T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

p-ADİK q-ÖLÇÜM VE UYGULAMALARI

Hacer ÖZDEN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

p-ADİK *q*-ÖLÇÜM VE UYGULAMALARI

Hacer ÖZDEN

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
(Danışman)

Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
(Danışman)

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

p-ADİK *q*-ÖLÇÜM VE UYGULAMALARI

Hacer ÖZDEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 29/06/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (Danışman) Prof. Dr. Cevdet DEMİR Doç. Dr. Osman BİZİM

Doç. Dr. Ahmet TEKCAN Doç. Dr. Recep ŞAHİN

ÖZET

Bu tezde elde edilen sonuçlar aşağıdaki konu başlıkları altında ayrıntılı olarak verilmiştir. Bunlar q-Euler sayılarının ve polinomlarının üreteç fonksiyonları, yüksek mertebeden twisted q-Euler sayıları ve polinomları, twisted Hurwitz tipi q-Euler zeta fonksiyonu, twisted Euler l fonksiyonu, p-adik q-Euler ölçümü ve uygulamaları, p-adik q ölçüm ve integralin uygulamalarıdır.

Bu çalışma birinci bölüm giriş olmak üzere dokuz bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılan tanım, kavram ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde p-adik analizin bazı özel kavramları, tanımları ve teoremleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde q-analizin tarihçesi kısaca verilmiştir. Daha sonra q-analizde kullanılan bazı notasyonlar ve özellikler verilmiştir.

Beşinci bölümde q-Euler sayılarının ve polinomlarının yeni üreteç fonksiyonları verilmiştir. q-Euler polinomlarının dağılım bağıntısı (Raabe bağıntısı) elde edilmiştir.

Altıncı bölümde ise twisted (h,q)-Euler sayılarının ve polinomlarının ve yüksek mertebeden twisted (h,q)-Euler sayılarının ve polinomlarının p-adik q-Volkenborn integrali ve katlı p-adik q-Volkenborn integrali yardımıyla, üreteç fonksiyonları tanımlanmıştır. Twisted (h,q)-Euler polinomları için dağılım bağıntıları elde edilmiştir.

Yedinci bölümde twisted (h,q)-Euler sayılarının ve polinomlarının interpolasyon fonksiyonları tanımlanmıştır.

Sekizinci bölümde p-adik q-Euler ölçümü inşa edilmiştir. Bu ölçüm ile p-adik integral arasındaki bağıntılar verilmiştir. Bu bağıntılar kullanılarak, p-adik analizdeki bazı uygulamaları verilmiştir. Bu bölümde ayrıca twisted Daehee sayıları ve polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomların dağılım bağıntısı ve özellikleri elde edilmiştir.

Dokuzuncu bölümde ise p-adik q-ölçümün uygulamaları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: p-adik q-ölçüm, p-adik q-fermionik integral, q-Euler sayıları ve polinomları, interpolasyon fonksiyonları (Euler zeta fonksiyonu, Huwitz tipi Euler zeta fonksiyonu, l fonksiyonu)

ABSTRACT

The results obtained in this thesis are generating functions of q-Euler numbers and polynomials, higher order twisted q-Euler numbers and polynomials, twisted Hurwitz type q-Euler zeta function, twisted Euler l function, p-adic q-Euler measure and its applications, and also applications of integral.

This study consists of nine chapters of which the first one is the Introduction.

In the second chapter, some basic definitions and notions which will be used in other chapters are given.

In the third chapter, some notions, definitions and theorems from p-adic analysis are given.

In the fourth chapter, a brief history of q-analysis is given. Afterwards, basic notions and results of q-analysis are recalled.

In the fifth chapter, new generating functions of q-Euler numbers and polynomials are given. Also distribution relation (Raabe rule) of q-Euler polynomials is obtained.

In the sixth chapter, the generating functions of twisted (h,q)-Euler numbers and polynomials and higher order twisted (h,q)-Euler numbers and polynomials are defined by means of p-adic q-Volkenborn integral and multiple p-adic q-Volkenborn integral. Also distribution relations for (h,q)-Euler polynomials are obtained.

In the seventh chapter, interpolation functions of twisted (h,q)-Euler numbers and polynomials are defined.

In the eighth chapter, p-adic q-Euler measure is built. Some relations between this measure and p-adic integral are given. Using these relations, some applications in p-adic analysis are given. Also twisted Daehee numbers and polynomials are defined. Distribution relation and properties of these polinomials are obtained.

In the nineth chapter, applications of p-adic q-measure are discussed.

Key Words: p-adic q-measure, q-Euler Numbers ve Polynomials, p-adic q-fermionic integral, interpolation functions (Euler zeta function and Hurwitz type zeta function, l function)

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_p$	p -adik tamsayılar
$\mathbb{Q}_p$	p -adik rasyonel sayılar
$\overline{\mathbb{Q}_p}$	$\mathbb{Q}_p$ nin kapanışı
$\mathbb{C}_p$	$\overline{\mathbb{Q}_p}$ cisminin $\lvert\ \rvert_p$ normuna göre tamlaması
$\lvert\ \rvert_p$	p -adik norm
$[x:q]$	x in q notasyonu
B_n	Klasik Bernoulli sayıları
$B_n(x)$	Klasik Bernoulli polinomları
E_n	Klasik .Euler sayıları
$E_{n,q}$	q -Euler sayıları
$E_{n,\xi,q}^{(h,r)}$	Yüksek mertebeden twisted (h,q)-Euler sayıları
$E_{n,\chi,\xi,q}^{(h)}$	Genelleştirilmiş twisted (h,q) -Euler sayıları
$E_n(x)$	Klasik Euler polinomları
$E_{n,q}(x)$	q -Euler polinomları
$E_{n,\xi,q}^{(h,r)}(z)$	Yüksek mertebeden twisted (h,q)-Euler polinomları
$D_{m,\xi}(z:q)$	Twisted Daehee sayıları
$D_{m,\xi}(z,y:q)$	Twisted Daehee polinomları
$\zeta_E(s)$	Euler zeta fonksiyonu
$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(s)$	Twisted (h,q) -Euler zeta fonksiyonu
$\zeta_E(s,x)$	Hurwitz tipi zeta fonksiyonu
$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(s,x)$	Twisted Hurwitz tipi (h,q) -Euler zeta fonksiyonu
$l_{E,\xi,q}^{(h)}(s,\chi)$	Twisted Euler (h,q) - l fonksiyonu
μ_{Haar}	Haar Dağılımı
$\int_{\mathbb{Z}_p}$	$\mathbb{Z}_p$ üzerinden p -adik integral

1. GİRİŞ

Bu tezde p-adik q-ölçüm ve p-adik q-Volkenborn integralleri yardımıyla (twisted) q-Euler sayılarının ve polinomlarının yeni üreteç fonksiyonları verilmiştir. Bu üreteç fonksiyonları yardımıyla bu sayıların ve polinomların temel özellikleri incelenmiştir. Mellin dönüşümleri ve türev operatörü, bu üreteç fonksiyonlarına uygulanarak (twisted) q-Euler zeta fonksiyonu ve (twisted) q-l fonksiyonu tanımlanmıştır. Cauchy Rezidü Teoremi yardımıyla, bu fonksiyonların negatif tamsayılardaki değerleri hesaplanmıştır. Bu değerler (twisted) q-Euler sayılarına ve polinomlarına karşılık gelmektedir. Daha sonra q-Euler polinomlarının dağılım fonksiyonları ve q-Euler ölçümü tanımlanmıştır. Bu ölçüm yardımıyla, p-adik integral tanımlanmıştır. p-adik ölçüm ve p-adik Volkenborn integrali yardımıyla q-Daehee sayı ve polinomlarının özellikleri incelenmiştir.

p-adik sayılar ilk olarak Kurt Hensel (1861-1941) tarafından 19. yüzyıl sonlarında bulunmuştur. Üzerinden yüzyıl geçmesine rağmen, bu sayılar hala gizemini korumaktadır. p-adik sayılar, sayılar teorisi, cebirsel geometri, cebirsel topoloji, analiz gibi alanların yanında Fizik ve diğer bilim dallarının değişik alanlarında da kullanılmaktadır. Son yıllarda p-adik analiz birçok bilim adamının çalışma alanına girmiştir. Sonuç olarak p-adik analiz üzerine yazılmış birçok kitap ve makale bulunmaktadır. Ultrametrik (arşimedyen olmayan metrik) kullanılarak, p-adik tamsayılar, p-adik rasyonel sayılar, p-adik rasyonel sayıların cebirsel kapanışı gibi sayı kümeleri tanımlanmıştır. Ayrıca p-adik sayılar üzerinde p-adik kuvvet serileri, p-adik fonksiyonlar, p-adik türev, p-adik ölçüm ve p-adik q-Volkenborn integral tanımları verilmiştir (Schikhof 1984, Vladimirov ve ark. 1994, Koblitz 1948, Robert 2000, Queva 1993, Koblitz 1980).

Son yıllarda, q-analiz (Quantum Calculus) birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Jackson (1908) q-türev tanımını vermiştir. Daha sonra bu türev q-Jackson türev olarak literatüre geçmiştir (Kac ve Cheung 2001). q-analiz matematik ve fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin Matematikte hipergeometrik seriler, teta fonksiyonları, Eisenstein serileri, Dedekind eta fonksiyonu, Riemann zeta fonksiyonu, Hurwitz zeta fonksiyonu, Dirichlet *L*-fonksiyonu, türev, integral, olasılık, cebir ve grup teorisi, p-adik analiz ve ölçüm teorisi gibi alanlarda kullanılmaktadır. Fizikte ise Heisenberg Cebiri, Quantum Mekanik, Quantum Cisim Teori, süper simetri, Feynman İntegrali gibi alanlarda kullanılmaktadır (Vladimirov ve ark. 1994).

Bu tezde özellikle q-Euler polinomlarının Raabe bağıntıları kullanılarak p-adik q-dağılımları tanımlanacaktır. Bu dağılımlar p-adik integral ve ölçüm teorisinde kulanıldığından dolayı, bu tezde çok önemli yer tutmaktadır. Bu dağılımların p-adik kümeler üzerindeki temel özelliklerinden faydalanılarak, ölçüm inşa edilecektir. Bu ölçüm yardımıyla, p-adik q-Volkenborn integrali ile q-Euler sayıları ve polinomları arasındaki ilişkiler verilecektir. Klasik Volkenborn integralinin temel özellikleri Amice (1972) ve Volkenborn (1974) tarafından verilmiştir. Daha sonra Schikhof (1984), Robert (2000), Vladimirov ve ark. (1994) bu integralin matematikteki ve fizikteki uygulamalarını vermişlerdir. Vladimirov ve ark. (1994) yeni tipli p-adik q-Volkenborn integralini tanımlamışlardır. Bu integral günümüzde q-Jackson integrali olarak da bilinmektedir. Bu integral matematiğin q-analiz, p-adik q-analiz ve fiziğin de q-deform oskülatörlerin spektrası ve p-adik model gibi alanlarında kullanılmaktadır. Kim (2002b) q-Haar ölçümünü ve bu ölçümü kullanarak da p-adik q-Volkenborn integralini tanımlamıştır. Kim (2002b), Amice (1972) nin p-adik Volkenborn integrali için vermiş olduğu integral denklemlerinin benzerlerini p-adik q-Volkenborn integrali için vermiştir. p-adik q-Volkenborn integrali yardımıyla, bazı özel sayıların ve polinomların üreteç fonksiyonları tanımlanabilir. Katlı p-adik q-Volkenborn integrali yardımıyla da yüksek mertebeden bazı özel sayıların ve polinomların üreteç fonksiyonları elde edilebilir. Aynı zamanda bu integraller yardımıyla Bernoulli ve Euler sayılarının Witt tipi formülleri de verilir. Witt tipi formül kullanılarak p-adik q-Volkenborn integralinin çözümü daha basit bir şekilde hesaplanabilir. Bu sebepten dolayı, q-Volkenborn integralleri bu tezde ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

q-Euler tipli sayıların ve polinomların üreteç fonksiyonlarını p-adik q-Volkenborn integali ile elde etmek için farklı bir p-adik q-ölçüm kullanmak gerekir. $\mathbb{Z}_p$ üzerinde fermionik p-adik q-ölçüm ve bu ölçüm yardımıyla da fermionik p-adik q-integrali Kim tarafından (Kim 2007a) tanımlanmıştır. $\mathbb{Z}_p$ üzerindeki fermionik p-adik q-integral kullanılarak Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, Frobenius Euler sayıları ve polinomları gibi sayıların üreteç fonksiyonları elde edilebilir. Aynı zamanda bu tip sayıların Witt tipi formülleri de elde edilir.

Bu tez dokuz bölümden oluşmaktadır. Bu tezin sonunda tezde kullanılan temel kaynaklar verilmiştir. İlk olarak tezde kullanılacak temel tanım, teorem ve bağıntılar verilmiştir. Bu tezde kısaca sıralayacağımız aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur.

q-Euler tipli sayıların ve polinomların yeni üreteç fonksiyonları verilmiştir. Bu sayıların reküranS bağıntıları elde edilmiştir. Bu polinomların dağılım bağıntıları bulunmuştur. Daha sonra twisted (h,q)-Euler tipli sayıların ve polinomların ve yüksek mertebeden twisted (h,q)-Euler tipli sayıların ve polinomların p-adik q-Volkenborn integrali yardımıyla üreteç fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu polinomların Witt tipi formülleri ispatlanmıştır. Bu polinomların çarpımsal ifadesi verilmiştir. Ayrıca twisted (h,q)-Euler sayılarının ve polinomlarının interpolasyon fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir. Bu tezde elde edilen q-Euler tipli polinomların dağılım fonksiyonları kullanılarak, p-adik q-Euler tipli dağılım ve p-adik q-Euler ölçümü inşa edilmiştir. Bu ölçüm ile p-adik integral arasındaki bağıntılar bulunmuştur. Bu bağıntılar kullanılarak, p-adik analizdeki bazı uygulamalar verilmiştir. Daha sonra da p-adik q-l fonksiyonu ve twisted Daehee sayıları ve polinomları tanımlanmıştır. Tezin sonunda ise p-adik q-ölçümün uygulamaları verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan teorem, tanım, bazı temel kavramlar ve özellikler verilecektir. Bu temel kavramlar Apostol (1976), Bartle (1995), Conway (1986), Andrews ve Shivamoggi (2005), Lebedev (1972), Srivastava ve Choi (2001), Volkovysky ve ark. (1977) gibi temel kaynaklardan alınmıştır. Detaylı bilgi için ilgili kaynaklar incelenebilir.

2.1 Temel Kavramlar

2.1.1 Tanım. X gerçel ya da karmaşık bir doğrusal uzay olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ya da $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$N1 : \|x\| \geq 0$

$N2 : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$N3 : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$N4 : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

koşullarını gerçekliyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ çiftine ise normlu uzay denir.

2.1.2 Tanım. Verilen bir X kümesi için $\sum$, X in alt altkümelerinden oluşan küme olsun. Eğer

i) ϕ, $X \in \sum$

ii) $\forall A \in \sum \Rightarrow A^t \in \sum$

iii) $\sum$ içindeki her (A_n) dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sum$ ise

Σ ya σ cebiri denir. (X,Σ) ikilisine de ölçüm uzayı denir.

2.1.3 Tanım. X bir küme ve Σ, X üzerinde bir σ cebiri cebiri ise Σ üzerinde tanımlı, genişletilmiş değerler alan bir μ fonksiyonu

i) $\mu(\phi)=0$

ii) $\forall E\in\Sigma$ için $\mu(E)\geq 0$

iii) (E_n), Σ da ayrık kümelerin bir dizisi olmak üzere $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$

koşullarını sağlıyorsa μ ye bir ölçüm denir.

2.1.4 Teorem (Rezidü Teoremi). f fonksiyonu bir B bölgesinde ve sınırında, sonlu tane $z_1,z_2,...,z_n\in B$ ayrık aykırılıkları hariç analitik ise

$$\int_{\partial B} f(z)dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_i)$$

dır. Burada ∂B, B nin sınırıdır.

2.1.5 Teorem (Fourier İntegral Teoremi). f ve f' fonksiyonları her kapalı aralıkta parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ ise f, x noktasında süreklidir ve

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos[s(t-x)]dtds \qquad (2.1.1)$$

dir. x, f nin bir süreksizlik noktası ise, (2.1.1) integrali $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$ değerine yakınsar. Burada $f(x^+)$, f nin sağ limiti ve $f(x^-)$ ise f nin sol limitidir.

2.1.6 Tanım. f Fourier İntegral Teoremindeki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$F(s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx \qquad (2.1.2)$$

integraline $f(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü denir.

Genelleştirilmiş q-Euler sayılarını ve polinomlarını tanımlamak için Dirichlet karakterine ihtiyaç vardır. Dirichlet karakteri aşağıdaki gibi tanımlanır:

2.1.7 Tanım. Belli bir $n\in\mathbb{N}$ için

i) $\chi(a+n)=\chi(a),\ a\in\mathbb{Z}$

ii) $\chi(a)=0 \Leftrightarrow (a,n)\neq 1$

koşullarını sağlayan $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{C}$ ye tanımlı χ çarpımsal fonksiyonuna bir n modül Dirichlet karakteri denir. $(a,n)=1$ olan her a için φ, Euler φ-fonksiyonu olmak üzere $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\operatorname{mod} n)$ olduğundan $\chi(a)$ birimin bir köküdür.

n, m nin bir katı ve Ψ, bir m modül Dirichlet karakteri ise

$$\chi(a)=\begin{cases}\Psi(a), & (a,n)=1\\ 0, & (a,n)\neq 1\end{cases}$$

ile bir n modül Dirichlet karakteri elde edilebilir. $m<n$ olmak üzere, χ in m modül bir başka karakterden elde edilemeyen minimum n modülüne χ in kondüktörü denir.

