



T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEK FREKANS KESTİRİM YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ

Taner ERGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA 2006

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEK FREKANS KESTİRİM YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ

Taner ERGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA 2006

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEK FREKANS KESTİRİM YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ

Taner ERGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Erdoğan DİLAVEROĞLU
(Danışman)

.....

.....

ÖZET

Sinyal işleme literatüründe sıklıkla karşılaşılan gürültü içeren tekil bir sinüzoidde ait frekans kestirimi, çalışmamızın temelini oluşturmaktadır. Bu amaçla mevcut frekans kestirim metotları ayrıntılı olarak incelenerek karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda ‘‘ Eğrilmiş Ayrık Fourier dönüşümü ‘‘ metodu kullanılarak gerçekleştirilen frekans kestirimi işleminin, diğer frekans kestirim metotlarının yanında amaçlanan frekans değerinin tahmin edilmesi yönünden daha verimli sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Frekans kestirimi , Eğrilmiş Ayrık Fourier Dönüşümü , Sinyal-Gürültü Oranı , En büyük Olabilirlik Kestiricisi.

ABSTRACT

This thesis deals with the estimation of the frequency of single sinusoid with noise which is frequently seen in signal processing literature. For this aim, the detailed comparison of the present frequency estimation methods were studied. Finally, we observed that the method of frequency estimation processing based on “Warped Discrete Fourier Transform” has accurate results compared to the other frequency estimation methods.

Key Words : Frequency Estimation , Warped Discrete Fourier Transform, Signal-to-Noise Ratio (SNR), Maximum Likelihood Estimator (MLE)

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III-IV
SİMGELER DİZİNİ.....	V-VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	IX
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	2
2.1 SİNYALLERİN SINIFLANDIRILMASI.....	2
2.1.1 Sürekli zaman sinyalleri:	2
2.1.2 Ayrık zamanlı sinyaller:	2
2.1.3 Analog ve Sayısal Sinyaller :	2
2.1.4 Gerekirci ve Rasgele Sinyaller:.....	2
2.1.5 Kuantalanmış Ve Kodlanmış Sinyaller	3
2.1.6 Periyodik Sinyaller:	3
2.1.7 Temel Sinyaller:	3
2.2 ÖRNEKLEME TEOREMİ:.....	4
2.3 Z DÖNÜŞÜMÜ	5
2.3.1 Z – Dönüşümünün Özellikleri:.....	6
2.3.2 Ters Z - Dönüşümü.....	7
2.4 FREKANS KESTİRİM YÖNTEMLERİ	8
2.4.1 Tekil-Ton Frekans Kestirimi.....	8
2.4.2 Çoğul-Harmonik Frekans Kestirimi	9
2.4.3 Çoğul-Ton Frekans Kestirimi	9
2.5 FREKANS KESTİRİM ALGORİTMALARI.....	10
2.5.1 Blok Frekans Kestiriciler	10
2.5.1.1 En Büyük Olabilirlik Frekans Kestiricisi.....	10
2.5.1.2 Yaklaşık En büyük Olabilirlik Teknikleri.....	11
2.5.1.3 Fourier Katsayı Teknikleri	12

2.5.1.4 Genelleştirilmiş Faz Aradeğerleme Kestiricisi.....	12
2.5.1.5 Örnek Ortak Değişinti Metotları	13
2.5.1.6. Sinyal Alt-uzay Metotları.....	15
2.5.1.7 Gürültü Alt-uzay Metotları	15
2.5.2 Hızlı Blok Frekans Kestiriciler	17
2.5.3 On-Line Kestiriciler.....	17
3. MATERYAL VE YÖNTEM	18
3.1 Gürültülü Bir Sinüzoide Ait Frekansın Doğrusal Bağlanım	18
3.1.1 Yüksek Değerli SNR Yaklaşımı	18
3.1.2 Renkli Gürültü İçeren Doğrusal Bağlanım Frekans Kestiricisine Ait Değişinti	22
3.2 Hızlı ve doğru bir tekil frekans kestiricisi	25
3.2.1 Kestiricinin Elde Edilmesi	26
3.3 Eğrilmiş Ayrık Fourier Dönüşümü Kullanılarak Frekans Kestirimi	32
3.3.1 Eğrilmiş Ayrık Fourier Dönüşümü.....	33
3.3.2 Tekil Sinüzoid Durumu	38
4 . ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA	48
KAYNAKLAR.....	49
EKLER.....	51

TEŞEKKÜR

ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER DİZİNİ

t	– Zaman (san)
$x(t)$	– x Sinyali
$y(t)$	– y Sinyali
$i_R(t)$	– Akım Sinyali
$x(n)$	– Sinyal Dizisi
N	– Dizi Boyutu
$u(n)$	– Birim Basamak Sinyal Dizisi
$\sigma(n)$	– Birim İmpuls Sinyal Dizisi
w	– Açısal Hız (rad / san)
f	– Frekans (Hz)
f_c	– Band Genişliği
T	– Periyot (san)
$X[z]$	– Kompleks Deęiřkenli Sinyal
r	– Genlik
φ	– Faz Açısı
μ	– Ortalama Değer
ρ	– Sinyal Genliği
ω_0	– Temel Frekans
σ^2	– Değişinti
ε_i	– Gürültü Dizisi
i,j,k	– İndis
Y	– Gürültü Ölçüm Vektörü

- $\{\hat{y}(t)\}$ – Model Dizisi
 $\{y(t)\}$ – Data Dizisi
 $R_{\varepsilon\varepsilon}$ – Ortak Değişinti
 I_y – Periodogram
 V – Görelî Konum
 \hat{R}_{yy} – Ortak Değişinti Matrisi
 \bar{y} – Yanlı Ortak Değişinti Kestircisidir
 V – Temel Frekansa Bağlı Vektör
 v^* – V Vektörünün Kompleks Eşlenik Ters Fonksiyonu
 $P(\omega)$ – Minimum Değişinti Kestircisi
 e – Öz-vektör
 $v_Q(n)$ – Eşdeğer Faz Gürültüsü
 ω_t – Pencere Fonksiyonu
 Ω – Eğrilme Frekans (radyan / örnek)
 a – Eğrilme Parametresi
 Ω_w – Eğrilme Frekans (radyan / san)
 $\hat{\Omega}_0$ – Frekans Kestirim Değeri (radyan / örnek)
 Q – İterasyon Sayısı
 $u[n]$ – Beyaz Gaussyen Gürültüsü

KISALTMALAR

CRB	: Cramer – Rao Sınırı
DFT	: Ayrık Fourier Dönüşümü
FFT	: Hızlı Fourier Dönüşümü
MLE	: En Büyük Olabilirlik Kestiricisi
MSE	: Ortalama Karesel Hata
MUSIC	: Çoğul Sinyal Sınıflandırması
NDFT	:Düzensiz Olmayan Ayrık Fourier Dönüşümü
SNR	: Sinyal-Gürültü Oranı
WDFT	: Eğrilmiş Ayrık Fourier Dönüşümü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil – 1 Birim Basamak	3
Şekil – 2 Birim İmpuls	3
Şekil – 3 Sinyal Band Genişliği	4
Şekil – 4 Frekans Kestirim Penceresi.....	31
Şekil – 5 Frekans Kestirim Performansları.....	31
Şekil – 6 (a) ‘nın Farklı Değerleri İçin Frekans Haritalaması	36
Şekil – 7 16 Noktalı WDFT Kullanılarak Eğrilme Parametresi $a=0.7e^{j\pi/4}$ İçin z- Düzlemindeki Frekans Örnekleme.....	37
Şekil – 8 Eğrilme Parametresinin Genliğinin Farklı Yüzdeler İçin Sinyal Uzunluğuna Göre Değişimi.....	39
Şekil – 9 WDFT Algoritmasının İkinci Adımını Gösteren Grafik.....	40
Şekil - 10 WDFT Algoritması İle Diğer Algoritmaların Karşılaştırılması.....	44
Şekil – 11 WDFT ile DTFT Yöntemlerinin Karşılaştırılması.....	47

ÇİZELGELER DİZİNİ

Tablo – 1 ω_t Pencere Fonksiyonunun Belirlenmesi	16
Tablo – 2 Spektral Ana Lobunda Bulunan Noktaların Yüzdelik Değerine Göre β ve γ Değerleri.....	39
Tablo – 3 Frekans Kestirim Algoritmalarına Ait Komplekslik Karşılaştırılması.....	46

1. GİRİŞ

Modern kestirim teorisi pek çok elektronik sinyal işleme sisteminde kullanılan temel süreçlerden birini oluşturmaktadır. Bu sistemler içerisinde; radar, sonar, konuşma, görüntü işleme, biomedikal, haberleşme, kontrol ve sismoloji sayılabilir. Bu sistemlerin tümünde ortak problem bir grup parametreye ait değerlerin kestirimidir.

Gürültü tarafından bozulmuş bir dataya ait sinüzoidal parametre kestirimi sinyal işleme literatüründe sıklıkla karşılaşılan bir problemdir. Pek çok uygulamada kesin bir frekans kestirimi zorunludur. Bu yüzden gürültü içeren tekil bir sinüzoidde ait frekansın en doğru ve etkin biçimde kestirimi oldukça önemli bir problem haline gelmiştir. En uygun frekans kestirim algoritmasının belirlenmesinde ana etken bilgisayar ortamında en verimli şekilde çalışan algoritmanın elde edilmesidir.

Bu çalışmada, bahsedilen problemin çözümüne yönelik günümüze kadar geliştirilmiş olan frekans kestirim yöntemleri ve bu yöntemlere ait algoritmalar incelenmiştir. Bu yöntemler içinde oldukça güncel olan, Eğrilmiş Ayrık Fourier Dönüşüm (WDFT) metodu kullanılarak frekans kestirimi yöntemi ile diğer frekans kestirim yöntemlerinin karşılaştırılması üzerinde durulmuştur.

Yapılan karşılaştırmalar sonucunda frekansın en etkin ve doğru şekilde ve aynı zamanda en az işlemle gerçekleştirilebilmesi için kullanıma en uygun frekans kestirim yönteminin belirlenmesi üzerinde çalışılmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1 SİNYALLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bir sinyal, fiziksel bir büyüklüğü veya değişkeni temsil eden, onun zamanla değişimini gösteren ve davranışına ilişkin bilgi içeren bir fonksiyondur.

2.1.1 Sürekli zaman sinyalleri:

“ t ” (zaman) değişkeninin sürekli olması durumunda $x(t)$ sinyali analog sinyal olarak belirlidir. Örneğin bir RC devresindeki kondansatörün uçlarındaki gerilim $V_c(t)$ veya dirençten akan akım $i_R(t)$ sinyalleri sürekli zaman sinyalleridir.

2.1.2 Ayrık zamanlı sinyalleri:

“ t ” ayrık bir değişken ise $x(t)$ sinyali ayrık zamanlı bir sinyaldir. Ayrık zamanlı bir sinyal, n bir tamsayı olmak üzere $x(n)$ biçiminde bir sayı dizisi ile gösterilebilir. $n=0,1,2,\dots, (N-1)$ için sonlu bir dizi olan $x(n)$ sinyali $N \times 1$ boyutlu bir vektör olarak de temsil edilebilir.

2.1.3 Analog ve Sayısal Sinyaller :

$X(t)$ sürekli zaman sinyali $a \leq x(t) \leq b$ aralığında herhangi bir değer alabiliyorsa, sinyal analogdur. Eğer bir $x(n)$ ayrık zamanlı sinyali yalnız belli sayıda ayrık değer alabiliyorsa $x(n)$ sayısal bir sinyaldir.

2.1.4 Gerekirci ve Rasgele Sinyaller:

Herhangi bir anda alacağı değer, t 'nin bilinen bir fonksiyonuyla modellenmiş ve belirli olan sinyaller gerekirci sinyallerdir. Örneğin;

$$X(t) = A_0 \sin(2\pi 50t) + A_7 \cos(2\pi 100t)$$

Sinyalinin t 'nin her değeri için alacağı değer hesaplanabilir ve bellidir. Rasgele sinyaller ise her “ t ” anındaki değeri bir rastlantı değişkeni olan sinyallerdir.

2.1.5 Kuantalanmış Ve Kodlanmış Sinyaller:

Herhangi bir ayrık zaman sinyalinin sürekli genlik değerleri belli bir kurala göre (bir küçük tam sayıya yuvarla, bir büyük tam sayıya yuvarla v.b.) ayrık hale getirilmiş ise bu işleme “kuantalama” ve bu yeni oluşan dizi veya sinyale ise “kuantalanmış sinyal” denir. Aslında kuantalanmış sinyaller, sayısal sinyallerin özel bir halidir. Her bir kuantum seviyesi bir tam sayıya karşılık getirilir ve bu tam sayılar (yani sinyalin genlikleri) ikilik tabana göre yazılırsa “kodlanmış sinyal” elde edilir.

2.1.6 Periyodik Sinyaller:

$$x(n + N) = x(n) \quad N \in \mathbb{Z} \text{ ve } m \in \mathbb{Z}$$

$$x(n + m.N) = x(n)$$

$x(n)$, temel periyodu N olan periyodik bir sinyaldir.

Enerji Sinyali:

$0 < E < \infty$ ise; $x(n)$ bir enerji sinyalidir. Bu durumda $P = 0$ olur.

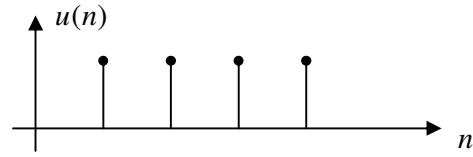
Güç Sinyali:

$0 < P < \infty$ ise; $x(n)$ bir güç sinyalidir. Bu durumda $E = \infty$ olur.

2.1.7 Temel Sinyaller:

Birim basamak $u(n)$,

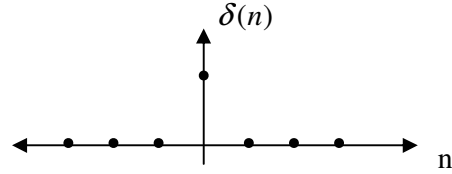
$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Şekil – 1 Birim basamak

Birim impuls (dürtü) $\delta(n)$,

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



Şekil – 2 Birim impuls

Zamanda Öteleme İşlemi:

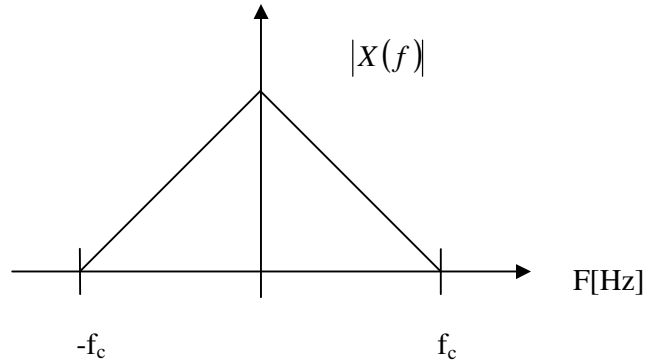
$$u(n-k) = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0, n=k \\ 0, & n-k \neq 0, n \neq k \end{cases}$$

2.2 ÖRNEKLEME TEOREMİ:

$X(t)$ sürekli zaman sinyalinin Fourier dönüşümü aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$X(w) = \int_{t=-\infty}^{\infty} X(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$w = 2\pi f$ [rad/sn] f [Hz] olmak üzere



Şekil – 3 Sinyal band genişliği

$X(t)$ sinyalinin band genişliği f_c 'dir.

