

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SHELL MODELİ HESAPLAMALARI

109714
GİZEM DİNCEL

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

109714

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

BURSA -2001

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SHELL MODELİ HESAPLAMALARI

GİZEM DİNCEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

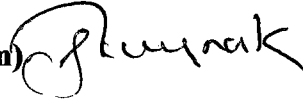
BURSA -2001

Bu tez 27.8.2001 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gökay KAYNAK (Danışman)

Prof. Dr. Ahmet CENGİZ

Doç. Dr. İ. Naci Cangül



ÖZET

Çekirdek potansiyelinin gerçek şekline yakın olduğu düşünölen Saxon-Woods potansiyeli Schrödinger denkleminde yerine konularak, nükleonların enerji seviyelerini bulmak ancak nümerik çözüm ile mümkündür.

Bu çalışma da, harmonik osilatör ve sonsuz kare kuyu potansiyelleri için analitik olarak elde edilen enerji seviyelerinin ortalaması alındığında, Saxon-Woods potansiyeline spin-orbit etkileşme terimi eklenmeksizin elde edilen seviyelere eşdeğer seviyeler elde edilmiştir. Hesaplanan bu enerji değerleri literatür ile uyumludur.

Kare kuyu ve harmonik osilatör potansiyeli için elde edilen spin-orbit etkileşme terimi de, bu ortalama alarak elde edilen enerji seviyelerine eklendiğinde, Shell modelindeki 2, 8, 20, 28, 50, 82 sihirli sayıları bulunmuştur.



ABSTRACT

By using Saxon-Woods potential which is considerably similar to actual shape of nucleus potential into Schrödinger wave equation, the calculation of nucleons energy levels are possible by only a numerical solution.

In this work, the mean value of energy levels for harmonic oscillator and infinite square potentials have been calculated analytically. These values are similar to that Saxon-Woods potential values that are calculated without adding spin-orbit interaction term. The calculations are in good agreement with literature.

When spin-orbit interaction term for square well and harmonic oscillator potential added to mean energy levels above, magic numbers of shell model which are 2, 8, 20, 28, 50, 82 have been obtained.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL BİLGİLER.....	4
2.1. Yörünge Açısal Momentumu.....	4
2.2. Spin Açısal Momentumu.....	8
2.3. Toplam Açısal Momentum.....	8
2.4. Küresel Harmonikler.....	12
2.5. Sonlu Kare Kuyu Potansiyeli.....	17
2.6. Sonsuz Kare Kuyu Potansiyeli.....	17
2.7. Harmonik Osilatör Potansiyeli.....	18
2.8. Saxon-Woods Potansiyeli.....	19
2.9. Spin-Orbit Etkileşme Terimi.....	20
2.10. Multipol Momentler.....	22
2.10.1. Magnetik Dipol Moment.....	22
2.10.2. Elektrik Kuadropol Moment.....	24
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	26
3.1. Tabakalı Modeli Öngören Kanıtlar	26
3.1.1. Proton ve Nötron Bağlanma Enerjileri.....	26
3.1.2. Çekirdeklerin Doğal İzotopik Bollukları.....	28
3.1.3. Kararlı İzotop Sayısı.....	29
3.1.4. Kararlı İzoton Sayısı.....	30
3.1.5. Radyoaktif Serilerin Bozunma Ürünleri.....	30
3.1.6. Nötron Yakalama Tesir Kesiti.....	30
3.1.7. Kendiliğinden Nötron Yayınlanması.....	31
3.1.8. Elektrik Kuadropol Moment.....	32
3.2. Sonlu Kare Kuyu Potansiyeli İçin Enerji Seviyelerinin Hesaplanması.....	33

3.3. Sonsuz Kare Kuyu Potansiyeli İçin Enerji Seviyelerinin Hesaplanması.....	36
3.4. Harmonik Osilatör Potansiyeli İçin Enerji Seviyelerinin Hesaplanması.....	39
3.5. Sihirli Sayıların Elde Edilmesi.....	44
3.6. Shell Modeline Göre Magnetik Moment Hesaplamaları.....	50
3.7. Shell Modeline Göre Elektrik Kuadropol Moment Hesaplamaları.....	55
4. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	61
4.1. Çekirdeklerin Spin ve Magnetik Momentlerinin Shell Modeline Göre Ayrıntılı Olarak İncelenmesi.....	61
4.1.1. 20 den Küçük Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları.....	61
4.1.2. 20 ile 28 Arasında Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları.....	62
4.1.3. 28 ile 50 Arasında Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları.....	62
4.1.4. 50 ile 82 Arasında Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları.....	63
4.1.5. 82 ile 126 Arasındaki Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları.....	65
EKLER.....	67
KAYNAKLAR.....	68
TEŞEKKÜR.....	70
ÖZGEÇMİŞ.....	71

SİMGELER DİZİNİ

M	: Nükleon kütlesi
$V(r)$: Potansiyel (MeV)
\hbar	: Planck sabiti = $1,055.10^{-34}$ j s
$\psi(x, y, z)$: Kartezyen koordinatlarda dalga fonksiyonu
$\psi(r, \theta, \phi)$: Küresel koordinatlarda dalga fonksiyonu
\vec{p}	: Lineer momentum
\vec{P}	: Lineer momentum operatörü
n	: Baş kuantum sayısı
\vec{l}	: Yörünge açısal momentum vektörü
l	: Yörünge açısal momentum kuantum sayısı
\vec{L}	: Yörünge açısal momentum operatörü
m_l	: Yörünge magnetik kuantum sayısı
$Y_{l, m_l}(\theta, \phi)$: Küresel harmonikler
\vec{s}	: Spin açısal momentum vektörü
s	: Spin açısal momentum kuantum sayısı
\vec{S}	: Spin açısal momentum operatörü
m_s	: Spin magnetik kuantum sayısı
\vec{j}	: Toplam açısal momentum vektörü
j	: Toplam açısal momentum kuantum sayısı
\vec{J}	: Toplam açısal momentum operatörü
m_j	: Toplam magnetik kuantum sayısı
J	: Çekirdek spini
A	: Çekirdek kütlesi
Z	: Çekirdeğin proton sayısı
N	: Çekirdeğin nötron sayısı
p	: Parite
$P_l^{m_l}(\omega)$: Asosiye Legendre polinomu

$P_\ell(\omega)$: Legendre polinomu
$J_\ell(\rho)$: Bessel fonksiyonu
ω	: Açısal frekans
a	: Yüzey kalınlığı (<i>fm</i>)
c	: Işık hızı = $2,997925 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
$\Delta E_{\ell s j}$: Enerji seviyeleri arasındaki yarıлма
e	: Elektron yükü = $1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
dV	: Hacim elemanı
μ	: Magnetik dipol moment
v	: Hız
i	: Akım
π	: Pi sayısı
μ_N	: $3,15245 \cdot 10^{-8} \text{ eV/T}$ Nükleer manyeton
μ_B	: $5,7884 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$ Bohr manyetonu
g	: Jiromagnetik oran
$\rho(r)$: Yük yoğunluğu
$P_i(r)$: i -inci protonun dV hacim elemanı içinde bulunma olasılığı
Q	: Elektrik kuadropol moment
S_N	: Nötron bağlanma enerjisi
σ	: Nötron soğurma tesir kesiti (<i>mb</i>)
$H_\ell^{(i)}(\rho)$: Hankel fonksiyonu
R	: Çekirdek yarıçapı
$I_\ell(\epsilon')$: $r < R$ için radyal dalga fonksiyonlarının logaritmik türevlerinin negatifleri
$E_\ell(\epsilon_\omega)$: $r > R$ için radyal dalga fonksiyonlarının logaritmik türevlerinin negatifleri
$L_k^\beta(x)$: Asosiye Laguerre polinomu
$\Gamma(a + \frac{1}{2})$: Gama fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ**Sayfa No**

- 1- Şekil 2.1. $\vec{\ell}$ nin z eksenini etrafındaki presesyon hareketi.....8
- 2- Şekil 2.2. (a) $j = \ell + \frac{1}{2}$ durumu,
(b) $j = \ell - \frac{1}{2}$ durumu.....9
- 3- Şekil 2.3. Sonlu kare kuyu potansiyeli.....17
- 4- Şekil 2.4. Sonsuz kare kuyu potansiyeli.....17
- 5- Şekil 2.5. Harmonik osilatör potansiyeli.....18
- 6- Şekil 2.6. Saxon-Woods potansiyeli.....19
- 7- Şekil 2.7. p seviyesi ($\ell = 1$) için spin-orbit etkileşme teriminin neden olduğu enerji yarılımları.....21
- 8- Şekil 3.1. Çift nötron sayısına sahip çekirdeklere ait kütle numarasına karşı nötron bağlanma enerjileri.....27
- 9- Şekil 3.2. Çift-çift çekirdeklerin kütle numarasına karşı relatif bollukları.....28
- 10- Şekil 3.3. Nötron yakalama tesir kesitinin nötron sayısı ile değişimi.....31
- 11- Şekil 3.4. Tek çekirdeklerin nükleon sayısına karşı kuadropol momentleri.....32
- 12- Şekil 3.5. Sonlu kare kuyu potansiyeli için elde edilen enerji seviyeleri.....35
- 13- Şekil 3.6. Sonsuz kare kuyu potansiyeli için elde ettiğimiz enerji seviyeleri.....38
- 14- Şekil 3.7. Harmonik osilatör potansiyeli için elde ettiğimiz enerji seviyeleri.....43
- 15- Şekil 3.8 (a) Saxon-Woods potansiyeli için hesaplanan enerji seviyeleri
(b) Spin-orbit etkileşme teriminin ilave edilmesiyle bulunan enerji seviyeleri.....44
- 16- Şekil 3.9. Solda harmonik osilatör potansiyelinden elde ettiğimiz seviyeler, sağda sonsuz kare kuyu potansiyelinden elde ettiğimiz seviyeler, ortada ise seviyelerin ortalaması.....45
- 17- Şekil 3.10. (a) Ortalama olarak bulduğumuz seviye düzeni
(b) Bu seviyelere spin- orbit etkileşmesinden gelen terimin eklenmiş hali.....48
- 18- Şekil 3.11. \vec{j} vektörünün z eksenini etrafındaki presesyon hareketi.....51
- 19- Şekil 3.12. Çift proton ve tek nötron sayısına sahip çekirdeklerin magnetik momentlere karşı j spininin gösterimi.....54

20- Şekil 3.13. Çift nötron ve tek proton sayısına sahip çekirdeklerin magnetik momentlere karşı j spininin gösterimi.....	54
21- Şekil 3.14. Tek nötron ve tek protonlu çekirdeklerin elektrik kuadropol momentlerinin deneysel değerleri.....	60



ÇİZELGELER DİZİNİ**Sayfa No**

Çizelge 3.1. Sonsuz kare kuyu potansiyeli için hesaplanan KR değerleri.....	38
Çizelge 3.2. Harmonik osilatör potansiyeli için N' ye karşılık seviyelerin alabileceği nükleon sayıları.....	43
Çizelge 3.3. Elektrik kuadropol momentinin kabuk modeli için hesaplanan ve ölçülen değerleri.....	58
Çizelge 4.1. Tek tek 5 çekirdek için spin ve magnetik moment değerleri.....	66



1.GİRİŞ

Çekirdek içindeki nükleonlar yaklaşık $1,2A^{1/3}$ çaplı küresel hacim içine hapsedilmiş durumdadır ve kendilerine has özellikleri ile enerji seviyelerine sahip olarak bulunurlar. Çekirdek içinde hareket eden nükleonların davranışını kuantum mekaniksel olarak formüle etmek, çekirdeklerin bir takım özelliklerini açıklamak için kullanışlıdır.

Çekirdek kuvvetleri hakkında kesin bir bilgi olmaması ve dolayısıyla bu kuvveti betimleyebilecek kesin bir potansiyelin mevcut olmaması, belli bir çekirdek modelinin ortaya konmasına engeldir. Çekirdek yapısını ve çekirdeklerin özelliklerini açıklayabilmek için ortaya çıkan çekirdek modellerinin temelinde potansiyeller için belirli varsayımlar bulunduğundan modelin başarısı potansiyel seçiminin gerçeğe yakınlığına bağlıdır. İlk nükleer modeller, α parçalanmasını ve çekirdek ile nükleonların etkileşmelerini açıklamak için geliştirilmiştir. Daha sonra geliştirilen modeller, yarı klasik ve kuantum mekaniksel olarak ikiye ayrılabilir. Bunlar da kendi içlerinde bağımsız parçacık modeli ve kolektif modeller olarak ayrılırlar.

Herhangi bir çekirdek modeli tek başına çekirdeğin bütün özelliklerini açıklamakta yeterli değildir. Sonuçta, her biri bir takım kabullere dayanan ve sınırlı şekilde kullanılabilen modeller ortaya çıkmıştır. Bu modellerin bazıları şunlardır:

1. Sıvı Damlası Modeli
2. Shell Modeli
3. Fermi Gaz Modeli
4. Bileşik Çekirdek Modeli
5. Optik Model
6. Deformasyon Modeli
7. Kolektif Model
8. Doğrudan Etkileşme Modeli

Shell (kabuk veya tabakalı) modeli üzerine kurulan atom teorisi, atom yapısını açıklamakta büyük başarı sağlamıştır. Bu nedenle nükleer fizikçiler, çekirdek yapısının bulunmasında ve çekirdeklerin özelliklerinin açıklanmasında benzer bir teorinin

kullanılabileceğini düşünmüşlerdir. Atom yapısını başarı ile açıklayan bu model, nükleer yapıya uygulanmaya çalışıldığında potansiyel güçlüğüyle karşılaşılır. Çünkü atomik durumda, potansiyel çekirdeğin Coulomb alanı tarafından sağlanır ve Schrödinger denklemi Coulomb potansiyeli için çözülerek elektronların bulunduğu tabakaların enerjileri hesaplanabilir. Ancak çekirdekte, atomik kabuk modelinde olduğu gibi potansiyeli oluşturan Coulomb alanına benzer, böyle bir dış kaynak yoktur. Atomik kabuk modelinde, kabuklar giderek artan enerjili elektronlarla Pauli dışarlama prensibine uyacak şekilde doldurulur. Bir tabaka, alabileceği elektron sayısını tamamlayınca kapanır ve kararlı tabakalar oluşur. Böyle bir kabuk yapısında atom numaraları sırasıyla 2, 8, 18, 36, 54 olan *He*, *Ne*, *Ar*, *Kr*, *Xe* asal gazlarının çok yüksek iyonizasyon potansiyeline sahip oldukları görülür. Kimyasal bileşimlere karşı çok kararlı olan bu elementlerin 2, 8, 18, 36, 54 olan atom numaraları, periyodik tablonun sihirli sayıları olarak adlandırılır.

Çekirdeğin yapısına bakıldığında nükleonlar, kendilerinin yarattığı bir potansiyel içinde birbirlerinden bağımsız olarak hareket ederler. Etkileşmeyen parçacıkların bu modeli, bağımsız parçacık modeli olarak adlandırılır. Bir nükleonun hareketi, diğer tüm nükleonların oluşturduğu potansiyel tarafından belirlenir. Çekirdekdeki ortalama alan, nükleon-nükleon etkileşmesi ile üretilir. Çekirdeklerin yapısının atomun tabakalı yapısına benzer bir tabakalı yapıda olduğu düşünülmüş, çekirdekler için tabakalı modeli öngören kanıtlar ışığında, proton ve nötron sayılarına karşılık gelen 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 sayılarının çekirdekler için sihirli sayılar olduğu bulunmuştur. Sihirli sayıdaki nötron ve protonlar, birbirinden bağımsız kapalı proton ve nötron tabakaları oluştururlar. Başka bir deyişle, bu çekirdekler kararlıdır. Çekirdekte, atomdaki elektron seviyelerine benzer şekilde, nükleon enerji seviyeleri vardır. Proton ve nötronlar bu enerji seviyelerine Pauli dışarlama prensibine uyacak şekilde yerleşirler.

Kabuk modeli hemen hemen bütün tek A 'lı çekirdeklerin taban durumlarının spin ve paritelerini belirlemede başarılıdır. Magnetik dipol ve elektrik kuadropol momentlerin hesaplanmasında ise daha az başarılıdır. Kabuk modelinin incelenilen uygulaması bağımsız parçacık modeli olarak bilinir. Bağımsız parçacık modelinin temel varsayımına göre tüm nükleonlar ikişer ikişer çiftlenirler ve nükleer özellikler çiftlenmemiş tek nükleonlar tarafından belirlenir.

Bu çalışmada, Schrödinger dalga denklemi çeşitli potansiyel formları için çözümlenerek, çekirdek için sihirli sayıların bulunması amaçlanmaktadır. Çekirdek potansiyelinin gerçek şekline yakın olduğu düşünülen ve çekirdeğin bazı özelliklerini açıklayabilen çeşitli potansiyel formları üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Ancak kullanılan bu potansiyel formlarının analitik çözümü mümkün değildir. Bu potansiyeller içinde en çok çalışılan Saxon ve Woods (1957) tarafından ortaya atılan Saxon-Woods potansiyelidir. Ancak yapılan çalışmalarda bu potansiyelin tek başına yeterli olmadığı, çekirdeği oluşturan nükleonlara ait yörünge ve spin vektörlerinin paralel veya antiparalel oluşuna (spin-orbit etkileşmesi) göre değişen potansiyel, çekirdekte mevcut protonlardan kaynaklanan çekirdek içi Coulomb potansiyeli gibi ek potansiyel terimlerine ihtiyaç olduğu görülmüştür. Saxon-Woods potansiyeli için yapılan nümerik çalışmalar sonucunda elde edilen nükleon enerji seviyelerine, spin-orbit etkileşme terimi de eklendiğinde çekirdek için sihirli sayılar elde edilir. Yaptığımız çalışmada Coulomb kuvvetinden kurtulmak amacıyla nötron enerji seviyelerinin bulunması amaçlanmaktadır. Analitik çözümü mümkün olan kare kuyu potansiyeli ve harmonik osilatör potansiyeli için yaptığımız çalışmalarda, sihirli sayılara karşılık gelmeyen kapalı kabuklar elde edildi. Ancak, bu iki potansiyel için elde edilen enerji seviyelerinin ortalaması alındığında elde edilen seviyelerin, Saxon-Woods potansiyeline spin-orbit etkileşme terimi eklenmeksizin elde edilen enerji seviyeleriyle hemen hemen aynı olduğu görüldü. Kare kuyu potansiyeli ve harmonik osilatör potansiyeli için elde edilecek spin-orbit etkileşme terimi de, bu ortalama alınarak elde edilen enerji seviyelerine eklendiğinde, nükleonların kabukları doldurması sonucu 2, 8, 20, 28, 50, 82 sihirli sayıları elde edilmiş ve çekirdek enerji seviyeleri belirlenebilmiştir.

2. KURAMSAL BİLGİLER

2.1. Yörünge Açısal Momentumunu

Kuantum mekaniği, parçacıkların dalga yapısının hesaplanmasını sağlayan matematiksel bir formüasyondur. Kuantum mekaniğinde temel matematiksel ifade Schrödinger denklemidir. Kartezyen koordinatlarda $V(x,y,z)$ potansiyeli etkisinde hareket eden M kütleli bir parçacığın zamandan bağımsız üç boyutlu Schrödinger denklemi,

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V(x,y,z)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z) \quad (2.1)$$

şeklinindedir (Aygün ve Zengin 1992). Burada $\psi(x,y,z)$ parçacığa ait dalga fonksiyonudur. Dalga fonksiyonu hakkındaki her yeni bilgi, sistemin bir takım özelliklerinin bilinmesini sağlar. Bu denklemin sadece enerjinin belli değerleri için çözümleri vardır. $\psi(x,y,z)$ dalga fonksiyonuna sınır koşullarının uygulanması ile elde edilen bu enerji değerleri, enerji özdeğerleri olarak bilinir.

Çekirdek yapısı ile çalışırken yapı gereği, küresel koordinatların (r,θ,ϕ) kullanılması uygundur. Küresel koordinatlar da Schrödinger denklemi aşağıdaki gibidir (Schiff 1955).