Bu tezde özellikle bazı özel sayıların (Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Daehee sayıları) ve polinomların üreteç fonksiyonlarını ayrıntılı bir şekilde inceleyeceğiz. Bunun için üreteç fonksiyonunun tanımına ihtiyacımız vardır. Bu fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır:

2.1.8 Tanım. $K \in \mathbb{R}$ için $|t| < K$ bölgesinde $F(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) t^n$ şeklinde ifade edilebiliyorsa $F(t,z)$ fonksiyonuna $f_n(z)$ fonksiyonunun üreteç fonksiyonu denir.

Şimdi klasik Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonlarını vereceğiz. 1713 yılında Bernoulli "Ars Conjectandi" monografisinde klasik Bernoulli sayılarını vermiştir. Bu sayılar aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi. \tag{2.1.3}$$

Burada B_n katsayılarına Bernoulli sayıları denir, (Calitz 1948, Kim ve ark. 1996, Kim 1994, Srivastava ve ark. 2005, Conway 1986, Radamacher 1973, Kim 2007a , Kim 1994, Şimşek 2006a). Buradan $B_0 = 1,\ B_1 = \frac{-1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = \frac{-1}{30},\ldots$ olarak bulunur ve $n \geq 1$ olmak üzere $B_{2n+1} = 0$ olduğu görülür. Klasik Bernoulli polinomları ise aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$f(t,x) = f(t)e^{tx} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi \tag{2.1.4}$$

dir. Burada $B_n(x)$ katsayılarına Bernoulli polinomları denir. (2.1.4) denkleminde e^{tx} fonksiyonu Taylor serisine açılarak Cauchy çarpımı yapıldıktan sonra

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

bağıntısı elde edilir. $n \geq 2$ olmak üzere

$$B_n(1) = B_n(0) = B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

dir. Yukarıdaki bağıntılar yardımıyla Bernoulli polinomları ve sayıları hesaplanabilir, (Rademacher 1973, Apostol 1976 , Srivastava ve ark. 2005, Kim ve ark. 1996).

Klasik Euler sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g(t)=\frac{2}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!},\ \left|t\right|<\pi, \tag{2.1.5}$$

burada E_n katsayılarına klasik Euler sayıları denir, (Shiratani 1973, Kim 2006a, Kim 2006c, Kim 2007 a-f, Kim 2008). Klasik Euler polinomları ise aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$g(t,x)=g(t)e^{tx}=\frac{2e^{tx}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},\ \left|t\right|<\pi \tag{2.1.6}$$

dır. Burada $E_n(x)$ katsayılarına klasik Euler polinomları denir. (2.1.5) üreteç bağıntısından $E_n=E_n(0)$ olmak üzere $E_0=1,\ E_1=0,\ E_2=-1,\ E_3=0,\ E_4=5,...$ ve $\forall n\geq 0$ için $E_{2n+1}=0$ elde edilir. Benzer şekilde (2.1.6) bağıntısından

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k x^{n-k}$$

elde edilir.

$u\in\mathbb{C}$, $|u|>1$ özelliğindeki bir cebirsel sayı olsun. Frobenius-Euler sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{1-u}{e^t-u}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(u)\frac{t^n}{n!},$$

burada $H_n(u)$ katsayılarına Frobenius-Euler sayıları denir (Srivastava ve ark. 2005, Kim ve Lee 2009).

Matematikte çok iyi bilinen ve birçok uygulamaya sahip olan Hurwitz zeta fonksiyonu ve Riemann zeta fonksiyonunun tanımlarını vereceğiz:

(2.1.4) bağıntısına Mellin dönüşümü uygulanırsa, aşağıda tanımlanan Hurwitz zeta fonksiyonu elde edilir:

2.1.9 Tanım. $s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1$ ve $0 < x \leq 1$ olmak üzere

$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} \tag{2.1.7}$$

fonksiyonuna Hurwitz zeta fonksiyonu denir (Koblitz 1948, Srivastava ve ark. 2005, Kim ve ark. 2003, Şimşek 2006a).

(2.1.7) eşitliğinde $x = 1$ alınırsa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \operatorname{Re} s > 1$$

Riemann zeta fonksiyonu elde edilir (Conway 1986, Koblitz 1948, Srivastava ve Choi 2001, Srivastava ve ark. 2005, Kim ve ark. 2003, Şimşek 2006a). (2.1.7) eşitliğinde $s = 1 - n,\ n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\zeta(1-n,x) = -\frac{B_n(x)}{n}$$

ve

$$\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$$

elde edilir, (Conway 1986, Rademacher 1973, Srivastava ve Choi 2001, Srivastava ve ark. 2005, Şimşek 2006a). Bu fonksiyonlar kompleks analiz, uygulamalı matematik ve diğer bilim dallarında birçok uygulama alanına sahiptir. O halde Bernoulli polinomlarının ve sayılarının interpolasyon fonksiyonları sırasıyla $\zeta(s,x)$ ve $\zeta(s)$ fonksiyonlarıdır.

Şimdi Euler polinomlarının ve sayılarının interpolasyon fonksiyonlarını tanımlayacağız. (2.1.6) bağıntısına Mellin dönüşümü uygulanırsa, Hurwitz tipi Euler zeta fonksiyonu elde edilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

2.1.10 Tanım. $s \in \mathbb{C}$ ve $0 < x \leq 1$ olmak üzere

$$\zeta_E(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^s}, \tag{2.1.8}$$

fonksiyonuna Hurwitz tipi Euler zeta fonksiyonu denir (Kim 2007c, Kim ve Rim 2007f).

Özel olarak $x = 1$ alınırsa

$$\zeta_E(s,1) = \zeta_E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}, \tag{2.1.9}$$

Euler zeta fonksiyonu elde edilir. Özel olarak $s = -n$ alınırsa

$$\zeta_E(-n,x) = E_n(x)$$

ve

$$\zeta_E(-n) = E_n$$

elde edilir, (Rademacher 1973, Kim ve Rim 2007f).

(2.1.8) ve (2.1.9) denklemleri ile tanımlanan fonksiyonlar Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu ve Lipschitz-Lerch zeta fonksiyonu ile ilişkili fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır (Srivastava ve Choi 2001): $a \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_0^-$, $s \in \mathbb{C}$ $|z| < 1; \operatorname{Re} s > 1$, $|z| = 1$ olmak üzere,

$$\Phi(z,s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s},$$

dir. Burada $\mathbb{Z}_0^- = \mathbb{Z}^- \cup \{0\}, \mathbb{Z}^- = \{-1,-2,-3,...\}$ dır. Şimdi $\Phi(z,s,a)$ nın bazı özel durumlarını inceleyelim:

$$\zeta(s) = \Phi(1,s,1)$$

ve

$$\zeta(s,a) = \Phi(1,s,a)$$

dır.

Lerch zeta fonksiyonu

$$l_s(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n\tau}}{n^s} = e^{2\pi i\tau}\Phi(e^{2\pi i\tau},s,1)$$

olarak tanımlanır (Srivastava ve Choi 2001). Bu fonksiyon analitik sayılar teorisinde oldukça kullanışlı bir fonksiyondur. Poly-logaritma fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır: $|z| < 1$ için $s \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ için $\operatorname{Re} s > 1$ olmak üzere,

$$Li_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} = z\Phi(z,s,1)$$

dir.

Lipschitz-Lerch zeta fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır: $a \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_0^-$; $\tau \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ise $\operatorname{Re} s > 0$; $\tau \in \mathbb{Z}$ ise $\operatorname{Re} s > 1$ olmak üzere

$$\phi(\tau,a,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n\tau}}{(n+a)^s} = \Phi(e^{2\pi i\tau},s,1)$$

dir.

$$\zeta_E(s,x) = \Phi(-1,s,a)$$

ve

$$\zeta_E(s) = \Phi(-1,s,0)$$

olarak bulunur.

2.2 $\Gamma(z)$ Fonksiyonunun Özellikleri

Mellin dönüşümü ve Euler Gama fonksiyonu q-Euler zeta fonksiyonunun inşasında oldukça önemli yer tutmaktadır. Bu sebepten dolayı bu kısımda Gama fonksiyonunun ayrıntılı olarak özellikleri verilecektir.

2.2.1 Tanım. Gama fonksiyonu üç farklı şekilde tanımlanabilir. Bu tanımlar aşağıdaki gibidir:

i. $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

dir. Bu bölgede integral mutlak yakınsaktır.

ii. $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}$$

dir. Burada γ Euler sabitidir.

iii. $z \in \mathbb{C} - \{0,-1,-2,...\}$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^z}{z(z+1)(z+2)...(z+n)} = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

dir.

2.2.2 Önerme. Euler Gama fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

(1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\mathrm{Re}\, z > 0$

(2) $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0,1,2,3,\ldots$

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(4) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$, $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$.

2.2.3 Teorem ($\Gamma(z)$ Fonksiyonunun Rezidüsü). 0 ve tüm negatif tamsayılar $\Gamma(z)$ nin kutup noktalarıdır. Bu kutup noktaları $z = -n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ biçiminde gösterilirse $z = -n$ noktalarındaki rezidüsü, $\Gamma(z)$ nin (1) özelliğinden elde edilen

$$\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} = (n+z)\Gamma(z)$$

eşitliği yardımıyla

$$\mathrm{Re}\, s(\Gamma(z), -n) = \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

şeklindedir, (Conway 1986).

3. ULTRA METRİK ve *p*-ADİK ANALİZ

Bu bölümde p -adik analizde kullanacağımız bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremleri vereceğiz.

3.1 Temel Kavramlar

3.1.1 Tanım. $p \in \{2,3,5,7,11,13,...\}$ herhangi bir asal sayı ve $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olsun. p nin a yı bölen en büyük kuvveti $ord_p a$ ile gösterilir; yani m, $a \equiv 0 (\text{mod}\, p^m)$ özelliğindeki en büyük tamsayı ise o zaman $ord_p a = m$ dir denir.

$ord_p a$ ile ilgili birkaç örnek aşağıdaki gibi verilebilir:

$$ord_5 35 = 1,\ ord_5 250 = 3,\ ord_2 96 = 5,\ ord_2 93 = 0$$

dır. Özel olarak $ord_p 0 = \infty$ alınacaktır.

$$ord_p (a_1 a_2) = ord_p a_1 + ord_p a_2$$

dir. Herhangi bir $x = \dfrac{a}{b}$ rasyonel sayısı için

$$ord_p x = ord_p a - ord_p b$$

dir.

Yukarıdaki Tanım 3.1.1 i kullanarak $\mathbb{Q}$ üzerinde aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$|\ |_p$ dönüşümü $\mathbb{Q}$ üzerinde bir normdur.

Buna göre

$$|6|_3 = |15|_3 = \frac{1}{3},\ |137|_2 = 1,\ \left|\frac{1}{4}\right|_2 = \left|\frac{3}{4}\right|_2 = 4$$

tür.

Bu norm, klasik normun üçgen eşitsizliğinden daha güçlü olan (ve *güçlü üçgen eşitsizliği* diye adlandırılan)

$$|x+y|_p \leq maks\{|x|_p, |y|_p\}$$

koşulunu sağlar. Bu koşulu sağlayan norma ise Arşimedyen olmayan norm denir. Bu normun indirgediği metriğe de Arşimedyen olmayan metrik (ultrametrik) denilir. Böylece yukarıda tanımlanan $|\ |_p$, $\mathbb{Q}$ üzerinde Arşimedyen olmayan normdur, (Koblitz 1948, Robert 2000, Schikhof 1984).

p -adik tamsayıların kümesi $\mathbb{Z}_p$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

3.1.2 Tanım. p bir asal sayı ve $a_i \in \{0,1,...,p-1\}$ olmak üzere $\sum_{i\geq 0} a_i p^i$ şeklinde ifade edilen sayılara p -adik tamsayı denir. Tüm p -adik tamsayıların oluşturduğu halka $\mathbb{Z}_p$ ile gösterilir, (Koblitz 1948).

$p\mathbb{Z}_p = \{ py : y \in \mathbb{Z}_p \}$ olsun. $p\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p$ nin bir maksimal idealidir. $\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p$ cisminin p tane elemanı vardır. Bu elemanlar $p\mathbb{Z}_p, 1+p\mathbb{Z}_p, ..., p-1+p\mathbb{Z}_p$ kosetleridir. $j \in \{0,1,2,...,p-1\}$ olmak üzere

$$j + p\mathbb{Z}_p = \{ x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p < 1 \} = \{ x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p \le p^{-1} \}$$

dir. $p^n\mathbb{Z}_p = \{ p^n y : y \in \mathbb{Z}_p, n \in \mathbb{N} \}$ şeklinde tanımlanır. Buradan

$$j + p^n\mathbb{Z}_p = \{ x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p \le p^{-n} \}$$

dir.

$$\mathbb{Z}_p \supset p\mathbb{Z}_p \supset ... \supset p^k\mathbb{Z}_p \supset \bigcap_{k \ge 0} p^k\mathbb{Z}_p = \{0\}$$

dır, (Schikhof 1984). p-adik birimlerin kümesi ise

$$\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p = \{ x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1 \}$$

olarak tanımlanır. Denk olarak

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p^* &= \{ x = a_0 + a_1 p + ... : 0 \le a_i \le p-1, a_0 \ne 0 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{Z}_p : x \not\equiv 0 (\bmod p) \} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}_p \right\}\end{aligned}$$

dir, (Koblitz 1948, Robert 2000, Schikhof 1984).

p-adik rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}_p$ ile gösterilir ve p-adik rasyonel sayılar aşağıdaki gibi tanımlanır:

3.1.3 Tanım. $\mathbb{Q}_p = \left\{ x = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n p^n : 0 \le a_i \le p-1 \right\}$ şeklinde tanımlanır.

Burada yeterince büyük n ler için $a_{-n}=0$ dır. Yani $x\in\mathbb{Q}_p$ ise

$$x=...+a_2a_1a_0a_{-1}a_{-2}...a_{-k}=...+a_2p^2+a_1p+a_0+\frac{a_{-1}}{p}+\frac{a_{-2}}{p^2}+...+\frac{a_{-k}}{p^k}$$

dir. Özel olarak $a_{-1}=a_{-2}=...=0$ ise $x\in\mathbb{Z}_p$ dir. $\mathbb{Q}_p$ bir cisimdir. $\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışı $\overline{\mathbb{Q}_p}$ olmak üzere $\mathbb{C}_p$, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ cisminin $|\ |_p$ normuna göre tamlamasıdır, (Koblitz 1948, Robert 2000, Schikhof 1984).

$\mathbb{Q}_p$ üzerinde bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul genel teriminin limitinin sıfır olmasıdır. Bu durum p-adik analizin reel analizden farklılaştığı noktalardan biridir.

3.1.4 Uyarı. $|\ |_p$ normunu kullanarak $\mathbb{Z}_p$ yi aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$\mathbb{Z}_p=\{x\in\mathbb{Q}_p:|x|_p\leq 1\}.$$

3.1.5 Tanım. $\mathbb{Q}_p$ metrik uzayının tüm açık kümeleri $a\in\mathbb{Q}_p$ ve $N\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a+p^N\mathbb{Z}_p=\left\{x\in\mathbb{Q}_p:|x-a|_p\leq\frac{1}{p^N}\right\}$$

şeklindeki açık kümelerin (aralıkların) birleşimidir. $\mathbb{Q}_p$ nin açık bir alt kümesinin kompakt olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul açık alt kümelerin (aralıkların) sonlu birleşimi olarak yazılabilmesidir. Bu kümelere kompakt-açık küme denir, (Koblitz 1948).

3.1.6 Tanım. $a \in X \subset \mathbb{C}_p$ ve $f : X \to \mathbb{C}_p$ bir fonksiyon olsun. $f(a)$ nın her bir U komşuluğu için $f^{-1}(U)$ a nın bir komşuluğu oluyorsa f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir.

3.1.7 Tanım. X ve Y iki topolojik uzay ve f, X den Y ye bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ in bir U komşuluğu, $f(U)$, Y nin bir tek elemanı olacak şekilde bulunabilirse f ye yerel olarak sabit fonksiyon (locally constant function) denir, (Koblitz 1948).

Yerel olarak sabit fonksiyonlar sürekli fonksiyonlardır. X, $\mathbb{Q}_p$ nin kompakt-açık altkümesi ise ($\mathbb{Z}_p$ ya da $\mathbb{Z}_p^*$ gibi) X kümesi üzerinde tanımlı birçok aşikar olmayan yerel olarak sabit fonksiyon vardır. $f : X \to \mathbb{Q}_p$ yerel olarak sabit ise f kompakt-açık kümelerin karakteristik fonksiyonlarının sonlu lineer kombinasyonları olarak yazılabilir. Riemann anlamında integralde merdiven fonksiyonlarının oynadığı rolü, p-adik analizde yerel olarak sabit fonksiyonlar oynar, (Koblitz 1948).

3.1.8 Tanım. X, $\mathbb{Q}_p$ nin bir kompakt-açık altkümesi olsun. X üzerinde yerel olarak sabit fonksiyonların $\mathbb{Q}_p$-vektör uzayından $\mathbb{Q}_p$ ye tanımlı bir $\mathbb{Q}_p$-lineer vektör uzayı homomorfizmine bir p-adik dağılım denir. Eğer $f : X \to \mathbb{Q}_p$ yerel olarak sabit ise p-adik μ dağılımının f deki değeri için $\mu(f)$ yazmak yerine genelde $\int f\mu$ yazacağız, (Koblitz 1948).

3.1.9 Uyarı. 3.1.7 Tanımı şöyle de verilebilir: X üzerinde p-adik bir μ dağılımı, X in kompakt-açık alt kümelerinden $\mathbb{Q}_p$ ye tanımlı bir dönüşümdür. Bunun anlamı şudur: $U_1, U_2, ..., U_n$ kompakt-açık kümeler ve $i \neq j$ için $U_i \cap U_j = \phi$ olsun. $U \subset X$ ve $U = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ ise o zaman

$$\mu(U)=\sum_{j=1}^{n}\mu(U_j)$$

dir, (Koblitz 1948).