$X(t)$ sinyalinde, t sürekli değişkeni $t = nT$, $n \in Z$, $T[sn]$ olacak şekilde ayrık değişken haline getirilebilir. Bu durumda,

$X(t) \longrightarrow X(nT)$, $T = \text{sabit}$ için $X(t) \longrightarrow X(n)$ geçişi ile $X(nT)$ veya $X(n)$ ayrık zamanlı sinyali elde edilir. $X(t)$ 'den $X(n)$ 'e geçiş işlemi "zamanda örnekleme" ile

yapılır ve "T" örnekleme periyodudur. Örnekleme frekansı $f = \frac{1}{T}$ [Hz] olarak hesaplanır.

Örnekleme teoremi, $X(t)$ sinyalinin $X(n)$ örneklerinden tekrar elde edilebilmesi için (bozulma ve bilgi kaybı olmadan) hangi hızda örneklenmesi gerektiğini ifade eder. Buna göre örnekleme frekansı f ;

f_c , $X(n)$ 'nin band genişliği olmak üzere;

$f \geq 2f_c$ olmalıdır.

Örnekleme periyodu T ise ;

$\frac{1}{T} \geq 2f_c \longrightarrow T \leq \frac{1}{2f_c}$ şartını sağlamalıdır.

2.3 Z DÖNÜŞÜMÜ

Genel bir $x[n]$ ayrık zamanlı işareti için $X[z]$ şu biçimde tanımlanır :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

z değişkeni genelde karmaşık değerli olup, kutupsal gösterimi:

$$z = re^{j\varphi}$$

biçimindedir. Burada r , z 'nin genliği, φ ise z 'nin açısıdır. Tanımlanan z -dönüşümü genellikle çift yanlı (veya iki yanlı) z -dönüşümü olarak adlandırılır. z -dönüşümü ise aşağıdaki gibi tanımlanır :

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Yalnızca $n < 0$ için $x[n]=0$ koşulu sağlandığında tek yanlı ve çift yanlı z -dönüşümleri

eşdeğerdir.

Z – dönüşümünün simgesel gösterimi şöyledir;

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$x[n] \longleftrightarrow X(z)$$

2.3.1 Z – Dönüşümünün Özellikleri:

Doğrusallık:

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$$

$$R' \supset R_1 \cap R_2$$

Zamanda Öteleme:

$$x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

$$R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\}$$

z^n ile Çarpma:

$$z_0^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$$R' = |z_0| R$$

$X[z]$ içerisindeki $z = z_k$ ' daki bir kutup (veya sıfır), z_0^n ile çarpma sonucu, $z = z_0 z_k$ ya kayar ve yakınsama bölgesi $|z_0|$ çarpanıyla genişler veya daralır.

Zamanda Geri Dönüş:

$$x[-n] \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$R' = \frac{1}{R}$$

n ile Çarpma (z' ye göre türev):

$$nx[n] \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R' = R$$

Birikim:

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) = \frac{z}{z-1} X(z) \quad R' \supset R \cap \{|z| > 1\}$$

Katlanma :

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) X_2(z) \quad R' \supset R_1 \cap R_2$$

2.3.2 Ters Z - Dönüşümü

$x[n]$ dizisinin dönüşümü olan $X(z)$ ' den $x[n]$ dizisi elde etmeye, ters z - dönüşümü adı verilir. Ve simgesel olarak şu biçimde gösterilir.

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$$

Laplace dönüşümünde olduğu gibi ters dönüşüm içinde de z -düzleminde entegrasyon içeren bir bağıntı vardır:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

2.4 FREKANS KESTİRİM YÖNTEMLERİ

Frekans kestirimi problemini 3 ana başlık altında toplamamız mümkündür:

Tekil ton frekans kestirimi:

Sinyal tekil, sabit frekanslı bir sinüzoiddir.

Çoğul-harmonik frekans kestirimi:

Sinyal harmonik olarak birbiri ile ilişkili sinüzoidlerin toplamından meydana gelmiştir.

Çoğul-ton frekans kestirimi:

Birbiri ile ilişkisi bulunmayan birden fazla ton söz konusudur. Bu tür bir problem birden fazla hedeften kaynaklanan yayılım ile ortaya çıkan sinyaller için söz konusudur.

Her bir problem için ölçülen dataya uygun farklı bir sinyal modelinin uygulanması gerekir. Bu yüzden oldukça geniş bir literatür mevcuttur. Ancak bu çalışmada birinci tür yani tekil-ton frekans kestirimi problemi incelenmiştir.

2.4.1 Tekil-Ton Frekans Kestirimi

Gürültü içeren tekil-ton frekans kestirim problemi şu şekilde tanımlanır:

$\{y(t)\}$ aşağıda ifade edilen model tarafından üretilmiş olsun:

$$y(t) = \mu + \rho \cos(\omega_0(t - \nu) + \phi) + \varepsilon_t \quad (2.4.1)$$

İfadede μ ortalama değeri; ρ sinyal genliğini; ω_0 sinyalin frekansını; ϕ başlangıç fazını; ε_t , σ^2 değişintisine sahip sıfır ortalamalı rasgele bir gürültü dizisini ifade etmektedir. $\nu = (T - 1)/2$ 'dir.

Bu durumda gürültü içeren tekil-ton frekans kestirim problemi : gerçek değerli μ , ρ , ω_0 , ϕ , σ^2 parametrelerinin $y(t)$ değerleri kullanılarak kestirimi anlamına gelmektedir.

2.4.2 Çoğul-Harmonik Frekans Kestirimi

Frekans bilgisi dönen makine parçaları gibi akustik kaynaklardan elde edilmişse, sinyal üreten sistemdeki doğrusal olmayan etkenler temel bileşene ilave olarak harmonik ve alt-harmonik bileşenlerin ortaya çıkmasına sebep olur. Bu durumda (2.4.1) eşitliği ile ifade edilen model yetersiz kaldığı için ilave harmonik bileşenleri de dikkate alan yeni bir sinyal modelinin kullanılması gerekir. Bu tür bir sinyal modeli aşağıda verilmiştir. $\{y(t)\}$ çoğul-harmonik bir sinyalse şu şekilde modellenebilir:

$$y(t) = \mu + \sum_{j=1}^p \rho_j \cos(j\omega_0(t - \nu) + \phi_j) + \varepsilon_t \quad (2.4.2)$$

ω_0 , sinyalin temel frekansı; ρ_j , j . harmoniğin genliği; ϕ_j , j . harmoniğin başlangıç fazı olmak üzere; $\mu, \sigma^2, \nu, \varepsilon_t$ yukarıda tanımlandığı gibidir.

Bu durumda gürültü içeren çoğul-ton frekans kestirim problemi : $\mu, \rho_j, \omega_0, \phi_j, \sigma^2$ ve p parametrelerinin $y(t)$ değerleri kullanılarak kestirimi anlamına gelmektedir.

2.4.3 Çoğul-Ton Frekans Kestirimi

Bazı koşullarda aynı sinyal içerisinde farklı frekanslara ait bileşenler bulunabilir. Bu durumda tekil- ton tekniklerinin uygulanması mümkün olmakla beraber bu koşullara uygun yeni bir sinyal modelinin geliştirilmesi daha uygun olacaktır. Bu duruma uygun bir sinyal modeli aşağıda verilmiştir. $\{y(t)\}$ çoğul-tonlu bir sinyalse şu şekilde modellenebilir:

$$y(t) = \mu + \sum_{j=1}^p \rho_j \cos(j\omega_j(t - \nu) + \phi_j) + \varepsilon_t \quad (2.4.3)$$

ω_j, j . Sinyal bileşeninin frekansı; ρ_j, j . tonun genliği; ϕ_j, j . tonun başlangıç fazı olmak üzere ; $\mu, \sigma^2, \nu, \varepsilon_t$ yukarıda tanımlandığı gibidir.

Bu durumda gürültü içeren çoğul-ton frekans kestirim problemi : $\mu, \rho_j, \omega_j, \phi_j, \sigma^2$ ve p parametrelerinin $y(t)$ değerleri kullanılarak kestirimi anlamına gelmektedir.

Bu problem Hannan , Rife ve Boorstyn tarafından incelenmiştir (Hannan 1973, Rife ve Boorstyn 1976).

2.5 FREKANS KESTİRİM ALGORİTMALARI

Frekans kestirim algoritmaları;

- 1) Blok Kestiriciler
- 2) Hızlı Blok Kestiriciler
- 3) On-line Kestiriciler olmak üzere sınıflandırılabilir.

2.5.1 Blok Frekans Kestiriciler

2.5.1.1 En Büyük Olabilirlik Frekans Kestiricisi

$\varepsilon_t, R_{\varepsilon\varepsilon}$ ortak değişintisine sahip Gauss gürültüsü olmak üzere elde bulunan sinyale ait frekansın en büyük olabilirlik kestiricisi;

$$L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2} \sqrt{|R_{\varepsilon\varepsilon}|}} \exp \left(-\frac{Y - \hat{Y}(\theta)^T R_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} (Y - \hat{Y}(\theta))}{2} \right) \quad (2.5.1)$$

$$\hat{Y}(\theta) = \begin{bmatrix} \hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{T-1} \end{bmatrix} \quad (2.5.2)$$

$$\hat{y}_t = \mu + \rho \cos(\omega(t - \nu) + \phi) \quad (2.5.3)$$

Y gürültülü ölçüm vektörüdür. Benzer şekilde logaritmik olabilirlik fonksiyonunu da kullanılabilir.

$$l(\theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(|R_{\varepsilon\varepsilon}|) + \left(-\frac{Y - \hat{Y}(\theta)^T R_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} (Y - \hat{Y}(\theta))}{2} \right) \quad (2.5.4)$$

ε_t Beyaz gürültü ise $R_{\varepsilon\varepsilon}$, I birim vektörüne eşit olacaktır. (2.5.4) eşitliğinin maksimize

edilmesi aşağıda verilen ve $\{y(t)\}$ data dizisi ile $\{\hat{y}(t)\}$ model dizisi arasında en küçük kare hatasına eşit olan ifadenin elde edilmesini sağlar.

$$\sum_{t=0}^{T-1} (\hat{y}_t - y_t)^2 \quad (2.5.5)$$

Bu fonksiyonlar genellikle Newton metodunun kullanılması ile maksimize edilir (Storer ve Nehorai 1992).

2.5.1.2 Yaklaşık En büyük Olabilirlik Teknikleri

Periodogram Maksimizasyonu

Ortalama değer μ' ve gürültü ε'_t kompleks değerli ifadelerse aşağıda ifade edilen model kullanılır:

$$y_t = \mu' + \rho \exp i(\omega_0(t-v) + \phi) + \varepsilon'_t \quad (2.5.6)$$

İfadede yer alan ρ ve ϕ değeri bilinmeyen parametrelerdir ve aşağıda verilen eşitlik ile değerleri kestirilir:

$$\hat{\rho} e^{i\hat{\phi}} = \sum_{t=0}^{T-1} y_t e^{-i\omega_0 t} \quad (2.5.7)$$

Böylece en büyük olabilirlik frekans kestirimini veren ifade:

$$\hat{\omega}_p = \max_{\omega} \left| \sum_{t=0}^{T-1} y_t e^{-i\omega t} \right|^2 = \max_{\omega} I_y(\omega) \quad (2.5.8)$$

İfadede I_y, y_t 'ye ait periodogramdır.

2.5.1.3 Fourier Katsayı Teknikleri

Maksimum büyüklükteki kompleks Fourier katsayısının genlik ve fazına dayalı değişik algoritmalar geliştirilmiştir. Bu tür teknikler hesaplama yönünden sade olduğu için oldukça kullanılışlıdır. Yapılması gereken işlemler bir adet hızlı Fourier dönüşümü ile maksimum büyüklükteki katsayıyı bulmak için T boyutundaki araştırmadır. Belirtilmesi gereken önemli bir noktada bu tür kestiricilerin performans değerlendirmesinin az miktardaki hesaplama ile frekansın en büyük olabilirlik kestiricisine yaklaşmasıdır.

2.5.1.4 Genelleştirilmiş Faz Aradeğerleme Kestiricisi

Frekans değerlendirmesini azaltmak amacıyla blok-işleme teknikleri kullanarak, komşu-zaman bloklarından elde edilen maksimum frekans katsayılarının kullanılması ile oluşturulan bir frekans kestirim tekniği geliştirilmiştir.

Metodu oluşturan işlem basamakları şu şekildedir:

- 1) $\bar{\omega}$ Frekansında R uzunluğunda ayrık Fourier Dönüşümü gerçekleştirilir.

$$A = \sum_{t=0}^{R-1} y_t e^{i\bar{\omega}t} \quad B = \sum_{t=0}^{R-1} y_t + V e^{i\bar{\omega}t}$$

$\bar{\omega}$ kestirilecek frekansa yakın bir değerde seçilir. V iki zaman bloğu arasındaki göreli konumdur.

2) $\delta = \arg(B) - \arg(A)$ işlemi gerçekleştirilir.

3) Kestirimi veren ifade:

$$\hat{\omega}_{PIE} = (\delta + 2\pi n)/V \quad (2.5.9)$$

2.5.1.5 Örnek Ortak Değişinti Metotları

Periodogram metodu ile karşılaştırıldığında sinyal spektral kestirim maksimizasyonuna dayanan daha fazla sayıda frekans kestirim metodu mevcuttur. Bu metotların yaklaşık en büyük olabilirlik teknikleri içerisine dahil edilmesi mümkündür. Bu spektral kestirimlerine $\{y(t)\}$ sinyal dizisine ait $M \times M$ boyutundaki örnek Toeplitz ortak değişinti matrisinin özsystem (eigensystem) ayrışımı yoluyla ulaşılır.

$$\hat{R}_{yy} = \begin{bmatrix} \hat{r}_{yy}(0) & \hat{r}_{yy}(1) & \dots & \hat{r}_{yy}(T-1) \\ \hat{r}_{yy}(1) & \hat{r}_{yy}(0) & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{r}_{yy}(1) \\ \hat{r}_{yy}(T-1) & & \hat{r}_{yy}(1) & \hat{r}_{yy}(0) \end{bmatrix}$$

matriste görülen \hat{r}_{yy} :

$$\hat{r}_{yy}(m) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1-|m|} y_t y_{t+m} \quad m=0, \dots, M-1 \quad (2.5.10)$$

\bar{y} , y' nin kompleks eşleniği olmak üzere yanlı ortak değişinti kestiricisidir. Yanlı kestirici \hat{R}_{yy} ' nin negatif tanımlı olmadığından emin olmak için kullanılır.