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + V(r,\theta,\phi)\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi) \quad (2.2)$$

Schrödinger denkleminin çözümünde ℓ yörünge açısal momentum kuantum sayısı önemli rol oynar. Yörünge açısal momentumu bir hareket sabitidir. Verilen bir ℓ değerine sahip çekirdek seviyeleri, atom fiziğinde olduğu gibi, spektroskopik gösterimler kullanılarak etiketlenebilir.

ℓ değeri	0	1	2	3	4	5
Sembol	s	p	d	f	g	h

$V(r)$ şeklindeki merkezi potansiyel alanında hareket eden klasik bir parçacığın hamiltonyeni,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(r) \quad (2.3)$$

şeklindedir. Kuantum mekaniğinde, \vec{p} lineer momentumu, $-i\hbar\vec{\nabla}$ operatörü ile gösterilebildiğinden (2.3) hamiltonyeni,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V(r) \quad (2.4)$$

şekline girer. Lineer momentum operatörünün bileşenleri $P_x = -i\hbar\partial/\partial x$, $P_y = -i\hbar\partial/\partial y$, $P_z = -i\hbar\partial/\partial z$ şeklindedir. Yörünge açısal momentumu ise klasik fizikte olduğu gibi tanımlanır.

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.5)$$

Operatör gösterimi ise,

$$\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla} \quad (2.6)$$

şeklindedir. L_x, L_y, L_z bileşenleri, \vec{L} için determinant notasyonu kullanılarak elde edilir:

$$\vec{L} = -i\hbar \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Yukarıdaki determinanttan $L_x = yP_z - zP_y$, $L_y = zP_x - xP_z$, $L_z = xP_y - yP_x$ biçiminde operatör bileşenleri elde edilebilir. Bileşenlerin küresel koordinatlardaki operatör ifadeleri ise,

$$L_x = i\hbar \left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right)$$

$$L_y = i\hbar \left(-\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \quad (2.8)$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}$$

şeklinde verilir (Aygün ve Zengin 1992). (2.8) den $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ operatörünü hesaplırsak,

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right\} \quad (2.9)$$

ifadesini elde ederiz.

Schrödinger denkleminin açısai bağımlılığı

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1)\hbar^2 Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) \quad (2.10)$$

şeklinde verilir. $Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi)$, $\psi(r, \theta, \phi)$ ' nin açısai kısmını temsil eder. Görüldüğü gibi (2.10) denkleminin sol tarafındaki çarpan, (2.9)' da verilen L^2 operatörüdür. (2.10) ifadesi

$$L^2 Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1)\hbar^2 Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) \quad (2.11)$$

şeklinde yazılırsa, L^2 operatörünün özdeğer denklemini elde etmiş oluruz. Buradan L^2 ' nin beklenen değerleri bulunabilir. Dirac gösterimi ile L^2 ' nin beklenen değeri

$$\langle L^2 \rangle = \ell(\ell + 1)\hbar^2 \quad (2.12)$$

'dir ve L ' nin beklenen değeri ise

$$\langle L \rangle = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar \quad (2.13)$$

ile verilir. Böylece yörünge açısai momentumunun büyüklüğü (2.13) denklemi ile hesaplanabilir. $Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi)$, L^2 ' nin özfonksiyonudur. $Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi)$, $\psi(r, \theta, \phi)$ dalga

fonksiyonunun açışal kısmı olduğundan, $\psi(r, \theta, \phi)$ de L^2 ' nin özfonksiyonu olur. Oysa $\psi(r, \theta, \phi)$, hamiltoniyenin (H) özfonksiyonudur. Buna göre $\psi(r, \theta, \phi)$ fonksiyonu, H ve L^2 ' nin eşzamanlı özfonksiyonu olur. Hamiltoniyen ile eşzamanlı özfonksiyonu olan bir operatörün Hamiltoniyen operatörü ile komütasyonu sıfırdır.

$$[H, L^2] = 0 \quad (2.14)$$

Bunun fiziksel anlamı, L^2 ' nin zamandan bağımsız, yani hareket sabiti olması demektir.

\vec{l} ' nin yönü bulunmak istendiğinde, belirsizlik ilkesi tarafından belirlenen bir güçlkle karşılaşılır. Kuantum mekaniğine göre verilen bir anda \vec{l} ' nin yalnız bir bileşeni tam olarak hesaplanabilir. Eğer bileşenlerden birinin değeri tayin ediliyorsa diğer iki bileşen belirsizdir. Ölçülecek bileşen olarak genellikle \vec{l} ' nin z bileşeni seçilir:

$$L_z Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) = m_\ell \hbar Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) \quad (2.15)$$

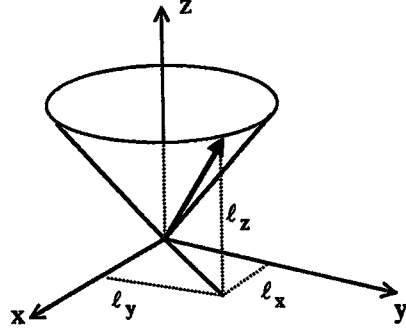
Yukarıdaki ifade L_z operatörünün özdeğer denklemdir. Dirac gösteriminden yararlanarak L_z nin beklenen değeri

$$\langle L_z \rangle = m_\ell \hbar \quad (2.16)$$

ile belirlenir. Burada, $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ şeklinde değerler alabilen yörünge magnetik kuantum sayısıdır. Başka bir deyişle m_ℓ , \vec{l} ' nin z eksenini yönündeki bileşenidir. $Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi)$ hem L^2 ' nin hem de L_z ' nin eşzamanlı özfonksiyonları olduğundan

$$[H, L_z] = 0 \quad (2.17)$$

olur. Bu da, L_z ' nin de bir hareket sabiti olması demektir. \vec{l} ' nin vektörel gösterimi Şekil 2.1' deki gibidir. Belirsizlik ilkesine göre, \vec{l}_z sabit kalıp \vec{l}_x ve \vec{l}_y değişecek şekilde \vec{l} vektörü z eksenini etrafında presesyon hareketi yapar.



Şekil 2.1. \vec{l} nin z eksenine etrafındaki presesyon hareketi

2.2. Spin Açısai Momentumu

Çekirdek yapısını belirlemede nükleonların yörünge açısai momentumu yanında öz açısai momentumunun (spin) da tanımlanmasına gerek vardır. Çekirdek üzerine z eksenine yönünde bir dış alan uygulandığında, nükleona ait olan spin açısai momentumu dış alan etkisiyle belli bir açı altında yönelir. Bu yönelim sonucunda oluşan z eksenine yönündeki spin bileşeni, $s_z = m_s \hbar = \pm 1/2 \hbar$ olan iki farklı değer alabilir. Burada m_s 'e spin magnetik kuantum sayısı denir. Buradan

$$\langle S \rangle = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad (2.18)$$

$$\langle S_z \rangle = m_s \hbar \quad (m_s = \pm \frac{1}{2}) \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. s de tıpkı ℓ gibi bir hareket sabitidir.

2.3. Toplam Açısai Momentum

Bir potansiyel alanında $\vec{\ell}$ yörünge açısai momentumu ve \vec{s} spini ile hareket eden bir nükleon

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s} \quad (2.20)$$

toplam açısai momentumuna sahiptir. \vec{j} toplam açısai momentumu için $\vec{\ell}$ ve \vec{s} 'ye benzer olarak,

kuantum sayısıdır. Aynı yörünge ve spin kuantum sayısına sahip, farklı baş kuantum sayılı seviyeler $2p_{3/2}$ ve $3p_{3/2}$ gibi olabilir.

s ve ℓ birer hareket sabiti olduğundan dolayı kuantum mekaniksel anlamda her nükleon ℓ , s ve j kuantum sayıları ile temsil edilir. A nükleonlu bir çekirdeğin toplam açısal momentumu, tüm nükleonların açısal momentumlarının vektörel toplamıdır. Bu toplam açısal momentuma çekirdek spini denir ve J sembolüyle gösterilir.

Kapalı j tabakaları oluşturan proton ve nötronların açısal momentumu $J=0$ olur. Shell modeline göre çekirdek içindeki nükleonlar, proton ve nötronlar ayrı ayrı olmak üzere çift çift sıfır toplam açısal momentum verecek şekilde birleşirler. Bu özellik deneysel verilerle de uyumludur. Böyle bir çekirdeğe tek nükleonun eklenmesi durumunda nükleer açısal momentum bu tek nükleonun spini ile yörünge açısal momentumunun toplamıdır. Buna göre tek A sayısına sahip olan çekirdeklerin J çekirdek spini buçuklu, çift A sayısına sahip olan çekirdeklerin J çekirdek spini tamsayıdır.

Şimdiye kadar kesinlik kazanan özellikleri göz önüne alınarak, tabaka modeline göre tabakaları nötronlar ve protonlar tarafından doldurulmuş olan ve bir fazla veya bir eksik nükleona sahip olan belli bir çekirdeğin taban halinin spin ve parite durumları hakkında tahminde bulunmak mümkündür. Bunun için şunları göz önünde tutmak gerekir:

- a) Tamamiyle dolmuş bir tabaka veya alt tabakada nükleonların spinleri ve yörüngesel açısal momentumları, toplam açısal momentum sıfır olacak şekilde toplanır.
- b) Tamamiyle dolmamış seviyelerde nükleonlar proton veya nötron çiftleri oluştururlar. Çiftlenme etkisi sebebiyle proton-nötron çifti oluşmaz.

Bu iki kabul aşağıdaki kuralları gerektirir:

Kural 1. Çift-çift çekirdeklerin taban durumları proton veya nötron sayısına bağlı olmaksızın sıfır açısal momentuma ve çift pariteye sahiptir.

Kural 2. Çift sayıda nötrona ve tek sayıda protona sahip bir çekirdekte taban durumunun özelliklerini protonlar belirler. Aynı şekilde çift sayıda protona ve tek sayıda nötrona sahip çekirdeklerin özelliklerini nötronlar belirler.

Buna rağmen bu kurallar tek sayıda nötrona ve tek sayıda protona sahip çekirdeklerin spinlerini tahmin edemez. Tek protonun spininin J_1 ve tek nükleonun spininin J_2 olduğunu varsayarsak, çekirdek spini $|J_1 - J_2|$ ve $|J_1 + J_2|$ arasında herhangi bir değeri alabilir.

Bir çekirdeğin paritesi $(-1)^\ell$ dir (Williams 1992). Çift ℓ sayısına sahip tabakalar için $p=+1$ 'dir yani parite çifttir ve tek ℓ sayısına sahip tabakalar için $p=-1$ 'dir yani parite tektir.

Parite, çekirdek spininin üssünde (J^P) + veya - olarak gösterilir. Örneğin, çift-çift bir çekirdek için $J^P = 0^+$ 'dır.

2.4. Küresel Harmonikler

Bir nükleonun küresel koordinatlardaki dalga denklemi,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{2M}{\hbar^2} [E - V(r)] \Psi = 0 \quad (2.24)$$

şeklindedir.

$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \Theta(\theta)\Phi(\phi) \frac{\partial R(r)}{\partial r} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} &= R(r)\Phi(\phi) \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} &= R(r)\Theta(\theta) \frac{\partial \Phi(\phi)}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \text{bu denklemler yukarıda yerine konulursa,}$$

$$\begin{aligned} &\Theta(\theta)\Phi(\phi) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + R(r)\Phi(\phi) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + R(r)\Theta(\theta) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} \\ &+ \frac{2M}{\hbar^2} [E - V(r)] R(r)\Phi(\phi)\Theta(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir. (2.25) denklemi $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ bölünüp daha sonra $r^2 \sin^2 \theta$ ile çarpılırsa (2.26) denklemi elde edilir.

$$\frac{\sin^2 \theta}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + r^2 \sin^2 \theta \frac{2M}{\hbar^2} [E - V(r)] = - \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} \quad (2.26)$$

Dikkat edilecek olursa denklemin sol tarafı $f(r, \theta)$, sağ tarafı ise $f(\phi)$ şeklindedir. Böyle bir eşitliğin $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $0 \leq \phi \leq 2\pi$ aralıklarında (yani tüm uzayda) tanımlı olabilmesi için denklemin bir sabite eşit olması gerekir.

Bu sabit, m_l^2 şeklinde bir kuantum sayısı olarak seçilir. Böylece,

$$\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + m_\ell^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + r^2 \sin^2 \theta \frac{2M}{\hbar^2} [E - V(r)] - m_\ell^2 = 0 \quad (2.28)$$

ifadeleri elde edilir. (2.28) ifadesi $\sin^2 \theta$ ile bölündüğünde

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{2Mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = \frac{m_\ell^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) \quad (2.29)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi bu denklemde r ve θ değişkenlerine ayrılmıştır. Bu denklemlerin de tanımlı olması için C gibi bir sabite eşit olması gerekir. (2.27) ve (2.29)' a birlikte bakılırsa,

$$\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + m_\ell^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{2M}{\hbar^2} [E - V(r)] R(r) - \frac{C}{r^2} R(r) = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left[C - \frac{m_\ell^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0 \quad (2.31)$$

elde edilir. Bu üç denklemin her birinin bağımlı değişkeninin yani fonksiyonunun açık ifadesi bulunmalıdır.

(2.27) denkleminin çözümü basittir. Bunun normalize edilmiş hali,

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i m_\ell \phi} \quad (2.32)$$

şeklindedir. (2.31) denklemini $\omega = \cos \theta$ değişken dönüşümü altında $\Theta(\theta) = P(\omega)$ olmak üzere,

$$\frac{d}{d\omega} \left[(1-\omega^2) \frac{dP(\omega)}{d\omega} \right] + \left[C - \frac{m_\ell^2}{1-\omega^2} \right] P(\omega) = 0 \quad (2.33)$$

şeklini alır. C sabitini belirlemek amacıyla $P(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k$ olmak üzere, (2.33) denkleminin çözümünün bulunması gerekir.

$$m_\ell = 0 \text{ için } \Rightarrow (1-\omega^2) \frac{d^2 P(\omega)}{d\omega^2} - 2\omega \frac{dP(\omega)}{d\omega} + C P(\omega) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)(k+2) a_{k+2} \omega^k - k(k-1) a_k \omega^k - 2k a_k \omega^k + C a_k \omega^k \right] = 0$$

ω 'nın en düşük kuvvetinin katsayısının sıfır olmasından yararlanarak

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - C}{(k+1)(k+2)} a_k$$

yukarıdaki tekrarlama bağıntısı denen ilinti elde edilir. Serinin bir yerde kesilmesi için a_k 'nin katsayısı sıfır olmalıdır. Yani bir ℓ sayısı için

$$C = \ell(\ell+1) \quad (2.34)$$

olması gerekmektedir (Rızaoğlu 1994). (2.34), (2.33) bağıntısında yerine koyulursa,

$$\frac{d}{d\omega} \left[(1-\omega^2) \frac{dP(\omega)}{d\omega} \right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m_\ell^2}{1-\omega^2} \right] P(\omega) = 0 \quad (2.35)$$

elde edilir. Bu denklem asosiy Legendre diferansiyel denklemidir (Spiegel 1968) ve bu denklemin çözümü de asosiy Legendre polinomlarıdır. (2.35) denkleminin çözümü $A_\ell^{m_\ell}$ normlama katsayısı olmak üzere

$$\Theta(\theta) = A_\ell^{m_\ell} P_\ell^{m_\ell}(\omega) \quad (2.36)$$

şeklinindedir. Asosiy Legendre polinomu,

$$P_\ell^{m_\ell} = (1 - \omega^2)^{|m_\ell|/2} \frac{d^{|m_\ell|} P_\ell(\omega)}{d\omega^{|m_\ell|}} \quad (2.37)$$

şeklindedir (Schiff 1955). (2.37) ifadesinde bulunan $P_\ell(\omega)$ Legendre polinomudur ve

$$P_\ell(\omega) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d\omega^\ell} (\omega^2 - 1)^\ell \quad (2.38)$$

şeklindedir (Spiegel 1968). (2.38) Rodrigues formülü olarak bilinir. $A_\ell^{m_\ell}$ normlama katsayısı (2.36) denkleminin 0 ile π aralığında normalize edilmesiyle bulunur (Aygün ve Zengin 1992).

$$A_\ell^{m_\ell} = (-1)^{(m_\ell + |m_\ell|)/2} \left[\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell - |m_\ell|)!}{(\ell + |m_\ell|)!} \right]^{1/2} \quad (2.39)$$

$\Psi(r, \theta, \phi)$ dalga denkleminin açısız bağımlı kısmına küresel harmonikler denir.

$Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi)$ şeklinde gösterilir. Böylece küresel harmonikler

$$Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) = (-1)^{(m_\ell + |m_\ell|)/2} \left[\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - |m_\ell|)!}{(\ell + |m_\ell|)!} \right]^{1/2} P_\ell^{m_\ell}(\cos \theta) e^{\pm i m_\ell \phi} \quad (2.40)$$

şeklinde elde edilir. ℓ ve m_ℓ kuantum sayılarının farklı değerleri için elde edilecek olan birkaç küresel harmonik ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$Y_{0,0} = \frac{1}{(4\pi)^{1/2}}$$

$$Y_{2,0} = \left(\frac{5}{16\pi} \right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{1,0} = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \cos \theta$$

$$Y_{2,\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi} \right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i \phi}$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i \phi}$$

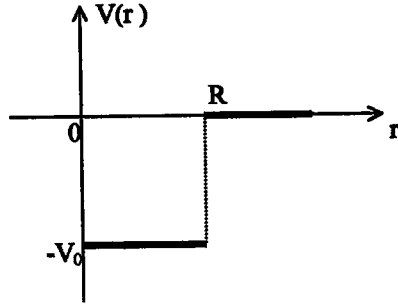
$$Y_{2,\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi} \right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i \phi}$$

Anlaşılağı gibi küresel harmoniklerde potansiyel ifadesi bulunmamaktadır. Potansiyel ifadesini içeren kısım $\Psi(r, \theta, \phi)$ dalga fonksiyonunun, $R(r)$ radyal fonksiyonunu içeren (2.30) nolu radyal dalga denklemdir. Radyal dalga denkleminin çözüm fonksiyonunun bulunabilmesi için $V(r)$ potansiyel ifadesinin bilinmesi gerekmektedir. İncelenecek olan ve ayrıntılı seviye hesaplamaları yapılacak olan çeşitli potansiyel formlarına diğler bölümlerde daha sonra değinilecektir.

2.5. Sonlu Kare Kuyu Potansiyeli

Bu potansiyel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$V(r) = \begin{cases} r < R \text{ için} & -V_0 \\ r > R \text{ için} & 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

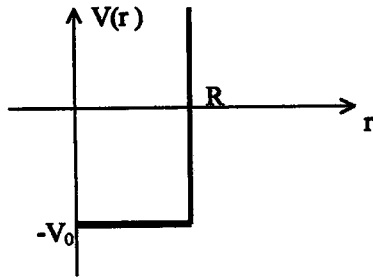


Şekil 2.3. Sonlu kare kuyu potansiyeli

Şekil 2.3' de sonlu kare kuyu potansiyeli gösterilmiştir. Burada R çekirdek yarıçapıdır, $R = r_0 A^{1/3}$ ifadesiyle bulunur. Kare kuyu potansiyeli için radyal dalga denkleminin iki ayrı bölge için iki farklı çözüm fonksiyonu mevcuttur. Enerji seviyelerinin bulunabilmesi için iki bölgeye ait $(1/R(r))(dR(r)/dr)$ ifadelerinin, $r = R$ 'deki sürekliliğinden yararlanır. Sonlu kare kuyu potansiyeli için ayrıntılı enerji seviyeleri hesaplamaları Kesim 3.2' de yapılacaktır.