3.1.10 Teorem. X , $\mathbb{Q}_p$ nin kompakt-açık altkümesi olsun. X in açık alt aralıklarından $\mathbb{Q}_p$ ye tanımlı her μ dönüşümü $a+p^N\mathbb{Z}_p\subset X$ olmak üzere

$$\mu(a+p^N\mathbb{Z}_p)=\sum_{b=0}^{p-1}\mu(a+bp^N+p^{N+1}\mathbb{Z}_p)$$

şartını sağlıyorsa X üzerinde tek bir şekilde p -adik dağılıma genişletilir, (Koblitz 1948).

3.2 Bazı p -adik Dağılım Örnekleri

Bu bölümde, p -adik Volkenborn integralinin inşasında kullanılacak olan bazı dağılımlar verilecektir. Özellikle Haar dağılımı p -adik integralde çok önemli bir yere sahiptir ve aşağıdaki örnek ile verilmiştir. Aşağıdaki örnekler (Koblitz 1948, Khrennikov 1994) kaynaklarında ayrıntılı olarak verilmiştir.

3.2.1 Örnek (Haar Dağılımı). Haar dağılımı μ_{Haar} ile gösterilir ve

$$\mu_{Haar}(a+p^N\mathbb{Z}_p)=\frac{1}{p^N},\ a\in\mathbb{Z}_p$$

olarak tanımlanır. 3.1.10 Teoremi kullanılarak, μ_{Haar} ın bir dağılım olduğu kolaylıkla görülebilir. Yani

$$\begin{aligned}\sum_{b=0}^{p-1}\mu_{Haar}(a+bp^N+p^{N+1}\mathbb{Z}_p)&=\sum_{b=0}^{p-1}\frac{1}{p^{N+1}}=p\frac{1}{p^{N+1}}\\&=\frac{1}{p^N}=\mu_{Haar}(a+p^N\mathbb{Z}_p)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde μ_{Haar}, $\mathbb{Z}_p$ üzerinde bir p-adik dağılımdır.

3.2.2 Örnek (Dirac Dağılımı). $U \subset \mathbb{Q}_p$ kompakt-açık bir küme ve $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ (α sabit) olmak üzere

$$\mu_\alpha(U) = \begin{cases} 1, & \alpha \in U \\ 0, & \alpha \notin U \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. μ_α nın toplamsal olduğu açıktır.

3.2.3 Örnek (Mazur Dağılımı). $a \in \mathbb{Z}$ ve $0 < a < p^N - 1$ olmak üzere

$$\mu_{Mazur}(a + p^N\mathbb{Z}_p) = \frac{a}{p^N} - \frac{1}{2}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.4 Uyarı. Yukarıdaki örneklerde verilen μ_{Haar} dağılımı ve μ_{Mazur} dağılımı aşağıdaki özellikleri sağlar:

$N \to \infty$ iken $a + p^N\mathbb{Z}_p$ aralığının p-adik ölçümü p-adik rasyonel sayı olarak artar. Yani

$$\left|\mu_{Haar}(a + p^N\mathbb{Z}_p)\right|_p = \left|\frac{1}{p^N}\right|_p = p^N$$

ve $p \nmid a$ ($p = 2$ durumunda $N > 1$) ise, o zaman

$$\left|\mu_{Mazur}(a + p^N\mathbb{Z}_p)\right|_p = \left|\frac{a}{p^N} - \frac{1}{2}\right|_p = p^N$$

dir.

3.3 Bernoulli Dağılımları

Bernoulli dağılımlarının p-adik analizde ve olasılık dağılımında oldukça önemli uygulamaları vardır. Bu kısımda bu dağılım kısaca incelenecektir.

3.3.1 Tanım. $0 \leq a \leq p^N - 1$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a + p^N \mathbb{Z}_p$ aralıkları üzerinde Bernoulli dağılımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_{B,k}(a + p^N \mathbb{Z}_p) = p^{N(k-1)} B_k\left(\frac{a}{p^N}\right).$$

Burada $B_k\left(\frac{a}{p^N}\right)$ Bernoulli polinomlarıdır. $\mu_{B,k}$, $\mathbb{Z}_p$ üzerinde bir dağılımdır. Özel olarak $k = 0$ için

$$\mu_{B,0}(a + p^N \mathbb{Z}_p) = p^{-N} B_0\left(\frac{a}{p^N}\right) = p^{-N}$$

elde edilir. Yani $\mu_{B,0} = \mu_{Haar}$ dır. $k = 1$ için

$$\mu_{B,1}(a + p^N \mathbb{Z}_p) = B_1\left(\frac{a}{p^N}\right) = \frac{a}{p^N} - \frac{1}{2}$$

elde edilir. Yani $\mu_{B,1} = \mu_{Mazur}$ dur. $k = 2$ için

$$\mu_{B,2}(a + p^N \mathbb{Z}_p) = p^N B_2\left(\frac{a}{p^N}\right) = p^N\left(\frac{a^2}{p^{2N}} - \frac{a}{p^N} + \frac{1}{6}\right)$$

elde edilir (Koblitz 1948). Bernoulli polinomları p-adik integral teorisinde çok önemli rol oynar.

Şimdi bu tezin temelini oluşturacak olan p -adik ölçüm tanımlanacak ve bu ölçümün bazı temel özellikleri verilecektir:

3.4 *p*-adik Ölçüm

p -adik dağılım, p -adik analizin integral teorisinde ve olasılık teorisinde önemli bir yere sahiptir. p -adik dağılım yardımıyla p -adik ölçüm inşa edilir. p -adik ölçüm bu tezin geri kalan bölümlerinde ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

3.4.1 Tanım. μ , X üzerinde bir p -adik dağılım olsun. Her $U \subset X$ kompakt-açık alt kümesi için $\left|\mu(U)\right|_p \leq B$ olacak şekilde $B \in \mathbb{R}$ varsa μ ye p -adik ölçüm denir, (Koblitz 1948).

Yukarıdaki 3.2.1, 3.2.2 ve 3.2.3 Örneklerindeki p -adik dağılımlardan sadece Dirac dağılımı bir ölçümdür. Çünkü her U kompakt-açık alt kümesi için $0 \leq \mu_\alpha(U) \leq 1$ dir. Diğer dağılımlar sınırlı olmadıklarından ölçüm değildir.

Verilen bir sınırsız p -adik dağılımı p -adik ölçüme çevirmek için bu dağılım üzerinde bazı uygun değişiklikler yapmak gerekir. Örneğin, Bernoulli dağılımları aşağıdaki gibi tanımlanırsa ölçüm olur:

$$\mu_{k,\alpha}(U) = \mu_{B,k}(U) - \alpha^{-k}\mu_{B,k}(\alpha U).$$

Burada $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 1, p \nmid \alpha$ ve U kompakt-açık, $U \subset \mathbb{Z}_p$ dir. $k = 1$ için

$$\left|\mu_{1,\alpha}(U)\right|_p \leq 1$$

dir, (Koblitz 1948).

μ sınırsız bir p-adik dağılım olsun. f yerel olarak sabit bir fonksiyon ise $\int f\mu$ tanımlanabilir. Fakat sürekli fonksiyonların integralinde Riemann toplamının limiti sorun teşkil edebilir. Örneğin $f:\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $f(x)=x$ fonksiyonunun Riemann toplamını oluşturalım:

$\mu=\mu_{Haar}$ olsun. $x_{a,N}$,

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{a=0}^{p^N-1}(a+p^N\mathbb{Z}_p)$$

parçalanışındaki a. aralıkta keyfi bir nokta olsun. $\{x_{a,N}\}$ parçalanışına karşılık gelen N. Riemann toplamı,

$$S_{N,\{x_{a,N}\}}(f) = \sum_{a=0}^{p^N-1} f(x_{a,N})\mu(a+p^N\mathbb{Z}_p) = \sum_{a=0}^{p^N-1}\frac{x_{a,N}}{p^N}$$

dır. Özel olarak $x_{a,N}=a$ ise

$$S_{N,\{a\}}(f) = \sum_{a=0}^{p^N-1}\frac{a}{p^N} = \frac{p^N(p^N-1)}{2p^N} = \frac{p^N-1}{2}$$

dir. Buradan

$$\lim_{N\to\infty} S_{N,\{a\}}(f) = \frac{-1}{2}$$

elde edilir. Burada p-adik anlamda limit, $\lim\limits_{\substack{N\to\infty \\ p-adik}} p^N = 0$ dır. Fakat $x_{a,N}=a\in a+p^N\mathbb{Z}_p$ yerine her N için $a_0\in\mathbb{Z}_p$ olmak üzere

$$x_{a,N} = a + a_0 p^N \in a + p^N\mathbb{Z}_p$$

olarak seçilirse Riemann toplamı

$$S_{N,\{x_{a,N}\}}(f)=\sum_{a=0}^{p^N-1} f(x_{a,N})\mu(a+p^N\mathbb{Z}_p)=\sum_{a=0}^{p^N-1}\frac{a+a_0p^N}{p^N}=\frac{p^N-1}{2}+a_0$$

dır. Buradan

$$\lim_{N\to\infty} S_{N,\{a+a_0p^N\}}(f)=\frac{-1}{2}+a_0$$

elde edilir. Bu limitin değeri aralıkta seçilen noktaya bağlıdır. Dolayısıyla nokta değiştikçe toplamın limiti farklı sayılar olacağından, Riemann toplamının limiti yoktur, (Koblitz, 1948).

3.4.2 Tanım. μ, $\mathbb{Q}_p$ nin kompakt-açık bir X alt kümesi üzerinde tanımlı bir ölçüm ve $f:X\to\mathbb{Q}_p$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Riemann toplamı

$$S_{N,\{x_{a,N}\}}(f)=\sum_{\substack{0\le a<p^N\\ a+p^N\mathbb{Z}_p\subset X}} f(x_{a,N})\mu(a+p^N\mathbb{Z}_p)$$

şeklinde tanımlanır. Burada her $a\in a+p^N\mathbb{Z}_p\subset X$ için $x_{a,N}$, $a+p^N\mathbb{Z}_p$ aralığından seçilmiştir. $\mathbb{Q}_p$ üzerinde $N\to\infty$ için $S_{N,\{x_{a,N}\}}(f)$ bir limite yakınsar. Bu limit $\{X_{a,N}\}$ seçiminden bağımsızdır, (Koblitz 1948).

3.4.3 Tanım. $f:X\to\mathbb{Q}_p$ sürekli bir fonksiyon ve μ, X üzerinde bir ölçüm ise, o zaman f nin μ ölçümüne göre integrali

$$\lim_{N\to\infty} S_{N,\{x_{a,N}\}}(f)=\int f\mu$$

olarak tanımlanır, (Koblitz 1948).

3.4.4 Tanım. X , $\mathbb{C}_p$ nin ayrık noktası olmayan bir altkümesi olsun. $f : X \to \mathbb{C}_p$ fonksiyonu ve

$$\Phi_1 f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad x, y \in X, x \neq y$$

olarak tanımlanan iki değişkenli $\Phi_1 f(x, y)$ fonksiyonu için $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} \Phi_1 f(x, y)$ mevcut ise f fonksiyonuna $a \in X$ noktasında sürekli (düzgün) diferensiyellenebilirdir denir. X in her noktasında sürekli diferensiyellenebilen bir f fonksiyonuna da sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon denir. Bütün sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi

$$C^1(X \to \mathbb{C}_p) = \{ f \mid f : X \to \mathbb{C}_p, f \text{ sürekli diferensiyellenebilir} \}$$

ile gösterilir, (Schikhof 1984).

3.4.5 Tanım. $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p) = \{ f \mid f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p, f \text{ sürekli} \}$ olsun. f nin belirsiz toplamı Sf ile gösterilir ve

$$Sf(n) = \sum_{j=0}^{n} f(j), \ n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır. $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ ise $Sf \in C^1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ dir, (Schikhof 1984).

3.5 Volkenborn İntegrali ve Özellikleri

3.5.1 Tanım. $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ olsun. f nin Volkenborn integrali

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n - 1} f(j)$$

şeklinde tanımlanır, (Schikhof 1984, Robert 2000).

3.5.2 Teorem. $d\mu(x) = \mu_{Haar} = \dfrac{1}{p^n}$

olsun.

1) $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{Sf(p^n) - Sf(0)}{p^n} = (Sf)'(0)$$

dır. Burada

$$(Sf)^{'}(x)=\frac{d}{dx}Sf(x)$$

dir.

2)
$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(1)+...+f(p^n-1)}{p^n}$$

dir.

3)
$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)d\mu(x)=\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu(x)+f^{'}(0)$$

dir.

4)
$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+n)d\mu(x)=\sum_{x=0}^{n-1} f^{'}(x)+\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu(x)$$

dir, (Schikhof 1984).

Volkenborn integralleri kullanılarak birçok özel sayının üreteç fonksiyonu bulunabilir. Şimdi Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu için aşağıdaki uygulamayı verelim.

3.5.3 Örnek. 3.5.2 Teoreminin (3). şıkkında $f(x)=e^{xt}$ olarak alınırsa

$$e^t\int_{\mathbb{Z}_p} e^{tx}d\mu(x)=\int_{\mathbb{Z}_p} e^{tx}d\mu(x)+t$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{tx}d\mu(x)=\frac{t}{e^t-1}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonunu verir. Yani (2.1.3) bağıntısından

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{tx}d\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. e^{tx} in Taylor açılımı yukarıdaki eşitlikte yerine konulup gerekli işlemlerden sonra

$$B_n=\int_{\mathbb{Z}_p} x^n d\mu(x)$$

elde edilir. Bu eşitlikte n nin bazı özel değerleri için

$$n=0 \text{ için } B_0=\int_{\mathbb{Z}_p} d\mu(x)=1,$$

$$n=1 \text{ için } B_1=\int_{\mathbb{Z}_p} xd\mu(x)=\frac{-1}{2},$$

$$n=2 \text{ için } B_2=\int_{\mathbb{Z}_p} xd\mu(x)=\frac{1}{6},$$

$$n=3 \text{ için } B_3=\int_{\mathbb{Z}_p} x^3 d\mu(x)=0$$

bulunur, (Schikhof 1984).

Ters limit (inverse limit) aşağıdaki gibi tanımlanır:

I yönlendirilmiş bir küme ve üzerinde kısmi bir sıralama olsun. Her $i, j \in I$ için $i \le k$ ve $j \le k$ olacak şekilde bir $k \in I$ var olsun. Her $i \in I$ için A_i bir küme (ya da grup, halka) olsun. $i \le j \le k$ olmak üzere ϕ_{ii} özdeşlik dönüşümü ve

$$\phi_{ij}\phi_{kj}=\phi_{ki}$$

olacak şekilde bir $\phi_{ji}: A_j \to A_i$ dönüşümü vardır. Bu duruma ters sistem denilir. $A=\prod A_i$ olsun. Ters limit

$$\lim_{\leftarrow} A_i = \{(\ldots,a_i,\ldots)\in A : \phi_{kj}(a_k)=a_j,\ j\le k\}$$

olarak tanımlanır. Her bir i için, $A \to A_i$ projeksiyonu tarafından indirgenmiş bir $\phi_i : \lim\limits_{\leftarrow} A_i \to A_i$ dönüşümü vardır. Ayrıca $\phi_{ji}\phi_j=\phi_i$ olduğu açıktır, (Washington 1996).

Örneğin p asal sayı $I=\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $A_i=\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ olsun. $\phi_{ji}: a \bmod p^j \to a \bmod p^i$ olsun. O zaman

$$\lim_{\leftarrow} A_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_p$$

dir. Burada ϕ_i dönüşümleri $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ doğal projeksiyon dönüşümlerdir, (Washington 1996).

Volkenborn integrali ile ters limit arasında önemli ilişkiler vardır. Yani $\mathbb{X}=\mathbb{X}_j=\lim\limits_{\overleftarrow{N}}(\mathbb{Z}/jp^N\mathbb{Z})$ ve $a+jp^N\mathbb{Z}_p=\{x\in\mathbb{X}\mid x\equiv a(\mathrm{mod}\, p^N)\}$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_q(y)=\int_{\mathbb{X}} f(x)d\mu_q(y) \tag{3.5.1}$$

dir, (Kim ve ark. 2007e)

4. *q*-ANALİZ

q-analiz (calculus) in tarihi Leonhard Euler ve Carl Gustav Jacobi'ye dayanmasına rağmen son yıllarda quantum mekanikteki kullanımı sayesinde birçok matematikçinin ve diğer bilim adamlarının çalışma alanına girmiştir. 19. yüzyılda q-analiz hipergeometrik serilere uygulandı. q-analiz günümüzde matematiğin birçok alanında kullanılmaya başlanmıştır. Bunlar arasında özellikle kombinatorik, özel fonksiyonlar, q-türev, q-integral, q-teta fonksiyonları, q-eliptik Gama fonksiyonu, Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Stirling sayıları, Modüler formlar, q-ölçüm, q-quantum gruplar gibi alanlar sayılabilir.

4.1 Temel Kavramlar

Bu tez boyunca $q \in \mathbb{C}$ ise $|q| < 1$; $q \in \mathbb{C}_p$ ise $|q-1|_p < p^{\frac{1}{1-p}}$ ya da $|1-q|_p \leq 1$ alınacaktır.

4.1.1 Tanım. x herhangi bir değişken olsun. $[x:q]$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$[x:q] = \frac{1-q^x}{1-q}.$$

4.1.2 Uyarı. $\lim_{q \to 1}[x:q] = x$

dir.

Şimdi $[x:q]$ nun bazı özelliklerini verelim:

$$[x+y:q]=[x:q]+q^{x}[y:q],$$

$$[x:q^{-1}]=q^{1-x}[x:q],$$

$$[-x:q]=-q^{-x}[x:q],$$

$$[-x:q^{-1}]=-q[x:q],$$

$$[1-x:q]=1-[x:q^{-1}],$$

dir, (Kuperschmidt 2005).