Barlett spektral kestirimi şu şekilde ifade edilir:

$$P_{Bar}(\omega) = v^*(\omega) \hat{R}_{yy} v(\omega) \quad (2.5.11)$$

(2.5.11) 'nolu ifadede ;

$$v(\omega) = [1 \exp(i\omega) \exp(i2\omega) \dots (i(N-1)\omega)]^T$$

ve v^* , v vektörünün kompleks eşlenik tersini ifade etmektedir.

M=T eşitliği gerçekleştiği takdirde kestirim Periodogram spektral kestiricisi ile aynı olacaktır.

Minimum değişinti spektral kestiricisi diğer bir popüler spektral kestiricidir (Kay 1988).

Bu kestirici şu şekilde tanımlanır:

$$P_{MV}(\omega) = \frac{1}{v^*(\omega) \hat{R}_{yy}^{-1} v(\omega)} \quad (2.5.12)$$

2.5.1.6. Sinyal Alt-uzay Metotları

Sinyal alt-uzay metotları kullanılan p adet en büyük öz-değere (en büyük öz-vektörler) karşılık gelen \hat{R}_{yy} öz-vektörlerini kullanır; p var olduğu farz edilen sinüzoid sayısıdır.

Minimum Değişinti:

Minimum değişinti spektral kestiricisi aşağıda verilen eşitliğin (2.5.12) eşitliğinde

\hat{R}_{yy}^{-1} yerine yerleştirilmesi ile elde edilir.

$$\hat{R}_{MV}^{-1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda_k} e_k e_k^* \quad (2.5.13)$$

Barlett:

Barlett spektral kestiricisi (2.5.11) eşitliğinde \hat{R}_{yy}^{-1} yerine aşağıda verilen eşitliğin yerleştirilmesi ile elde edilir:

$$\hat{R}_{Bar} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k e_k^* \quad (2.5.14)$$

2.5.1.7 Gürültü Alt-uzay Metotları

Gürültü alt-uzay metotları yaklaşık bir ters ortak değişinti matrisi oluşturmak üzere \hat{R}_{yy} 'ye ait $M-p$ en küçük öz-vektörlerini kullanır. Böylece (2.5.12) eşitliği ω üzerinden frekans kestirimlerini elde edebilmek için maksimize edilmiş olmaktadır.

Pisarenko Metodu:

Pisarenko harmonik ayrışımı $(p+1) \times (p+1)$ boyutlarında bir örnek otomatik ortak değişinti matrisi kullanmaktadır (Pisarenko 1973). Bu metot için yaklaşık ters ortak değişinti matrisi şu şekilde ifade edilir:

$$\hat{R}_{Pis}^{-1} = e_{p+1} e_{p+1}^* \quad (2.5.15)$$

MUSIC:

Çoğul sinyal sınıflandırılması (MUSIC) M , $p+1$ 'den büyük olmak üzere Pisarenko yaklaşımının geliştirilmiş bir halidir.

$$\hat{R}_{MUSIC}^{-1} = \sum_{k=p+1}^M e_k e_k^* \quad (2.5.16)$$

Tablo – 1 ω_t Pencere Fonksiyonunun Belirlenmesi

Araştırmacı	$\omega_t ; t=0, \dots, T-1$
Lank, Reed ve Polon (1973)	$\frac{1}{T-1}$
Kay (1989)	$\frac{6t(T-t)}{T(T^2-1)}$
Lovell ve Willimson (1992)	$\frac{6t(T-t)}{T(T^2-1) z_t z_{t-1}^* }$
Clarkson, Kootsookos ve Quinn (1994)	$\frac{\sinh(T\theta) - \sinh(t\theta) - \sinh((T-t)\theta)}{(T-1)\sinh(T\theta) - 2\sinh(\frac{1}{2}T\theta)\sinh[\frac{(T-1)}{2}\theta] / \sinh(\frac{1}{2}\theta)}$ $\theta = \ln(1 + \sigma^2 / \rho^2 + \sqrt{\sigma^4 / \rho^4 + \sigma^2 / \rho^2})$

2.5.2 Hızlı Blok Frekans Kestiriciler

(2) Eşitliği ile verilen sinyal modelinin kullanımı ‘ağırlıklı faz ortalama frekans kestiricileri’ olarak tanımlanan diğer bir kestirici sınıfının kullanımına olanak tanımaktadır.

Frekans kestiricisine ait ağırlıklı doğrusal öngörü formu aşağıdaki eşitlik ile verilir:

$$\hat{\omega}_0 = \arg \left(\sum_{t=1}^{T-1} \omega_t z_t z_{t-1}^* \right) \quad (2.5.17)$$

Eşitlikte; ω_t pencere fonksiyonunu ve $\arg(z)$ kompleks değerli z 'in fazını ifade etmektedir. Pencere fonksiyonu ω_t 'nin farklı şekillerde seçilmesi ile değişik tipte kestiricilerin tanımlanması mümkündür. Yukarıda verilen tabloda ω_t için farklı seçim olanakları verilmiştir.

2.5.3 On-Line Kestiriciler

Bu kestiricilere örnek olarak Hannan-Huang kestiricisi ve Nehorai ve Porat frekans kestiricisi verilebilir. Bu tür kestiriciler çoğunlukla uyarılama yapılarak frekans izleme probleminin çözümünde kullanıldığı için çalışmamızda ayrıntılarına girilmeyecektir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Gürültülü Bir Sinüzoid Ait Frekansın Doğrusal Bağlanım Metodu ile Kestirimi

Tretter, Gauss gürültüsü ile bozulmuş, düzgün olarak konumlanmış sinyal örnekleri dizisine ait bir sinüzoidin frekans ve fazının kestirimini sağlayan bir metot üzerinde çalışmıştır (Tretter 1985). Bu metot sürekli sinyal fazı üzerinde doğrusal bağlanım ilkesine dayanmaktadır. Yüksek SNR değerlerinde kestirim değerlerini Cramer-Rao sınırlarına özdeştir. Tretter tarafından sunulan doğrusal bağlanım tekniği Cramer-Rao sınırlarının fiziksel anlamlılığına yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Geçmişte yapılan frekans ve faz kestirimi çalışmaları ile kıyaslandığında metodun hesaplama açısından oldukça basit olduğu görülmektedir.

Frekans ve faz kestirimi alanında çeşitli teknikler geliştirilmiştir. En büyük olabilirlik metodu, sürekli-zaman gözlemlerine yönelik olarak tarafından incelenmiştir (Slepian 1957, Kelly, REED ve Root 1960). Yakın zamanda ayrık-zaman gözlemlerine yönelik tekil-ton ve çoğul ton kestirim problemi üzerinde çalışmalar yapılmıştır (Rife ve Boorstyn 1974). Ürün algılamasına dayanan frekans kestirimi için ayrık-zaman tekniği üzerinde çalışılmıştır (Lank, Reed ve Polon 1973). Öz-bağlanımlı modeller kullanılarak ayrık-zaman gözlemlerinden frekans kestirimi konusu üzerinde de pek çok değişik isim çalışma yapmıştır.

3.1.1 Yüksek Değerli SNR Yaklaşımı

Gözlemlenen sinyal şu şekilde ifade edilebilir:

$$r(n) = [1 + v(n)]Ae^{j(\omega_0 nT + \theta)} \quad (3.1.1)$$

eşitlikteki

$$v(n) = \frac{1}{A} z(n)e^{j(\omega_0 nT + \theta)} \quad (3.1.2)$$

beyaz gürültü dizisidir. Dizinin değışintisi:

$$\text{var } v(n) = \sigma_z^2 / A^2 = 1/\text{SNR}_r \quad (3.1.3)$$

$v(n) = v_I(n) + jv_Q(n)$ olduğu düşünülürse;

$$1 + v(n) = \left\{ [1 + v_I(n)]^2 + v_Q^2(n) \right\}^{1/2} \cdot \exp \left\{ j \tan^{-1} \frac{v_Q(n)}{1 + v_I(n)} \right\} \quad (3.1.4)$$

eşitliği elde edilir.

$\text{SNR}_r \gg 1$ için;

$$1 + v(n) \cong \exp \left[j \tan^{-1} v_Q(n) \right] \cong \exp [jv_Q(n)] \quad (3.1.5)$$

böylece;

$$r(n) \cong A e^{j[\omega_0 n T + \theta + v_Q(n)]} \quad (3.1.6)$$

Böylece toplanır gürültü aşağıdaki eşitlik ile, $v_Q(n)$ eşdeğer faz gürültüsüne dönüşmüş olur;

$$\text{var } v_Q(n) = 0.5 \text{var } v(n) = \frac{1}{2 \text{SNR}_r} \quad (3.1.7)$$

ω_0 ve θ 'nin kestirimi için gerekli olan tüm bilgi, faz açısı içinde mevcuttur;

$$\phi(n) = \omega_0 n T + \theta + v_Q(n) \quad (3.1.8)$$

Bu açı, ters tanjant kullanılarak elde edilen $\arg r(n)$ 'in asal değerine bir faz çözülme algoritması uygulanılarak elde edilebilir.

ω_0 ve θ parametreleri en küçük kareler veya doğrusal bağlanım metodu kullanılarak kestirilebilir. Gauss gürültüsü söz konusu olduğunda, en küçük kareler metodu kullanılarak elde edilen kestirimler en büyük olabilirlik kestirimleri ile eşdeğerdir. Karesel hatayı minimize eden parametreler;

$$A = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \left[\Phi(nT) - \hat{\omega}_0 nT - \hat{\theta} \right]^2 \quad (3.1.9)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega}_0 \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \frac{12}{T^2 N^2 (N^2 - 1)} \begin{bmatrix} N & -T(Nn_0 + P) \\ -T(Nn_0 + P) & T^2(Nn_0^2 + 2n_0P + Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} nT\varphi(n) \\ \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \varphi(n) \end{bmatrix} \quad (3.1.10)$$

Eşitlikte;

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} n = (N-1)N/2$$

ve

$$Q = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = (N-1)N(2N-1)/6 \quad \text{'dır.}$$

Bu kestiriciler yansızdır. Ortak değişinti matrisi;

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_0 \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \frac{6}{\text{SNR}_r T^2 N^2 (N^2 - 1)} \begin{bmatrix} N & -T(Nn_0 + P) \\ -T(Nn_0 + P) & T^2(Nn_0^2 + 2n_0P + Q) \end{bmatrix} \quad (3.1.11)$$

$\hat{\theta}$ ve $\hat{\omega}$ değişintileri Cramer-Rao sınırı ile tamamıyla aynıdır (Trees 1968, Rife ve Boorstyn 1974).

Kestiriciler n_0 başlangıç zamanına bağlıdır. n_0 eşitlik (3.1.10) de verilen kare matrisi, köşegen matris haline getirecek şekilde aşağıdaki gibi seçilir;

$$n_0 = -P/N = -(N-1)/2 \quad (3.1.12)$$

Böylece $r(0)$ gözlemlenen dizide merkez örnek haline gelir. n_0 'ın bu şekilde seçilmesiyle aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\hat{\omega}_0 = \frac{12}{TN(N^2-1)} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(n) \quad (3.1.13)$$

Buna karşılık gelen hata ortak değişinti matrisi;

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_0 \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\text{SNR}_r T^2 N(N^2-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2N\text{SNR}_r} \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

Şu halde frekans ve faz kestirim hataları ilintisiz hale gelmiştir. n_0 'ın bu şekilde seçilmesi ile $\hat{\theta}$ ' a ait değişinti de minimize edilmiş olur. Bu seçim 1 ve n fonksiyonlarını $[n_0, n_0 + N - 1]$ aralığında dikgen hale getirir.

Rife ve Boorstyn, Cramer -Rao sınırlarının n_0 başlangıç zamanı üzerindeki bağımlılığını gözlemlemişlerdir.

Anlık sinyal fazında (3.1.13) ve (3.1.14) kestiricilerinin hesaplanması oldukça kolaydır. Düşük SNR değerlerinde basit faz çözme algoritmaları başarılı bir şekilde kullanılabilir. En büyük olabilirlik kestiricileri gözlemlenen sinyal dizisine ait periodogramın tepe değerinin bulunmasını gerektirir. Rife ve Boorstyn tepe değerinin konumuna ait kaba bir tahmin yapmak için önce bir hızlı Fourier dönüşümü yapmayı

daha sonra da kestirimi nümerik bir araştırma yordamı ile doğrulamayı önermişlerdir. Öz-bağlanımlı model tekniği pek çok karmaşık işlem gerektirirken, doğrusal bağlanımlı kestiriciler için yalnızca bir adet teğetik yayı işlemi, faz çözümleme işlemi ve (3.1.13) ve (3.1.14) eşitliklerinde görülen basit toplam işlemlerini yapmak yeterlidir. Bazı uygulamalarda, faz eğimindeki periyodik değişimler veya SNR değerlerinin ani değişimleri gibi anormal durumları gözlemleyebilmek için anlık sinyal fazının grafiğinin çizilmesi oldukça faydalı olmaktadır.

3.1.2 Renkli Gürültü İçeren Doğrusal Bağlanım Frekans Kestiricisine ait Değişinti

(3.1.13) Eşitliği ile verilen doğrusal bağlanım frekans kestiricisi mevcut gürültü dizisinin beyaz gürültü dizisi olmaması durumunda da kullanılabilir. Bu bölümde $\hat{\omega}_0$ değişintisi için $v_Q(n)$ spektral güç yoğunluğu kullanılarak bir formül elde edilecektir.

$v_Q(n)$ 'in öz-ilinti işlevi :

$$R(n) = E\{v_Q(k+n)v_Q(k)\} \quad (3.1.15)$$

$v_Q(n)$ 'in güç spektral yoğunluğu:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)e^{-j\omega nT} \quad (3.1.16)$$

olarak ifade edilirse ve

$$n_0 = -\frac{N-1}{2} = -M \quad (3.1.17)$$

olmak üzere

$$\omega_0 = \frac{12}{TN(N^2 - 1)} \sum_{n=-M}^M n(\omega_0 nT + \theta) \quad (3.1.18)$$

olduğu için;

kestirim hatası şu şekilde ifade edilebilir:

$$\hat{\omega}_0 - \omega_0 = \frac{12}{TN(N^2 - 1)} \sum_{n=-M}^M n v_Q(n) \quad (3.1.19)$$

Böylece:

$$\text{var } \hat{\omega}_0 = E \left\{ \left(\hat{\omega}_0 - \omega_0 \right)^2 \right\} = \left[\frac{12}{TN(N^2 - 1)} \right]^2 \sum_{n=-M}^M \sum_{k=-M}^M nk R(n-k) \quad (3.1.20)$$

Aşağıda ifade edilen pencere işlevi dikkate alındığında :

$$g(n) = \begin{cases} n & |n| \leq M \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.1.21)$$

(3.1.20) Eşitliği şu şekilde yazılabilir:

$$\text{var } \hat{\omega}_0 = \left[\frac{12}{TN(N^2 - 1)} \right]^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) R(n-k) \quad (3.1.22)$$

“Parseval” teoremine göre:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)R(n-k) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} S(\omega) e^{-j\omega k} G(-\omega) d\omega \quad (3.1.23)$$

Formüle: $\omega_s = 2\pi/4$ 'e eşittir. (3.1.23) Eşitliği (3.1.22) eşitliğinde yerine koyulursa;

$$\text{var } \omega_0 = \left[\frac{12}{TN(N^2-1)} \right]^2 \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} S(\omega) |G(\omega)|^2 d\omega \quad (3.1.24)$$

Eşitliği elde edilir. Bu aşamada $G(\omega)$ 'nın hesaplanması gerekmektedir.

$$G(\omega) = \sum_{n=-M}^M n e^{-j\omega nT} = \frac{j}{T} \frac{d}{d\omega} H(\omega) \quad (3.1.25)$$

$$H(\omega) = \sum_{n=-M}^M e^{-j\omega nT} = \frac{\sin \frac{\omega NT}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \quad (3.1.26)$$

(3.1.26) Eşitliği (3.1.25) eşitliğinde gerekli işlemler yapıldıktan sonra yerine koyulacak olursa:

$$G(\omega) = \frac{j}{T \sin \frac{\omega T}{2}} \left[\frac{NT}{2} \cos \frac{\omega NT}{2} - \frac{T}{2} \frac{\sin \frac{\omega NT}{2} \cos \frac{\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right] \quad (3.1.27)$$

(3.1.27) ifadesi bulunur.

