlet poligonu

3.1.4. Teorem. $D(\Omega)$ Dirichlet bölgesi Ω kafesi için bir temel bölgedir. (Jones ve Singerman 1987)

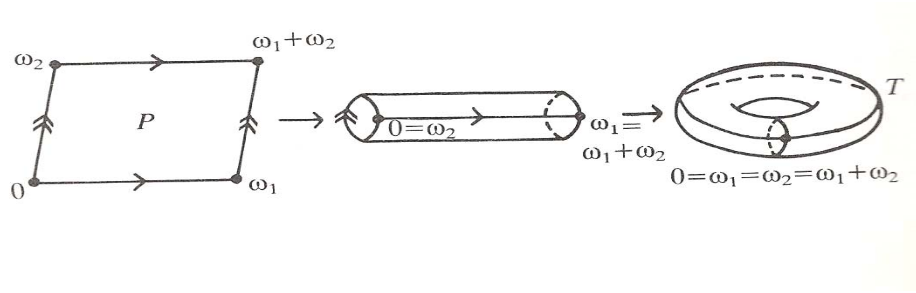
İspat. $z_1 \in \boldsymbol{C}$ keyfi bir nokta ve z_0, z_1 noktasının Ω yörüngesindeki modülü en küçük olan bir nokta olsun. Bu durumda her bir $\omega \in \Omega$ için $|\, z_0 \,| \leq |\, z_0 - \omega \,|$ dir ve dolayısıyla $z_0 \in D(\Omega)$ olur. O halde $D(\Omega)$, her bir Ω yörüngesinden en az bir nokta bulundurur.

Şimdi $D(\Omega)$ nın her bir yörüngeden sadece bir tek öğe bulundurduğunu, yani z_1 ve z_2 noktaları $D(\Omega)$ nın iç noktaları ise bu noktaların aynı Ω yörüngesinde bulunamayacağını görelim. Eğer belli bir $\omega \in \Omega \backslash \{0\}$ için $|\, z \,| = |\, z - \omega \,|$ ise ya $z \notin D(\Omega)$ dır ya da z noktası $D(\Omega)$ nın sınırında kalır. O halde z noktası $D(\Omega)$ nın bir iç noktası ise her $\omega \in \Omega \backslash \{0\}$ için $|\, z \,| < |\, z - \omega \,|$ dir. Eğer $D(\Omega)$ nın z_1 ve z_2 iç noktaları aynı Ω yörüngesinde ise $|\, z_1 \,| < |\, z_2 \,|$ ve $|\, z_2 \,| < |\, z_1 \,|$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $D(\Omega)$ nın içinde her bir Ω yörüngesinden en çok bir öğe vardır.

$D(\Omega)$ kapalı yarı düzlemlerin arakesiti olduğundan kapalıdır ve üstelik konveks olduğundan yol bağlantılı ve dolayısıyla bağlantılıdır. Böylece $D(\Omega)$ bir temel bölgedir.

Bir Ω kafesi için temel bölge bir tek olmadığı halde Ω için temel bölgelerin alanı bir tektir, yani temel bölgenin alanı Ω kafesinin bir fonksiyonu olarak düşünülebilir.

f, $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesine göre çifte periyodik bir fonksiyon olsun. f nin Ω için temel bölge olan P kümesi üzerindeki hareketi yardımıyla f fonksiyonunun $\boldsymbol{C}$ üzerindeki hareketinin belirlenebileceğini belirtmiştik. P temel bölgesini, köşeleri 0, ω_1, ω_2 , $\omega_1 + \omega_2$ olan bir paralel kenar olarak alalım. f fonksiyonu çifte periyodik olduğundan f nin P üzerindeki hareketi $P+\omega$ $(\omega \in \Omega)$ kaymaları üzerinde tekrar edecektir. Üstelik f, P nin denk sınır noktaları üzerinde de aynı değeri alacaktır. Bu nedenle bu sınır noktalarını özdeşleyerek bir T uzayı elde edebiliriz ve f yi de bu uzay üzerinde tanımlı olarak düşünebiliriz. Bu şekilde elde ettiğimiz uzay bir *tor* dur.



Şekil 3.1.9 *P* temel Bölgesinden Torun Elde Edilişi

Tersine T uzayı üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon da $\boldsymbol{C}$ üzerinde tanımlı bir çifte periyodik fonksiyon olarak düşünülebilir.

P temel bölgesinin tanımı hatırlanırsa, $\boldsymbol{C}$ deki her Ω yörüngesi için T uzayında bir tek nokta vardır, tersine T uzayındaki her bir nokta içinde bir tek Ω yörüngesi vardır. Dolayısıyla T, Ω yörüngelerinin (denklik sınıflarının) yani $\boldsymbol{C}$ de Ω kosetlerinin, $\boldsymbol{C}/\Omega$ kümesi olarak düşünülebilir.

Yukarıda Ω nın $\boldsymbol{C}$ üzerindeki hareketinden faydalanılarak T nin oluşturulması işlemini keyfi bir topolojik uzaya genelleştirmek mümkündür;

X bir topolojik uzay ve G, X in homeomorfizmlerinin bir grubu olsun. Böylece G nin X üzerindeki hareketi ile X uzayı G-yörüngelerine bölünür(ayrılır). Eğer x in G-yörüngesi $[x]_G$ ile gösterilirse, " $y\in[x]_G \Leftrightarrow$ belli bir $g\in G$ için $g(x) = y$" dir. G-yörüngelerinin kümesi X/G ile gösterilir ve bu uzaya *yörünge uzayı* (veya *bölüm uzayı*) denir.

X/G üzerindeki topoloji ise

$$p\colon \mathrm{X} \to X/G,\ p(x) = [x]_G$$

izdüşüm dönüşümü yardımıyla

$$\tau_{X/G} = \{\ T\subset X/G \mid p^{-1}(T)\in\tau_X\}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu tanım ile p izdüşüm fonksiyonunu süreklidir ve $U\subset X$ açık ise

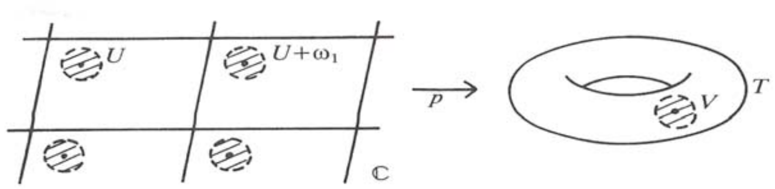
$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$$

açık (her bir $g \in G$ bir homeomorfizmdir) olduğundan $p(U)$ da açıktır, yani p aynı zamanda açık bir dönüşümdür.