Şimdi Jackson'ın (Jackson 1908) çalışmasında tanımlanan Euler-Jackson q-fark operatörünü vereceğiz. Bu tezde sadece bu kısım bilgi olarak verilecektir. Euler-Jackson q-fark operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(D_q\varphi)(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(qx)}{(1-q)x},\ \ q\in\mathbb{C}-\{1\}. \tag{4.1.1}$$

Eğer φ fonksiyonu x noktasında diferensiyellenebiliyorsa

$$\lim_{q\to 1}(D_q\varphi)(x)=\frac{d\varphi}{dx}$$

dir. Günümüzde (4.1.1) denklemi q-Jackson türev olarak literatüre geçmiştir.

q-Jackson türevi için aşağıdaki örneği verelim.

4.1.2 Örnek. $D_q x^n=\dfrac{x^n-(qx)^n}{(1-q)x}=\dfrac{x^n(1-q^n)}{(1-q)x}=[n:q]x^{n-1}$.

Bu q-türev ve q-analiz ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için (Kac ve Cheung 2001, Majid 1995) kaynakları incelenebilir.

5. q-EULER SAYILARI ve POLİNOMLARI

q-Euler tipli sayılar ve polinomlar birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Bu sayılar ve polinomlar sayılar teorisinde, matematiksel analizde, istatistikte ve diğer alanlarda kullanılmaktadır. Özden ve ark. (2008a,b,c) q-Euler sayılarının ve polinomlarının genişlemelerini de tanımlamışlardır.

Kim (2002b) p-adik q-ölçümü

$$\mu_q(a+p^N\mathbb{Z}_p)=\frac{q^a}{[p^N:q]}$$

olarak tanımlamıştır.

Yukarıdaki bağıntıdan, Kim (Kim 2007a, Kim ve ark. 2007e) $\mathbb{Z}_p$ üzerinde fermionik p-adik q-ölçümü

$$\mu_{-q}(a+dp^N\mathbb{Z}_p)=\frac{(-q)^a}{[dp^N:-q]} \tag{5.1}$$

olarak tanımlamış ve q-Euler sayıları ile ilgili birçok bağıntı ve özellik elde etmiştir. Kim bu ölçümü kullanarak $\mathbb{Z}_p$ üzerinde sürekli diferensiyellenebilir bir f fonksiyonunun fermionik p-adik q- integralini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

$$I_{-q}(f)=\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_{-q}(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{[p^N:-q]}\sum_{x=0}^{p^N-1} f(x)(-q)^x \tag{5.2}$$

dir.

5.1 Uyarı. Yukarıdaki integral yardımıyla hem Euler tipli sayıların ve polinomların, hem de Genocchi sayılarının ve polinomlarının üreteç fonksiyonları bulunabilir.

$f_1(x)=f(x+1)$ olsun. O zaman (5.2) bağıntısından

$$I_{-1}(f_1(x))+I_{-1}(f(x))=2f(0) \tag{5.3}$$

elde edilir, (Kim 2007a-e).

$f(x)=q^x e^{tx}$ fonksiyonu (5.3) de yerine konulup gerekli işlemlerden sonra

$$F(t,q)=\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_{-1}(x)=\frac{2}{qe^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,q}\frac{t^n}{n!},\quad |t+\log q|<\pi \tag{5.4}$$

elde edilir, (Özden ve ark. 2008c).

Kim (2007e), fermionik p-adik q-integrali kullanarak $E^*_{n,q}$, q-Euler sayılarınının üreteç fonksiyonunu

$$F_q(t)=\frac{q+1}{qe^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E^*_{n,q}\frac{t^n}{n!},\quad |t+\log q|<\pi \tag{5.5}$$

olarak tanımladı. Kim (2007e), q-Euler polinomları için

$$E^*_{n,q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}(x+y)^n d\mu_{-q}(y)$$

Witt formülünü verdi.

(5.4) ve (5.5) den

$$F(t,q)=\frac{2}{qe^t+1}=\frac{2}{q+1}F_q(t)$$

elde edilir, (Özden ve ark. 2008a).

q-Euler sayılarının Frobenius Euler sayıları ile ilişkisi vardır. Şimdi bu ilişkiyi verelim:

$$\frac{q+1}{qe^t+1}=\frac{1+q^{-1}}{e^t+q^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}H_n(-q^{-1})\frac{t^n}{n!}$$

dir. Böylece $H_n(-q^{-1})$ Frobenius Euler sayıları olmak üzere

$$H_n(-q^{-1})=E^*_{n,q}$$

elde edilir. Belirtelim ki bu tip q-Euler sayıları, Apostol-Euler tipli sayılar olarak da tanımlanabilir. Bu tip sayılar için Y. H. Kim ve ark. (2008), Luo ve Srivastava (2006), Srivastava ve ark. (2005) kaynaklarına bakılabilir.

Ayrıca Kim (2007e), farklı tipli q-Euler polinomlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$F_q(t,x) = \frac{q+1}{qe^t+1}e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,q}^{*}(x)\frac{t^n}{n!}, \quad |t+\log q| < \pi . \tag{5.6}$$

5.2 Uyarı. $\lim_{q\to 1} F_q(t,x) = \dfrac{2e^{tx}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\dfrac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$

elde edilir. Böylece (5.6), (2.1.6) ya indirgenmiş olur.

5.3 Teorem (Özden ve ark. 2008a). $n = 0,1,2,...$ olmak üzere

$$q(1+E_{n,q}^{*}(x))^n + E_{n,q}^{*}(x) = (q+1)x^n \tag{5.7}$$

dir. Burada $(E_q^{*}(x))^n$ yerine $E_{n,q}^{*}(x)$ alınmıştır.

İspat. (5.6) bağıntısından

$$\frac{q+1}{qe^t+1}e^{xt} = e^{E_q^{*}(x)t}$$

ifadesini yazalım. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$(q+1)e^{xt} = qe^{(1+E_q^{*}(x))t} + e^{E_q^{*}(x)t}$$

elde edilir. e^{tx} in Taylor seri açılımı yapılırsa

$$(q+1)\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(q(1+E_q^{*}(x))^n + E_{n,q}^{*}(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Bu seride t^n nin katsayıları karşılaştırılırsa teoremin ispatı tamamlanmış olur.

5.4 Teorem. (5.4) bağıntısıyla tanımlanmış olan $E_{n,q}$ sayılarının rekürans bağıntısı

$$q(E_q+1)^n + E_{n,q} = \begin{cases} 0, & n>0 \\ 2, & n=0 \end{cases} \tag{5.8}$$

dir. Burada E_q^n yerine $E_{n,q}$ alınmıştır ve $(E_q+1)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}E_{j,q}$ dir.

İspat. (5.4) bağıntısında

$$F(t,q) = \frac{2}{qe^t+1} = e^{E_q t}$$

olsun. Bu teoremin ispatı 5.3 Teoreminin ispatına benzer olarak kolaylıkla yapılabilir.

(5.8) bağıntısında n nin bazı özel değerleri için q-Euler sayılarını bulabiliriz. Örneğin $n=0$ için $2=qE_{0,q}+E_{0,q}$ olacağından

$$E_{0,q}=\frac{2}{q+1}$$

dir. $n=1$ için

$$E_{1,q}=\frac{-2}{(q+1)^2}$$

dir.

Özel olarak $q\to 1$ için $E_{0,1}=1=E_0$ ve $E_{1,1}=\frac{-1}{2}=E_1$ klasik Euler sayıları elde edilir. (5.7) denkleminden

$$E^*_{n,q}(x)+q\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E^*_{k,q}(x)=(q+1)x^n$$

elde edilir.

(5.5) ve (5.6) bağıntılarından

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}E^*_{n,q}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}E^*_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Bu bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa

$$E^*_{n,q}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}E^*_{k,q}$$

elde edilir.

5.5 Teorem (Özden ve ark. 2008a). j tek tamsayı olmak üzere

$$E^*_{n,q}(x)=\frac{(q+1)j^n}{q^j+1}\sum_{a=0}^{j-1}(-1)^a q^a E^*_{n,q^j}\left(\frac{a+x}{j}\right)$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı Kim (2007a) ve Şimşek (2006a) makalelerindeki ispat yöntemine benzer şekilde yapılacaktır. (3.5.1) bağıntısından

$$\int_{\mathbb{Z}_p}(x+y)^n d\mu_{-q}(y)=\int_{\mathbb{X}}(x+y)^n d\mu_{-q}(y)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{[jp^N:-q]}\sum_{y=0}^{jp^N-1}(x+y)^n(-q)^y$$

elde edilir. $E^{*}_{n,q}(x)$ polinomunun Witt formülü ve (5.2) bağıntısından

$$E^{*}_{n,q}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{[jp^N : -q]} \sum_{y=0}^{jp^N-1} (x+y)^n (-q)^y$$

$$= \frac{1}{[j:-q]} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{[p^N : (-q)^j]} \sum_{a=0}^{j-1} \sum_{y=0}^{p^N-1} (x+a+jy)^n (-q)^{a+jy}$$

$$= \frac{j^n}{[j:-q]} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{[p^N : (-q)^j]} \sum_{a=0}^{j-1} (-q)^a \sum_{y=0}^{p^N-1} \left(\frac{a+x}{j} + y \right)^n ((-q)^j)^y$$

$$= \frac{j^n}{[j:-q]} \sum_{a=0}^{j-1} (-q)^a \lim_{N\to\infty} \frac{1}{[p^N : (-q)^j]} \sum_{y=0}^{p^N-1} \left(\frac{a+x}{j} + y \right)^n ((-q)^j)^y$$

$$= \frac{j^n}{[j:-q]} \sum_{a=0}^{j-1} (-q)^a E^{*}_{n,q^j}\left(\frac{a+x}{j} \right)$$

$$= \frac{j^n}{[j:-q]} \sum_{a=0}^{j-1} (-q)^a E^{*}_{n,q^j}\left(\frac{a+x}{j} \right)$$

$$= \frac{(q+1)\, j^n}{q^j+1} \sum_{a=0}^{j-1} (-q)^a E^{*}_{n,q^j}\left(\frac{a+x}{j} \right)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

5.6 Teorem (Özden ve ark. 2008a). $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$\frac{E^{*}_{m,q} - q^n (-1)^n E^{*}_{m,q}(n)}{q+1} = \sum_{l=0}^{n-1} q^l (-1)^l l^m$$

dir.

İspat. (5.6) bağıntısında $x = n,\ n \in \mathbb{Z}^+$ alınırsa

$$F_q(t,n) = \frac{q+1}{qe^t+1} e^{nt} = \sum_{k=0}^{\infty} E^{*}_{k,q}(n) \frac{t^k}{k!}, \quad \left| t + \log q \right| < \pi$$

elde edilir. Buradan

$$F_q(t) - q^n (-1)^n F_q(t,n) = (q+1) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l q^l e^{lt} - (q+1) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+n} q^{l+n} e^{t(l+n)}$$

$$= (q+1) \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l q^l e^{lt} + (q+1) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+n} q^{l+n} e^{t(l+n)} - (q+1) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+n} q^{l+n} e^{t(l+n)}$$

olur ve

$$F_q(t) - q^n(-1)^n F_q(t,n) = (q+1)\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l q^l e^{lt}$$

elde edilir. (5.5) ve (5.6) bağıntılarından

$$\sum_{m=0}^{\infty}(E_{m,q}^{*} - q^n(-1)^n E_{m,q}^{*}(n))\frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty}((q+1)\sum_{l=0}^{n-1} q^l(-1)^l l^m)\frac{t^m}{m!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte t^m nin katsayıları eşitlenirse ispat tamamlanmış olur.

5.7 Uyarı. 5.6 Teoreminin bazı özel sonuçları aşağıdaki şekildedir:

$q \to 1$ iken

$$\frac{E_m - (-1)^n E_m(n)}{2} = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l l^m$$

elde edilir. Bu bağıntı yardımıyla

$$\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l l,\ \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l l^2,\ \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l l^3,...$$

şeklindeki sonlu toplamların değerlerini Euler sayıları ve polinomları cinsinden hesaplamış oluruz, (Şimşek ve ark. 2006b, Kim ve ark. 2006d, Kim 2005).

6. TWİSTED *q*-EULER SAYILARI ve POLİNOMLARI

6.1. Twisted (*h*, *q*)-Euler Sayıları ve Polinomları

Bu kısımda farklı tipli q-Euler sayıları ve polinomları çalışılacaktır. Twisted (h,q)-Euler sayılarını ve polinomlarını tanımlanacaktır ve bunların özellikleri verilecektir. Bu sayılar ve polinomlar üzerine bazı teoremleri ispatlanacaktır. İlk olarak bu bölümde kullanacağımız bazı kavramları açıklayacağız. $N \geq 0$ olmak üzere C_{p^N} ile $\mathbb{C}_p^* = \mathbb{C}_p - \{0\}$ da p^N-ci birimin köklerine sahip çarpımsal grubu göstereceğiz.

$$T_p = \left\{ \xi \in \mathbb{C}_p : \xi^{p^N} = 1,\ N \geq 0 \right\} = \bigcup_{N \geq 0} C_{p^N}$$

olsun. T_p nin bir çok cebirsel ve topolojik özellikleri vardır (Kim ve Son 2007, Kim ve ark. 2003, Kim 1994, Şimşek 2005, Şimşek 2006a). $\xi \in T_p$ ise o zaman

$$\phi_\xi : (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{C}_p^*,.)\ ,\ \phi_\xi(x) = \xi^x$$

şeklinde tanımlanan ϕ_ξ fonksiyonu yerel olarak sabit bir fonksiyondur. Dikkat edilirse bu fonksiyonun türevi sıfırdır.

Twisted Euler sayıları ve polinomları son zamanlarda yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Kim ve Rim (2007f) $\mathbb{Z}_p$ üzerinde fermionik p-adik q-integrali kullanarak ξ-q-Euler tipli sayıların ve polinomların üreteç fonksiyonlarını ve bu sayıların ve polinomların interpolasyon fonksiyonlarını tanımladılar.

6.1.1 Tanım. ξ**-**(h,q) **-**Euler sayıları ve polinomları

$$F_{\xi,q}^{(h)}(t) = \frac{2}{\xi q^h e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\xi,q}^{(h)} \frac{t^n}{n!} \tag{6.1.1}$$

ve

$$F_{\xi,q}^{(h)}(t,x) = \frac{2e^{tx}}{\xi q^h e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\xi,q}^{(h)}(x) \frac{t^n}{n!} \tag{6.1.2}$$

üreteç fonksiyonları ile tanımlanır, (Cangül ve ark. 2008).

6.1.2 Uyarı. i) $f(x)=\xi^x q^{hx} e^{tx}$, $\xi \in T_p$, $h \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{C}_p$

fonksiyonunu (5.3) denkleminde yerine koyup gerekli işlemler yapılırsa

$$I_{-1}(\xi^x q^{hx} e^{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\xi,q}^{(h)} \frac{t^n}{n!} \tag{6.1.3}$$

elde edilir, (Cangül ve ark. 2008, Özden ve ark. 2008c). Benzer şekilde

$$I_{-1}(\xi^x q^{hx} e^{t(x+y)}) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\xi,q}^{(h)}(y) \frac{t^n}{n!} \tag{6.1.4}$$

elde edilir.

ii) (6.1.1) denkleminde $\xi = 1$ ise $E_{n,\xi,q}^{(h)} = E_{n,q}^{(h)}$ dir.

(6.1.2) denkleminde $\xi = 1$ ve $q \to 1$ ise $E_{n,\xi,q}^{(h)}(x) \to E_n(x)$ dir. Burada $E_n(x)$ klasik Euler polinomudur.

iii) (6.1.2) denkleminin her iki tarafının x e göre türevi alınırsa

$$\frac{2te^{tx}}{\xi q^h e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} E_{n,\xi,q}^{(h)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

Yukarıdaki bağıntıdan

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\xi,q}^{(h)}(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} E_{n,\xi,q}^{(h)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$\frac{d}{dx} E_{n,\xi,q}^{(h)}(x) = nE_{n-1,\xi,q}^{(h)}(x)$$

elde edilir.

iv) $E_{n,\xi,q}^{(h)}(0) = E_{n,\xi,q}^{(h)}$ olduğundan dolayı bu sayıların rekürans (*indirgeme*) bağıntıları üreteç fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

$$E_{0,\xi,q}^{(h)} = \frac{2}{\xi q^h + 1}$$

olmak üzere

$$\xi q^h (E_{n,\xi,q}^{(h)} + 1)^n + E_{n,\xi,q}^{(h)} = 0,\ n \geq 0$$

elde edilir.

Twisted (h,q)-Euler sayılarının ve polinomlarının Witt formülü aşağıdaki teoremle verilir:

6.1.3 Teorem (Cangül ve ark. 2008). $\xi \in T_p$, $h \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{C}_p$ ve $|1-q|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}$ olsun. O zaman

$$\int_{\mathbb{Z}_p} q^{hy} \xi^y y^n d\mu_{-1}(y) = E_{n,\xi,q}^{(h)} \tag{6.1.5}$$

ve

$$\int_{\mathbb{Z}_p} q^{hy} \xi^y (x+y)^n d\mu_{-1}(y) = E_{n,\xi,q}^{(h)}(x) \tag{6.1.6}$$

dır.

İspat. (6.1.3) eşitliğinde e^{tx} Taylor serisine açılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (I_{-1}(\xi^x q^{hx} x^n)) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\xi,q}^{(h)} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. t^n nin katsayıları karşılaştırılırsa (6.1.5) in ispatı tamamlanmış olur. (6.1.6) nın ispatı da (6.1.5) in ispatına benzer şekilde yapılır. (6.1.4) eşitliğinden

$$I_{-1}(\xi^x q^{hx} e^{t(x+y)}) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\xi,q}^{(h)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. e^{tx} in Taylor açılımı yapılıp, gerekli işlemlerden sonra (6.1.6) ispatlanmış olur.