2.6. Sonsuz Kare Kuyu Potansiyeli

$$V(r) = \begin{cases} r < R \text{ için} & -V_0 \\ r > R \text{ için} & \infty \end{cases} \quad (2.42)$$



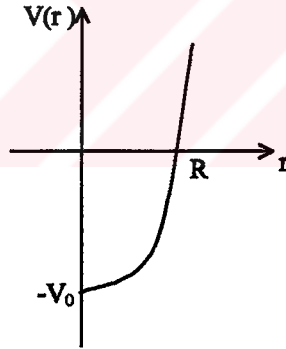
Şekil 2.4. Sonsuz kare kuyu potansiyeli

Şekil 2.4' te gösterilen sonsuz kare kuyu potansiyeli için $r \geq R$ bölgesinde dalga fonksiyonu yok olmaktadır ve gerçeğe uygun değildir. Buna rağmen radyal dalga denkleminde yerine konularak analitik olarak çözülebilir. Sonsuz kare kuyu potansiyeli için dalga fonksiyonları, $r \leq R$ bölgesinde Bessel fonksiyonları $J_\ell(Kr)$ cinsinden $\psi(r, \theta, \phi) \propto J_\ell(Kr)Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi)$ biçimine sahiptir. Enerji seviyeleri, elde edilen dalga fonksiyonunun süreklilik şartından yararlanılarak $K = \left[\frac{2M}{\hbar^2} (E + V_0) \right]^{1/2}$ olmak üzere $J_\ell(KR) = 0$ ifadesinden bulunur. Bu potansiyel için detaylı çalışma Kesim 3.3' te yapılacaktır.

2.7. Harmonik Osilatör Potansiyeli

Potansiyel ifadesi, M nükleon kütlesi, ω açısal frekans olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 \quad (2.43)$$



Şekil 2.5. Harmonik osilatör potansiyeli

Şekil 2.5' de gösterilen harmonik osilatör potansiyeli analitik hesaplamalar için çok uygundur. Fakat büyük uzaklıklarda sıfır yerine sonsuza gider. Enerjinin değerleri, n , baş kuantum sayısı, ℓ , yörünge kuantum sayısı olmak üzere,

$$N = 2n + \ell - 2 \quad (2.44)$$

ifadesine bağlı olarak (Povh ve ark. 1995),

$$E_N = -V_0 + \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) \quad (2.45)$$

ile verilir. Burada

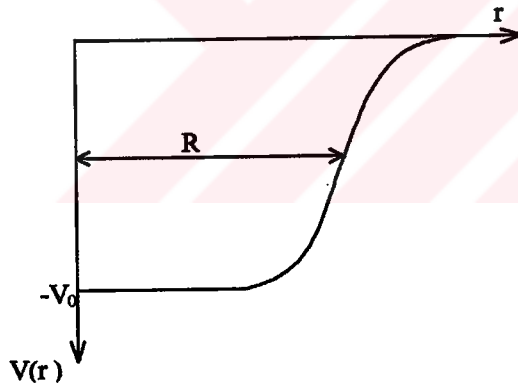
$$\hbar\omega = 41A^{-1/3}MeV \quad (2.46)$$

şeklindedir (Greiner ve Maruhn 1995, Wong 1996). İfadede enerji seviyeleri küresel simetri nedeniyle $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ kat dejenere olmuştur. Harmonik osilatör potansiyeli için elde edilen radyal dalga fonksiyonu ve enerji seviyeleri Kesim 3.4' te verilecektir.

2.8. Saxon-Woods Potansiyeli

Bu potansiyelin ifadesi aşağıdaki gibidir (Woods ve Saxon 1957):

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (2.47)$$



Şekil 2.6. Saxon-Woods potansiyeli

Şekil 2.6 Saxon-Woods potansiyelini göstermektedir. Parametreler için değerler, derinlik $V_0 \approx 50$ MeV , yarıçap $R \approx 1.1 fm A^{1/3}$ ve yüzey kalınlığı $a \approx 0,5 fm$ şeklindedir (Greiner ve Maruhn 1995). Analitik çözümlere götürmeyen dezavantaja sahiptir. Bu potansiyel için radyal dalga fonksiyonları yalnız nümerik olarak elde edilir.

2.9. Spin-Orbit Etkileşme Terimi

Bu potansiyel terimi, bir seviyedeki parçacığın spin açısal momentumu ile yörünge açısal momentumunun paralel veya antiparalel oluşu ile ilgili bir terimdir. Eğer Hamiltoniyene spin-yörünge etkileşmesi adı verilen $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ ile orantılı bir terim eklenirse her enerji seviyesi, $\vec{\ell}$ ile \vec{s} 'nin paralel veya antiparalel oluşuna göre ikiye ayrılır.

Spin-orbit etkileşme terimi $V_{LS}(r) = V_{\ell s}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$ şeklindedir (Burcham 1973). Böyle bir spin-orbit terimi, elektrodinamikde ve mezon teorisindeki rölativistik dalga denkleminin incelenmesinde, bir $V(r)$ merkezi potansiyeli kullanıldığı takdirde Thomas-Frenkel enerjisi olarak bilinen bir enerji terimi şeklinde ortaya çıkar. c ışık hızı olmak üzere bu terimin ifadesi şöyledir (Green 1956, Dost ve ark. 1966):

$$V_{LS}(r) = V_{\ell s}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s} = \frac{\lambda}{2M^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} \vec{\ell} \cdot \vec{s} \quad (2.48)$$

Burada

$$\vec{\ell} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} \left[(\vec{\ell} + \vec{s})^2 - \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2 \right] = \frac{1}{2} (\vec{j}^2 - \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2) = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \quad (2.49)$$

şeklindedir. Deneysel olarak elde edilen verilere bakılarak spin-orbit teriminin, Thomas-Frenkel enerjisi olarak bilinen enerji teriminin katı olacağı bulunmuştur. Bu sebeple bir λ katsayısı kullanılmıştır. Green (1956) tarafından yapılan çalışmalarda bu katsayı 45 olarak verilmektedir.

Böylece çekirdek potansiyeli, (2.48) ifadesinin de ilave edilmesiyle

$$V(r) = V_o(r) + V_{LS}(r)$$

şeklini alır.

$\vec{\ell}$ ve \vec{s} 'nin paralel veya antiparalel olması durumunda ise $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ çarpanı aşağıdaki gibi olur:

$$j = \ell + \frac{1}{2} \text{ için } \vec{\ell} \cdot \vec{s} = \frac{\hbar^2}{2} \ell \quad (2.50)$$

$$j = \ell - \frac{1}{2} \text{ için } \vec{\ell} \cdot \vec{s} = -\frac{\hbar^2}{2} (\ell + 1) \quad (2.51)$$

$j = \ell \pm \frac{1}{2}$ değerleri için, seviyelerde yarımla mevcuttur. $j = \ell + \frac{1}{2}$ için

seviyenin değeri deneysel olarak diğerine göre daha düşük bir enerjiye sahip olduğundan spin-orbit etkileşme terimi negatif işaretli olmalıdır.

Spin-yörünge etkileşmesi sonucu enerji seviyeleri arasındaki yarımla $\Delta E_{\ell s j}$ ise;

$$\Delta E_{\ell s j} = -D \frac{\hbar^2}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (2.52)$$

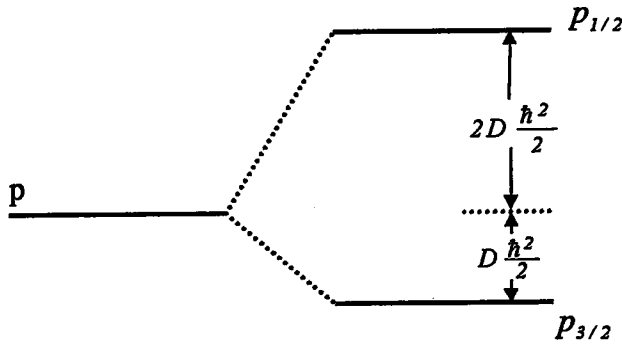
$$D = \int_0^{\infty} |R_{n\ell}(r)|^2 V_{\ell s}(r) r^2 dr \quad (2.53)$$

şeklindedir (Heyde 1994). Yukarıdaki ifadelere göre,

$$\Delta E_{\ell s j=\ell+1/2} = -D \frac{\hbar^2}{2} \ell \quad (2.54)$$

$$\Delta E_{\ell s j=\ell-1/2} = D \frac{\hbar^2}{2} (\ell + 1) \quad (2.55)$$

şeklinde enerji yarımları elde edilir (Das ve Ferbel 1994). Şekil 2.7 de p seviyesi ($\ell = 1$) için (2.54) ve (2.55) ifadelerine göre enerji yarımları gösterilmektedir.



Şekil 2.7. p seviyesi ($\ell = 1$) için spin-orbit etkileşme teriminin neden olduğu enerji yarımları

2.10. Multipol Momentler

Çekirdek içindeki nükleonların yük dağılımı ve yüklerin hareketleri sonucu elektrik ve magnetik alanlar oluşur. Yük ve akım dağılımı uzaysal bağımlılığa sahip elektromagnetik multipol moment ile gösterilir. $1/r^2$ elektrik alanı, net yükten kaynaklanır ve elektrik monopol moment denir. $1/r^3$ elektrik alanı, elektrik dipol momentten, $1/r^4$ elektrik alanı elektrik kuadropol momentten meydana gelir ve böylece devam eder. Magnetik multipol momentler de benzer şekilde davranırlar. Elektrik ve magnetik multipol momentlerin hesaplanması için kuantum mekaniği kullanılır. Multipol momentler işlemci formunda yazılıp beklenen değerleri hesaplanabilir. Her multipol moment, bir pariteye sahiptir. Elektrik momentlerin paritesi $(-1)^L$ 'dir. Buradaki L momentin mertebesidir (monopol için $L = 0$, dipol için $L = 1$, kuadropol için $L = 2$ gibi) Magnetik momentlerin paritesi $(-1)^{L+1}$ 'dir. Bir momentin beklenen değeri $\int \psi^* P \psi d\nu$ ifadesinden bulunur. Burada P uygun işlemci ve $d\nu$ hacim elemanıdır. İntegral içinde iki kez bulunduğundan ψ 'nin paritesinin önemi yoktur. $\psi \rightarrow +\psi$ veya $\psi \rightarrow -\psi$ olması integral içindeki ifadeyi değiştirmez. Eğer P tek pariteye sahipse integral ifadesi tek fonksiyondur ve sıfır olmalıdır. Böylece elektrik dipol, magnetik kuadropol, elektrik oktopol gibi bütün tek pariteli multipol momentler sıfır olmalıdır.

Monopol elektrik moment Ze net nükleer yüküdür. Bir sonraki sıfırdan farklı moment μ magnetik dipol momentidir.

2.10.1. Magnetik Dipol Moment

Yükü e ve kütlesi M olan bir protonun r yarıçaplı bir yörünge üzerinde v hızı ile dolması durumunda, bu dolanmadan doğacak akım,

$$i = \frac{ev}{2\pi r} \quad (2.56)$$

olacaktır. Amper yasasına göre, i akımı taşıyan ve sınırladığı alan S olan bir dairesel akım halkası, $|\mu| = iS$ büyüklüğünde bir magnetik dipol momentine sahiptir.

$$|\mu| = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2M} Mvr \quad (2.57)$$

olur. Burada Mvr , $|\ell|$ klasik açısal momentumudur. Böylece

$$\bar{\mu} = \frac{e}{2M} \bar{\ell} \Rightarrow \mu_\ell = \frac{e\hbar}{2M} \sqrt{\ell(\ell+1)} \quad (2.58)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki ℓ , yörünge açısal momentum kuantum sayısıdır ve $e\hbar/2M$ büyüklüğüne manyeton denir. Elektron kütlesi kullanıldığında $\mu_B = 5.7884 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$ 'dır. Buna Bohr manyetonu denir. Proton kütlesi kullanıldığında da $\mu_N = 3.15245 \times 10^{-8} \text{ eV/T}$ değerinde nükleer manyeton elde edilir. (2.58) ifadesi aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\bar{\mu}_\ell = \frac{1}{\hbar} g_\ell \mu_N \bar{\ell} \quad (2.59)$$

Burada g_ℓ , ℓ yörünge açısal momentumuna karşılık gelen g (jiromagnetik oran) faktörüdür. Elektronlar için $g_\ell = -1$, protonlar için $g_\ell = 1$, nötronların elektrik yükü olmadığı için $g_\ell = 0$ 'dır.

Nükleonlar, yörüngesel hareketlerinden kaynaklanan magnetik momentten başka, klasik benzeri olmayan spin magnetik momente de sahiptir. s spinine eşlik eden magnetik moment,

$$\bar{\mu}_s = \frac{1}{\hbar} g_s \mu_N \bar{s} \quad (2.60)$$

şeklinde verilir. Elektronlar için $g_s = 2$, protonlar için $g_s = 5,5856912$, nötronlar için $g_s = -3,8260837$ 'dir.

Protonların ve nötronların bireysel magnetik momentleri ile protonların yörünge hareketinden ileri gelen magnetik momentlerinin toplamı, çekirdeğin toplam magnetik momenti olarak tanımlanır. Böylece toplam magnetik moment

$$\bar{\mu}_j = \frac{1}{\hbar} g_j \mu_N \bar{j} \quad (2.61)$$

olarak elde edilir.

2.10.2. Elektrik Kuadropol Moment

Bir sonraki sıfırdan farklı moment elektrik kuadropol momenttir. Elektrik kuadropol moment, çekirdeğin küresel simetriden ayrılmasının bir ölçütüdür. Çekirdek yük yoğunluğu $\rho(r)$, hacim elemanı dV ve $z = r \cos \theta$ olmak üzere elektrik kuadropol moment,

$$Q = \frac{1}{e} \int \rho(r) (3z^2 - r^2) dV \quad (2.62)$$

şeklindedir (Elton 1965).

Kuantum mekaniğinde bir çekirdeğin $\rho(r) dV$ yük elemanı, protonun e yükünü i -inci protonun r 'deki dV hacim elemanı içinde bulunma ihtimali olan $P_i(r) dV$ ile çarpmakla ve sonra çekirdek içersindeki bütün Z sayıdaki proton üzerine toplamakla bulunur.

$$\rho(r) dV = \sum_{i=1}^Z e P_i(r) dV \quad (2.63)$$

Kabuk modeline göre çekirdeğin elektrik kuadropol momentinin sonucu protondan dolayı meydana geldiği varsayımıyla $P_i(r) = |\psi(r)|^2$ olmak üzere

$$\rho(r) dV = \int e |\psi|^2 dV \quad (2.64)$$

yazılabilir. Böylece

$$Q = \int (3z^2 - r^2) |\psi|^2 dv \quad (2.65)$$

ifadesi elde edilir. Hesaplamalarda kolaylık sağlamak üzere, çekirdeğin yük dağılımı düzgün ve çekirdek elipsoid biçimde kabul edilirse, a simetri ekseni, b ona dik olan eksen olmak üzere

$$Q = \frac{2}{5} Z (a^2 - b^2) \quad (2.66)$$

olur. Buna göre tam küre ($a = b$) için $Q = 0$ 'dır. a simetri ekseni boyunca uzamış ($a > b$), prolate (yumurta biçimli) bir çekirdek için $Q > 0$, basılmış ($a < b$) oblate (mercimek biçimli) bir çekirdek için $Q < 0$ olur.

Eğer parçacık küresel simetrik bir alanda hareket ederse, $z^2 = x^2 = y^2 = r^2 / 3$ ve kuadropol moment (2.65)'den de görüldüğü gibi sıfırdır. Yörüngesel nötron için $Q = 0$ 'dır. Eğer $|\psi|^2$ xy düzleminde yoğunlaşmışsa ($z \cong 0$), \bar{r}^2 yörünge yarıçapının karesinin ortalaması olmak üzere $Q \sim -\bar{r}^2$, eğer $|\psi|^2$, z ekseni boyunca yoğunlaşmışsa ($z \cong r$), $Q \sim +2\bar{r}^2$ olur.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

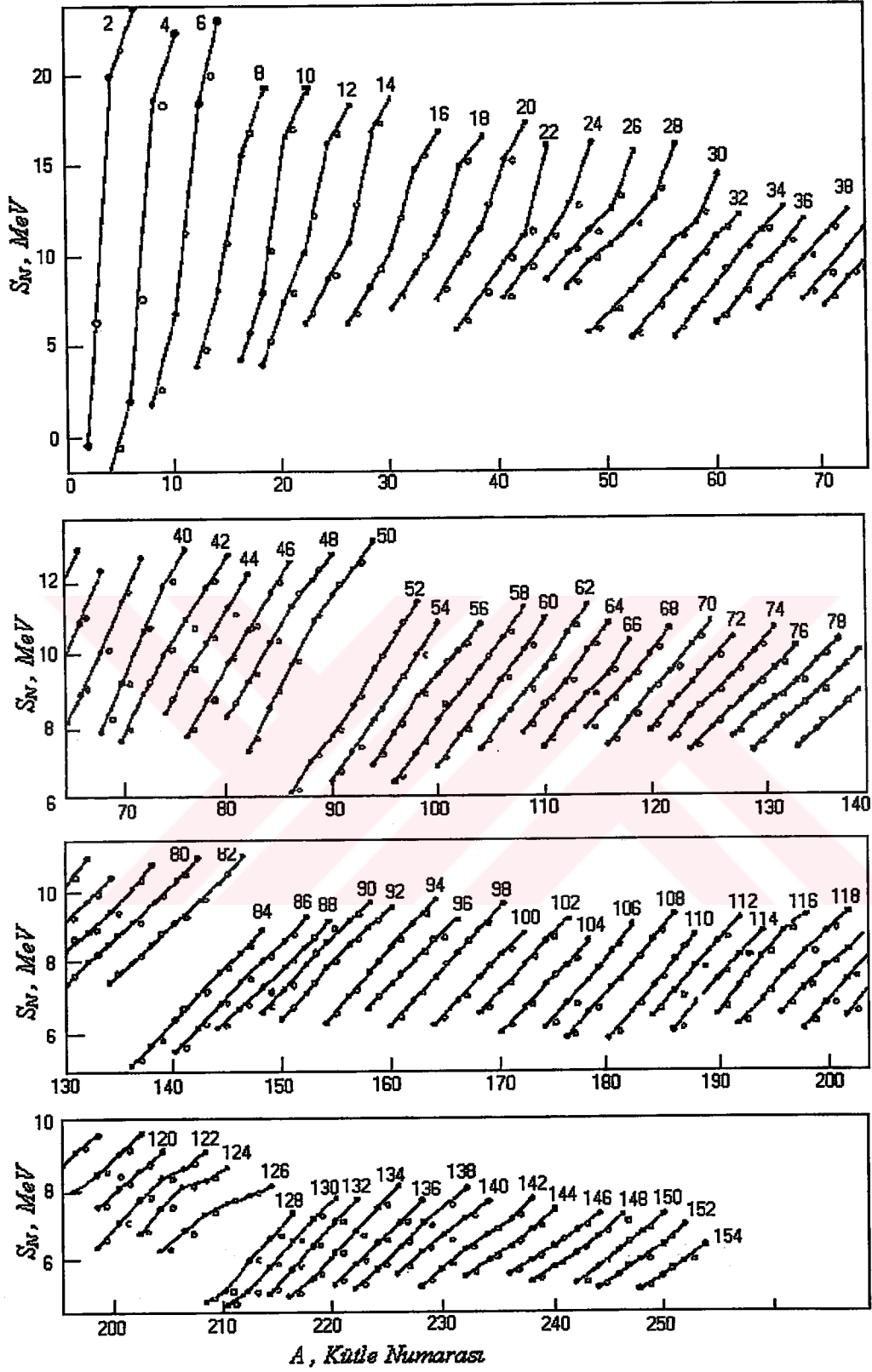
3.1. Tabakalı Modeli Öngören Kanıtlar

3.1.1. Proton ve Nötron Bağlanma Enerjileri

Çekirdekte tabakalı modelin varlığına ait en önemli kanıtlardan birisi, kararlı çekirdeklerin incelenmesinden gelmektedir. Şekil 3.1' de görüldüğü gibi, çekirdeklerin nötron ve proton bağlanma enerjileri bazı eğilimler göstermekte ve bu eğilimler incelendiğinde sihirli sayılarda sapmalar olduğu ortaya çıkmaktadır.