(3.1.27) Eşitliği (3.1.24) eşitliğinde yerine koyularak gerekli düzenlemeler yapırsa sonuç olarak aşağıdaki gibi bir eşitlik elde edilir:

$$\hat{\omega}_0 = \left[\frac{6N}{T(N^2 - 1)} \right]^2 \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \frac{S(\omega)}{N^2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}} \left[\cos \frac{\omega NT}{2} - \cos \frac{\omega T}{2} \frac{\sin \frac{\omega NT}{2}}{N \sin \frac{\omega T}{2}} \right] d\omega \quad (3.1.28)$$

3.2 Hızlı ve doğru bir tekil frekans kestiricisi

Gauss gürültüsü içeren tekil bir sinüzoidin frekans kestirimi sinyal işleme konusunda oldukça önemli bir problemdir. Bu alanda optimal en büyük olabilirlik kestiricisi problemin çözümü için bir periodogramın tepe değerinin konumu ile ilgilenir. Bu kestirici varyans üzerindeki Cramer-Rao alt sınırını yeterince yüksek sinyal-gürültü oranına (SNR) atar. Bununla birlikte çoğu durumda hesaplamalarda FFT uygulansa dahi tatmin edici bir cevap alınamaz ve daha basit metotlara ihtiyaç duyulur. Bu problemi göz önünde bulunduran Steven Kay 1987 yılında hesaplama yönünden periodogram metodundan daha basit ve yüksek SNR değerlerinde Cramer-Rao sınırına ulaşan bir algoritma önermiştir.

Aşağıda bu algoritma ana hatları ile açıklanmıştır:

Alınan datanın beyaz Gauss gürültüsü içeren tekil kompleks bir sinüzoid olduğunu düşünelim yada;

$$x_t = A e^{j(w_0 t + \theta)} + z_t \quad t = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.1)$$

A genliği, w_0 frekansı ve θ fazı rasgele olmayan fakat bilinmeyen sabitlerdir. Kestirime konu olan w_0 frekansıdır. Gürültü; z_t , $z_t = z_{1t} + jz_{2t}$ eşitliğini sağlayan, sıfır ortalamalı beyaz Gauss gürültüsüdür. z_{1t} ve z_{2t} ; sıfır ortalamalı gerçek rasgele Gauss değişkenleridir. Varyans değerleri $\sigma_z^2 / 2$ 'dir ve birbirleri ile ilintisizdirler.

Şimdi A^2 / σ_z^2 değerindeki SNR'in , önerilen algoritmanın temellerini oluşturmak üzere (3.2.1)'de verilen data modelinin yerine yaklaşık bir diğer model koyulmasına elverecek kadar büyük olduğunu düşünelim. Bu yaklaşık model şu şekilde ifade edilir:

$$x_t \approx Ae^{j(\omega_0 t + \theta + u_t)} \quad (3.2.2)$$

İfadedeki $u_t, \sigma_z^2 / 2A^2$ varyans değerine sahip sıfır ortalamalı beyaz Gauss gürültüsüdür.

x_t 'nin fazı $\angle x_t$ ile gösterilirse sonuçta şu ifade elde edilir:

$$\angle x_t = \omega_0 t + \theta + u_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.3)$$

(3.2.3) Eşitliğinin elde edilmesi ile Tretter ω_0 ve θ ' nin elde edilmesinde MLE ile aynı fonksiyonu görece en küçük kareler kestiricisini önermiştir. Tretter'in yaklaşımı frekans ve faz kestiriminin, faz datasına ait lineer bağlanım ile eşdeğer olduğunu göstermektedir. Bu kestirimlerin hesaplanması sırasında görülebilecek bir zorluk fazın çözülmesinin gerekliliğidir. Böylece bu çözülme işlemi de hesaplamalara ilave etmek gerekir. Ayrıca düşük SNR değerlerinde bu işlemi gerçekleştirmek oldukça zordur.

Sadece faz kestirimi söz konusu olduğunda faz farkı aşağıdaki eşitlikte olduğu gibi alınarak faz çözülmesi problemi engellenebilir:

3.2.1 Kestiricinin Elde Edilmesi

$$\Delta_t = \angle x_{t+1} - \angle x_t \quad (3.2.4)$$

$t = 0, 1, 2, \dots, N-2$ için (3) kullanılarak,

$$\Delta_t = \omega_0 + u_{t+1} - u_t \quad (3.2.5)$$

eşitliği elde edilir. (3.2.5) Eşitliğinde açık olarak görülebileceği gibi problem böylece renkli Gauss gürültü sürecine ait ω_0 ortalama frekansının kestirimine dönüşmüştür.

Süreç 1 ve -1 katsayıları ile değişen bir ortalama değerdir.

(3.2.5) Eşitliğinin lineer modeline ait minimum değışınti yansız kestiricisine eşdeğer olan ω_0 'a ait MLE, [3.2.4]' ün minimize edilmesi ile elde edilir.

$$J=(\Delta - \omega_0 \mathbf{1})^T C^{-1} (\Delta - \omega_0 \mathbf{1}) \quad (3.2.6)$$

$$\text{Eşitlikteki ;} \quad \Delta = [\Delta_1 \dots \Delta_{N-2}]^T, \quad \mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad \text{ve}$$

C , Δ_i 'ye ait $(N-1) \times (N-1)$ boyutunda ortak değışınti matrisidir.

ω_0 ortalama frekansının değeri böylelikle aşağıdaki eşitlikle bulunabilir:

$$\hat{\omega}_0 = \frac{\mathbf{1}^T C^{-1} \Delta}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.2.7)$$

Kestiricinin değışıntisi aynı zamanda şu şekilde ifade edilebilir:

$$\text{Var}(\hat{\omega}_0) = \frac{1}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.2.8)$$

Böylelikle geriye sadece $\hat{\omega}_0$ ve $\text{Var}(\hat{\omega}_0)$ 'ın hesaplanması kalmaktadır. C^{-1} 'in hesaplanması için $\sigma_z^2 / 2A^2$ gürültü değışıntisi ve $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ katsayıları kullanılarak:

$$c(0) = \frac{\sigma_z^2}{2A^2} (b_0^2 + b_1^2) = \frac{\sigma_z^2}{A^2}$$

$$c(1) = c(-1) = \frac{\sigma_z^2}{2A^2} b_0 b_1 = -\frac{\sigma_z^2}{A^2} \quad c(k) = 0 \quad |k| \geq 2$$

Böylece ortak değişinti matrisi :

$$C = \frac{\sigma_z^2}{2A^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ters matris $(N-1) \times (N-1)$ boyutu ve (i,j) elemanları kullanılarak:

$$[C]_{ij} = \frac{2A^2}{\sigma_z^2} \left[\min(i,j) - \frac{ij}{N} \right] \quad 1 \leq i,j \leq N-1 \quad (3.2.9)$$

Bazı cebirsel işlemlerin ardından aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$I^T C^{-1} I = \frac{N(N^2 - 1)A^2}{6\sigma_z^2}$$

$$I^T C^{-1} A = \frac{N(N^2 - 1)A^2}{6\sigma_z^2} \sum_{t=0}^{N-2} w_t A_t$$

Eşitlikteki w_t :

$$w_t = \frac{(3/2)N}{N^2 - 1} \left\{ 1 - \left[\frac{t - (\frac{N}{2} - 1)}{N/2} \right]^2 \right\}$$

Böylelikle (3.2.7) eşitliğinden ;

$$\hat{\omega}_0 = \sum_{t=0}^{N-2} w_t \Delta_t \quad \text{eşitliği elde edilir.}$$

Yüksek SNR değerlerinde $\hat{\omega}_0$ yansız bir kestirici olduğu için ; $\sum_{t=0}^{N-2} w_t = 1$ 'dir.

Kestirici, (3.2.10) eşitliği kullanılarak (3.2.11) eşitliğinde ifade edildiği gibi yazılabilir.

$$\Delta_t = \angle x_{t+1} - \angle x_t = \angle x_t^* x_{t+1} \quad (3.2.10)$$

$$\hat{\omega}_0 = \sum_{t=0}^{N-2} w_t \angle x_t^* x_{t+1} \quad (3.2.11)$$

$$\text{Var}(\hat{\omega}_0) = \frac{6}{\frac{A^2}{\sigma_z^2} N(N^2 - 1)} \quad (3.2.12)$$

(3.2.12) Eşitliği Cramer-Rao sınırı ile özdeştir. Ayrıca (3.2.11) eşitliğinde verilen $\hat{\omega}_0$ ile Tretter kestiricisi birbiri ile eşdeğerdir. Bununla birlikte pratikte faz çözülmesini engellediği için (3.2.11) eşitliği tercih edilir.

(3.2.11) Eşitliği (3.2.10) eşitliği kullanılarak tekrar yazılırsa;

$$\hat{\omega}_0 = \frac{12}{N(N^2 - 1)} \sum_{t=0}^{N-1} t \angle x_t - \frac{6}{N(N+1)} \sum_{t=0}^{N-1} \angle x_t \quad (3.2.13)$$

(3.2.13) Eşitliğindeki ifade Tretter lineer bağlanım kestiricisi ile eşdeğerdir. (3.2.11) ve (3.2.13) eşitliklerinde ifade edilen kestiricilerin birbiri ile eşdeğer olduğunun ispatı ; 'eğer etkin bir kestirici varsa (örneğin Cramer-Rao sınırına ulaşıyorsa) bu kestirici tektir' teoremidir (Kendall ve Stuart 1979).

Dikkate değer diğer bir nokta ise w_t 'nin $t = N/2 - 1$ noktası civarında simetrik bir

pencere oluşudur. $\hat{\omega}_0$ 'ın Cramer-Rao sınırına ulaşmasını sağlayan bu penceredir.

$w_t = 1/(N - 1)$ olarak seçilirse kestirici aşağıda ifade edilen şekli alacaktır:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_0 &= \frac{1}{N-1} \sum_{t=0}^{N-2} \angle x_t^* x_{t+1} \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{t=0}^{N-2} \angle x_{t+1} - \angle x_t \\ &= \frac{1}{N-1} (\angle x_{N-1} - \angle x_0)\end{aligned}$$

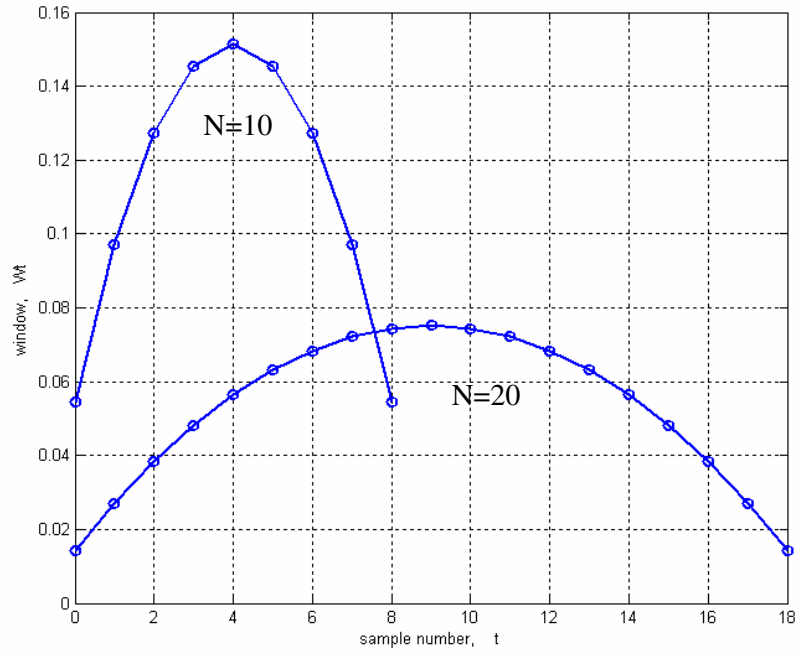
Pencereleme olmaksızın değışinti:

$$\text{Var}(\hat{\omega}_0) = \frac{1}{(N-1)^2} \frac{A^2}{\sigma_z^2} \quad (3.2.14)$$

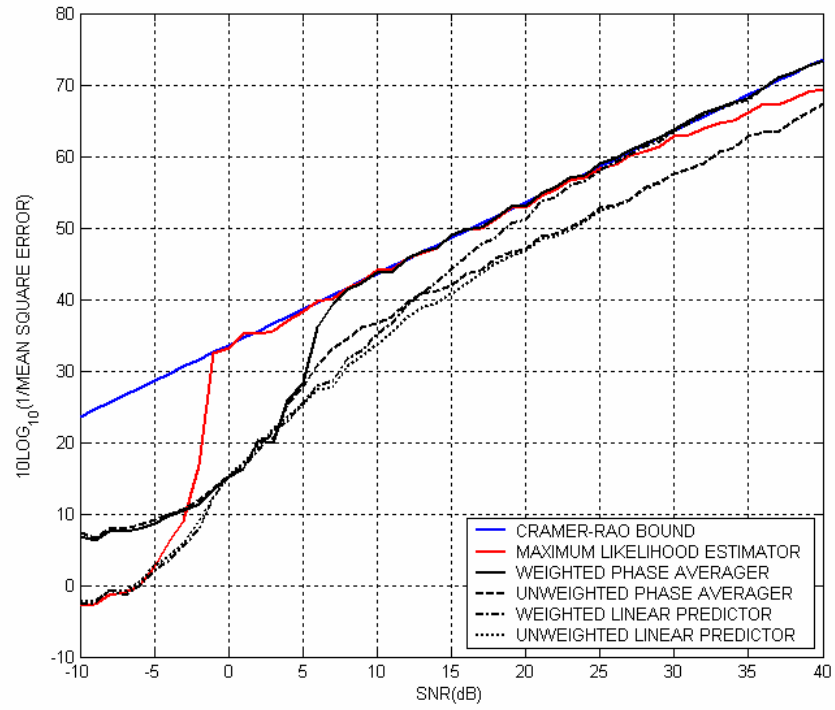
(3.2.12) ve (3.2.14) eşitliklerinden değışintiler arası oran:

$$\frac{\text{Var}(\hat{\omega}_0) \Big|_{\text{penceresiz}}}{\text{Var}(\hat{\omega}_0) \Big|_{\text{pencereli}}} = \frac{N(N+1)}{6(N-1)} \approx \frac{N}{6}$$

Büyük data kayıtlarında performanstaki bu kaybın göz önünde bulundurulması gerekir.



