MODÜLLER VE LOKAL HALKALAR ÜZERİNE GEOMETRİ

FATMA ÖZEN ERDOĞAN

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLLER VE LOKAL HALKALAR ÜZERİNE GEOMETRİ

Fatma ÖZEN ERDOĞAN

Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2014

TEZ ONAYI

Fatma ÖZEN ERDOĞAN tarafından hazırlanan "Modüller ve Lokal Halkalar Üzerine Geometri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Üye: Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Basri ÇELİK İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. İlhan TAPAN İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Münevver ÖZCAN İmza
Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Atilla AKPINAR İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

/ /2014

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../….

İmza

Fatma ÖZEN ERDOĞAN

ÖZET

Doktora Tezi

MODÜLLER VE LOKAL HALKALAR ÜZERİNE GEOMETRİ

Fatma ÖZEN ERDOĞAN

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Bu çalışmada ilk olarak, $\boldsymbol{A}-$reel plural cebir ve $\boldsymbol{A}-$uzay kavramları ele alınmış ve $\boldsymbol{A}-$reel plural cebrinin ve bu cebir üzerine kurulan modüllerin bazı özellikleri incelenmiştir. $\mathbf{K}=M_{mm}(\mathbb{R})$ reel plural cebiri üzerine bir modül inşaa edilerek bu modülün bir bazı bulunmuştur. Ayrıca vektör uzaylarında geçerliliği iyi bilinen bazı tanım ve teoremlerin, daha genel yapılar olan modüllerdeki ve $\boldsymbol{A}-$uzaylardaki karşılıkları araştırılmıştır. Daha sonra projektif koordinat uzay kavramı ele alınmış ve vektör uzayları üzerine kurulan projektif uzay kavramı, modül üzerine bir uzay kurulmasına genelleştirilmiştir. Kurulan bu uzay ile n-boyutlu projektif koordinat uzayı arasında bir izomorfizm kurulmuştur. Ayrıca sonlu projektif koordinat uzay ile ilgili bazı sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak çalışma boyunca yapılanların bir sentezi olarak denklik sınıfları yardımıyla yeni bir projektif koordinat uzay inşaa edilmiştir. İki farklı 3-boyutlu projektif koordinat uzayı örneği için üzerinde olma matrisi ile temsil edilen bir doğrusu üzerindeki tüm noktalar özel durumlar göz önüne alınarak belirlenmiş ve tersine verilen iki noktadan geçen bir doğrunun matris temsili, Maple™ 13 programı kullanılarak, bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Lokal Halka, Modül, $\boldsymbol{A}-$Reel Plural Cebir, $\boldsymbol{A}-$uzay, Projektif Uzay, Projektif Koordinat Uzay

2014, v + 126 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

GEOMETRIES OVER MODULES AND LOCAL RINGS

Fatma ÖZEN ERDOĞAN

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

In this thesis, the concepts of real plural algebra which is denoted by $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{A}-$spaces are examined. Some properties of $\boldsymbol{A}$ and modules constructed over $\boldsymbol{A}$ are investigated. Also a module is constructed over the linear algebra of matrix $\mathbf{K} = M_{mm}(\mathbb{R})$ and one of its bases is found. Moreover some correspondings of well-known definitions and propositions for vector spaces are investigated in modules and $\boldsymbol{A}-$spaces. Then projective coordinate spaces over a local ring R are studied and the concept of a projective space over a vector space is generalized to a space over a module using equivalence classes. An isomorphism between the space over a module and the n-dimensional projective coordinate space is constructed. Also some combinatorial results for finite projective coordinate spaces are given. Finally a new projective coordinate space is constructed using equivalence classes. All points of a line which is represented by incidence matrix are determined by considering some special cases and also the matrix representation of a line passing through given two points is found by using the programme Maple™ 13 for two different 3-dimensional projective coordinate space.

Key words: Local Ring, Module, $\boldsymbol{A}-$Real Plural Algebra, $\boldsymbol{A}-$space, Projective Space**,** Projective Coordinate Space
2014, v + 126 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca sağlam bir bilgi birikimine sahip olmamı sağlayan, ilgisini, bilimsel desteğini, hoşgörüsünü, sabrını benden esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ'ye sonsuz teşekkürü bir borç bilirim. Bu alanda her anlamda doğru, kendinden emin ve bilgili olmamda en büyük pay saygıdeğer hocama aittir. Ayrıca bilgi birikimleriyle bana birçok konuda yardımcı olan, her zaman fikirlerine başvurduğum, ders ve tez aşaması sürecinde desteklerini aldığım sayın hocalarım Prof. Dr. Basri ÇELİK ve Doç Dr. Atilla AKPINAR'a çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans ve doktora eğitimim süresince verdiği lisansüstü burslarıyla çalışmalarıma katkıda bulunan TÜBİTAK'a ve KUAP(F) 2012/56 numaralı proje ile çalışmalarımı destekleyen Uludağ Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Birimi'ne çok teşekkür ederim.

Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anne ve babama, bu zor ve uzun süreçte anlayışı, desteği, hissettirdiği sevgi ile her problemi aşmamı sağlayan çok sevdiğim eşim Ayhan ERDOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Fatma ÖZEN ERDOĞAN
.. / .. / ….

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{A}$	Reel plural cebir
$\mathbf{K}=M_{mm}(\mathbb{R})$	Girdileri $\mathbb{R}$ den alınan $m\times m$ tipindeki üst üçgensel matrislerin kümesi
$\mathbf{M}=\mathbb{R}_n^m$	Girdileri $\mathbb{R}$ den alınan $m\times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$\Re$	Birimli değişmeli halka
R	Lokal halka
R_0	Lokal halkanın maksimal ideali
R^*	$R\setminus R_0$ fark kümesi
M	Serbest modül
M_0	M nin alt modülü
M^*	$M\setminus M_0$ fark kümesi
R'	R/R_0 bölüm halkası
M'	M/M_0 bölüm modülü
E_n	n-boyutlu Öklid uzayı
C_n	n-boyutlu Kartezyen uzayı
$P(M')$	Projektif Koordinat uzayı
$\approx$	Komşuluk bağıntısı
V	Vektör uzayı
$P(x)$	x noktasının denklik sınıfı
P_n	Projektif uzay
d_∞	İdeal doğru
$\prod_m$	m-boyutlu alt uzay
$\mathbf{P}_n$	Projektif uzay
$\overline{x}$	x noktasının denklik sınıfı
$x=(x_1,x_2,...,x_n)$	C_n de bir noktanın gösterimi
$x=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$	P_n de bir noktanın gösterimi

1. GİRİŞ

Geometri, belli bir dönüşüm grubu altındaki değişmezlerin teorisi olarak da tanımlanır. Bu nedenle geometrileri dönüşümlerle birleştirerek ele almak gerekmektedir. Bu fikir ilk defa 1872 yılında Felix Klein tarafından ortaya konulmuş ve geometriler sınıflandırılmıştır. Bir geometrik yapının geometrik özellikleri ile noktalarının koordinatlarının cebirsel özellikleri arasında yakın bağıntılar bulunmaktadır. Bir projektif uzayın kuruluşu ve incelenmesinde temel olarak analitik ve aksiyomatik olmak üzere iki yol mevcuttur.

Cebirde çok iyi bilinen, işlemlerinde bir çok kolaylıklar bulunan cisim yapısı aslında $\mathbb{R}$ reel sayılar sisteminin genelleştirilmişi olan bir kavramdır. Cisimdeki bazı özelliklerin söz konusu olmadığı halka kavramı ise $\mathbb{Z}$ tamsayılar sisteminin bir genelleştirilmesidir. Mesela $\mathbb{R}$ de veya bir cisimde hem toplama hem de çarpma işlemine göre tüm lineer denklemler çözüme sahip iken, ters elemanın yokluğundan dolayı $\mathbb{Z}$ de veya bir halkada çarpma işlemine göre lineer denklemlerin genel çözümleri yoktur. Bir cisim üzerine kurulan vektör uzayının incelenmesi elbette bir halka üzerine kurulan modülün incelenmesine göre bir çok kolaylığa sahiptir. Ayrıca bir cismin üzerine kurulan geometrik yapılarda da cisim özellikleri işlemleri basite indirgeme avantajı sağlamaktadır. Son zamanlarda daha az özelliğe sahip cebir yapıları ve onlar üzerine kurulan geometrik yapılar da yoğun olarak çalışılmaktadır. Lokal halkalar bunların önemli bir sınıfını oluşturmaktadır. Bu tezin amacı, esas olarak lokal halkalar ve bunlar üzerine kurulan projektif uzayların örneklerle incelenmesidir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.
Tezde kullanılan temel kavramların incelendiği ikinci bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Tezde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler, cebirsel kavramlar ve geometrik kavramlar halinde sırasıyla iki kısımda ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, vektör uzayları ile ilgili bilinen bazı tanım ve önermelerin daha genel yapılar olan modüllerdeki geçerliliği araştırılmıştır. Bunun için önce $\boldsymbol{A}-$plural cebiri ele alınmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bu bilgiler reel plural cebir üzerine kurulan modüllerin bazı özelliklerinin tespitinde kullanılmıştır. Daha sonra bir $\boldsymbol{A}-$modülün $\boldsymbol{A}-$uzay olması durumu ele alınmış ve vektör uzayları için iyi bilinen bazı tanım ve önermelerin $\boldsymbol{A}-$uzaylardaki geçerliliği üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde, projektif koordinat uzay kavramı ele alınıp kuruluşu farklı kaynaklardan araştırılmıştır. Bunun için önce Machala (1980) tarafından ve daha sonra da Jukl ve Snasel (2009) tarafından yapılan çalışmalar ele alınmıştır. Bu çalışmalarda verilen projektif koordinat uzay tanımı ve kuruluşu karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Burada Jukl ve Snasel (2009) tarafından yapılan çalışmada verilen n-boyutlu koordinat projektif uzay tanımının Machala (1980) tarafından yapılan çalışmada verilen tanımın bir çeşit uyarlaması olduğu karşılaştırılmalı olarak gösterilmiş ve Projektif Koordinat uzay kavramına, ilki detaylı olmak üzere, iki örnek verilmiştir. Ayrıca literatürde iyi bilinen vektör uzayları üzerine kurulan projektif uzay kavramı Hirschfeld (1998) tarafından yapılan çalışmadan incelenmiş ve bu yapı modül üzerine bir uzay kurulmasına genelleştirilmiştir. Daha sonra kurulan bu uzay ile Jukl ve Snasel (2009) tarafından yapılan çalışmada verilen projektif koordinat uzay arasında bir izomorfizm kurulmuştur. Bu bölümde son olarak sonlu projektif koordinat uzay ile ilgili bazı sayısal sonuçlar elde edilmiş ve bunlar örnekler üzerinde doğrulanmıştır.

Beşinci bölümde, projektif uzay kavramının elde edilişi üzerinde durulmuştur. Bu bölümde projektif uzay kavramının elde edilmesi için aksiyomatik yol kullanılmıştır. Bu metot vektör uzayı kavramıyla başlar. Vektör uzayı kavramı kullanılarak Herman Weyl tarafından verilen aksiyomlar cümlesi ile bir A afin uzayı tanımlanır. Buradan projektif uzayı elde etmek için $V\backslash\{0\}$ kümesinde bir denklik bağıntısı tanımlanır ve bu denklik sınıflarının kümesi projektif uzay olarak alınır. Bu bölümde önce Hirschfeld (1998) tarafından yapılan çalışmada sonlu cisimler üzerine kurulan projektif uzay kavramı sonsuz mertebeli cisim üzerine kurulan projektif uzay kavramına genişletilmiştir. Sonra bu kurulan uzay ile Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmada aksiyomatik olarak kurulmuş projektif uzay karşılaştırılmış ve denk oldukları gösterilmiştir. Ayrıca iki ve üç boyutlu alt uzayların matrislerle temsilleri detaylı olarak incelenmiştir. Bölümün son kısmında ise dördüncü bölümde vektör uzayları üzerine kurulan projektif uzaylardan genelleştirilerek elde edilen modül üzerine kurulan uzay Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmadaki yöntem ile incelenmiştir. Bu uzayın alt uzaylarının matris ile temsilleri araştırılmıştır.

Altıncı bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümde verilen bilgilerin bir sentezi olarak, denklik sınıfları yardımıyla yeni bir Projektif Koordinat uzay inşaa edilmiştir. Bu uzayın nokta ve doğruları belirlendikten sonra, uzayın noktaları detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca $m=2$ ve $n=3$ ile $m=3$ ve $n=3$ özel hallerinde kurulan iki farklı $3-$boyutlu Projektif Koordinat uzay örneği için üzerinde olma matrisi ile temsil edilen bir doğrusunun üzerindeki tüm noktaları, özel durumlar göz önüne alınarak belirlenmiş ve tersine verilen iki noktadan geçen bir doğrunun matris temsili, Maple™ 13 programı da kullanılarak, bulunmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılan temel tanım ve kavramlar, cebirsel ve geometrik kavramlar olmak üzere, farklı iki kısımda özet olarak verilecektir.

2.1. Cebirsel Kavramlar

Bu kısımda verilen temel kavramları literatürdeki her cebir kitabında bulmak mümkündür. Burada temel olarak (Nomizu 1966, Hungerford 1974, McDonald 1976, Jacobson 1985, Fraleigh 1989, Asar ve ark. 2009) kaynakları esas alınmıştır.

Tanım 2.1.1. G bir küme ve $*: G\times G \to G$ bir iç işlem olsun. Eğer,

G1) Her $a,b,c \in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$ dir.

G2) Her $a\in G$ için $a*e=a=e*a$ olacak biçimde en az bir $e\in G$ vardır.

G3) Her $a\in G$ için $a^{-1}*a=e=a*a^{-1}$ olacak biçimde en az bir $a^{-1}\in G$ vardır.

şartları sağlanıyorsa $(G,*)$ ikilisine *grup* denir ve bu grup, eğer bir karışıklık söz konusu olmayacaksa, kısaca G ile gösterilir. G1 şartına $*$ işlemi için *birleşme* (*assosyatiflik*) *özelliği*, G2 şartını sağlayan *e* elemanına $*$ işleminin *etkisiz elemanı* adı verilir. G3 şartındaki a^{-1} elemanına da *a elemanının* $*$ *işlemine göre tersi* denir.

Tanım 2.1.2. $(G,*)$ grubu için

$$\forall a,b\in G \text{ için } a*b=b*a$$

şartı sağlanıyorsa G ye *değişmeli* (*komütatif*) *grup* ya da *Abel grubu* denir.

Tanım 2.1.3. $(G,*)$ bir grup ve G', G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G', G nin işlemine göre bir grup ise o zaman G' ye G nin bir *alt grubu* denir.

Tanım 2.1.4. $(G,*)$ ve $(G',*')$ iki grup ve $\Phi: G\to G'$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a,b\in G$ için

$$\Phi(a*b)=\Phi(a)*'\Phi(b)$$

şartı sağlanıyorsa Φ dönüşümüne G den G' ye bir *homomorfizm* denir. Birebir ve örten bir Φ homomorfizmine bir *izomorfizm* denir.

Tanım 2.1.5. $\Phi: G \to G'$ bir homomorfizm olsun ve G' nün etkisiz elemanı e' ile gösterilsin. Bu durumda G nin görüntüsü e' olan elemanlarının oluşturduğu $\Phi^{-1}(\{e'\})$ alt grubuna Φ *dönüşümünün çekirdeği* denir ve $Ker(\Phi)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.6 (Birinci İzomorfizm Teoremi). G ve G' iki grup, $\Phi: G \to G'$ çekirdeği K olan bir homomorfizm ve $\gamma_K : G \to G/K$ kanonik homomorfizm olsun. Her $x \in G$ için $\Phi(x)=\Psi(\gamma_K(x))$ olacak şekilde bir tek $\Psi: G/K \to \Phi(G)$ izomorfizmi vardır.

Tanım 2.1.7. R herhangi bir küme ve $+$ ile $\cdot$ bu küme üzerinde tanımlı herhangi iki ikili işlem olsun. Eğer

H1) $(R,+)$ değişmeli gruptur.

H2) $\cdot$ işlemi birleşmelidir.

H3) Her $a,b,c \in R$ için $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ ve $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ dir.

şartları gerçekleniyorsa $(R,+,\cdot)$ sistemine bir *halka* denir. Bazen kısalık olması bakımından $(R,+,\cdot)$ halkası R ile gösterilir.

Bir $(R,+,\cdot)$ halkasında birinci işleme genellikle *toplama*, ikinci işleme de *çarpma işlemi* adı verilir. Toplama işlemine göre etkisiz eleman 0 ile, çarpma işlemine göre etkisiz eleman, varsa, 1 ile gösterilir. Çarpma işlemine göre etkisiz elemana *özdeşlik* adı verilir. Eğer R halkasında özdeşlik elemanı varsa R ye *özdeşlikli halka*, çarpma işlemi değişmeli ise R ye *değişmeli(komütatif) halka* denir.

Tanım 2.1.8. R özdeşlikli bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab=1$ olacak biçimde $b \in R$ varsa b ye a nın *sağ tersi* ve $ca=1$ olacak biçimde $c \in R$ varsa c ye a nın *sol tersi* denir. Eğer $d \in R$ olmak üzere $ad=da=1$ ise d ye a nın bir tersi ve a ya da *birim(sel) eleman* denir.

Tanım 2.1.9. R bir halka ve $a,b \in R$ olsun. Eğer $a,b \neq 0$ iken $a \cdot b = 0$ ise a ya *sol sıfır böleni* ve b ye *sağ sıfır böleni* denir. R halkasının değişmeli olması halinde yalnızca *sıfır böleni* ifadesi kullanılır.

Tanım 2.1.10. $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. Eğer R nin bir R' alt kümesi R halkasının işlemleri altında bir halka oluşturuyorsa R' ye R nin bir *alt halkası* denir.

Tanım 2.1.11. R nin her a elemanı için $aI \subseteq I$ ve $Ia \subseteq I$ şartlarını sağlayan bir I alt halkasına R halkasının bir *ideali* denir.

Tanım 2.1.12. R bir halka ve $M \neq R$, R nin bir ideali olsun. Eğer $M \subset I \subset R$ şartını sağlayan hiçbir I ideali yoksa M ye R *nin maksimal ideali* denir.

Tanım 2.1.13. Aşağıda birbirine denk olarak verilen şartlardan bir tanesini sağlayan değişmeli bir R halkasına *lokal halka* denir:

a) R nin bir tek maksimal ideali vardır.

b) R nin tüm birim olmayan (tersi olmayan) elemanları bir tek has idealde kapsanır.

c) R nin birim olmayan (tersi olmayan) elemanları bir has ideal oluşturur.

d) $\forall\ r \in R$ için ya r ya da $1-r$ birimdir.

Tanım 2.1.14. $(R,+,\cdot)$ ve $(R',+',\cdot')$ iki halka, $\Phi : R \to R'$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a,b \in R$ için

1) $\Phi(a+b) = \Phi(a) +' \Phi(b)$

2) $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot' \Phi(b)$

şartları sağlanıyorsa Φ dönüşümüne R den R' ye bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.1.15. $(R,+,\cdot)$ ve $(R',+',\cdot')$ iki halka olsun. $\Phi : R \to R'$ birebir ve örten bir homomorfizm ise Φ dönüşümüne R den R' ye bir *izomorfizm* denir.

Tanım 2.1.16. Eğer $(R,+,\cdot)$ bir özdeşlikli halka ve $R-\{0\}$ ın her elemanının çarpmaya göre tersi varsa $(R,+,\cdot)$ halkasına *bölümlü halka* veya *aykırı cisim* denir. Çarpma işlemi değişmeli olan bir bölümlü halkaya *cisim* adı verilir.

Tanım 2.1.17. $(F,+,\cdot)$ bir cisim ve $(V,\oplus)$ bir abel grubu olsun. Eğer $\circ : F\times V \to V$ dış işlemi her $x,y\in V$ ve her $a,b\in F$ için;

V1) $a\circ(x\oplus y)=(a\circ x)\oplus(a\circ y)$

V2) $(a+b)\circ x=(a\circ x)\oplus(b\circ x)$

V3) $(a\cdot b)\circ x=a\circ(b\circ x)$

V4) $1\circ x=x$; $1\in F$ özdeşlik elemanı

şartları sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde bir *vektör uzayı* denir ve eğer bir karışıklık olmayacaksa F cismi belirtilmeden kısaca V ile gösterilir.

Eğer V nin bir W altkümesi için V vektör uzayının işlemleri ile birlikte W da bir vektör uzayı oluyorsa, W ya V nin *altvektör uzayı* ya da kısaca *altuzayı* denir.

Tanım 2.1.18. F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. $x_1,x_2,\dots,x_n\in V$ ve $\forall\ c_i\in F$ için $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0 \Rightarrow \forall c_i = 0$ ise $x_1,x_2,\dots,x_n$ vektörleri *lineer bağımsızdır*, aksi halde *lineer bağımlıdır* denir.

Tanım 2.1.19. Bir V vektör uzayının

B1) B lineer bağımsızdır.

B2) $V=Sp(B)$ dir.

şartlarını sağlayan bir B alt kümesine V nin bir *bazı* denir.

B2) aksiyomuna baz için germe aksiyomu denir ki $\forall\, x\in V$ elemanının B deki sonlu sayıda elemanın bir lineer birleşimi olduğunu ifade eder.

Tanım 2.1.20. Bir V vektör uzayının herhangi bir bazındaki eleman sayısına V nin *boyutu* denir. Eğer V nin boyutu sonlu ise V *sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır* denir.

Tanım 2.1.21. V bir vektör uzayı, W_1 ile W_2 de V nin herhangi iki alt uzayı olsun. Eğer

1) $V = W_1 + W_2$

2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

şartları sağlanıyorsa V ye W_1 ile W_2 *nin direkt toplamı* denir ve $V = W_1 \oplus W_2$ yazılır.

İki alt uzay için verilen direkt toplam tanımı aşağıdaki gibi genelleştirilir:

Tanım 2.1.22. V bir vektör uzayı, $W_1, W_2, \ldots, W_k$ de V nin herhangi alt uzayları olsunlar. Eğer

1) $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ dir.

2) $1 \leq j \leq k-1$ özelliğindeki her j için $\left(W_1 + W_2 + \cdots + W_j\right) \cap W_{j+1} = \left\{0\right\}$ dır.

şartları sağlanıyorsa, V uzayı $W_1, W_2, \ldots, W_k$ *alt uzaylarının direkt toplamıdır* denir ve $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ yazılır.

Tanım 2.1.23. R, $1 \neq 0$ özdeşlikli bir halka ve M toplamsal değişmeli bir grup olsun. $\forall a \in R$ ve $\forall x \in M$ için $(a, x) \to ax$ olacak şekilde tanımlı $R \times M \to M$ dış işlemi tüm $a, b \in R$ ve tüm $x, y \in M$ elemanları için aşağıdaki şartları sağlıyorsa M kümesine R halkası üzerinde bir birimli *modül* denir:

1) $a(x + y) = ax + ay$

2) $(a + b)x = ax + bx$

3) $(ab)x = a(bx)$

4) $1x = x$ dir.

Tanım 2.1.24. R özdeşlikli ve değişmeli bir halka ve M ise R halkası üzerine kurulan bir modül olsun. M nin bir S alt kümesi için aşağıdaki iki özellik geçerli ise S ye M nin bir *alt modülü* denir.

1) $\forall x, y \in S$ için $x+y,\ x-y \in S$ dir.

2) $\forall x \in S$ ve $\forall c \in R$ için $c\,x \in S$ dir.

Tanım 2.1.25. R özdeşlikli bir halka ve M ise R halkası üzerine kurulan bir modül olsun. Eğer M nin boş kümeden farklı bir bazı var ise M ye bir *serbest (free) modül* denir.

Tanım 2.1.26. V , $(F,+,\cdot)$ cismi üzerinde iç ve dış işlemleri sırasıyla, $\oplus$ ve $\circ$ olan bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlanan ikinci bir iç işlem olan $\otimes$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde bir *cebir* denir. Her $c \in F$ ve her $x, y, z \in V$ için

C1) $(c \circ x) \otimes y = x \otimes (c \circ y) = c \circ (x \otimes y)$

C2) $(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

C3) $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Çoğunlukla iç ve dış işlemleri gösterirken kullanılan $\otimes$ ve $\circ$ simgeleri yerine işlemler, elemanlar yan yana yazılarak da kullanılabilir. Eğer bir V cebirinde

$$\forall\ x, y, z \in V \text{ için } \quad (xy)z = x(yz)$$

şartı da sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde *birleşmeli cebir* denir.

2.2. Geometrik Kavramlar

Bu kısımda verilecek kavramlar için (Borsuk 1969, Stevenson 1972, Machala 1980, Batten 1986, Keppens 1988, Kaya 2005, Hacısalihoğlu 2010) çalışmaları esas alınmıştır.

Tanım 2.2.1. N elemanlarına nokta denilen bir küme ve D ise elemanlarına doğru denilen N nin altkümelerinin bir kümesi olsun. $X \in N$ ve $d \in D$ için X noktasının d doğrusunun üzerinde olduğunu, yani d doğrusunun X noktasından geçtiğini ifade etmek üzere $X \circ d$ sembolü kullanılsın. Böyle oluşturulan (N, D) sistemine bir *geometrik yapı* denir. Bazen $U = (N, D, \circ)$ yerine kısaca $U = (N, D, \circ)$ yazılır ve $U = (N, D)$ *uzayı* olarak da isimlendirilir.

Tanım 2.2.2. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $U = (N, D)$ uzayına bir *lineer uzay* denir.

L1) Her doğru en az iki nokta kapsar.

L2) Farklı iki noktadan tam olarak bir doğru geçer.

Tanım 2.2.3. Aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen bir $U = (N, D)$ lineer uzayına *projektif düzlem* denir.

PD1) Herhangi iki doğru kesişir.

PD2) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Genellikle N noktalar kümesinin elemanları büyük harflerle, D doğrular kümesinin elemanları küçük harflerle gösterilir. A ve B noktalarından geçen doğru $A \cup B$ ile veya kısaca AB ile gösterilir. Benzer şekilde a ve b doğrularının arakesiti $a \cap b$ ile veya kısaca ab ile gösterilir. Bir projektif düzlem genellikle $U = (N, D, \circ)$ yerine $P = (N, D, \circ)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2.4. N noktalar kümesini, D doğrular kümesini, $\circ$ üzerinde olma bağıntısını ve $\sim$ N ve D üzerinde komşuluk bağıntısı adı verilen bir denklik bağıntısını göstermek üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $M = (N, D, \circ, \sim)$ yapısına *projektif Klingenberg düzlemi (PK düzlemi)* denir.

(PK1) Komşu olmayan herhangi iki $A, B \in N$ noktasını birleştiren tam olarak bir $d \in D$ doğrusu vardır,

(PK2) Komşu olmayan herhangi iki $c,d \in D$ doğrusunun tam olarak bir $A \in N$ ortak noktası vardır,

(PK3) M den bir $M^* = (N^*, D^*, \circ)$ projektif düzlemi üzerine her $A, B \in N$ ve $c,d \in D$ için

$$\Psi(A) = \Psi(B) \Leftrightarrow A \sim B \text{ ve } \Psi(c) = \Psi(d) \Leftrightarrow c \sim d$$

şartlarını sağlayacak biçimde bir Ψ epimorfizmi vardır.

Tanım 2.2.5. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan (N, D) geometrik yapısına bir *projektif uzay* denir:

PU 1) İki farklı X, Y noktası tam olarak bir XY doğrusu üzerindedir.

PU2) $A \neq B \neq C \neq D \neq A$ özelliğinde dört nokta A, B, C, D olsun. AB ve CD doğrularının bir ortak noktası varsa bu taktirde AD ve BC doğrularının da bir ortak noktası vardır.

PU 3) Her doğru üzerinde en az üç farklı nokta vardır.

PU 4) Hiç ortak noktası olmayan en az iki doğru vardır.

Tanım 2.2.6. (N, D) bir geometrik yapı olsun. $P' = (N', D')$ bir projektif uzay ve Φ, N kümesinden N' kümesine bir dönüşüm olsun. Eğer D nin her d doğrusu için, $\Phi(d)$ D' nün bir doğrusu ise Φ ye bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.2.7. P ve P' herhangi iki projektif düzlem olsun. P den P' ne birebir ve örten bir homomorfizm varsa bu *projektif düzlemler izomorftur* denir, bu fonksiyona da bir *izomorfizm* adı verilir. Bir projektif düzlemi kendisine dönüştüren izomorfizme *kolinasyon* veya *otomorfizm* denir.

Tanım 2.2.8. P bir projektif uzay olsun. $\forall\ P, Q \in U$, $P \neq Q \Rightarrow PQ \subset U$ şartını sağlayan bir U altkümesine P nin bir *alt uzayı* denir.

Tanım 2.2.9. Bir P projektif uzayının kendisini üreten bağımsız bir alt kümesine *P nin bir bazı* denir.

Teorem 2.2.10. Projektif uzayın her $U \neq \varnothing$ alt uzayının bir bazı vardır. B_1, B_2 U alt uzayının iki farklı bazı ise B_1 ve B_2 aynı sayıda elemana sahiptir yani $kardinalite\ B_1 = kardinalite\ B_2$ dir.

Tanım 2.2.11. B, P nin U altuzayının bir bazı olsun. Bu taktirde $(kardinalite\,B)-1$ sayısına U alt uzayının *boyutu* denir.

Tanım 2.2.12. H, P nin bir alt uzayı olsun. H de kapsanmayan bir Ƥ noktası için $P = H \cup \{Ƥ\}$ ise H ye P nin bir *hiperdüzlemi* denir.

Tanım 2.2.13. $A \neq \varnothing$ bir küme ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\Psi : A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için $(P,Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$ şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A kümesine V *ile birleştirilmiş bir afin uzay* denir.

1) $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.2.14. $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına $n-$*boyutlu Öklid uzayı* denir ve E_n ile gösterilir.

Tanım 2.2.15. E_n Öklid uzayı $\forall X, Y \in E_n$ için

$$d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan metriği ile birleştirilsin. Bu taktirde (E_n, d) metrik uzayına *n-boyutlu Kartezyen uzay* denir ve kısaca C_n ile gösterilir.