Şekil 3.1' de çift nötron sayısına sahip olan çekirdeklerin nötron bağlanma enerjileri A kütle sayısına karşı işaretlenmiş, aynı nötron sayısına sahip çekirdekler düz çizgilerle birleştirilmiştir.

Nötron bağlanma enerjileri proton sayısı ile oldukça düzgün bir artış göstermektedir. Ayrıca çizgiler birbirleriyle neredeyse paralel sıralar oluşturmaktadır. Ancak şekilden de görüldüğü gibi $N=28$ ile $N=30$, $N=50$ ile $N=52$, $N=82$ ile $N=84$, $N=126$ ile $N=128$ çizgileri arasında uzaklık birden açılmaktadır. Bu, çekirdekte bir takım tabakaların varlığını öngörebilir.

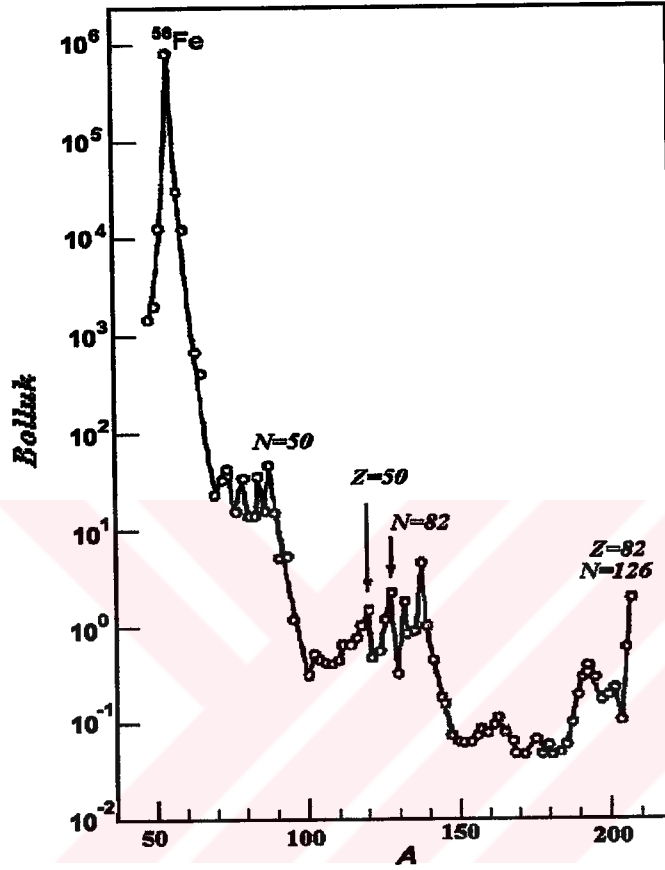


Şekil 3.1. Çift nötron sayısına sahip çekirdeklere ait kütle numarasına karşı nötron bağlanma enerjileri
KAYNAK: Enge 1966

3.1.2. Çekirdeklerin Doğal İzotopik Bollukları

Çekirdek kararlılığının göstergesi, sadece yüksek bağlanma enerjisi değildir.

Şekil 3.2' de A sayısına göre kararlı çekirdeklerin bağıl bolluğu görülmektedir.



Şekil 3.2. Çift-çift çekirdeklerin kütle numarasına karşı relatif bollukları
KAYNAK: Hodgson ve ark. 1997

Şekil 3.2' den de görüldüğü gibi bazı A sayılarında pikler vardır. Sihirli sayılardan birine eşit sayıda nötron veya protona sahip izotopun doğal bolluğu genel dağılımda beklenenden daha fazladır. Stronsiyumun $^{84}_{38}\text{Sr}$ izotopu %0,56, $^{86}_{38}\text{Sr}$ izotopu %9,8, $^{87}_{38}\text{Sr}$ izotopu %7 bollukla, Baryumun $^{130}_{56}\text{Ba}$ izotopu %0,106, $^{132}_{56}\text{Ba}$ izotopu %0,101, $^{134}_{56}\text{Ba}$ izotopu %2,42, $^{136}_{56}\text{Ba}$ izotopu %7,85 bollukla, Seryumun $^{136}_{58}\text{Ce}$ izotopu %0,19, $^{138}_{58}\text{Ce}$ izotopu %0,254, $^{142}_{58}\text{Ce}$ izotopu %11,1

bollukla, Zirkonyumun ${}_{40}\text{Zr}^{91}$ izotopu %11,2 , ${}_{40}\text{Zr}^{92}$ izotopu %17,1 , ${}_{40}\text{Zr}^{94}$ izotopu %17,4 , ${}_{40}\text{Zr}^{96}$ izotopu %2,8 bollukla tabiatta bulunmaktadır. Bunlara karşılık, bu elementlerin proton veya nötron sayıları sihirli sayılardan biri olan izotopları aşağıdaki bolluklarla tabiatta bulunmaktadırlar.

$${}_{38}\text{Sr}^{88} (N=50) \quad \% 82,6$$

$${}_{56}\text{Ba}^{138} (N=82) \quad \% 71,7$$

$${}_{58}\text{Ce}^{140} (N=82) \quad \% 88,5$$

$${}_{40}\text{Zr}^{90} (N=50) \quad \% 51,5$$

İki kere sihirli sayıya sahip olan ${}_{82}\text{Pb}^{208}$ ($N=126$ $Z=82$) in bolluğu %52,3'tür ve çift-çift çekirdekler içinde en yüksek bolluğa sahip olan izotoptur.

3.1.3. Kararlı İzotop Sayısı

Atom numarası sihirli sayılardan biri olan bir element komşularından daha çok kararlı izotopa sahiptir. Aşağıdaki tabloda $Z=20$, $Z=50$ ve $Z=82$ için bu açıkça görülmektedir.

<u>Çekirdek</u>	<u>Kararlı izotop sayısı</u>
${}_{19}\text{K}$	3
${}_{20}\text{Ca}$	6
${}_{21}\text{Sc}$	1
${}_{49}\text{In}$	2
${}_{50}\text{Sn}$	10
${}_{51}\text{Sb}$	2
${}_{81}\text{Tl}$	2
${}_{82}\text{Pb}$	4
${}_{83}\text{Bi}$	1

3.1.4. Kararlı İzoton Sayısı

Aşağıda görüldüğü gibi nötron sayısı sihirli sayılardan biri olan bir element komşularından daha çok kararlı izotona sahiptir.

<u>Nötron sayısı</u>	<u>Kararlı izoton sayısı</u>
19	0
20	5 (${}_{16}S^{36}$, ${}_{17}Cl^{37}$, ${}_{18}Ar^{38}$, ${}_{19}K^{39}$, ${}_{20}Ca^{40}$)
21	1
49	1
50	6 (${}_{36}Kr^{86}$, ${}_{37}Rb^{87}$, ${}_{38}Sr^{88}$, ${}_{39}Y^{89}$, ${}_{40}Zr^{90}$, ${}_{42}Mo^{92}$)
51	1

3.1.5. Radyoaktif Serilerin Bozunma Ürünleri

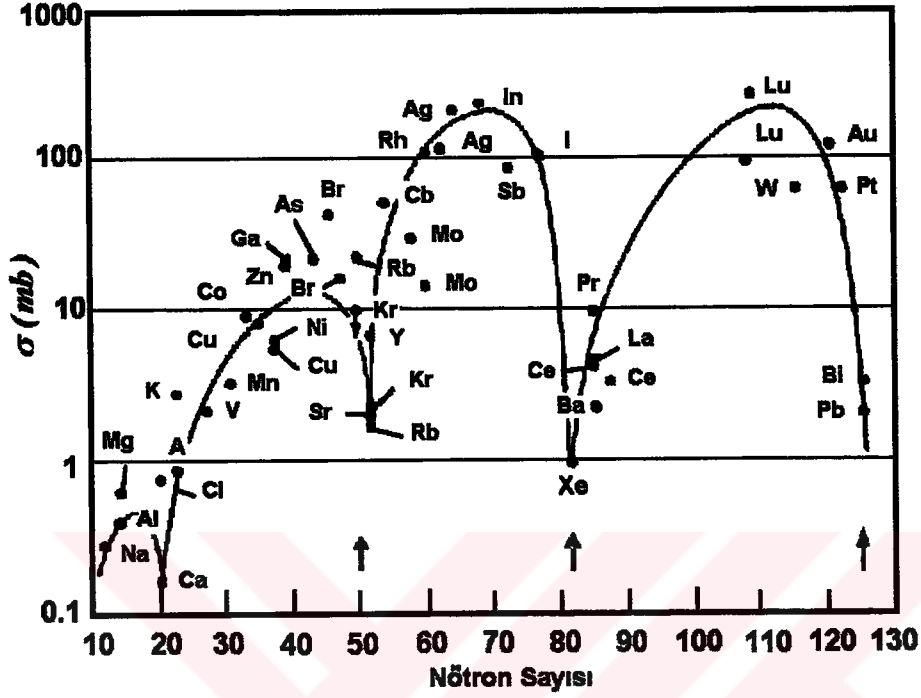
Radyoaktif serilerin son bulduğu ürünler sihirli sayıda proton veya nötrona sahip olan çekirdeklerdir.

<u>Radyoaktif Seri</u>	<u>Son ürün</u>
<i>Toryum Serisi</i>	${}_{82}Pb^{208}$ ($Z = 82$ $N = 126$)
<i>Uranyum Serisi</i>	${}_{82}Pb^{206}$ ($Z = 82$)
<i>Aktinyum Serisi</i>	${}_{82}Pb^{207}$ ($Z = 82$)
<i>Neptinyum Serisi</i>	${}_{83}Bi^{209}$ ($N = 126$)

3.1.6. Nötron Yakalama Tesir Kesiti

50, 82 ve 126 nötron içeren çekirdeklerin 1 MeV enerjili nötronları absorblama (soğurma) tesir kesiti küçüktür. Ayrıca bu sayıda nötrona sahip çekirdeklerin, tabakalı modele göre tabakaları dolu olduğundan, termik nötron soğurma tesir kesiti de minimum olur. Çift sihirli sayıya sahip olan ${}_{20}Ca^{40}$ ($Z = 20, N = 20$) ve ${}_{82}Pb^{208}$ ($Z = 82, N = 126$) için nötron yakalama tesir kesiti çok daha küçüktür.

Diğer taraftan kabuk sihirli sayıda tamamen dolmuş ise , sihirli sayıdan bir tane eksik nötron sayısına sahip izotopların nötron soğurma tesir kesiti çok yüksektir. Bu durum Şekil 3.3'te görülmektedir.



Şekil 3.3. Nötron yakalama tesir kesitinin nötron sayısı ile değişimi
KAYNAK: Hughes ve Sherman 1950

3.1.7. Kendiliğinden Nötron Yayınlanması

Eğer bir element sihirli sayıdan bir fazla sayıda nötrona sahipse, tabakalı modele göre, son nötronun çok küçük bağlanma enerjisine sahip olması gerekir. Ani nötron yayınlayıcısı olarak bilinen ${}_{36}\text{Kr}^{89}$ ($N=53$)' un kapalı tabakalarının dışında üç nötronu varken, ${}_{8}\text{O}^{17}$ ($N=9$), ${}_{36}\text{Kr}^{87}$ ($N=51$) ve ${}_{54}\text{Xe}^{137}$ ($N=83$)' nin kapalı tabakalarının dışında bir nötronları vardır.

3.2. Sonlu Kare Kuyu Potansiyeli İçin Enerji Seviyelerinin Hesaplanması

$$V(r) = \begin{cases} r < R \text{ için } -V_0 \\ r > R \text{ için } 0 \end{cases}$$

Bu potansiyel ifadesini $r < R$ için (2.30) numaralı radyal dalga denkleminde yerine koyduğumuzda,

$$\epsilon'^2 = \frac{2MR^2}{\hbar^2} (V_0 + E) \quad (3.1)$$

ve $U(r) = R(r)r$ olmak üzere $\rho = r/R$ değişken dönüşümü altında

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \epsilon'^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] U(\rho) = 0 \quad (3.2)$$

elde edilir. Bu denklem Bessel diferansiyel denklemdir ve çözümü de $J_{\ell+\frac{1}{2}}(\epsilon' \rho)$ Bessel fonksiyonu, A_i normlama katsayısı olmak üzere,

$$U_i(\rho) = A_i \rho^{1/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\epsilon' \rho) \quad (3.3)$$

şeklindedir. Diğer yandan $r > R$ için radyal dalga denklemini

$$\epsilon_\omega^2 = \frac{2MR^2}{\hbar^2} (-E) \quad (3.4)$$

olmak üzere

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \epsilon_\omega^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] U(\rho) = 0 \quad (3.5)$$

şeklini alır. Bu denklem de Hankel diferansiyel denklemdir. Çözümü de $H_{\ell+\frac{1}{2}}^{(1)}(\epsilon_\omega \rho)$ modifiye Hankel fonksiyonu, A_d normlama katsayısı olmak üzere

$$U_d(\rho) = A_d \rho^{1/2} H_{\ell+\frac{1}{2}}^{(1)}(\epsilon_\omega \rho) \quad (3.6)$$

şeklindedir. Bessel ve Hankel fonksiyonlarının değişimleri için aşağıdaki ifadeler verilmiştir (Yavuz 1981):

$$J_\ell(\rho) = (-\rho)^\ell \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^\ell \left(\frac{\sin \rho}{\rho} \right) \quad (3.7)$$

$$H_\ell^{(i)}(\rho) = -i(-\rho)^\ell \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^\ell \left(\frac{e^{i\rho}}{\rho} \right) \quad (3.8)$$

Enerji seviyelerinin bulunabilmesi için süreklilik şartından yararlanılır. Süreklilik şartına göre (3.3) ve (3.6) denklemlerinin $r=R'$ de kendilerinin ve türevlerinin birbirine eşit olması gerekir. Böylece (3.3) ve (3.6) denklemlerinden elde edilecek $-(I/U(\rho))(U(\rho)/d\rho)$ ifadelerinin $r=R'$ de birbirine eşitlenmesiyle enerji seviyeleri bulunur.

İki denklemin $-(I/U(\rho))(U(\rho)/d\rho)$ ifadelerinin $r = R'$ de birbirine eşitlenmesi sonucu

$$-\frac{U'_i(\rho)}{U_i(\rho)} = -\frac{U'_d(\rho)}{U_d(\rho)} \quad \text{yada} \quad I_\ell(\epsilon') = E_\ell(\epsilon_\omega) \quad (3.9)$$

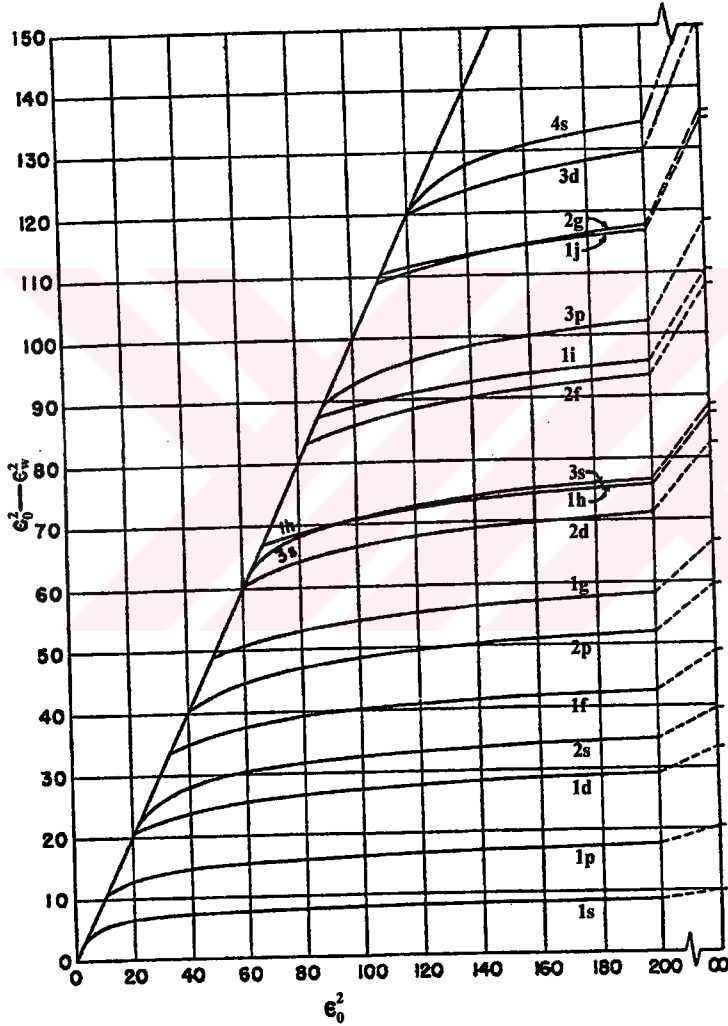
ifadeleri elde edilir. $I_\ell(\epsilon')$ ve $E_\ell(\epsilon_\omega)$, sırasıyla $r < R$ ve $r > R$ için elde edilen radyal dalga fonksiyonlarının logaritmik türevlerinin negatifleri olarak tanımlanır. (3.9) ile verilen bu denklemin çözümünü kolaylaştırmak için $I_\ell(\epsilon')$ ve $E_\ell(\epsilon_\omega)$ ' nin grafikleri ve tabloları hazırlanır (Green ve Lee 1955).

$$I_\ell(x) = \ell - \left(\frac{x^2}{I_{\ell-1} + \ell} \right) \quad (3.10)$$

$$E_\ell(x) = \ell + \left(\frac{x^2}{E_{\ell-1} + \ell} \right) \quad (3.11)$$

Bu tabloların hazırlanmasında (3.10) ve (3.11) ile verilen tekrarlama bağıntılarından yararlanılmışlardır (Green ve Lee 1955). Bu grafikler, ℓ ' nin değişen değerleri için $\epsilon_0^2 = \frac{2MR^2}{\hbar^2} V_0$ olmak üzere, ϵ_ω^2 ve ϵ_0^2 arasındaki fonksiyonel ilişkiyi elde etmede kullanılır.

Şekil 3.5 sonlu kare kuyu potansiyeli için Green ve Lee (1955) tarafından yapılan bu çalışmayı göstermektedir. Bu şekil, $E_0 = \hbar^2/2MR^2$ biriminde sonlu kare kuyu potansiyeli için elde edilen enerji değerlerini göstermektedir. ϵ'^2 değerleri, ϵ_0^2 sonsuza gittikçe, sonsuz küresel kuyu sonuçlarına doğru gider. Kesim 3.3'te daha sonra elde edilecek olan sonsuz kare kuyu potansiyeli sonuçları, Şekil 3.5'in sağ tarafında gösterilmektedir. Şekil 3.5'te göze çarpan bir nokta, $3s-1h$ ve $1j-2g$ çaprazlanmasıdır. Diğer nokta ise, $1g$ seviyesinden itibaren üst seviyeleri temsil eden çizgilerdeki eğilimin daha belirgin hale gelmesidir.



Şekil 3.5. Sonlu kare kuyu potansiyeli için elde edilen enerji seviyeleri
KAYNAK: Green ve Lee 1955

Verilen bir ℓ durumunda protonların veya nötronların toplam sayısı $2(2\ell + 1)$ ile verildiğinden 2, 8, 18, 20, 34, 40, 58,.. kapalı kabukları elde edilir. 2, 8, 20 dışındakiler sihirli sayı değildir.