Şekil – 4 Frekans kestirim penceresi



Şekil – 5 Frekans kestirim performansları

3.3 Eğrilmiş Ayırık Fourier Dönüşümü Kullanılarak Frekans Kestirimi

WDFT (Eğril Ayırık Fourier Dönüşümü), frekans domeninde, noktalardaki sonlu uzunluktaki bir diziyeye ait z-dönüşümünün, frekans çözünürlüğünü lokal olarak artıracak şekilde bir tüm geçiren (allpass) fonksiyonu kullanılarak örneklenmesi anlamına gelir.

Gürültü tarafından bozulmuş bir dataya ait sinüzoidal parametre kestirimi sinyal işleme literatüründe sıklıkla karşılaşılan bir problemdir. Bu konudaki uygulamalar içinde iletişim, radar, vektörel sinyal işleme ve benzer konular sayılabilir. Pek çok uygulamada kesin bir frekans kestirimi zorunludur. Gürültü içeren tekil bir sinüzoid için Rife ve Boorstyn tarafından en büyük olabilirlik kestiricisi önerilmiş ve yöntem periodogramın maksimum değeri ile ifade edilmiştir.

$$\hat{\Omega}_k = \underset{\Omega_k}{\operatorname{argmax}} \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega_k n} \right|^2 \right\} \quad (3.3.1)$$

Yeterli büyüklükteki bir SNR'ın non-lineer kestiricilerdeki gibi tipik ve Cramer-Rao sınırına yaklaşan bir eşik değerine sahip olması gerektiği gösterilmiştir. SNR eşik değerinin altında ortalama-karesel hata (MSE) hızla artar. Maksimum olabilirlik kestirimine doğrudan bir yaklaşım DFT kullanımınıdır. Bununla birlikte yeterli çözünürlük elde edebilmek için büyük miktarda dolgu gerekir, bu da kompleksliği artırır. Bu sebeple pek çok düşük maliyetli frekans kestiricisi önerilmiştir. Zakharov ve Tozer kısa uzunluklu hızlı Fourier dönüşümü (FFT) ile elde edilen kaba bir tahminle iteratif olarak periodogramın tepe değerine yaklaşan iki adımlı bir algoritma önermişlerdir. Tretter çözülmüş sinyal fazında doğrusal bağlantı göstererek frekans tahmin eden bir algoritma önermiştir. Yüksek değerde SNR söz konusu olduğunda bu metod Cramer-Rao Sınırına yaklaşır. Bununla birlikte orta değerlerdeki değerlerden düşük değerlerdeki SNR değerlerine gidildikçe faz çözülmesindeki hatalardan dolayı performans düşmektedir.

Kay faz çözülmesi problemini sadece faz farklarını dikkate alarak çözmüştür. Algoritma hesaplama yönünden oldukça etkindir ve Kay kestiricisi eşığının üstündeki SNR değerlerinde Cramer-Rao Sınırına yaklaşır. Bununla birlikte eşik değeri

Maksimum olabilirlik kestirimi yaklaşımı ile hesaplanan değere göre oldukça yüksektir Kay kestiricisinin Tretter kestiricisinden elde edilebileceği gösterilmiştir (Kay 1989).

3.3.1 Eğrilmiş Ayrık Fourier Dönüşümü

N -boyutunda bir $x[n]$ dizisi, $0 \leq n \leq N-1$ aralığında z -dönüşümü ile aşağıdaki gibi gösterilir.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n} \quad (3.3.2)$$

$x[n]$ dizisine ait N -noktalı $X[k]$ ayrık fourier transformu (DFT), $X(z)$ 'in birim çember üzerinde N tane eşit noktada örneklenmesi ile elde edilir:

$$\begin{aligned} X[k] &= X(z) \Big|_{z=e^{j2\pi k/n}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Ters DFT (IDFT):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.3.4)$$

Spektral analiz uygulamalarında DFT tüm frekans aralığı $[0, 2\pi)$ üzerinde $2\pi/N$ ile verilen sabit bir frekans çözünürlüğü sağlar. DFT,FFT algoritmaları ile son derece etkin bir şekilde hesaplanabildiği için yaygın olarak kullanılmaktadır.

N -uzunluğundaki $x[n]$ dizisine ait, DFT'nin genelleştirilmiş bir hali olan N -noktalı düzgün olmayan ayrık Fourier dönüşümü (NDFT) aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$X_{NDFT}[k] = X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z_k^{-n}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.3.5)$$

İfadedeki Z_k değerleri z -yüzeyindeki iki ayrı nokta. (3.3.5) eşitliğini birim çember üzerinde kullanabilmek için Z_k ile $e^{j\Omega_k}$ yer değiştirir. Burada Ω radyan/örnek olarak ortalaması alınmış frekanstır ve düzgün olmayan frekans ızgarasını oluşturur. Matris notasyonunu kullanarak eşitlik (3.3.5)'i şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T \quad : \text{giriş zaman dizisi vektörü,}$$

$$\mathbf{X} = [X[0], X[1], \dots, X[N-1]]^T \quad : \Omega_k \text{ frekansında, frekans örneklerine ait vektör.}$$

ve \mathbf{D} , $N \times N$ Vandermonde matrisi:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\Omega_0} & e^{-j2\Omega_0} & \dots & e^{-j(N-1)\Omega_0} \\ 1 & e^{-j\Omega_1} & e^{-j2\Omega_1} & \dots & e^{-j(N-1)\Omega_1} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 1 & e^{-j\Omega_{N-1}} & e^{-j2\Omega_{N-1}} & \dots & e^{-j(N-1)\Omega_{N-1}} \end{bmatrix}$$

Aynı Ω_k için ters NDFT mevcuttur ve şu şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}$$

NDFT'nin özel bir hali olan N -noktalı WDFT, değiştirilmiş z -dönüşümü $\tilde{X}(z)$ 'in birim çember [5] üzerinde N tane, eşit şekilde konumlanmış noktada örneklenmesi ile elde edilir. $\tilde{X}(z)$, $x[n]$ 'in z -dönüşümü olan $X(z)$ içine z^{-1} 'in bir $B(z)$ tüm geçiren fonksiyonu ile yerleştirilmesi yoluyla elde edilir.

$$\tilde{X}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]B(z)^n$$

Bu haritalama ile frekans skalası eğrilir ve sonuç olarak $\tilde{X}(z)$ 'in birim çember üzerindeki uniform olarak konumlanmış örnekleri, $X(z)$ 'in birim çember üzerinde non-uniform olarak konumlanmış örneklerine haritalanır.

Kompleks değerli eğrilme parametresi $a = |a|e^{j\varphi}$ olmak üzere birinci derece tümgeçiren $B(z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$B(z) = \frac{a^* + z^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad (3.3.6)$$

a^* , a 'nın kompleks eşlenik değeridir. Böylece frekans haritalaması:

$$\Omega_w = \Omega + 2 \arctan\left(\frac{|a|\sin(\varphi - \Omega)}{1 + |a|\cos(\varphi - \Omega)}\right), \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi \quad (3.3.7)$$

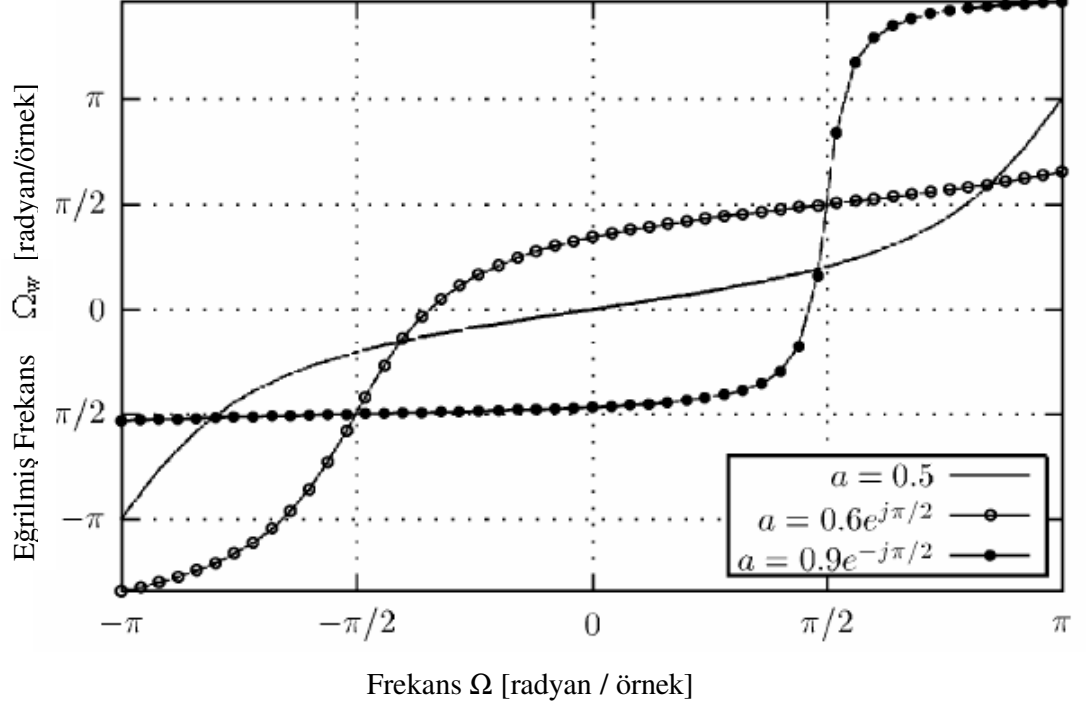
Eşitlikteki Ω_w , radsan/saniye olarak eğrilme frekansıdır (M.Kappelan 1996). Gerçek bir eğrilme parametresi kullanılırsa frekans haritalaması :

$$\Omega_w = 2 \arctan\left(\left(\frac{1-a}{1+a}\right) \cdot \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right), \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi \quad (3.3.8)$$

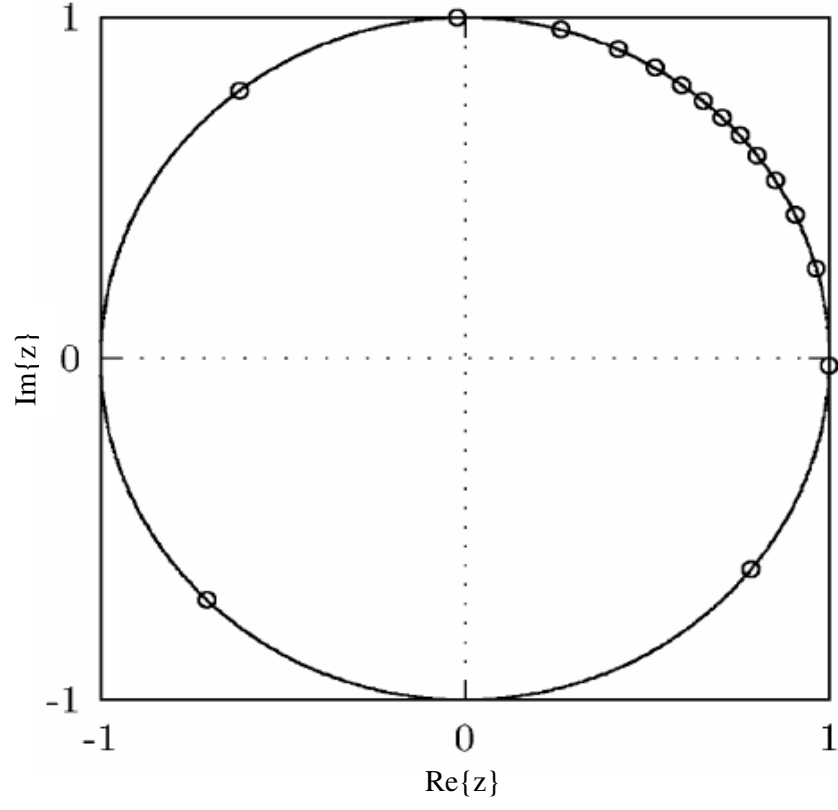
şeklinde ifade edilebilir.

Şekil 6'da farklı a değerleri için frekans haritalaması görülmektedir. Genlik; lokal çözünürlüğü, eğrilme parametresinin fazı ise frekans örneklerinin yoğunlaştığı frekans belirlemektedir. Kararlılık için $|a| < 1$ olması gerekir. Şekil 2'de $a = 0.7e^{j\pi/4}$ değerindeki

eğrilme parametresi için, örneklerin kompleks z-düzlemindeki dağılımı görülmektedir. Şekilde görüldüğü gibi frekans örnekleri $\Omega = \pi/4$ 'de yoğunlaşmıştır.



Şekil – 6 a 'nın farklı değerleri için frekans haritalaması



Şekil-7 16 noktalı WDFFT kullanılarak eğrilme parametresi $a=0.7e^{j\pi/4}$ için z - düzlemindeki frekans örneklemeleri

WDFT Özellikleri

DFT' ye ait ; lineerlik, zaman kayması, frekans kayması, simetri gibi pek çok özellik NDFT (WDFT) için de geçerlidir. Bununla birlikte, zaman domeninde periyodik uzama, devirli evrişim, dualite ve " Parseval Teoremi " gibi özellikler her zaman görülmez.

Hesaplama Yönünden Komplekslik

Goertzel'in algoritması kullanılırsa bir adet WDFT örneğinin hesaplanabilmesi için $2(N + 2)$ tane gerçek çarpım ve $4(N + 1)$ gerçek toplama işlemi yapmak gerekir [6]. Bu ise, N noktalı bir WDFT için $2(N + 2)N$ tane gerçek çarpım ve $4(N + 1)N$ tane gerçek toplama işlemi yapılması gerektiği anlamına gelir.