Tekrar $T = \boldsymbol{C}/\Omega$ tor örneğine dönelim. Her bir $[\ z\ ] = [\ z\ ]_\Omega \in T$ noktası için $p^{-1}([\ z\ ])$, z noktasının $[\ z\ ] = z + \Omega$, Ω-yörüngesindedir ve dolayısıyla da ayrıktır. $p^{-1}([\ z\ ])$ nin herhangi iki noktası arasındaki en küçük uzaklığı d ile gösterelim. U, $p^{-1}([\ z\ ])$ de herhangi bir noktayı merkez alan ve yarıçapı en fazla $\dfrac{d}{2}$ kadar olan bir açık disk olsun. Bu durumda U da her bir Ω-yörüngesinden en çok bir nokta bulunur. $p(U) = V$ olarak alınırsa

$$p \colon U \to V$$

dönüşümü birebir, örten, açık ve sürekli bir dönüşüm olacağından bir homeomorfizmdir. Böylece her bir $[\ z\ ] \in T$ noktasının $\boldsymbol{C}$ deki bir açık kümeye homeomorf olan bir V komşuluğu olduğu görülür. Bu özellikteki uzaya bir *yüzey* denir. Tor, küreden sonra en basit kompakt yüzey örneklerinden bir tanesidir.



Şekil 3.1.10 T nin bir örtü uzayı

$p^{-1}(V)$, her birisi p ile V üzerine homeomorf olarak resmedilen $U + \omega$ $(\omega \in \Omega)$ biçimindeki ayrık açık kümelerden oluşur. Bu durumda $\boldsymbol{C}$ ye T nin bir örtü uzayı ve p dönüşümüne de bir *örtme dönüşümü* adı verilir.

3.2. AYRIK GRUPLAR İÇİN TEMEL BÖLGE KAVRAMI

Bu kısımda $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin ayrık alt gruplarının temel bölgeleri üzerinde durulacaktır. İlk olarak ayrık gruplar için Dirichlet bölgesi kavramı verilecek ve temel özellikleri belirtilecektir.

Γ herhangi bir Fuchs grubu ve p, $\Gamma\backslash\{I\}$nın herhangi bir öğesi ile sabit bırakılamayan bir nokta olmak üzere Γ için p merkezli Dirichlet bölgesi

$$D_p(\Gamma) = \{\, z\in \boldsymbol{U} \mid \text{ her } T\in \Gamma \text{ için } \rho(z, p) \le \rho(\, z, T(p))\,\}$$

olarak tanımlanır.

Hiperbolik metrik $PSL(2, \boldsymbol{R})$ altında invaryant kaldığından bu kümeyi,

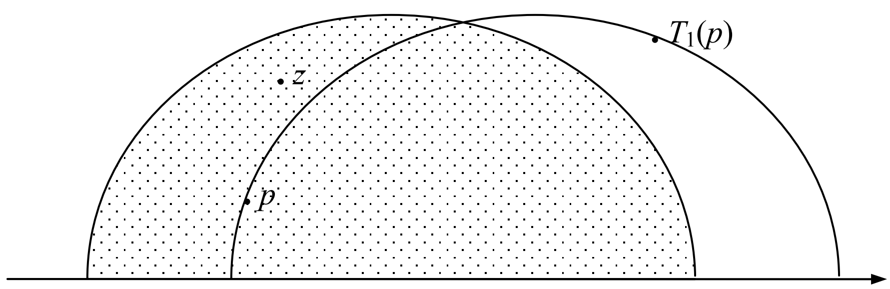
$$D_p(\Gamma) = \{\, z\in \boldsymbol{U} \mid \text{ her } T\in \Gamma \text{ için } \rho(z, p) \le \rho(T(z), p)\,\}$$

biçiminde de ifade edebiliriz.

Daha öncede belirtildiği gibi, her bir belli $T_1\in \Gamma$ için

$$\rho(z, p) \le \rho(\, z, T_1(p))$$

eşitsizliği, hiperbolik metrik ile, p noktasına olan uzaklığı $T_1(p)$ ye uzaklığından daha küçük olan z noktalarını belirtir. Doğal olarak $p\in D_p(\Gamma)$ dır ve p noktasının Γ yörüngesi olan Γ_p ayrık olduğundan $D_p(\Gamma)$, p nin bir komşuluğunu da kapsar.



Şekil 3.1.11 p merkezli Dirichlet bölgesi

p noktası ile $T_1(p)$ yi birleştiren H-doğru parçasının hiperbolik orta dikmesi p noktasını bulunduran bir yarı düzlem belirler. Dolayısıyla daha önce olduğu gibi, $D_p(\Gamma)$

hiperbolik yarı düzlemlerin arakesitidir ve dolayısıyla bir hiperbolik konveks bölgedir. Eğer $D_p(\Gamma)$ sonlu sayıda hiperbolik düzlemin arakesiti ise $D_p(\Gamma)$, konveks bir hiperbolik poligon olur.

Daha önce kafesler için oluşturulan Dirichlet bölgesi, 0 merkezli ve bölgeyi oluştururken kullanılan metrik Euclidean metrikti. Burada 0 noktası yerine grubun öğeleri ile sabit bırakılamayan bir p noktası ve hiperbolik metrik dikkate alınmıştır.

Daha önce genel süreksiz gruplar için verilen Teorem 3.1.4. dikkate alınırsa, $D_p(\Gamma)$ nın Γ için bir temel bölge olduğu görülür.

Hiperbolik metrik yerine Euclidean metrik alınarak yukarıdaki Dirichlet bölgesi tanımı daha kullanışlı bir hale getirilebilir.

$$\sinh^2 \frac{1}{2}\,\rho(z, w) = \frac{|z-w|^2}{4\,Im(z)\,Im(w)}$$

eşitliği ve $\alpha>0$ için $\sinh^2 \alpha$ fonksiyonunun monoton artan olduğu dikkate alınırsa

$$D_p(\Gamma) = \left\{\; z\in \boldsymbol{U} \;\middle|\; \text{her } T\in \Gamma \text{ için } \frac{|z-p|^2}{\mathrm{Im}(z)} \leq \frac{|T(z)-p|^2}{\mathrm{Im}\,T(z)} \;\right\}$$

yazılabilir. Eğer $a, b, c, d\in \boldsymbol{R}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ise

$$\mathrm{Im}T(z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

olduğundan

$$D_p(\Gamma) = \left\{\; z\in \boldsymbol{U} \;\middle|\; \text{her } T\in \Gamma \text{ için } \left|\frac{T(z)-p}{z-p}\right| \geq \frac{1}{|cz+d|} \;\right\}$$

haline gelir. Bu eşitlik yardımıyla temel bölge daha kolay bir şekilde belirlenebilir.