3. LOKAL HALKALAR ÜZERİNE KURULAN MODÜLLER

3.1. Giriş

Bu bölümde vektör uzayları ile ilgili bilinen bazı tanım ve önermelerin daha genel yapılar olan modüllerdeki geçerliliği araştırılmıştır. Bunun için önce $\boldsymbol{A}-$reel plural cebiri ele alınmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bu bilgiler reel plural cebir üzerine kurulan modüllerin bazı özelliklerinin tespitinde kullanılmıştır. Daha sonra bir $\boldsymbol{A}-$modülün $\boldsymbol{A}-$uzay olması durumu ele alınmış ve vektör uzayları için iyi bilinen bazı tanım ve önermelerin $\boldsymbol{A}-$uzaylardaki geçerliliği üzerinde durulmuştur.

3.2. Temel Bilgiler

Bu kısımda $\boldsymbol{A}$ reel plural cebiri, $\boldsymbol{A}-$modül ve $\boldsymbol{A}-$uzay hakkında bazı temel bilgiler verilecektir. Bunun için Jukl (1993, 1995) tarafından yapılan çalışmalar faydalanılacak esas kaynaklar olarak alınmıştır.

Tanım 3.2.1. $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı olarak, $\eta^m = 0$ olmak üzere, bir $\{1, \eta, \eta^2, \eta^3, ..., \eta^{m-1}\}$ bazına sahip her $\boldsymbol{A}$- lineer cebirine $\mathbb{R}$ üzerinde bir reel plural cebir denir (Jukl 1993).

Tanım 3.2.2. $\boldsymbol{A}$ dan $\mathbb{R}$ ye $k = 0,1,,...,m-1$ olmak üzere p_k izdüşüm sistemi

$$\forall \beta \in \boldsymbol{A}, \; \beta = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \eta^i \text{ için } p_k(\beta) := b_k$$

şeklinde tanımlanır (Jukl 1993).

Aşağıda verilen önermeler ispatlarına bazı açıklamalar eklenerek Jukl (1993) tarafından yapılan çalışmadan alınmıştır.

Yardımcı Teorem 3.2.3. $\varepsilon \in \boldsymbol{A}$ elemanının bir birim olması için gerek ve yeter şart $p_0(\varepsilon) \neq 0$ olmasıdır (Jukl 1993).

İspat. $(\Rightarrow)$ $\varepsilon \in \boldsymbol{A}$ bir birim ve $p_0(\varepsilon) = 0$ olduğu kabul edilsin. $p_0(\varepsilon) = 0$ ise $\exists\ \mu \in \boldsymbol{A}$ vardır öyle ki $\varepsilon = \eta\mu$ dür. Bu durumda ε, η parantezinde açıkça yazılırsa $\varepsilon = \eta(b_1 + b_2\eta + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-2})$ olup $\mu = b_1 + b_2\eta + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-2} \in \boldsymbol{A}$ olur. ε birim olduğundan ε^{-1} mevcuttur. $1 = \varepsilon\varepsilon^{-1}$ için $1 = (\eta\mu)\varepsilon^{-1} = \eta(\mu\varepsilon^{-1})$ elde edilir. (Burada $\varepsilon, \eta, \mu, \varepsilon^{-1} \in \boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{A}$ lineer cebiri birleşmelidir.) $1 = \eta(\mu\varepsilon^{-1})$ eşitliğinin her iki yanı η^{m-1} ile çarpılırsa $\eta^{m-1} = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O zaman $p_0(\varepsilon) = 0$ kabulü yanlıştır. Yani ε bir birim ise $p_0(\varepsilon) \neq 0$ dır.

$(\Leftarrow)$ $p_0(\varepsilon) \neq 0$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon^{-1} = \sum_{i=0}^{m-1} f_i\eta^i$ tersinin var olması için (sadece $\varepsilon\varepsilon^{-1} = (\sum_{i=0}^{m-1} e_i\eta^i)(\sum_{i=0}^{m-1} f_i\eta^i) = 1$ olması gerçeğinden hareketle) aşağıda verilen denklem sisteminin çözülebilir olması gerekmektedir.

$$
\begin{aligned}
&e_0 f_0 = 1 \\
&e_0 f_1 + e_1 f_0 = 0 \\
&e_0 f_2 + e_1 f_1 + e_2 f_0 = 0 \\
&\vdots \\
&e_0 f_{m-1} + e_1 f_{m-2} + \cdots + e_{m-1} f_0 = 0
\end{aligned}
$$

denklem sistemi ele alınırsa $e_0 f_0 = 1$ için $p_0(\varepsilon) = e_0 \neq 0$ olduğundan $f_0 \neq 0$ olup $f_0 = e_0^{-1}$ olarak elde edilir. $e_0 f_1 + e_1 f_0 = 0$ için $e_0 f_1 + e_1 e_0^{-1} = 0$ olup $f_1 = -e_0^{-2}e_1$ olarak bulunur. $e_0 f_2 + e_1 f_1 + e_2 f_0 = 0$ için $e_0 f_2 - e_0^{-2}e_1^2 + e_2 e_0^{-1} = 0$ olup $f_2 = -e_0^{-3}e_1^2 - e_2 e_0^{-2}$ dir. Bu şekilde devam edilerek tüm i ler için $0 \leq i \leq m-1$ olmak üzere f_i ler e_i ler cinsinden çekilebilir. O halde
$\varepsilon^{-1} = f_0 + f_1\eta + f_2\eta^2 + \cdots + f_{m-1}\eta^{m-1} = e_0^{-1} + (-e_0^{-2}e_1)\eta + (-e_0^{-3}e_1^2 - e_2 e_0^{-2})\eta^2 + \cdots$
şeklinde olup mevcuttur, yani ε bir birimdir. □

Yardımcı Teorem 3.2.4. $\alpha \in \boldsymbol{A}$ bir birim olarak verilmiş olsun. Bu taktirde $\beta^2 = \alpha$ olacak şekilde bir $\beta \in \boldsymbol{A}$ elemanının var olması için gerek yeter şart $p_0(\alpha) > 0$ olmasıdır (Jukl 1993).

İspat. $\alpha = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \eta^k$ olsun. β elemanı $\beta = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \eta^i$ olacak şekilde alınsın. Bu taktirde $\beta^2 = \sum_{i+j=0}^{m-1} b_i b_j \eta^{i+j}$ dir. Böylece $\alpha = \beta^2 \Leftrightarrow \alpha = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \eta^k = \beta^2 = \sum_{i+j=0}^{m-1} b_i b_j \eta^{i+j}$ olup bu eşitlik açılırsa

$$
\begin{aligned}
& a_0 = b_0^{\,2} \\
& a_1 = 2b_0 b_1 \\
& a_2 = 2b_0 b_2 + b_1^{\,2} \\
& \vdots \\
& a_{m-1} = 2b_0 b_{m-1} + b_1 b_{m-2} + \cdots + b_{m-2} b_1
\end{aligned}
\tag{3.2.1}
$$

denklem sistemi elde edilir.

(i) $(\Leftarrow)$ $a_0 > 0$ olsun. (3.2.1) denklem sistemindeki ilk denklemden $b_0 = \sqrt{a_0}$ olarak bulunur. Bu değer ikinci denklemde yerine yazılarak $b_1 = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$ elde edilir. Bulunan b_0 ve b_1 değerleri üçüncü denklemde yani a_2 değerinde yerine yazılıp işlemler düzenlenirse $b_2 = \dfrac{a_2}{2\sqrt{a_0}} - \dfrac{a_1^{\,2}}{8a_0\sqrt{a_0}}$ olarak elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $0 \le i \le m-1$ için tüm b_i değerleri bulunur. Yani $a_0 > 0$ olduğunda $\beta^2 = \alpha$ olacak şekilde $\beta \in \boldsymbol{A}$ elemanının var olduğu gösterilmiş olur.

(ii) $(\Rightarrow)$ $\beta^2 = \alpha$ olacak şekilde $\beta \in \boldsymbol{A}$ var olsun. (3.2.1) denklemlerinde $a_0 = b_0^{\,2}$ olduğundan $a_0 > 0$ olduğu açıktır. α birim olduğundan a_0 dolayısıyla $b_0^{\,2} \neq 0$ dır. □

Yardımcı Teorem 3.2.5. $\boldsymbol{A}$ maksimal ideali $\eta\boldsymbol{A}$ olan bir lokal halkadır. $1 \le j \le m$ için $\boldsymbol{A}$ daki tüm idealler $\eta^j \boldsymbol{A}$ şeklindedir (Jukl 1993).

İspat. Önce $\eta\boldsymbol{A}$ nın maksimal ideal olduğu gösterilecektir.

$\boldsymbol{A}=\{a_0+a_1\eta+\cdots+a_{m-1}\eta^{m-1}\,|a_i\in\mathbb{R}\}$ için $\eta\boldsymbol{A}=\{a_0\eta+a_1\eta^2+\cdots+a_{m-2}\eta^{m-1}\,|a_i\in\mathbb{R}\}$ olup $\eta\boldsymbol{A}$ nın bir ideal olduğu açıktır. Çünkü her $\alpha=a_0\eta+a_1\eta^2+\cdots+a_{m-2}\eta^{m-1}\in\eta\boldsymbol{A}$ ve her $\beta=a_0'+a_1'\eta+\cdots+a_{m-1}'\eta^{m-1}\in\boldsymbol{A}$ için $\beta\alpha\in\eta\boldsymbol{A}$ dır.

Şimdi

$$\eta\boldsymbol{A}\subset J\subset\boldsymbol{A},\ J\neq\boldsymbol{A} \tag{3.2.2}$$

olacak şekilde bir J ideali alınsın. $J\neq\eta\boldsymbol{A}$ olduğu için J de $b_0\neq 0$ olacak şekilde $\gamma=b_0+b_1\eta+b_2\eta^2+\cdots+b_{m-1}\eta^{m-1}$ elemanı vardır. Ayrıca $\forall\alpha\in\boldsymbol{A}$ için $\alpha=c_0+c_1\eta+\cdots+c_{m-1}\eta^{m-1}$ için $b_0d_0=c_0$ olacak şekilde $\exists\, d_0\in\mathbb{R}$ vardır ve $\gamma\beta=(b_0+b_1\eta+b_2\eta^2+\cdots+b_{m-1}\eta^{m-1})(d_0+d_1\eta+d_2\eta^2+\cdots+d_{m-1}\eta^{m-1})=c_0+c_1\eta+c_2\eta^2+\cdots+c_{m-1}\eta^{m-1}$ olacak şekilde $d_i\in\mathbb{R}$ sayıları bulunabileceğinden $\beta\in\boldsymbol{A}$ mevcuttur. O halde $\forall\gamma\in J$ ve $\forall\beta\in\boldsymbol{A}$ için ideal tanımından $\alpha=\beta\gamma\in J$ olup

$$\boldsymbol{A}\subset J \tag{3.2.3}$$

elde edilir. (3.2.2) ve (3.2.3) den $J=\boldsymbol{A}$ olduğu görülür.

Şimdi de $\boldsymbol{A}$ daki tüm ideallerin $\eta^j\boldsymbol{A}$ şeklinde olduğu gösterilecektir. $J\neq\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ da bir ideal olsun. Ayrıca $\forall\ j$ için $1<j<m$ olmak üzere $J\neq\eta^j\boldsymbol{A}$ olduğu kabul edilsin. Böyle bir J ideali için $\exists\ k$, $1<k<m$ için $\eta^{k+1}\boldsymbol{A}\subset J$ ve $J\subset\eta^k\boldsymbol{A}$ olsun. ($J\not\subset\eta^{k+1}\boldsymbol{A}$ için) $\alpha\in J$ ve $\alpha\notin\eta^{k+1}\boldsymbol{A}$ alınsın. $\alpha\in J\subset\eta^k\boldsymbol{A}$ olduğundan $\alpha=\sum_{i=0}^{m-1}a_i\eta_i$ yazılımında $a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$ ve $a_k\neq 0$ olduğu açıktır. Aksi taktirde $a_k=0$ olsa $\alpha\in\eta^{k+1}\boldsymbol{A}$ çelişkisi elde edilir. Bu sebeple $\alpha=a_k\eta^k+a_{k+1}\eta^{k+1}+\cdots+a_{m-1}\eta^{m-1}$ şeklindedir. $\varepsilon=\sum_{j=k}^{m-1}a_j\eta^{j-k}\in\boldsymbol{A}$ bir birim elemandır. Çünkü $\varepsilon=a_k+a_{k+1}\eta+\cdots+a_{m-1}\eta^{m-k-1}$ olup $a_k\neq 0$ dır. $\alpha=\varepsilon\eta^k$ olduğu açıktır. Eğer $\xi\in\eta^k\boldsymbol{A}$ ise bu taktirde $\exists\beta\in\boldsymbol{A}$ vardır ki $\xi=\eta^k\beta$ şeklindedir. $\xi=\eta^k\beta=\eta^k(\varepsilon\varepsilon^{-1})\beta=(\eta^k\varepsilon)(\varepsilon^{-1}\beta)=\alpha(\varepsilon^{-1}\beta)$ elemanı bulunur ki

ideal tanımından $\alpha \in J$ için $\xi = \alpha(\varepsilon^{-1}\beta) \in J$ olur. Böylece $\eta^k \boldsymbol{A} \subset J$ olup $\eta^k \boldsymbol{A} = J$ çelişkisi elde edilir. Demek ki böyle bir J ideali yoktur. $\boldsymbol{A}$ daki tüm idealler $\eta^j \boldsymbol{A}$ şeklindedir ve $\eta\boldsymbol{A}$ tek maksimal idealdir. □

Yardımcı Teorem 3.2.6. $\boldsymbol{A}$ halkası $\mathbb{R}[x] \big/ < x^m >$ polinomların bölüm halkası ile izomorftur (Jukl 1993).

İspat. $f : \mathbb{R}[x] \to \boldsymbol{A}$ bir dönüşümü

$\forall\ h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + a_m x^m + \cdots \quad \in \mathbb{R}[x]$ için $f(h(x)) = h(\eta)$ olarak tanımlansın.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[x] \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{R}[x] \big/ < x^m > \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

$f : \mathbb{R}[x] \to \boldsymbol{A}$, çekirdeği $< x^m >= \{x^m h(x) \mid h(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ olan bir halka homomorfizmidir. Üstelik f örtendir, yani $\boldsymbol{A} = f(\mathbb{R}[x])$ dir. Birinci izomorfizm teoremi gereği $\forall\ f(h(x)) \in \boldsymbol{A}$ için $\forall\ F(f(h(x)) = F(h(\eta)) = h(x) + < x^m >$ olarak tanımlanan $F : \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}[x] \big/ < x^m >$ fonksiyonu bir izomorfizmdir. □

Tanım 3.2.7. $\boldsymbol{A}$ lokal halkası üzerine kurulmuş bir modüle $\boldsymbol{A}-$modül denir (Jukl 1995).

Tanım 3.2.8. $\boldsymbol{A}$ bir lokal halka ve M sonlu üretilmiş bir $\boldsymbol{A}-$modül olsun. Bu taktirde eğer M de aşağıdaki şartları sağlayan $E_1, E_2, ..., E_n$ vektörleri var ise M ye sonlu boyutlu $\boldsymbol{A}-$uzay denir.

i) $M = \boldsymbol{A}E_1 \oplus \boldsymbol{A}E_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}E_n$

ii) $1 \le i \le n$ için $x \to xE_i$ şeklinde tanımlı $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}E_i$ dönüşümleri birer $\boldsymbol{A}-$ izomorfizmdir (Jukl 1995).

3.3. Reel Plural Cebir Üzerine Kurulan Modüller

Bu kısımda bir $\boldsymbol{A}$ reel plural cebiri üzerine kurulan modüllerin bazı özellikleri incelenmiştir. Önce $\boldsymbol{A}$ reel plural cebrindeki birimler ve sıfır bölenler arasındaki ilişki bir teorem olarak verilmiştir. Sonra $\boldsymbol{A}$ ile $\mathbf{K} = M_{mm}(\mathbb{R})$ lineer cebiri arasındaki ilişkinin kısa bir ispatı verilmiştir. Son olarak $\mathbf{K} = M_{mm}(\mathbb{R})$ reel plural cebiri üzerine bir modül inşaa edilerek bu modülün bir bazı incelenmiştir. Bu kısımdaki bilgiler için (Erdoğan ve ark. 2014) çalışması esas alınmıştır.

Teorem 3.3.1. $\boldsymbol{A}$ da hiç bir birim sıfır bölen değildir, yani herhangi $\alpha, \beta \in \boldsymbol{A}$;

$\alpha = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \eta^i$, $a_0 \ne 0$ ve $\beta = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \eta^i$ için eğer $\alpha\beta = 0$ veya $\beta\alpha = 0$ ise $\beta = 0$ dır. Ayrıca $1 \le k \le m-1$ ve $a_k \ne 0$ olmak üzere $\alpha = a_k \eta^k + a_{k+1}\eta^{k+1} + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1}$ için eğer $\alpha\beta = 0$ veya $\beta\alpha = 0$ ise bu taktirde $\beta = b_{m-k}\eta^{m-k} + b_{m-k+1}\eta^{m-k+1} + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1}$ dir (Erdoğan ve ark. 2014).

İspat. Eğer α bir birim ise $\boldsymbol{A}$ da α^{-1} ters elemanı vardır ve $\boldsymbol{A}$ reel plural cebiri birleşmeli olduğundan; $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha\beta) = \alpha^{-1} \cdot 0 \Rightarrow \beta = 0$ dır. $\beta\alpha = 0$ için $\beta = 0$ olduğu benzer biçimde gösterilir.

Şimdi $1 \le k \le m-1$ ve $a_k \ne 0$ için

$\alpha\beta = (a_k\eta^k + a_{k+1}\eta^{k+1} + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1})(b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1}) = 0$ eşitliğinin

$\beta = b_{m-k}\eta^{m-k} + b_{m-k+1}\eta^{m-k+1} + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1}$ olmasını gerektirdiği gösterilecektir.

Önce $k = 1$ olduğu kabul edilsin. Bu taktirde $a_1 \ne 0$ olmak üzere

$\alpha = a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1}$ şeklindedir. Bu durumda

$\alpha\beta = (a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1}) \cdot (b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1})$ çarpımı sıfıra eşitlenirse

$$
\begin{aligned}
\alpha\cdot\beta = 0 \Rightarrow & (a_1b_0)\eta + (a_1b_1 + a_2b_0)\eta^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\eta^3 \\
& + \cdots + (a_1b_{m-2} + a_2b_{m-3} + \cdots + a_{m-2}b_1 + a_{m-1}b_0)\eta^{m-1} \\
& +(a_1b_{m-1} + a_2b_{m-2} + \cdots + a_{m-2}b_2 + a_{m-1}b_1)\eta^m \\
& +(a_2b_{m-1} + a_3b_{m-2} + \cdots + a_{m-2}b_3 + a_{m-1}b_2)\eta^{m+1} \\
& + \cdots + (a_{m-1}b_{m-1})\eta^{2m-2} \\
= & \ 0\cdot\eta + 0\cdot\eta^2 + \cdots + 0\cdot\eta^{m-1} + c_m\cdot\eta^m + c_{m+1}\cdot\eta^{m+1} + \cdots + c_{2m-2}\cdot\eta^{2m-2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\eta^m = \eta^{m+1} = \cdots = \eta^{2m-2} = 0$ olduğundan $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_{2m-2}$ katsayıları sıfır olmak zorunda değildir.

η nın katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_1b_0 = 0$ elde edilir. Burada $a_1 \neq 0$ olduğundan $b_0 = 0$ bulunur.

η^2 nin katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_1b_1 + a_2b_0 = 0$ elde edilir. $b_0 = 0$ değeri bu denklemde yerine konularak ve $a_1 \neq 0$ olduğu kullanılarak $b_1 = 0$ bulunur.

η^3 ün katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 0$ elde edilir. $b_0 = b_1 = 0$ değerleri bu denklemde yerine konularak ve $a_1 \neq 0$ olduğu kullanılarak $b_2 = 0$ bulunur.

İşlemlere bu şekilde devam edilerek $0 \leq k \leq m-3$ için $b_k = 0$ bulunur.

Son olarak η^{m-1} in katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_1b_{m-2} + a_2b_{m-3} + \cdots + a_{m-2}b_1 + a_{m-1}b_0 = 0$ elde edilir. $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-3} = 0$ değerleri bu denklemde yerine konularak ve $a_1 \neq 0$ olduğu kullanılarak $b_{m-2} = 0$ bulunur.

Eğer bulunan $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-3} = b_{m-2} = 0$ değerleri sıradaki denklemde yerine konulursa $(a_1b_{m-1})\eta^m = 0$ elde edilir. Burada $\eta^m = 0$ olduğundan b_{m-1} herhangi bir reel sayı olabilir.

Böylece $k = 1$ için

$\alpha\beta = (a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1})\cdot(b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1}) = 0 \Rightarrow \beta = b_{m-1}\eta^{m-1}$

olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi de $k = 2$ olsun. Bu taktirde $a_2 \neq 0$ olmak üzere $\alpha = a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1}$ şeklindedir. Bu durumda

$\alpha\beta = (a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1})\cdot(b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1})$ çarpımı sıfıra eşitlenerek

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta = 0 \Rightarrow & (a_2 b_0)\eta^2 + (a_2 b_1 + a_3 b_0)\eta^3 + (a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0)\eta^4 \\
& + \cdots + (a_2 b_{m-4} + a_3 b_{m-5} + \cdots + a_{m-3} b_1 + a_{m-2} b_0)\eta^{m-2} \\
& + (a_2 b_{m-3} + a_3 b_{m-4} + \cdots + a_{m-2} b_1 + a_{m-1} b_0)\eta^{m-1} \\
& + (a_2 b_{m-2} + a_3 b_{m-3} + \cdots + a_{m-2} b_2 + a_{m-1} b_1)\eta^{m} \\
& + (a_2 b_{m-1} + a_3 b_{m-2} + \cdots + a_{m-2} b_3 + a_{m-1} b_2)\eta^{m+1} \\
& + \cdots + (a_{m-1} b_{m-1})\eta^{2m-2} \\
= {} & 0 \cdot \eta + 0 \cdot \eta^2 + \cdots + 0 \cdot \eta^{m-1} + c_m \cdot \eta^m + c_{m+1} \cdot \eta^{m+1} + \cdots + c_{2m-2} \cdot \eta^{2m-2}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Burada $\eta^m = \eta^{m+1} = \cdots = \eta^{2m-2} = 0$ olduğundan $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_{2m-2}$ katsayıları sıfır olmak zorunda değildir.

η^2 nin katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_2 b_0 = 0$ elde edilir. Burada $a_2 \neq 0$ olduğundan $b_0 = 0$ bulunur.

η^3 ün katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0$ elde edilir.

$b_0 = 0$ değeri bu denklemde yerine konulursa ve $a_2 \neq 0$ olduğu kullanılırsa $b_1 = 0$ bulunur.

η^4 ün katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = 0$ denklemi elde edilir. $b_0 = b_1 = 0$ değerleri bu denklemde yerine konulursa ve $a_2 \neq 0$ olduğu kullanılırsa $b_2 = 0$ bulunur.

İşlemlere bu şekilde devam edilerek $0 \leq k \leq m-3$ için $b_k = 0$ elde edilir.

Eğer bulunan $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-3} = 0$ değerleri η^m li terimin katsayısında yerine konulursa $(a_2 b_{m-2})\eta^m = 0$ elde edilir. Burada $\eta^m = 0$ olduğundan b_{m-2} herhangi bir reel sayı olarak alınabilir.

Benzer şekilde bulunan $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-3} = 0$ ve $b_{m-2} \in \mathbb{R}$ değerleri η^{m+1} li terimin katsayısında yerine konulursa $(a_2 b_{m-1} + a_3 b_{m-2})\eta^{m+1} = 0$ elde edilir. Burada $\eta^{m+1} = 0$ olduğundan b_{m-1} herhangi bir reel sayı olarak alınabilir.

Böylece $k = 2$ için

$$\alpha\beta = (a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1})(b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1}) = 0 \Rightarrow \beta = b_{m-2}\eta^{m-2} + b_{m-1}\eta^{m-1}$$

olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak bu işlemler k için genellensin. $\alpha = a_k\eta^k + a_{k+1}\eta^{k+1} + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1}$, $a_k \neq 0$

olsun. Bu taktirde

$\alpha\beta = (a_k\eta^k + a_{k+1}\eta^{k+1} + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1}) \cdot (b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1})$ çarpımı sıfıra eşitlenerek

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow & (a_k b_0)\eta^k + (a_k b_1 + a_{k+1} b_0)\eta^{k+1} + (a_k b_2 + a_{k+1} b_1 + a_{k+2} b_0)\eta^{k+2} \\
& + \cdots + (a_k b_{m-(k+1)} + a_{k+1} b_{m-(k+2)} + \cdots + a_{m-1} b_0)\eta^{m-1} \\
& + (a_k b_{m-k} + a_{k+1} b_{m-(k+1)} + \cdots + a_{m-2} b_2 + a_{m-1} b_1)\eta^m \\
& + (a_k b_{m-(k-1)} + a_{k+1} b_{m-k} + \cdots + a_{m-2} b_3 + a_{m-1} b_2)\eta^{m+1} \\
& + \cdots + (a_{m-1} b_{m-1})\eta^{2m-2} \\
= & \ 0 \cdot \eta + 0 \cdot \eta^2 + \cdots + 0 \cdot \eta^{m-1} + c_m \cdot \eta^m + c_{m+1} \cdot \eta^{m+1} + \cdots + c_{2m-2} \cdot \eta^{2m-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\eta^m = \eta^{m+1} = \cdots = \eta^{2m-2} = 0$ olduğundan $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_{2m-2}$ katsayıları sıfır olmak zorunda değildir.

η^k nın katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_k b_0 = 0$ elde edilir. Burada $a_k \neq 0$ olduğundan $b_0 = 0$ bulunur.

η^{k+1} ın katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_k b_1 + a_{k+1} b_0 = 0$ elde edilir. Burada $b_0 = 0$ değeri bu denklemde yerine konularak ve $a_k \neq 0$ olduğu kullanılarak $b_1 = 0$ bulunur.

η^{k+2} ın katsayısı sıfıra eşitlenerek $a_k b_2 + a_{k+1} b_1 + a_{k+2} b_0 = 0$ elde edilir. Burada $b_0 = b_1 = 0$ değerleri bu denklemde yerine konulursa ve $a_k \neq 0$ olduğu kullanılırsa $b_2 = 0$ bulunur.

İşlemlere bu şekilde devam edilsin. $\eta^k, \eta^{k+1}, \eta^{k+2}, \ldots, \eta^{m-1}$ li terimler sıfıra eşitlenerek $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-(k+1)} = 0$ elde edilir. Şimdi bulunan $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-(k+1)} = 0$ değerleri η^m li terimin katsayısında yerine konulursa $(a_k b_{m-k})\eta^m = 0$ elde edilir. Burada $\eta^m = 0$ olduğundan b_{m-k} herhangi bir reel sayı olabilir.

Benzer şekilde bulunan $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-(k+1)} = 0$ ve $b_{m-k} \in \mathbb{R}$ değerleri η^{m+1} li terimin katsayısında yerine konulursa $(a_k b_{m-(k-1)} + a_{k+1} b_{m-k})\eta^{m+1} = 0$ elde edilir. Burada $\eta^{m+1} = 0$ olduğundan $b_{m-(k-1)}$ herhangi bir reel sayı olabilir.

İşlemlere bu şekilde devam edilerek yani $\eta^m = \eta^{m+1} = \cdots = \eta^{2m-2} = 0$ olduğu kullanılarak

$b_{m-k}, b_{m-(k-1)}, b_{m-(k-2)}, \ldots, b_{m-1} \in \mathbb{R}$ katsayılarının herhangi reel sayılar olarak alınabileceği görülür.

Böylece $\alpha = a_k\eta^k + a_{k+1}\eta^{k+1} + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1}$ ve $\beta = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1}$ için $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = b_{m-k}\eta^{m-k} + b_{m-k+1}\eta^{m-k+1} + \cdots + b_{m-1}\eta^{m-1}$ olduğu gösterilmiş olur. □

$\boldsymbol{A}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir bazı $\eta^m = 0$ için $\{1, \eta, \eta^2, \eta^3, ..., \eta^{m-1}\}$ olan bir reel plural cebir olsun. Bu cebir $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le m-1$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki tüm matrislerin oluşturduğu $\mathbf{K} = M_{mm}(\mathbb{R})$ cebrine izomorftur (Jukl 1993). Önce Jukl (1993) tarafından yapılan çalışmada ispatsız olarak verilen bu önermenin kısa bir ispatı verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.3.2. $\boldsymbol{A}$ halkası

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-3} & a_{m-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{m-4} & a_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

formundaki matrislerin $\mathbf{K}$ lineer cebrine izomorftur (Jukl 1993).

İspat. $f : \boldsymbol{A} \to \mathbf{K}$ dönüşümü her $\alpha = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\eta^i \in \boldsymbol{A}$ için

$$f(\alpha) = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} = 0, & j < i \\ a_{ij} = a_{j-i}, & j \ge i \end{cases}$$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde

$$f(\alpha)=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$ dir. Bu şekilde tanımlanan $f\ :\ \boldsymbol{A}\to\mathbf{K}$

dönüşümünün 1-1 ve örten olduğu ayrıca her

$\alpha=a_0+a_1\eta+a_2\eta^2+\cdots+a_{m-1}\eta^{m-1},\quad \beta=b_0+b_1\eta+b_2\eta^2+\cdots+b_{m-1}\eta^{m-1}\in\boldsymbol{A}$ ve her $c\in\mathbb{R}$ için $f\ (\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ ve $f\ (c\alpha)=cf(\alpha)$ şartlarını sağlandığı kolayca görülmektedir. Burada sadece çarpma işleminin korunduğu gösterilecektir. $\forall\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{A}$ için

$$\alpha\beta=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)\eta+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)\eta^2+\cdots+(a_0b_{m-1}+a_1b_{m-2}+\cdots+a_{m-1}b_0)\eta^{m-1}$$

şeklindedir. Bu taktirde

$$f(\alpha\beta)=\begin{pmatrix} a_0b_0 & a_0b_1+a_1b_0 & \cdots & a_0b_{m-1}+a_1b_{m-2}+\cdots+a_{m-1}b_0 \\ 0 & a_0b_0 & \cdots & a_0b_{m-2}+a_1b_{m-3}+\cdots+a_{m-2}b_0 \\ 0 & 0 & \ddots & a_0b_{m-3}+a_1b_{m-4}+\cdots+a_{m-3}b_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0b_0 \end{pmatrix}$$ için matrislerdeki çarpma

işlemi kullanılarak

$$f(\alpha\beta)=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}=f(\alpha)\cdot f(\beta)$$ şeklinde elde

edilir.□

Şimdi $\boldsymbol{A}$ cebirinin $\{1,\eta,\eta^2,\eta^3,\ldots,\eta^{m-1}\}$ bazı ve $f\ :\ \boldsymbol{A}\to\mathbf{K}$ izomorfizmi kullanılarak $\mathbf{K}$ lineer cebirinin ilişkin bazı araştırılacaktır.