3.3.2 Tekil Sinüzoid Durumu

Kompleks beyaz Gauss gürültüsü içeren kompleks bir tekil sinüzoidde ait data modeli:

$$x[n] = Ae^{-j(\Omega_0 n + \phi)} + v[n], \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (3.3.9)$$

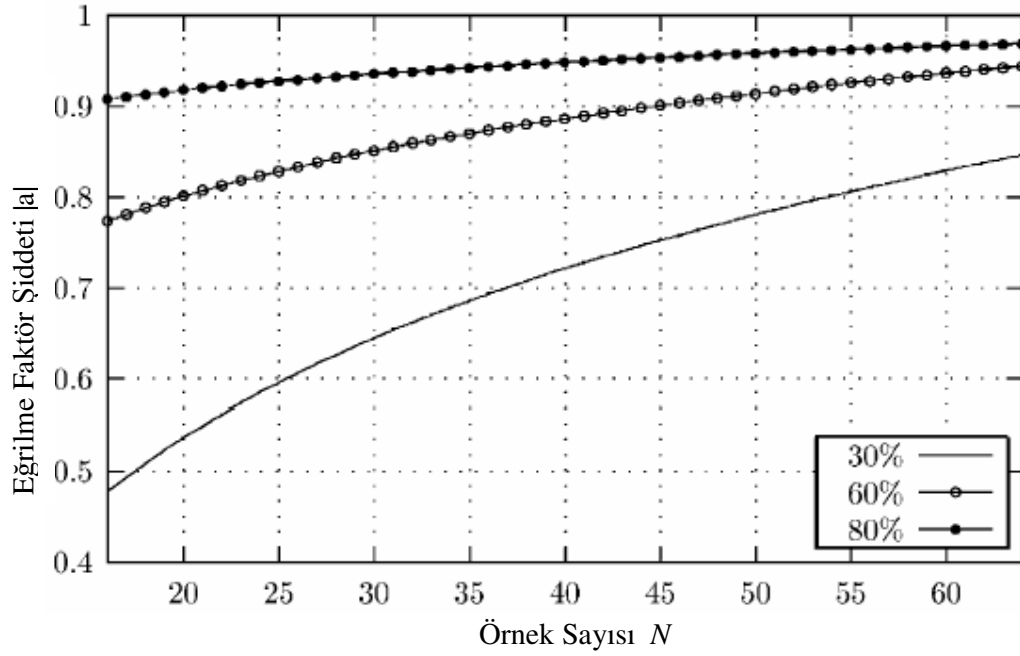
Kompleks $v[n]$ gürültüsü, σ^2 değışintisi ile sıfır ortalamalı rasgele olmayan bir süreç olarak modellenir. A ve ϕ bilinmeyen fakat rasgele olmayan sabitler olarak düşünülür.

WDFT Algoritması

Tekil bir sinüzoid için önerilen WDFT tabanlı frekans kestirimi algoritması, kompleks değerli a eğrilme parametresine sahip birinci dereceden tümgeçiren bir fonksiyon kullanır. Eşitlik (17)'de tanımlandığı gibi N uzunluğunda bir $x[n]$ data dizisi ele alalım:

Tablo-2 spektral ana lobunda bulunan noktaların yüzdelik değerine göre β ve γ değerleri

%	30	40	50	60	70	80
β	-0.259	0.012	0.217	0.433	0.594	0.785
γ	0.612	0.488	0.361	0.283	0.203	0.102



Şekil – 8 Eğrilme parametresinin genliğinin farklı yüzdelik değerleri için sinyal uzunluğuna göre değişimi

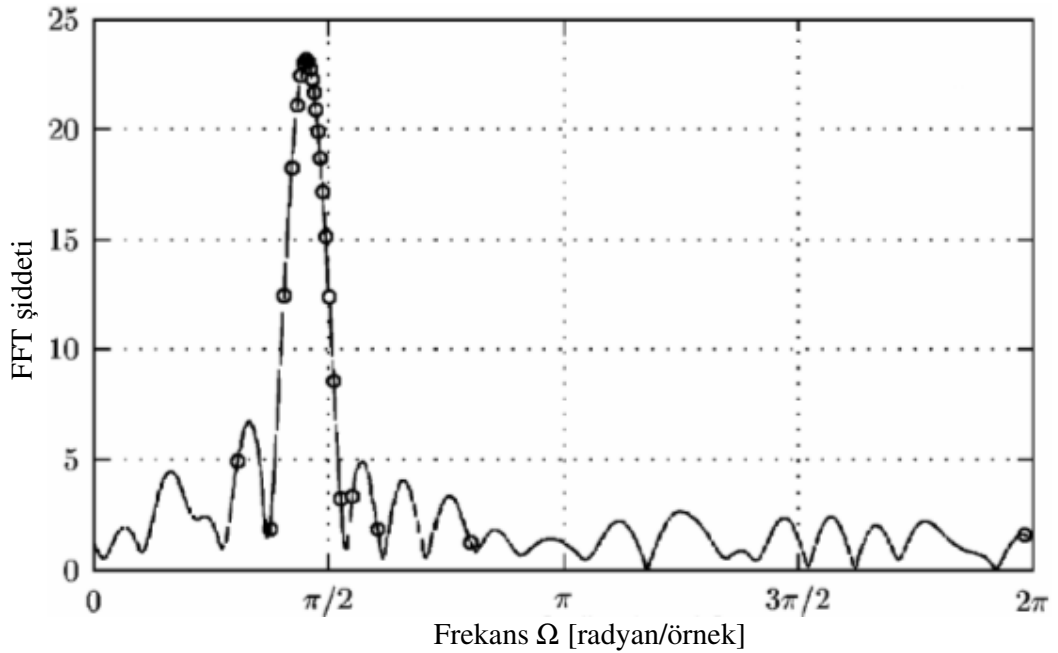
İlk önce, spektral ana lobunu kabataslak hesaplamak için $x[n]$ 'in kısa-uzunluklu FFT'si hesaplanır. Kaba bir frekans kestirim değeri olan Ω_{\max}^{fft} , FFT örneklerinin genliğini maksimize eden frekans tarafından belirlenir.

İkinci adımda, frekans noktalarını spektral ana lobunda yoğunlaştırmak amacıyla a 'nın genliğini aşağıdaki deneysel formüle göre belirleyerek eğrilme parametresi yaklaşık ana lob genişliğine (N tarafından belirlenir) ayarlanır.

$$|a| = \beta + \gamma \log_{10} N \quad (3.3.10)$$

Tablo-2 spektral ana lobunda bulunan noktaların yüzdesine göre değişen β ve γ parametreleri için gerekli olan değerleri göstermektedir. Değerlere karşılık gelen eğriler şekil-8’de görülmektedir. Yapılan deneylerde yüzdelik değeri olarak % 80 kullanılmıştır.

Seçilebilecek yüzdelik değeri FFT yaklaşımının kesinliğine bağlıdır. FFT yaklaşımı ne kadar iyi ise yüzdelik değeri de o kadar yüksek olabilir. Eğrilme parametresine ait φ açısı $\Omega_{\max}^{\text{fft}}$ değerine göre belirlenir ve N uzunluğunda bir WDFT oluşturulur. Şekil-9’te 10dB değerinde bir SNR’a sahip bir WDFT için frekans örnekleri görülmektedir.



Şekil – 9 WDFT algoritmasının ikinci adımını gösteren grafik

Frekans noktalarının çoğu spektral ana lobunda yoğunlaşır. Son adımda, maksimum genlikli WDFT örneğine ve bu noktanın sağındaki ve solundaki komşu noktalara bir parabol (ikinci derece bir Taylor açılımı) yerleştirilir. Bu parabolün tepe noktasının yerleşimi, frekans kestirim değeridir:

$$\hat{\Omega}_0 \approx \Omega_0$$

Eğer ilk adımda spektral ana lobuna iyi bir yaklaşım gerçekleştirilemezse gürültüye bağlı olarak WDFT 'yi maksimize eden Ω'_{max} frekansı $[0,2\pi)$ aralığında herhangi bir aralıkta olabilir. Bu yüzden:

$$\left| \Omega_{max} - \Omega'_{max} \right| \leq Th$$

Şartı gerçekleştiği takdirde eğrilme parametresinin fazı Ω'_{max} 'a göre ayarlanır ve frekans örneklerinin çoğunu gerçek spektral ana lobunda yoğunlaştırmak amacıyla yeni bir WDFT gerçekleştirilir. Deneylerde algoritmanın ilk aşamasının spektral çözünürlüğüne eşit olan ; $Th = 2\pi / N_{fft}$ değeri kullanılmıştır. Algoritmaya ait önerilen frekans aralığı $[0,2\pi)$ 'dir.Sadece bant sınırlarında performansta bir bozulma görülebilir.

Periodogram Metodu

Periodogram metodunda frekansı kestirmek için eşitlik (3.3.11) kullanılır:

$$\hat{\Omega}_0 = \frac{2\pi}{N_p} \arg \max \left\{ \frac{1}{N_p} \left| \sum_{n=0}^{N_p-1} x[n] e^{-j2\pi(k/N_p)n} \right|^2 \right\} \quad (3.3.11)$$

Frekans çözünürlüğü : $\Delta\Omega = 1/N_p$ eşitliği ile verilir. Tatmin edici sonuçlar alabilmek için N_p , frekans örnek sayısı mümkün olduğu kadar büyük olmalıdır.

Dichotomous-araştırma Metodu

Bu algoritmadaki [12] ilk adım, kısa-uzunluklu bir FFT ile elde edilen periodogramın maksimum değerinin (20. eşitliğe bakınız) yerini belirlemektir.İkinci adımda, en büyük genlik değerine sahip örnek ile bu örneğin sağındaki ve solundaki komşu değerler seçilir ve en büyük değere sahip iki örnek arasında yeni bir frekans örneği hesaplanır. Bu şekilde devam edilerek her iterasyonda yeni bir frekans örneği hesaplanarak, iteratif

yolla periodogramın maksimum değerine ulaşılır. Her iterasyon çözünürlüğü iki kat artırır. Q adet iterasyon sonucunda $\Delta\Omega = 1/(N_{ff} 2^Q)$ çözünürlük değerine ulaşılır.

Kay kestiricisi

Kay frekans kestirimi için, alınan datanın faz farkına dayanan, hızlı bir metot geliştirmiştir. Eğer SNR değeri yeteri kadar büyükse, aşağıdaki model yardımıyla eşitlik (3.3.9) 'daki data modeline yaklaşılır:

$$x[n] \approx A e^{j(\Omega_0 n + \phi + u[n])}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.3.12)$$

Eşitlikteki $u[n]$ sıfır ortalamalı ve $\sigma^2/(2A)$ değişinti değerli beyaz Gaussyen gürültüsüdür. Kay kestiricisi böylece aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\hat{\Omega}_0 = \sum_{n=0}^{N-2} w_n \angle x_n^* x_{n+1} \quad (3.3.13)$$

eşitlikteki w_n ;

$$w_n = \frac{(3/2)N}{N^2 - 1} \left\{ 1 - \left[\frac{n - ((N/2) - 1)}{N/2} \right]^2 \right\} \quad (3.3.14)$$

Chirp z-dönüşümü

Bilinmeyen bir frekans kestirme problemi WDFT yerine chirp z-dönüşümü kullanılarak da çözülebilir. Chirp z-dönüşümü:

$$X(e^{j\Omega_k}) = W^{k^2/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} g[n] W^{-(k-n)^2/2} \right), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (3.3.15)$$

şeklinde ifade edilir.

Eşitlikte ;

$$g[n] = x[n]A^{-n}W^{-n^2/2} \quad (3.3.16)$$

Eğer $A = e^{j\Omega}$ ve $W = e^{-j\Delta\Omega}$ olarak alınırsa M tane eşit şekilde konumlanmış frekans:

$$\Omega_k = \Omega_s + k\Delta\Omega \quad \text{şeklinde hesaplanır.}$$

Önerilen algoritma WDFT yaklaşımı ile benzer özellikler taşımaktadır. Algoritmaya N_{fft} -noktalı FFT ile başlanır, ilk adımda bulunan maksimum değer etrafında z-dönüşümü yapılarak işleme devam edilir. Son adımda tepe değeri etrafında bir parabol oluşturulur.

Performans

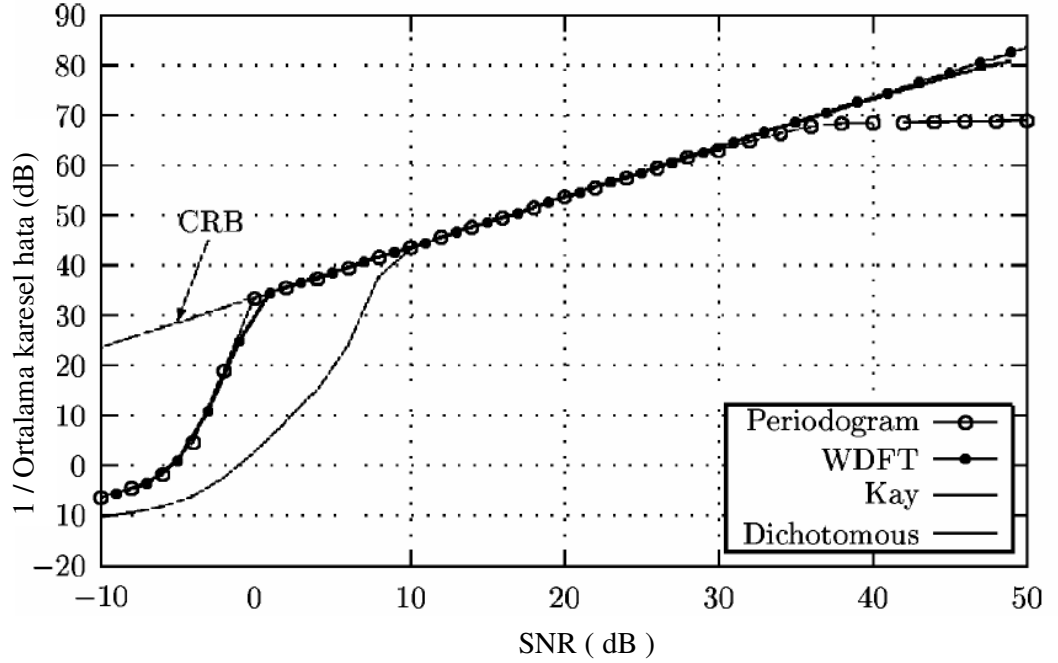
MSE, SNR'a göre belirlenerek, yukarıda açıklanan tüm algoritmaların performansı, periodogram tabanlı yaklaşım (8192-noktalı FFT kullanılarak) ve Cramer-Rao Sınırı ile karşılaştırılmıştır. Gürültü içeren kompleks bir tekil sinüzoid için CRB aşağıdaki gibidir[2]:

$$\sigma_{\hat{\Omega}_0}^2 = \frac{6}{(A^2 / \sigma_v^2)N.(N^2 - 1)} \quad (3.3.17)$$

Hesaplamalarda değişiminin karşıt değeri için dB skalası kullanılarak, değişinti için bir üst sınır meydana getirilmiştir. Önerilen algoritmanın asimptotik olarak yüksek değerli SNR için yansız (bias-free) olduğu gözlenmiştir. Düşük değerli SNR için, eğer kestirilecek olan frekans değeri π değilse (gerçek sinyallerde $\pi/2$ 'dir) kestirici yanlı (biased) hale getirilir. Bu, spektrumun periyodik olmasının bir sonucudur. Eğer frekans yanlı hale getirilirse CRB doğrudan uygulanamaz, fakat bu durumda hala MSE

üzerinde bir sınır oluşturmaya devam eder. Uygulamalarda bütün metotlar için $\Omega_0 = 1.43$ raydan / örnek frekans değeri ve $N = 24$ uzunluğunda bir data kaydı kullanılmıştır. Her bir SNR değeri için 4000 adet Monte Carlo iterasyonu gerçekleştirilmiştir. WDFT tabanlı yaklaşım ve dichotomous-araştırma algoritması için kaba bir frekans kestirimi elde edebilmek amacıyla $N_{fft} = 64$ uzunluğunda bir FFT uygulanmıştır. Bu uzunlukta bir FFT kullanıldığında her iki yaklaşımında periodogram yaklaşımında olduğu gibi aynı SNR eşik değerini (≈ 0 dB) gösterdiği kesinleşmektedir. SNR eşığının altındaki SNR değerleri için kestirim hataları hızla artarken, eşığın üstündeki SNR değerleri için tüm kestiriciler Cramer-Rao Sınırına ulaşmaktadır. Dichotomous araştırma yaklaşımı için iterasyon sayısı $Q=10$ olarak alınmıştır. Şekil-10 sonuçları göstermektedir.