Bunun bir uygulaması olarak

$$\Gamma =\{\; T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \;\; a, b, c, d\in \boldsymbol{Z} \text{ ve } ad - bc = 1\}$$

modüler grubu için bir Dirichlet bölgesi oluşturalım. $k>1$ olmak üzere ki noktası Γ nın özdeşlikten farklı hiçbir öğesinin sabit noktası değildir. Bu nedenle $p = ki$ seçerek $D_p(\Gamma)$ bölgesini oluşturalım.

$D_p(\Gamma)$ nin tanımında T yerine $T(z) = z + 1$ veya $T(z) = z - 1$ alınırsa, $c = 0$, $d = 1$ olduğundan

$$| z \pm 1 - ki | \geq | z - ki |$$

eşitsizliği elde edilir ki bu Euclidean metriğe göre ki noktasına $ki \pm 1$ noktasından daha yakın olan noktalarını belirtir, yani $D_{ki}(\Gamma)$ bölgesi,

$$\left\{ \; z \in \boldsymbol{U} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \; \right\}$$

şerit bölgesi içinde kalır.

Şimdi de $T(z) = -\dfrac{1}{z}$ dönüşümünü dikkate alalım, bu durumda $c = 1$, $d = 0$ olduğundan her $z \in D_{ki}(\Gamma)$ için

$$\frac{\left| -\dfrac{1}{z} - ki \right|}{| z - ki |} \geq \frac{1}{| z |}$$

olur ve dolayısıyla

$$| 1 + ki\, z |^2 \geq | z - ki |^2$$

eşitsizliği elde edilir.

$$| 1 + ki\, z |^2 = (1 + kiz)\,(1 - ki\,\bar{z})$$

yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $| z | \geq 1$ olduğu görülür. Bu ise $D_{ki}(\Gamma)$ nın birim çember ile sınırlanan bölgenin dışında kaldığını gösterir. Böylece

$$F = \left\{ \; z \in \boldsymbol{U} \;\middle|\; | z | \geq 1, \; |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \; \right\}$$

olmak üzere $D_{ki}(\Gamma) \subset F$ olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi $D_{ki}(\Gamma) = F$ olduğunu görelim. Bunun için aşağıdaki iki yardımcı teoremi kullanacağız.

3.2.1. Yardımcı Teorem. $D_{ki}(\Gamma)$ sanal eksene göre simetriktir, yani $A(z) = -\bar{z}$ sanal eksende yansıma olmak üzere $z \in D_{ki}(\Gamma)$ ise $A(z) \in D_{ki}(\Gamma)$ dir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. A dönüşümü sanal eksenin her noktasını sabit bırakan bir H-yansımadır. A bir H-eşmetri ve her $T\in\Gamma$ için $A^{-1}TA\in\Gamma$ olduğundan

$$\rho(A(z), ki) = \rho(z, ki) \le \rho(z, A^{-1}TA(ki)) = \rho(A(z), TA(ki)) = \rho(A(z), T(ki))$$

olur, bu ise $A(z)\in D_{ki}(\Gamma)$ olduğunu gösterir.

3.2.2. Yardımcı Teorem. $z\in F$, $S\in\Gamma\backslash\{I\}$ ve $w = S(z)\in F$ olsun. Bu durumda $z, w\in \partial F$ dır ve aşağıdaki haller söz konusudur;

i) $z = w$

ii) z ve w sanal eksene göre simetriktir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\boldsymbol{Z}$ ve $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ olmak üzere $S(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |\gamma z+\delta|^2 &= (\gamma z+\delta)(\gamma\bar{z}+\delta) = \gamma^2|z|^2 + 2\gamma\delta\mathrm{Re}(z) + \delta^2 \\ &\ge \gamma^2 - \gamma\delta + \delta^2 \\ &\ge 1 \end{aligned}$$

olur. (Son eşitsizlik $\gamma\delta\le 0$ olması halinde açıktır, eğer $\gamma\delta>0$ ise $\gamma^2 - \gamma\delta + \delta^2 = (\gamma-\delta)^2 + \gamma\delta \ge 1$ yazılarak görülebilir) O halde

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|\gamma z+\delta|^2} \le \mathrm{Im}(z)$$

olur. Diğer yandan z ve w nin rollerini değiştirirsek, $\mathrm{Im}(z) \le \mathrm{Im}(w)$ olur ki bu $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$ ve $|\gamma z+\delta|^2 = 1$ olduğunu gösterir ve dolayısıyla yukarıdaki her bir eşitsizlik eşitlik haline dönüşür. Böylece

$$(\gamma-\delta)^2 + \gamma\delta = 1 \ (*)$$

ve

$$\gamma^2(|z|^2 - 1) + \gamma\delta\,(2\mathrm{Re}(z) + 1) = 0 \ (**)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda üç hal söz konusudur.

a) $\gamma = 0$ ve $\delta = \pm 1$ ise $S(z) = z \pm 1$ olur ve dolayısıyla z ve w noktaları F nin dikey sınırında kalır (şekildeki z_1 ve w_1 noktaları gibi)

b) $\gamma = \pm 1$ ve $\delta = 0$ ise (**) eşitsizliğinden $|z| = 1$ olur. Bu halde,

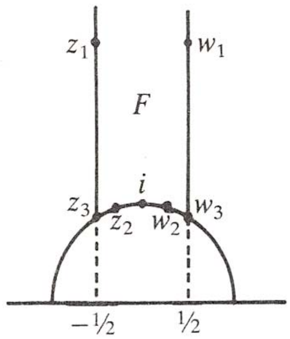
$$S(z) = \frac{\alpha z \pm 1}{\pm z} = \pm\alpha - \frac{1}{z} = \pm\alpha - \bar{z}$$

dir. $S(z) \in F$ olduğundan α = 0, –1 veya 1 dir. Eğer α = 0 ise $S(z) = -\frac{1}{z}$ olur ve z ve w noktaları şekildeki z_2 ve w_2 noktaları gibidir ($z_2 = w_2 = i$ olabilir). $\alpha = \pm 1$ ise $S(z) = \pm 1 - \frac{1}{z}$ olur ve bu durumda $z = \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}$ ve $S(z) = z$ dir (şekildeki $z = z_3$ veya w_3).

c) $\gamma = \delta = \pm 1$ ise (**) eşitsizliğinden $|z| = 1$ ve $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ olur ki bu durumda $z = z_3$ dir. $S(z_3) \in F$ ve $S(z_3)$ ile z_3 aynı sanal kısma sahip olduklarından ya $S(z_3) = z_3$ ya da $S(z_3) = w_3$ olur.