Herhangi bir

$$A_{m\times m}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}\in \mathbf{K} \text{ için}$$

$$A_{m\times m}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}=a_0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$+a_1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}+\cdots+a_{m-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\eta_0=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m\times m} \quad \text{burada } a_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases},$$

$$\eta_1=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times m} \quad \text{burada } a_{ij}=\begin{cases} 1, & j=i+1 \\ 0, & j\neq i+1 \end{cases},$$

$$\eta_2=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times m} \quad \text{burada } a_{ij}=\begin{cases} 1, & j=i+2 \\ 0, & j\neq i+2 \end{cases},$$

`

$$\eta_{m-1}=(a_{ij})=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times m}\quad \text{burada } a_{ij}=\begin{cases}1\,, & j=i+(m-1)\\0\,, & j\neq i+(m-1)\end{cases},$$

denilirse $A=a_0\eta_0+a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_{m-1}\eta_{m-1}$ olduğu görülür. Böylece $\mathbf{K}$ cebirinin $\{I_m,\eta_1,\eta_2,\eta_3,...,\eta_{m-1}\}$ şeklinde bir bazı elde edilir ki $0\le k\le m-1$ için $\{I_m,\eta_1,\eta_2,\eta_3,...,\eta_{m-1}\}$ bazının genel bir η_k elemanı, $0\le i,j\le m-1$ olmak üzere $\eta_k=(a_{ij})_{m\times m}$ için $a_{ij}=\begin{cases}1\,, & j=i+k\\0\,, & j\neq i+k\end{cases}$ şeklinde ifade edilebilir. Burada $\eta_0=I_m$ birim matris olduğu açıktır. Ayrıca

$$\eta=\eta_1=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$ alınırsa her η_k, $1\le k\le m-1$ için $\eta_k=\eta^k$ olduğu görülür.

Mesela

$$\eta^2=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&\ddots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\eta_2$$

ve $\eta^3=\eta^2\cdot\eta=\begin{pmatrix}0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&\ddots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\eta_3$ dir.

Şimdi de bu $m\times m$ tipindeki tüm üst üçgen matrislerin oluşturduğu özel $\mathbf{K}$ lineer cebiri üzerine bir M modülü inşaa edilerek onun bir bazı bulunacaktır. Sonra da Jukl'ın (1993) çalışmasında verilen aşağıdaki önermenin bu modüle uygulanması incelenecektir.

Yardımcı Teorem 3.3.3. $m-$mertebeli A cebiri üzerinde $n-$boyutlu serbest bir modül M olsun. Bu taktirde M, $\mathbb{R}$ üzerinde $mn-$boyutlu bir vektör uzayıdır (Jukl 1993).

Teorem 3.3.4. $\mathbf{M}=\mathbb{R}_n^m$ kümesi $\mathbf{K}$ lineer cebiri üzerinde bir modüldür ve

$$\left\{E_1=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&1&0&\cdots&0\end{pmatrix},\ldots,E_n=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\right\}$$

olmak üzere $\{E_1,E_2,\ldots,E_n\}$ kümesi $\mathbf{K}-$modül $\mathbf{M}=\mathbb{R}_n^m$ nin bir bazıdır (Erdoğan ve ark. 2014).

İspat. $\mathbf{M}$ nin $\mathbf{K}$ lineer cebiri üzerinde bir modül olduğu ve $\{E_1,E_2,...,E_n\}$ kümesinin lineer bağımsızlığı açıktır. Her $X\in\mathbf{M}$ için

$$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&\cdots&x_{1n}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&\cdots&x_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_{m1}&x_{m2}&x_{m3}&\cdots&x_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{m1}&x_{(m-1)1}&\cdots&x_{11}\\0&x_{m1}&\cdots&x_{21}\\\vdots&0&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&x_{m1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}x_{m2}&x_{(m-1)2}&\cdots&x_{12}\\0&x_{m2}&\cdots&x_{22}\\\vdots&0&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&x_{m2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&1&0&\cdots&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}x_{mn}&x_{(m-1)n}&\cdots&x_{1n}\\0&x_{mn}&\cdots&x_{2n}\\\vdots&0&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&x_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

olarak yazılabildiğinden $\{E_1,E_2,...,E_n\}$ kümesi $\mathbf{M}$ modülünü gerer, yani $Sp\{E_1,E_2,...,E_n\}=\mathbf{M}$ dir. O halde $\{E_1,E_2,...,E_n\}$ kümesi $\mathbf{K}-$modül $\mathbf{M}$ nin bir bazıdır.□

Herhangi $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ için

$$a_1E_1 + a_2E_2 + \cdots + a_nE_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$ olup $\mathbf{M}$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı

olarak düşünülürse $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ kümesi $\mathbf{M}$ nin

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \middle|\, a_i \in R,\ 1 \le i \le n \right\}$$ alt uzayını gerer, yani

$Sp\{E_1, E_2, ..., E_n\} = P_0$ dir. Dolayısıyla $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olan $\mathbf{M}$ nin bir bazı olamaz.

Burada $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathbf{M}$ vektör uzayının Yardımcı Teorem 3.3.3 e uygun bir bazının

$B = \{IE_1, IE_2, ..., IE_n, \eta E_1, \eta E_2, ..., \eta E_n, \eta^2 E_1, \eta^2 E_2, ..., \eta^2 E_n, \ldots, \eta^{m-1}E_1, \eta^{m-1}E_2, ..., \eta^{m-1}E_n\}$

kümesi olduğu dolayısıyla $\mathbf{M}$ nin $\mathbb{R}$ üzerinde mn-boyutlu bir vektör uzayı olduğu görülür. Gerçekten $\mathbb{R}_n^m$ kümesinin her

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisi için

$$X = \begin{pmatrix} x_{m1} & x_{(m-1)1} & \cdots & x_{11} \\ 0 & x_{m1} & \cdots & x_{21} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m1} \end{pmatrix} E_1 + \begin{pmatrix} x_{m2} & x_{(m-1)2} & \cdots & x_{12} \\ 0 & x_{m2} & \cdots & x_{22} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m2} \end{pmatrix} E_2 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{mn} & x_{(m-1)n} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{mn} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{mn} \end{pmatrix} E_n$$

şeklinde yazılabildiği önceden görülmüştü.

$$\begin{pmatrix} x_{mk} & x_{(m-1)k} & \cdots & x_{1k} \\ 0 & x_{mk} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{mk} \end{pmatrix}$$

matrisinin $\eta_0, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_{m-1}$ matrislerinin lineer birleşimi olarak $X = x_{mk}\eta_0 + x_{(m-1)k}\eta_1 + \cdots + x_{1k}\eta_{m-1}$ biçiminde yazılacağı kullanılarak X aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$(x_{m1}\eta_0 + x_{(m-1)1}\eta_1 + \cdots + x_{11}\eta_{m-1})E_1 + (x_{m2}\eta_0 + x_{(m-1)2}\eta_1 + \cdots + x_{12}\eta_{m-1})E_2 + \cdots + (x_{mn}\eta_0 + x_{(m-1)n}\eta_1 + \cdots + x_{1n}\eta_{m-1})E_n$$

Bu da $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olan $\mathbf{M}$ nin B tarafından gerildiğini gösterir. $\mathbf{M} = \mathbb{R}_n^m$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. $m \neq n$ ise $\mathbb{R}_n^m$ de $A_{m\times n}$ ve $B_{m\times n}$ matrisleri için çarpım işleminden bahsedilemez. Ancak $m = n$ ise $\mathbf{M}$ birimli bir asosyatif cebirdir. Eğer $\mathbb{R}$ cismi yerine bir değişmeli birimli $\mathfrak{R}$ halkası kullanılırsa $\mathbf{M} = \mathfrak{R}_n^m$ $\mathfrak{R}$ halkası üzerinde bir modül olup çarpma işlemi tanımlanamaz. Ancak $\mathbf{M} = \mathfrak{R}_m^m$ halinde çarpma işlemi tanımlı olup asosyatif ve birimli bir işlemdir.

3.4. Genel Modüller ve A-uzaylar

Bu kısımda vektör uzaylarındaki geçerliliği iyi bilinen bazı tanım ve teoremlerin modüllerdeki karşılıkları incelenmiştir. $\boldsymbol{A}-$modül M, bir $\boldsymbol{A}-$uzay olarak ele alınarak vektör uzaylarının bilinen bazı özellikleri $\boldsymbol{A}-$uzaylarda da araştırılmıştır. Ayrıca bir lokal halka üzerine inşaa edilen bir modüldeki lineer bağımsız vektörlerin incelendiği bir teorem verilmiştir. Son olarak da Jukl (1995) çalışmasında verilen Uyarı 2 nin detaylı ispatı verilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.4.1. $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ kümesinin M modülünün bir bazı olması için gerek ve yeter şart her $X \in M$ vektörünün $X = \sum_{i=1}^{n} c_i E_i$ şeklinde tek türlü ifade edilebilmesidir.

İspat. Önce $E_1, E_2, ..., E_n$ vektörlerinin M modülünün bir bazını oluşturduğu farz edilsin. Bu taktirde M nin her elemanı $E_1, E_2, ..., E_n$ vektörlerinin lineer birleşimi şeklinde tek türlü ifade edilebilir. Bu şöyle gösterilebilir: Tersine bir $X \in M$ nin $X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i E_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i E_i$ şeklinde iki türlü yazıldığı kabul edilsin. Buradan $\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \delta_i) E_i = 0$ elde edilir. $E_1, E_2, ..., E_n$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan her i için $\xi_i - \delta_i = 0$ olup buradan da $\xi_i = \delta_i$ bulunur.

Karşıt olarak M nin her elemanının $E_1, E_2, ..., E_n$ vektörlerinin lineer birleşimi şeklinde tek türlü ifade edilebildiği kabul edilsin. Bu taktirde $Sp\{E_1, E_2, ..., E_n\} = M$ olduğu açıktır. $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ kümesinin lineer bağımsızlığını göstermek için $X = \sum_{i=1}^{n} c_i E_i = 0$ olduğu kabul edilsin. Sıfır vektörünün $0 = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot E_i$ şeklinde de yazılabileceği bilinmektedir. Böylece yazılımın tekliği gereği $\sum_{i=1}^{n} c_i E_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot E_i = 0$ eşitliğinden tüm c_i ler 0 olmalıdır. Bu da $E_1, E_2, ..., E_n$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterir. Böylece $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ kümesi M nin bir bazıdır.□

Yardımcı Teorem 3.4.2. $\boldsymbol{A}$ bir reel plural cebir ve M de $\boldsymbol{A}$ üzerinde sonlu boyutlu bir serbest modül olsun. M modülünün lineer bağımsız bir $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ kümesi verilsin. Bu taktirde $U \notin Sp\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ özelliğinde lineer bağımsız bir U vektörü için $\{U, E_1, E_2, ..., E_n\}$ kümesi de lineer bağımsızdır.

İspat. $a, b_1, b_2, ..., b_n \in \boldsymbol{A}$ olmak üzere

$$aU + b_1 E_1 + b_2 E_2 + \cdots + b_n E_n = 0 \tag{3.4.1}$$

olduğu kabul edilsin. a birim eleman olsun. Buradan $U = -\sum_{i=1}^{n} a^{-1} b_i E_i$ şeklinde elde edilir ki bu da $U \in Sp\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ çelişkisine yol açar. Bu taktirde a birim eleman değildir. Yani $a = a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1} \in \boldsymbol{A}$ şeklindedir. Eğer a (3.4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$a_1\eta U + a_2\eta^2 U + \cdots + a_{m-1}\eta^{m-1}U + b_1E_1 + b_2E_2 + \cdots + b_nE_n = 0$$

elde edilir. Bu denklemin her iki yanı $\eta^{m-1} \neq 0 \in \boldsymbol{A}$ ile çarpılarak denklem $\eta^{m-1}b_1E_1 + \eta^{m-1}b_2E_2 + \cdots + \eta^{m-1}b_nE_n = 0$ şekline dönüşür. Burada hipotez gereği $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ kümesi lineer bağımsız bir küme olduğundan $\eta^{m-1}b_1 = 0$, $\eta^{m-1}b_2 = 0$,..., $\eta^{m-1}b_n = 0$ elde edilir. Ayrıca η^{m-1}, $\boldsymbol{A}$ reel plural cebrinde lineer bağımsız bir eleman olduğundan $b_1 = 0,\ b_2 = 0, ..., b_n = 0$ olmak zorundadır. Bu bulunan değerler (3.4.1) denkleminde yerine yazılırsa denklem $aU = 0$ şekline dönüşür. Hipotez gereği U lineer bağımsız bir eleman olduğundan $a = 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla (3.4.1) denklemindeki tüm katsayılar 0 olarak elde edildiğinden $\{U, E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ kümesi lineer bağımsız bir kümedir.□

Teorem 3.4.3. $\boldsymbol{A}$ maksimal ideali J olan bir lokal halka ve $M = \boldsymbol{A}^n$ olsun. Bu taktirde $u_1, u_2, ..., u_k \in \boldsymbol{A} \setminus J$ ve $x_{ij} \in J$ için aşağıdaki gibi tanımlanan

$\alpha_1 = (u_1, x_{21}, x_{31}, ..., x_{n1}),\ \alpha_2 = (x_{12}, u_2, x_{32}, ..., x_{n2}),\ \alpha_3 = (x_{13}, x_{23}, u_3, ..., x_{n3})$ $,..., \alpha_k = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, ..., u_k, x_{(k+1)k}, \ldots, x_{nk})$ vektörleri lineer bağımsızdır. Ayrıca $k = n$ için $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ kümesi M nin bir bazıdır (Erdoğan ve ark. 2014).

İspat. Önce $k = 1$ olsun. Bu durumda sadece $\alpha_1 = (u_1, x_{21}, x_{31}, ..., x_{n1}) \in M$ vektörü ile ilgilenilmektedir. $a_1 \in \boldsymbol{A}$ için $a_1\alpha_1 = 0$ olsun. Bu durumda

$a_1\alpha_1 = 0 \Rightarrow a_1\alpha_1 = (a_1u_1, a_1x_{21}, a_1x_{31}, ..., a_1x_{n1}) = (0,0,0,...,0)$ dır.

Birinci bileşenlerin eşitliğinden $a_1u_1 = 0$ ve buradan da u_1 birim olduğundan $a_1 = 0$ elde edilir. Böylece α_1 vektörü lineer bağımsızdır.

Şimdi $k = 2$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 = (u_1, x_{21}, x_{31}, ..., x_{n1})$ ve $\alpha_2 = (x_{12}, u_2, x_{32}, ..., x_{n2})$ vektörleri ile ilgilenilmektedir. $a_1, a_2 \in \boldsymbol{A}$ için $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ olsun. Bu durumda $a_1(u_1, x_{21}, x_{31}, ..., x_{n1}) + a_2(x_{12}, u_2, x_{32}, ..., x_{n2}) = (0,0,0,...,0)$ denkleminden ilk iki bileşen eşitlenerek $a_1u_1 + a_2x_{12} = 0$ ve $a_1x_{21} + a_2u_2 = 0$ denklemleri elde edilir. Birinci denklemden

$$a_1 = -a_2x_{12}u_1^{-1} \tag{3.4.2}$$

bulunur. Bu değer ikinci denklemde yerine konulursa

$$a_2(u_2 - x_{12}u_1^{-1}x_{21}) = 0 \tag{3.4.3}$$

denklemi elde edilir.

(3.4.3) denkleminde $u_2 \in \boldsymbol{A} \setminus J$ ve $x_{12}u_1^{-1}x_{21} \in J$ olduğundan $u_2 - x_{12}u_1^{-1}x_{21} \in \boldsymbol{A} \setminus J$ dir. Böylece $a_2 = 0$ bulunur. $a_2 = 0$ değeri (3.4.2) denkleminde yerine yazılırsa $a_1 = 0$ bulunur. Bu α_1 ve α_2 vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterir.

İşleyişi anlamak için son olarak $k = 3$ durumu incelenecektir. Bu durumda $\alpha_1 = (u_1, x_{21}, x_{31}, ..., x_{n1})$, $\alpha_2 = (x_{12}, u_2, x_{32}, ..., x_{n2})$, $\alpha_3 = (x_{13}, x_{23}, u_3, ..., x_{n3}) \in M$ vektörleri ile ilgilenilmektedir.

$a_1, a_2, a_3 \in \boldsymbol{A}$ için $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ olsun. Bu taktirde denklemin ilk üç bileşeni eşitlenerek

$$a_1u_1 + a_2x_{12} + a_3x_{13} = 0 \tag{3.4.4}$$

$$a_1x_{21} + a_2u_2 + a_3x_{23} = 0 \tag{3.4.5}$$

$$a_1x_{31} + a_2x_{32} + a_3u_3 = 0 \tag{3.4.6}$$

denklemleri elde edilir. (3.4.4) denkleminden $a_1 = -(a_2x_{12} + a_3x_{13})u_1^{-1}$ bulunur. Bulunan a_1 değeri (3.4.5) nolu denklemde kullanılarak

$$a_2(-x_{12}u_1^{-1}x_{21} + u_2) + a_3(-x_{13}u_1^{-1}x_{21} + x_{23}) = 0 \tag{3.4.7}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $x_{12}u_1^{-1}x_{21} \in J$ ve $u_2 \in \boldsymbol{A} \setminus J$ olduğundan

$-x_{12}u_1^{-1}x_{21}+u_2 \in \boldsymbol{A}\setminus J$ dir. Böylece

$$a_2 = a_3(x_{13}u_1^{-1}x_{21}-x_{23})(-x_{12}u_1^{-1}x_{21}+u_2)^{-1} \tag{3.4.8}$$

elde edilir. Eğer a_1 ve a_2 değerleri (3.4.6) denkleminde yerine konur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$a_3[(x_{23}-x_{13}u_1^{-1}x_{21})(u_2-x_{12}u_1^{-1}x_{21})^{-1}x_{12}u_1^{-1}x_{31}-x_{13}u_1^{-1}x_{31}+(x_{13}u_1^{-1}x_{21}-x_{23})(u_2-x_{12}u_1^{-1}x_{21})^{-1}x_{32}+u_3]=0$$

denklemi elde edilir. Bu son denklemde

$$(x_{23}-x_{13}u_1^{-1}x_{21})(u_2-x_{12}u_1^{-1}x_{21})^{-1}x_{12}u_1^{-1}x_{31}-x_{13}u_1^{-1}x_{31}+(x_{13}u_1^{-1}x_{21}-x_{23})(u_2-x_{12}u_1^{-1}x_{21})^{-1}x_{32}+u_3 \in \boldsymbol{A}\setminus J$$

olduğundan $a_3=0$ olarak elde edilir. $a_3=0$ değeri sırasıyla (3.4.8) ve (3.4.4) denklemlerinde kullanılarak $a_2=0$ ve $a_1=0$ bulunur.

Buradan α_1,α_2 ve α_3 vektörlerinin lineer bağımsızlığı elde edilir.

k herhangi bir pozitif tamsayı iken $\alpha_1=(u_1,x_{21},x_{31},...,x_{n1})$, $\alpha_2=(x_{12},u_2,x_{32},...,x_{n2})$, $\alpha_3=(x_{13},x_{23},u_3,...,x_{n3}),...,\alpha_k=(x_{1k},x_{2k},x_{3k},...,u_k,x_{(k+1)k},...,x_{nk})$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğu benzer yolla $\sum_{i=1}^{k}a_i\alpha_i=0$ denkleminin ilk k bileşeni eşitlenip birinci denklemden başlanarak bulunan a_i değerleri bir sonraki denklemde yerine konulursa son denklemden $\alpha_k=0$ elde edilir. Bu değer geriye doğru kullanılarak her i, $1\le i\le k$ için $a_i=0$ elde edilir. Dolayısıyla $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu sonucuna ulaşılır.□

Şimdi de vektör uzaylarında geçerli olan bazı tanım ve önermelerin $\boldsymbol{A}-$uzaylardaki karşılıkları incelenecektir. Bunun için önce $\boldsymbol{A}-$uzay M için direkt toplam tanımı verilecektir.

Tanım 3.4.4. M bir $\boldsymbol{A}-$uzay olsun. K ve L de M nin $\boldsymbol{A}-$altuzayları olsun. Eğer $M=K+L$ ve $K\cap L=\{0\}$ şartları sağlanıyorsa M ye K ve L nin direkt toplamı denir ve $M=K\oplus L$ şekilde gösterilir.

Yardımcı Teorem 3.4.5. K ve L bir M $\boldsymbol{A}-$uzayının $\boldsymbol{A}-$altuzayları olsun. Bu taktirde $M = K \oplus L$ olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in M$ vektörünün $\alpha_1 \in K$ ve $\alpha_2 \in L$ olmak üzere $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ şeklinde tek türlü ifade edilebilmesidir.

İspat. $M = K \oplus L$ olsun. Tanım gereği her $\alpha \in M$ için $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ olacak şekilde $\alpha_1 \in K$ ve $\alpha_2 \in L$ elemanları vardır. Aynı zamanda $\beta_1 \in K$ ve $\beta_2 \in L$ için de $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ olduğu kabul edilsin. O zaman $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ eşitliğinden $\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2$ bulunur ki $\alpha_1 - \beta_1 \in K$ ve $\beta_2 - \alpha_2 \in L$ dolayısıyla $\alpha_1 - \beta_1, \beta_2 - \alpha_2 \in K \cap L = \{0\}$ olur. Buradan $\alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \beta_2 - \alpha_2 = 0$ yani $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2$ elde edilir. Bu da yazılımın tek olduğunu gösterir.

Karşıt olarak her $\alpha \in M$ vektörünün $\alpha_1 \in K$ ve $\alpha_2 \in L$ olmak üzere $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ şeklinde tek türlü yazılabildiği kabul edilsin. Bu $M = K + L$ olduğunu ifade eder. O halde $K \cap L = \{0\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $\alpha \in K \cap L$ için $0, \alpha \in K$ ve $0, \alpha \in L$ olduğundan $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha \in K + L$ yazılabilir. Yazılımın tekliği kabulünden $\alpha = 0$ elde edilir, yani $K \cap L = \{0\}$ dır. O halde $M = K \oplus L$ dir.□

Yukarıda verilen direkt toplam tanımı aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:
M bir $\boldsymbol{A}-$uzay ve $M_1, M_2, ..., M_k$ de M nin $\boldsymbol{A}-$altuzayları olsunlar. Eğer

1) $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_k$

2) $1 \leq j \leq k-1$ özelliğindeki her j için $(M_1 + M_2 + \cdots + M_j) \cap M_{j+1} = \{0\}$ dır.

şartları sağlanıyorsa, M $\boldsymbol{A}-$uzayı $M_1, M_2, ..., M_k$ $\boldsymbol{A}-$altuzaylarının direkt toplamıdır denir ve $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$ şeklinde gösterilir.

Yardımcı Teorem 3.4.6. $M_1, M_2, \ldots, M_k$ bir $\boldsymbol{A}-$uzay M nin $\boldsymbol{A}-$altuzayları olsun. Bu taktirde $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$ olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in M$ vektörünün $\alpha_i \in M_i$ olmak üzere $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ şeklinde tek türlü ifade edilebilmesidir.

İspat. $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$ olsun. O zaman her $\alpha \in M$ vektörü için $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ olacak şekilde $\alpha_i \in M_i$ vektörleri tanım gereği vardır. Aynı zamanda $\beta_i \in M_i$ olmak üzere $\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} + \alpha_k = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k-1} + \beta_k$ eşitliğinden $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + (\alpha_{k-1} - \beta_{k-1}) = \beta_k - \alpha_k$ elde edilir. Eşitliğin sol tarafı $M_1 + M_2 + \cdots + M_{k-1}$ uzayının ve sağ tarafı ise M_k uzayının elemanı olduğundan $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + (\alpha_{k-1} - \beta_{k-1}),\ \beta_k - \alpha_k \in (M_1 + M_2 + ... + M_{k-1}) \cap M_k$ olur. Tanımdan $\beta_k - \alpha_k = 0$ ve $(\alpha_1 - \beta_1) + \cdots + (\alpha_{k-1} - \beta_{k-1}) = 0$ bulunur. Son eşitlikten de $(\alpha_1 - \beta_1) + \cdots + (\alpha_{k-2} - \beta_{k-2}) = \beta_{k-1} - \alpha_{k-1}$ ve dolayısıyla $\beta_{k-1} - \alpha_{k-1} = 0$ bulunur. İşlemlerine böyle devam ederek $\forall i,\ 1 \le i \le k$ için $\beta_i - \alpha_i = 0$ yani $\beta_i = \alpha_i$ bulunur. Bu da yazılımın tek olduğunu gösterir.

Karşıt olarak her $\alpha \in M$ vektörünün $\alpha_i \in M_i$ olmak üzere $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ şeklinde tek türlü yazılabildiği kabul edilsin. Bu $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_k$ olduğunu ifade eder. $1 \le j \le k-1$ olmak üzere herhangi bir $\alpha \in (M_1 + M_2 + \cdots + M_j) \cap M_{j+1}$ vektörü için $0, \alpha \in M_1 + M_2 + \cdots + M_j$ ve $0, \alpha \in M_{j+1}$ yazılabilir. O zaman $\alpha = 0 + \alpha = \alpha + 0$ ifadesi $0 + 0 + \cdots + 0 + \alpha = \alpha + 0 + 0 + \cdots + 0$ şeklinde de yazabileceğinden yazılım tekliği gereği $\alpha = 0$ olur. Dolayısıyla $1 \le j \le k-1$ özelliğindeki her j için $(M_1 + M_2 + \cdots + M_j) \cap M_{j+1} = \{0\}$ olur. Bu da $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$ olduğunu gösterir.□

Son olarak Jukl (1995) tarafından yapılan çalışmada Uyarı 2 olarak verilen ifadenin bir önerme olarak açık ispat verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.4.7. $\boldsymbol{A}$ lokal halkası üzerindeki M modülünün $\boldsymbol{A}-$uzay olması için gerek ve yeter şart M nin sonlu boyutlu bir serbest modül olmasıdır (Erdoğan ve ark. 2014).

İspat. M, $\boldsymbol{A}$ lokal halkası üzerinde $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ bazına sahip serbest bir modül olsun. Şimdi $\boldsymbol{A}-$modül M nin bir $\boldsymbol{A}-$uzay olduğu gösterilecektir:
Her $\beta \in M$ için $\beta = b_1E_1 + \cdots + b_nE_n \in \boldsymbol{A}E_1 + \cdots + \boldsymbol{A}E_n$ şeklinde yazılabilir. $\beta \in \sum_{i \neq j} \boldsymbol{A}E_i \bigcap \boldsymbol{A}E_j$ olsun. Bu taktirde

$$\beta = a_1E_1 + \cdots + a_{j-1}E_{j-1} + a_{j+1}E_{j+1} + \cdots + a_nE_n = a_jE_j$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlik

$$a_1E_1 + a_2E_2 + \cdots + a_{j-1}E_{j-1} - a_jE_j + a_{j+1}E_{j+1} + \cdots + a_nE_n = 0$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu denklemde $E_1, E_2, ..., E_n$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan $1 \leq i \leq n$ için tüm katsayılar 0 olmak zorundadır. Böylece $\beta = 0$ elde edilir. O halde

1) $M = \boldsymbol{A}E_1 + \boldsymbol{A}E_2 + \cdots + \boldsymbol{A}E_n$

2) $\sum_{i \neq j} \boldsymbol{A}E_i \cap \boldsymbol{A}E_j = \{0\}$

şartları sağlandığından $M = \boldsymbol{A}E_1 \oplus \boldsymbol{A}E_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}E_n$ dır.

Şimdi de $1 \leq i \leq n$ için $f_i : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}E_i$ fonksiyonlarının izomorfizm olduğu gösterilecektir. Her $X, Y \in \boldsymbol{A}$ için

$$f_i(X+Y) = (X+Y)E_i = XE_i + YE_i = f_i(X) + f_i(Y)$$

ve her $X \in \boldsymbol{A}$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$f_i(\lambda X) = (\lambda X)E_i = \lambda(XE_i) = \lambda f_i(X)$$

olur. Böylece f_i fonksiyonları altında toplama ve skalarla çarpma işlemleri korunur.

Herhangi $X,Y \in \boldsymbol{A}$ için $f_i(X) = f_i(Y)$ olsun. Buradan $XE_i = YE_i \Rightarrow (X-Y)E_i = 0$ elde edilir. $1 \leq i \leq n$ için E_i vektörleri lineer bağımsız olduğundan $X - Y = 0$ ve böylece $X = Y$ elde edilir. Dolayısıyla $\forall$ f_i 1-1 dir.

Son olarak da $1 \leq i \leq n$ için f_i fonksiyonlarının örten olduğu gösterilecektir:

Her $XE_i \in \boldsymbol{A}E_i$ için $f_i(X) = XE_i$ olacak şekilde $X \in \boldsymbol{A}$ var olduğundan f_i örtendir.