3.3. Sonsuz Kare Kuyu Potansiyeli İçin Enerji Seviyelerinin Hesaplanması

Bir diğer kullanılacak potansiyel ifadesi ise sonsuz kare kuyu potansiyelidir.

$$V(r) = \begin{cases} r < R \text{ için } -V_0 \\ r > R \text{ için } \infty \end{cases}$$

$$K^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E + V_0) \quad (3.12)$$

olmak üzere $r < R$ için radyal dalga denklemi $\omega = Kr$ değişken dönüşümü altında

$$\left[\frac{d^2}{d\omega^2} + \frac{2}{\omega} \frac{d}{d\omega} + 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} \right] R(\omega) = 0 \quad (3.13)$$

şeklini alır. Bu denklem daha önce söylendiği gibi Küresel Bessel diferansiyel denklemdir ve çözümü de

$$R(r) = C_\ell J_\ell(Kr) \quad (3.14)$$

şeklinindedir. Bessel fonksiyonlarının farklı ℓ değerleri için (3.7) ifadesine göre bulunan birkaç değişimi aşağıdaki gibidir.

$$J_0(KR) = \frac{\sin(KR)}{KR}$$

$$J_1(KR) = \frac{\sin(KR)}{(KR)^2} - \frac{\cos(KR)}{KR}$$

$$J_2(KR) = \frac{3 \sin(KR)}{(KR)^3} - \frac{3 \cos(KR)}{(KR)^2} - \frac{\sin(KR)}{KR}$$

$$J_3(KR) = \frac{15 \sin(KR)}{(KR)^4} - \frac{15 \cos(KR)}{(KR)^3} - \frac{6 \sin(KR)}{(KR)^2} + \frac{\cos(KR)}{KR}$$

$$J_4(KR) = \frac{105 \sin(KR)}{(KR)^5} - \frac{105 \cos(KR)}{(KR)^4} - \frac{45 \sin(KR)}{(KR)^3} + \frac{10 \cos(KR)}{(KR)^2} + \frac{\sin(KR)}{KR}$$

$$J_5(KR) = \frac{945 \sin(KR)}{(KR)^6} - \frac{945 \cos(KR)}{(KR)^5} - \frac{420 \sin(KR)}{(KR)^4} + \frac{105 \cos(KR)}{(KR)^3} + \frac{15 \sin(KR)}{(KR)^2} - \frac{\cos(KR)}{(KR)}$$

Sonsuz kare kuyu potansiyeli için enerji seviyelerinin bulunmasında $r=R'$ de, fonksiyonun süreklilik şartından yararlanır.

$$J_\ell(KR) = 0 \quad (3.15)$$

olur. Örnek olarak $\ell = 0$ için $J_0(KR)$ nin ifadesi

$$J_0(KR) = \frac{\sin(KR)}{KR} \quad (3.16)$$

şekindedir. (3.16) ifadesi sıfıra eşitlendiğinde, fonksiyonun r eksenini kestiği noktalar köklerini verir. Elde ettiğimiz birkaç kök aşağıdaki gibidir.

$$n = 1 \Rightarrow KR = 3,14$$

$$n = 2 \Rightarrow KR = 6,28$$

$$n = 3 \Rightarrow KR = 9,43$$

$$n = 4 \Rightarrow KR = 12,57$$

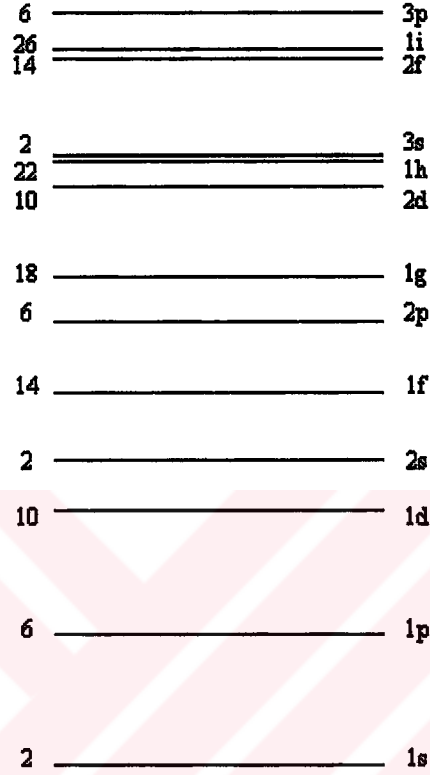
Bunlar (3.12)' de yerine koyulursa, $\ell = 0$ olduğundan $1s, 2s, 3s, 4s$ seviyelerine karşılık gelen enerji değerleri bulunur.

Aynı işlemleri diğer ℓ değerleri için yaptığımızda elde ettiğimiz KR değerleri Çizelge 3.1' de verilmiştir. Hesaplamaları $A=195$ için yaptık.

Çizelge 3.1. Sonsuz kare kuyu potansiyeli için hesaplanan KR değerleri

Seviye	$1s$	$1p$	$1d$	$2s$	$1f$	$2p$	$1g$	$2d$
KR	3,14	4,49	5,76	6,28	6,99	7,73	8,18	9,10
Seviye	$1h$	$3s$	$2f$	$1i$	$3p$			
KR	9,36	9,43	10,42	10,51	10,91			

Çizelge 3.1' de verilen, elde ettiğimiz KR değerlerini kullanarak, sonsuz kare kuyu potansiyeli için bulduğumuz enerji seviyeleri Şekil 3.6' da verilmiştir. Enerji seviyeleri hesaplamalarını Basic Programlama dili ile yaptık. Kullandığımız programın akış diagramı Ek-1'de verilmiştir.



Şekil 3.6. Sonsuz kare kuyu potansiyeli için elde ettiğimiz enerji seviyeleri

Şekil 3.6' dan da görüldüğü gibi sonsuz kare kuyu potansiyelinin radyal dalga denkleminde kullanılması sonucu 2, 8, 18, 20, 34, 40, 58, .. kapalı kabukları elde edilir. Bu sayılardan 2, 8, 20 sayıları sihirli sayılar olup diğerleri sihirli sayı değildir. Şeklin sol tarafında, her bir seviyenin alabileceği nükleon sayısı gösterilmektedir.

3.4. Harmonik Osilatör Potansiyeli İçin Enerji Seviyelerinin Hesaplanması

$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2$ harmonik osilatör potansiyeli altında hareket eden bir taneciğe ait radyal dalga denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \left[\frac{2ME}{\hbar^2} + \frac{2MV_0}{\hbar^2} - \frac{M^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (3.17)$$

(3.17) ifadesine $r = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} \rho$ dönüşümü uygulanırsa, $E = -V_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega\eta$ olmak üzere,

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \left[\eta - \rho^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) de $R = e^{-\rho^2/2} \Phi(\rho)$ ifadesi kullanılırsa,

$$\frac{d^2 \Phi(\rho)}{d\rho^2} + 2 \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right) \frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} + \left(-3 + \eta - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right) \Phi(\rho) = 0 \quad (3.19)$$

şeklinde yazılır. Bu denklem Kesim 2.4' te tartışıldığı gibi, Legendre diferansiyel denklemindeki C katsayısını bulmak için kullanılan $\Phi(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$ şeklinde seri metodu ile çözüldüğünde η katsayısı

$$\eta = 4n + 2\ell - 1 \quad (3.20)$$

olarak belirlenebilir.

$$N = 2n + \ell - 2 \quad (3.21)$$

olmak üzere

$$E = -V_0 + \left(N + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \quad (3.22)$$

elde edilir. Harmonik osilatör potansiyeli altında hareket eden bir taneciğin enerji düzeylerini veren (3.21) ve (3.22) ifadeleridir.

(3.19) denklemini $\Phi(\rho) = \rho^\ell v(\rho)$ dönüşümü uygulanarak yeniden düzenlenirse, denklem, $t = \rho^2$ olmak üzere

$$t \frac{d^2 v}{dt^2} + \left(\ell + \frac{3}{2} - t \right) \frac{dv}{dt} + (n-1)v = 0 \quad (3.23)$$

şekline dönüşür.

Asosiyel Laguerre diferansiyel denklemi

$$x y'' + (\beta + 1 - x) y' + k y = 0 \quad (3.24)$$

olarak verilir (Yavuz 1981). Bu denklemin çözümleri de $L_k^\beta(x)$ şeklindeki asosiyel Laguerre polinomlarıdır.

Genelleştirilmiş Laguerre polinomları

$$L_k^\beta(x) = \sum_{m=0}^k \frac{(k+\beta)!}{(k-m)!(\beta+m)!} \frac{(-x)^m}{m!} \quad (3.25)$$

şeklindedir (Preston ve Bhaduri 1975). Dikkat edilecek olursa (3.23) denklemi asosiyel Laguerre diferansiyel denkleminin $\beta = \ell + \frac{1}{2}$ ve $k = n-1$ için özel bir halidir. O halde radyal denklemin çözüm fonksiyonu

$$R(r) = A \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} r \right)^\ell L_{n-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2 \right) e^{-M\omega r^2 / 2\hbar} \quad (3.26)$$

şeklinde olacaktır. Burada, A normlama katsayısıdır. Buna göre dalga fonksiyonu,

$$\psi(r, \theta, \phi) = A \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} r \right)^\ell L_{n-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2 \right) e^{-M\omega r^2 / 2\hbar} Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) \quad (3.27)$$

şeklinde olacaktır. A normlama katsayısı aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\int \psi^* \psi d^3r = |A|^2 \left(\int_0^\infty e^{-M\omega r^2 / \hbar} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} r \right)^{2\ell} L_{n-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2 \right) L_{n-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2 \right) r^2 dr \right) \left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{\ell, m_\ell}^*(\theta, \phi) Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \right) = 1 \quad (3.28)$$

Buradaki küresel harmonik fonksiyonlar normlanmış dik bir sistem oluşturduğundan,

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{\ell, m_\ell}^*(\theta, \phi) Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 1 \quad (3.29)$$

şeklindedir. Böylece

$$|A|^2 \int_0^\infty e^{-M\omega r^2 / \hbar} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} r \right)^{2\ell} L_{n-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2 \right) L_{n-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2 \right) r^2 dr = 1 \quad (3.30)$$

olur. (3.30)' dan $\frac{M\omega}{\hbar} r^2 = t$ dönüşümü altında

$$|A|^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{M\omega} \right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\ell+1/2} \left(L_{n-1}^{\ell+1/2}(t) \right)^2 dt = 1 \quad (3.31)$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki denklemin içerdiği integral ifadesini çözmek için

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\beta \left[L_k^\beta(x) \right]^2 dx = \frac{\Gamma(k + \beta + 1)}{k!} \quad (3.32)$$

eşitliğinden faydalanılır (Anonim 1985-1986). (3.32)' deki $\Gamma(k + \beta + 1)$, Gamma fonksiyonudur. Bu denklemin çözümünde Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\dots(2a-1)}{2^a} \sqrt{\pi} \quad (a = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.33)$$

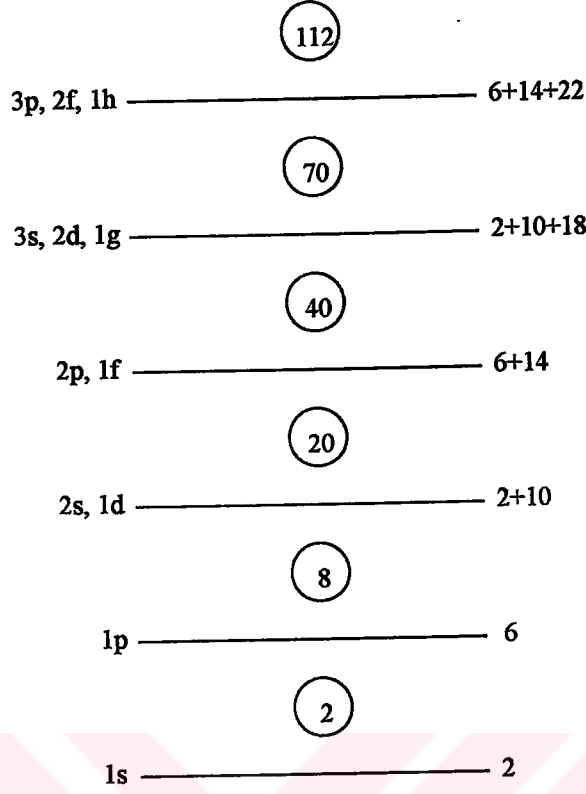
özelliğinden yararlanır (Anonim 1985-1986). Böylece normlama katsayısı

$$A = \sqrt{2} \left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^{3/4} \left[\frac{\Gamma\left(n + \ell + \frac{1}{2}\right)}{(n-1)!}\right]^{-1/2} \quad (3.34)$$

şeklinde belirlenmiş olur. (3.26) ve (3.34) ifadelerini birleştirdiğimizde radyal dalga fonksiyonunu aşağıdaki biçimde belirledik:

$$R(r) = \sqrt{2} \left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^{3/4} \left[\frac{\Gamma\left(n + \ell + \frac{1}{2}\right)}{(n-1)!}\right]^{-1/2} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} r\right)^\ell L_{n-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2\right) e^{-M\omega r^2 / 2\hbar} \quad (3.35)$$

(3.21) ve (3.22) ifadelerini kullanarak, denklem (2.46)'da verilen $\hbar\omega = 41A^{-1/3} \text{ MeV}$ (Greiner ve Maruhn 1995) olmak üzere, harmonik osilatör potansiyeli için elde ettiğimiz seviye düzeni şeması Şekil 3.7'deki gibidir. Seviye hesaplamalarını $A=195$ için yaptık.



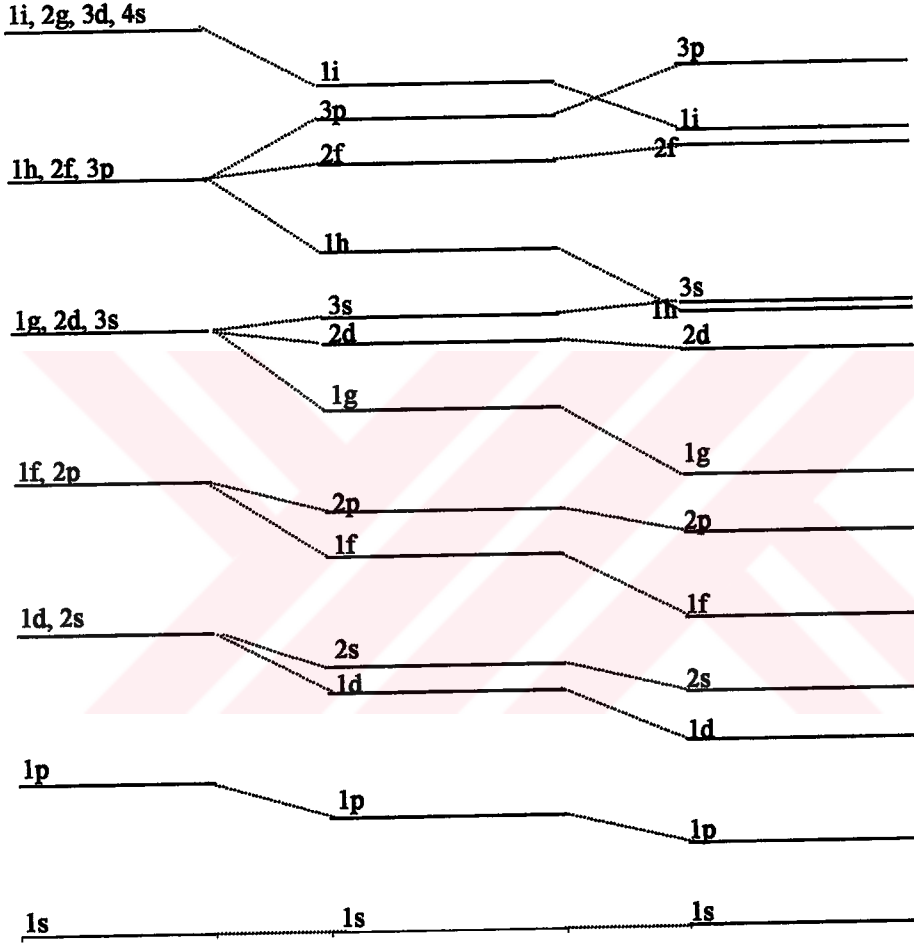
Şekil 3.7. Harmonik osilatör potansiyeli için elde ettiğimiz enerji seviyeleri

Şekil 3.7 ölçeklendirilmiş olarak çizilmiştir. Kabukların dolması 2, 8, 20, 40, 70, 112.. sayılarında olur. Bu sayılardan 2,8,20 dışındakiler sihirli sayı değildir. Seviyeler ve her bir seviyenin alabileceği nükleon sayısı aşağıdaki Çizelge 3.2' de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2. Harmonik osilatör potansiyeli için N ' ye karşılık seviyelerin alabileceği nükleon sayıları

N	$E_N(\hbar\omega)$	(n, ℓ)	ℓ	$\sum_{n\ell} 2(2\ell+1)$	Toplam
0	3/2	1s	0	2	2
1	5/2	1p	1	6	8
2	7/2	2s, 1d	0, 2	12	20
3	9/2	2p, 1f	1, 3	20	40
4	11/2	3s, 2d, 1g	0, 2, 4	30	70
5	13/2	3p, 2f, 1h	1, 3, 5	42	112

Sonsuz kare kuyu potansiyeli ve harmonik osilatör potansiyeli için yaptığımız çalışmalarda, sihirli sayılara karşılık gelmeyen kapalı kabuklar elde ettik. Ancak, bu iki potansiyel için elde edilen enerji seviyelerinin ortalamasını aldığımızda elde ettiğimiz seviyelerin, Şekil 3.8(a)' da verilen, Saxon-Woods potansiyeline spin-orbit etkileşme terimi eklenmeksizin elde edilen enerji seviyeleriyle hemen hemen aynı olduğunu gördük. Bu durum Şekil 3.9' da gösterilmektedir.



Şekil 3.9. Solda harmonik osilatör potansiyelinden elde ettiğimiz seviyeler, sağda sonsuz kare kuyu potansiyelinden elde ettiğimiz seviyeler, ortada ise seviyelerin ortalaması

Ortalama olarak elde ettiğimiz enerji seviyelerine spin-orbit etkileşme teriminden gelen ifadeyi ekleyip, enerji seviyelerindeki yarılımları hesaplamak gerekmektedir. Enerji seviyesindeki yarılımlar daha önce verilen

$$\Delta E_{\ell s j=\ell+1/2} = -D \frac{\hbar^2}{2} \ell \quad (2.54)$$

$$\Delta E_{\ell s j=\ell-1/2} = D \frac{\hbar^2}{2} (\ell + 1) \quad (2.55)$$

ifadelerinden bulunur. Bu ifadelerde yer alan D değerinin

$$D = \int_0^{\infty} |R_{n\ell}(r)|^2 V_{\ell s}(r) r^2 dr \quad (2.53)$$

ifadesinden, kare kuyu ve harmonik osilatör potansiyel ifadeleri için ayrı ayrı belirlenmesi gerekmektedir.

Sonsuz kare kuyu potansiyelinin r bağımlılığı olmadığından, (2.48)' de verilen $V_{\ell s}(r) = \frac{\lambda}{2M^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r}$ ifadesi kare kuyu potansiyeli için sıfırdır. Dolayısıyla kare kuyu potansiyeli için D enerji yarılması sıfır olur. Harmonik osilatör potansiyeli için ayrıntılı hesap gerekmektedir.