Her halde de, $S(z) = z$ veya $S(z)$ ve z sanal eksene göre simetriktir.

Buna göre, $z_0 \in F$ olduğunu varsayarsak, $D_{ki}(\Gamma)$, Γ için bir temel bölge olduğundan $T(z_0) \in D_{ki}(\Gamma) \subset F$ olacak biçimde bir $T \in \Gamma$ vardır. İkinci yardımcı teorem gereği $T(z_0) = z_0$ dır veya z_0 ve $T(z_0)$sanal eksene göre simetrik noktalardır. O halde birinci yardımcı teorem gereği $z_0 \in D_{ki}(\Gamma)$ dur. Böylece $D_{ki}(\Gamma) = F$ olduğu görülür.



Şekil 3.1.12 Γ Modüler Grubu İçin Temel Bölge

3.2.3. Sonuç. $F = \{ z \in \boldsymbol{U} \mid \frac{-1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \}$ kümesi, Γ modüler grubu için bir temel bölgedir.

Kafesler için Dirichlet bölgeleri dört ya da altı kenarlı birer poligon iken Fuchs grupları için Dirichlet bölgeleri çok daha karmaşık olabilirler. Bu bölgeler sadece hiperbolik doğrularla sınırlı olabileceği gibi bazı hallerde gerçel eksenin bir kısmıyla da sınırlı olabilir. Dirichlet bölgesini oluşturan iki hiperbolik doğru $\boldsymbol{U}$ da bir noktada kesişiyorlarsa bu kesiştikleri noktaya Dirichlet bölgesinin bir *köşesi* denir.

Fuchs grubunun temel bölgesi ve onun tüm resimleriyle elde edilen $\boldsymbol{U}$ nun döşemesiyle ilgileneceğiz. Eğer bu temel bölge bir Dirichlet bölgesi ise bu döşemeye *Dirichlet döşemesi* adı verilir. Dirichlet bölgeleri yerel olarak oldukça önemli özelliklere sahiptir. Bu özelliklerden birisi de yerel sonluluktur.

3.2.4. Tanım. F, Γ Fuchs grubu için bir temel bölge olsun. Eğer her bir $a \in F$ noktasının sadece sonlu sayıdaki $T \in \Gamma$ dönüşümü için $V(a) \cap T(F) \neq \phi$ olacak biçimde bir $V(a)$ komşuluğu varsa F temel bölgesine *yerel sonludur* denir.

3.2.5. Teorem. Bir Dirichlet bölgesi yerel sonludur.

İspat. p, $\Gamma \backslash \{I\}$nın herhangi bir öğesinin sabit noktası olmasın. $F = D_p(\Gamma)$, $a \in F$ ve K, a noktasının kompakt bir komşuluğu olsun. Γ nın farklı öğelerinin belli bir $T_1, T_2, \ldots$ sonsuz dizisi için $K \cap T_i(F) \neq \phi$ olduğunu varsayalım. $\sigma = \sup_{z \in K} \rho(p, z)$ olarak alalım. Bu durumda her $z \in K$ için $\sigma \leq \rho(p, a) + \rho(a, z)$ olur ve K sınırlı olduğundan σ sonludur. $w_j \in K \cap T_j(F)$ olsun. O halde $z_j \in F$ için $w_j = T_j(z_j)$ olur ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \rho(p, T_j(p)) &\leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, T_j(p)) \\ &= \rho(p, w_j) + \rho(z_j, p) \\ &\leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, p) \\ &\leq 2\sigma \end{aligned}$$

Böylece sonsuz çokluktaki $T_1(p)$, $T_2(p)$, … noktalarının, 2σ yarıçaplı p merkezli kompakt H-diskine ait olduğu görülür, bu ise, H-diski kompakt olduğundan bir çelişkidir.

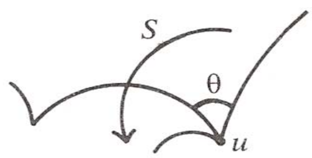
3.2.6. Tanım. F, Γ Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi ve u, v noktaları F nin köşeleri olsun. Eğer $T(u) = v$ olacak şekilde bir $T \in \Gamma$ varsa u ve v köşelerine *denk köşeler* denir.

Bu özellik F nin köşeleri üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve denklik sınıflarının her birisine *devirler* denir.

Eğer u köşesi bir S eliptik öğesinin sabit noktası ise v köşesi de TST^{-1} eliptik öğesinin bir sabit noktasıdır. Böylece bir devrin bir köşesi bir eliptik öğenin sabit noktası ise bu devrin tüm köşeleri de bir eliptik öğenin sabit noktaları olur. Böyle bir devre *eliptik devir* ve böyle bir devrin her bir köşesine de *eliptik köşe* denir.

F Dirichlet bölgesi, bir temel bölge olduğundan Γ nın bir S' eliptik öğesi ile sabit bırakılan $w \in \boldsymbol{U}$ noktası belli bir $T \in \Gamma$ için $T(F)$ nin sınırı üzerindedir. Dolayısıyla $u = T^{-1}(w)$ noktası F nin sınırı üzerindedir. Üstelik bu nokta $S = T^{-1}\, S'\, T$ eliptik öğesinin sabit noktasıdır. S nin mertebesi sonlu, örneğin k ise iki hal söz konusudur.

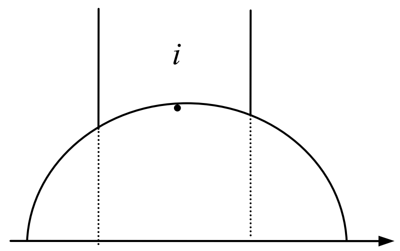
1. *$k \geq 3$ olması hali*: Bu durumda S, u noktasını sabit bırakan bir hiperbolik eşmetri olduğundan u noktası F nin bir köşesidir ve bu köşedeki θ açısı en fazla $\dfrac{2\pi}{k}$ kadardır.