Teorem 6.1.3 ün birçok önemli uygulaması vardır. Örneğin

$$\int_{\mathbb{Z}_p} q^{hy} \xi^y d\mu_{-1}(y) = \frac{2}{\xi q^h + 1}$$

ve

$$\int_{\mathbb{Z}_p} q^{hy} \xi^y y d\mu_{-1}(y) = -\frac{2\xi q}{(\xi q^h + 1)^2}$$

şeklinde integral değerleri hesaplanabilir.

6.1.4 Teorem (Cangül ve ark. 2008) (Dağılım Bağıntısı). k pozitif tek tamsayı olsun.

$$E_{n,\xi,q}^{(h)}(x)=k^{n}\sum_{a=0}^{k-1}(-1)^{a}\,\xi^{a}q^{ha}E_{n,\xi^{k},q^{k}}^{(h)}\left(\frac{a+x}{k}\right)$$

dir.

İspat. $$E_{n,\xi,q}^{(h)}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}q^{hy}\xi^{y}(x+y)^{n}\,d\mu_{-1}(y)=\lim_{N\to\infty}\sum_{y=0}^{kp^{N}-1}q^{hy}\xi^{y}(x+y)^{n}(-1)^{y}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{y=0}^{p^{N}-1}\xi^{a+ky}q^{h(a+ky)}(a+ky+x)^{n}(-1)^{a+ky}$$

$$=k^{n}\sum_{a=0}^{k-1}\xi^{a}q^{ha}(-1)^{a}\lim_{N\to\infty}\sum_{y=0}^{p^{N}-1}(-1)^{ky}q^{hy}\xi^{ky}\left(y+\frac{a+x}{k}\right)^{n}$$

$$=k^{n}\sum_{a=0}^{k-1}\xi^{a}q^{ha}(-1)^{a}\int_{\mathbb{Z}_p}\xi^{ky}q^{khy}\left(y+\frac{a+x}{k}\right)^{n}d\mu_{-1}(y)$$

$$=k^{n}\sum_{a=0}^{k-1}\xi^{a}q^{ha}(-1)^{a}E_{n,\xi^{k},q^{k}}^{(h)}\left(\frac{a+x}{k}\right).$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.1.5 Teorem. $n\in\mathbb{Z}^{+}$ olsun.

$$E_{k,\xi,q}^{(h)}(x)=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^{k-m}E_{m,\xi,q}^{(h)}$$

dir.

İspat. $$F_{\xi,q}^{(h)}(t,x)=\frac{2}{\xi q^{h}e^{t}+1}e^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,\xi,q}^{(h)}(x)\frac{t^{n}}{n!}$$

üreteç fonksiyonu tanımından

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\xi^{n}q^{nh}e^{t(n+x)}=\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,\xi,q}^{(h)}(x)\frac{t^{n}}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki denkleme $\frac{d^{k}}{dt^{k}}|_{t=0}$ türev operatörünü uygularsak

$$E^{(h)}_{k,\xi,q}(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\xi^n q^{nh}(x+n)^k \tag{6.1.7}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^{k-m}n^m(-1)^n\xi^n q^{nh}=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^{k-m}E^{(h)}_{m,\xi,q}$$

elde edilir. Burada

$$E^{(h)}_{k,\xi,q}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\xi^n q^{nh}n^k$$

dır.

6.1.6 Sonuç (Cangül ve ark. 2008). k pozitif tek tamsayı olsun. O halde

$$E^{(h)}_{n,\xi,q}(x)=\sum_{j=}^{n}\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{y=0}^{n-j}\binom{n}{j,y,n-j-y}(-1)^a\xi^a q^{ha}k^j a^y x^{n-j-y}E^{(h)}_{j,\xi^k,q^k}$$

dır. Burada

$$\binom{n}{l_1,l_2,\ldots,l_v}=\frac{n!}{l_1!l_2!\ldots l_v!}$$

çok terimli Binom katsayılarıdır.

İspat. 6.1.4 ve 6.1.5 Teoremlerinden

$$E^{(h)}_{n,\xi,q}(x)=k^n\sum_{a=0}^{k-1}\xi^a q^{ha}(-1)^a E^{(h)}_{n,\xi^k,q^k}\left(\frac{a+x}{k}\right)$$

$$=k^n\sum_{a=0}^{k-1}\xi^a q^{ha}(-1)^a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{a+x}{k}\right)^{n-j}E^{(h)}_{j,\xi^k,q^k}$$

$$=\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^a\xi^a q^{ha}k^j\sum_{y=0}^{n-j}\binom{n-j}{y}a^y z^{n-j-y}E^{(h)}_{j,\xi^k,q^k}$$

$$=\sum_{j=}^{n}\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{y=0}^{n-j}\binom{n}{j,y,n-j-y}(-1)^a\xi^a q^{ha}k^j a^y x^{n-j-y}E^{(h)}_{j,\xi^k,q^k}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.2. Yüksek Mertebeden Twisted (*h*, *q*)-Euler Sayıları ve Polinomları

Bu kısımda yüksek mertebeden twisted (h,q)-Euler sayıları ve polinomları tanımlayacağız ve bunların özelliklerini inceleyeceğiz. Bu sayılar ve polinomlar üzerine bazı teoremleri ispatlayacağız.

6.2.1 Tanım (Özden ve ark. 2008b). Yüksek mertebeden twisted (h,q)-Euler sayıları

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\cdots\int_{\mathbb{Z}_p}(\xi q^h)^{\sum_{j=1}^{r}x_j} e^{t\sum_{j=1}^{r}x_j}\prod_{j=1}^{r}d\mu_{-1}(x_j)=\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,\xi,q}^{(h,r)}\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2}{\xi q^h e^t+1}\right)^r \qquad (6.2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\prod_{j=1}^{r}d\mu_{-1}(x_j)=d\mu_{-1}(x_1)d\mu_{-1}(x_2)\ldots d\mu_{-1}(x_r)$$

dir.

Yüksek mertebeden twisted (h,q)-Euler sayılarının Witt formülü aşağıdaki teoremle verilir:

6.2.2 Teorem (Özden ve ark. 2008b). $n,r\in\mathbb{Z}^+$ ve $h\in\mathbb{Z}$ olsun.

$$E_{n,\xi,q}^{(h,r)}=\int_{\mathbb{Z}_p}\cdots\int_{\mathbb{Z}_p}(\xi q^h)^{\sum_{j=1}^{r}x_j}\left(\sum_{j=1}^{r}x_j\right)^n\prod_{j=1}^{r}d\mu_{-1}(x_j)$$

dir.

İspat. Bu teoremin ispatı 6.1.3 Teoreminin ispatına benzer şekilde yapılır. (6.2.1) denkleminde Taylor seri açılımı yapılırsa ispat tamamlanır.

6.2.3 Tanım (Özden ve ark. 2008b). Yüksek mertebeden twisted (h,q)-Euler polinomları

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cdots \int_{\mathbb{Z}_p} (\xi q^h)^{\sum_{j=1}^{r} x_j} e^{tz + \sum_{j=1}^{r} tx_j} \prod_{j=1}^{r} d\mu_{-1}(x_j) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,w,q}^{(h,r)}(z) \frac{t^n}{n!} \tag{6.2.2}$$

$$= e^{tz} \left(\frac{2}{wq^h e^t + 1} \right)^r$$

olarak tanımlanır.

Yüksek mertebeden twisted (h,q)-Euler polinomlarının Witt formülü aşağıdaki teoremle verilir:

6.2.4 Teorem (Özden ve ark. 2008b). $z \in \mathbb{C}_p$, $n,\, r \in \mathbb{Z}^+$ ve $h \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$E_{n,\xi,q}^{(h,r)}(z) = \int_{\mathbb{Z}_p} \cdots \int_{\mathbb{Z}_p} (q^h \xi)^{\sum_{j=1}^{r} x_j} \left(z + \sum_{j=1}^{r} x_j \right)^n \prod_{j=1}^{r} d\mu_{-1}(x_j) \tag{6.2.3}$$

dir.

İspat. İspat 6.1.3 Teoreminin ispatına benzer şekilde yapılır. Yani (6.2.2) denkleminde Taylor seri açılımı yapılırsa ispat tamamlanır.

6.2.5 Teorem (Özden ve ark. 2008b). $z \in \mathbb{C}_p$, $n, r \in \mathbb{Z}^+$ ve $h \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$E_{n,\xi,q}^{(h,r)}(z) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} z^{n-l} E_{n,\xi,q}^{(h,r)}$$

dır.

İspat. (6.2.3) denkleminde binom açılımı yapılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$E_{n,\xi,q}^{(h,r)}(z) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} z^{n-l} \int_{\mathbb{Z}_p} \cdots \int_{\mathbb{Z}_p} (\xi q^h)^{\sum_{j=1}^{r} x_j} \left(\sum_{j=1}^{r} x_j \right)^l \prod_{j=1}^{r} d\mu_{-1}(x_j)$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} z^{n-l} E_{l,\xi,q}^{(h,r)}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını verir.

Yüksek mertebeden twisted (h,q) -Euler sayılarının çarpımsal ifadesini verebilmek için aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

6.2.6 Teorem. $$\left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right)^n = \sum_{\substack{l_1,l_2,\ldots,l_r\geq 0\\ l_1+l_2+\ldots+l_r=n}} \binom{n}{l_1,l_2,\ldots,l_r} \prod_{a=1}^{r} x_a^{\,l_a}$$

dır, (Comtet 1974).

6.2.7 Teorem (Özden ve ark. 2008b). $n,r\in\mathbb{Z}^{+}$ olsun.

$$E_{n,\xi,q}^{(h,r)} = \sum_{\substack{l_1,l_2,\ldots,l_r\geq 0\\ l_1+l_2+\ldots+l_r=n}} \binom{n}{l_1,l_2,\ldots,l_r} \prod_{j=1}^{r} E_{l_j,\xi,q}^{(h)}$$

dir.

İspat. 6.2.6 Teoremindeki bağıntı, 6.2.4 Teoreminde yerine konulup gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
E_{n,\xi,q}^{(h,r)} &= \int_{\mathbb{Z}_p}\ldots\int_{\mathbb{Z}_p} (\xi q^h)^{\sum_{j=1}^{r} x_j} \left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right)^n \prod_{j=1}^{r} d\mu_{-1}(x_j) \\
&= \sum_{\substack{l_1,l_2,\ldots,l_r\geq 0\\ l_1+l_2+\ldots+l_r=n}} \binom{n}{l_1,l_2,\ldots,l_r} \prod_{j=1}^{r} \int_{\mathbb{Z}_p} (\xi q^h)^{x_j} x_j^{\,l_j}\, d\mu_{-1}(x_j) \\
&= \sum_{\substack{l_1,l_2,\ldots,l_r\geq 0\\ l_1+l_2+\ldots+l_r=n}} \binom{n}{l_1,l_2,\ldots,l_r} \prod_{j=1}^{r} E_{l_j,\xi,q}^{(h)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.2.8 Teorem (Özden ve ark. 2008b). $n,r\in\mathbb{Z}^{+}$ olsun. O zaman

$$E_{n,\xi,q}^{(h,r)}(y_1+y_2+\ldots+y_r) = \sum_{\substack{l_1,l_2,\ldots,l_r\geq 0\\ l_1+l_2+\ldots+l_r=n}} \binom{n}{l_1,l_2,\ldots,l_r} \prod_{j=1}^{r} E_{l_j,\xi,q}^{(h)}(y_j)$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı 6.2.7 Teoreminin ispatına benzer şekilde yapılır. Yani (6.2.3) denkleminde $z = y_1 + y_2 + ... + y_r$, $r \geq 1$ alınıp 6.2.6. Teoremi kullanılırsa

$$E_{n,\xi,q}^{(h,r)}(y_1 + y_2 + ... + y_r) = \sum_{\substack{l_1, l_2, ..., l_r \geq 0 \\ l_1 + l_2 + ... + l_r = n}} \binom{n}{l_1, l_2, ..., l_r} \prod_{j=1}^{r} \int_{\mathbb{Z}_p} (\xi q^h)^{x_j} (y_j + x_j)^{l_j} d\mu_{-1}(x_j)$$

elde edilir. (6.1.6) bağıntısı kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

7. TWISTED HURWİTZ TİPİ (*h*, *q*)-EULER ZETA FONKSİYONU ve TWISTED EULER (*h*, *q*)-*l* FONKSİYONU

Bu bölümde 6. Bölümde elde ettiğimiz twisted (h,q)-Euler sayılarının ve polinomlarının interpolasyon fonksiyonlarını tanımlayacağız. Bu fonksiyonların negatif tamsayılardaki değerlerinin twisted (h,q)-Euler sayılarına ve polinomlarına karşılık geleceğini ispatlayacağız. İspat için Cauchy-Rezidü Teoremini, Mellin dönüşümü yardımıyla analitik devamı ve Hankel yolunu kullanacağız. Bu tip interpolasyon fonksiyonları Analitik Sayılar Teorisinde, Kompleks Analiz ve diğer bilim dallarında birçok uygulama alanına sahiptir.

7.1 Twisted Hurwitz Tipi (*h*, *q*)-Euler Zeta Fonksiyonu

Bu kısımda twisted (h,q)-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonlarına, Mellin dönüşümlerini uygulayarak, negatif tamsayılarda twisted (h,q)-Euler polinomlarını üreten twisted Hurwitz tipi (h,q)-Euler zeta fonksiyonunu tanımlayacağız. Bu kısım boyunca $q\in\mathbb{C}$ ve $|q|<1$ kabul edeceğiz.

(6.1.2) bağıntısına Mellin dönüşümünü uygulayalım:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt=\frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{e^{-tx}}{\xi q^h e^{-t}+1}dt \tag{7.1.1}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{nh}\xi^n\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-(n+x)t}dt$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{nh}\xi^n}{(n+x)^s}$$

Yukarıdaki bağıntıyı kullanarak twisted Hurwitz tipi (h,q)-Euler zeta fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

7.1.1 Tanım. $s \in \mathbb{C}$, $0 < x \leq 1$ olmak üzere,

$$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(s,x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{nh} \xi^n}{(n+x)^s} \tag{7.1.2}$$

fonksiyonuna twisted Hurwitz tipi (h,q)-Euler zeta fonksiyonu denir, (Cangül ve ark. 2008).

Dikkat edilirse

$$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(s,x) = 2\Phi(-q^h \xi, s, x)$$

dır.

(7.1.2) denkleminde $x = 1$ alınırsa twisted (h,q)-Euler zeta fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

7.1.2 Tanım. $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{nh} \xi^n}{n^s}$$

dir, (Cangül ve ark. 2008).

Dikkat edilirse

$$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(s) = 2\Phi(-q^h \xi, s, 0)$$

dır.

7.1.3 Uyarı. (7.1.2) denkleminde $\xi = 1$ ve $q \to 1$ için

$$\zeta_E(s,x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^s} = 2\Phi(-1, s, x)$$

klasik Hurwitz tipi Euler zeta fonksiyonu elde edilir.

7.1.4 Teorem (Cangül ve ark. 2008). $h \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(-k,x) = E_{k,\xi,q}^{(h)}(x)$$

dir.

İspat 1. (7.1.2) eşitliğinde $s=-k, k\in\mathbb{Z}^{+}$ olarak alınırsa o zaman

$$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(-k,x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\xi^{n}q^{hn}(x+n)^{k}$$

elde edilir. (6.1.7) eşitliğini bu eşitlikte yerine koyarsak teoremi ispatlamış oluruz.

Bu teoremin ikinci ispatı (7.1.1) eşitliğine Cauchy Rezidü Teoremi ve Hankel yolu uygulanarak yapılabilir. Bu ispat yöntemi Srivastava ve ark. (2005) ve Washington (1996) yöntemine benzemektedir.

İspat 2. $y(s)=\int_{C}t^{s-1}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt$ olarak tanımlayalım. Burada C Hankel yolu yani reel eksen üzerinde $x=\infty$ noktasından başlayan $x=0$ noktasını saat yönünün tersine bir defa ε yarıçaplı çember ile çevreleyen ve tekrar $x=\infty$ noktasına giden yoldur, (Whittaker ve Watson 1952, Washington 1996).

$$y(s)=\int_{\infty}^{\varepsilon}t^{s-1}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt+\int_{C_{\varepsilon}}t^{s-1}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt+\int_{\varepsilon}^{\infty}t^{s-1}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt\,. \qquad (7.1.3)$$

t^{s} ise $e^{s\log t}$ olarak ifade edilebilir. $\log$ fonksiyonunun tek değerli olabilmesi için reel eksenin üst kısmında $\log t$, reel eksenin alt kısmında ise $\log t+2\pi i$ olarak alacağız. Bu durumda (7.1.3) ifadesi tekrar düzenlenirse

$$y(s)=-\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{(s-1)\log t}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt+\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{(s-1)(\log t+2\pi i)}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt+\int_{C_{\varepsilon}}t^{s-1}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt$$

$$=(-1+e^{2\pi i(s-1)})\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{(s-1)\log t}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt+\int_{C_{\varepsilon}}t^{s-1}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt \qquad (7.1.4)$$

olur. Burada C_{ε}, 0 merkezli ε yarıçaplı çemberdir.