Daha önce bulduğumuz (3.35) nolu harmonik osilatör potansiyeli için elde ettiğimiz radyal dalga denklemi ve yine bu potansiyel için elde edilecek $V_{\ell s}(r)$ ifadesi, (2.53) ifadesinde yerine konulup işlem yapılmıştır. Harmonik potansiyel için elde ettiğimiz $V_{\ell s}(r)$ ifadesi aşağıdadır:

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2$$

$$V_{\ell s}(r) = \frac{\lambda}{2M^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} = \frac{\lambda \omega^2}{2M c^2} \quad (3.36)$$

Harmonik osilatör potansiyeli için bulduğumuz radyal dalga denklemi ise

$$R(r) = \sqrt{2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{3/4} \left[\frac{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})}{(n-1)!} \right]^{-1/2} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} r \right)^\ell L_{n-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2 \right) e^{-M\omega r^2 / 2\hbar} \quad (3.35)$$

şeklinde idi. (3.35) ve (3.36) ifadelerini (2.53)' de yerine koyduğumuzda,

$$D = 2 \left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{3/2} \left[\frac{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})}{(n-1)!} \right]^{-1} \frac{\lambda \omega^2}{2M c^2} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} r \right)^{2\ell} \left[L_{n-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2 \right) \right]^2 e^{-M\omega r^2 / \hbar} r^2 dr \quad (3.37)$$

olur. Bu ifadeden $t = \frac{M\omega}{\hbar} r^2$ dönüşümü altında $r^2 dr = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{M\omega} \right)^{3/2} t^{1/2} dt$ olmak üzere

$$D = 2 \left(\frac{M\omega}{\hbar} \right)^{3/2} \left[\frac{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})}{(n-1)!} \right]^{-1} \frac{\lambda \omega^2}{2M c^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{M\omega} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \left[L_{n-1}^{\ell+1/2}(t) \right]^2 e^{-t} t^{\ell+1/2} dt \quad (3.38)$$

elde edilir. Denklemin içerdiği integralin çözümünü bulmak için (3.32) ifadesinden yararlanılır. Elde ettiğimiz sonuç

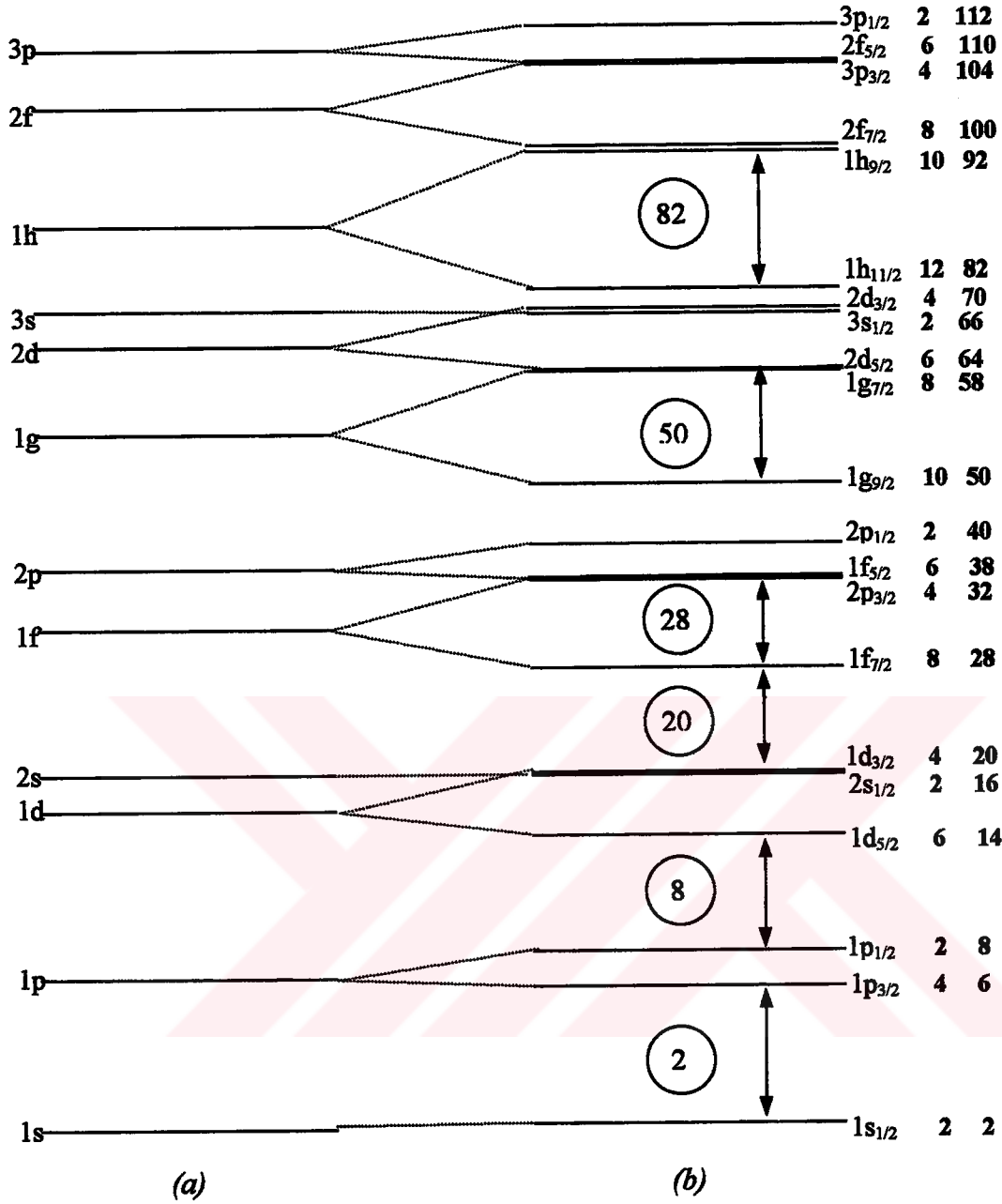
$$D = \frac{\lambda \omega^2}{2M c^2} \quad (3.39)$$

olur. Enerji seviyelerindeki yarılmayı bulmak için (3.39) ifadesi, (2.54) ve (2.55)'de yerine koyulmalıdır. Böylece her bir seviyedeki yarılmayı veren ifadeler

$$\Delta E_{\ell s j = \ell + 1/2} = -\frac{\lambda \omega^2}{2M c^2} \frac{\hbar^2}{2} \ell \quad (3.40)$$

$$\Delta E_{\ell s j = \ell - 1/2} = \frac{\lambda \omega^2}{2M c^2} \frac{\hbar^2}{2} (\ell + 1) \quad (3.41)$$

şeklinindedir. (3.40) ve (3.41) ifadelerini kullandığımızda elde ettiğimiz seviyeler Şekil 3.10(b)'de görülmektedir. Her bir seviyenin alabileceği nükleon sayısı şeklin sağ tarafında gösterilmektedir.



Şekil 3.10. (a) Ortalama olarak bulduğumuz seviye düzeni
 (b) Bu seviyelere spin- orbit etkileşmesinden gelen terimin eklenmiş hali

Şekil 3.10(b)' de gösterdiğimiz enerji seviyeleri hesaplamaları $A=195$ için yapılmış ve ölçeklendirilmiş olarak çizilmiştir. Deneylerin gerektirdiği büyüklükte bir ayrılma elde edilebilmesi için Green ve Lee (1955), λ katsayısının 45 mertebelerinde olması gerektiğini söylemektedir. Yaptığımız hesaplamalarda, λ katsayısını 36 olarak aldık. Her bir seviyenin alabileceği nükleon sayısı $2j+1$ ile belirlendiğinden,

nükleonların bu enerji seviyelerini doldurması sonucu 2, 8, 20, 28, 50, 82 sayılarını elde ettik. Bunlar, daha önce belirtilen sihirli sayılara karşılık gelen sayılardır.

Yaptığımız çalışma, daha öncede belirttiğimiz gibi Coulomb potansiyelinin etkisinden kurtulmak amacıyla, nötron enerji seviyelerinin belirlenmesi içindir. Protonlar için enerji seviyelerinin belirlenmesinde, Coulomb potansiyelinin etkisini göz önünde bulundurmak gerekir. Böylece protonların içinde hareket ettiği, çekirdeğin ortak potansiyeli, Coulomb düzeltmesi ile,

$$V(r) = V_o(r) + V_{LS}(r) + V_{coul}(r) \quad (3.42)$$

şeklinde olmalıdır. Burada

$$V_{coul}(r) = \begin{cases} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] (Z-1)e^2 / R & r \leq R \\ (Z-1)e^2 / R & r \geq R \end{cases} \quad (3.43)$$

şeklinde verilmektedir (Wong 1966). (3.43) ifadesinin potansiyel terimine ilave edilmesiyle proton enerji düzeyleri ile nötron enerji düzeyleri farklılaşır. Özellikle, protonların Coulomb etkisi, yüksek enerji düzeylerine doğru çıkıldıkça daha fazla belirgin hale gelir.

Eğer proton ya da nötron sayısı sihirli sayılardan biri ise, çekirdek kararlıdır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- Çiftlenme enerjisi daha büyüktür.
- Tek nükleonu çekirdekten ayırmak için gerekli olan enerji daha büyüktür.
- En düşük uyarılmış durumların enerjisi daha büyüktür.

Sihirli sayılar 2, 8, 20, 28, 50, 82 ayrıca yalnız nötronlar için 126 sayıdır. Bu sayılara ek olarak protonlar için 114 ve nötronlar için 184 olan süper ağır çekirdeklerle sonuçlanan sihirli sayıları da beklenir. Ancak bunlar henüz deneylerle doğrulanmış değildir. Buna rağmen en ağır elementlerin kararlılıklarındaki artışın ipuçları vardır.

3.6. Shell Modeline Göre Magnetik Moment Hesaplamaları

Spini \vec{j} olan bir çekirdeğin magnetik dipol momentini,

$$\vec{\mu}_j = \frac{1}{\hbar} g_j \mu_N \vec{j} \quad (2.61)$$

olarak verilmişti. Buna göre $J=0$ olan taban durumuna sahip çift-çift çekirdekler magnetik momente sahip olmayacaklardır. Tek parçacık tabaka modeline göre, bir j tabakası dışında tek nükleonu bulunan çekirdeğin magnetik momentini, tabaka dışındaki tek nükleona ait magnetik momentten ileri gelir.

Magnetik moment, toplam açıl momentumun z bileşeninin maksimum olduğu $j_z = j\hbar$ durumunda magnetik moment işlemcisinin beklenen değeri hesaplanarak bulunur. ℓ ve s nicelikleri dahil edilerek

$$\mu = (g_\ell \ell_z + g_s s_z) \mu_N / \hbar \quad (3.44)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeyi hesaplamak için $j = \ell + s$ ifadesi kullanılarak

$$\mu = [g_\ell j_z + (g_s - g_\ell) s_z] \mu_N / \hbar \quad (3.45)$$

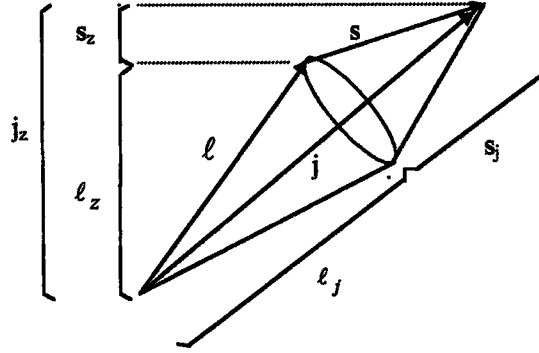
şeklinde yeniden yazılabilir ve $j_z = j\hbar$ için beklenen değeri alınır,

$$\langle \mu \rangle = [g_\ell j + (g_s - g_\ell) \langle s_z \rangle / \hbar] \mu_N \quad (3.46)$$

bulunur. $\langle s_z \rangle$ beklenen değeri, $\vec{\ell}$ ve \vec{s} vektörlerinin \vec{j} ile ilişkileri incelenerek hesaplanabilir.

$\langle s_z \rangle$ ifadesinin hesabı, Şekil 3.11'deki vektör diyagramında da görüldüğü gibi \vec{s} 'nin \vec{j} boyuncaki bileşenini verir. Dolayısıyla \vec{s} 'nin \vec{j} boyuncaki bileşeni s_j için bir bağıntıya ihtiyaç vardır.

Şekil 3.11' de \vec{j} vektörünün z eksenini etrafındaki presesyon hareketi gösterilmektedir. Görüldüğü gibi \vec{l} ve \vec{s} vektörleri de \vec{j} etrafında presesyon hareketi yapmaktadır.



Şekil 3.11. \vec{j} vektörünün z eksenini etrafındaki presesyon hareketi. \vec{l} ve \vec{s} vektörleri de \vec{j} etrafında presesyon hareketi yapmaktadır.

Şekil 3.11' e göre, s_z 'nin herhangi bir andaki değeri değiştiği halde, \vec{j} boyuncaki bileşeni s_j sabit kalır. \vec{j} boyunca birim vektör $\vec{j}/|\vec{j}|$ ve \vec{s} 'nin \vec{j} boyuncaki bileşeni $|\vec{s} \cdot \vec{j}|/|\vec{j}|$ şeklindedir. Dolayısıyla s_j vektörü, $\vec{j}|\vec{s} \cdot \vec{j}|/|\vec{j}|^2$ ifadesinin hesaplanmasıyla bulunur. Burada $\vec{s} \cdot \vec{j} = \vec{s} \cdot (\vec{l} + \vec{s}) = \vec{l} \cdot \vec{s} + \vec{s}^2$ şeklindedir. $\vec{l} \cdot \vec{s}$ ifadesinin beklenen değerinin hesaplanması için aşağıdaki çözüm adımları takip edilir:

$$\begin{aligned} \vec{j}^2 &= \vec{l}^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} + \vec{s}^2 \\ \vec{l} \cdot \vec{s} &= \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2) \\ \langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle &= \frac{1}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]\hbar^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Bütün niceliklerin yerine beklenen değerleri konulursa

$$\langle s_z \rangle = \frac{j}{2j(j+1)}[j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)]\hbar \quad (3.48)$$

elde edilir. $\langle s_z \rangle$ ifadesi $j = \ell + \frac{1}{2}$ için ve $j = \ell - \frac{1}{2}$ için ayrı ayrı hesaplanırsa aşağıdaki bağıntılar bulunur:

$$j = \ell + \frac{1}{2} \quad \text{için} \quad \langle s_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \quad (3.49)$$

$$j = \ell - \frac{1}{2} \quad \text{için} \quad \langle s_z \rangle = -\frac{\hbar j}{2(j+1)} \quad (3.50)$$

(3.49) ve (3.50), (3.46) numaralı magnetik moment ifadesinde yerine konulursa

$$j = \ell + \frac{1}{2} \quad \text{için} \quad \langle \mu \rangle = \left[g_\ell \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_s \right] \mu_N \quad (3.51)$$

$$j = \ell - \frac{1}{2} \quad \text{için} \quad \langle \mu \rangle = \frac{j}{j+1} \left[g_\ell \left(j + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} g_s \right] \mu_N \quad (3.52)$$

elde edilir.

Çekirdekte nükleonlar, yörünge açısal momentum ve spin açısal momentumlarının her birinin toplamı sıfır olacak biçimde çiftlenirler. Bu nedenle çiftlenmiş nükleonlar magnetik momente katkıda bulunmazlar. Çekirdeğin magnetik momenti çiftlenmemiş nükleonlar tarafından belirlenir. Çekirdeğin magnetik momentini belirleyen bu çiftlenmemiş nükleonlara değerlik nükleonları denir. Tek A kütle numarasına sahip bir çekirdeğin tek parçacık tabaka modeline göre magnetik momenti, sonuncu nükleonun magnetik momentinden ileri gelir. Çok büyük magnetik momentli ağır çekirdeklerin görülmemesi bunun sonucudur. $6\mu_N$ 'den daha büyük bir çekirdek magnetik momenti gözlenmemiştir. Bunun nedeni, çekirdeğin magnetik momentinin değerlik nükleonları tarafından belirlenmesidir.

$$\text{proton için} \quad g_\ell = 1 \quad g_s = 5,5856912$$

$$\text{nötron için} \quad g_\ell = 0 \quad g_s = -3,8260837$$

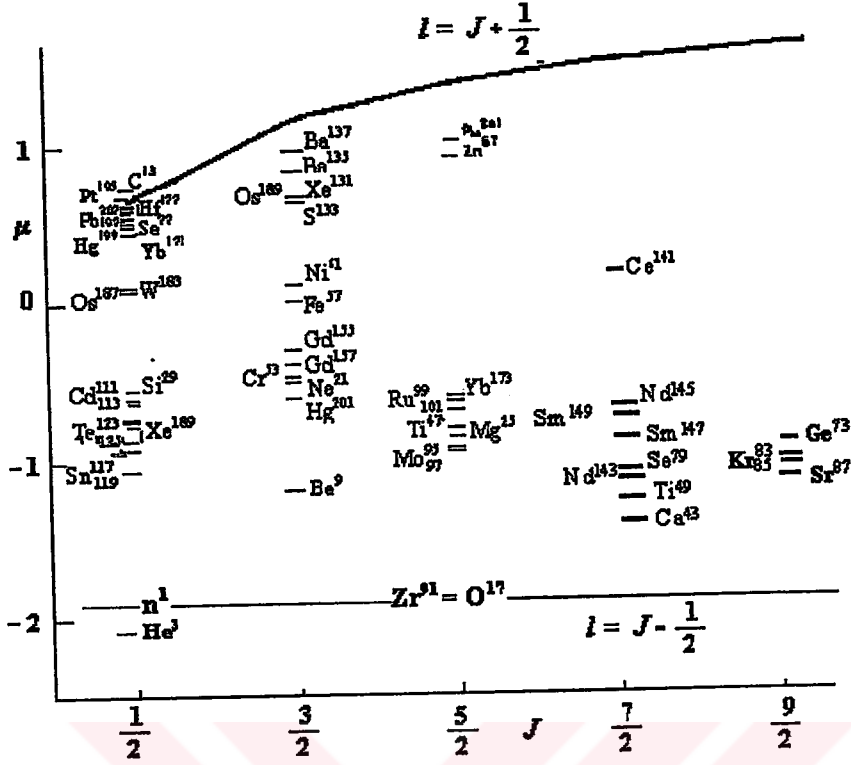
olarak verilir. Bu değerler (3.51) ve (3.52) bağıntılarında yerlerine koyulursa,

$$\text{proton için} \begin{cases} j = \ell + 1/2 \text{ için } \mu = [j + 2.2928456] \mu_N \\ j = \ell - 1/2 \text{ için } \mu = \left[\frac{j}{j+1} (j - 1.2928456) \right] \mu_N \end{cases} \quad (3.53)$$

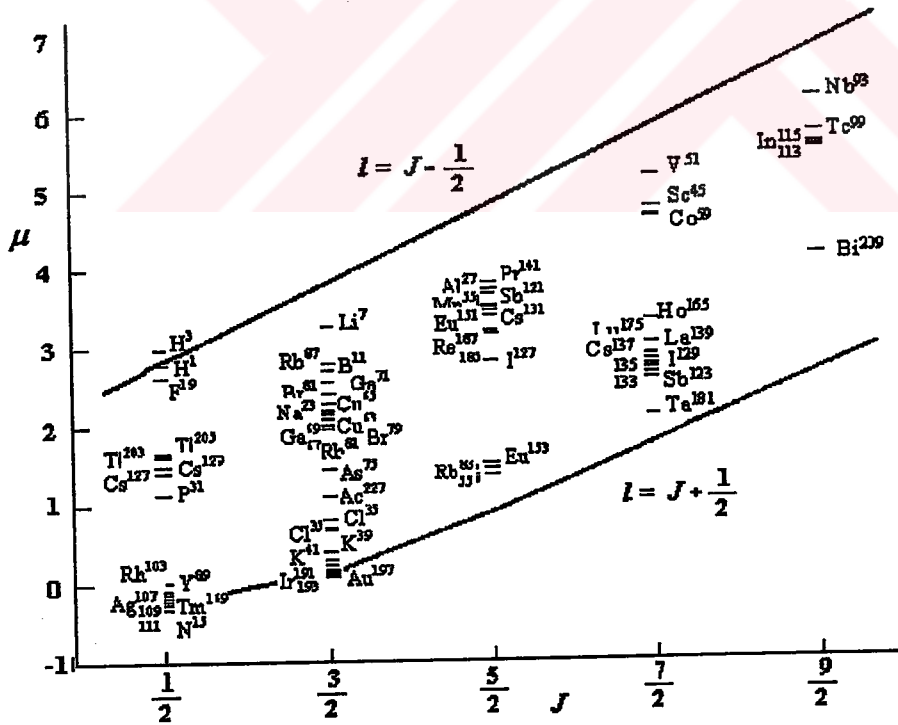
$$\text{nötron için} \begin{cases} j = \ell + 1/2 \text{ için } \mu = -1.913042 \mu_N \\ j = \ell - 1/2 \text{ için } \mu = -1.913042 \frac{j}{j+1} \mu_N \end{cases} \quad (3.54)$$

şeklinde tek parçacık tabaka modeli için magnetik moment ifadeleri elde edilir. μ' nün bu değerleri Schmidt limitleri olarak bilinir.