Şekil 3.1.13 F Dirichlet bölgesinin bir u köşesi

Hiperbolik konveks F bölgesi hiperbolik doğru parçalarının birleşimi ile sınırlı olduğundan F nin bu hiperbolik doğrular ile arakesiti ya bir tek noktadır ya da bir hiperbolik doğrunun bir parçasıdır. Bu hiperbolik doğru parçalarına F nin *kenarları* denir.

2. *$k = 2$ olması hali*: S nin mertebesinin 2 olması halinde S nin sabit noktası F nin bir kenarının iç noktası olabilir. Bu durumda S dönüşümü bu sabit nokta ile ayrılmış bu kenarın iki parçasının yerlerini değiştirir. Bu şekildeki eliptik sabit noktalara da F nin bir köşesi olarak bakılır ve bu noktalardaki açı π kadardır. F nin böyle bir köşesi F yi sınırlayan iki hiperbolik doğrunun kesişimidir ya da iki mertebeli eliptik bir öğenin sabit noktasıdır.



Şekil 3.1.14 F Dirichlet bölgesinin eliptik köşesi

Bir örnek olarak tekrar Γ modüler grubunu ele alalım. Γ için F Dirichlet bölgesinin $\boldsymbol{U}$ da ki köşeleri, $z_3 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $w_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ve i noktalarıdır. Bu köşelerin her biri sırasıyla

$$z \to \frac{-z-1}{z},\ z \to \frac{z-1}{z} \text{ ve } z \to \frac{1}{z}$$

dönüşümlerinin sabit noktaları olduklarından bu dönüşümlerle üretilen devirli alt grupları tarafından sabitleştirilirler. $z \to z + 1$ dönüşümü z_3 noktasını w_3 noktasına resmettiğinden bu iki köşe aynı eliptik devre aittir. F nin açısı $\dfrac{2\pi}{3}$ den daha küçük başka köşesi olmadığından bu iki köşe bir eliptik devir oluşturur.

i noktası ise iki mertebeli bir eliptik öğe tarafından sabit bırakılır. F nin sınırı üzerinde iki mertebeli bir eliptik dönüşüm tarafından sabit bırakılan başka nokta olmadığından $\{i\}$ sadece bir tek köşeden oluşan bir eliptik devirdir.

Dolayısıyla modüler grup bir tanesi iki mertebeli diğeri üç mertebeli olan maksimal sonlu devirli alt grupların iki eşleniklik sınıfına sahiptir.

3.2.7. Tanım: Γ Fuchs grubunun maksimal sonlu alt gruplarının mertebesine Γ nın *periyot*ları denir.

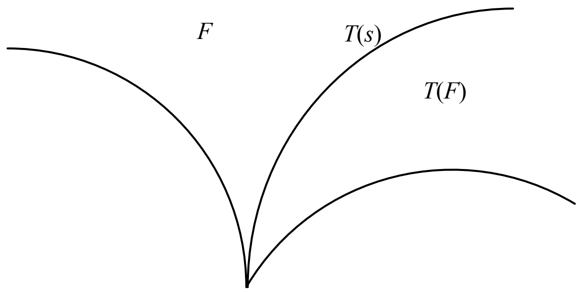
Her bir periyot Γ nın maksimal sonlu alt gruplarının eşleniklik sınıflarının mertebesi kadar tekrar eder. Dolayısıyla modüler grubun periyotları 2 ve 3 tür. (Açıları $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ olan bir hiperbolik üçgenle elde edilen üçgen grup için periyotlar l, m, n dir.)

Parabolik öğeler sonsuz mertebeli eliptik dönüşümler olarak düşünülebilir. Bu durumda ∞ periyot maksimal parabolik alt grupların eşleniklik sınıflarının sayısı ile aynı sayıda olur. Modüler grup örneğinde her bir parabolik öğe belli bir $n\in\boldsymbol{Z}$ için $z \to z + n$ dönüşümüne eşlenik olduğundan modüler grubun periyotları 2, 3 ve ∞ olur. Eğer eşleniklik sınıf sayısı birden fazla olsaydı periyotlardaki ∞ sayısı da birden fazla olacaktı.

Keyfi bir Γ Fuchs grubunun her bir parabolik devirli alt grubu $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde bir noktayı sabit bırakır. (Beardon 1983) Γ nın Dirichlet bölgesinin böyle bir noktada köşesinin olduğunu göstermiştir. Bu köşedeki açı 0 dır.

Tekrar modüler grup örneğine dönersek, Dirichlet bölgesinin ∞ da bir köşesi vardır ve bu köşedeki açı $\frac{\pi}{\infty} = 0$ dır. Dolayısıyla modüler grup açıları $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ ve $\frac{\pi}{\infty}$ olan bir hiperbolik üçgenden elde edilmiş üçgensel grup olarak düşünülebilir.

Şimdi de kenarların denklikleri üzerinde duralım. s, Γ Fuchs grubu için F Dirichlet bölgesinin bir kenarı olsun. Eğer $T\in\Gamma\setminus\{I\}$ ve $T(s)$, F nin bir kenarı ise s ve $T(s)$ ye *denk kenarlar* denir. Bu durumda $T(s)$ de $T(F)$nin bir kenarı olduğundan $T(s) \subset F \cap T(F)$ ve $T(F)$ Dirichlet döşemesinde F nin komşu bir yüzü olduğundan $T(s) = F \cap T(F)$ olmak zorundadır.



Şekil 3.1.15 F ve $T(F)$ Arasındaki İlişki.

Denk kenarların oluşturduğu kümede ikiden fazla kenar olamaz, tersine $T_1(s)$ de F nin bu özellikteki bir kenarı ise $T_1(s) = F \cap T_1(F)$ ve böylece $s = T^{-1}(F) \cap F = T_1^{-1}(F) \cap F$ olur, dolayısıyla $T = T_1$ olduğu görülür. Böylece Dirichlet bölgesinin kenarları denk kenar çiftlerine ayrılmış olur. Eğer bir kenar, üzerinde iki mertebeli bir eliptik öğenin bir sabit noktasını bulunduruyor ise S dönüşümü bu nokta ile ayrılmış olan kenarın iki parçasının yerlerini değiştirir. Böylece bu kenar kendisine denk bir kenar haline gelir. Bazı hallerde bu iki kenar parçacıklarını sabit nokta ile ayrılmış iki kenar olarak düşünülebiliriz.