Tersine M nin $\boldsymbol{A}$ lokal halkası üzerine sonlu boyutlu bir $\boldsymbol{A}-$uzay olduğu kabul edilsin. M sonlu boyutlu bir $\boldsymbol{A}-$uzay olduğundan M de $E_1, E_2, ..., E_n$ vektörleri vardır ve böylece M nin sonlu bir bazı oluşturulabilir. Bu da M nin sonlu boyutlu bir serbest modül olduğunu gösterir.□

4. LOKAL HALKALAR ÜZERİNE KURULAN PROJEKTİF KOORDİNAT UZAYLAR

4.1. Giriş

Bu bölümde projektif koordinat uzay kavramı ele alınıp kuruluşu farklı kaynaklardan araştırılmıştır. Bunun için önce Machala (1980) tarafından yapılan çalışma ve daha sonra da Jukl ve Snasel (2009) tarafından yapılan çalışma ele alınmıştır. Bu çalışmalarda verilen projektif koordinat uzay tanımı ve kuruluşu karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Burada Jukl ve Snasel (2009) tarafından yapılan çalışmada verilen n-boyutlu projektif koordinat uzay tanımının Machala (1980) tarafından yapılan çalışmada verilen tanımın bir çeşit uyarlaması olduğu karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir. Daha sonra Machala (1980) tarafından yapılan çalışmada verilen projektif koordinat uzay tanımına ilki detaylı olmak üzere iki örnek verilmiştir.

Bununla birlikte literatürde de iyi bilinen vektör uzayları üzerine kurulan projektif uzay kavramı Hirschfeld (1998) tarafından yapılan çalışmadan incelenerek bu yapı modül üzerine bir uzay kurulmasına genelleştirilmiştir. Daha sonra kurulan bu uzay ile Jukl ve Snasel (2009) tarafından yapılan çalışmada verilen projektif koordinat uzayın izomorf olduğu gösterilmiştir. Son olarak sonlu projektif koordinat uzay ile ilgili bazı sayısal sonuçlar elde edilmiş ve bunlar sonlu örnekler üzerinde doğrulanmıştır.

4.2. Temel Bilgiler

Burada bölümün temel kavramı olan projektif koordinat uzay tanımına hazırlık için Machala (1980) tarafından yapılan çalışmadan alınan, gerekli bazı tanımlar ve bilgiler verilecektir.

Tanım 4.2.1. (P,L) bir geometrik yapı, (P',L') bir projektif uzay ve Φ P den P' ne bir homomorfizm olsun. Herhangi $X,Y \in P$ için $\Phi(X) \neq \Phi(Y)$ ise X ve Y noktaları P-farklıdır denir. j bir indis kümesi olmak üzere P' nün $\Phi(B)=\{\Phi(M_v) | v \in j\}$ alt kümesi bağımsız, yani her $v' \in j$ için $j_{v'} = j \setminus \{v'\}$ olmak üzere $\Phi(M_{v'}) \notin Sp\{\Phi(M_\mu) | \mu \in j_{v'}\}$ şartı sağlanıyorsa, P nin $B=\{M_v | v \in j\}$ alt kümesine P-bağımsız bir küme denir (Machala 1980).

Tanım 4.2.2. (P,L) bir geometrik yapı, (P',L') bir projektif uzay ve Φ P den P' ne bir homomorfizm olsun. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa (P,P',Φ) üçlüsüne bir *PK-uzay* (*homomorfizm ile bir projektif uzay*) denir (Machala 1980).

Aksiyom 1) P-farklı herhangi iki noktadan L nin tam olarak bir doğrusu geçer.

Aksiyom 2) $B=\{M_v | v \in j\}$ P-bağımsız bir küme ve $U = Sp\{M_v | v \in j\}$ ise $\Phi(U) = Sp\{\Phi(M_v) | v \in j\}$ dir.

Aksiyom 3) d ve H, P nin $\Phi(d) \not\subset \Phi(H)$ olacak şekildeki bir doğrusu ve bir hiper düzlemi olsun. Bu taktirde d ve H tam olarak bir ortak noktaya sahiptir.

Aksiyom 4) P nin bir düzleminde bulunan $\Phi(a) \neq \Phi(b)$ özelliğindeki herhangi iki a,b doğrusu bir ortak noktaya sahiptir.

R bir lokal halka ve R_0, R nin tersi olmayan elemanlarının oluşturduğu iki yanlı maksimal ideali olsun. R^* ile $R \setminus R_0$ fark kümesi gösterilecektir.

M bir R lokal halkası üzerinde birimli bir serbest modül olsun. $j \neq \emptyset$ indis kümesi olmak üzere M nin bir $B=\{x_v | v \in j\}$ bazı vardır ve $\forall x \in M$ elemanı $x = \sum_{v \in j} \alpha_v x_v$ formunda tek türlü yazılabilir. M_0 ile $\forall v \in j$ için $\beta_v \in R_0$ olmak üzere $u = \sum_{v \in j} \beta_v x_v$ elemanlarından oluşan küme gösterilecektir. Bu $M_0 = \{\sum_{v \in j} \beta_v x_v | \beta_v \in R_0, x_v \in B\}$ kümesi

M nin bir alt modülüdür. $M^* = M \setminus M_0$ olsun. M deki bir $u = \sum_{v \in j} \beta_v x_v$ vektörünün sadece bir tane β_v katsayısı bile R_0 da değilse $u \notin M_0$ dolayısıyla $u \in M^*$ olur. Burada $R' = R / R_0$ ve $M' = M / M_0$ kurulsun. Bu taktirde tüm $q \in R$, $x \in M$ elemanları için $q + R_0 = q' \in R'$ ve $x + M_0 = x' \in M'$ dır.

Bu durumda $\forall \alpha', \beta' \in R'$ için

$$\alpha' + \beta' = (\alpha + \beta)' \text{ ve } \alpha'\beta' = (\alpha\beta)'$$

şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri altında R' kümesi bir cisim olur. Mesela $(R', +)$ grubunun etkisiz elemanı $0 + R_0 = R_0$ olup $R' \setminus \{R_0\}$ kümesinin herhangi bir α' elemanı için $\alpha' = \alpha + R_0$ olacak şekilde bir $\alpha \in R^*$ elemanı vardır. Dolayısıyla $\exists\, \alpha^{-1} \in R^*$ vardır. Bu durumda $\alpha^{-1} + R_0$ elemanı $\alpha + R_0 = \alpha'$ elemanının tersi olur. Çünkü $(\alpha + R_0)(\alpha^{-1} + R_0) = \alpha\alpha^{-1} + R_0 = 1 + R_0$ dır. Burada $1 + R_0$ elemanının R' deki çarpma işleminin etkisiz elemanı olduğu kolayca görülür.

Ayrıca $\forall x', y' \in M'$ için $x' + y' = (x + y)'$ şeklinde tanımlanan toplama işlemi altında $(M', +)$ bir değişmeli grup olur.

$R' \times M'$ kümesinden M' kümesine $\forall q' \in R'$ ve $\forall x' \in M'$ için

$q'x' = (qx)'$ şeklinde tanımlanan dönüşüm iyi tanımlıdır. Çünkü $\alpha' = q'$, $y' = x'$ olacak şekilde $\alpha', q' \in R'$, $x', y' \in M'$ elemanları alındığında $\alpha = q + \xi$, $y = x + a$ olacak şekilde $\xi \in R_0$, $a \in M_0$ elemanları vardır.
$\alpha y = (q + \xi)(x + a) = qx + \xi x + qa + \xi a = qx + b$ için $b = \xi x + qa + \xi a \in M_0$ dır. Böylece $(\alpha y)' = (qx + b) + M_0 = (qx + M_0) + (b + M_0) = (qx + M_0) + M_0 = qx + M_0$ ve dolayısıyla $(\alpha y)' = (qx)'$ dır.

$\forall q' \in R'$ ve $\forall x' \in M'$ için $(q', x') \to (qx)'$ şeklinde tanımlanan $R' \times M' \to M'$ dış işlemi ile M' kümesi R' cismi üzerinde bir vektör uzayıdır (Machala 1980).

Tanım 4.2.3. R bir lokal halka, R_0 onun maksimal ideali ve M de R lokal halkası üzerine kurulan birimli serbest bir modül olsun. M nin boş olmayan bir S alt kümesi verilsin. $x_1, x_2, ..., x_k \in S$ ve $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in R$ için

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in M_0 \Rightarrow \forall i \text{ için } \alpha_i \in R_0$$

şartı sağlanıyor ise S alt kümesi ***R-bağımsız***dır aksi halde ***R-bağımlı***dır denir (Machala 1980).

4.3. Projektif Koordinat Uzay

Bu kısımda bir lokal halka üzerine kurulan projektif koordinat uzay kavramı, sırasıyla, Machala (1980) ve Jukl ve Snasel (2009) tarafından yapılan çalışmalardan karşılaştırmalı olarak tanıtılmaktadır. Ayrıca projektif koordinat uzay kavramı ilki detaylı olmak üzere iki örnek ile incelenmektedir.

1. Yapı. M bir R lokal halkası üzerine kurulan serbest bir modül olsun. $x \in M^*$ olmak üzere M nin her bir $X = Rx$ alt modülü bir nokta belirtir. Bütün noktaların kümesi $\{Rx \mid x \in M^*\}$ şeklinde olup $P(M)$ ile gösterilecektir.

M nin her bir boş olmayan U altkümesi için U daki M^* a ait x elemanlarının belirlediği Rx noktalarının

$$\{Rx \mid x \in M^* \cap U\}$$

kümesi U_P ile gösterilsin.

P, $R-$bağımsız iki eleman tarafından üretilen bir alt modül olsun. Bu taktirde P_P ye $P(M)$ nin bir doğrusu denir. $R-$bağımsız $x, y \in M$ için $\alpha, \beta \in R_0$ ise $z = \alpha x + \beta y \in M_0$ olup $P = Sp\{x, y\}$ alt modülünün elemanıdır. $P_p = \{Rx \mid x \in M^* \cap P\}$

doğrusu oluşturulurken bu tür elemanlar elenmektedir, yani Rz doğrunun noktası olarak alınmamaktadır.

$P(M)$ de üzerinde olma bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

Ra noktasının P_P doğrusunun üzerinde olması için gerek ve yeter şart $Ra \subset P$ olmasıdır.

Tanımlanan nokta, doğru ve üzerinde olma bağıntısıyla $P(M)$ bir geometrik yapı olarak düşünülecektir.

$P(M)$ de Rx, Ry noktalarının $R-$bağımsızlığı $x, y \in M$ nin $R-$bağımsızlığı olarak tanımlanır. $P(M)$ deki $R-$bağımsız olan iki noktaya $R-$farklıdır da denir. Aksi taktirde bu noktalar $R-$eştir denir.

M' vektör uzayının yardımı ile $P(M')$ projektif koordinat uzayı aşağıdaki gibi belirlenir:

$P(M')$ uzayının noktaları M' nün 1-boyutlu alt uzaylarıdır. Bir $x' \in M'$ için $x' = x + M_0 = \{x, x+m_1, x+m_2, ...\}$ dır. $x \notin M_0$ ise $x' \in M'$ lineer bağımsız olup $Sp\{x'\} = R'x' = \{0x', r_1'x', r_2'x', ...\}$ $(r' \in R')$ şeklindedir.

$P(M')$ uzayının doğruları ise P', M' nün 2-boyutlu bir alt uzayı olmak üzere P'_P noktalar kümesidir.(Ayrıntılı bilgi için Lenz (1965) ve Lingenberg (1969) tarafından yapılan çalışmalara bakılabilir.) Burada $x', y' \in M'$ için x', y' nün lineer bağımsızlığı $a'x' + b'y' = 0' \in R' \Rightarrow a' = b' = 0' \in R'$ şartı ile tanımlanır.

$P' = Sp\{x', y'\}$ ve $P'_P = Sp\{R'x', R'y'\} \setminus \{R'M_0\}$ dır. Bunu $Sp\{R'x', R'y'\} = \{R'z' \mid z' \in Sp\{x', y'\}\}$ ve $P'_P = \{R'z' \mid z' \in P' \setminus M_0'\}$ şeklinde de ifade edebiliriz.

Bir $R'x'$ noktasının P'_P doğrusunun üzerinde olması için gerek ve yeter şart $R'x' \subset P'$ olmasıdır. K bir cisim ve V onun üzerinde bir vektör uzayı iken $P(M')$ uzayının oluşturulmasındaki metot ile oluşturulacak $P(V)$ uzayı bir projektif uzaydır (Hirschfeld

1998). Burada R' bir cisim ve M' onun üzerinde bir vektör uzayı olduğundan $P(M')$ bir projektif uzay olur.

Φ, $P(M)$ den $P(M')$ projektif uzayına $\forall\ Rx \in P(M)$ için $\Phi(Rx) = R'x'$ olacak şekilde tanımlı bir homomorfizm olsun. Bu Φ homomorfizmi altında $P(M)$ nin boştan farklı her U_P alt kümesinin görüntüsü

$$\Phi(U_P) = \{\Phi(x) \mid x \in U_P\}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Bu tanımlar altında $(P(M), P(M'), \Phi)$ üçlüsü homomorfizm ile projektif koordinat uzay (veya kısaca bir PK-koordinat uzay) oluşturur (Machala 1980).

Jukl ve Snasel, 2009 yılında yaptıkları çalışmada yukarıda verilen PK-koordinat uzay tanımını kendi çalışmalarına aşağıdaki gibi uyarlamışlardır:

2. Yapı. R maksimal ideali I olan bir lokal halka olsun. $M = R^{n+1}$ kurulsun. $IM = I^{n+1}$ olmak üzere $\overline{M} = M / IM$ ve $\overline{R} = R / I$ olarak tanımlansın.

$f : M \to \overline{M}$ doğal homomorfizm olsun. Bu taktirde $f(x)$, $\overline{M}$ nın IM den farklı yani $x \notin I^{n+1}$ olacak şekilde bir elemanı olmak şartıyla M nin her 1-boyutlu $Sp\{x\}$ alt modülüne bir *nokta* denir. Noktalar kümesi N ile gösterilmek üzere, $N = \{Sp\{x\} \mid x \notin I^{n+1}\}$ şeklindedir.

$Sp\{f(x), f(y)\}$ $\overline{M}$ nın 2-boyutlu bir alt uzayı olmak şartıyla M nin her 2-boyutlu $Sp\{x, y\}$ alt modülüne bir *doğru* denir. Doğrular kümesi D ile gösterilmek üzere

$$D = \{Sp\{x, y\} \mid Sp\{f(x), f(y)\} \quad \overline{M} \text{ nın 2-boyutlu bir alt uzayı}\}$$

şeklindedir.

$\circ$ üzerinde olma bağıntısı kapsanma olarak tanımlıdır. Yani

$$Sp\{x\} \circ Sp\{u,v\} \Leftrightarrow Sp\{x\} \subset Sp\{u,v\}$$

şeklindedir.

Bu şekilde tanımlanan geometrik yapıya R *lokal halkası üzerine kurulan n-boyutlu koordinat projektif Klingenberg uzay* denir ve P_R ile gösterilir (Jukl ve Snasel 2009).

Şimdi farklı iki çalışmada verilen, 1. yapı ve 2. yapı olarak tanıtılan projektif koordinat uzay kavramı için tanımlardaki ifadeler ve kullanılan semboller birbiri ile karşılaştırılacaktır.

Her iki yapıda da bir R lokal halkası ve R nin bir maksimal ideali alınmıştır. Yapılarda kullanılan maksimal idealler sırasıyla R_0 ve I sembolleri ile gösterilmiştir. 1. yapıda M $n+1$ boyutlu bir serbest modül olarak alınırsa her iki yapıda R halkası üzerine M modülü kurulmuştur. Tüm bileşenleri maximal idealde olan elemanların oluşturduğu küme için sırasıyla M_0 ve IM sembolleri kullanılmıştır. R_0 ile I ve M_0 ile IM nin izomorf olduğu açıkça görülür. Ayrıca bunlar yardımı ile aşağıdaki gibi oluşturulan $M' = M / M_0$, $R' = R / R_0$ ve $\overline{M} = M / IM$, $\overline{R} = R / I$ yapıları için M' ile $\overline{M}$, R' ile $\overline{R}$ nin izomorf olduğu kolayca görülür.

1. yapıda $x \in M^*$ olmak üzere her bir $X = Rx$ alt modülüne bir nokta denilmiştir. Burada verilen $x \in M^*$ şartını 2. yapıda kullanılan $f(x) \neq IM$ yani $x \notin I^{n+1}$ şartı karşılamaktadır. 1. yapıda verilen $X = Rx$ $1-$boyutlu alt modülü, 2. yapıdaki $Sp\{x\}$ 1-boyutlu alt modülüne karşılık gelir. Yani 1. yapıda bütün noktalar kümesi olan $P(M) = \{Rx \mid x \in M^*\}$ kümesine karşılık 2. yapıda $\{Sp\{x\} \mid x \notin I^{n+1}\}$ kümesi kullanılmıştır.

1. yapıda $P(M') = \{R'x' \mid x' \in M' \setminus \{M_0\}\} = \{R'x' \mid x' \in M'^*\}$ olarak verilmiştir. Buna karşılık 2. yapıda $P(\overline{M})$ oluşturulmamıştır. Ancak $\{Sp\{f(x)\} \mid f(x) \neq IM\}$ olarak alınabilir. $P(\overline{M})$ de $f(x) \neq IM$ yani $x \notin I^{n+1}$ olmak üzere $Sp\{f(x)\}$ $1-$boyutlu bir alt uzay olup nokta olarak tanımlanabilir. O zaman $Sp\{f(x)\}$ için $x' = f(x)$ yazılırsa

$Sp\{f(x)\} = R'x'$ olacağı görülür. Burada $\forall$ $f(x) = x + IM$, $f(y) = y + IM \in \overline{M}$ için $P' = Sp\{f(x), f(y)\}$ $\overline{M}$ nın $2-$boyutlu bir alt uzayı olmak üzere P'_P $P(\overline{M})$ nın bir doğrusu olarak tanımlanırsa $P'_P = P' \setminus \{IM\}$ şeklinde elde edilir. Üzerinde olma bağıntısı da kapsanma olarak tanımlanır. Burada $\forall$ $Sp\{x\} \in P(M)$ için $\Psi(Sp\{x\}) = Sp\{f(x)\}$ şeklinde $\Psi : P(M) \to P(\overline{M})$ dönüşümü tanımlansın. O zaman 1. yapıdaki $\Phi : P(M) \to P(M')$ homomorfizminin karşılığı $\Psi : P(M) \to P(\overline{M})$ dır.

Sonuç olarak farklı iki yapıda tanımlanan projektif koordinat uzay kavramı için tanımlardaki ifadelerin ve kullanılan sembollerin birbiri ile karşılaştırılmasından, 1. yapıda M olarak $(n+1)-$boyutlu R^{n+1} standart modülü ve dolayısıyla M_0 olarak $R_0^{\,n+1}$ alt modülünün kullanılması özel halinde elde edilecek PK-uzayının 2. yapıdaki PK-uzayı ile aynı olduğu görülmektedir.

Şimdi yukarıda verilen PK-koordinat uzayına iki örnek verilecektir. Bu örneklerde halkanın mertebesi ve uzayın boyutu büyüdükçe işlemlerin elle kontrolünün zorluğu görülecektir. 2-boyutlu uzay örneği detaylı olarak 3-boyutlu uzay örneği ise kısa bazı açıklamalarla tanıtılacaktır.

Örnek 4.3.1. $R = \mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ lokal halkası alınsın. Burada $R_0 = \{0,2\}$ olduğu açıktır. $n = 2$ alarak $M = R^{2+1} = R^3$ serbest modülü kurulsun. Buna göre $M = \mathbb{Z}_4^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_4\}$ için

$$M = \left\{ \begin{array}{l} (0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,0,3),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,1,3), \\ (0,2,0),(0,2,1),(0,2,2),(0,2,3),(0,3,0),(0,3,1),(0,3,2),(0,3,3), \\ (1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),(1,0,3),(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3), \\ (1,2,0),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,0),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3), \\ (2,0,0),(2,0,1),(2,0,2),(2,0,3),(2,1,0),(2,1,1),(2,1,2),(2,1,3), \\ (2,2,0),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,0),(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3), \\ (3,0,0),(3,0,1),(3,0,2),(3,0,3),(3,1,0),(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3), \\ (3,2,0),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,0),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3) \end{array} \right\}$$

şeklindedir. Burada $M_0 = \{x' = (x_1', x_2', x_3') \,|\, x_1', x_2', x_3' \in R_0\}$ için $M^* = M - M_0$ olduğundan

$$M^* = \left\{ \begin{array}{l} (0,0,1),(0,0,3),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,1,3),(0,2,1),(0,2,3), \\ (0,3,0),(0,3,1),(0,3,2),(0,3,3),(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),(1,0,3), \\ (1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3), \\ (1,3,0),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3),(2,0,1),(2,0,3),(2,1,0),(2,1,1), \\ (2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,2,3),(2,3,0),(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3), \\ (3,0,0),(3,0,1),(3,0,2),(3,0,3),(3,1,0),(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3), \\ (3,2,0),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,0),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3) \end{array} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$x \in M^*$ olmak üzere M nin her bir $X = Rx$ alt modülü bir nokta belirttiğinden ikişer ikişer $R-eş$ olacak şekildeki tüm noktaların $P(M)$ kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$P(M) = \left\{ \begin{array}{lll} R(0,0,1) = R(0,0,3), & R(0,1,0) = R(0,3,0), & R(0,1,1) = R(0,3,3), \\ R(0,1,2) = R(0,3,2), & R(0,1,3) = R(0,3,1), & R(0,2,1) = R(0,2,3), \\ R(1,0,0) = R(3,0,0), & R(1,0,1) = R(3,0,3), & R(1,0,2) = R(3,0,2), \\ R(1,0,3) = R(3,0,1), & R(1,1,0) = R(3,3,0), & R(1,1,1) = R(3,3,3), \\ R(1,1,2) = R(3,3,2), & R(1,1,3) = R(3,3,1), & R(1,2,1) = R(3,2,3), \\ R(1,2,0) = R(3,2,0), & R(1,2,2) = R(3,2,2), & R(1,2,3) = R(3,2,1), \\ R(1,3,0) = R(3,1,0), & R(1,3,1) = R(3,1,3), & R(1,3,2) = R(3,1,2), \\ R(1,3,3) = R(3,1,1), & R(2,0,1) = R(2,0,3), & R(2,1,0) = R(2,3,0), \\ R(2,3,1) = R(2,1,3), & R(2,1,1) = R(2,3,3), & R(2,2,1) = R(2,2,3), \\ R(2,1,2) = R(2,3,2) & & \end{array} \right\}$$

Burada $|P(M)| = 28$ dir.

$\mathbf{U}$, M nin $R-$bağımsız iki elemanı tarafından üretilen bir alt modülü olmak üzere $\mathbf{U}_P$, $P(M)$ nin bir doğrusudur. $P(M)$ nin doğrularına aşağıdaki gibi örnekler verilebilir:

$x=(1,0,0)$ ve $y=(0,0,1)$ M nin $R-$bağımsız iki elemanıdır. Çünkü $\alpha x+\beta y=(\alpha,0,\beta)\in M_0 \Leftrightarrow \alpha,\beta\in R_0$ dır. Dolayısıyla $\mathbf{U}_1=Sp\{x,y\}$ kümesi

$$\mathbf{U}_1=\{ax+by \mid a,b\in\mathbb{Z}_4\}$$
$$=\begin{Bmatrix}(0,0,0),(1,0,0),(2,0,0),(3,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(2,0,1),(3,0,1), \\ (0,0,2),(1,0,2),(2,0,2),(3,0,2),(0,0,3),(1,0,3),(2,0,3),(3,0,3)\end{Bmatrix}$$

şeklinde olup M nin 2-boyutlu bir alt modülüdür.

$$\mathbf{U}_1\cap M^*=\begin{Bmatrix}(1,0,0),(3,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(2,0,1),(3,0,1), \\ (1,0,2),(3,0,2),(0,0,3),(1,0,3),(2,0,3),(3,0,3)\end{Bmatrix}$$

olduğundan $(\mathbf{U}_1)_P$ doğrusu üzerindeki $R-e\c{s}$ noktalar da belirtilerek, noktalar kümesi olarak, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$(\mathbf{U}_1)_P=\{Rx \mid x\in\mathbf{U}_1\cap M^*\}$$
$$=\begin{Bmatrix}R(1,0,0)=R(3,0,0),R(0,0,1)=R(0,0,3),R(1,0,1)=R(3,0,3), \\ R(2,0,1)=R(2,0,3),R(1,0,2)=R(3,0,2),R(1,0,3)=R(3,0,1)\end{Bmatrix}$$

dir.

2.Yapıda $Sp\{f(1,0,0),f(0,0,1)\}$ $\overline{M}$ nın $2-$boyutlu bir alt uzayı olduğundan $Sp\{(1,0,0),(0,0,1)\}=\{a(1,0,0)+b(0,1,0) \mid a,b\in\mathbb{Z}_4\}=\mathbf{U}_1$ bir doğrudur. Tabi ki $(\mathbf{U}_1)_P$ den farklı bir kümedir.

$z=(1,0,1)$ ve $t=(0,1,0)$ M nin $R-$bağımsız iki elemanıdır. Çünkü $\gamma z+\delta t=(\gamma,\delta,\gamma)\in M_0 \Leftrightarrow \gamma,\delta\in R_0$ dır. Dolayısıyla $\mathbf{U}_2=Sp\{z,t\}$ kümesi

$$\mathbf{U}_2=\{a'z+b't \mid a',b'\in\mathbb{Z}_4\}$$
$$=\begin{Bmatrix}(0,0,0),(1,0,1),(2,0,2),(3,0,3),(0,1,0),(1,1,1),(2,1,2),(3,1,3), \\ (0,2,0),(1,2,1),(2,2,2),(3,2,3),(0,3,0),(1,3,1),(2,3,2),(3,3,3)\end{Bmatrix}$$

şeklinde olup M nin 2-boyutlu bir alt modülüdür.

$$\mathbf{U}_2 \cap M^* = \begin{Bmatrix} (1,0,1),(3,0,3),(0,1,0),(1,1,1),(2,1,2),(3,1,3), \\ (1,2,1),(3,2,3),(0,3,0),(1,3,1),(2,3,2),(3,3,3) \end{Bmatrix}$$

olduğundan $(\mathbf{U}_2)_P$ doğrusu üzerindeki $R-e\c{s}$ noktalar da belirtilerek, noktalar kümesi olarak, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_2)_P &= \{Rx \mid x \in \mathbf{U}_2 \cap M^*\} \\ &= \begin{Bmatrix} R(1,0,1) = R(3,0,3),\ R(0,1,0) = R(0,3,0),\ R(1,1,1) = R(3,3,3), \\ R(2,1,2) = R(2,3,2),\ R(1,3,1) = R(3,1,3),\ R(1,2,1) = R(3,2,3) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$P(M)$ deki üzerinde olma bağıntısı;

Rx noktası $\mathbf{U}_P$ doğrusunun üzerindedir $\Leftrightarrow$ $Rx \subset \mathbf{U}$ şeklinde tanımlanmıştır. Böylece

$$\begin{aligned} &R(1,0,0) \in (\mathbf{U}_1)_P = Sp\{R(1,0,0), R(0,0,1)\} \Leftrightarrow \\ &R(1,0,0) = \{(0,0,0),(1,0,0),(2,0,0),(3,0,0)\} \subset \mathbf{U}_1 = Sp\{(1,0,0),(0,0,1)\} \\ &\qquad = \begin{Bmatrix} (0,0,0),(1,0,0),(2,0,0),(3,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(2,0,1),(3,0,1), \\ (0,0,2),(1,0,2),(2,0,2),(3,0,2),(0,0,3),(1,0,3),(2,0,3),(3,0,3) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

olur.

Şimdi de $P(M')$ uzayı oluşturulacaktır.

$M_0 = \{(0,0,0),(0,0,2),(0,2,0),(0,2,2),(2,0,0),(2,0,2),(2,2,0),(2,2,2)\}$ için

$M' = M / M_0 = \{x + M_0 \mid x \in M\}$ olmak üzere M' kümesinin elemanları aşağıdaki şekilde oluşturulabilir:

$\forall \quad x \in M_0$ için $x + M_0 = M_0$ olduğundan

$$(0,0,0) + M_0 = \{(0,0,0),(0,0,2),(0,2,0),(0,2,2),(2,0,0),(2,0,2),(2,2,0),(2,2,2)\} = M_0$$

dır. Diğer denklik sınıfları

$$(0,0,1) + M_0 = \{(0,0,1),(0,0,3),(0,2,1),(0,2,3),(2,0,1),(2,0,3),(2,2,1),(2,2,3)\}$$

$$(0,1,0) + M_0 = \{(0,1,0),(0,1,2),(0,3,0),(0,3,2),(2,1,0),(2,1,2),(2,3,0),(2,3,2)\}$$

$$(0,1,1)+M_0=\{(0,1,1),(0,1,3),(0,3,1),(0,3,3),(2,1,1),(2,1,3),(2,3,1),(2,3,3)\}$$

$$(1,0,0)+M_0=\{(1,0,0),(1,0,2),(1,2,0),(1,2,2),(3,0,0),(3,0,2),(3,2,0),(3,2,2)\}$$

$$(1,0,1)+M_0=\{(1,0,1),(1,0,3),(1,2,1),(1,2,3),(3,0,1),(3,0,3),(3,2,1),(3,2,3)\}$$

$$(1,1,0)+M_0=\{(1,1,0),(1,1,2),(1,3,0),(1,3,2),(3,1,0),(3,1,2),(3,3,0),(3,3,2)\}$$

$$(1,1,1)+M_0=\{(1,1,1),(1,1,3),(1,3,1),(1,3,3),(3,1,1),(3,1,3),(3,3,1),(3,3,3)\}$$

olarak elde edilir. Yani

$$M'=\begin{Bmatrix} M_0,\ (0,0,1)+M_0,\ (0,1,0)+M_0,\ (0,1,1)+M_0, \\ (1,0,0)+M_0,\ (1,0,1)+M_0,\ (1,1,0)+M_0,\ (1,1,1)+M_0 \end{Bmatrix}$$

şeklindedir.

$R=\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ için $R_0=\{0,2\}$ olduğundan $R'=R/R_0=\{\bar{0},\bar{1}\}$ dır. Böylece $x'=x+M_0\in M'$ için $Sp\{x'\}=Sp\{x+M_0\}=\{M_0,x+M_0\}=\{M_0,x'\}$ şeklinde 1-boyutlu bir alt uzay elde edilir.