Şekil 3.12 ve Şekil 3.13'te tek A' lı çekirdekler için shell modeli ile hesaplanan değerlerin ölçülen değerler ile karşılaştırılması gösterilmiştir. Hesaplanan değerler Schmidt limitleridir ve koyu çizgilerle gösterilmiştir. Bu hesaplama ilk defa 1937 de Schmidt tarafından yapılmıştır. Deneysel değerler Schmidt çizgilerinin arasına düşerler, fakat genel olarak daha küçük değerlerde ve oldukça dağınık haldedirler. Genellikle deneysel değerler bu çizgilerden birine diğerinden daha yakın bulunur. Bu teoremin bir eksikliği, çekirdek içindeki nükleonun g_s değerinin, serbest bir nükleonun g_s değeri ile aynı alınmasıdır. Shell modelinin, magnetik momentlerin genel eğilimini göstermekteki başarısı, çekirdeklerin yapısı hakkında yaklaşık bir fikir verebileceğini gösterir.



Şekil 3.12. Çift proton ve tek nötron sayısına sahip çekirdeklerin magnetik momentlere karşı j spininin gösterimi



Şekil 3.13. Çift nötron ve tek proton sayısına sahip çekirdeklerin magnetik momentlere karşı j spininin gösterimi
KAYNAK: Hodgson ve ark. 1997

3.7. Shell Modeline Göre Elektrik Kuadropol Moment Hesaplamaları

Burada çiftlenim kuvvetinin yararı bir kez daha görülür, eğer çiftlenmiş nükleonlar küresel simetrik yörüngelerde hareket ederlerse kuadropol momente katkıda bulunmazlar. Dolayısıyla bir çok çekirdek için kuadropol moment, yüzeye yakın yörüngede hareket ettiği varsayılan, bir değerlik nükleonundan hesaplanabilir.

Kabuk modeli, tek A ve tek Z li çekirdeğin elektrik kuadropol momentinin çekirdekdeki sonuncu protondan ileri geldiğini varsayarak, hesaplamayı mümkün kılar. Deneysel olarak ölçülen kuadropol moment genellikle verilmiş bir j için teorik olarak mümkün olan değerlerin en büyüğüdür. Yani sonuncu protonun bu değere ait magnetik kuantum sayısı $m_j = j$ dir. Böylece \vec{l} ile \vec{s} nin paralel olduğu ($j = l + \frac{1}{2}$) durumu için $m_l = l$ ve $m_s = +\frac{1}{2}$ olmalıdır. Böylece protonun

$$\psi(r) = \frac{U(r)}{r} Y_{l m_l}(\theta, \phi) \chi(m_s) \quad (3.55)$$

şeklindeki dalga fonksiyonu

$$\psi(r) = \frac{U(r)}{r} Y_{l l}(\theta, \phi) \chi(m_s) \quad (3.56)$$

şeklini alır. Tek protonun meydana getirdiği elektrik kuadropol moment, (2.65)' den yola çıkarak,

$$Q = \int r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) |\psi(r)|^2 dv \quad (3.57)$$

bağıntısı ile hesaplanır. Küresel harmoniğin genel ifadesi

$$Y_{l m_l}(\theta, \phi) = (-1)^{m_l} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(\ell - m_l)!}{(\ell + m_l)!} \right]^{1/2} P_l^{m_l}(\cos \theta) e^{i m_l \phi} \quad (3.58)$$

ile verildiğinden,

$$|Y_{\ell\ell}|^2 = \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{1}{(2\ell)!} [P_\ell^\ell(\cos\theta)]^2 \quad (3.59)$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$Q = \int [U(r)]^2 (3\cos^2\theta - 1) |Y_{\ell\ell}(\theta, \phi)|^2 dv \quad (3.60)$$

olduğundan $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ ve $dv = r^2 dr d\Omega$ olduğuna dikkat edilerek

$$Q = \int_0^\infty r^2 [U(r)]^2 dr \int (3\cos^2\theta - 1) |Y_{\ell\ell}(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (3.61)$$

elde edilir. Protonun yörünge yarıçapının karesinin ortalaması \bar{r}^2 ile gösterilirse,

$$\bar{r}^2 = \int_0^\infty r^2 [U(r)]^2 dr \quad (3.62)$$

yazılabilir. Böylece

$$Q = \bar{r}^2 \left[3 \int \cos^2\theta |Y_{\ell\ell}(\theta, \phi)|^2 d\Omega - 1 \right] \quad (3.63)$$

elde edilir. Burada küresel harmoniğin normalize olmasının sonucu olan $\int |Y_{\ell m}|^2 d\Omega = 1$ bağıntısı kullanılmıştır. $|Y_{\ell\ell}|^2$ 'nin yukarıdaki ifadesini yerine yazarak ve $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ ifadesi de kullanılarak,

$$Q = \bar{r}^2 \left[3 \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{1}{(2\ell)!} 2\pi \int_0^\pi \cos^2\theta [P_\ell^\ell(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta - 1 \right] \quad (3.64)$$

veya $x = \cos\theta$ yazarak,

$$Q = \bar{r}^2 \left[\frac{3(2\ell+1)}{2(2\ell)!} \int_{-1}^1 [x P_\ell^\ell(x)]^2 dx - 1 \right] \quad (3.65)$$

elde edilir. Legendre fonksiyonlarının

$$(2\ell + 1)xP_{\ell}^{m_{\ell}}(x) = (\ell - m_{\ell} + 1)P_{\ell+1}^{m_{\ell}}(x) + (\ell + m_{\ell})P_{\ell-1}^{m_{\ell}}(x) \quad (3.66)$$

$$P_{\ell-1}^{\ell}(x) = 0 \quad (3.67)$$

özellikleri kullanılarak (Spiegel 1968)

$$(2\ell + 1)xP_{\ell}^{\ell}(x) = P_{\ell+1}^{\ell}(x) \quad (3.68)$$

elde edilir. Böylece

$$Q = \bar{r}^2 \left[\frac{3}{2(2\ell + 1)(2\ell)!} \int_{-1}^{+1} [P_{\ell+1}^{\ell}(x)]^2 dx - 1 \right] \quad (3.69)$$

$$Q = \bar{r}^2 \left[\frac{3}{2(2\ell + 1)!} \int_{-1}^{+1} [P_{\ell+1}^{\ell}(x)]^2 dx - 1 \right] \quad (3.70)$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$\int_{-1}^{+1} [P_{\ell}^{m_{\ell}}(x)]^2 dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m_{\ell})!}{(\ell - m_{\ell})!} \quad (3.71)$$

olduğundan (Spiegel 1968)

$$\int_{-1}^{+1} [P_{\ell+1}^{\ell}(x)]^2 dx = \frac{2(2\ell + 1)!}{2\ell + 3} \quad (3.72)$$

yazılabilir. Böylece

$$Q = \left[\frac{3}{2(2\ell + 1)!} \frac{2(2\ell + 1)!}{2\ell + 3} - 1 \right] \bar{r}^2 \quad (3.73)$$

$$Q = -\frac{2\ell}{2\ell + 3} \bar{r}^2 \quad (3.74)$$

sonucuna varılır. Yukarıdaki ifade de $\ell = j - \frac{1}{2}$ yazılırsa, j kabuk modeli durumunda bulunan tek protonun kuadropol momenti

$$Q_p = -\frac{2j-1}{2j+2} \bar{r}^2 \quad (3.75)$$

şeklinde elde edilir (Elton 1965).

Çizelge 3.3. Elektrik kuadropol momentinin kabuk modeli için hesaplanan ve ölçülen değerleri
KAYNAK: Krane 1988

Shell modeli durumu	Hesaplanan Q (tek proton)	Ölçülen Q			
		Tek parçacık		Tek deşik	
		p	n	p	n
$1p_{3/2}$	-0.013	-0.0366(Li ⁷)		+0.0407(B ¹¹)	+0.053(Be ⁹)
$1d_{5/2}$	-0.036	-0.12(F ¹⁹)	-0.026(O ¹⁷)	+0.140(Al ²⁷)	+0.201(Mg ²⁵)
$1d_{3/2}$	-0.037	-0.08249(Cl ³⁵)	-0.064(S ³³)	+0.056(K ¹⁹)	+0.45(S ³⁵)
$1f_{7/2}$	-0.071	-0.26(Sc ⁴³)	-0.080(Ca ⁴¹)	+0.40(Co ⁵⁹)	+0.24(Ti ⁴⁹)
$2p_{3/2}$	-0.055	-0.209(Cu ⁶³)	-0.0285(Cr ⁵³)	+0.195(Ga ⁶⁷)	+0.20(Fe ⁵⁷)
$1f_{5/2}$	-0.086		-0.20(Ni ⁶¹)	+0.274(Rb ⁸⁵)	+0.15(Zn ⁶⁷)
$1g_{9/2}$	-0.13	-0.32(Nb ⁹³)	-0.17(Ge ⁷³)	+0.86(In ¹¹⁵)	+0.45(Kr ⁸⁵)
$1g_{7/2}$	-0.14	-0.49(Sb ¹²³)		+0.20(La ¹³⁹)	
$2d_{5/2}$	-0.12	-0.36(Sb ¹²¹)	-0.236(Zr ⁹¹)		+0.44(Cd ¹¹¹)

Düzgün yüklü bir küre için $\bar{r}^2 = \frac{3}{5} R^2 = \frac{3}{5} R_0^2 A^{2/3}$ 'tür. Bu sonuçlar kullanılarak Çizelge 3.3' deki çekirdeklerin kuadropol momentleri hesaplanabilir. Çizelge 3.3' de hesaplanan ve ölçülen elektrik kuadropol moment değerleri görülmektedir. Hesaplanan değerlerin ölçülen değerlerle işaret bakımından aynı, fakat 2-3 çarpanı kadar daha küçük olduğu görülmektedir. Deşikten kasıt, kapalı kabukta bir nükleonun eksik olduğu durumdur. Tabakasında bir nükleonu eksik bulunan çekirdeğin açısal momentumu,

magnetik dipol momenti ve elektrik kuadropol momenti bu eksik nükleonunkiyle aynıdır.

Çizelge 3.3' den tek nötron kuadropol moment değerlerinin genel olarak tek proton kuadropol moment değerlerinden küçük olduğu, ancak sıfır olmadığı görülür. Oysa dolu bir alt kabuk dışındaki yüksüz bir nötronun kuadropol momenti sıfır olmalıdır. Bunun kuarklardan ileri geldiği düşünülmektedir.

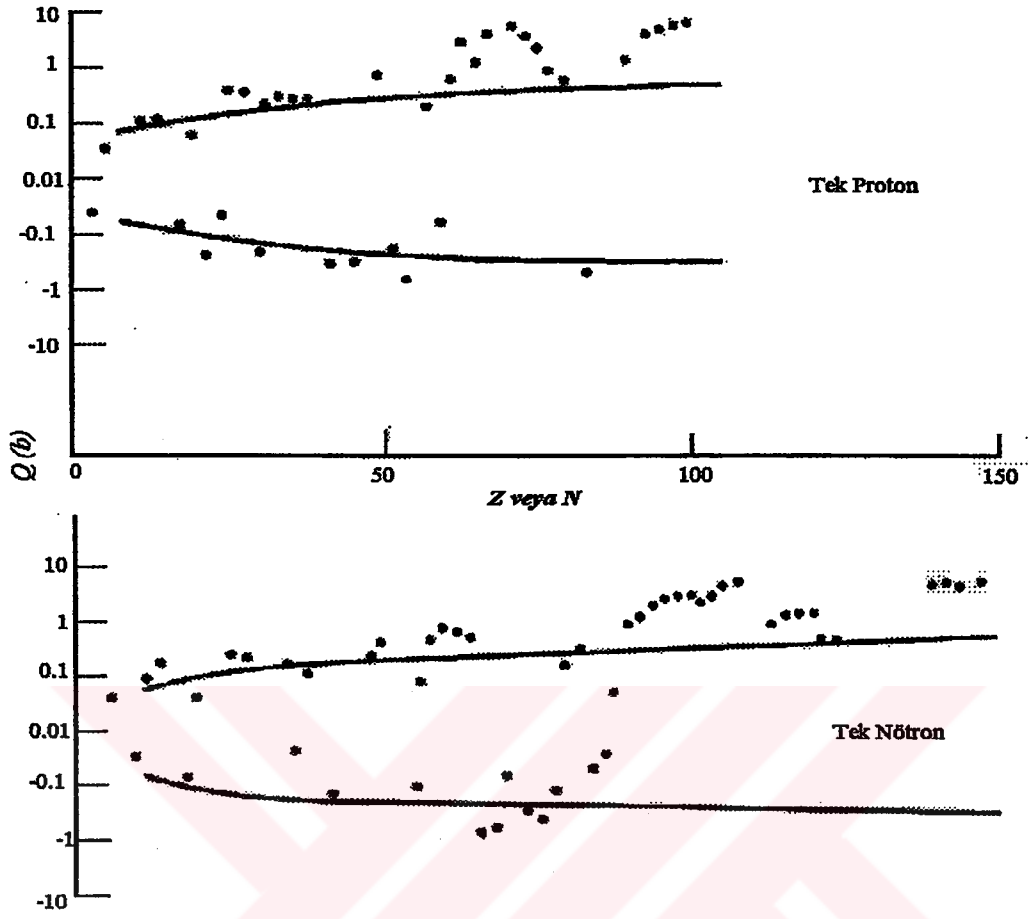
Shell modeli gözlenen büyük elektrik kuadropol momentlerini de açıklayamaz. Protonların çoğu veya hepsi bir yolunu bulup topluca büyük bir kuadropol momente sahip olmak için katkıda bulunmuşlardır denebilir.

Bir alt kabukta birden fazla parçacık olduğu zaman alt kabuktaki tüm parçacıklar kuadropol momente katkıda bulunabilirler. Bir alt kabuğun kapasitesi $2j+1$ olduğundan dolmamış bir alt kabuktaki nükleonların sayısı 1 'den $2j$ 'ye kadar değişecektir. Karşılık gelen kuadropol moment,

$$\langle Q \rangle = \langle Q_p \rangle \left[1 - 2 \frac{n-1}{2j-1} \right] \quad (3.76)$$

şeklinde ifade edilir (Krane 1988). Burada n alt kabuktaki nükleon sayısıdır. $n=1$ olduğunda $Q = Q_p$, $n=2j$ olduğu zaman ise (bu durum dolması için bir nükleonu eksik olan bir alt kabuğa karşılık gelir) $Q = -Q_p$ ' dir. Çizelge 3.3' de "deşik" denilen bu durumların kuadropol momentleri görülmektedir. Buradan $Q(\text{parçacık}) = -Q(\text{deşik})$ olduğu anlaşılır. Deşik durumlarının kuadropol momentleri pozitifdir ve parçacık durumlarının kuadropol momentleri ile zıt işaretlidir.

Şekil 3.14, tek kütle numaralı çekirdeklerin taban durumlarının ölçülen elektrik kuadropol momentlerini göstermektedir. Kesiksiz çizgiler shell modeli çekirdekleri için beklenen $Q \sim \bar{r}^2$ sınırlarını göstermektedir. $60 < Z < 80$, $Z > 90$, $90 < N < 120$ ve $N > 140$ bölgeleri hariç, sınırlar arasındaki deneysel değerler shell modelinin kestirdiği değerlerden bir katı kadar daha büyüktür. Ayrıca model bazı ağır çekirdekler için gözlenen birkaç barn gibi aşırı büyük kuadropol momentleri kestirmekte başarısızdır.



Şekil 3.14. Tek nötron ve tek protonlu çekirdeklerin elektrik kuadropol momentlerinin deneysel değerleri

KAYNAK: Krane 1988

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

4.1. Çekirdeklerin Spin ve Magnetik Momentlerinin Shell Modeline Göre Ayrıntılı Olarak İncelenmesi

Bu çalışmada uygulamalarını yaptığımız tek parçacık tabaka modeli, aşağıdaki kabullere dayandırılır:

1. Zıt dubletlerle sonuçlanan spin-orbit çiftlenimi farz edilir. Yani çekirdeğin tek nükleonu $d_{5/2}$ seviyesi yerine $d_{3/2}$ seviyesinde bulunabilir.
2. j toplam açısal momentum kuantum sayılı herhangi bir yörüngedeki çift sayılı nükleonlar, sıfır çekirdek spini vermek üzere çiftlenirler ve çekirdeğin magnetik momentine katkıları sıfırdır. j toplam açısal momentum kuantum sayılı herhangi bir seviyedeki tek sayılı nükleonlar, spin j olacak şekilde çiftlenirler ve çekirdeğin magnetik momentini bu seviyedeki çiftlenmemiş tek parçacığın magnetik momentine eşittir. Çift-çift çekirdekler sıfır spine sahiptir.
3. Aynı seviyedeki nükleonların çiftlenme enerjisi j sayısı arttıkça artar. Böylece nükleonlar, en düşük enerji durumuna sahip olacakları seviyede bulunurlar. Örneğin $3s_{1/2}$ seviyesi $1h_{11/2}$ seviyesinden daha düşük enerjiye sahiptir. Fakat $1h_{11/2}$ seviyesinin çiftlenme enerjisi $3s_{1/2}$ seviyesininkinden daha büyük olduğundan $11/2$ spini tek çekirdeklerde gözlenmez, yerine $1/2$ spininin gözlenmesi beklenir.

Bu kabuller altında tek nükleon sayılı çekirdeklerin elde edilen spin ve magnetik momentlerini inceleyelim. Aşağıdaki çekirdekler için tabakalı modelin öngördüğü değerlerle, ölçülen spin ve magnetik moment değerleri karşılaştırılırken, Preston ve Bhaduri(1975) ve Hodgson ve ark.(1997) kaynaklarındaki verilerden yararlanılmıştır.

4.1.1. 20° den Küçük Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları

Tek nükleon sayısına sahip çekirdekler incelendiğinde ${}_{9}F^{19}$ çekirdeğine kadar herhangi bir çelişki yoktur. 9 proton sayılı ${}_{9}F^{19}$ çekirdeğinin ölçülen spini $1/2$ ' dir.

Oysa tabakalı modele göre, bu çekirdeğin tek protonu $1d_{5/2}$ seviyesinde olduğundan spininin $5/2$ olması beklenirdi. Bu durum 3. kabul ile açıklanabilir. ${}_{11}\text{Na}^{23}$ çekirdeğinin ise, $1d_{5/2}$ seviyesinde 3 protonu vardır. 9. ve 10. protonlar çift teşkil edeceğinden bu çekirdeğe ait mümkün iki konfigürasyon, $5/2$ spinli $(1d_{5/2})^3$ konfigürasyonu ya da $1/2$ spinli $(1d_{5/2})^2(2s_{1/2})^1$ konfigürasyonudur. Oysa ${}_{11}\text{Na}^{23}$ çekirdeğinin gözlenen spini $3/2$ dir. Bu durum ciddi bir çelişkidir. Bu çekirdeğin gözlenen $2,2175\mu_N$ magnetik momenti ise $d_{3/2}$ ' den ziyade $p_{3/2}$ seviyesi ile uyumludur. Bu durumda 1. kabul ve 3. kabul dışlanmıştır. ${}_{11}\text{Na}^{23}$ çekirdeğinin $1d_{5/2}$ seviyesindeki 3 protonu $3/2$ spini verecek şekilde çiftlenebilirler. Buna rağmen kural olarak $5/2$ spinli seviyenin enerjisi daha düşüktür.

4.1.2. 20 ile 28 Arasında Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları

$7/2$ spini, 20 ve 28 arasında proton yada nötron sayısına sahip tüm tek çekirdeklerde ortaya çıkar. İkinci ciddi çelişki ${}_{25}\text{Mn}^{55}$ çekirdeğinde gözlenir. Bu çekirdeğin beklenen proton konfigürasyonu $7/2$ spinini veren $(1f_{7/2})^5$ şeklindedir. Oysa bu çekirdek için ölçülen spin $5/2$ ' dir ve ölçülen magnetik moment değeri $3,468\mu_N$, d seviyesi ile uyumludur. ${}_{27}\text{Co}^{59}$, un beklendiği gibi spini $7/2$ ' dir. $1f_{7/2}$ seviyesindeki bir proton boşluğundan kaynaklanması beklenen magnetik momenti, ölçülen magnetik moment $4,62\mu_N$ ile uyumludur.