Tekrar modüler grup örneğine dönersek, temel bölgenin iki dik kenar $z \to z + 1$ dönüşümü ile denk kenarlardır. Birim çemberin z_3 ve w_3 noktaları arasında kalan kısmı da temel bölgenin bir kenarıdır. Bu kenar iki mertebeli $z \to -\dfrac{1}{z}$ eliptik dönüşümü ile kendi üzerine resmedilir. Bu kenarı z_3 den i ye ve i den w_3 e kadar olan iki denk kenarın birleşimi olarak düşünebiliriz.

Aşağıda verilecek olan teorem temel bölgesi bilinen bir Fuchs grubunun üreteçlerinin bulunması için oldukça kullanışlı bir teoremdir.

3.2.8. Teorem: F, Γ Fuchs grubunun bir temel bölgesi ve $\{T_i\}$ Γ nın F kenarlarını eşleyen dönüşümlerin bir kümesi olsun. Bu durumda $\{T_i\}$ kümesi Γ için bir üreteç kümesidir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. Λ, Γ nın $\{T_i\}$kümesi ile üretilmiş bir alt kümesi olsun. $\Lambda = \Gamma$ olduğunu göstereceğiz. $S_1 \in \Lambda$ ve $S_2(F)$ nin $S_1(F)$ nin bir komşu yüzü olduğunu düşünelim. Bu durumda

$S_1^{-1}S_2\,(F)$, F nin bir komşu yüzü olur. Böylece belli bir $T_k \in \{T_i\}$ için $S_1^{-1}S_2 = T_k$ dır. $S_2 = S_1T_k$ olduğundan $S_2 \in \Lambda$ dır. Eğer $S_3(F)$ ile $S_1(F)$ bir v köşesinde kesişiyorsa, Dirichlet bölgesi yerel sonlu olduğundan, v köşesinde sadece sonlu çoklukta temel bölge yüzü olur. Dolayısıyla da yukarıdakine benzer bir düşünce ile $S_3 \in \Lambda$ olduğu görülür. Böylece

$$X = \bigcup_{S \in \Lambda} S(F) \text{ ve } Y = \bigcup_{S \in \Gamma\ \Lambda} S(F)$$

olarak alınırsa $X \cap Y = \phi$ olur. Diğer yandan $X \cup Y = \boldsymbol{U}$ olduğu açıktır. Eğer X ve Y nin $\boldsymbol{U}$ nun kapalı alt kümeleri olduğunu gösterirsek, $\boldsymbol{U}$ bağlantılı ve $X \neq \phi$ olduğundan $X = \boldsymbol{U}$ ve $Y = \phi$ sonucu elde edilir ki bu $\Lambda = \Gamma$ olduğunu gösterir.

Şimdi döşemenin yüzlerinin herhangi $\cup V_j(F)$ birleşiminin kapalı olduğunu görelim. $\cup V_j(F)$ nin noktalarının oluşturduğu (z_i) sonsuz dizisinin belli bir $l \in \boldsymbol{U}$ limitinin olduğunu varsayalım. Bu durumda belli bir $A \in \Gamma$ için $l \in A(F)$ dir ve yerel sonluluk gereği l nin öyle bir N komşuluğu vardır ki bu komşuluk sadece sonlu çokluktaki $V_j(F)$ ile kesişime sahiptir.

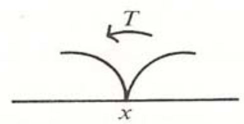
Bu sonlu ailenin bir yüzü örneğin $V_m(F)$ ise bu küme (z_i) dizisinin l ye yakınsayan bir alt dizisini bulundurur. Ancak $V_m(F)$ kapalı olduğundan $l \in V_m(F) \subset \cup V_i(F)$ dir. Dolayısıyla $\cup V_i(F)$ kapalı ve özel olarak X ve Y de kapalıdır.

Bu teoremin bir uygulaması olarak Modüler grup örneğine tekrar dönersek $z \to z + 1$ ve $z \to -\dfrac{1}{z}$ dönüşümlerinin modüler grup için birer üreteç olduğu görülür.

$\boldsymbol{U} / \Gamma$ bölüm uzayı oluşturulurken, tıpkı $T = \boldsymbol{C} / \Omega$ toru oluşturulurken olduğu gibi, $\boldsymbol{U}$ yerine Γ Fuchsian grubunun F temel bölgesi alınabilir. Bu durumda, F temel bölgesinin denk olan kenarlarının özdeşlenmesiyle elde edilen bölüm uzayı ile $\boldsymbol{U} / \Gamma$ bölüm uzayı homeomorf olur. Eğer F kompakt ise $\boldsymbol{U} / \Gamma$ bölüm uzayı da kompakt bir Riemann yüzeyidir. $\boldsymbol{U} / \Gamma$ bölüm uzayının kompakt olması halinde Γ Fuchsian grubunda parabolik dönüşüm bulunmaz. (Jones ve Singerman 1987)

Bir Dirichlet bölgesi $\boldsymbol{U}$ da kompakt olmayabilir. Öncelikle bir Dirichlet bölgesinin eğer sonsuz sayıda kenarı varsa Dirichlet bölgesi kompakt olmadığı gibi sonlu kenarlı Dirichlet bölgeleri de $\boldsymbol{U}$ da kompakt olmayabilir, iki hal söz konusudur:

1. *Hal*: Dirichlet bölgesinin $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde bir köşesi olabilir. Grubun bir T parabolik öğesi olması halinde grubun Dirichlet bölgesinin, T nin sabit noktası olan noktada bir köşesi vardır. Üstelik T dönüşümü bitim noktası bu sabit nokta olan iki kenarı eşleyen bir dönüşümdür. Bu özellikteki köşeye parabolik köşe adı verilir ve bölüm uzayında bu parabolik köşeye karşılık gelen noktalarda küçük bir delik (puncture) meydana gelir. Örneğin, Modüler grupta ∞, $T(z) = z + 1$ parabolik öğesinin bir sabit noktasıdır. Üstelik Dirichlet bölgesinin iki dik kenarı bu dönüşüm ile eşlenir. Dolayısıyla ∞ bir parabolik köşedir ve dolayısıyla bölüm uzayının bu noktaya karşılık gelen noktalarda bir deliği olacaktır. O halde bölüm uzayı bir deliği olan küre ve böylece düzleme homeomorf bir Riemann yüzeyidir.