Kay metodu haricindeki tüm kestiriciler 0 dB civarında SNR-eşik değerine sahiptir. Kay kestiricisinde, bu yaklaşımda kullanılan data modelindeki değişimden dolayı SNR-eşik değeri 8dB civarındadır. Bu yüzden düşük SNR değerleri için Kay kestiricisi düşük bir performans gösterirken yüksek SNR değerleri için kestirici Cramer-Rao Sınırına ulaşmaktadır.



Şekil - 10 WDFT algoritması ile diğer algoritmaların karşılaştırılması

Periodogram yaklaşımı ve dichotomous-araştırma algoritması orta seviyedeki SNR değerleri için Cramer-Rao Sınırına yaklaşır. Fakat yüksek değerli SNR değerlerinde son frekans çözünürlüğüne bağlı sabit yanlılık (bias) sebebiyle Cramer-Rao Sınırına ulaşamaz. Son adım olarak uygun bir eğri ekleyerek bu olumsuz durum ortadan kaldırılabılır. WDFT tabanlı yaklaşım periodogram tabanlı yaklaşımdakine benzer bir SNR eşiğine ulaşır fakat yüksek SNR değerlerinde Cramer-Rao Sınırında kalır. Chirp-z dönüşümü gerçekleştirildiğinde ortaya çıkan performans WDFT tabanlı yaklaşımdakine oldukça benzerdir.

Komplekslik

Peridogram metodu ile karşılaştırıldığında burada incelenen tüm frekans kestirim metotları kayda değer şekilde daha az kompleksdir. N_p uzunluğunda ki bir FFT'nin hesaplanabilmesi için $2N_p \log_2(N_p/2)$ tane gerçek çarpım yapmak gerekir. Gereksiz hesaplamaları ve FFT budamasını ortadan kaldırmak için $\log_2(L)/\log_2(N_p)$ ifadesi kullanılabilir. İfadedeki L sıfır olmayan giriş örneklerinin sayısını ifade eder.

Önerilen algoritmanın hesaplama kompleksliği temelde bir N_{fft} -noktalı FFT, bir N_{wdft} -noktalı WDFT ve bunlara ilaveten Eşitlik(3.3.7)'e göre eğrilmiş frekansların hesaplanmasından ibarettir. Sadece çarpma işlemleri düşünüldüğünde:

$$2N_{fft} \log_2(N_{fft}) + 2(N+2)N_{wdft} + 3N_{wdft}$$

adet gerçek çarpım yapmak gerekir.

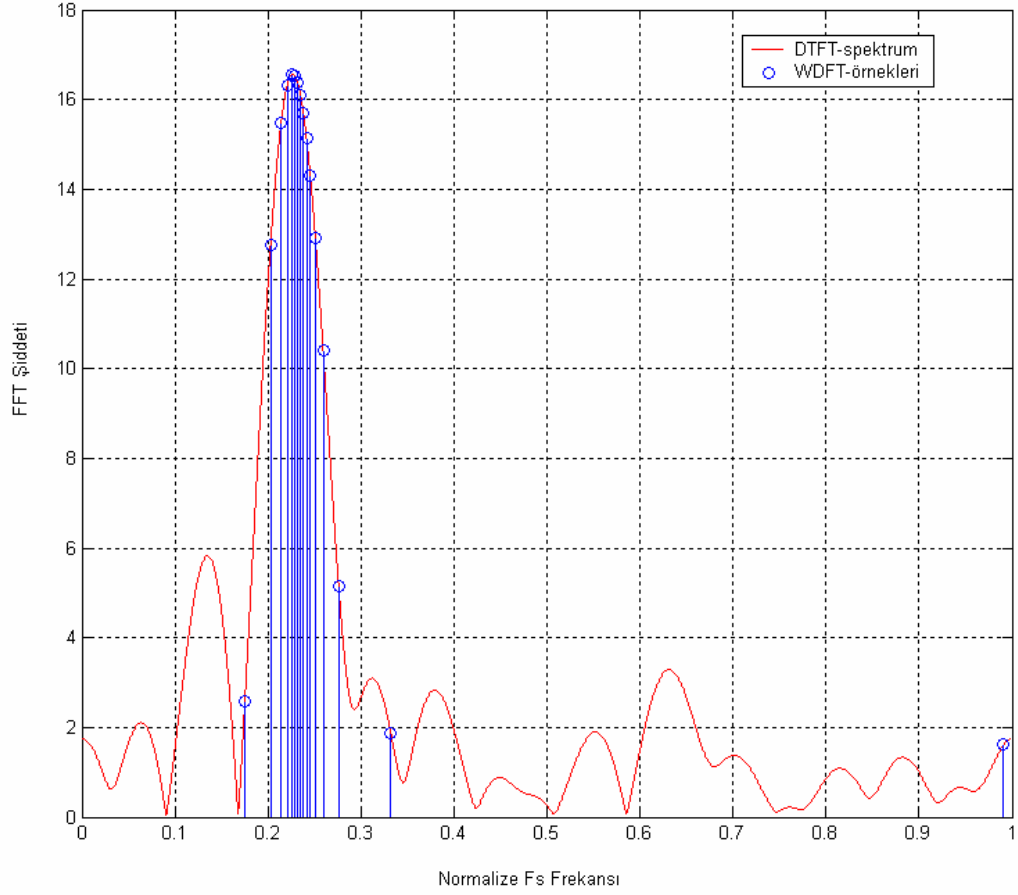
Yöntemler arası hesaplama kompleksliğinin karşılaştırılması Tablo-3'de verilmiştir.

Tablo – 3 Frekans kestirim algoritmalarına ait komplekslik karşılaştırılması

<i>Algoritma</i>	<i>Gerçek Çarpımlar</i>
WDFT -tabanlı	$2N_{fft} \log_2(N_{fft}) + 2(N + 2)N_{wdfit} + 3N_{wdfit}$
Periodogram	$[\log_2(L)/\log_2(N_p)] 2N_p \log_2(N_p)$
Kay	$6(N - 1)$
Dichotomous	$2N_{fft} \log_2(N_{fft}) + 2(N + 2)Q$
Chirp-z	$2N_{fft} \log_2(N_{fft}) + 4\left(\frac{2N - 1}{2}\log_2(2N - 1) + 8(N - 1)\right)$

Stefan Franz , Sanjit K.Mitra , Gerhard Doblinger (2001)

Eğrilmiş ayrık fourier dönüşüm metodu ve ayrık fourier dönüşüm metodu kullanılarak frekans kestiriminin karşılaştırılması aşağıdaki grafikte görülmektedir.



Şekil – 11 WDFT ile DTFT Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Not:Şeklin elde edilmesinde kullanılan MATLAB kodları için Stefan FRANZ'ın izni alınmıştır.

4 . ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

WDFT frekans çözünürlüğünün lokal olarak artmasını sağlayan esnek bir frekans ızgarası seçimine olanak tanır. Çoğu durumda WDFT matrisinin asimetrisinden dolayı FFT algoritmaları gibi etkin yöntemlerin uygulanması zorlaşmaktadır. Çalışmamızdaki algoritma iki adımlıdır. Birinci adımda ilk önce kısa uzunlukta bit FFT kullanılarak kaba bir frekans tahmini yapılır. Böylelikle kaba tahmine dayanan frekans örneklerinin yoğunlaştıran bir WDFT hesabı yapmak mümkün hale gelir. Son olarak, frekans parabolik eğrinin maksimum noktasına karşılık gelen frekans olarak kestirilir. Performans en büyük olabilirlik kestirimi yöntemindekine benzemekle beraber, dichotomous araştırma algoritması kullanılarak da aynı performansı elde etmek mümkündür. Önerilen algoritmanın hesaplama kompleksliği periodogram metoduna göre kayda değer şekilde az olmakla beraber dichotomous araştırma algoritmasına göre fazladır. Kay kestiricisi düşük SNR değerlerinde zayıf bir performans sergilerken hesaplama yönünden oldukça etkindir. Birbirine yakın sinüzoidlerin varlığı durumunda engellenemeyen pencere etkisinden (window effect) dolayı WDFT konsepti doğrudan uygulanamaz. Buna rağmen WDFT, AR-spektrumunda tepe noktalarını bulmak için uygulanabilir. Bunun için bir polinomun köklerini hesaplamak için gerekenden daha az işlem yapmak gerekir. Bununla birlikte çoğul sinüzoidlerin varlığı durumunda daha fazla araştırma yapmak gerekmektedir. Örneğin sinyal için daha uygun gibi gözükten harmonik bir model uygulanabilir.

KAYNAKLAR

FRANZ, S., MITRA, K., DOBLINGER, G. 2003. Frequency Estimation Using Warped Discrete Fourier Transform, Signal Processing Vol. 83, Issue 8, p. 1661-1671.

HANNAN , E.J. 1973. The estimation of frequency, Journal of Applied Probability, p. 510-519.

KAPPELAN, M., STRAUSS, B., VARY, P. 1996. Flexible nonuniform filterbank using allpass transformation of multiple order, Proceedings of the EUSIPCO, Trieste, Italy, Vol 3, p. 1745-1748.

KAY, S. 1988. Modern spectral estimation: Theory and application, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall

KAY, S. 1989. A fast and accurate single frequency estimator, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process, p.1987-1990.

KELLY, E.J. , REED, I.S. 1960. The detection of radar echos in noise , J.Soc. Ind. Appl.Math., p.309 – 341.

KENDALL, M., STUART, A. 1979. The advanced theory of statistics II New York:Macmillan

LANK, G.W. , 1973. A semicoherent detection and doppler estimation statistic, IEE Trans. Aerosp.Electron . Syst. , vol. AES – 9 , no.2, p 151-165.

MITRA,S.K. 2001. Digital signal processing-A computer based approach, McGraw-Hill, New York

PISARENKO , V.F. , 1973. The retrieval of harmonics from a covariance function , Geophys J. Roy. Astr.Soc., 33 ,p. 347-366.

RIFE, D.C., BOORSTYN, R.R. 1974. Single-tone parameter estimation from discrete-time Observations , IEEE Trans.Inform. Theory IT-20, p. 591-598.

RIFE, D.C., BOORSTYN, 1976. Multiple tone parameter estimation from discrete – time observations, Bell Sys. Tech. J. , p.1389-1410.

SILEPIAN, D. , 1957. Estimation of signal parameters in the presence of noise , IRE Trans.Inform.Theory, Vol. IT-3 , p.68-69.

STARER , D. and NEHORAI , A. , 1992. Newton algorithms for conditional and unconditional maximum likelihood estimation of the parameters of exponential signals in noise, IEEE Transactions on acoustics , Speech and Signal Processing 40(6), p.1528-1534.

TRETTNER, S.A. 1985. Estimating the frequency of a noisy sinuzoid by linear prediction, Trans.Inform. Theory IT-31, p.832-835.

VAN TREES, H.L. 1968. Detection, estimation, and modulation theory, Part – I, New York : Wiley

EKLER**Ek-1****Frekans kestirim performanslarını elde etmek için kullanılan Matlab ana programı**

```

% program freq_est.m
% main program for Kay's four frequency estimators
% (S. Kay, "A Fast and Accurate Single Frequency Estimator," IEEE
% Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 37, 12,1987-1990, 1989.)
% get the data
N=input(' enter the data length\n N = ');
t=0:N-1;
% A=1.0;
% theta=0.0;
w_0=0.05*2*pi;
crbtemp=6/(N*(N*N-1)); % prepare for crb calculation
maxrun=300; % total number of trials for a fixed value of the snr
k=0;
for SNRdB=-10:40
k=k+1;
x1(k)=SNRdB;
SNR=10^(0.1*SNRdB);
sigmaz2=1/SNR; sigmazbar2=0.5*sigmaz2; sigmazbar=sqrt(sigmazbar2);
err=[];
for run=1:maxrun
x=cos(w_0*t)+sigmazbar*randn(1,N) + i*(sin(w_0*t)+sigmazbar*randn(1,N));
w_hat=[];
w_hat=kay(x); % get the Kay's four estimates
w_hat_mle=periodog(x); % get the mle
w_hat=[w_hat,w_hat_mle];
err=[err;w_hat-w_0];
end
mse=sum(err.^2)/maxrun;

```

```
y1(k)=-10*log10(mse(1));
y2(k)=-10*log10(mse(2));
y3(k)=-10*log10(mse(3));
y4(k)=-10*log10(mse(4));
y5(k)=-10*log10(mse(5));
crb(k)=-10*log10(sigmaz2*crbtemp); % calculate the crb
end
plot(x1,crb,'-b', x1,y5,'-r', x1,y1,'-k', x1,y2,'--k', x1,y3,'-.k', x1,y4,':k');
xlabel('SNR(dB)');
ylabel('10LOG_{10}(1/MEAN SQUARE ERROR)');
legend('CRAMER-RAO BOUND','MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATOR',...
'WEIGHTED PHASE AVERAGER','UNWEIGHTED PHASE AVERAGER',...
'WEIGHTED LINEAR PREDICTOR','UNWEIGHTED LINEAR PREDICTOR',4);
% end of program
```


Kay Frekans kestirim performansını gösterir alt program

```

function w_hat=kay(x)
% Kay's four frequency estimators
% (S. Kay, "A Fast and Accurate Single Frequency Estimator," IEEE
% Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 37, (12),
% 1987-1990, 1989.)
% w_hat=kay(x);
% x : the data vector
% w_hat : contains the four frequency estimates; namely, the weighted phase
% averager, the unweighted phase averager, weighted linear predictor, and
% the unweighted linear predictor, respectively.
N=length(x); NV2=N/2;
t=0:N-2;
w=3*N*NV2*(1-((t-(NV2-1))/NV2).^2)/(N*N-1);
x1=conj(x(1:N-1)); x2=x(2:N);
temp=x1.*x2; atemp=angle(temp);
w_hat(1)=sum(w.*atemp);
w_hat(2)=sum(atemp)/(N-1);
w_hat(3)=angle(sum(w.*temp));
w_hat(4)=angle(sum(temp));
return

```

Periodogram frekans kestirim performansını gösterir alt program

```
function w_hat=periodog(x);  
% Periodogram frequency estimator  
% w_hat=periodog(x)  
% x : the data vector  
% w_hat : the frequency estimate obtained as the frequency bin for which  
% the periodogram of the data is maximum  
N=length(x); if N<=4096, N=4096; end  
bin=2*pi/N;  
y=fft(x,N);  
[temp,imax]=max(abs(y));  
w_hat=(imax-1)*bin;  
return
```