$\operatorname{Re}s>1$ kabul edelim. $\varepsilon\to 0$ için $\int_{C_{\varepsilon}}\to 0$ olacağından

$$y(s)=(e^{2\pi is}-1)\int_{0}^{\infty}t^{s-1}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt$$

$$=(e^{2\pi is}-1)\int_{0}^{\infty}t^{s-1}2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{hn}\xi^{n}e^{-t(n+x)}dt$$

olur. (7.1.1) eşitliğinden

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}F_{\xi,q}^{(h)}(-t,x)dt = 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n q^{hn}\xi^n \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-(n+x)t}dt$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{2(-1)^n \xi^n q^{hn}}{(n+x)^s}$$

$$= \zeta_{\xi,q}^{(h)}(s,x)$$

elde edilir. Buradan

$$y(s) = (e^{2\pi i s}-1)\Gamma(s)\zeta_{\xi,q}^{(h)}(s,x)$$

bulunur. $s \neq 1$ için analitik devam ile

$$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(s,x) = \frac{y(s)}{(e^{2\pi i s}-1)\Gamma(s)} \tag{7.1.5}$$

elde edilir.

$$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(-k,x) = \lim_{s\to -k}\frac{y(s)}{(e^{2\pi i s}-1)\Gamma(s)} \tag{7.1.6}$$

limitini hesaplayalım. Γ fonksiyonunun (2) ve (4) nolu özelliklerinden dolayı

$$\begin{aligned}\lim_{s\to -k}\frac{1}{(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)} &= \lim_{s\to -k}\frac{\Gamma(1-s)}{e^{\pi is}2i\pi}\\ &= \frac{\Gamma(1+k)}{2i\pi(-1)^k}\\ &= \frac{k!}{2i\pi(-1)^k}\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

dir. O halde

$$\lim_{s\to -k} y(s) = \lim_{s\to -k}\int_C t^{s-1}F_{w,q}^{(h)}(-t,x)dt$$

$$= \int_C t^{-k-1}F_{w,q}^{(h)}(-t,x)dt$$

$$= 2\pi i \operatorname{Re} s_{t=0}\left\{\sum_{m=0}^\infty \frac{E_{m,\xi,q}^{(h)}(x)}{m!}(-1)^m t^{m-k-1}\right\}$$

$$= 2\pi i\frac{(-1)^k}{k!}E_{k,\xi,q}^{(h)}(x)$$

olur. Böylece (7.1.7) eşitliği (7.1.6) da yerine konulursa

$$\zeta_{E,\xi,q}^{(h)}(-k,x)=\lim_{s\to -k}\frac{y(s)}{(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)}$$

$$=2\pi i\frac{(-1)^k}{k!}E_{k,\xi,q}^{(h)}(x)\frac{k!}{2i\pi(-1)^k}$$

$$=E_{k,\xi,q}^{(h)}(x)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

7.2 Twisted Euler (*h*, *q*)-*l* Fonksiyonu

Bu kısımda genelleştirilmiş twisted (h,q)-Euler sayılarını interpole eden twisted Euler (h,q)-l fonksiyonunu tanımlayacağız. Bu kısım boyunca $q\in\mathbb{C}$ ve $|q|<1$ kabul edeceğiz.

7.2.1 Tanım. Genelleştirilmiş twisted (h,q)-Euler sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\begin{aligned}F_{\chi,\xi,q}^{(h)}(t)&=\sum_{a=0}^{f-1}\frac{2(-1)^a\chi(a)q^{ha}\xi^a e^{at}}{\xi^f q^{fh}e^{ft}+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,\chi,\xi,q}^{(h)}\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

Burada χ, kondüktörü f (f pozitif tek tamsayı) olan Dirichlet karakteridir, (Cangül ve ark. 2008).

(7.2.1) eşitliğine Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}F_{\chi,\xi,q}^{(h)}(-t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n q^{hn}\chi(n)\xi^n\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}dt \tag{7.2.2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n q^{hn}\chi(n)\xi^n}{n^s}$$

elde edilir. (7.2.2) bağıntısını kullanarak $E_{n,\chi,\xi,q}^{(h)}$ sayılarının interpolasyon fonksiyonunu aşağıdaki tanım ile vereceğiz.

7.2.2 Tanım. χ kondüktörü f (f pozitif tek tamsayı) olan Dirichlet karakteri ve $s\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$l_{E,\xi,q}^{(h)}(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n q^{hn}\chi(n)\xi^n}{n^s} \tag{7.2.3}$$

olarak tanımlanır, (Cangül ve ark. 2008). $l_{E,\xi,q}^{(h)}(s,\chi)$ fonksiyonu twisted Euler (h,q)-l fonksiyonu olarak adlandırılır.

Cenkci (2007), Kim ve Rim (2007f), Şimşek ve ark. (2007) farklı tipten (h,q)-l fonksiyonlarını tanımladılar.

Twisted Hurwitz tipi (h,q)-Euler zeta fonksiyonu ile twisted Euler (h,q)-l fonksiyonu arasındaki bağıntıyı aşağıdaki teorem ile vereceğiz.

7.2.3 Teorem (Cangül ve ark. 2008). χ kondüktörü f (f pozitif tek tamsayı) olan Dirichlet karakteri ve $s\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$l_{E,\xi,q}^{(h)}(s,\chi)=\frac{1}{f^s}\sum_{a=1}^{f}(-1)^a q^{ha}\chi(a)\xi^a\zeta_{E,\xi^f,q^f}^{(h)}(s,\frac{a}{f}) \tag{7.2.4}$$

dir.

İspat. $m=0,1,2,3,...$ ve $a=1,...,f$ olmak üzere (7.2.3) eşitliğinde $n=a+mf$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} l_{E,\xi,q}^{(h)}(s,\chi)&=\sum_{a=1}^{f}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{a+mf}q^{h(a+mf)}\chi(a+mf)\xi^{a+mf}}{(a+mf)^s}\\ &=\sum_{a=1}^{f}(-1)^a q^{ha}\chi(a)\xi^a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{mf}q^{mfh}\xi^{mf}}{(a+mf)^s}\\ &=\frac{1}{f^s}\sum_{a=1}^{f}(-1)^a q^{ha}\chi(a)\xi^a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{mf}q^{mfh}\xi^{mf}}{\left(m+\frac{a}{f}\right)^s} \end{aligned}$$

elde ederiz. 7.1.1 Tanımı yukarıdaki bağıntıda kullanılırsa teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Yukarıdaki 7.2.3 Teoreminde χ kondüktörü f çift olan Dirichlet karakteri olursa, o zaman twisted Euler (h,q)-l fonksiyonu ile twisted (h,q) Hurwitz tipi zeta fonksiyonu arasındaki bağıntı elde edilebilir. Bu tezde twisted (h,q) Hurwitz tipi zeta fonksiyonları çalışılmamıştır. Bu tip fonksiyonlar twisted (h,q) -Bernoulli sayıları ile elde edilir.

7.2.4 Teorem (Cangül ve ark. 2008). χ kondüktörü f olan Dirichlet karakteri ve $n \in \mathbb{Z}^{+}$ olsun.

$$l_{E,\xi,q}^{(h)}(-n,\chi) = E_{n,\chi,\xi,q}^{(h)}$$

dir.

İspat. (7.2.4) denkleminde $s=-n$ alınırsa

$$l_{E,\xi,q}^{(h)}(-n,\chi) = f^{n}\sum_{a=1}^{f}(-1)^{a}q^{ha}\chi(a)\xi^{a}\zeta_{E,\xi^{f},q^{f}}^{(h)}\left(-n,\frac{a}{f}\right)$$

elde edilir. 7.1.4. Teoremi yukarıdaki bağıntıda yerine konursa

$$l_{E,\xi,q}^{(h)}(-n,\chi) = f^{n}\sum_{a=1}^{f}(-1)^{a}q^{ha}\chi(a)\xi^{a}E_{n,\xi^{f},q^{f}}^{(h)}\left(\frac{a}{f}\right)$$

elde edilir. Genelleştirilmiş twisted (h,q) -Euler sayıları için dağılım bağıntısı

$$E_{n,\chi,\xi,q}^{(h)} = f^{n}\sum_{a=0}^{f-1}(-1)^{a}q^{ha}\chi(a)\xi^{a}E_{n,\xi^{f},q^{f}}^{(h)}\left(\frac{a}{f}\right)$$

yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Twisted (h,q) -Euler l fonksiyonu ile Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu arasındaki bağıntı aşağıdaki sonuç ile verilir.

7.2.5 Sonuç. $s \in \mathbb{C}$ olsun.

$$l_{E,\xi,q}^{(h)}(s,\chi) = 2f^{-s}\sum_{a=1}^{f}(-1)^{a}q^{ha}\chi(a)\xi^{a}\Phi\left(-q^{hf}\xi^{f},s,\frac{a}{f}\right)$$

dir.

7.2.6 Tanım. $s \in \mathbb{C}$, $a,F \in \mathbb{Z}$ (F pozitif tek tamsayı) ve $0<a<F$ olmak üzere kısmi zeta fonksiyonu

$$H_{E,\xi,q}^{(h)}(s,a,x \mid F) = \sum_{\substack{m\equiv a \,(\mathrm{mod}\, F) \\ m>0}} \frac{(-1)^{m}q^{hm}\xi^{m}}{(x+m)^{s}} \tag{7.2.5}$$

olarak tanımlanır, (Cangül ve ark. 2008).

7.2.7 Teorem (Cangül ve ark. 2008). $s \in \mathbb{C}$, $a, F \in \mathbb{Z}$ (F pozitif tek tamsayı) ve $0 < a < F$ olmak üzere

$$H_{E,w,q}^{(h)}(s,a,x \mid F) = \frac{(-1)^a q^{ha} w^a F^{-s}}{2} \zeta_{E,w^F,q^F}^{(h)}\left(s, \frac{a+x}{F}\right) \tag{7.2.6}$$

dir.

İspat. (7.2.5) denkleminde $m = a + nF$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} H_{E,\xi,q}^{(h)}(s,a,x \mid F) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{a+nF} q^{h(a+nF)} \xi^{(a+nF)}}{(z+a+nF)^s} \\ &= (-1)^a q^{ha} \xi^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (q^F)^{hn} (\xi^F)^n}{F^s \left(\frac{a+x}{F} + n\right)^s} \\ &= \frac{(-1)^a q^{ha} \xi^a F^{-s}}{2} \zeta_{E,w^F,q^F}^{(h)}\left(s, \frac{a+x}{F}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Kısmi zeta fonksiyonu ile Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu arasındaki bağıntı aşağıdaki sonuç ile verilir.

7.2.8 Sonuç. $s \in \mathbb{C}$ olsun.

$$H_{E,\xi,q}^{(h)}(s,a,x \mid F) = (-1)^a q^{ha} \xi^a F^{-s} \Phi\left(-q^{hF}, \xi^F, s, \frac{a+x}{F}\right)$$

dir.

7.2.9 Teorem (Cangül ve ark. 2008). $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$H_{E,\xi,q}^{(h)}(-n,a,x \mid F) = \frac{(-1)^a q^{ha} \xi^a F^n}{2} E_{n,\xi^F,q^F}^{(h)}\left(\frac{a+x}{F}\right)$$

dir.

İspat. (7.2.6) denkleminde $s = -n$ alınırsa

$$H_{E,\xi,q}^{(h)}(-n,a,x\mid F)=\frac{(-1)^a q^{ha}\xi^a F^n}{2}\zeta_{E,\xi^F,q^F}^{(h)}\left(-n,\frac{a+x}{F}\right)$$

ve 7.1.4 Teoremi kullanılarak ispat tamamlanır.

7.2.10 Uyarı. Kısmi zeta fonksiyonunun Analitik Sayılar Teorisinde, p-adik analizde birçok uygulaması vardır. Özellikle p-adik l fonksiyonunu Washington (1996) anlamında inşa etmek için kısmi zeta fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu fonksiyon negatif tamsayılarda twisted (h,q)-Euler tipli polinomları üretir.

8. *p*-ADİK *q*- ÖLÇÜM

p-adik ölçüm, p-adik analiz ve p-adik Volkenborn integrali alanında çok önemli bir yer tutmaktadır. p-adik ölçüm son yıllarda birçok matematkçi tarafından çalışılmaktadır. Bu ölçümler yardımıyla yeni interpolasyon fonksiyonları, integral dönüşümleri, Fourier dönüşümleri gibi alanlar çalışılmaktadır (Kim ve ark. 1996, Rim ve Kim 2006, Cenkci ve ark. 2004).

8.1 *p*-Adik *q*-Euler Ölçümü

Bu kısımda q-Euler sayılarının dağılım bağıntısı yardımıyla p-adik q-Euler ölçümünü inşa edeceğiz ve bu ölçümün integral uygulamalarını vereceğiz. Bu bölüm boyunca $q \in \mathbb{C}_p$ ve $(p,d)=1$ olmak üzere

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_d = \lim_{\overleftarrow{N}} \mathbb{Z}/dp^N\mathbb{Z}$$

ve

$$\mathbb{X}^* = \bigcup_{\substack{0<a<dp \\ (a,p)=1}} (a + dp\mathbb{Z}_p)$$

alınacaktır.

8.1.1 Teorem. d tek tamsayı olsun. q-Euler polinomlarının dağılım bağıntısı

$$E_{k,q}(x) = d^k \sum_{a=0}^{d-1} (-1)^a q^a E_{k,q^d}\left(\frac{a+x}{d}\right)$$

dir, (Özden ve ark. 2008c, Cangül ve ark. 2008).

8.1.2 Tanım (Özden ve ark. 2007). k, N pozitif tamsayılar ve d tek pozitif tamsayı olmak üzere

$$\mu_k^*(a + dp^N\mathbb{Z}_p) = (-1)^a (dp^N)^k q^a E_{k,q^{dp^N}}\left(\frac{a}{dp^N}\right)$$

olarak tanımlanır.

8.1.3 Teorem (Özden ve ark. 2007). μ_k^* $\mathbb{X}$ kümesi üzerinde bir dağılımdır.

İspat. 3.1.10 Teoreminden

$$\sum_{j=0}^{p-1}\mu_k^*(a+jdp^N+dp^{N+1}\mathbb{Z}_p)=\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{a+jdp^N}(dp^{N+1})^k q^{a+jdp^N}E_{k,q^{dp^{N+1}}}\left(\frac{a+jdp^N}{dp^{N+1}}\right)$$

$$=(-1)^a q^a(dp^N)^k p^k\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j(q^{dp^N})^j E_{k,(q^{dp^N})^p}\left(\frac{a+jdp^N}{dp^{N+1}}\right)$$

$$=(-1)^a q^a(dp^N)^k p^k\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j(q^{dp^N})^j E_{k,(q^{dp^N})^p}\left(\frac{\frac{a}{dp^N}+j}{p}\right)$$

$$=(-1)^a q^a(dp^N)^k E_{k,q^{dp^N}}\left(\frac{a}{dp^N}\right)$$

$$=\mu_k^*(a+dp^N)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

8.1.4 Teorem. $q\in\mathbb{C}_p$ ve $|1-q|_p\leq 1$ ise μ_k^*, $\mathbb{X}$ kümesi üzerinde bir ölçümdür.

İspat. (6.1.2) eşitliğinde $\xi=1$ alındığında

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n e^{t(n+x)}=\sum_{m=0}^{\infty}E_{m,q}(x)\frac{t^m}{m!}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda e^{tx} in Taylor açılımı yapılırsa

$$E_{m,q}(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n(n+x)^m$$

bulunur. $|1-q|_p\leq 1$ için yukarıdaki seri yakınsak olduğundan μ_k^* sınırlıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

8.1.5 Tanım. μ_k^* $\mathbb{X}$ üzerindeki p-adik q-Euler ölçümü olarak adlandırılır.

8.1.1 Teoreminden

$$\lim_{q\to 1}\mu^{*}_{k,q,E}(a+dp^{N})=(-1)^{a}(dp^{N})^{k}E_{k}\left(\frac{a}{dp^{N}}\right)$$

elde edilir, (Rim ve Kim 2006).

μ^{*}_{k} ölçümünün uygulaması aşağıdaki teorem ile verilebilir:

8.1.6 Teorem. k bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$\int_{\mathbb{Z}_p} d\mu^{*}_{k}(x) = E_{k,q}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_p} d\mu^{*}_{k}(x) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{x=0}^{dp^{N}-1}\mu^{*}_{k}(x+dp^{N}\mathbb{Z}_p)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{a=0}^{d-1}\sum_{j=0}^{p^{N}-1}\mu^{*}_{k}(a+jd+dp^{N}\mathbb{Z}_p)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{a=0}^{d-1}\sum_{j=0}^{p^{N}-1}(-1)^{a+jd}(dp^{N})^{k}q^{a+jd}E_{k,q^{dp^{N}}}\left(\frac{a+jd}{dp^{N}}\right)\\
&= \sum_{a=0}^{d-1}(-1)^{a}q^{a}d^{k}\lim_{N\to\infty}(p^{N})^{k}\sum_{j=0}^{p^{N}-1}(-1)^{j}(q^{j})^{d}E_{k,(q^{d})^{p^{N}}}\left(\frac{\frac{a}{d}+j}{p^{N}}\right)\\
&= \sum_{a=0}^{d-1}(-1)^{a}q^{a}d^{k}E_{k,q^{d}}\left(\frac{a}{d}\right)\\
&= E_{k,q}
\end{aligned}$$

dur.

6.1.3 Teoremindeki (6.1.5) eşitliğinde $\xi = h = 1$ alınırsa, o zaman aşağıdaki sonuç elde edilir:

8.1.7 Sonuç.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} q^{y}y^{n}d\mu_{-1}(y) = E_{n,q}$$

dir.

Yukarıdaki eşitlik 8.1.6 Teoreminde yerine konursa

$$d\mu_k^*(x) = q^x x^k d\mu_{-1}(x)$$

elde edilir.

8.1.8 Uyarı. $\lim\limits_{q\to 1} d\mu_k^*(x) = \lim\limits_{q\to 1} q^x x^k d\mu_{-1}(x) = x^k d\mu_{-1}(x)$

elde edilir. Yani $d\mu_{k,E}(x + p^N\mathbb{Z}_p) = x^k d\mu_{-1}(x + p^N\mathbb{Z}_p)$ dir, (Rim ve Kim 2006).