Şekil 3.1.16 Temel Bölgenin Gerçel Eksen Üzerindeki Köşesi

2. *Hal*: Dirichlet bölgesi gerçel eksenin bir kısmı ile sınırlandırılmış olabilir. Örneğin $z \to z + 1$ ile üretilmiş olan parabolik devirli grup için i merkezli Dirichlet bölgesi,

$$\{z\in \boldsymbol{U} \mid \frac{-1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\}$$

olup bu bölge gerçel eksenin $\{x\in \boldsymbol{R} \mid \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ kısmı ile sınırlıdır. Üstelik bu bölgenin ∞ da köşesi de vardır. Bu durumda bölüm uzayı, gerçel eksen parçasına karşılık gelen noktaların oluşturduğu kapalı bir disk çıkartılmış ve parabolik köşeye karşılık gelen noktalarda bir küçük deliği olan bir küredir. O halde bölüm uzayı bir silindire homeomorftur.

3.2.9. Teorem. F_1 ve F_2 bir Γ Fuchs grubu için iki temel bölge ve bu temel bölgelerin sınırlarının hiperbolik alanı sıfır olsun. Bu durumda, $\mu(F_1) = \mu(F_2)$ dir. (Jones ve Singerman 1987)

Bu teorem bir temel bölgenin hiperbolik alanının Γ Fuchs grubu için sayısal bir değişmez olduğunu gösterir. Bir Dirichlet bölgesinin sınırları sayılabilir çoklukta H-doğrularının birleşimi olduğundan temel bölgenin sınırlarının hiperbolik alanı her zaman sıfır olarak dikkate alınacaktır.

Bazı hallerde bir temel bölgenin hiperbolik alanı sonsuz da olabilir. Örneğin,

$$z \to z + 1$$

parabolik dönüşümü ile üretilen parabolik devirli grup için Dirichlet bölgesinin hiperbolik alanı sonsuzdur. Dolayısıyla bu grup için seçilecek tüm temel bölgelerin hiperbolik alanlarının da sonsuz olacağı açıktır.

Kompakt bir temel bölgenin (gerçekte $\boldsymbol{U}$ nun her kompakt alt kümesinin) hiperbolik alanı sonludur. Bununla birlikte kompakt olmayan bir temel bölgenin de hiperbolik alanı sonlu olabilir. Örneğin, Γ modüler grubu için elde edilen Dirichlet bölgesi, açıları $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ ve 0 olan bir hiperbolik üçgendir ve Gauss-Bonet teoremini uygularsak bu temel bölgenin hiperbolik alanı $\frac{\pi}{3}$ olarak bulunur.

3.2.10 Teorem. F**,** bir Γ Fuchs grubu için temel bölge olsun. Eğer $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t$, F nin köşelerinin bir denklik sınıfındaki iç açılar ve m bu köşelerden birinin kalıtımlaştırıcısının mertebesi ise

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_t = \frac{2\pi}{m}$$

dir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. $v_1, v_2, \ldots, v_t$, F temel bölgesinin bu denklik sınıfındaki köşeleri ve v_i köşesindeki açı θ_i olsun. Eğer

$$H = \{ I, S, S^2, \ldots, S^{m-1} \}$$

kümesi v_1 köşesinin kalımlaştırıcısı ise $S^r(F)$ ($0 \leq r \leq m-1$) bölgelerinin hepsi açısı θ_1 olan bir v_1 köşesine sahiptir. $T_k \in \Gamma$ olmak üzere $T_k(v_k) = v_1$ olduğunu varsayarsak v_k köşesini v_1 köşesine dönüştüren tüm öğelerin kümesi HT_k kosetidir ve bu kümede m tane öğe vardır. Dolayısıyla $S^r T_k\,(F)$ bölgelerinin hepsi açısı θ_k olan bir v_1 köşesine sahiptir. Diğer yandan, $A \in \Gamma$ olmak üzere bir $A(F)$ bölgesinin köşesi v_1 ise $A^{-1}(v_1) \in F$ olur. O halde belli bir i ($1 \leq i \leq t$) için $A^{-1}(v_1) = v_i$ ve dolayısıyla $A \in HT_i$ dir. Böylece v_1 köşesini saran mt tane bölge vardır ve her bir θ_i açısı m kere tekrar eder. Üstelik bu bölgeler farklıdırlar. Çünkü $S^r T_k\,(F) = S^q T_l\,(F)$ ise $S^r T_k = S^q T_l$ dolaysıyla $T_k = T_l$ ve $S^r = S^q$ olur. Böylece,

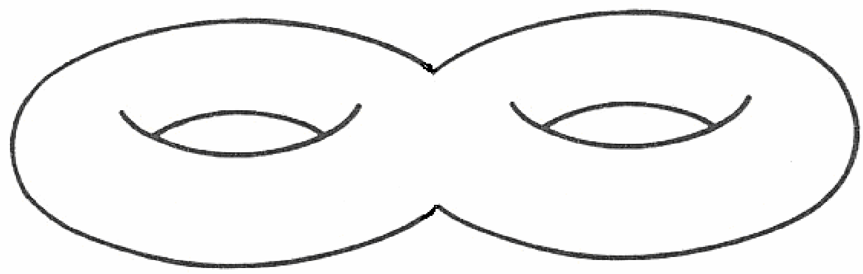
$$m(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_t) = 2\pi$$

dir.

Bağlantılı, kompakt ve yönlendirilebilir yüzeyler aşağıdaki teorem ile topolojik olarak sınıflandırılırlar.

3.2.11. Teorem. Her bir kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir yüzey, belli bir $g \geq 0$ tamsayısı için bir küreye g tane kulp takılarak elde edilmiş S_g yüzeyine homeomorftur. (Massey 1967)

Teoremde geçen g tamsayısına yüzeyin *cinsi* denir. Örneğin kürenin cinsi 0, torun cinsi ise 1 dir. Şekildeki iki torun cinsi ise 2 dir.



Şekil 3.1.17 İki Tor

Γ, $\boldsymbol{U} / \Gamma$ bölüm uzayı kompakt olan bir Fuchs grubu olsun. Bu durumda $\boldsymbol{U} / \Gamma$ bölüm uzayı ve F / Γ bölüm uzayı homeomorf olduklarından Γ Fuchs grubu için bir F

Dirichlet bölgesi de kompakttır. O halde F nin sonlu sayıda kenarı, sonlu sayıda köşesi ve sonlu sayıda eliptik devri vardır. Dolayısıyla Γ Fuchs grubunun sonlu sayıda periyodunun olacağı da açıktır. Eğer bu periyotlara $m_1 ,\ldots, m_r$ ve $\boldsymbol{U} / \Gamma$ bölüm uzayının cinsine g denirse Γ nın *simgesini* $(g; m_1 ,\ldots, m_r)$ ile gösterebiliriz.