$P(M')$ nün noktaları M' nün 1-boyutlu alt uzayları olduğundan $P(M')$ noktalar kümesi olarak

$$P(M')=\begin{Bmatrix} \{M_0,(0,0,1)+M_0\},\{M_0,(0,1,0)+M_0\},\{M_0,(0,1,1)+M_0\}, \\ \{M_0,(1,0,0)+M_0\},\{M_0,(1,0,1)+M_0\},\{M_0,(1,1,0)+M_0\}, \\ \{M_0,(1,1,1)+M_0\} \end{Bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu taktirde $|P(M')|=7$ dir.

$\forall\ x' = x + M_0, y' = y + M_0 \in M'$ için

$$Sp\{x', y'\} = Sp\{x + M_0, y + M_0\}$$
$$= \{a'(x + M_0) + b'(y + M_0) \big| a', b' \in R'\}$$
$$= \{0 + M_0, x + M_0, y + M_0, (x + y) + M_0\}$$

şeklinde M' nün 2-boyutlu alt uzayıdır.

$P(M')$ uzayının doğruları $\mathbf{P}'$, M' nün 2-boyutlu bir alt uzayı olmak üzere $\mathbf{P}'_P$ noktalar kümesidir. Yani $P(M')$ nün bir doğrusu

$\mathbf{P}'_P = \{R'x' \big| x' \in \mathbf{P}' \cap M'^*\}$ şeklinde ifade edilebilir.

$P(M')$ nün tüm doğrularını belirlemek üzere önce M' nün 2-boyutlu tüm alt uzayları belirlenecektir. Bunlar aşağıda görüldüğü gibi 21 tanedir.

$$\mathbf{P}'_1 = Sp\{(1,0,0) + M_0, (0,0,1) + M_0\}$$

$$\mathbf{P}'_2 = Sp\{(1,0,0) + M_0, (0,1,0) + M_0\}$$

$$\mathbf{P}'_3 = Sp\{(1,0,0) + M_0, (1,0,1) + M_0\}$$

$$\mathbf{P}'_4 = Sp\{(1,0,0) + M_0, (0,1,1) + M_0\}$$

$$\mathbf{P}'_5 = Sp\{(1,0,0) + M_0, (1,1,0) + M_0\}$$

$$\mathbf{P}'_6 = Sp\{(1,0,0) + M_0, (1,1,1) + M_0\}$$

$$\mathbf{P}'_7 = Sp\{(0,0,1) + M_0, (0,1,0) + M_0\}$$

$$\mathbf{P}'_8 = Sp\{(0,0,1) + M_0, (1,0,1) + M_0\}$$

$$\mathbf{P}'_9 = Sp\{(0,0,1) + M_0, (0,1,1) + M_0\}$$

$$\mathbf{P}'_{10} = Sp\{(0,0,1) + M_0, (1,1,0) + M_0\}$$

$\mathbf{P}'_{11} = Sp\{(0,0,1)+M_0,(1,1,1)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{12} = Sp\{(0,1,0)+M_0,(1,0,1)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{13} = Sp\{(0,1,0)+M_0,(0,1,1)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{14} = Sp\{(0,1,0)+M_0,(1,1,0)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{15} = Sp\{(0,1,0)+M_0,(1,1,1)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{16} = Sp\{(1,0,1)+M_0,(0,1,1)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{17} = Sp\{(1,0,1)+M_0,(1,1,0)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{18} = Sp\{(1,0,1)+M_0,(1,1,1)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{19} = Sp\{(0,1,1)+M_0,(1,1,0)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{20} = Sp\{(0,1,1)+M_0,(1,1,1)+M_0\}$

$\mathbf{P}'_{21} = Sp\{(1,1,0)+M_0,(1,1,1)+M_0\}$

Ancak bu alt uzayların hepsi farklı değildir. Bunlar üçer üçer aynı alt uzayı gösterecek şekilde 7 gruba ayrılabilir:

$$Sp\{(0,0,1)+M_0,(0,1,0)+M_0\} = Sp\{(0,0,1)+M_0,(0,1,1)+M_0\} = Sp\{(0,1,1)+M_0,(0,1,0)+M_0\}$$

$$Sp\{(0,0,1)+M_0,(1,0,0)+M_0\} = Sp\{(0,0,1)+M_0,(1,0,1)+M_0\} = Sp\{(1,0,0)+M_0,(1,0,1)+M_0\}$$

$$Sp\{(0,0,1)+M_0,(1,1,0)+M_0\} = Sp\{(0,0,1)+M_0,(1,1,1)+M_0\} = Sp\{(1,1,0)+M_0,(1,1,1)+M_0\}$$

$$Sp\{(0,1,0)+M_0,(1,0,0)+M_0\}=Sp\{(0,1,0)+M_0,(1,1,0)+M_0\}=Sp\{(1,0,0)+M_0,(1,1,0)+M_0\}$$

$$Sp\{(0,1,0)+M_0,(1,0,1)+M_0\}=Sp\{(0,1,0)+M_0,(1,1,1)+M_0\}=Sp\{(1,0,1)+M_0,(1,1,1)+M_0\}$$

$$Sp\{(0,1,1)+M_0,(1,0,0)+M_0\}=Sp\{(0,1,1)+M_0,(1,1,1)+M_0\}=Sp\{(1,0,0)+M_0,(1,1,1)+M_0\}$$

$$Sp\{(0,1,1)+M_0,(1,1,0)+M_0\}=Sp\{(1,1,0)+M_0,(1,0,1)+M_0\}=Sp\{(1,0,1)+M_0,(0,1,1)+M_0\}$$

$$M'=\begin{Bmatrix} M_0,\ (0,0,1)+M_0,\ (0,1,0)+M_0,\ (0,1,1)+M_0, \\ (1,0,0)+M_0,\ (1,0,1)+M_0,\ (1,1,0)+M_0,\ (1,1,1)+M_0 \end{Bmatrix}$$

için $M_0{}'=\{M_0\}$ ve

$$M'^{*}=M'\setminus M_0{}'=\begin{Bmatrix} (0,0,1)+M_0,(0,1,0)+M_0,(0,1,1)+M_0,(1,0,0)+M_0, \\ (1,0,1)+M_0,(1,1,0)+M_0,(1,1,1)+M_0 \end{Bmatrix}$$

dır.

Şimdi $P(M')$ uzayının bütün doğruları oluşturulacaktır.

M' nün 2-boyutlu herhangi bir alt uzayı için $\mathbf{P_i'}\cap M'^{*}=\mathbf{P_i'}\setminus\{M_0\}$ olduğundan $P(M')$ uzayının herhangi bir doğrusu

$$(\mathbf{P}_i')_P=\{R'x' \mid x'\in \mathbf{P_i'}\setminus\{M_0\}\}$$

şeklindedir. O halde $P(M')$ nün toplam 7 farklı doğrusu vardır. Bunlar aşağıda görüldüğü gibidir:

$$(\mathbf{P}_1')_P=(\mathbf{P}_3')_P=(\mathbf{P}_8')_P=\{R'((1,0,0)+M_0),R'((0,0,1)+M_0),R'((1,0,1)+M_0)\}$$

$$(\mathbf{P}_2')_P=(\mathbf{P}_5')_P=(\mathbf{P}_{14}')_P=\{R'((1,0,0)+M_0),R'((0,1,0)+M_0),R'((1,1,0)+M_0)\}$$

$$(\mathbf{P}_4')_P = (\mathbf{P}_6')_P = (\mathbf{P}_{20}')_P = \{R'((1,0,0)+M_0), R'((0,1,1)+M_0), R'((1,1,1)+M_0)\}$$

$$(\mathbf{P}_7')_P = (\mathbf{P}_9')_P = (\mathbf{P}_{13}')_P = \{R'((0,0,1)+M_0), R'((0,1,0)+M_0), R'((0,1,1)+M_0)\}$$

$$(\mathbf{P}_{10}')_P = (\mathbf{P}_{11}')_P = (\mathbf{P}_{21}')_P = \{R'((0,0,1)+M_0), R'((1,1,0)+M_0), R'((1,1,1)+M_0)\}$$

$$(\mathbf{P}_{12}')_P = (\mathbf{P}_{15}')_P = (\mathbf{P}_{18}')_P = \{R'((0,1,0)+M_0), R'((1,0,1)+M_0), R'((1,1,1)+M_0)\}$$

$$(\mathbf{P}_{16}')_P = (\mathbf{P}_{17}')_P = (\mathbf{P}_{19}')_P = \{R'((1,0,1)+M_0), R'((0,1,1)+M_0), R'((1,1,0)+M_0)\}$$

Şimdi de $P(M)$ den $P(M')$ uzayına $\forall Rx \in P(M)$ için $\Phi(Rx) = R'x'$ şeklinde tanımlı Φ homomorfizmi altında $P(M)$ nin bir noktasının $P(M')$ nün bir noktasına ve $P(M)$ nin bir doğrusunun da $P(M')$ nün bir doğrusuna dönüştüğü çeşitli örneklerle incelenecektir.

$R(1,0,0) \in P(M)$ noktası alınsın.

$\Phi(R(1,0,0)) = R'((1,0,0)+M_0) = \{M_0, (1,0,0)+M_0\}$ olup bu $\{M_0, (1,0,0)+M_0\}$ kümesi $P(M')$ uzayının bir noktasıdır.

$P(M)$ nin $(\mathbf{U}_1)_p = \{R(1,0,0), R(0,0,1), R(1,0,1), R(2,0,1), R(1,0,2), R(1,0,3)\}$ doğrusunun Φ homomorfizmi altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned}\Phi((\mathbf{U}_1)_p) &= \{\Phi(R(1,0,0)),\ \Phi(R(0,0,1)),\ \Phi(R(1,0,1)),\ \Phi(R(2,0,1)),\ \Phi(R(1,0,2)),\ \Phi(R(1,0,3))\} \\ &= \left\{\begin{matrix}\{M_0,(1,0,0)+M_0\},\{M_0,(0,0,1)+M_0\},\{M_0,(1,0,1)+M_0\}, \\ \{M_0,(2,0,1)+M_0\},\{M_0,(1,0,2)+M_0\},\{M_0,(1,0,3)+M_0\}\end{matrix}\right\}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $(1,0,0)$ ile $(1,0,2)$, $(0,0,1)$ ile $(2,0,1)$ ve $(1,0,1)$ ile $(1,0,3)$ noktaları aynı denklik sınıfına aittir. Böylece

$$\Phi((\mathbf{U}_1)_p) = \left\{\{M_0,(1,0,0)+M_0\},\{M_0,(0,0,1)+M_0\},\{M_0,(1,0,1)+M_0\}\right\}$$

şeklinde 3 noktalı bir kümedir ki bu da $P(M')$ uzayının bir doğrusudur. Böylece $(P(M), P(M'), \Phi)$ üçlüsü homomorfizm ile bir projektif koordinat uzay oluşturur.

Bu örnekte $n=2$ alınmıştı. Dolayısıyla $P(M)$ ve $P(M')$ uzaylarının boyutları 2 dir. Ayrıca $P(M')$ projektif uzayının toplam 7 nokta ve 7 doğrusunun var olduğu görülmektedir. Bu da mertebesinin 2 dolayısıyla kendisinin Fano düzlemi olduğunu gösterir. Bu durumda $P(M)$ bir Klingenberg projektif düzlemi olur. $P(M)$ nin toplam 28 noktası vardır. $\Phi : P(M) \to P(M')$ homomorfizmi $\forall Rx \in P(M)$ için $\Phi(Rx) = Sp\{x+M_0\}$ olarak tanımlıdır. Burada $Sp\{x+M_0\} = \{M_0, x+M_0\}$ olduğundan kolaylık için $\Phi(Rx) = x+M_0$ alınabilir.

Örnek 4.3.2. Şimdi de $R=\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ lokal halkası için $n=3$ alınarak $M=R^4$ serbest modülü kurulacaktır. Burada $|M|=256$, $|M_0|=16$ ve $|M^*|=240$ olduğu açıktır. $\forall\ x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in M$ için $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ile $3x=(3x_1,3x_2,3x_3,3x_4)$ aynı noktanın temsilcileridir, yani bunların temsil ettiği Rx ile $R(3x)$ noktaları $R-$eştir. O halde sadece $R-$farklı noktalardan oluşan $P(M)$ kümesi 120 elemanlı olup aşağıdaki gibidir:

$$P(M)=\left\{\begin{array}{l} R(1,0,0,0)=R(3,0,0,0),\ R(0,0,1,0)=R(0,0,3,0),\ R(0,0,1,1)=R(0,0,3,3), \\ \text{.....................................},\ R(2,2,1,3)=R(2,2,3,1),\ R(2,2,2,1)=R(2,2,2,3) \end{array}\right\}$$

$P(M)$ nin doğrularına aşağıdaki gibi örnekler verilebilir:

$x=(1,0,0,0)$, $y=(0,0,0,1)$ M nin $R-$bağımsız iki elemanıdır. $\mathbf{U}_1=Sp\{x,y\}$ kümesi için

$$\mathbf{U}_1\cap M^*=\left\{\begin{array}{l} (1,0,0,0),(3,0,0,0),(0,0,0,1),(1,0,0,1),(2,0,0,1),(3,0,0,1), \\ (1,0,0,2),(3,0,0,2),(0,0,0,3),(1,0,0,3),(2,0,0,3),(3,0,0,3) \end{array}\right\}$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}_1)_P &= \{Rx \,|\, x\in \mathbf{U}_1\cap M^*\} \\ &= \left\{\begin{array}{l} R(1,0,0,0)=R(3,0,0,0), R(0,0,0,1)=R(0,0,0,3), R(1,0,0,1)=R(3,0,0,3), \\ R(2,0,0,1)=R(2,0,0,3), R(1,0,0,2)=R(3,0,0,2), R(1,0,0,3)=R(3,0,0,1) \end{array}\right\}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$R(1,0,0,0)$ noktası $(\mathbf{U}_1)_p$ doğrusu üzerindedir. Yani

$$R(1,0,0,0) \in (\mathbf{U}_1)_P$$
$$\Leftrightarrow R(1,0,0,0) = \{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0)\} \subset \mathbf{U}_1 = Sp\{(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$$
$$= \begin{Bmatrix} (0,0,0,0),(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0),(0,0,0,1),(1,0,0,1),(2,0,0,1),(3,0,0,1), \\ (0,0,0,2),(1,0,0,2),(2,0,0,2)(3,0,0,2),(0,0,0,3),(1,0,0,3),(2,0,0,3),(3,0,0,3) \end{Bmatrix}$$

dır.

Şimdi de $P(M')$ uzayı oluşturulacaktır. $M' = M / M_0 = \{x + M_0 \,|\, x \in M\}$ için önce M' kümesinin elemanları belirlensin. M' nün elemanları

$$(0,0,0,0) + M_0 = M_0\,,$$

$$(0,0,0,1) + M_0 = \begin{Bmatrix} (0,0,0,1),(0,0,0,3),(0,0,2,1),(0,0,2,3),(0,2,0,1),(0,2,0,3),(0,2,2,1),(0,2,2,3) \\ (2,0,0,1),(2,0,0,3),(2,0,2,1),(2,0,2,3),(2,2,0,1),(2,2,0,3),(2,2,2,1),(2,2,2,3) \end{Bmatrix},$$

....,

$$(1,1,1,1) + M_0 = \begin{Bmatrix} (1,1,1,1),(1,1,1,3),(1,1,3,1),(1,1,3,3),(1,3,1,1),(1,3,1,3),(1,3,3,1),(1,3,3,3) \\ (3,1,1,1),(3,1,1,3),(3,1,3,1),(3,1,3,3),(3,3,1,1),(3,3,1,3),(3,3,3,1),(3,3,3,3) \end{Bmatrix}.$$

şeklinde oluşturulur. Bu şekilde 16 tane denklik sınıfı mevcuttur. Herbir denklik sınıfında 16 eleman vardır. Bunlar ikişer ikişer R-eştir.

Böylece

$$M' = \begin{Bmatrix} (0,0,0,0)+M_0,\ (0,0,0,1)+M_0,\ (0,0,1,0)+M_0,\ (0,0,1,1)+M_0,\ (0,1,0,0)+M_0, \\ (0,1,0,1)+M_0,(0,1,1,0)+M_0,(0,1,1,1)+M_0,(1,0,0,0)+M_0,(1,0,0,1)+M_0, \\ (1,0,1,0)+M_0,(1,0,1,1)+M_0,\ (1,1,0,0)+M_0,(1,1,0,1)+M_0,(1,1,1,0)+M_0, \\ (1,1,1,1)+M_0 \end{Bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $P(M')$ uzayının noktaları belirlenecektir.

$\forall x \notin M_0, \quad x' = x + M_0$ için $Sp\{x'\} = Sp\{x + M_0\} = R'x' = \{M_0, x'\}$ M' nün 1-boyutlu bir alt uzayı olduğundan $P(M')$ uzayı noktalar kümesi olarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P(M') = \left\{ \begin{array}{c} \{M_0,(0,0,0,1)+M_0\},\{M_0,(0,0,1,0)+M_0\},\{M_0,(0,0,1,1)+M_0\}, \\ \{M_0,(0,1,0,0)+M_0\},\{M_0,(0,1,0,1)+M_0\},\{M_0,(0,1,1,0)+M_0\}, \\ \{M_0,(0,1,1,1)+M_0\},\{M_0,(1,0,0,0)+M_0\},\{M_0,(1,0,0,1)+M_0\}, \\ \{M_0,(1,0,1,0)+M_0\},\{M_0,(1,0,1,1)+M_0\},\{M_0,(1,1,0,0)+M_0\}, \\ \{M_0,(1,1,0,1)+M_0\},\{M_0,(1,1,1,0)+M_0\},\{M_0,(1,1,1,1)+M_0\} \end{array} \right\}$$

Bu taktirde $|P(M')| = 15$ dir.

Şimdi de $P(M')$ uzayının doğruları belirlenecektir. $P' = Sp\{x', y'\}$ ve $P'_P = Sp\{R'x', R'y'\} \setminus \{R'M_0\}$ dır. Bunun $Sp\{R'x', R'y'\} = \{R'z' \,|\, z' \in Sp\{x', y'\}\}$ ve $P'_P = \{R'z' \,|\, z' \in P' \setminus {M_0}'\}$ şeklinde de ifade edilebileceği bilinmektedir. M' nün 105 tane 2-boyutlu alt uzayı vardır. Örnek olarak bunlardan birkaçı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$\mathbf{P}'_1 = Sp\{(1,0,0,0) + M_0, (0,0,0,1) + M_0\}$

$\mathbf{P}'_2 = Sp\{(1,0,0,0) + M_0, (0,1,0,0) + M_0\}$

$\mathbf{P}'_3 = Sp\{(1,0,1,0) + M_0, (0,0,1,0) + M_0\}$

Ancak bu 105 altuzayın hepsi farklı değillerdir. Bunlar 3'er 3'er aynı altuzayı göstermektedir. Örneğin;

$$\begin{array}{l} Sp\{(1,0,0,0)+M_0,(0,0,0,1)+M_0\} = \{M_0,(1,0,0,0)+M_0,(0,0,0,1)+M_0,(1,0,0,1)+M_0\} \\ Sp\{(1,0,0,0)+M_0,(1,0,0,1)+M_0\} = \{M_0,(1,0,0,0)+M_0,(1,0,0,1)+M_0,(2,0,0,1)+M_0\} \\ Sp\{(1,0,0,1)+M_0,(0,0,0,1)+M_0\} = \{M_0,(1,0,0,1)+M_0,(0,0,0,1)+M_0,(1,0,0,2)+M_0\} \end{array}$$

şeklindedir.

Burada $(2,0,0,1)+M_0$ ile $(0,0,0,1)+M_0$ ve $(1,0,0,2)+M_0$ ile $(1,0,0,0)+M_0$ noktaları aynı denklik sınıfına aittir. Yani aynı noktayı göstermektedir. Böylece

$$Sp\{(1,0,0,0)+M_0,(0,0,0,1)+M_0\}=Sp\{(1,0,0,0)+M_0,(1,0,0,1)+M_0\}=Sp\{(1,0,0,1)+M_0,(0,0,0,1)+M_0\}$$

dir.

$M_0{}'=M_0$ ve

$$M'^{*}=\begin{Bmatrix}(0,0,0,1)+M_0,\ (0,0,1,0)+M_0,\ (0,0,1,1)+M_0,\ (0,1,0,0)+M_0,(0,1,0,1)+M_0,\\ (0,1,1,0)+M_0,(0,1,1,1)+M_0,(1,0,0,0)+M_0,(1,0,0,1)+M_0,(1,0,1,0)+M_0,\\ (1,0,1,1)+M_0,\ (1,1,0,0)+M_0,(1,1,0,1)+M_0,(1,1,1,0)+M_0,(1,1,1,1)+M_0\end{Bmatrix}$$

için $\mathbf{P_i}'\cap M'^{*}=\mathbf{P_i}'\setminus\{M_0\}$ dır. O halde $P(M')$ nün bir doğrusu

$(\mathbf{P}_i')_P=\{R'x'\,\big|\,x'\in\mathbf{P_i}'\setminus\{M_0\}\}$ şeklinde olup $P(M')$ nün 35 tane doğrusu vardır.

Bunlardan birkaçı aşağıdaki gibidir:

$\mathbf{P}_i'=Sp\{(1,0,0,0)+M_0,(0,0,0,1)+M_0\}$ için

$(\mathbf{P}_i')_P=\{R'((1,0,0,0)+M_0),R'((0,0,0,1)+M_0),R'((1,0,0,1)+M_0)\}$ ve

$\mathbf{P}_j'=Sp\{(1,0,0,1)+M_0,(1,1,1,1)+M_0\}$ için

$(\mathbf{P}_j')_P=\{R'((1,0,0,1)+M_0),R'((1,1,1,1)+M_0),R'((2,1,1,2)+M_0)\}$ dır.

Şimdi de $P(M)$ den $P(M')$ uzayına $\forall Rx\in P(M)$ için $\Phi(Rx)=R'x'$ şeklinde tanımlı Φ homomorfizmi altında $P(M)$ nin bir noktasının $P(M')$ nün bir noktasına ve $P(M)$ nin bir doğrusunun da $P(M')$ nün bir doğrusuna dönüştüğü çeşitli örneklerle incelenecektir.

$R(1,1,0,3)\in P(M)$ noktası alınsın.

$\Phi(R(1,1,0,3))=R'((1,1,0,3)+M_0)=\{M_0,(1,1,0,3)+M_0\}$ olup bu $\{M_0,(1,1,0,3)+M_0\}$ kümesi $P(M')$ uzayının bir noktasıdır.

$P(M)$ nin

$(\mathbf{U}_i)_P = \{R(1,0,0,0), R(0,0,0,1), R(1,0,0,1), R(2,0,0,1), R(1,0,0,2), R(1,0,0,3)\}$

doğrusunun Φ homomorfizmi altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned}
\Phi((\mathbf{U}_i)_P) &= \begin{Bmatrix} \Phi(R(1,0,0,0)),\ \Phi(R(0,0,0,1)),\ \Phi(R(1,0,0,1)), \\ \Phi(R(2,0,0,1)),\ \Phi(R(1,0,0,2)),\ \Phi(R(1,0,0,3)) \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} \{M_0,(1,0,0,0)+M_0\},\{M_0,(0,0,0,1)+M_0\},\{M_0,(1,0,0,1)+M_0\}, \\ \{M_0,(2,0,0,1)+M_0\},\{M_0,(1,0,0,2)+M_0\},\{M_0,(1,0,0,3)+M_0\} \end{Bmatrix} \\
&= \{\{M_0,(1,0,0,0)+M_0\},\{M_0,(0,0,0,1)+M_0\},\{M_0,(1,0,0,1)+M_0\}\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ki bu da $P(M')$ uzayının bir doğrusudur. Böylece $(P(M), P(M'), \Phi)$ üçlüsü homomorfizm ile bir projektif koordinat uzay oluşturur.

4.4. n-Boyutlu Uzay

Bu kısımda literatürde de iyi bilinen vektör uzayları üzerine kurulan projektif uzay kavramı, Hirschfeld (1998) tarafından yapılan çalışmadan incelenmiş ve bu yapı modül üzerine bir uzay kurulmasına genelleştirilmiştir. Daha sonra kurulan bu uzay ile Jukl ve Snasel (2009) tarafından yapılan çalışmada verilen projektif koordinat uzay arasında bir izomorfizm kurulmuştur. Burada ve 4.5. kısmında yapılanlar Erdoğan ve Çiftçi (2013) tarafından bir makale olarak hazırlanmış ve incelenmesi için bir dergiye sunulmuştur.

3. Yapı. R maksimal ideali I olan bir lokal halka olsun. R üzerindeki $(n+1)-$boyutlu R^{n+1} modülü M ve M nin I^{n+1} alt modülü M_0 ile gösterilsin. $M^* = M \setminus M_0$ kümesi üzerinde, denklik sınıfları M nin M_0 çıkarılmış $1-$boyutlu alt modülleri olan bir denklik bağıntısı tanımlansın. Böylece $x=(x_i),\ y=(y_i)\in M^*$ için x in y ye denkliği, $t\in R^* = R\setminus I$ olmak üzere, $y = tx$ olarak yani, her i için $y_i = tx_i$ olarak tanımlanmış olur. Bu denklik sınıflarının kümesi $P(M)$ ile gösterilsin. $P(M)$ kümesinin elemanlarına nokta ve kendisine ***n-boyutlu uzay*** denilecektir.

Bir $x \in M^*$ vektörünün denklik sınıfı $\overline{x}$ ile gösterilecektir. x e $\overline{x}$ noktasının koordinat vektörü veya temsilci vektörü denilecektir. $t \in R^*$ olmak üzere tx vektörü de $\overline{x}$ noktasının bir temsilcisidir, yani $\overline{tx} = \overline{x}$ dir. Burada

$$\overline{x} = \{rx \mid r \in R^*\}$$

olduğu görülmektedir.

Tanım 4.4.1. $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$, $y = (y_0, y_1, ..., y_n) \in M^*$ vektörleri

$$\forall i, \quad i = 0,1,...,n \text{ için } x_i - y_i \in I$$

şartını sağlıyorsa $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ noktaları aynı komşuluktadır denir ve bu durum $x \approx y$ ile gösterilir.

Bu komşuluk bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu açıktır.

$\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_r}$ noktalarının lineer bağımsızlığı $x_1, x_2, ..., x_r$ temsilcilerinin lineer bağımsızlığı olarak tanımlansın.

İkişer ikişer komşu olmayan lineer bağımsız $\overline{x_0}, \overline{x_1}, ..., \overline{x_m}$ gibi $m+1$ noktanın gerdiği kümeden M_0 ın çıkarılması ile bulunan kümeye $P(M)$ uzayının $m-$boyutlu bir alt uzayı denir ve Π_m ile gösterilir. $\left\{\overline{x_0}, \overline{x_1}, ..., \overline{x_m}\right\}$ kümesine ise Π_m alt uzayının bir bazı denir.

Π_0: Bir $\overline{x} \in P(M)$ noktası M deki 1-boyutlu $Sp\{x\}$ alt modülü kullanılarak $\overline{x} = Sp\{x\} \setminus M_0$ ile ifade edilir. Böylece $\overline{x} = \{tx \mid t \in R^*\}$ olur.

Π_1: x ile y lineer bağımsız iki vektör ve $\overline{x} \not\approx \overline{y}$ olmak üzere $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ noktalarından geçen doğru $\overline{xy} = Sp\{x, y\} \setminus M_0$ kümesi ile temsil edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \{ax + by \mid a, b \in R\} \setminus \{a'x + b'y \mid a', b' \in I\} \\ &= \{a''x + b''y \mid a'', b'' \in R^*\} \end{aligned}$$

olur.

Π_2 : $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ herhangi ikisi komşu olmayan lineer bağımsız üç nokta olsun.

$$Sp\{x, y, z\} \backslash M_0 = \{tx + sy + uz \,|\, \exists t, s, u \in R^*\}$$

kümesi, $P(M)$ uzayının bir bazı $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ olan bir düzlemi, yani $2-$boyutlu bir alt uzayıdır.

$P(M)$ uzayının noktalar kümesi N' ve doğrular kümesi D' ile gösterilsin. Bir $\bar{x} \in N'$ noktasının $d = \{au + bv \,|\, a, b \in R\} \backslash \{a'u + b'v \,|\, a', b' \in I\}$ olmak üzere bir $d \in D'$ doğrusu üzerinde olması $Sp\{x\} \subseteq \{au + bv \,|\, a, b \in R\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda (N', D') geometrik yapısı ile Jukl ve Snasel (2009) tarafından yapılan çalışmada verilen (N, D) $n-$boyutlu Projektif Koordinat (Klingenberg) Uzayı arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir:

Teorem 4.4.2. (N, D) uzayından (N', D') uzayına sırasıyla $\forall\, Sp\{x\} \in N$ için $f(Sp\{x\}) = \bar{x} \in N'$ ve $\forall$ $Sp\{x, y\} \in D$ için $f(Sp\{x, y\}) = \bar{x}\bar{y} \in D'$ şeklinde tanımlanan $f : N \to N'$ ve $f : D \to D'$ dönüşümü bir izomorfizmdir.

4.5. $P(M)$ Uzayı ile İlgili Bazı Sayısal Özellikler

Bu kısımda, 4.4. kısmında 3.Yapı olarak verilen $P(M)$ projektif koordinat uzayının, özel olarak mertebesi q olan bir R lokal halkası üzerine kurulduğu ve R nin I maksimal idealinin mertebesinin r olduğu kabul edilecektir. Bu şekilde kurulan sonlu $P(M)$ projektif koordinat uzayı ile ilgili bazı sayısal sonuçlar elde edilecektir.

Önce kullanılacak bir araç olarak aşağıdaki teorem verilecektir:

Teorem 4.5.1. $\forall x, y \in M^*$ için $x \approx y \Leftrightarrow x$ ve y $R-$bağımlıdır.

İspat. $x \approx y$ olsun. O zaman $\forall i$, $i = 0,1,2,...,n$ için $x_i - y_i \in I$ ve dolayısıyla $x - y \in I^{n+1}$ olur. Bu da x ile y nin $R-$bağımlı olması demektir.