8.1.9 Teorem. χ kondüktörü $d\,(d$ tek tamsayı$)$ olan bir Dirichlet karakteri olmak üzere

$$\int_{\mathbb{X}} \chi(x) d\mu_k^*(x) = E_{k,q,\chi}$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}} \chi(x) d\mu_k^*(x) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{x=0}^{dp^N-1} \chi(x)\mu_k^*(x + dp^N\mathbb{Z}_p) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{p^N-1} \chi(a + jd)\mu_k^*(a + jd + dp^N\mathbb{Z}_p) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{a=0}^{d-1} \chi(a) \sum_{j=0}^{p^N-1} (-1)^{a+jd} (dp^N)^k q^{a+jd} E_{k,q^{dp^N}}\left(\frac{a+jd}{dp^N}\right) \\
&= d^k \sum_{a=0}^{d-1} (-1)^a q^a \chi(a) \lim_{N\to\infty} (p^N)^k \sum_{j=0}^{p^N-1} (-1)^j (q^j)^d E_{k,(q^d)^{p^N}}\left(\frac{\frac{a}{d}+j}{p^N}\right) \\
&= d^k \sum_{a=0}^{d-1} (-1)^a q^a \chi(a) E_{k,q^d}\left(\frac{a}{d}\right) \\
&= E_{k,q,\chi}
\end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

8.1.9 Teoreminin p-adik analizde pek çok uygulaması yapılabilir. μ_k^* ölçümü yardımıyla $E_{k,q,\chi}$ sayılarının değerleri hesaplanabilir. Bu teoremin sonucu kullanılarak

Kubota-Leopoldt tipi p-adik l fonksiyonları inşa edilebilir. Dokuzuncu bölümde bu tip fonksiyonların bir uygulaması verilecektir.

8.2 Twisted Daehee Sayıları ve Polinomları

Bu kısımda Kim (2002a) tarafından tanımlanan yeni tip ölçümü kullanarak twisted Daehee sayılarının ve polinomlarının bazı özelliklerini vereceğiz.

Kim (2002a)

$$\mu_z(a+p^N\mathbb{Z}_p)=\frac{z^a}{[p^N:z]}, N\in\mathbb{Z}^+,\ z\in\mathbb{C}_p$$

ölçümünü kullanarak Daehee sayılarını, $q\in\mathbb{C}_p$ ve $\left|1-q\right|_p<p^{-1/p-1}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$D_m(z:q)=\int_{\mathbb{Z}_p}[x:q]^m\,d\mu_z(x). \tag{8.2.1}$$

8.2.1 Tanım. $m\in\mathbb{N}$, $\xi\in T_p, z\in\mathbb{C}_p$ olmak üzere twisted Daehee sayıları

$$D_{m,\xi}(z:q)=\int_{\mathbb{Z}_p}\xi^x[x:q]^m\,d\mu_z(x)$$

olarak tanımlanır, (Özden ve ark. 2009a).

8.2.2 Teorem (Özden ve ark. 2009a). $m\in\mathbb{N}$, $\xi\in T_p$, $z\in\mathbb{C}_p$ olmak üzere

$$\begin{aligned}D_{m,\xi}(z:q)&=\int_{\mathbb{Z}_p}\xi^x[x:q]^m\,d\mu_z(x)\\&=\frac{1-z}{(1-q)^m\ln z}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k\ln(zq^k)}{1-\xi q^k z}\end{aligned}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}D_{m,\xi}(z:q)&=\int_{\mathbb{Z}_p}\xi^x[x:q]^m\,d\mu_z(x)\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{[p^N:z]}\sum_{x=0}^{p^N-1}\xi^x[x:q]^m z^x\end{aligned}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1-z}{1-z^{p^N}}\right)\sum_{x=0}^{p^N-1}\left(\frac{1-q^x}{1-q}\right)^m \xi^x z^x$$

$$= \frac{1-z}{(1-q)^m}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-z^{p^N}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\sum_{x=0}^{p^N-1}q^{kx}\xi^x z^x$$

$$= \frac{1-z}{(1-q)^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-z^{p^N}}\frac{1-q^{kp^N}z^{p^N}}{1-\xi q^k z}$$

$$= \frac{1-z}{(1-q)^m\ln z}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\frac{(-1)^k\ln(zq^k)}{1-\xi q^k z}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

8.2.3 Uyarı. (8.2.1) denkleminde $\xi = 1$ alınırsa $D_{m,\xi}(z:q)$ sayıları $D_m(z:q)$ sayılarına indirgenmiş olur.

u bir cebirsel sayı olsun. $H_0(u:q)=1$ olmak üzere q-Frobenius-Euler sayıları Carlitz (1948) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı:

$$(qH+1)^k - uH_k(u:q) = 0, \quad k \geq 1.$$

$\beta_0 = 1$ olmak üzere q-Bernoulli sayıları Carlitz (1948) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı:

$$q(q\beta+1)^k - \beta_k = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases}.$$

(8.2.1) denkleminde $z=u,\ u\in\mathbb{C}_p,\ |1-u|_p > 1$ alınırsa twisted Daehee sayıları twisted Frobenius Euler sayılarına indirgenir:

$$\begin{aligned} D_{m,\xi}(u:q) &= H_{m,\xi}(u^{-1},q) \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p}\xi^x[x:q]^m d\mu_u(x) \end{aligned}$$

(8.2.1) denkleminde $z=q$ alınırsa twisted Daehee sayıları twisted q-Carlitz Bernoulli sayılarına indirgenir:

$$\begin{aligned} D_{m,\xi}(q:q) &= \beta_{m,\xi}(q) \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p}\xi^x[x:q]^m d\mu_q(x),\ |1-u|_p > 0. \end{aligned}$$

μ_z ölçümü yardımıyla twisted Daehee sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \xi^x e^{[x:q]t} d\mu_z(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{Z}_p} \xi^x [x:q]^m d\mu_z(x)\right)\frac{t^m}{m!}$$

olarak tanımlayalım. Buradan

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \xi^x e^{[x:q]t} d\mu_z(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D_{m,\xi}(z:q)\frac{t^m}{m!}$$

elde edilir.

8.2.4 Tanım. $\xi \in T_p$ olsun. O zaman twisted Daehee polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} \xi^x e^{[x+y:q]t} d\mu_z(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{Z}_p} \xi^x [x+y:q]^m d\mu_z(x)\right)\frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} D_{m,\xi}(z,y:q)\frac{t^m}{m!}\end{aligned} \tag{8.2.2}$$

(8.2.2) denkleminden twisted Daehee polinomları

$$D_{m,\xi}(z,y:q) = \int_{\mathbb{Z}_p} \xi^x [x+y:q]^m d\mu_z(x) \tag{8.2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

8.2.5 Teorem (Özden ve ark. 2009a). $m \in \mathbb{N}$, $\xi \in T_p$, $z \in \mathbb{C}_p$ ve $\binom{m}{k,j,m-k-j}$ çok terimli Binom katsayısı olmak üzere

$$D_{m,\xi}(z,y:q) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-k}\binom{m}{k,j,m-k-j}(-1)^{m-k-j}\,\frac{q^{y(m-j)}D_{k,\xi}(z,q)}{(1-q)^{m-k}}$$

dır.

İspat. (8.2.3) denkleminden

$$\begin{aligned}D_{m,\xi}(z,y:q) &= \int_{\mathbb{Z}_p} \xi^x ([y:q]+q^y[x:q])^m d\mu_z(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} q^{ky}[y:q]^{m-k}\int_{\mathbb{Z}_p} \xi^x [x:q]^k d\mu_z(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} q^{ky}[y:q]^{m-k} D_{k,\xi}(z:q)\end{aligned} \tag{8.2.4}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}q^{ky}\frac{1}{(1-q)^{m-k}}\sum_{j=0}^{m-k}\binom{m-k}{j}(-1)^{m-k-j}q^{y(m-k-j)}D_{k,\xi}(z,q)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-k}\binom{m}{k,j,m-k-j}(-1)^{m-k-j}\frac{q^{y(m-j)}D_{k,\xi}(z:q)}{(1-q)^{m-k}}$$

elde edilir.

8.2.6 Uyarı. 1. (8.2.4) denkleminde $z=q$ alınırsa twisted q-Carlitz polinomları elde edilir:

$$\beta_{n,\xi}(y:q)=D_{m,\xi}(q,y:q)$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}q^{ky}[y:q]^{m-k}D_{k,\xi}(q:q)$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}q^{ky}[y:q]^{m-k}\beta_{k,\xi}(q).$$

2. (8.2.4) de $z=u$ alınırsa twisted q-Frobenius Euler polinomları elde edilir.

$$\beta_{m,\xi}(u,y:q)=H_{m,\xi}(u^{-1},y:q)$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}q^{ky}[y:q]^{m-k}D_{k,\xi}(u:q)$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}q^{ky}[y:q]^{m-k}H_{k,\xi}(u^{-1}:q).$$

Aşağıda vereceğimiz Teorem, p-adik analizde Daehee polinomlarının integral temsilini elde etmek için kullanılabilir.

8.2.7 Teorem (Özden ve ark. 2009a) (Dağılım Bağıntısı).

$m\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}^{+}, z\in\mathbb{C}_p, \xi\in T_p$ olsun.

$$D_{m,\xi}(z,y:q)=\frac{[k:q]^m}{[k:z]}\sum_{j=0}^{k-1}(\xi z)^j D_{m,\xi^k}\left(z^k,\frac{y+j}{k}:q^k\right) \tag{8.2.5}$$

dir.

İspat. $$D_{m,\xi}(z,y:q)=\int_{\mathbb{Z}_p}\xi^x[x+y:q]^m d\mu_z(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{[kp^N : z]} \sum_{x=0}^{kp^N -1} \xi^x [x+y:q]^m z^x$$

$$= \frac{[k:q]^m}{[k:z]} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{[p^N : z^k]} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{x=0}^{p^N -1} \xi^{j+kx} [j+kx+y:q]^m z^{j+kx}$$

$$= \frac{[k:q]^m}{[k:z]} \sum_{j=0}^{k-1} (\xi z)^j D_{m,\xi^k} \left(z^k, \frac{y+j}{k} : q^k \right)$$

elde edilir.

8.2.8. Sonuç. $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $z \in \mathbb{C}_p$, $\xi \in T_p$ olsun.

$$D_{m,\xi}(z, ky : q) = \frac{[k:q]^m}{[k:z]} \sum_{j=0}^{k-1} (\xi z)^j D_{m,\xi^k} \left(z^k, y + \frac{j}{k} : q^k \right). \tag{8.2.6}$$

İspat. (8.2.5) bağıntısında $y = ky$ alınırsa sonuç elde edilmiş olur. (8.2.6) eşitliğine Raabe tipi çarpım formülü denir.

9. *p*-ADİK *q*-ÖLÇÜM ve UYGULAMALARI

Bu bölümde p-adik q-ölçümün değişik alanlara uygulamalarını vereceğiz. Bu uygulamalar ayrıntılı bir şekilde referanslarda vermiş olduğumuz kaynaklarda bulunabilir.

9.1 *p*-adik (*h*, *q*)-*l* Fonksiyonu

p-adik analizde inşa edilen Kubota-Leopoldt p-adik L fonksiyonu, Kompleks analizde tanımlanan Dirichlet L fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Bu iki fonksiyon negatif tamsayılarda genelleştirilmiş Bernoulli sayılarını üretirler. Bu tip fonksiyonlar üzerine Kubota, Leopoldt, Iwasawa, Coleman, Castillo, Washington, Kim, Jang, Şimşek, Kurt, Cenkci ve ark. (2008) gibi pek çok araştırmacı çalışmıştır.

Bu tip fonksiyonların Matematikte pek çok uygulaması vardır. Örneğin Kummer kongrüansları, eliptik eğriler, Riemann zeta fonksiyonu, p-adik integral ve ölçüm, Galois grupları gibi alanlarda oldukça önemli yer tutmaktadırlar.

Özden ve ark. (2009b) negatif tamsayılarda genelleştirilmiş twisted (h,q)-Euler polinomlarını üreten iki değişkenli p-adik twisted Euler (h,q)-l fonksiyonunu tanımlamışlardır. Bu fonksiyonu inşa etmek için aşağıda vereceğimiz bazı temel tanım ve notasyonlara ihtiyaç vardır.

Teichmüller karakteri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

9.1.1 Tanım. G, $\mathbb{C}_p$ nin birimin köklerinin grubu ve

$$G_u = \{\, \theta \in \mathbb{C}_p : \theta^n = 1, n \in \mathbb{N}, n \nmid p \}$$

olsun. Teichmüller karakteri

$$w : \{\, x \in \mathbb{C}_p : |x|_p = 1\} \to G_u$$

$$w(x) = \lim_{n \to \infty} x^{p^{n!}}$$

olarak tanımlanır, (Schikhof 1984).

9.1.2 Uyarı. i) $x \in \mathbb{Q}_p$ ve $|x|_p = 1$ ise o zaman

$$w(x) = \lim_{n\to\infty} x^{p^n}$$

dir.

ii) $\{w(1), w(2), ..., w(p-1)\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : x^{p-1} = 1\}$ dir.

iii) w bir homomorfizmdir, (Schikhof 1984).

$$p^* = \begin{cases} p, & p > 2 \\ 4, & p = 2 \end{cases},$$

w kondüktörü $f_w = p^*$ olan bir Teichmüller karakteri; χ Dirichlet karakteri; $\chi_n = \chi w^{-n}$ ve

$$\langle a \rangle_q = w^{-1}(a)a = \frac{[a:q]}{w(a)}$$

olmak üzere

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C}_p : |s|_p \le p^* p^{-\frac{1}{p-1}} \right\}$$

şeklinde tanımlansın, (Washington 1996).

9.1.3 Teorem (Özden ve ark. 2009b). $n \in \mathbb{Z}^+$, $\xi^r = 1$, $\xi \neq 1$ ve χ kondüktörü $f = p^* k$, $k \in \mathbb{Z}$ olan Dirichlet karakteri olsun. $q \in \mathbb{C}_p$, $|1-q|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}$ olmak üzere

$$l_{p,q,\xi}^{(h,1)}(-n,t;\chi) = E_{n,q,\xi,\chi_n}^{(h,1)}(t) - \frac{(1+q)\chi w^{-n}}{1+q^p} E_{n,q^p,\xi^p,\chi_n}^{(h,1)}(p^* t)$$

dir.

İspat. $s \in D$ olmak üzere aşağıdaki p-adik twisted q-l-fonksiyonunu tanımlayalım:

$$l_{p,q,\xi}^{(h,1)}(s,t;\chi)=\int_{\mathbb{X}^*}\chi(x)\langle x+t\rangle^{-s}q^{(h-1)x}\xi^x d\mu_{-q}(x).$$

Yukarıdaki tanımdan

$$l_{p,q,\xi}^{(h,1)}(s,t;\chi)=\int_{\mathbb{X}}\chi(x)\langle x+t\rangle^{-s}q^{(h-1)x}\xi^x d\mu_{-q}(x)-\int_{p\mathbb{X}}\chi(x)\langle x+t\rangle^{-s}q^{(h-1)x}\xi^x d\mu_{-q}(x).$$

Yukarıdaki bağıntıdan

$$\begin{aligned} l_{p,q,\xi}^{(h,1)}(-n,t;\chi) &= \int_{\mathbb{X}}\chi(x)\frac{[x+t:q]^n}{w^n(x)}q^{(h-1)x}\xi^x d\mu_{-q}(x)- \\ &-\int_{\mathbb{X}}\chi(px)\frac{[px+t:q]^n}{w^n(px)}q^{(h-1)px}\xi^{px}d\mu_{-q}(px) \end{aligned} \tag{9.1.1}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}}\chi(px)\frac{[px+t:q]^n}{w^n(px)}q^{(h-1)px}\xi^{px}d\mu_{-q}(px) &= \chi(p)\int_{\mathbb{X}}\chi(x)\frac{[px+t:q]^n}{w^n(p)w^n(x)}q^{(h-1)px}\xi^{px}d\mu_{-q}(px) \\ &=\chi_n(p)\int_{\mathbb{X}}\chi_n(x)[p:q]^n[x+\frac{t}{p}:q^p]^n q^{(h-1)px}\xi^{px}d\mu_{-q}(px) \\ &=\frac{[p:q]^n\chi_n(p)(1+q)}{1+q^p}\int_{\mathbb{X}}\chi_n(x)[x+\frac{t}{p}:q^p]^n q^{(h-1)px}\xi^{px}d\mu_{-q^p}(p^*t) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklem ve

$$E_{n,\xi,\chi,q}^{(h,1)}(x)=\int_{\mathbb{X}}\chi(y)[x+y:q]^n q^{(h-1)y}\xi^y d\mu_{-q}(y)$$

bağıntısı (9.1.1) denkleminde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

9.2 *p*-adik *q*-Ölçüm ve İntegralin Özellikleri ve Uygulamaları

Bu kısımda p-adik (q)-ölçüm ve integrali ile ilgili yapılmış olan uygulamalar ve bazı özellikler verilecektir. Aşağıda verilecek olan özelliklerin bazıları temel kaynaklarda ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

9.2.1 Özellik. μ bir *p*-adik ölçüm olsun.

i) $\mu(a+U)=\mu(U)$

ii) $U_1\cap U_2=\phi$ iken $\mu(U_1\cup U_2)=\mu(U_1)+\mu(U_2)$

iii) U kompakt-açık ve $\sup\{\,|\mu(U)|_p : U\subset\mathbb{Z}_p\,\}<\infty$

ise o zaman $\mu=0$ dır, (Schikhof 1984).

9.2.2 Özellik. $\mu(\mathbb{Z}_p)=\sum_{i=1}^{p^n}\mu(p^n\mathbb{Z}_p)=p^n\mu(p^n\mathbb{Z}_p)$ (9.2.1)

elde edilir. $\sup_n\left|\mu(p^n\mathbb{Z}_p)\right|_p<\infty$ olduğu göz önünde bulundurulursa $\lim_{n\to\infty}\mu(\mathbb{Z}_p)=0$ dır, (Schikhof 1984, Khrennikov 1994).