Ek-2**WDFT ve DTFT metodlarının karşılaştırılması için kullanılan MATLAB ana programı**

```

clear all; close all;
it = 4000;           %number of iterations for the variance per SNR sample
Num = 16;           %number of samples in the time domain
number = 125;       %number of points on the SNR axis
Ampl = 1;           %Amplitude of the signal
phi = 0;            %phase of the signal
ww = 1.43/(2*pi);
t = [0:Num-1];
sig = Ampl*exp(j*2*pi*ww*t+phi); %signal
SNR = zeros(1,number);
f_kay = zeros(it,1);
f_warp = zeros(it,1);
f_spec = zeros(it,1);
f_chirp = zeros(it,1);
f_chirp_par = zeros(it,1);
f_chirp_parls = zeros(it,1);
f_dicho = zeros(it,1);
f_wdft_com = zeros(it,1);
crl_bound = zeros(1,number)';
for k = (1:number)
k=k;
SNR(k) = 10 + 0.4*k-0.4;
for i = (1:it)
i=i;
%signal generation
sigma = Ampl*(10^(-SNR(k)/20)); %sigma correct!!!
noise_re = randn(1,length(sig));
noise_im = randn(1,length(sig));

```

```

%normalize the noise to a variance of 1 noise = (norm(sig)/norm(noise_re))*noise_re +
j*(norm(sig)/norm(noise_im))*noise_im;   noi = sigma/sqrt(2)*noise; s = sig + noi;
%check SNR
%   signal = real(sig);% + imag(sig);
%   n = real(noi);% + imag(noi);
%   checkSNR = 10*log10((sum(signal.*signal))/(sum(n.*n)))
%   flops(0);
f_spec(i) = spectrum(s);
%   f_chirp(i) = chirp_com(s);
%   f_chirp_parls(i) = chirpls_com(s);
%   f_chirp_par(i) = chirp_com_par(s);
%   flop_spec = flops
%   flops(0);
f_dicho(i) = dichotomous(s);
%   flop_dicho = flops
%   flops(0);
%   f_warp(i) = warpdft_sich(SNR(k),s)
%   flops_wdft = flops;
%   flops(0);
f_kay(i) = kay_est(s);
%   flops_kay = flops
%   flops(0);
f_com(i) = freq_est(s);
%   flop_wdft = flops
end
% f_spec = f_spec-ww;
% f_kay = f_kay-ww;
f_com = f_com;
f_com = f_com-ww;
f_dicho = f_dicho-ww;
f_kay = f_kay-ww;

```

```

f_spec = f_spec-ww;
% f_dicho = f_dicho-ww;
% mse_spec = sum(f_spec.*f_spec)/it;
% mse_kay = sum(f_kay.*f_kay)/it;
% mse_dicho = sum(f_dicho.*f_dicho)/it;
mse_com = sum(f_com.*f_com)/it;
% mse_chirp = sum(f_chirp.*f_chirp)/it;
% mse_chirp_par = sum(f_chirp_par.*f_chirp_par)/it;
mse_dicho = sum(f_dicho.*f_dicho)/it;
mse_spec = sum(f_spec.*f_spec)/it;
mse_com = sum(f_com.*f_com)/it;
mse_kay = sum(f_kay.*f_kay)/it;
%MSE in dB
% mse_kay_inv_dB(k) = 10*log10(1/mse_kay);
% mse_spec_inv_dB(k) = 10*log10(1/mse_spec);
mse_dicho_inv_dB(k) = 10*log10(1/mse_dicho);
mse_wdft_com_inv_dB(k) = 10*log10(1/mse_com);
mse_kay_inv_dB(k) = 10*log10(1/mse_kay);
mse_spec_inv_dB(k) = 10*log10(1/mse_spec);
%Cramer-Rao bound
SNR_lin = 10^(SNR(k)/10);
var_crlb = 6/( SNR_lin*Num*(Num^2-1)*(2*pi)^2 );
crl_bound(k) = 10*log10(1/var_crlb);
end
figure
%plot(SNR,v_warp_inv_dB,'red');
%hold on;
plot(SNR,crl_bound,'g-');
hold on;
plot(SNR,mse_spec_inv_dB,'b--');
hold on;
plot(SNR,mse_wdft_com_inv_dB,'r:');

```

```
hold on;
%plot(SNR,mse_chirp_inv_dB,'b.-');
%hold on;
%plot(SNR,mse_chirp_par_inv_dB,'b:');
%hold on;
%plot(SNR,mse_chirp_parls_inv_dB,'kd-.');
plot(SNR,mse_kay_inv_dB,'k-.');
hold on;
plot(SNR,mse_dicho_inv_dB,'b-');
legend('CRLB','Periodogram','WDFT','Kay','Dichotomous',4);
xlabel('SNR in dB');
ylabel('1/mean square error in dB');
grid on;
%save results in matrix
res = zeros(125,5);
res(:,1) = SNR(:);
res(:,2) = crl_bound(:);
res(:,3) = mse_spec_inv_dB(:);
res(:,4) = mse_wdft_com_inv_dB(:);
res(:,5) = mse_kay_inv_dB(:);
save results.mat res;
```

WDFT ve DTFT metodlarının karşılaştırılması için kullanılan MATLAB alt programları

```

function f = dichotomous(s)
% function f = dichotomous(s)
% estimates the frequency of a complex single sinusoid
% in complex white noise using the dichotomous search
% algorithm
%  $y[n] = A \cdot \exp(j \cdot (2\pi \cdot f \cdot n + \phi)) + w[n]$ ,  $n = 0 \dots N-1$ 
% y: noisy input signal
% fout: estimated frequency
% S. Franz, 05.08.2001
high_frequency = 2;
%frequency in the middle range
N = length(s);
Nfft = 64;
deltaf = 2*pi/Nfft;
%FFT approximation
x = abs(fft(s,Nfft));
[I2,ind2] = max(x);
indmax1 = ind2;
t = [0:N-1];
%frequency shifting
if (ind2 == 1)
% figure
% x = abs(fft(s,Nfft));
% stem(x);
% grid on;
high_frequency = 0; %frequency too low for direct calculation
s = s.*exp(j*2*pi*t*(Nfft/2)/Nfft);
% figure
% x = abs(fft(s,Nfft));
% stem(x)

```

```

% grid on;
else
if (ind2==Nfft)
% figure
% x = abs(fft(s,Nfft));
% stem(x);
% grid on;
high_frequency = 1;      %frequency too high for direct calculation
s = s.*exp(-j*2*pi*t*(Nfft/2)/Nfft);
% figure
% x = abs(fft(s,Nfft));
% stem(x);
% grid on;
end
end
x = abs(fft(s,Nfft));
[I2,ind2] = max(x);
indmax2 = ind2;
I1 = x(ind2-1);
I3 = x(ind2+1);
fd = (ind2-1)*2*pi/Nfft;
for q = (1:10)
deltaf = deltax/2;
if (I3>I1)
I1 = I2;
fd = fd + deltax;
else
I3 = I2;
fd = fd - deltax;
end
exponent = -j*fd*t;
e = exp(exponent);

```



```

I2 = abs(sum(s.*e));
fd = fd;
end
switch high_frequency
case 2, f = fd;
case 1, f = fd + 2*pi*(Nfft/2)/Nfft;
case 0, f = fd - 2*pi*(Nfft/2)/Nfft;
end
if (f<0)
f = 2*pi-f;
end
f = f/(2*pi);

function fout = freq_est(y)
% function fout = freq_est(y)
% estimates the frequency of a complex single sinusoid
% in complex white noise by estimating the peak of the
% periodogram
%  $y[n] = A \cdot \exp(j \cdot (2\pi \cdot f \cdot n + \phi)) + w[n]$ ,  $n = 0 \dots N-1$ 
% y: noisy input signal
% fout: estimated frequency
% S. Franz, 14.07.2001
if nargin == 0
help crb2f
return
end
a=0.0;
n = length(y);          %number of samples
%fft approximation
SIG = abs(fft(y,64));
[C,I1] = max(SIG);
wfft = 2*pi*(I1-1)/64;

```

```

%figure
%stem(SIG);
%grid on;
%first wdft approximation
phi = 2*pi*(I1-1)/(64); %estimated frequency
a = 0.91*exp(j*phi); %0.7 before
%frequency mapping
wl = 2*pi/n*[0:n-1];
ew = exp(-j*wl);
z = (conj(a) + ew) ./ (1 + a*ew);
w = -phase(z);
w = mod(w,2*pi);
w = sort(w);
z = exp(-j*w);
SIG = abs(polyval(y(end:-1:1),z));
figure
step = 2*pi/10000;
w_con = [0:step:2*pi-step];
X = abs(fft(y,10000));
plot(w_con/(2*pi),X,'red');
hold on;
stem(w/(2*pi),SIG);
grid on;
ylabel('FFT magnitude');
xlabel('Frequency normalized to F_s');
legend('DTFT-spectrum','WDFT-samples');
pause;
%x = wdft_goerzel2_com(y,a,ft);
[C,I2] = max(abs(SIG));
phi = w(I2); %estimated frequency
%If there is a peak higher far away (>2pi/n) from the max of the
%FFT, then we perform another WDFT around this peak

```

```

while (w(I2)-wfft>2*pi/n)
wfft = w(I2);
%second wdf approximation
a = 0.85*exp(j*pi);
%frequency mapping
wl = 2*pi/n*[0:n-1];
ew = exp(-j*wl);
z = (conj(a) + ew) ./ (1 + a*ew);
w = -phase(z);
w = mod(w,2*pi);
w = sort(w);
z = exp(-j*w);
SIG = abs(polyval(y(end:-1:1),z));
% figure
% step = 2*pi/10000;
% w_con = [0:step:2*pi-step];
% X= abs(fft(y,10000));
% plot(w_con,X,'red');
% hold on;
% stem(w,SIG);
% grid on;
% xlabel('w');
% ylabel('frequency response');
% %X = wdf_goerzel2_com(y,a,ft)
[C2,I2] = max(abs(SIG));
phi = w(I2); %estimated frequency
end
%shifting
if (I2==1)
% xaxis = [w(n-1)-2*pi w(n)-2*pi w(1:3)];
xaxis = [w(n)-2*pi w(1:2)];
yaxis = [SIG(n) SIG(1:2)];

```

```

else
if (I2==n)
%      xaxis = [w(n-2:n) w(1)+2*pi w(2)+2*pi];
xaxis = [w(n-1:n) w(1)+2*pi];
%      yaxis = [SIG(n-2:n) SIG(1:2)];
yaxis = [SIG(n-1:n) SIG(1)];
else
%curve fit
xaxis = w(I2-1:I2+1);
yaxis = SIG(I2-1:I2+1);
end
% end
% end
end
ord = 2;
[P,S] = POLYFIT(xaxis,yaxis,ord);
%parabola plot
%xx = [w(I-1):0.00001:w(I+1)];
%yy = P(1)*xx.^2 + P(2)*xx + P(3);
%figure
%plot(xx,yy);
%grid on;
fout = -P(2)/(2*P(1));
fout= mod(fout,2*pi);
if (fout<=0)
fout = 2*pi-abs(fout);
end
fout = fout/(2*pi);
function [out] = goertzel(in,a)
% function [out] = goertzel(in,a,ft)
% calculates frequency samples using Goertzel's algorithm
% at warped frequency, obtained by an first order allpass function

```

```

% in: input sequence
% a: warping parameter
% S. Franz, University of California Santa Barbara, 13.06.01
N = length(in);
k = [0:N-1];
out1 = zeros(1,N);
ww = 2*pi*k/N;
% equally spaced frequencies
%frequency mapping
w1 = 2*pi/N*[0:N-1];
ew = exp(-j*w1);
z = (conj(a) + ew) ./ (1 + a*ew);
w = -phase(z)
for v = (1:length(in))
if (w(v)<=2*pi)
ind = v
end
end
w = mod(w,2*pi);
w = sort(w)
in1 = [in 0];
%Goerzel algorithm
q = zeros(N,N+1);
for l = (1:N)
q(l,1) = in1(1);
q(l,2) = 2*cos(w(l))*q(l,1) + in1(2);
for i = (3:N+1)
q(l,i) = 2*cos(w(l))*q(l,i-1) - q(l,i-2) + in1(i);
end
out1(l) = q(l,N+1) - exp(-j*w(l))*q(l,N);
end
out = out1.*exp(-j*w*N);

```

```

%length(out)
%figure
%step = 2*pi/10000;
%w_con = [0:step:2*pi-step];
%X = angle(fft(in,10000));
%plot(w_con,X,'red')
%hold on;
%stem(w,out);
%grid on;

function f = kay_est(y)
% function f = kay_est(y)
% estimates the frequency of a complex single sinusoid in
% complex white noise by using Kays method
% y: noisy input sequence
% f: estimated frequency
% S. Franz, 01.08.2001
if nargin == 0
help crb2f
return
end
N = length(y);
%s = awgn(s,SNR,'measured'); %input sequence with unknown frequency
%Ampl = 1;
%phi = 0;
%freq = 14.567;
%ft = 64;
%ww = 2*pi*freq/ft;
%k = [0:N-1];
%s = Ampl*exp(j*ww*k+phi);
%sigma = sqrt(Ampl^2/(10^(SNR/10))); %sigma correct!!!
%andn('state',sum(100*clock));

```

```

%noise = randn(1,length(s));
%noise = noise + j*randn(1,length(s));
%s = s + sigma/sqrt(2)*noise;
t = [1:N-1];
wt = zeros(1,N-1);
wt = (3/2)*N/(N^2-1)*(1-(((t-1) - (N/2-1))/(N/2)).^2);
summ = 0;
for i = (1:N-1)
summ = summ + wt(i)*angle(conj(y(i))*y(i+1));
end
f = summ;
if (f<0)
f = 2*pi-f;
end;
f = f/(2*pi)

function f = spec(s)
X = abs(fft(s,16384));
[C,I] = max(X);
f = (I-1)*2*pi/16384;
f = f/(2*pi);

```

TEŐEKKÖR

Üniversitede lisans ve yüksek lisans öğrenimim süresince yardımlarını esirgemeyen tüm öğretim üyelerine, ayrıca yüksek lisans tez danışmanım sayın Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU 'na ve tüm hayatım boyunca gerek maddi gerekse manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

Bu çalışmayı hazırlamış olan Taner ERGÜN , 01.07.1972 tarihinde ESKİŞEHİR 'de doğmuştur. İlkokul öğrenimini ESKİŞEHİR'de Ahmet OLCAY İlköğretim okulunda tamamlamıştır. Ortaokul öğrenimini İZMİR Özel YAMANLAR Lisesi'nde ve lise öğrenimini İZMİR ATATÜRK lisesi'nde tamamlamıştır. 2002-2003 Eğitim-Öğretim döneminde Lisans öğrenimini SAKARYA Üniversitesi Elektrik-Elektronik mühendisliği bölümünden mezun olarak tamamlamıştır. 2003-2004 Eğitim-Öğretim yılında ULUDAĞ Üniversitesi Elektronik Mühendisliği anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. 2003 yılından itibaren ULUDAĞ Üniversitesi Orhangazi Meslek Yüksekokulu'nda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaya başlamıştır.