Karşıt olarak x ile y nin $R-$bağımlı olduğu kabul edilsin. O zaman $\alpha x + \beta y = z \in I^{n+1}$ olacak şekilde en az bir tanesi birim olan α ve β skalarları vardır. α skaları birim kabul edilirse

$$\alpha^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha^{-1} z \Rightarrow x + (\alpha^{-1}\beta) y = \alpha^{-1} z \in I^{n+1}$$

olur. Burada $\beta \in I$ olamaz. Aksi halde $x = \alpha^{-1} z - (\alpha^{-1}\beta) y \in I^{n+1}$ çelişkisi doğar. y ile $(-\alpha^{-1}\beta) y$ aynı noktayı gösterdiğinden $x + (\alpha^{-1}\beta) y = x - (-\alpha^{-1}\beta) y = \alpha^{-1} z \in I^{n+1}$ eşitliği $x \approx y$ olduğunu gösterir. □

$P(M)$ uzayı ile ilgili bazı sayısal sonuçlar aşağıdaki teoremler ile verilecektir:

Teorem 4.5.2. $P(M)$ uzayının toplam nokta sayısı $q^n + q^{n-1} r + q^{n-2} r^2 + \cdots + q r^{n-1} + r^n$, bir doğru üzerindeki nokta sayısı $q + r$ ve bir düzlem üzerindeki nokta sayısı $q^2 + qr + r^2$ dir.

İspat. $|M_0| = r^{n+1}$ dir. Burada $M^* = M \setminus M_0$ olmak üzere $|M^*| = |M \setminus M_0| = q^{n+1} - r^{n+1}$ olduğu açıktır. M^* da bir noktanın $|R \setminus I| = q - r$ tane gösterimi vardır. Dolayısıyla

$P(M)$ uzayının toplam nokta sayısı

$$|P(M)| = \frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q - r} = q^n + q^{n-1} r + q^{n-2} r^2 + \cdots + q r^{n-1} + r^n$$

olarak elde edilir.

$Sp\{x, y\} = \{tx + sy \mid t, s \in R\}$ için $|Sp\{x, y\}| = q^2$ dir.

$\overline{x}\,\overline{y} = \{tx + sy \mid t, s \in R\} \setminus \{t'x + s'y \mid t', s' \in I\}$ için

$|\overline{x}\overline{y}| = q^2 - r^2$ dir. Bu taktirde $P(M)$ de bir doğru üzerindeki nokta sayısı

$$\frac{q^2 - r^2}{q - r} = q + r$$

olarak elde edilir.

$Sp\{x, y, z\} = \{tx + sy + uz \mid t, s, u \in R\}$ kümesinin eleman sayısı q^3 tür. $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ noktalarının gerdiği alt uzay $[\overline{x}\overline{y}\overline{z}]$ ile gösterilirse

$[\overline{x}\overline{y}\overline{z}] = \{tx + sy + uz \mid t, s, u \in R\} \setminus \{t'x + s'y + u'z \mid t', s', u' \in I\}$ ve $|[\overline{x}\overline{y}\overline{z}]| = q^3 - r^3$ tür. Bu taktirde $P(M)$ de bir düzlem üzerindeki nokta sayısı

$$\frac{q^3 - r^3}{q - r} = q^2 + qr + r^2$$

olarak elde edilir.□

Teorem 4.5.3. $P(M)$ uzayında

a) Bir noktanın komşuluğundaki nokta sayısı $|I|^n = r^n$ dir.

b) Bir doğru üzerinde belli bir noktaya komşu olan nokta sayısı $|I| = r$ dir.

c) Bir düzlem üzerinde belli bir noktaya komşu olan nokta sayısı $|I|^2 = r^2$ dir.

İspat.

a) x $R-$bağımsız bir nokta olsun. O zaman x in içinde bulunduğu M nin $\{x, x_1, x_2, ..., x_n\}$ bazı oluşturulabilir. Böylece M nin herhangi bir y elemanı $cx + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ şeklinde ifade edilir. Burada x ile $R-$bağımlı bir nokta oluşturmak için c bileşeni birim kabul edilebilir. Dolayısıyla $y = x + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ denilebilir. $c_1, c_2, ..., c_n \in I$ iken $y - x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \in I^{n+1}$ olur. Bu da y nin $(c_1, c_2, ..., c_n)$ n-lisinin oluşturulmasına bağlı olarak her bileşen $|I| = r$ farklı şekilde seçilebileceğinden, $r^n = |I|^n$ farklı şekilde seçilebileceğini gösterir. Yani $P(M)$ de bir noktanın komşuluğunda $|I|^n = r^n$ tane nokta vardır.

b) x ile y $R-$bağımsız iki nokta ve $c \in I$ olsun. Bu taktirde x ile $x+cy=z$ noktası $R-$bağımlı iki nokta olur. Çünkü $z-x=cy \in I^{n+1}$ ve $1 \notin I$ dır. Burada $c \notin I$ iken $x+cy=z$ noktası x ile $R-$bağımlı yani komşu olamaz. Çünkü $z-x=cy \notin I^{n+1}$ olur. O halde x ile $R-$bağımlı olan nokta sayısı c nin seçimi ile yani I nın eleman sayısı ile aynıdır. O halde bir doğru üzerinde belli bir noktaya komşu olan nokta sayısı $|I| = r$ tanedir.

c) x, y, z $R-$bağımsız üç nokta ve $c_1, c_2 \in I$ olsun. Bu taktirde x ile $t = x + c_1 y + c_2 z$ noktası $R-$bağımlı iki nokta olur. Çünkü $t - x = c_1 y + c_2 z \in I^{n+1}$ ve $1 \notin I$ dır. Burada c_1 ve c_2 nin her ikisi de I nın elemanı değil iken $t = x + c_1 y + c_2 z$ noktası x ile $R-$bağımlı olamaz. Çünkü $t - x \notin I^{n+1}$ olur. Dolayısıyla x ile $R-$bağımlı olan nokta sayısı c_1 ile c_2 nin seçimine bağlıdır. O halde bir düzlem üzerinde belli bir noktaya komşu olan nokta sayısı $|I|^2 = r^2$ tanedir.□

Şimdi de $P(M)$ uzayındaki toplam doğru ve düzlem sayısı hesaplanacaktır:

Teorem 4.5.4. $P(M)$ deki toplam doğru sayısı $\dfrac{(q^{n+1} - r^{n+1})(q^n - r^n)}{(q-r)^2(q+r)}$ ve toplam düzlem sayısı

$$\frac{|P(M)| \cdot (|P(M)| - |I|^n) \cdot (|P(M)| - [(q+r)r^{n-1}])}{(q^2+qr+r^2)\cdot(q^2+qr)\cdot[(q^2+qr+r^2)-(q+r)r]}$$ dır.

İspat. Önce $P(M)$ uzayındaki toplam doğru sayısı hesaplanacaktır. $P(M)$ uzayının toplam nokta sayısı $|P(M)| = \dfrac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q-r}$ olup bir doğru oluşturmak üzere ilk nokta $|P(M)|$ türlü seçilebilir. Aynı komşulukta olmayacak şekilde ikinci nokta ise

$$|P(M)| - |I|^n = \frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q - r} - r^n$$

türlü seçilebilir. O halde $P(M)$ de tüm noktalardan doğru oluşturacak şekilde iki noktanın genel seçimi $|P(M)|(|P(M)| - |I|^n)$ olarak elde edilir. Bu bulunan sayı içerisinde aynı doğruyu gösteren nokta ikilileri vardır. Bir doğru üzerinde $q + r$ tane nokta vardır. O halde ilk nokta $q + r$ türlü seçilmektedir. Doğru göstermesi için seçilen ilk noktaya komşu olmayacak şekilde ikinci nokta; x in bulunduğu doğru üzerinde x ile komşu olan nokta sayısı r olduğundan $q + r - r = q$ türlü seçilmektedir. Yani $(q + r)(q + r - r) = (q + r)q$ tane ikili aynı doğruyu göstermektedir. Sonuç olarak $P(M)$ deki doğru sayısı

$$\begin{aligned}
\frac{|P(M)|(|P(M)| - |I|^n)}{(q + r)(q + r - r)} &= \frac{\left(\frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q - r}\right)\left(\frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q - r} - r^n\right)}{(q + r)q} \\
&= \frac{(q^{n+1} - r^{n+1})}{(q - r)} \cdot \frac{(q^n - r^n)q}{(q - r)(q + r)q} \\
&= \frac{(q^{n+1} - r^{n+1})(q^n - r^n)}{(q - r)^2(q + r)}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Şimdi de $P(M)$ deki toplam düzlem sayısı hesaplanacaktır: Bir düzlem oluşturacak üç noktadan ilki $|P(M)| = \frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q - r}$ türlü seçilebilir. Aynı komşulukta olmayacak şekilde ikinci nokta $|P(M)| - |I|^n = \frac{q^{n+1} - r^{n+1}}{q - r} - r^n = \frac{q(q^n - r^n)}{(q - r)}$ türlü seçilebilir. Düzlem oluşturmak için seçilen üçüncü nokta ilk iki noktanın belirlediği doğru üzerinde olmayacak ve bu doğru üzerindeki tüm noktalarla da aynı komşulukta olmayacak şekilde belirlenmelidir. Yani üçüncü nokta

$$\left|P(M)\right|-[(q+r)r^{n-1}]$$

türlü seçilebilir. O halde $P(M)$ de tüm noktalardan düzlem oluşturacak şekilde seçilen üç noktanın genel seçimi

$$\left|P(M)\right|\cdot(\left|P(M)\right|-\left|I\right|^{n})\cdot(\left|P(M)\right|-[(q+r)r^{n-1}])$$

olarak elde edilir. Bu bulunan sayı içerisinde aynı düzlemi gösteren nokta üçlüleri vardır.

Bir düzlem üzerinde q^2+qr+r^2 tane nokta var olduğundan ilk nokta q^2+qr+r^2 türlü seçilebilir. Bir düzlem üzerinde belli bir noktaya komşu olan nokta sayısı $\left|I\right|^2=r^2$ olduğundan ikinci nokta $q^2+qr+r^2-r^2=q^2+qr$ türlü seçilebilir.

Düzlem oluşturmak için seçilen üçüncü nokta ilk iki noktanın belirlediği doğru üzerinde olmayacak şekilde ve doğru üzerindeki noktalarla da aynı komşulukta olmayacak şekilde belirlenmelidir. O halde üçüncü nokta $(q^2+qr+r^2)-(q+r)r$ türlü seçilebilir. Yani

$(q^2+qr+r^2)\cdot(q^2+qr)\cdot[(q^2+qr+r^2)-(q+r)r]$ tane üçlü aynı düzlemi göstermektedir. Sonuç olarak $P(M)$ deki düzlem sayısı

$$\frac{\left|P(M)\right|\cdot(\left|P(M)\right|-\left|I\right|^{n})\cdot(\left|P(M)\right|-[(q+r)r^{n-1}])}{(q^2+qr+r^2)\cdot(q^2+qr)\cdot[(q^2+qr+r^2)-(q+r)r]}$$

olarak hesaplanır.□

Şimdi $P(M)$ uzayı için elde edilen sayısal sonuçlara ilişkin iki örnek verilecektir:

Örnek 4.5.5. $R=\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ lokal halkası alınsın. Burada $I=\{0,2\}$ olup $n=2$ için

$M=R^{2+1}=R^3=\{x=(x_1,x_2,x_3)\mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}_4\}$ elde edilir.

$|M| = 4^3 = 64$ tür. $I^{2+1} = \{x' = (x_1', x_2', x_3') \mid x_1', x_2', x_3' \in I\}$ için $|I^3| = 2^3 = 8$ dir. $M^* = M \setminus I^3$ için $|M^*| = 64 - 8 = 56$ dır. M^* da bir noktanın $|\mathbb{Z}_4 \setminus I| = 4 - 2 = 2$ tane gösterimi vardır. Dolayısıyla $P(M)$ uzayının nokta sayısı $|P(M)| = \frac{64-8}{2} = 28$ olarak elde edilir.

$P(M)$ de bir doğru üzerindeki (farklı) nokta sayısı $4 + 2 = 6$ tanedir.

$P(M)$ de bir düzlem üzerindeki (farklı) nokta sayısı $4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2 = 28$ tanedir, yani $P(M)$ deki toplam nokta sayısıdır.

$P(M)$ de bir noktanın komşuluğunda $|I|^2 = 2^2 = 4$ tane nokta vardır.

$P(M)$ de bir doğru üzerinde belli bir noktaya komşu olan nokta sayısı $|I| = 2$ tanedir.

$P(M)$ de bir düzlem üzerinde belli bir noktaya komşu olan nokta sayısı $|I^2| = 2^2 = 4$ tanedir.

$P(M)$ de toplam (farklı) doğru sayısı $\frac{28 \cdot (28-4)}{6 \cdot (6-2)} = \frac{28 \cdot 24}{6 \cdot 4} = 28$ tanedir.

$P(M)$ de toplam (farklı) düzlem sayısı $\frac{28 \cdot (28-4) \cdot (28 - 6 \cdot 2)}{28 \cdot (16+8) \cdot (28 - 6 \cdot 2)} = \frac{28 \cdot 24 \cdot 16}{28 \cdot 24 \cdot 16} = 1$ tanedir, yani $P(M)$ nin kendisidir.

Örnek 4.5.6. $R = \mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ lokal halkası alınsın. Burada $I = \{0,2\}$ olup $n = 3$ için

$M = R^{3+1} = R^4 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_4\}$ elde edilir.

$|M| = 256$ tür. $I^4 = \{x' = (x_1', x_2', x_3', x_4') \mid x_1', x_2', x_3', x_4' \in I\}$ için $|I^4| = 16$ dir. $M^* = M \setminus I^4$ için $|M^*| = 256 - 16 = 240$ dır. M^* da bir noktanın $|\mathbb{Z}_4 \setminus I| = 4 - 2 = 2$ tane gösterimi vardır. Böylece $|P(M)| = \frac{256-16}{2} = 120$ olarak elde edilir.

$P(M)$ de bir doğru üzerindeki (farklı) nokta sayısı $4 + 2 = 6$ tanedir.

$P(M)$ de bir düzlem üzerindeki (farklı) nokta sayısı $4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2 = 28$ tanedir.

$P(M)$ de bir noktanın komşuluğunda $|I|^3 = 2^3 = 8$ tane nokta vardır.

$P(M)$ de bir doğru üzerinde belli bir noktaya komşu olan nokta sayısı $|I| = 2$ dir.

$P(M)$ de bir düzlem üzerinde belli bir noktaya komşu olan nokta sayısı $|I^2| = 2^2 = 4$ tür.

$P(M)$ de toplam (farklı) doğru sayısı $\dfrac{(4^4 - 2^4) \cdot (4^3 - 2^3)}{(4-2)^2 \cdot (4+2)} = \dfrac{240 \cdot 56}{4 \cdot 6} = 560$ tanedir.

$P(M)$ de toplam (farklı) düzlem sayısı

$\dfrac{120 \cdot (120 - 2^3) \cdot (120 - 6 \cdot 2^2)}{28 \cdot (28-4) \cdot (28 - 6 \cdot 2)} = \dfrac{120 \cdot 112 \cdot 96}{28 \cdot 24 \cdot 16} = 120$ tanedir.

5. PROJEKTİF UZAYLAR VE ALT UZAYLARI

5.1. Giriş

Geometrik özelliklerle noktaların koordinatlarının cebirsel özellikleri arasındaki bağıntıları bulmak için temel olarak analitik ve aksiyomatik olmak üzere iki yol mevcuttur. Bu bölümde projektif uzay kavramının elde edilmesi için aksiyomatik yol ele alınmıştır. Bu metot vektör uzayı kavramıyla başlar. Vektör uzayı kavramı kullanılarak Herman Weyl tarafından verilen aksiyomlar cümlesi ile bir A afin uzayı tanımlanır. Buradan projektif uzayı elde etmek için $V\backslash\{0\}$ kümesinde bir denklik bağıntısı tanımlanır ve bu denklik sınıflarının kümesi projektif uzay olarak alınır. Bu bölümde önce; Hirschfeld (1998) tarafından yapılan çalışmada sonlu cisimler üzerine kurulan projektif uzay kavramı, sonsuz mertebeli cisim üzerine kurulan projektif uzay kavramına genişletilmiştir. Sonra bu kurulan uzay ile Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmada aksiyomatik olarak kurulmuş projektif uzay karşılaştırılmış ve denk oldukları gösterilmiştir. Ayrıca iki ve üç boyutlu alt uzayların matrislerle temsilleri detaylı olarak incelenmiştir. Bölümün son kısmında ise 4. bölüm 4. kısımda vektör uzayları üzerine kurulan projektif uzaylardan genelleştirilerek elde edilen modül üzerine kurulan yani 3. yapı olarak verilen uzay, Borsuk (1969) tarafından hazırlanan çalışmadaki yöntem ile incelenmiştir. Bu uzayın alt uzaylarının matris ile temsilleri bir örnek ile araştırılmıştır.

5.2. Projektif Uzaylar ve Altuzaylarının Örneklerle İncelenmesi

Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmada C_n kartezyen uzayından P_n projektif uzayına geçiş aşağıdaki gibi yapılmıştır:

C_n uzayının tüm bileşenlerinin hepsi birden 0 olmayan her $(x_1, x_2, ..., x_n)$ noktasına karşılık $\{1, x_1, x_2, ..., x_n\}$ $(n+1)-$lisi P_n uzayının bir noktası olarak alınmıştır. Üstelik

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $\{\lambda, \lambda x_1, ..., \lambda x_n\}$ ile $\{1, x_1, ..., x_n\}$ eşit kabul edilmiştir. Böylece P_n de $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ve $\{\lambda x_0, \lambda x_1, ..., \lambda x_n\}$ aynı noktanın iki temsili olarak alınmıştır.

C_n de keyfi bir noktası $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ve doğrultman vektörü $v = [v_1, v_2, ..., v_n]$ olan bir L doğrusu

$$p(t) = a + tv = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, ..., a_n + tv_n)$$

formundaki noktaların kümesidir. P_n de bu noktalara karşılık $\{1, a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, ..., a_n + tv_n\}$ noktaları gelecektir. Ayrıca $t \neq 0$ olmak üzere bu noktalar $\left\{\frac{1}{t}, \frac{a_1}{t} + v_1, \frac{a_2}{t} + v_2, ..., \frac{a_n}{t} + v_n\right\}$ şeklinde de gösterilebilir. P_n de $t \to \infty$ iken $\{0, v_1, v_2, ..., v_n\}$ noktası elde edilir. v_i lerin hepsi birden 0 olmamak şartıyla $\{0, v_1, v_2, ..., v_n\}$ sıralı $(n+1)$-lisine P_n uzayının bir ideal noktası denir.

Böylece C_n uzayında $\{(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, ..., a_n + tv_n) \mid t \in \mathbb{R}^*\}$ kümesindeki noktaların oluşturduğu bir L doğrusunun karşılığı P_n de

$$\{\{1, a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, ..., a_n + tv_n\} \mid t \in \mathbb{R}^*\} \cup \{0, v_1, v_2, ..., v_n\}$$

noktalarından oluşur. Burada L nin C_n deki her $(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, ..., a_n + tv_n)$ noktasına karşılık P_n uzayının $\{1, a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, ..., a_n + tv_n\}$ noktası alınmış ve bunlara $\{0, v_1, v_2, ..., v_n\}$ ideal noktası eklenmiştir. Bu şekildeki her doğruya bir projektif doğru denir.

P_n uzayında $a = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ ve $b = \{b_0, b_1, ..., b_n\}$ gibi farklı iki noktayı birleştiren projektif doğru,

$$p(a,b) = \{\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, ..., \lambda a_n + \mu b_n \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*\} \cup \{0, b_1 - a_1, ..., b_n - a_n\}$$

formundaki noktaların kümesidir.

P_n uzayında iki çeşit nokta vardır:

1) $\{1, x_1, x_2, ..., x_n\}$ şeklinde yazılabilen normal(adi) noktalar

2) $\{0, y_1, ..., y_n\}$ şeklinde yazılabilen ideal noktalar

P_n uzayındaki doğrularda ikiye ayrılmaktadır:

1) C_n deki doğrulara, kabaca, bir ideal nokta eklenerek elde edilen projektif doğrular (Bu doğrulara normal doğru denir.)

2) Tüm ideal noktaların kümesi olan ideal doğru

Ayrıca bu çalışmada hiperdüzlemlerle ilgili aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 5.2.1. P_n uzayında $(n-1)-$boyutlu projektif hiperdüzlemler $a_0, a_1, ..., a_n$ sayılarının hepsi birden sıfır olmayacak şekilde

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

denklemini sağlayan $x = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in P_n$ noktalarının kümesidir (Borsuk 1969).

Şimdi de Hirschfeld (1998) tarafından yapılan çalışmada verilen sonlu mertebeli cisimler üzerine projektif uzayların kurulması ele alınacaktır. Ancak burada esas olarak reel sayılar cismi kullanılıp sonsuz mertebeli cisimler üzerine benzer metotla projektif uzay kurulacaktır. Sonra da bu kurulan projektif uzay ile Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmada verilen projektif uzay karşılaştırılacaktır.

V, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde (n+1)-boyutlu, etkisiz elemanı sıfır olan bir vektör uzayı olsun. $V \setminus \{0\}$ kümesinin elemanları üzerinde, denklik sınıfları V nin sıfır çıkarılmış bir boyutlu alt uzayları olan, bir denklik bağıntısı alınsın. Bu denklik sınıflarının kümesi $\mathbf{P_n}$ ile gösterilip elemanlarına nokta denilsin. Bir x vektörünün denklik sınıfı $P(x)$ ile gösterilir ve x e $P(x)$ noktasının koordinat vektörü ya da vektörel temsilcisi denir. t, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ın elemanı olmak üzere tx de $P(x)$ in bir temsilcisidir, yani $P(tx) = P(x)$ dir.

$\mathbf{P_n}$ nin bir alt kümesinin tüm temsilcilerine 0 vektörü katılarak oluşturulan küme V vektör uzayının $2-$boyutlu bir alt uzayını oluşturuyorsa bu noktalar kümesine $\mathbf{P_n}$ nin bir doğrusu denir. Nokta ve doğruları bu şekilde tanımlanan $\mathbf{P_n}$ kümesine $\mathbb{R}$ üzerinde $n-$boyutlu bir projektif uzay denir.

$\mathbf{P_n}$ nin bir noktalar alt kümesinin tüm temsilcilerine 0 vektörü de katılarak oluşturulan küme $V=V(n+1,\mathbb{R})$ vektör uzayında $(m+1)-$boyutlu ($m=-1,0,1,2,...,n$) bir alt uzay oluşturuyorsa bu noktalar kümesine $\mathbf{P_n}$ projektif uzayının *m-boyutlu bir alt uzayı* veya bir *m-uzayı* denir ve Π_m ile gösterilir.

$\mathbf{P_n}$ projektif uzayında $(-1)-$boyutlu bir alt uzay boş kümedir. Sıfır boyutlu bir alt uzaya nokta denir. Bir, iki ve üç boyutlu alt uzaylara sırası ile bir doğru, bir düzlem ve bir katı cisim veya üç boyutlu cisim denir. $(n-1)-$boyutlu bir alt uzaya bir prime veya bir hiperdüzlem denir. Boyutu $n-r$ olan bir alt uzaya koboyutu r olan bir alt uzay da denir.

Bu alt uzayların noktalarının sağlayacağı denklemler hakkında kısaca şu bilgiler verilebilir:

Bir *hiperdüzlem*, $u=(u_0,u_1,...,u_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{(0,0,...,0)\}$ olmak üzere $x=(x_0,x_1,...,x_n)$ temsilci vektörleri

$$u_0x_0+u_1x_1+\cdots+u_nx_n=0$$

lineer denklemini sağlayan $P(x)$ noktalarının kümesidir.

$m-$boyutlu bir alt uzay hakkında aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

$m-$boyutlu bir alt uzayın $P(x)$ noktalarının $x=(x_0,x_1,...,x_n)$ temsilcileri, A bileşenleri reel sayı ve rankı $n-m$ olan bir $(n+1)\times(n-m)$ matris olmak üzere,

$$xA = 0 \tag{5.2.1}$$

denklemini sağlarlar (Hirschfeld 1998). Burada $A \neq 0$ olacağı açıktır.

Bu kısa tanıtımdan sonra Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmada tanımlanan ile, yukarıda kuruluşu verilen projektif uzay kavramları karşılaştırılıp aralarındaki ilişkiler ve birinden diğerine geçişin nasıl yapılacağı belirlenmeye çalışılacaktır.

Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmada verilen projektif uzay kavramının kuruluşu yukarıda verilen gibi denklik sınıfları yardımıyla aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

P_n uzayının noktaları $C_{n+1} \setminus \{0\}$ uzayının sıralı $(n+1)-$lileri ile temsil edilir. Bu yüzden $C_{n+1} \setminus \{0\}$ uzayı ele alınıp ve P_n uzayındaki noktalar aşağıdaki gibi ikiye ayrılır:

$\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ sıralı $(n+1)-$lisinde $x_0 \neq 0$ ise $x_0^{-1} \in \mathbb{R}$ vardır. Dolayısıyla

$\{1, x_0^{-1}x_1, x_0^{-1}x_2, ..., x_0^{-1}x_n\} = \{1, x_1', x_2', ..., x_n'\}$ elde edilir. Bu formdaki noktalara normal noktalar denir.

$C_{n+1} \setminus \{0\}$ uzayında bir denklik bağıntısının aşağıdaki şekilde tanımlandığı kabul edilsin:

$\forall\ x = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ve $y = \{y_0, y_1, ..., y_n\} \in C_{n+1} \setminus \{0\}$ için x ile y nin denkliği $\lambda \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $y = \lambda x$ yani $y_i = \lambda x_i \quad (i = 0,1,...,n)$ eşitliklerinin geçerliliğidir. O halde $\{1, x_1, x_2, ..., x_n\} = \{\lambda, \lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\}$ olup $\{1, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ile $\{\lambda, \lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\}$ aynı noktayı göstermektedir.(aynı denklik sınıfına aittir.)

Benzer şekilde $\gamma \in \mathbb{R}^*$ için $\{0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ile $\{0, \gamma x_1, \gamma x_2, ..., \gamma x_n\}$ aynı noktayı göstermektedir. İlk bileşeni "0" olan bir noktanın denklik sınıfı ideal nokta olarak adlandırılır. Böylece Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmada verilen ile Hirschfeld (1998) tarafından yapılan çalışmadaki metot kullanılarak tanımlanan projektif uzay kavramları için nokta kavramlarının birbirine denk olduğu görülmektedir.

Ayrıca kurulan bu uzaydaki doğru tanımı aşağıdaki gibi düzenlenirse Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmada verilen tanımla denk olduğu görülür:

Tanım 5.2.2. $\mathbf{P_n}$ nin bir noktalar alt kümesinin tüm temsilcilerine 0 vektörü de katılarak oluşturulan küme C_{n+1} de $2-$boyutlu bir alt uzay oluşturuyorsa bu noktalar kümesine $\mathbf{P_n}$ uzayının bir doğrusu denir.

Hirschfeld (1998) tarafından yapılan çalışmada bir hiperdüzlem aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$u=(u_0,u_1,...,u_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{(0,0,...,0)\}$ olmak üzere

$x=(x_0,x_1,...,x_n)$ vektörleri $u_0x_0+u_1x_1+...+u_nx_n=0$ lineer denklemini sağlayan $P(x)$ noktalarının kümesidir (Hirschfeld 1998).

Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmada ise bir hiperdüzlem aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

P_n uzayında $(n-1)-$boyutlu hiperdüzlem $a_0,a_1,...,a_n$ sayılarının hepsi birden sıfır olmayacak şekilde $a_0x_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ denklemini sağlayan $\{x_0,x_1,...,x_n\}\in P_n$ noktalarının kümesidir. Ayrıca eğer $a_i=\{a_{i0},a_{i1},...,a_{in}\}$ noktaları $i=1,2,...,n$ olmak üzere lineer bağımsız bir sistem oluşturuyorsa, bu taktirde bu noktalardan geçen $(n-1)-$boyutlu projektif hiperdüzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

formuna sahiptir (Borsuk 1969).

Basit bir karşılaştırma ile bu tanımların birbirine denk olduğu görülmektedir.

Aşağıda alt uzaylar için (5.2.1) denklemindeki matrislerle aralarındaki ilişkiyi canlandıracak iki örnek verilecektir:

Örnek 5.2.3. $n=2$ için $V=(2+1,\mathbb{R})$ reel sayılar cismi üzerine kurulan $3-$boyutlu bir vektör uzayı olsun. Şimdi bunun ile ilişkili P_2 projektif uzayı için $m=0,1,2$ olmak üzere Π_m alt uzayları incelenecektir.

$m=0$ için Π_0 alt uzayı $P(x)$ şeklinde gösterilen noktadır ve uzayın 3×2 tipinde A üzerinde olma matrisi verildiğinde $xA=0$ denklemini sağlar.

$m=1$ için $1-$boyutlu alt uzay yani doğru kavramı

$\Pi_1=\{P(x)\,|\,xA=0,\ A\in\mathbb{R}_1^3\}$ şeklinde tanımlanır. Şimdi üzerinde olma matrisi, $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}$ biçimindeki bir doğrunun üzerinde bulunan noktalar değişik durumlar göz önüne alınarak tespit edilmeye çalışılacaktır. Burada

$$xA=\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\Rightarrow a_{00}x_0+a_{10}x_1+a_{20}x_2=0$$

denklemi elde edilir.

Bir doğrunun (d_∞ doğrusu hariç) ideal noktası bir tektir. Diğerleri normal noktadır.

I. Durum. Burada $\{x_0,x_1,x_2\}$ noktası için $x_0\neq 0$ ise bu nokta $\{1,x_1,x_2\}$ şeklinde normal nokta haline getirilir.

Önce doğrunun $\{1,x_1,x_2\}$ formunda normal bir noktası alınsın. Bu durumda

$$xA = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = [0] \Rightarrow a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = 0 \Rightarrow a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = -a_{00}$$ denklemi elde edilir.