4.1.3. 28 ile 50 Arasında Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları

28 nükleondan daha fazla nükleon sayısına sahip çekirdeklerde tek parçacık tabaka modeline göre belirlenen seviye sıralaması $2p_{3/2} 1f_{5/2} 2p_{1/2} 1g_{9/2}$ şeklindedir.

N ya da $Z = 28$ de, $1f_{7/2}$ seviyesi tamamen doludur ve bu sayıda proton ya da nötron içeren çekirdeklerde spin sıfırdır. Deneysel veriler bu bölgede $2p_{3/2}$ ve $1f_{5/2}$

seviyelerinin çaprazlandığını ve hemen hemen aynı enerjiye sahip olduğunu göstermektedir. Bu durum elde ettiğimiz Şekil 3.10(b)' den de açık olarak görülmektedir. Bu iki seviyenin dolması için çekirdeğin nükleon sayısının 38 olması gerekir. $5/2$ spinli ${}_{37}\text{Rb}^{85}$ ve ${}_{30}\text{Zn}^{67}$ çekirdekleri hariç, 29 ile 37 arasında nükleon sayısına sahip tüm tek çekirdeklerin ölçülen spinleri $3/2$ dir.

38 ve 50 arasında $2p_{1/2}$ ve $1g_{9/2}$ seviyeleri nükleonlar tarafından doldurulur. Bu bölgede ölçülen magnetik momentler, $2p_{1/2}$ ve $1g_{9/2}$ durumları için uyumludur. 39 protonlu ${}_{39}\text{Y}^{89}$ çekirdeği beklendiği gibi $1/2$ spinine sahiptir. 41 nötronlu ${}_{32}\text{Ge}^{73}$ çekirdeğinin $1g_{9/2}$ seviyesinde bir nötronu ve 41 protonlu ${}_{41}\text{Nb}^{93}$ çekirdeğinin $1g_{9/2}$ seviyesinde bir protonu vardır. Bu çekirdeklerin spinleri beklendiği gibi $9/2$ dir. 43 nötronlu veya 47 protonlu çekirdeklerde $1/2$ spini tekrar ortaya çıkar. ${}_{47}\text{Ag}^{107}$, nin $1g_{9/2}$ durumunda $9/2$ spinini verecek şekilde yedi protonu beklenirken, spini $1/2$ olarak bulunmuştur. Bunun sebebi, çiftlenme enerjisinin j ' nin artan değeri ile artmasıdır. Tek protonun $2p_{1/2}$ seviyesinde bulunması, enerji bakımından çok daha uygundur. $2p_{1/2}$ seviyesindeki bu tek proton gözlenen spin değerine sahiptir. 47 nükleondan yukarıya doğru çıkıldıkça tek proton ve tek nötron sayılı diğer çekirdekler için spinler benzerdir. Gümüşün $1/2$ spinli ${}_{47}\text{Ag}^{107}$ ve ${}_{47}\text{Ag}^{109}$ izotopları hariç, ${}_{36}\text{Kr}^{83}$, ${}_{38}\text{Sr}^{87}$ ve ${}_{49}\text{In}^{113}$ gibi çekirdekler için beklendiği gibi spin $9/2$ ' dir.

4.1.4. 50 ile 82 Arasında Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları

50 ile 82 nükleon sayısı arasındaki bu bölgedeki seviye sıralaması Şekil 3.8(b)' den de görüldüğü gibi, $1g_{7/2}$ $2d_{5/2}$ $2d_{3/2}$ $3s_{1/2}$ $1h_{11/2}$ şeklindedir.

$1h_{11/2}$ seviyesi bu bölgede nükleonlar tarafından doldurulur. Ancak $11/2$ spini hiçbir kararlı çekirdek için gözlenmemiştir.

Antimonun iki kararlı izotopu vardır. Bunlardan ${}_{51}\text{Sb}^{121}$, $7/2$ beklenirken $5/2$ spinine, ${}_{51}\text{Sb}^{123}$, $7/2$ spinine sahiptir. ${}_{53}\text{I}^{127}$ stabil izotopu $5/2$ spinine, radyoaktif

${}_{53}I^{129}$, $7/2$ spinine sahiptir. Bu durumlar, Şekil 3.10(b)' de elde ettiğimiz seviyelerden de görüldüğü gibi $1g_{7/2}$ ve $2d_{5/2}$ seviyelerinin hemen hemen aynı enerjiye sahip olması nedeniyle açıklanabilir.

55 ve 57 protona sahip çekirdekler $1g_{7/2}$ seviyesi ile uyumlu spin ve magnetik moment değerleri vermektedir. 58 protonlu çekirdeklere $1g_{7/2}$ seviyesi tamamen doludur ve 58' den sonra beklendiği gibi $5/2$ spinli çekirdekler gözlenir. 64 protonlu çekirdeklere $1g_{7/2}$ ve $2d_{5/2}$ seviyeleri doludur ve 64' ten sonra Şekil 3.10(b)' ye göre $3/2$ spini gözlenmelidir. ${}_{65}Tb^{159}$ çekirdeğinin ölçülen spini $3/2$ iken ${}_{67}Ho^{165}$ çekirdeği $7/2$ spini vermektedir.

Nötronlar için durum biraz farklıdır. 51 nötronlu ${}_{40}Zr^{91}$ çekirdeğinin, 53 nötronlu ${}_{42}Mo^{95}$, 55 nötronlu ${}_{42}Mo^{97}$ ve ${}_{44}Ru^{99}$, 57 nötronlu ${}_{44}Ru^{101}$ izotoplarının spini $7/2$ beklenirken $5/2$ olarak ölçülmüştür. Bu durum yine $1g_{7/2}$ ve $2d_{5/2}$ seviyelerinin aynı enerjiye sahip olmaları ile açıklanabilir. Şekil 3.10(b)' de nötronlar için elde ettiğimiz seviye düzeni ile Şekil 3.8(b) görülen seviye düzeni arasında, bu bölgede farklılık vardır. Görüldüğü gibi, Şekil 3.10(b)' de, Şekil 3.8(b)' den farklı olarak $3s_{1/2}$ seviyesi, $2d_{5/2}$ ile $2d_{3/2}$ seviyelerinin arasına girmiştir. Göze çarpan bir durum 63 ile 75 arasında, ${}_{48}Cd^{111}$, ${}_{50}Sn^{117}$, ${}_{52}Te^{123}$, ${}_{54}Xe^{129}$ gibi tüm tek nötronlu çekirdeklerin spininin $1/2$ olmasıdır. Ayrıca ${}_{56}Ba^{137}$ çekirdeğinin beklenen spini $11/2$ iken, ölçülen spini $3/2$ dir. Bu durum çekirdeklerin $1h_{11/2}$ seviyesindeki yüksek çiftlenme etkisi nedeniyle $3s_{1/2}$ ve $2d_{3/2}$ seviyesindeki daha düşük çiftlenme enerjisini tercih etmesi olarak açıklanabilir. Tek nükleon daha düşük bir spin ve daha büyük bir kararlılığa sahip olacak daha yüksek enerji seviyesine gider. Böylece $1h_{11/2}$ seviyesi, tek nükleon $3s_{1/2}$ veya $2d_{3/2}$ seviyesine giderken, çiftler ile doldurulabilir.

Ayrıca, Şekil 3.10(b)' de elde ettiğimiz seviye düzenine göre $3s_{1/2}$ seviyesinde bir nötronu bulunan, 65 nötronlu ${}_{50}Sn^{115}$, ${}_{48}Cd^{113}$ ve radyoaktif ${}_{52}Te^{117}$ çekirdeklerinin

beklenen $1/2$ spinini vermesi nötronlar için elde ettiğimiz bu seviye düzeninin doğru olabileceğini göstermektedir.

4.1.5. 82 ile 126 Arasındaki Tek Nükleon Sayılı Çekirdek Durumları

Bu bölgede seviye sıralaması Şekil 3.9(b)' den de görüldüğü gibi $1h_{9/2}$ $2f_{7/2}$ $2f_{5/2}$ $3p_{3/2}$ $3p_{1/2}$ $1i_{13/2}$ şeklindedir. $1i_{13/2}$ seviyesi çok büyük açısal momentuma ve çiftlenme enerjisine sahip olduğundan bu bölgede $13/2$ spini gözlenmemiştir. Bu seviyede tek sayıda nükleonu bulunan $_{78}Pf^{195}$ ve $_{82}Pb^{207}$ çekirdekleri $13/2$ spini yerine, daha düşük açısal momentum ve çiftlenme enerjisine sahip olacak şekilde $1/2$ spini verirler.

$_{83}Bi^{209}$ çekirdeğinin tabakalı modele göre $1h_{9/2}$ seviyesinde bir protonu vardır ve beklediği gibi spini $9/2$ ' dir. $_{56}Ba^{139}$, $_{60}Nd^{143}$, $_{60}Nd^{145}$, $_{62}Sm^{147}$, $_{62}Sm^{149}$ çekirdekleri içinde $9/2$ spini beklenirken $7/2$ spininin ölçülmesi, Şekil 3.10(b)' den de görüldüğü gibi $1h_{9/2}$ ve $2f_{7/2}$ seviyelerinin birbirine yakın enerjide olduğunu gösterir. $_{68}Er^{167}$ çekirdeğinin $2f_{7/2}$ seviyesinde bir nötron eksikliği vardır ve beklediği gibi spini $7/2$ ' dir. $_{76}Os^{187}$ çekirdeğinin ise $3p_{1/2}$ seviyesinde bir nötronu vardır ve spini beklediği gibi $1/2$ olarak ölçülmüştür.

Şekil 3.8(b) ile Şekil 3.10(b)' deki seviye düzenlerindeki ikinci farklılık, Şekil 3.10(b)' de $2f_{5/2}$ seviyesi $3p_{3/2}$ ile $3p_{1/2}$ seviyeleri arasına girmiştir. 103 nötronlu $_{70}Yb^{173}$ çekirdeğinin Şekil 3.8(b)' den de beklediği gibi spini $5/2$ olarak ölçülmüştür. Ancak Şekil 3.10(b)' ye bakıldığında $2f_{5/2}$ ile $3p_{3/2}$ seviyeleri birbirine çok yakın enerjilerde bulunurlar. $_{70}Yb^{173}$ çekirdeği için Şekil 3.10(b)' ye göre beklenen $3/2$ spini yerine $5/2$ bulunması bu şekilde açıklanabilir.

Tabakalı model tek tek çekirdeklerin spinlerini ve magnetik momentlerini belirlemede çok başarılı değildir. Çizelge 4.1' de 5 tek tek çekirdeğin spin ve magnetik momenti verilmiştir. Tek tek çekirdeğin spinini tahmin etmek için iki tek nükleonun

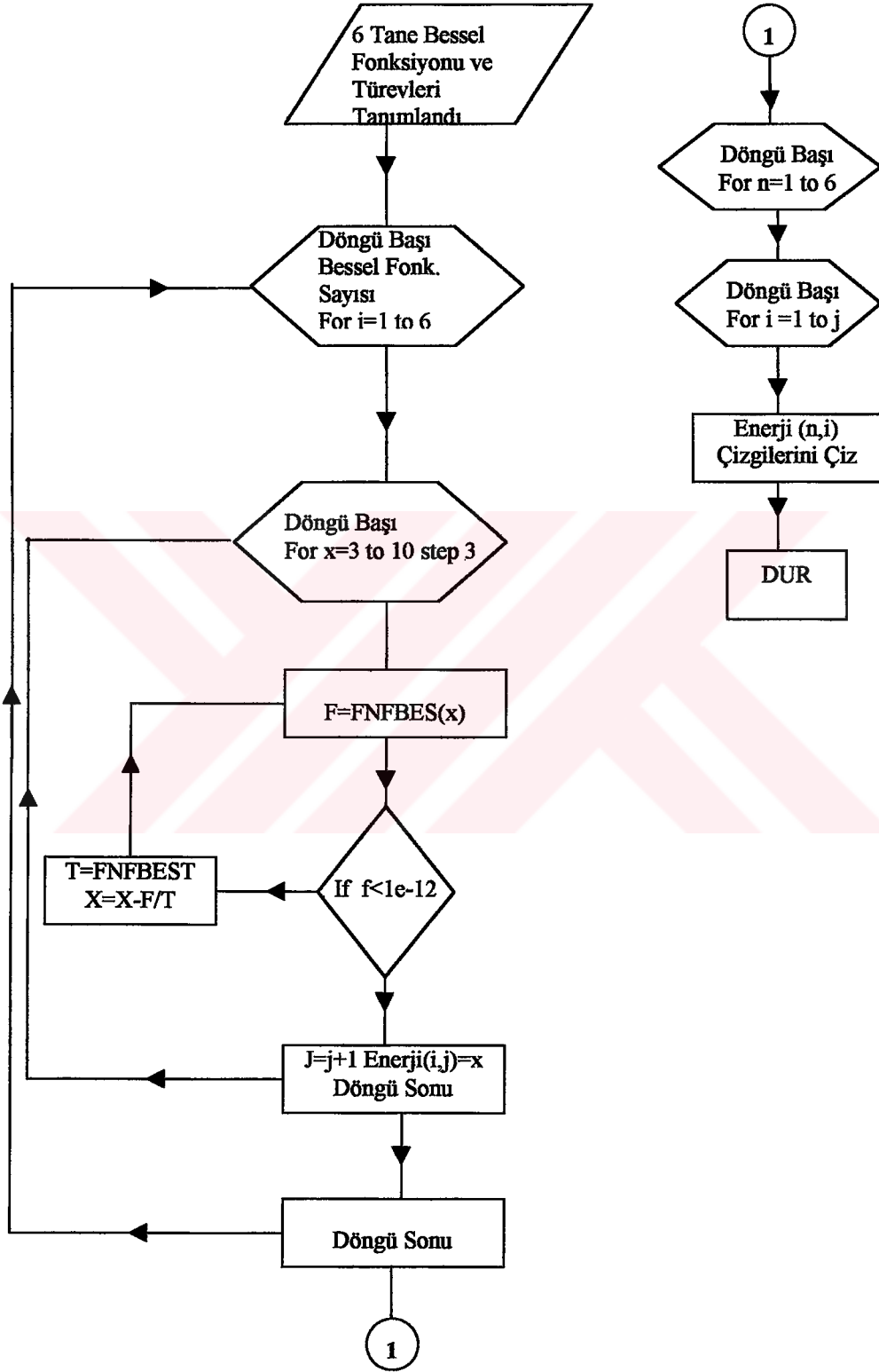
açışal momentumu arasındaki çiftlenmeyi göz önünde tutmak gerekir. Çizelge 4.1' den öngörülen magnetik momentlerin deneysel değerlerle uyumlu olduğu görölmektedir.

Çizelge 4.1. Tek tek 5 çekirdek için spin ve magnetik moment değerleri
KAYNAK: Mayer 1949

	Nötron seviyesi	Proton seviyesi	Spin	μ Deneysel	μ Hesaplanan
${}_3\text{Li}^6$	$p_{3/2}$	$p_{3/2}$	1	0,82	0,63
${}_5\text{B}^{10}$	$p_{3/2}$	$p_{3/2}$	3	1,80	1,88
${}_7\text{N}^{14}$	$p_{1/2}$	$p_{1/2}$	1	0,40	0,37
${}_{11}\text{Na}^{22}$	$d_{5/2}$	$d_{5/2}$	3	1,75	1,73
${}_{19}\text{K}^{40}$	$f_{7/2}$	$d_{3/2}$	4	-1,29	-1,70

EKLER

Ek-1 Sonsuz kare kuyu potansiyeli için enerji seviyelerinin elde edilmesinde kullanılan bilgisayar programının akış diyagramı



KAYNAKLAR

- ANONİM. 1985-1986. Handbook of Chemistry and Physics. CRC Press, USA, s.A-100, s.A-103
- ARYA, A. P. 1970. Fundamental of Nuclear Physics. Allyn&Bacon Inc., USA, s.355-372
- AYGÜN, E. ve M. ZENGİN.1992. Kuantum Fiziği. Bilim Yayınevi, Ankara, s.92-232
- BURCHAM, W. E. 1973. Nuclear Physics. Longman, England, s.246-253
- DAS, A., T. FERBEL. 1994. Introduction to Nuclear Physics. John Wiley and Sons, USA, s.51-64
- DOST, M., W. R. HERING, W. R. SMITH. 1966. Shape of the Pb^{208} Nuclear Potential. Nuclear Physics. A93, s.357-369
- ELTON, L. R. B. 1965. Introductory Nuclear Theory. Sir Isaac Pitman and Sons, London, s.36-39
- ENGE, H. 1966. Introductory to Nuclear Physics. Addison-Wesley Publishing Company, USA, s.143-153
- GREEN, A.E.S., K. LEE. 1955. Energy Eigenvalues for a Spherical Well with an Exponentially Diffuse Boundary. Physical Review. 99, s.772-777
- GREEN, A.E.S. 1956. Approximate Analytical Wave Functions for the Nuclear Independent Partical Model. Physical Review. 104, s.1617-1625
- GREİNER, W. ve J. A. MARUHN. 1995. Nuclear Models. Springer-Verlag, New York, s.237-246
- HEYDE, K. L. G. 1994. The Nuclear Shell Model. Springer-Verlag, New York, s.65-71
- HODGSON, P. E., E. GADIOLI, E. G. ERBA. 1997. Introductory Nuclear Physics. Clarendon Press, New York, s.321-333, 603-672
- HUGHES, D. J., D. SHERMAN. 1950. Fast Neutron Cross Sections and Nuclear Shells. Physical Review. 78, s.632-633
- KRANE, K. S. 1988. Introductory Nuclear Physics. John Wiley and Sons, New York, s.117-131
- MAYER, M. G. 1949. Nuclear Configurations in the Spin-Orbit Coupling Model. Physical Review. 78, s.16-21

- POVH, B., K. RITH, C. SCHOLZ, F. ZETSCHE. 1995. Particle and Nuclei. Springer-Verlag, New York, s.231-239
- PRESTON, M. A. ve R. K. BHADURI. 1975. Structure of the Nucleus. Addison-Wesley Publishing Company, USA, s.120, 217-239
- RIZAOĞLU, E. 1994. Kuantum Mekanik. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi, Cilt 3A/I, İstanbul, s.119-161
- SCHIFF, L. I. 1955. Quantum Mechanics. McGraw-Hill, Tokyo, s.69-80
- SPIEGEL, M. R. 1968. Mathematical Handbook of Formulas and Tables (Schaum's Outline Series). McGraw-Hill, USA, s.136-156
- WILLIAMS, W. S. C. 1992. Nuclear and Particle Physics. Clarendon Press, New York, s.131-152
- WONG, C.Y. 1966. Additional Evidence of Stability of the Superheavy Element $^{310}_{126}$ According to the Shell Model. Physics Letters. 21, 688-690
- WONG, S. S. M. 1996. Introductory Nuclear Physics. Prentice-Hall, USA, s.279-287
- WOODS, R. D., D. S. SAXON. 1957. Physical Review. 95, s.577
- YAVUZ, İ. 1981. Fizikte Matematik Metotlar (Ders Notları). Ankara, s.151-169

TEŐEKKÖR

Tezimin her aŐamasında emeği geöen, çalıŐmalarımnda bilgi ve tecrűbesinden her zaman yararlandığım, desteğini ve yardımını hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli danıŐman hocam Doç. Dr. Z. Gökay KAYNAK' a teŐekkür ederim. Ayrıca tezimde bana destek olan ve yardım eden meslektaŐım AraŐ. Gör. Ali GÖLTEKİN' e ve diğer araŐtırma görevlisi arkadaşlarıma, manevi desteklerini gördüğüm ailem ve Tanzer AKKAYA' ya teŐekkür ederim.