3.2.12. Teorem. Γ Fuchs grubunun simgesi $(g; m_1 ,\ldots, m_r)$ ve F, Γ için sınırlarının hiperbolik alanı sıfır olan bir temel bölge olsun. Bu durumda,

$$\mu(\mathrm{F}) = 2\pi \; \{ (2g - 2) + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i} \right)$$

dir. (Jones ve Singerman 1987)

İspat. F, Γ için bir Dirichlet bölgesi olsun. Bu durumda F nin köşelerinin eliptik devirlerinin sayısı r dir. Yukarıdaki teorem gereği tüm eliptik köşelerdeki açıların toplamı $2\pi \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{m_i} \right)$ dir. Köşelerin diğer denklik sınıflarının sayısının s olduğunu varsayarsak bu köşelerden hiçbiri bir eliptik öğe tarafından sabit bırakılmadığından bu köşelerdeki açıların toplamı $2\pi s$ kadar olur. Dolayısıyla F nin açılarının toplamı

$$2\pi\{ \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{m_i} \right) + s\}$$

olur.

F nin kenarları Γ nın öğeleri ile eşlenirler. Eğer bu eşlenmiş kenarları özdeşlersek cinsi g olan yönlendirilebilir bir yüzey elde ederiz. Eğer bu şekilde n tane dönüşüm varsa,

$$\pi : \boldsymbol{U} \rightarrow \boldsymbol{U} / \Gamma$$

doğal izdüşümü altında F nin içinin, kenarlarının ve köşelerinin resimleri, $\boldsymbol{U} / \Gamma$ nın bir basit bağlantılı yüzlü, n kenarlı ve $(r + s)$ köşeli bir ayrışımını oluşturur. Dolayısıyla Euler Poincare formülünden;

$$2 - 2g = (r + s) - n + 1 \qquad (*)$$

dir. Gauss Bonet teoremini kullanarak,

$$\mu(\mathrm{F}) = (2n - 2)\pi - 2\pi - \{ \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{m_i} \right) + s\}$$

$$= (4g - 4 + 2r + 2s)\pi - 2\pi \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{m_i} - 2\pi s$$

$$= 2\pi \left\{ (2g - 2) + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right.$$

elde ederiz.

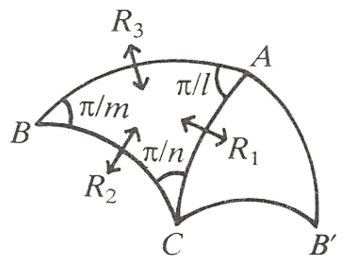
(*) eşitliği $\boldsymbol{U} / \Gamma$ bölüm uzayının cinsini hesaplarken oldukça kullanışlıdır. Örneğin, Γ açıları $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ olan bir hiperbolik üçgenden elde edilen bir üçgen grup olsun. Eğer kenarlardaki yansımalar R_1, R_2, R_3 ise R_1R_3 dönüşümü AB kenarını AB' kenarı ile R_1R_2 dönüşümü ise BC kenarını $B'C$ kenarı ile eşler. Böylece iki tane eşlenik kenar çifti vardır ve dolayısıyla $n = 2$ dir. ($ABCB'$ Γ için bir temel bölgedir.) $\{B, B'\}$bir eliptik devirdir, bu iki köşe m mertebeli devirli gruplarla sabitleştirilmiştir. $\{A\}$ bir eliptik devirdir ve l mertebeli bir devirli grupla sabitleştirilmiştir ve son olarak $\{C\}$ bir eliptik devir olup n mertebeli bir devirli grupla sabitleştirilmiştir. O halde,

$$r = 3,\ s = 0 \text{ ve } 2 - 2g = 3 - 2 + 1 = 2$$

olduğundan $g = 0$ ve böylece, $\boldsymbol{U} / \Gamma$ nın cinsi 0 ve Γ nın periyotları l, m, n olduğundan Γ nın simgesi (0; l, m, n) dir. Γ için bir temel bölgenin hiperbolik alanı,

$$2\pi \left\{1 - \frac{1}{l} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right\}$$

biçimindedir.



Şekil 3.1.18 Γ Üçgen Grubu için bir temel bölge

Bir başka örnek olarak da, Λ Fuchs grubu, cinsi g>1 olan bir kompakt S Riemann yüzeyinin örtme dönüşümlerinin bir grubu olsun ve S nin örtü uzayı olarak $\boldsymbol{U}$

yu ele alalm. Λ sabit noktasız hareket ettiğinden eliptik elemanı yoktur ve dolayısıyla Λ nın simgesi (g; —) biçimindedir. Burada "—" işareti periyodun olmadığını göstermektedir. $\boldsymbol{U} / \Gamma$ kompakt olduğundan Λ nın parabolik öğesi de yoktur, dolayısıyla Λ özdeşlik öğeyle birlikte hiperbolik öğelerden oluşur.

KAYNAKLAR

BAŞKAN, T. 1998. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Vipaş A. Ş. No:14. Bursa. 360 s.

BAŞKAN, T. 1980. Ayrık Gruplar. Hacettepe Ü. Fen Fak. Basımevi, Beytepe. 214 s.

BEARDON, A. F. 1983. The Geometry of Discrete Groups. Springer-Verlag New York. 348 s.

CONWAY, J. B. 1995. Functions of One Complex Variable I. Springer-Verlag New York Inc.316 p.

FORD, **L. R**. 1951. Automorphic Functions. Chelsea, New York. 334 s.

LEHNER, J. 1964. Discontinous Groups and Automorphic Functions. American Mathematical Society. Providence. 425 s.

LEHNER, J. 1966. A Short Course in Automorphic Functions. Holt Inc. New York. 143 s.

JONES, G. A. ve SINGERMAN, D. 1987. Complex Funtions an Algebraic and Viewpoint. Cambridge University Press. 342 p.

MASSEY, W. A. 1967. A Basic Course in Algebraic Topology. Springer-Verlag New York Inc. 428 p.

ÖZGEÇMİŞ

27.04.1980 tarihinde Gaziantep'te doğan Betül Gezer; ilk, orta ve lise öğrenimini Gaziantep'te tamamladıktan sonra 1999 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı. 2003 yılında lisans öğrenimini tamamlamasının ardından yine aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten; her türlü yardım ve desteği esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Osman BİZİM'e, en içten teşekkürlerimi sunarım.