Burada $\exists\ a_{10}, a_{20} \neq 0$ olmalıdır. Aksi halde yukarıda elde edilen $a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = -a_{00}$ denkleminden $a_{00} = 0$ bulunur ki bu da matrisin tüm bileşenlerinin sıfır olması demektir. Sıfır matrisi bir üzerinde olma matrisi olamaz. O halde eğer $a_{10} \neq 0$ ise $x_1 = -a_{10}^{-1}a_{00} - a_{10}^{-1}a_{20}x_2$ bulunur. Burada kısaca $-a_{10}^{-1}a_{00} = a \in \mathbb{R}$ ve $-a_{10}^{-1}a_{20} = b \in \mathbb{R}$ denilerek $\{\{1, a + bx_2, x_2\} | x_2 \in \mathbb{R}\}$ şeklindeki normal noktalar kümesi elde edilir. Bu noktalar kümesi $\{1, a, 0\} + \{\{0, bx_2, x_2\} | x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ şeklinde de ifade edilebilir. Özel olarak $\{1, a, 0\}$ ve $\{0, b, 1\}$ noktaları seçilip denklemi sağladıkları kolayca görülebilir. Böylece doğrunun bir normal ve bir de ideal noktası belirlenmiş olur. Dolayısıyla doğru $\{1, a, 0\} \cup \{0, b, 1\}$ şeklinde temsil edilebilir. $a_{20} \neq 0$ alınarak $\{1, 0, a'\}$ ve $\{0, 1, b'\}$ tipindeki normal ve ideal noktalarına ulaşılarak doğrunun $\{1, 0, a'\} \cup \{0, 1, b'\}$ şeklinde temsil edilmesi de mümkündür. Burada $a_{10} \neq 0 \neq a_{20}$ iken $\{0, b, 1\}$ ile $\{0, 1, b'\}$ aynı ideal noktayı temsil etmektedir.

II. Durum. Eğer doğrunun $\{0, x_1, x_2\}$ özelliğindeki ideal noktası denklemden bulunmak istenirse

$$[0 \quad x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = 0$$ denklemi açılarak $a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = 0$ eşitliği elde edilir. Burada $\exists\ a_{10}, a_{20} \neq 0$ olmalıdır. Aksi halde doğrunun ideal noktası belirlenemez. Eğer

Burada $a_{10} \neq 0$ ise $x_1 = -a_{10}^{-1}a_{20}x_2$ bulunur ki kısaca $b = -a_{10}^{-1}a_{20}$ denilerek $\{\{0, bx_2, x_2\} | x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ ideal noktası elde edilir ki bunun ilk adımda noktalar kümesinden elde edilen $\{0, b, 1\}$ ile aynı nokta olduğu görülmektedir. Benzer şekilde $a_{20} \neq 0$ için $\{\{0, x_1, b'x_1\} | x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ ideal noktasının yani özel olarak $\{0, 1, b'\}$ noktasının elde edildiği açıktır.

Bu örnekte $m=1$ için elde edilen $1-$boyutlu alt uzay yani doğru kavramı P_2 projektif uzayı için bir hiperdüzlemdir.

Şimdi de tersine verilen noktalardan geçen doğruyu (hiperdüzlemi) temsil eden üzerinde olma matrisi belirlenecektir.

I. Durum. $\{1,a,0\}$ ve $\{1,0,a'\}$ farklı normal noktaları alınsın. (Burada $\exists\, a,a'\neq 0$ dır.)

Aranılan matris $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^3$ formundadır. Buradan

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{00} + aa_{10} = 0 \qquad \text{ve} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & a' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{00} + a'a_{20} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler ortak çözülürse $a\neq 0$ için $a_{00} = -a'a_{20}$ ve $a_{10} = a^{-1}a'a_{20}$ değerleri bulunur. Böylece $\begin{bmatrix} -a'a_{20} \\ a^{-1}a'a_{20} \\ a_{20} \end{bmatrix}$ matrisi ve $a_{20}=1$ alınarak $\begin{bmatrix} -a' \\ a^{-1}a' \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklinde üzerinde olma matrisi elde edilir.

II. Durum. $\{1,a,b\}$ ve $\{1,c,d\}$ normal noktaları alınsın. Aranılan matris $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^3$ formundadır. Buradan

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{00} + aa_{10} + ba_{20} = 0 \text{ ve}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{00} + ca_{10} + da_{20} = 0$$ denklemleri elde edilir. Bu denklemler birlikte çözülürse $(a-c)a_{10} = (d-b)a_{20}$ eşitliği elde edilir. Burada $a=c$ ve $b=d$ olamaz. O halde $a\neq c$ olduğu kabul edilsin. O zaman $a-c\neq 0$ olup

$a_{10}=(a-c)^{-1}(d-b)a_{20}$ ve $a_{00}=(a(a-c)^{-1}(b-d)-b)a_{20}$ olarak elde edilir. Böylece $a_{20}=1$ kabul edilerek $\begin{bmatrix} a(a-c)^{-1}(b-d)-b \\ (a-c)^{-1}(d-b) \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir.

III. Durum. $\{1,a,0\}$ normal ve $\{0,b,1\}$ ideal noktaları ele alınsın. Aranılan matris $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^3$ formundadır. Buradan

$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}=0 \Rightarrow a_{00}+aa_{10}=0$ ve $\begin{bmatrix} 0 & b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}=0 \Rightarrow ba_{10}+a_{20}=0$ denklemleri elde edilir. Bu denklemler ortak çözülürse $a_{00}=-aa_{10}$ ve $a_{20}=-ba_{10}$ değerleri bulunur.

Böylece $\begin{bmatrix} -aa_{10} \\ a_{10} \\ -ba_{10} \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir. Yine $a_{10}=1$ alınarak $\begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ -b \end{bmatrix}$ matrisine ulaşılır.

IV. Durum. $\{1,0,\mathrm{a}'\}$ normal ve $\{0,1,\mathrm{b}'\}$ veya $\{0,b,1\}$ ideal noktaları alınsın. Önce $\{0,1,\mathrm{b}'\}$ ideal noktası ile olan durum incelenecektir. Aranılan matris $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^3$ formundadır. Buradan

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}=0 \Rightarrow a_{00}+a'a_{20}=0$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}=0 \Rightarrow a_{10}+b'a_{20}=0$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler ortak çözülerek $a_{00}=-a'a_{20}$ ve $a_{10}=-b'a_{20}$ değerleri bulunur. Böylece $\begin{bmatrix} -a'a_{20} \\ -b'a_{20} \\ a_{20} \end{bmatrix}$ matrisi ve $a_{20}=1$ alınarak $\begin{bmatrix} -a' \\ -b' \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklindeki üzerinde olma matrisi elde edilir. Son olarak $\{1,0,\mathrm{a}'\}$ normal ve $\{0,b,1\}$ ideal noktaları alınsın. Buradan $b \neq 0$ için $\begin{bmatrix} -a'a_{20} \\ -b^{-1}a_{20} \\ a_{20} \end{bmatrix}$ matrisi ve $a_{20} = 1$ alınarak da $\begin{bmatrix} -a' \\ -b^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklindeki üzerinde olma matrisi elde edilir. (Aksi halde $b = 0$ ise $\begin{bmatrix} 0 \\ a_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir.)

V. Durum. $\{0,b,1\}$ ve $\{0,1,b'\}$ ideal noktaları alınsın. Eğer $b' = b^{-1}$ ise iki nokta aynıdır. $b' \neq b^{-1}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow by + z = 0 \tag{5.2.2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow y + b'z = 0 \tag{5.2.3}$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemler ortak çözülürse (5.2.3) denkleminden $y = -b'z$ olarak elde edilir. Bu değer (5.2.2) denkleminde yerine yazılırsa $b(-b'z) + z = 0 \Rightarrow (1 - bb')z = 0$ bulunur. Burada $b' \neq b^{-1}$ olduğundan $bb' \neq 1$ yani $1 - bb' \neq 0$ dır. O halde $z = 0$ elde edilir. Bu değer (5.2.3) denkleminde yerine yazılırsa $y = 0$ elde edilir. Böylece $x \in \mathbb{R}$ için $\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ üzerinde olma matrisi elde edilir. $x \neq 0$ olduğundan ideal doğrunun üzerinde olma matrisi $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir. Bu tüm $\{0,a,b\}$ ideal noktalarının üzerinde bulunduğu ideal doğrunun matrisidir.

Örnek 5.2.4. $n=3$ için $V=(3+1,\mathbb{R})$, reel sayılar cismi üzerine kurulan $4-$boyutlu bir vektör uzayı olsun. Şimdi bunun ile ilişkili P_3 projektif uzayı için doğru ve düzlem alt uzayları incelenecektir.

Önce $m=1$ durumu incelenecektir. Bu durumda $1-$boyutlu alt uzay yani doğru kavramı $\Pi_1=\{P(x)\big|xA=0,\ A\in\mathbb{R}_2^4\}$ şeklinde tanımlanır.

Şimdi üzerinde olma matrisi $\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \\ a_{30} & a_{31} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}_2^4$ biçiminde olan bir doğrunun üzerinde bulunan noktalar özel durumlar göz önüne alınarak tespit edilecektir.

$\Pi_1=\{P(x)\big|xA=0,\ A\in\mathbb{R}_2^4\}$ için

$$xA=\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \\ a_{30} & a_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_{00}x_0+a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3&=0 \\ a_{01}x_0+a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3&=0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

I. Durum. Önce doğrunun $\{1,x_1,x_2,x_3\}$ formunda normal bir noktası alınsın. O zaman

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \\ a_{30} & a_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3 = -a_{00}$$
$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = -a_{01}$$

denklemleri elde edilir.

Bu Cramer olmayan bir lineer denklem sistemidir. $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} \neq 0$ ise δ_2 asli determinant olarak seçilebilir. Lineer denklem sistemi Cramer haline getirerek çözüm aranır. Böylece sistem

$\begin{array}{l} a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = -a_{00} - a_{30}x_3 \\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = -a_{01} - a_{31}x_3 \end{array}$ şeklinde bir Cramer lineer denklem sistemi olur. Buradan

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{00} - a_{30}x_3 & a_{20} \\ -a_{01} - a_{31}x_3 & a_{21} \end{vmatrix}}{a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}} = \frac{a_{20}a_{01} - a_{21}a_{00} + (a_{20}a_{31} - a_{21}a_{30})x_3}{a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}}$$

ve

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{10} & -a_{00} - a_{30}x_3 \\ a_{11} & -a_{01} - a_{31}x_3 \end{vmatrix}}{a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}} = \frac{-a_{10}a_{01} + a_{11}a_{00} + (a_{11}a_{30} - a_{10}a_{31})x_3}{a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}}$$

bulunur. Burada kısaca $\dfrac{a_{20}a_{01} - a_{21}a_{00}}{a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}} = a' \in \mathbb{R}$, $\dfrac{a_{20}a_{31} - a_{21}a_{30}}{a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}} = b' \in \mathbb{R}$, $\dfrac{-a_{10}a_{01} + a_{11}a_{00}}{a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}} = c' \in \mathbb{R}$ ve $\dfrac{a_{11}a_{30} - a_{10}a_{31}}{a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}} = d' \in \mathbb{R}$ denilirse $\{\{1, a' + b'x_3, c' + d'x_3, x_3\} \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$ şeklindeki normal noktalar kümesi bulunur. x_3 sıfırdan farklı iken bu noktalar kümesi $\{1, a', c', 0\} + \{\{0, b'x_3, d'x_3, x_3\} \mid x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ şeklinde de ifade edilebilir. Özel olarak $\{1, a', c', 0\}$ ve $\{0, b', d', 1\}$ noktaları seçilirse denklemi sağladıkları kolayca görülür. Böylece doğrunun bir normal ve bir ideal noktası belirlenmiş olur. Dolayısıyla doğru $\{1, a', c', 0\} \cup \{0, b', d', 1\}$ şeklinde temsil edilebilir.

Benzer şekilde $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{30} \\ a_{11} & a_{31} \end{vmatrix} \neq 0$ ise $x_2 \neq 0$ için özel olarak $\{1, e', 0, g'\}$ ve $\{0, f', 1, h'\}$ normal ve ideal noktalarına ulaşılarak doğruyu $\{1, e', 0, g'\} \cup \{0, f', 1, h'\}$ şeklinde temsil etmekte mümkün olur. Ayrıca $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{20} & a_{30} \\ a_{21} & a_{31} \end{vmatrix} \neq 0$ ise $x_1 \neq 0$ için özel olarak $\{1, 0, k', m'\}$ ve $\{0, 1, l', n'\}$ normal ve ideal noktalarına ulaşılır. Dolayısıyla doğruyu $\{1, 0, k', m'\} \cup \{0, 1, l', n'\}$ şeklinde de temsil etmek de mümkündür.

Burada $\{\{1, a' + b'x_3, c' + d'x_3, x_3\} | x_3 \in \mathbb{R}\}$ kümesi ele alınsın. Bu küme üzerinde olma matrisi $\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \\ a_{30} & a_{31} \end{bmatrix}$ biçiminde olan bir doğrunun üzerindeki tüm normal noktaların kümesidir. Bu küme $\{1, a', c', 0\} + \{\{0, b'x_3, d'x_3, x_3\} | x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ şeklinde ifade edilirse doğrunun üzerindeki ideal noktanın $\{\{0, b'x_3, d'x_3, x_3\} | x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ olarak bulunabildiği yukarıda söylenmişti. Ayrıca burada normal noktalar kümesinden iki tane nokta alındığı zaman bu iki noktanın lineer birleşimi oluşturularak doğrunun ideal noktasını belirlemek de mümkündür. Örneğin, $\{1, a', c', 0\}$ ile $\{1, a' + b', c' + d', 1\}$ normal noktaları alınsın. $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ için

$\lambda\{1, a', c', 0\} + \gamma\{1, a' + b', c' + d', 1\} = \{\lambda + \gamma, \lambda a' + \lambda b', \lambda c' + \gamma d', \gamma\}$ noktası elde edilir. Bu iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki ideal noktanın ilk bileşeni 0 olmalıdır. Dolayısıyla $\lambda + \gamma = 0$ kabul edilsin. $\lambda + \gamma = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma$ dır. Böylece nokta

$\{0, \gamma(-a' + b'), \gamma(-c' + d'), \gamma\} = \gamma\{0, -a' + b', -c' + d', 1\}$ formunda düzenlenirse doğru üzerindeki ideal nokta $\{0, -a' + b', -c' + d', 1\}$ olarak elde edilir.

II. Durum. Eğer doğrunun $\{0, x_1, x_2, x_3\}$ özelliğindeki noktası denklemden bulunmak istenirse $\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \\ a_{30} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ denklemi açılarak

$$a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3 = 0$$
$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} \neq 0$ ise δ_2 asli determinant olarak alınabilir.

Böylece Cramer kuralından

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{30}x_3 & a_{20} \\ -a_{31}x_3 & a_{21} \end{vmatrix}}{a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11}} = \frac{(a_{20}a_{31} - a_{30}a_{21})x_3}{a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11}} \text{ ve } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{10} & -a_{30}x_3 \\ a_{11} & -a_{31}x_3 \end{vmatrix}}{a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11}} = \frac{(a_{30}a_{11} - a_{10}a_{31})x_3}{a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11}}$$

bulunur ki $\dfrac{a_{20}a_{31} - a_{30}a_{21}}{a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11}} = b' \in \mathbb{R}$ ve $\dfrac{a_{30}a_{11} - a_{10}a_{31}}{a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11}} = d' \in \mathbb{R}$ denilerek $\{\{0, b'x_3, d'x_3, x_3\} \mid x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ ideal noktası elde edilir. Bu ideal noktanın ilk adımda noktalar kümesinden elde edilen $\{0, b', d', 1\}$ ile aynı nokta olduğu görülmektedir. Benzer şekilde asli determinantın seçimi yani doğrunun durumuna göre özel olarak $\{0, f', 1, h'\}$ ve $\{0, 1, l', n'\}$ ideal noktalarına da ulaşmak mümkündür.

Şimdi de tersine verilen noktalardan geçen doğruyu temsil eden üzerinde olma matrisinin nasıl bulunacağı örnek iki nokta alınarak belirlenecektir. Örnek olarak; $\{1, a', c', 0\}$, $\{1, e', 0, g'\}$ noktalarından geçen L doğrusunu temsil eden matris bulunacaktır. Bu doğrunun ideal noktası

$\alpha\{1, a', c', 0\} + \beta\{1, e', 0, g'\} = \{\alpha + \beta, \alpha a' + \beta e', \alpha c', \beta g'\}$ için $\alpha + \beta = 0$ olmak üzere

$\{0, \beta(-a' + e'), \beta(-c'), \beta g'\} = \beta\{0, -a' + e', -c', g'\}$ şeklinde olup $g' \neq 0$ için $\{0, b', d', 1\}$ şeklinde alınabilir. Ayrıca $\{1, a', c', 0\}$ normal ve $\{0, b', d', 1\}$ ideal noktalarının lineer birleşimi olan noktalar $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0$ olmak üzere $\{1, a' + x^{-1}yb', c' + x^{-1}yd', x^{-1}y\}$ şeklindedir. L doğrusu $\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \\ a_{30} & a_{31} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_2^4$ biçimindeki bir matristir. Alınan noktalar $xA = 0$ denklemini sağlayacaktır. Buradan

$$\begin{bmatrix}1 & a' & c' & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01}\\ a_{10} & a_{11}\\ a_{20} & a_{21}\\ a_{30} & a_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l} a_{00}+a'a_{10}+c'a_{20}=0\\ a_{01}+a'a_{11}+c'a_{21}=0\end{array},$$

$$\begin{bmatrix}1 & e' & 0 & g'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01}\\ a_{10} & a_{11}\\ a_{20} & a_{21}\\ a_{30} & a_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l} a_{00}+e'a_{10}+g'a_{30}=0\\ a_{01}+e'a_{11}+g'a_{31}=0\end{array},$$

$$\begin{bmatrix}1 & a'+x^{-1}yb' & c'+x^{-1}yd' & x^{-1}y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01}\\ a_{10} & a_{11}\\ a_{20} & a_{21}\\ a_{30} & a_{31}\end{bmatrix}=0\Rightarrow \begin{array}{l} a_{00}+(a'+x^{-1}yb')a_{10}+(c'+x^{-1}yd')a_{20}+(x^{-1}y)a_{30}=0\\ a_{01}+(a'+x^{-1}yb')a_{11}+(c'+x^{-1}yd')a_{21}+(x^{-1}y)a_{31}=0\end{array}$$

ve

$$\begin{bmatrix}0 & b' & d' & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01}\\ a_{10} & a_{11}\\ a_{20} & a_{21}\\ a_{30} & a_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l} b'a_{10}+d'a_{20}+a_{30}=0\\ b'a_{11}+d'a_{21}+a_{31}=0\end{array}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler ortak çözülürse

$a_{00}=\lambda a_{20}$, $a_{01}=\lambda a_{21}$, $a_{10}=\beta a_{20}$, $a_{11}=\beta a_{21}$, $a_{30}=\gamma a_{20}$, $a_{31}=\gamma a_{21}$ değerleri bulunur. Burada

$\lambda=-a'(e'-a'-g'b')^{-1}(c'+g'd')-c'$, $\beta=(e'-a'-g'b')^{-1}(c'+g'd')$ ve
$\gamma=(-b'(e'-a'-g'b')^{-1}(c'+g'd')-d')$ şeklinde bilinen sayılardır.

Böylece $\begin{bmatrix}\lambda a_{20} & \lambda a_{21}\\ \beta a_{20} & \beta a_{21}\\ a_{20} & a_{21}\\ \gamma a_{20} & \gamma a_{21}\end{bmatrix}$ matrisi elde edilir.

Şimdi de $m=2$ durumu incelenecektir. Bu durumda $2-$boyutlu alt uzay yani P_3 uzayının hiperdüzlemi kavramı

$$\Pi_2=\{P(x)\big|xA=0, A\in\mathbb{R}_1^4\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada üzerinde olma matrisi $\begin{bmatrix} a_{00}\\ a_{10}\\ a_{20}\\ a_{30}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_1^4$ biçimindeki bir düzlemin noktalarının nasıl elde edileceği özel durumlar gözönüne alınarak incelenecektir.

$$xA=\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00}\\ a_{10}\\ a_{20}\\ a_{30}\end{bmatrix}=0$$

eşitliğinden

$$a_{00}x_0+a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3=0 \qquad (5.2.4)$$

denklemi elde edilir.

I. Durum. $x_0=1$ olsun. Böylece $\{1,x_1,x_2,x_3\}$ formunda normal bir nokta seçilmiş olsun. O zaman (5.2.4) denklemi $a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3=-a_{00}$ şekline dönüşür. Burada $\exists\, a_{10},a_{20},a_{30}\neq 0$ olmalıdır. Aksi halde $a_{00}=0$ olur ki bu bir çelişkidir. Çünkü sıfır matrisi bir üzerinde olma matrisi değildir. O halde $a_{10}\neq 0$ ise $x_1=-a_{10}{}^{-1}a_{00}-a_{10}{}^{-1}a_{20}x_2-a_{10}{}^{-1}a_{30}x_3$ elde edilir. Burada kısaca $-a_{10}{}^{-1}a_{00}=a'\in\mathbb{R}$, $-a_{10}{}^{-1}a_{20}=b'\in\mathbb{R}$ ve $-a_{10}{}^{-1}a_{30}=c'\in\mathbb{R}$ denirse $\{\{1,a'+b'x_2+c'x_3,x_2,x_3\}\big|x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ şeklindeki normal noktalar kümesi bulunur. x_2 ve x_3 den en az biri sıfırdan farklı iken bu noktalar kümesi $\{1,a',0,0\}+\{\{0,b'x_2+c'x_3,x_2,x_3\}\big|\exists x_2,x_3\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\}$ şeklinde de ifade edilebilir. Özel olarak $x_2, x_3 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ için $\{1, a', 0, 0\}$, $\{0, b', 1, 0\}$ ve $\{0, c', 0, 1\}$ noktaları seçilirse denklemi sağladıkları kolayca görülür. Böylece düzlemin bir normal ve iki farklı ideal noktası belirlenmiş olur. Dolayısıyla düzlem $\{1, a', 0, 0\} \cup \{\{0, b', 1, 0\}, \{0, c', 0, 1\}\}$ şeklinde temsil edilebilir.

Benzer şekilde $a_{20} \neq 0$ alınarak $x_1, x_3 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ için $\{1, 0, d', 0\}$ normal ve $\{\{0, 1, e', 0\}, \{0, 0, f', 1\}\}$ ideal noktalarına ulaşılır ve düzlemi $\{1, 0, d', 0\} \cup \{\{0, 1, e', 0\}, \{0, 0, f', 1\}\}$ şeklinde temsil etmek de mümkün olur. Ayrıca $a_{30} \neq 0$ alınarak $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ için $\{1, 0, 0, g'\}$ normal ve $\{\{0, 1, 0, h'\}, \{0, 0, 1, k'\}\}$ ideal noktalarına ulaşılır ve bu durumda düzlemi $\{1, 0, 0, g'\} \cup \{\{0, 1, 0, h'\}, \{0, 0, 1, k'\}\}$ şeklinde temsil etmek de mümkündür.

Burada $\{1, a', 0, 0\}$ ve $\{1, 0, d', 0\}$ normal noktalarından geçen doğrunun ideal noktasının $b', e' \neq 0$ için $\{0, b', 1, 0\} = \{0, 1, e', 0\}$;

$\{1, a', 0, 0\}$ ve $\{1, 0, 0, g'\}$ normal noktalarından geçen doğrunun ideal noktasının $c', h' \neq 0$ için $\{0, c', 0, 1\} = \{0, 1, 0, h'\}$;

$\{1, 0, d', 0\}$ ve $\{1, 0, 0, g'\}$ normal noktalarından geçen doğrunun ideal noktasının $f', k' \neq 0$ için $\{0, 0, f', 1\} = \{0, 0, 1, k'\}$

olduğu açıktır.

II. Durum. Eğer düzlemin $\{0, x_1, x_2, x_3\}$ özelliğindeki noktası denklemden bulunmak istenirse $\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{bmatrix} = 0$ denklemi açılıp $a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3 = 0$ eşitliği elde edilir. Burada $a_{10} \neq 0$ ise $x_1 = -a_{10}^{-1}a_{20}x_2 - a_{10}^{-1}a_{30}x_3$ bulunur ki $-a_{10}^{-1}a_{20} = b' \in \mathbb{R}$ ve $a_{10}^{-1}a_{30} = c' \in \mathbb{R}$ denilerek $\{\{0, b'x_2 + c'x_3, x_2, x_3\} | \exists x_2, x_3 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\}$ ideal noktası elde edilir. $x_2, x_3 \neq 0$ için bunların ilk adımda noktalar kümesinden özel olarak elde edilen $\{\{0, b', 1, 0\}, \{0, c', 0, 1\}\}$ ile aynı ideal noktalar olduğu görülmektedir. Benzer şekilde

$a_{20} \neq 0$ için $x_1, x_3 \neq 0$ ve $a_{30} \neq 0$ için $x_1, x_2 \neq 0$ kabul edilerek özel olarak sırasıyla ilk adımda bulunan $\{\{0,1,e',0\},\{0,0,f',1\}\}$ ve $\{\{0,1,0,h'\},\{0,0,1,k'\}\}$ ideal noktaları da elde edilebilir.

Şimdi de tersine verilen noktalardan geçen düzlemi temsil eden üzerinde olma matrisinin istenilen özel şartlarda nasıl olacağı incelenecektir. Bunun için farklı $\{1,a',0,0\}$ ve $\{1,0,d',0\}$ (burada $\exists\, a',d' \neq 0$ dır.) normal noktaları ve $\{0,c',0,1\}$ ideal noktası alınsın. Aranılan matris $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^4$ biçiminde olacaktır ve alınan bu noktalar $xA = 0$ denklemini sağlayacaktır. Buradan

$$\begin{bmatrix} 1 & a' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{00} + a'a_{10} = 0 \,,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_{00} + d'a_{20} = 0 \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 & c' & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow c'a_{10} + a_{30} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler ortak çözülerek $a' \neq 0$ için $a_{00} = -d'a_{20}$, $a_{10} = a'^{-1}d'a_{20}$ ve $a_{30} = -c'a'^{-1}d'a_{20}$ değerleri bulunur. Böylece $\begin{bmatrix} -d'a_{20} \\ a'^{-1}d'a_{20} \\ a_{20} \\ -c'a'^{-1}d'a_{20} \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir. Burada yine $a_{20} = 1$ alınarak $\begin{bmatrix} -d' \\ a'^{-1}d' \\ 1 \\ -c'a'^{-1}d' \end{bmatrix}$ matrisine ulaşılır.

5.3. n-boyutlu Uzay ve Altuzayların Matris Temsillerinin Örneklerle İncelenmesi

Bölümün bu son kısmında ise 4. bölümde vektör uzayları üzerine kurulan projektif uzaylardan genelleştirilerek elde edilen modül üzerine kurulan uzay Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmadaki yöntem ile incelenmiştir. Bu uzayın alt uzaylarının matris ile temsilleri bir örnek ile araştırılmıştır.

4. bölümün 4. kısmında R lokal halkası üzerindeki $(n+1)-$boyutlu modül üzerine n-boyutlu $P(M)$ uzayı inşaa edilmişti. Şimdi $P(M)$ uzayındaki bir $\overline{x}$ noktası Borsuk (1969) tarafından yapılan çalışmadaki yöntem ile $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ şeklinde gösterilsin. O zaman $P(M)$ nin $\overline{x} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ noktası için iki durum söz konusudur:

I. Durum. $x_0 \notin I$ ise $x_0^{-1} \in R$ mevcuttur. O halde

$\{x_0, x_1, ..., x_n\} = \{1, x_0^{-1}x_1, x_0^{-1}x_2, ..., x_0^{-1}x_n\}$ elde edilir. Bu noktalara $P(M)$ uzayının normal noktaları denir.

II. Durum. $x_0 \in I$ ise $x_0 = i \in I$ için $\{x_0, x_1, ..., x_n\} = \{i, x_1, x_2, ..., x_n\}$ biçimindeki noktalara $P(M)$ uzayının ideal noktaları denir.

Böylece $P(M)$ uzayının noktaları üzerindeki denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tekrar düzenlenebilir:

$x = \{1, x_1, ..., x_n\} \in M \setminus I^{n+1}$ ve $\lambda \in R \backslash I$ için

$\{1, x_1, x_2, ..., x_n\} = \{\lambda, \lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\}$ olup $\{1, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ile $\{\lambda, \lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\}$ aynı noktayı göstermektedir(aynı denklik sınıfına aittir).

Benzer şekilde $\gamma \in R \backslash I$ için $\{i, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ile $\{\gamma i, \gamma x_1, \gamma x_2, ..., \gamma x_n\}$ $\{i, x_1, x_2, ..., x_n\} = \{\gamma i, \gamma x_1, \gamma x_2, ..., \gamma x_n\}$ aynı noktayı göstermektedir.

$P(M)$ uzayının $m-$boyutlu alt uzayı tanımı aşağıdaki şekilde de verilebilir:

Π_m uzayı $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ temsilcileri; A bileşenleri birimli ve değişmeli R lokal halkasından alınan ve rankı $n-m$ ve en az bir elemanı birim olan bir $(n+1)\times(n-m)$ matris olmak üzere

$$xA = 0$$

denklemini sağlayan $P(x)$ noktalarının kümesidir.

Aşağıda alt uzaylar için verilen bu tanımı açıklayan bir örnek verilecektir:

Örnek 5.3.1. $n = 2$ için $M = (2+1, R)$ R lokal halkası üzerine kurulan $3-$boyutlu bir modül olsun. R nin maksimal ideali I olsun. Böylece M modülü üzerine kurulan $2-$boyutlu $P(M)$ uzayı için $m = -1, 0, 1, 2$ olmak üzere Π_m alt uzayları incelenecektir:

$m = -1$ için Π_{-1} boş kümedir.

$m = 0$ için Π_0 alt uzayı nokta olarak adlandırılır. $P(M)$ de bir nokta bir tektir. Dolayısıyla ya normal ya da ideal noktadır. Bu yüzden $0-$boyutlu alt uzay için matris gösterimi gerekli değildir. Çünkü noktalar aynı $A_{3\times 2}$ matrisi ile irtibatlıdır.

$m = 1$ durumu incelensin. Bu durumda $1-$boyutlu alt uzay yani doğru kavramı

$\Pi_1 = \{P(x) \mid xA = 0,\ A \in R_1^3\}$ şeklinde tanımlanır. Şimdi de üzerinde olma matrisi $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}$ biçiminde olan bir doğrunun üzerinde bulunan noktalar özel durumlar gözönüne alınarak tespit edilecektir. Burada

$$xA = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{00}x_0 + a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = 0$$

denklemi elde edilir.