9.2.3 Özellik. Eğer $\mu(\mathbb{Z}_p)=1$ ise o zaman (9.2.1) eşitliğinden

$$\mu(\mathbb{Z}_p)=1=p^n\mu(p^n\mathbb{Z}_p)$$

$$\mu(p^n\mathbb{Z}_p)=\frac{1}{p^n}$$

elde edilir, (Schikhof 1984, Khrennikov 1994).

p-adik q-fermionik integralde çok önemli uygulaması olan aşağıdaki teoremi verelim:

9.2.4 Teorem. μ_{-q} (5.1) eşitliğinde tanımlanan ölçüm olmak üzere

$$\mu_{-q}(px)=\frac{1}{[p:-q]}\mu_{-q^p}(x)$$

dir.

İspat. (5.1) eşitliğinde x yerine px alalım. O zaman

$$\begin{aligned}\mu_{-q}(px)&=\mu_{-q}(px+p^{N+1}\mathbb{Z}_p)\\&=\frac{(-q)^{px}}{[p^{N+1}:-q]}\\&=\frac{(-q^p)^x}{[p:-q][p^N:-q^p]}\\&=\frac{1}{[p:-q]}\mu_{-q^p}(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

9.2.4 Teoreminin farklı ispatları Srivastava ve ark. (2005), Kim (2007a) kaynaklarında da verilmiştir.

9.2.5 Özellik. $\mathbb{B}, \mathbb{Z}_p$ nin Borel kümelerinin bir ailesi ve $\mu : \mathbb{B} \to \mathbb{Q}_p$ bir ölçüm olsun. O zaman $B_1, , B_j ...$ kümeleri ayrık Borel kümeleri olmak üzere p-adik μ ölçümü

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$$

koşulunu sağlar. Bu koşula σ-toplamsallık özelliği denir.

Örneğin μ_x Dirac ölçümü ve $x \in \mathbb{Z}_p$ olsun:

$$\mu_x(B) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in \mathbb{Z}_p - B, \ \forall B \in \mathbb{B} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $x_1, x_2, ... \in \mathbb{Z}_p$ ve $\lambda_1, \lambda_2, ... \in \mathbb{Q}_p$ olsun öyle ki $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ ise, o zaman her $B \in \mathbb{B}$ için

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_{x_n}\right)(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_{x_n}(B) = \sum_{x_n \in B} \lambda_n$$

dır. μ_x , $\mathbb{Z}_p$ üzerinde σ-toplamsaldır, (Schikhof 1984).

9.2.6 Teorem. $\mathbb{Z}_p$ üzerindeki her bir σ-toplamsallık özelliğini sağlayan ölçüm Dirac ölçümlerinin bir lineer kombinasyonudur.

Yani $x_1, x_2, ... \in \mathbb{Z}_p$ ve $\lambda_1, \lambda_2, ... \in \mathbb{Q}_p$ olsun öyle ki $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ ve $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_{x_n}$ dir.

Burada μ_{x_n} Dirac ölçümleridir, (Schikhof 1984).

9.2.7 Teorem. μ her $a \in \mathbb{Z}_p$ için $\mu(\{a\}) = 0$ özelliğinde bir ölçüm ise o zaman $\mu = 0$ dır, (Schikhof 1984).

9.2.8 Uyarı. $\displaystyle\sum_{j=0}^{p^n - 1} f(j)\mu(j + p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n - 1} f(j)$

ifadesinin $n \to \infty$ iken bir limite sahip olması için f nin düzgün diferensiyellenebilir bir fonksiyon olması gerekir. Eğer f düzgün diferensiyellenebilir değil ise $n \to \infty$ iken limit değeri yakınsak olmayabilir.

9.2.9 Teorem. $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^n dx = B_n$

Bernoulli sayıları için Witt tipi formülü verir.

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

için $|B_n|_p \leq p$ elde edilir, (Vladimirov ve ark. 1994).

9.2.10 Teorem. Volkenborn integrali $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklindeki analitik fonksiyonlar için iyi tanımlıdır. O zaman

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n$$

dir, (Vladimirov ve ark. 1994).

Volkenborn integralleri genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisinde önemli uygulama alanına sahiptir. Volkenborn integrali p-adik Gaussian dağılımlarda, Arşimedyen olmayan dalga fonksiyonları için Quantum mekanikte kullanım alanlarına sahiptir, (Vladimirov ve ark. 1994).

Trigonometrik fonksiyonlar, üstel fonksiyonlar gibi özel fonksiyonların Volkenborn integrali uygulamaları verilmiştir. Örneğin

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} a^x d\mu(x) = \frac{\log_p a}{a-1}, a \neq 1$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} e^{ax} d\mu(x) = \frac{a}{e^a - 1},$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos axd\mu(x) = \frac{a\sin a}{2(1-\cos a)},$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sin aaxd\mu(x) = -\frac{a}{2},$$

(Kim 2007a, Schikhof 1984).

9.3 Sonuçlar ve Uygulamalar

i) p-adik q-ölçüm ve p-adik q-integrali yardımıyla bazı özel sayıların üreteç fonksiyonları tanımlanır. Örneğin bu tezde q-Euler sayıları ve polinomları, twisted q-Euler sayıları ve polinomları, twisted Daehee sayıları ve polinomları, q-Euler ölçümü ve p-adic q-l fonksiyonu gibi kavramlar tanımlanmıştır ve bunların temel özellikleri verilmiştir.

ii) q-Euler polinomlarının Raabe formülleri yardımıyla dağılım fonksiyonları elde edilmiştir.

iii) q-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonlarına Mellin dönüşümü uygulanarak Euler tipli fonksiyonlar ya da Lerch-zeta tipli fonksiyonlar tanımlanmıştır.

iv) Bu tip dağılım fonksiyonları kullanılarak p-adik q-Euler ölçüm tanımlanmıştır.

v) p-adik q-ölçümü yardımıyla twisted q-Daehee sayıları tanımlanmıştır.

vi) p-adik q-ölçüm ve p-adik q-Volkenborn integrali yardımıyla Radon-Nikodym teoremi Kim tarafından ispatlanmıştır. Bu tipli ölçümler kullanılarak Radon-Nikodym teoremi ve uygulamaları çalışılabilir.

vii) p-adik q-ölçüm tıpta ciğer kanserlerinde habis hücrelerin belirlenmesinde kullanılır, (Su ve Qiu 2008). p-adik q-ölçüm yardımıyla diğer bilim dallarındaki uygulamalar araştırılabilir.

viii) p-adik dağılım; olasılık teorisi, genelleştirilmiş fonksiyonlar, p-adik süper analiz gibi daha birçok alanla da yakından ilişkilidir. Bu ilişkilerin uygulamaları araştırılabilir.

ix) p-adik (h,q)-l fonksiyonu yardımıyla genelleştirilmiş Euler sayılarının Kummer kongrüansları incelenebilir.

x) İnterpolasyon fonksiyonlarının sıfırları incelenebilir.

xi) q-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonları yardımıyla Dedekind ve Hardy tipi toplamlar, diğer sonlu ya da sonsuz toplamlar tanımlanabilir.

xii) p-adik q-ölçümü yardımıyla q-Changhee sayıları ile (h,q)-Euler sayıları arasındaki ilişkiler incelenebilir.

xiii) p-adik fermionik integral Euler sayı ve polinomlarının üreteç fonksiyonunu verirken, p-adik bosonik integral Bernoulli sayı ve polinomlarının üreteç fonksiyonunu verir. Bunların integral dönüşümleri ve diğer uygulamaları incelenebilir.

KAYNAKLAR

ANDREWS, C.L., B.K. SHİVAMOGGİ. 2005. Integral Transforms for Engineers, Prentice-Hall of India New Delhi. 364 p.

AMİCE, Y. 1972. Integration *p*-adique, Selon A. Volkenborn. Seminaire Delange-Pisot-Poitou. Theorie des nombres, 13(2):G1-G9.

APOSTOL, T.M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer, 352 p.

BARTLE, R.G. 1995. The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Wiley-Interscience, 192 p.

CANGÜL, İ.N., H. ÖZDEN, Y. ŞİMŞEK. 2008. Generating Functions of the (h,q)-extension of Euler Polynomials and Numbers. Acta Math. Hungar. 120(3):281-299.

CARLİTZ, L. 1948. *q*-Bernoulli Numbers and Polynomials. Duke Math. J. 15:987-1000.

CENKCİ, M. 2007. The *p*-adic Generalized Twisted (h,q)-Euler l Functions and its applications. Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang), 15(5):37-47.

CENKCİ, M., Y. ŞİMŞEK, V. KURT. 2008. Multiple Two Variable *p*-adic *q*-*L* Functions and its behavior at $s = 0$. Russ. J. Math Phys. 15(4):447-459.

CENKCİ, M., M. CAN, V. KURT. 2004. *p*-adic Interpolation Functions and Kummer-Type Congruences for *q*-twisted and *q*-generalized twisted Euler Numbers. Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang), 9(2):203-216.

COMTET, L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions, Springer, 360 p.

CONWAY, J.B. 1986. Functions of One Complex Variable. Springer-Verlag, 330 p.

GOUVEA, F. Q. 1993. *p*-adic Numbers. Springer-Verlag. 282 p.

JACKSON, F. H. 1908. On *q*-functions and a Certain Difference Operator. Trans. Roy. Soc. Edin. 46:253-281.

KAC, V., P. CHEUNG. 2001. Quantum Calculus. Springer, 128 p.

KHRENNİKOV, A. 1994. *p*-adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Kluwer Academic Publishers, 264 p.

KİM, H.S., P.S. LİM, T.KİM. 1996. A Remark on *p*-adic *q*-Bernoulli Measure. Bull. Korean Math. Soc. 33(1):39-44.

KİM, M-S., J-W. SON. 2007. Analytic Properties of the *q*-Volkenborn Integral on the Ring of *p*-adic integers. Bull. Korean Math. Soc. 44(1):1-12.

KİM, Y. H., W. KİM, L-C. JANG. 2008. On the *q*-extension of Apostol Euler Numbers and Polynomials. Abstr. Appl. Anal. Art. ID 296159 10 p.

KİM, T. 1994. An Analogue of Bernoulli Numbers and Their Congruences. Rep. Fac. Sci. Engrg. Saga Univ. Math. 22(2):21-26.

KİM, T. 2002a. An Invariant *p*-adic integral associated with Daehee numbers. Integral Transforms Spec. Funct. 13:63-69.

KİM, T. 2002b. *q*-Volkenborn Integration. Russ. J. Math Phys. 19:288-299.

KİM, T., L.C. JANG, S-H. RİM, H.K. PARK. 2003. On the Twisted *q*-zeta Functions and *q*-Bernoulli Polynomials. Far East J. Appl. Math. 13(1):13-21.

KİM, T. 2005. On the Alternating Sums of Powers of Consecutive Integers. J. Anal. Comput. 1(2):117-120.

KİM, T. 2006a. A Note on Some Formulae for the *q*-Euler Numbers and its Derivatives. Proc. Jangjeon Math. Soc. 9(2):227-232.

KİM, T. 2006b. A Note on *p*-adic Invariant Integral in the Rings of *p*-adic Integers. Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang), 13(1):95-99.

KİM, T. 2006c. *q*-generalized Euler Numbers and Polynomials. Russ. J. Math Phys. 13(3): 293-298.

KİM, T., S-H. RİM, Y. ŞİMŞEK. 2006d. A Note on the Alternating Sums of Powers of Consecutive *q*-integers. Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang), 13(2):159-169.

KİM, T. 2007a. On the Analogs of Euler Numbers and Polynomials Associated with *p*-adic *q*-integral on Z_p at $q = -1$. J. Math. Anal. Appl. 331(2):779-792.

KİM, T., S.H. RİM. 2007b. New Changhee *q*-Euler Numbers and Polynomials associated with *p*-adic *q*-integrals. Comput. Math. Appl. 54(4):484-489.

KİM, T. 2007c. On the *q*-extension of Euler and Genocchi Numbers. J. Math. Anal. Appl. 326(2): 1458-1465.

KİM, T. 2007d. *q*-Euler Numbers and Polynomials Associated with *p*-adic *q*-integrals. J. Nonlinear Math. Phys. 14(1):15-27.

KİM, T., M.-S. KİM, L. JANG, S.H. RİM. 2007e. New *q*-Euler Numbers and Polynomials Associated with *p*-adic *q*-integrals. Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang), 15(2):243-252.

KİM, T., S-H. RİM. 2007f. On the twisted q-Euler Numbers and Polynomials Associated with basic q-l functions. J. Math. Anal. Appl. 336(1):738-744.

KİM, T. 2008. On p-adic Interpolating Function for q-Euler Numbers and its Derivatives. J. Math. Anal. Appl. 339(1):598-608.

KİM, T., B. LEE, 2009. Some Identities of Frobenius Euler Polynomials. Abstr. Appl. Anal. Art. ID 639439, 7 p.

KOBLİTZ, N. 1948. p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions. Springer-Verlag, 150 p.

KOBLİTZ, N. 1980. p-adic Analysis: A Short Course on Recent Work. Cambridge University Press, 168 p.

KUPERSCHMİDT, A.B. 2005. Reflection Symmetries of q-Bernoulli Polynomials. J. Nonlinear Math. Phys. 12(1) :412-422.

LEBEDEV, N.N. 1972. Special Functions and Their Applications. Dover Publications, Inc. New York, 308 p.

LUO, Q.-M., H.M SRİVASTAVA. 2006. Some Relationships Between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler Polynomials. Comput. Math. Appl. 51 (3-4):631-642.

MAJİD, S. 1995. Foundations of Quantum Group Theory. Cambridge University Press, 664 p.

ÖZDEN, H., Y. ŞİMŞEK, İ.N. CANGÜL. 2007. Euler Polynomials Associated with p-adic q-Euler Measure. Gen. Math. 15(2):24-37.

ÖZDEN, H., İ.N. CANGÜL, Y. ŞİMŞEK. 2008a. Multivariate Interpolation Functions of Higher-Order q-Euler Numbers and Their Applications. Abstr. Appl. Anal. Art. ID 390857, 16 p.

ÖZDEN, H., İ.N. CANGÜL, Y. ŞİMŞEK. 2008b. Remarks on Sum of Products of (h,q)-twisted Euler Polynomials and Numbers. J. Inequal. Appl. Art. ID 816129.

ÖZDEN, H., Y. ŞİMŞEK. 2008c. A New Extension of q-Euler Numbers and Polynomials Related to Their Interpolation Functions. Appl. Math. Lett. 21:937-939.

ÖZDEN, H., İ.N. CANGÜL, Y. ŞİMŞEK. 2009a. Remarks on q-Bernoulli Numbers Associated with Daehee Numbers. Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang) 18(1):41-48.

ÖZDEN, H., İ.N. CANGÜL, Y. ŞİMŞEK. 2009b. On the behavior two variable twisted p-adic Euler q-l-functions. Nonlinear Anal. doi:10.1016/j.na.2009.01.048

RADEMACHER, H. 1973. Topics in Analytic Number Theory. Springer-Verlag, 320 p.

RİM, S-H., T. KİM. 2006. A Note on *p*-adic Euler measure on Z_p. Russ. J. Math Phys. 13(3):358-361.

ROBERT, A. M. 2000. A Course in *p*-adic Analysis. Springer-Verlag, 437 p

SCHIKHOF, W.H. 1984. Ultrametric Calculus. Cambridge University Pres, 306 p.

SHİRATANİ, K. 1973. On Euler Numbers, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A 27:1-5.

ŞİMŞEK, Y. 2005. *q*-Analogue of Twisted *l*-series and *q*-twisted Euler Numbers. J. Number Theory. 110(2):267-278.

ŞİMŞEK, Y. 2006a. Twisted on (*h,q*)-Bernoulli Numbers and Polynomials Related to Twisted (*h,q*)-zeta Function and *L*-function. J. Math. Appl. 324:790-804.

ŞİMŞEK, Y., D. KİM, T. KİM, S-H. RİM. 2006b. A Note on the Sums of Powers of Consecutive *q*-integers. J. Appl. Funct. Differ. Equ. JAFDE. 1(1):81-88.

ŞİMŞEK, Y., O. YÜREKLİ, V. KURT. 2007. On Interpolation Functions of the Twisted Generalized Frobenius-Euler numbers. Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang), 15(2): 187-194.

SRİVASTAVA, H.M., J. CHOI. 2001. Series Associated with the Zeta and Related Functions. Springer, 397 p.

SRİVASTAVA, H.M., T. KİM, Y. ŞİMŞEK. 2005. *q*-Bernoulli Numbers and Polynomials Associated with Multiple *q*-zeta Functions and Basic L-series. Russ. J. Math. Phys. 12(2):241-268.

VLADİMİROV, V.S., I.V. VOLOVİCH, E.I. ZELENOV. 1994. *p*-adic Analysis and Mathematical Physics. World Scientific, 319 p.

VOLKENBORN, A. 1974. On *p*-adic Integration. Memoires de la S. M. F., tome 39-40: 375-384.

VOLKOVYSKY, L., I. ABRAMONOVİCH. 1977. Problems in the Theory of Functions of a Complex Variable. Mir Publischers, Moscov, 332 p.

WASHİNGTON, L.C. 1996. Introduction to Cyclotomic Fields. Springer, 487 p.

WHİTTAKER, E.T., G.N. WATSON. 1952. A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, 608 p.

ÖZGEÇMİŞ

Hacer ÖZDEN 1980 tarihinde Bursa'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Bursa'da tamamladıktan sonra 1998 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2002 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalında yüksek lisansa ve araştırma görevliliğine başladı. 2004 yılında yüksek lisans eğitimini tamamlayarak 2005 yılında da yine Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalında doktora eğitimine başladı. 2009 Ocak ayında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak göreve başladı.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, desteklerini hiçbir zaman benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL ve Sayın Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e yürekten teşekkürlerimi sunarım.

Şüphesiz ki bu günlere gelmemdeki en büyük paya sahip olan sevgili annem, babam ve kız kardeşime teşekkürlerimi sunarım. Doktora öğrenim süreci içinde TÜBİTAK Yurtiçi doktora burs programının bir bursiyeri olarak TÜBİTAK'a da vermiş olduğu destekten ötürü teşekkürlerimi sunarım.