Bir doğrunun (d_∞ doğrusu hariç) ideal noktası bir tektir. Diğerleri normal noktadır.

I. Durum. Burada $\{x_0, x_1, x_2\} \in M \setminus I^3$ noktası için $x_0 \notin I$ ise bu nokta $\{1, x_1, x_2\}$ şeklinde normal nokta haline getirilir.

Önce doğrunun $\{1, x_1, x_2\}$ formunda normal bir noktası alınsın.

$$xA = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = 0 \Rightarrow a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = -a_{00} \qquad (5.3.1)$$

denklemi elde edilir.

Burada $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} \in R_1^3$ matrisinde $\exists\, a_{10},\, a_{20} \in R \setminus I$ olmalıdır. Eğer $a_{10},\, a_{20} \in I$ olsaydı (5.3.1) denkleminden $a_{00} \in I$ olarak bulunurdu ki böylece matrisin tüm bileşenleri idealde olurdu. Tüm bileşenleri idealde olan bir matris ise üzerinde olma matrisi değildir. O halde burada,

i) $a_{10},\, a_{20} \notin I$

ii) $a_{10} \notin I$ ve $a_{20} \in I$

iii) $a_{10} \in I$ ve $a_{20} \notin I$

olmak üzere üç durumun incelenmesi gerekmektedir.

i) $a_{10},\, a_{20} \notin I$ olsun. Böylece $a_{10} \notin I$ için (5.3.1) denkleminden $x_1 = -a_{10}^{-1}a_{00} - a_{10}^{-1}a_{20}x_2$ bulunur. Burada kısaca $-a_{10}^{-1}a_{00} = a \in R$ ve $-a_{10}^{-1}a_{20} = b \in R$ denilerek $\{\{1, a + bx_2, x_2\} \mid x_2 \in R\}$ şeklindeki normal noktalar kümesine ulaşılır. $x_2 \in R \setminus I$ iken bu noktalar kümesi $\{1, a, 0\} + \{\{0, bx_2, x_2\} \mid x_2 \in R \setminus I\}$ şeklinde de ifade edilebilir. Özel olarak $\{1, a, 0\}$ ve $\{0, b, 1\}$ noktaları seçilerek denklemi sağladığı kolayca görülür. Benzer şekilde $a_{20} \notin I$ için (5.3.1) denkleminden $x_2 = -a_{20}^{-1}a_{00} - a_{20}^{-1}a_{10}x_1$ bulunur. Kısaca $-a_{20}^{-1}a_{00} = a' \in R$ ve $-a_{20}^{-1}a_{10} = b' \in R$ denilirse $\{(1, x_1, a' + b'x_1) | x_1 \in R\}$ şeklindeki normal noktalar kümesini elde edilir. $x_1 \in R \backslash I$ iken bu noktalar kümesi $\{1, 0, a'\} + \{\{0, x_1, b'x_1\} | x_1 \in R \setminus I\}$ şeklinde de ifade edilebilir. Özel olarak $\{1, 0, a'\}$ ve $\{0, 1, b'\}$ noktaları seçilerek denklemi sağladıkları kolayca görülür.

Burada $b, b' \in R \setminus I$ olduğundan $\{0, b, 1\}$ ve $\{0, 1, b'\}$ noktaları aynı ideal noktayı temsil etmektedir.

ii) $a_{10} \notin I$ ve $a_{20} \in I$ olsun. Böylece (5.3.1) denkleminden $x_1 = -a_{10}^{-1}a_{00} - a_{10}^{-1}a_{20}x_2$ olarak bulunur. Burada kısaca $-a_{10}^{-1}a_{00} = c \in R$ ve $-a_{10}^{-1}a_{20} = d \in R$ denilirse $\{\{1, c + dx_2, x_2\} | x_2 \in R\}$ şeklindeki normal noktalar kümesi elde edilir. $x_2 \in R \backslash I$ iken bu noktalar kümesi $\{1, c, 0\} + \{\{0, dx_2, x_2\} | x_2 \in R \setminus I\}$ şeklinde ifade edilebilir. Özel olarak $\{1, c, 0\}$ ve $\{0, d, 1\}$ noktaları seçilirse denklemi sağladıkları kolayca görülür.

iii) $a_{10} \in I$ ve $a_{20} \notin I$ olsun. Böylece (5.3.1) denkleminden $x_2 = -a_{20}^{-1}a_{00} - a_{20}^{-1}a_{10}x_1$ olarak bulunur. Kısaca $-a_{20}^{-1}a_{00} = e$ ve $a_{20}^{-1}a_{10} = f$ denilirse $\{\{1, x_1, e + fx_1\} | x_1 \in R\}$ şeklindeki normal noktalar kümesi elde edilir. $x_1 \in R \backslash I$ iken bu noktalar kümesi $\{1, 0, e\} + \{\{0, x_1, fx_1\} | x_1 \in R \setminus I\}$ şeklinde de ifade edilebilir. Özel olarak $\{1, 0, e\}$ ve $\{0, 1, f\}$ noktaları elde edilir.

Burada ii) ve iii) durumlarında elde edilen ideal noktalar karşılaştırılırsa $d, f \in I$ olduğundan elde edilen $\{0, 1, f\}$ ve $\{0, d, 1\}$ noktaları farklı ideal noktalardır. O halde $a_{10} \in I,\ a_{20} \notin I$ ve $a_{10} \notin I,\ a_{20} \in I$ durumları kısaca $\begin{bmatrix} a_{00} \\ i \\ a_{20} \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ j \end{bmatrix}$ şeklindeki doğrular olarak ele alınırsa, bu doğrular farklı olduklarından onlar için bulunacak ideal noktaların da farklı olduğu açıktır.

II. Durum. $x_0 \in I$ ise nokta, $\exists\ x_1, x_2 \notin R \setminus I$ olacak şekilde $\{i, x_1, x_2\}$ biçimindeki bir ideal noktadır. Eğer doğrunun $\{i, x_1, x_2\}$ özelliğindeki ideal noktası denklemden bulunmak istenirse

$[i \quad x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = 0$ denklemi açılarak

$$a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = -ia_{00} \tag{5.3.2}$$

eşitliği elde edilir.

Burada da benzer şekilde $\exists\ a_{10},\ a_{20} \in R \setminus I$ olmalıdır. Aksi halde (5.3.2) denklemi $a_{10}x_1 = -ia_{00} - a_{20}x_2$ şeklinde düzenlenirse bu denklemde $-ia_{00} - a_{20}x_2 = b$ denirse $b \in I$ olur. $a_{10} \in I$ olduğundan denklem $a_{10}x_1 = b$ şeklinde ifade edilebilir. Ancak maksimal ideali I olan bir R lokal halkasında $a, b \in I$ olmak üzere $ax = b$ şeklindeki bir lineer denklemin genel olarak bir çözümü yoktur. Bu durum özel bir örnek ile açıklanabilir:

$R = Z_{(p)} = \left\{ \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} \mid ebob(p, v) = 1 \right\}$ sistemi bir lokal halkadır ve R nin maksimal ideali $I = pZ_{(p)}$ dir (Anderson ve Kent 1992, Beachy 1999).

Burada $p = 2$ için $R = Z_{(2)} = \left\{ \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} \mid ebob(2, v) = 1 \right\}$ ve $I = 2Z_{(2)}$ olsun. $a, b \in I$ için; $a = 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \in I$ ve $b = 2.\frac{1}{5} = \frac{2}{5} \in I$ olarak alınsın. $ax = b \Rightarrow \frac{4}{3}x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{10}$ olur. Ancak $x \notin R$ dir. Çünkü $ebob(2,10) = 2 \neq 1$ dir.

Genel olarak keyfi p asalı için maksimal ideali $I = pZ_{(p)}$ olan $R = Z_{(p)}$ lokal halkasında $a, b \in I$ olmak üzere $ax = b$ denkleminin çözümü yoktur.

Tüm bileşenleri idealde olan bir matris üzerinde olma matrisi değildir. Bu durumda $a_{10}, a_{20} \in I$ iken $\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}$ üzerinde olma matrisi kullanılarak $\{i, x_1, x_2\}$ şeklinde bir ideal nokta elde edilemez. Bu durum $\mathbb{R}$ cismi üzerine kurulan uzayda karşılık gelen durum ile uyumlu bir sonuç verir. Çünkü $\mathbb{R}$ de idealin tek elemanı olarak 0 sayısı alınır ki $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kolonunun bir doğru göstermeyeceği daha önce ifade edilmişti. O halde üzerinde olma matrisi için

i) $a_{10},\ a_{20} \notin I$

ii) $a_{10} \notin I$ ve $a_{20} \in I$

iii) $a_{10} \in I$ ve $a_{20} \notin I$

olmak üzere üç farklı durumun incelenmesi gerekmektedir.

i) $a_{10},\ a_{20} \notin I$ olsun. Bu durumda (5.3.2) denkleminden $x_1, x_2 \in I$ olmalıdır. Bu durumda $\{i, x_1, x_2\}$ üçlüsü bir nokta göstermez.

ii) $a_{10} \notin I$ $a_{20} \in I$ olsun. Böylece (5.3.2) denkleminden $x_1 = -a_{10}{}^{-1} i a_{00} - a_{10}{}^{-1} a_{20} x_2$ bulunur. Burada $a_{20} \in I$ olduğundan $x_1 \in I$ olur. Bu durumda $\{i, x_1, x_2\}$ sıralı üçlüsünün bir noktayı göstermesi için $x_2 \in R \setminus I$ olmalıdır. O halde kısaca $-a_{10}{}^{-1} i a_{00} = j \in I$ ve $-a_{10}{}^{-1} a_{20} = b$ denilerek $\{\{i, j + b x_2, x_2\} | x_2 \in R \setminus I\}$ ideal noktaları elde edilir.

iii) $a_{10} \in I$, $a_{20} \notin I$ olsun. Böylece (5.3.2) denkleminden $x_2 = -a_{20}{}^{-1} i a_{00} - a_{20}{}^{-1} a_{10} x_1$ bulunur. Burada $a_{10} \in I$ olduğundan $x_2 \in I$ olur. Bu durumda $\{i, x_1, x_2\}$ sıralı üçlüsünün bir nokta göstermesi için $x_1 \in R \setminus I$ olmalıdır. O halde kısaca $-a_{20}{}^{-1} i a_{00} = j' \in I$ ve $-a_{20}{}^{-1} a_{10} = b'$ denilerek $\{\{i, x_1, j' + b' x_1,\} | x_1 \in R \setminus I\}$ ideal noktaları elde edilir.

6. YENİ BİR PROJEKTİF KOORDİNAT UZAY ÖRNEĞİ

6.1. Giriş

Bu bölümde önce $\mathbf{K}=M_{mm}(\mathbb{R})$ lokal halkası üzerine $(n+1)-$boyutlu $\mathbf{M}=\mathbb{R}\,_{n+1}^{m}$ modülü kurulmuştur. Daha sonra denklik sınıfları yardımıyla $n-$boyutlu bir projektif koordinat uzayı inşaa edilmiştir. Bu uzayın nokta ve doğruları belirlenerek, noktaları sınıflandırılmıştır. Son olarak $m=2$ ve $n=3$ ile $m=3$ ve $n=3$ özel hallerinde kurulan iki farklı $3-$boyutlu Projektif Koordinat uzay örneği için üzerinde olma matrisi ile temsil edilen bir doğrusunun üzerindeki tüm noktalar özel durumlar gözönüne alınarak belirlenmiş ve tersine verilen iki noktadan geçen doğruyu temsil eden üzerinde olma matrisi, Maple™ 13 programı da kullanılarak, bulunmuştur.

6. 2. Yeni Bir PK-Uzay İnşaa Metodu

Elemanları $\mathbb{R}$ cisminden alınan $m\times(n+1)$ tipindeki tüm matrislerin kümesi olan $\mathbf{M}=\mathbb{R}\,_{n+1}^{m}$ kümesi, $\mathbf{K}=M_{mm}(\mathbb{R})$ lokal halkası üzerinde $(n+1)-$boyutlu bir modüldür. Bu modülün bir bazı

$$\left\{E_1=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&1&0&\cdots&0\end{pmatrix},\ldots,E_{n+1}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\right\}$$

dir. $\mathbf{K}=M_{mm}(\mathbb{R})$ lokal halkasının maksimal ideali $\eta_1\mathbf{K}=J$ dir. J maksimal idealinin herhangi bir elemanı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times m}\cdot\begin{pmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{m-1}\\0&a_0&\cdots&a_{m-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&a_0\end{pmatrix}_{m\times m}=\begin{pmatrix}0&a_0&a_1&\cdots&a_{m-2}\\0&0&a_0&\cdots&a_{m-3}\\0&0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&a_0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\mathbf{M}$ modülünün herhangi bir

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

elemanı $\{E_1, E_2,..., E_{n+1}\}$ bazına göre

$$X=\begin{pmatrix} x_{m1} & x_{(m-1)1} & \cdots & x_{11} \\ 0 & x_{m1} & \cdots & x_{21} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m1} \end{pmatrix} E_1 + \begin{pmatrix} x_{m2} & x_{(m-1)2} & \cdots & x_{12} \\ 0 & x_{m2} & \cdots & x_{22} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m2} \end{pmatrix} E_2 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{m(n+1)} & x_{(m-1)(n+1)} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ 0 & x_{m(n+1)} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m(n+1)} \end{pmatrix} E_{n+1}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada $\mathbf{M}$ nin $\mathbf{M}_0=\left\{\sum_{i=1}^{n+1} A_i E_i \,\middle|\, A_i \in J\right\}$ özel alt kümesi tanımlansın. Bu küme $\mathbf{M}$ nin bir alt modülü olup, J deki elemanların özellikleri gereği, $\mathbf{M}_0$ da kapsanan bir matrisin son satırının tüm elemanlarının 0 yani

$$\mathbf{M}_0=\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(m-1)1} & x_{(m-1)2} & \cdots & x_{(m-1)(n+1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \middle|\, x_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$$

olduğu kolayca görülür.

$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_0$ olsun. $\mathbf{M}^*$ kümesi $1 \le i \le n+1$ ve en az bir $x_{mi} \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

şeklinde elemanlardan oluşur.

Şimdi $\mathbf{M}^*$ kümesi üzerinde denklik sınıfları, $\mathbf{M}$ nin $\mathbf{M}_0$ çıkarılmış 1-boyutlu alt modülleri olan denklik bağıntısı düşünülsün. Böylece $X, Y \in \mathbf{M}^*$ ise X in Y ye denkliği $\lambda \in \mathbf{K}^* = \mathbf{K} \setminus J$ olmak üzere $Y = \lambda X$ olarak tanımlansın. Bu denklik sınıflarının kümesi $P(\mathbf{M})$ ile gösterilsin. $P(\mathbf{M})$ ye $n-$boyutlu projektif koordinat uzay ve $P(\mathbf{M})$ nin elemanlarına nokta denir. X vektörünün denklik sınıfı $P(X)$ ile gösterilecektir. X e $P(X)$ in bir temsilci vektörü denir. $\lambda \in \mathbf{K}^*$ olmak üzere, λX de $P(X)$ in bir temsilcisidir, yani $P(\lambda X) = P(X)$ dir.

$$P(X) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{m(n+1)} \end{pmatrix} \middle| \; a_0 \neq 0 \wedge 1 \leq i \leq n+1 \; için \; \exists \, x_{mi} \neq 0 \right\}$$

yani

$$P(X) = \left\{ \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m-1} a_i x_{(i+1)1} & \sum_{i=0}^{m-1} a_i x_{(i+1)2} & \cdots & \sum_{i=0}^{m-1} a_i x_{(i+1)(n+1)} \\ \sum_{i=0}^{m-2} a_i x_{(i+2)1} & \sum_{i=0}^{m-2} a_i x_{(i+2)2} & \cdots & \sum_{i=0}^{m-2} a_i x_{(i+2)(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 x_{m1} & a_0 x_{m2} & \cdots & a_0 x_{m(n+1)} \end{pmatrix} \middle| \; a_0 \neq 0, \exists \, x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{m(n+1)} \neq 0 \right\}$$

şeklinde ifade edilir. $P(X)$ denklik sınıfında her elemanın son satırının en az bir elemanı 0 dan farklı olduğundan hiçbir eleman $\mathbf{M}_0$ da değildir.

$P(\mathbf{M})$ uzayında $(-1)-$boyutlu bir alt uzay boş kümedir. Sıfır boyutlu alt uzaya nokta, bir boyutlu alt uzaya doğru denir. İki boyutlu alt uzay ise düzlem olarak adlandırılır.

$X \in M^*$ için $P(X) = \{\lambda X \,|\, \lambda \in \mathbf{K}^*\}$ kümesi $P(\mathbf{M})$ uzayının $0-$boyutlu alt uzayı ve dolayısıyla bir noktası kabul edilsin.

Şimdi $P(\mathbf{M})$ nin $P(X)$ ve $P(Y)$ gibi farklı iki noktasının $\mathbf{K}-$bağımsızlık şartı incelenecektir:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1(n+1)} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{m(n+1)} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m-1} a_i x_{(i+1)1}+\sum_{i=0}^{m-1} b_i y_{(i+1)1} & \sum_{i=0}^{m-1} a_i x_{(i+1)2}+\sum_{i=0}^{m-1} b_i y_{(i+1)2} & \cdots & \sum_{i=0}^{m-1} a_i x_{(i+1)(n+1)}+\sum_{i=0}^{m-1} b_i y_{(i+1)(n+1)} \\ \sum_{i=0}^{m-2} a_i x_{(i+2)1}+\sum_{i=0}^{m-2} b_i y_{(i+2)1} & \sum_{i=0}^{m-2} a_i x_{(i+2)2}+\sum_{i=0}^{m-2} b_i y_{(i+2)2} & \cdots & \sum_{i=0}^{m-2} a_i x_{(i+2)(n+1)}+\sum_{i=0}^{m-2} b_i y_{(i+2)(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 x_{m1}+b_0 y_{m1} & a_0 x_{m2}+b_0 y_{m2} & \cdots & a_0 x_{m(n+1)}+b_0 y_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

matrisinin $\mathbf{M}_0$ ın elemanı olması

$$\begin{aligned} a_0 x_{m1}+b_0 y_{m1} &= 0 \\ a_0 x_{m2}+b_0 y_{m2} &= 0 \\ \vdots \quad & \vdots \\ a_0 x_{m(n+1)}+b_0 y_{m(n+1)} &= 0 \end{aligned}$$

eşitliklerini gerektirir.

Bu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi A ile gösterilirse $rank A = 2$ ise $a_0 = b_0 = 0$ bulunur. Bu da

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerinin J nin elemanı olduğunu gösterir.

O halde temsilcileri sırasıyla $X, Y \in \mathbf{M}^*$ olan $P(X)$ ve $P(Y)$ noktalarının $\mathbf{K}-$bağımsız olması için gerek ve yeter şart

$$A=\begin{pmatrix} x_{m1} & y_{m1} \\ x_{m2} & y_{m2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{m(n+1)} & y_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisinin rankının 2 olmasıdır. Bu $X'=(x_{m1},x_{m2},...,x_{m(n+1)})$ ve $Y'=(y_{m1},y_{m2},...,y_{m(n+1)})$ kolonlarının lineer bağımsızlığı yani X ve Y matrislerinin *m.* satır vektörlerinin lineer bağımsızlığıdır.

$P(X),P(Y)\in P(\mathbf{M})$ $\mathbf{K}-$bağımsız iki nokta olmak üzere

$Sp\{P(X),P(Y)\}=\left\{\lambda X+\gamma Y \,\middle|\, \exists\ \lambda,\gamma\in\mathbf{K}^*\right\}$ kümesi $P(\mathbf{M})$ uzayının $1-$boyutlu alt uzayı kabul edilsin. $Sp\{P(X),P(Y)\}$ alt kümesine $P(\mathbf{M})$ uzayının bir doğrusu denir. $Sp\{P(X),P(Y)\}$ kümesi

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1(n+1)} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

şeklindeki, son satırının en az bir elemanı 0 dan farklı olan, matrislerden oluşur. Bunun için yukarıdaki toplamda en az bir terim nokta göstermelidir. Birinci terim için $a_0\neq 0$ ve $1\leq i\leq n+1$ için $\exists\ x_{mi}\neq 0$ ise nokta gösterdiği söylenebilir ki ikincisi için de benzer durum geçerlidir.

$P(\mathbf{M})$ uzayındaki noktalar aşağıdaki gibi ikiye ayırabilir:

$\forall\ P(X)\in P(\mathbf{M})$ noktasının $X\in\mathbf{M}^*$ temsilcisi

$$X=\begin{pmatrix} x_{m1} & x_{(m-1)1} & \cdots & x_{11} \\ 0 & x_{m1} & \cdots & x_{21} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_{m2} & x_{(m-1)2} & \cdots & x_{12} \\ 0 & x_{m2} & \cdots & x_{22} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{pmatrix} x_{m(n+1)} & x_{(m-1)(n+1)} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ 0 & x_{m(n+1)} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

şeklinde yazılabilir. Böylece X matrisi

$$X_1=\begin{pmatrix} x_{m1} & x_{(m-1)1} & \cdots & x_{11} \\ 0 & x_{m1} & \cdots & x_{21} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m1} \end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix} x_{m2} & x_{(m-1)2} & \cdots & x_{12} \\ 0 & x_{m2} & \cdots & x_{22} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m2} \end{pmatrix},\ldots,X_{n+1}=\begin{pmatrix} x_{m(n+1)} & x_{(m-1)(n+1)} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ 0 & x_{m(n+1)} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

olmak üzere $X=\sum_{i=1}^{n+1} X_i E_i$ ya da $X=\left(X_1, X_2, ..., X_{n+1}\right)\in \mathbf{K}^{n+1}$ şeklinde ifade edilebilir.

I. Durum. X temsilcisinin ilk bileşeni olan $X_1 \in \mathbf{K}$ matrisi için $x_{m1} \neq 0$ ise, yani $X_1 \notin J=\eta_1\mathbf{K}$ ise, X_1 tersi var olan bir üst üçgensel matristir. O halde $X_1^{-1} \in \mathbf{K}$ mevcuttur. Böylece eşitliğin her iki tarafı X_1^{-1} ile çarpılarak X temsilcisi $X=\left(I_m, X_2, ..., X_{n+1}\right)$ formuna getirilebilir.

Bu şekilde elde edilen, temsilcisi

$$X=\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{m2} & \cdots & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

formunda olan noktalara $P(\mathbf{M})$ uzayının normal noktaları adı verilir.

II. Durum. X temsilcisinin ilk bileşeni olan $X_1 = \begin{pmatrix} x_{m1} & x_{(m-1)1} & \cdots & x_{11} \\ 0 & x_{m1} & \cdots & x_{21} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbf{K}$ matrisi

için $x_{m1} = 0$ ise yani $X_1 \in J = \eta_1\mathbf{K}$ ise X_1^{-1} ters matrisi mevcut değildir. O halde X in bileşenleri sırasıyla

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{(m-1)1} & \cdots & x_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & x_{21} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{m2} & x_{(m-1)2} & \cdots & x_{12} \\ 0 & x_{m2} & \cdots & x_{22} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{m(n+1)} & x_{(m-1)(n+1)} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ 0 & x_{m(n+1)} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Temsilcisinin matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{m2} & \cdots & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

şeklinde olan $P(X)$ noktalarına ideal nokta adı verilir.

Ayrıca $P(\mathbf{M})$ uzayında $s = -1, 0, 1, \ldots, (n-1)$ olmak üzere $s-$boyutlu alt uzaylar hakkında aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

$s-$boyutlu bir alt uzayın $P(X)$ noktalarının $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(n+1)} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{m(n+1)} \end{pmatrix}$ temsilcileri,

A bileşenleri $\mathbf{K}$ halkasının elemanları ve rankı $n-s$ olan bir $(n+1)\times(n-s)$ matris olmak üzere $XA = 0$ denklemini sağlarlar.

6.3. 3-Boyutlu PK-Uzay Örnekleri

Bu kısımda, yukarıda inşaa edilen $n-$boyutlu projektif koordinat uzayı için verilen bir doğru üzerindeki noktaları ve daha da önemlisi verilen noktalardan geçen doğruyu belirlemek için yapılan işlemlerin elle yapılamayacak kadar uzun ve zor olduğunu göstermek amacıyla iki özel örnek verilecektir. $n-$boyutlu projektif koordinat uzayı için önce $m=2$ ve $n=3$ ve daha sonrada $m=3$ ve $n=3$ alındığında oluşan $3-$boyutlu iki farklı $P(\mathbf{M})$ uzayı sıradaki örnekler ile incelenecektir.

Örnek 6.3.1. $m=2$ ve $n=3$ seçilerek oluşturulan $3-$boyutlu $P(\mathbf{M})$ projektif koordinat uzayında bir doğrunun $P(X)$ noktalarının $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$ temsilcileri, A bileşenleri $\mathbf{K}$ halkasının elemanları ve rankı $3-1=2$ olan bir 4×2 matris olmak üzere $XA=0$ denklemini sağlarlar. O halde $P(\mathbf{M})$ uzayında doğru kavramı $\left\{P(X)\middle| XA=0, A\in \mathbf{K}_2^4 \setminus J_2^4\right\}$ şeklinde de tanımlanabilir.

Şimdi üzerinde olma matrisi $\mathbf{K}_2^4 \setminus J_2^4$ kümesinin

$$\begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_0 & e_1 \\ 0 & e_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ 0 & f_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g_0 & g_1 \\ 0 & g_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_0 & d_1 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ 0 & h_0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

biçiminde bir elemanı olan doğrunun üzerinde bulunan bütün noktalar özel durumlar gözönüne alınarak tespit edilecektir. Burada $\exists\ a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0, h_0 \neq 0$ olduğu açıktır.

Aranılan $P(X)$ noktalarının temsilcilerinin sağladığı $XA=0$ denklemi açık yazılarak

$$\left(\begin{pmatrix} x_{21} & x_{11} \\ 0 & x_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{24} \end{pmatrix}\right) \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_0 & e_1 \\ 0 & e_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ 0 & f_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g_0 & g_1 \\ 0 & g_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_0 & d_1 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ 0 & h_0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

eşitliği ve buradan da

$$\begin{pmatrix} x_{21} & x_{11} \\ 0 & x_{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_0 & d_1 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} x_{21} & x_{11} \\ 0 & x_{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_0 & e_1 \\ 0 & e_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ 0 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_0 & g_1 \\ 0 & g_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ 0 & h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada matris çarpımları yapılarak sekiz bilinmeyen bulunduran aşağıdaki dört denklem yazılabilir:

$$\begin{aligned} & x_{21}a_0 + x_{22}b_0 + x_{23}c_0 + x_{24}d_0 = 0 \\ & x_{21}a_1 + x_{11}a_0 + x_{22}b_1 + x_{12}b_0 + x_{23}c_1 + x_{13}c_0 + x_{24}d_1 + x_{14}d_0 = 0 \\ & x_{21}e_0 + x_{22}f_0 + x_{23}g_0 + x_{24}h_0 = 0 \\ & x_{21}e_1 + x_{11}e_0 + x_{22}f_1 + x_{12}f_0 + x_{23}g_1 + x_{13}g_0 + x_{24}h_1 + x_{14}h_0 = 0 \end{aligned}$$

I. Durum. $X \in \mathbf{M}^*$ temsilcisi için $x_{21} \neq 0$ yani $P(X)$, temsilcisi $X = (I_2, X_2, X_3, X_4)$ formunda yazılabilen normal bir nokta ise $XA=0$ eşitliğinden elde edilen denklemler

$$\begin{aligned} & a_0 + x_{22}b_0 + x_{23}c_0 + x_{24}d_0 = 0 \\ & a_1 + x_{22}b_1 + x_{12}b_0 + x_{23}c_1 + x_{13}c_0 + x_{24}d_1 + x_{14}d_0 = 0 \\ & e_0 + x_{22}f_0 + x_{23}g_0 + x_{24}h_0 = 0 \\ & e_1 + x_{22}f_1 + x_{12}f_0 + x_{23}g_1 + x_{13}g_0 + x_{24}h_1 + x_{14}h_0 = 0 \end{aligned}$$

şekline dönüşür.

Bu denklem sisteminin çözümleri Maple™ 13 programında çözdürülerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\{x_{12} = (&c_0 g_1 f_0 x_{24} d_0 + c_0 g_1 f_0 a_0 - f_0 c_0^2 x_{24} h_1 - f_0 c_0^2 x_{14} h_0 + f_1 c_0^2 x_{24} h_0 + g_0^2 b_1 x_{24} d_0 \\
&+ g_0 f_0 c_0 a_1 - g_0 c_0 f_1 a_0 - g_0 b_1 c_0 e_0 - g_0 c_1 f_0 a_0 - b_0 g_0^2 x_{24} d_1 + b_0 g_0 c_0 e_1 \\
&+ b_0 g_0 c_1 e_0 - b_0 c_0 g_1 e_0 - b_0 g_0^2 x_{14} d_0 + g_0 f_0 c_0 x_{24} d_1 - g_0 c_0 f_1 x_{24} d_0 + g_0 f_0 c_0 x_{14} d_0 \\
&- g_0 c_1 f_0 x_{24} d_0 - g_0 b_1 c_0 x_{24} h_0 + b_0 g_0 c_1 x_{24} h_0 + b_0 g_0 c_0 x_{24} h_1 + b_0 g_0 c_0 x_{14} h_0 \\
&- b_0 c_0 g_1 x_{24} h_0 - f_0 c_0^2 e_1 + f_1 c_0^2 e_0 + g_0^2 b_1 a_0 - b_0 g_0^2 a_1) \Big/ (b_0 g_0 - f_0 c_0)^2, x_{13} = \\
&-(-b_0^2 g_1 x_{24} h_0 + b_0 g_1 f_0 a_0 + f_1 c_0 b_0 e_0 + f_0 b_0 c_1 e_0 - f_0 b_0 g_0 a_1 - c_1 f_0^2 x_{24} d_0 \\
&+ f_0 g_0 b_1 a_0 - f_0 b_1 c_0 e_0 + f_0^2 c_0 x_{14} d_0 + f_0^2 c_0 x_{24} d_1 + b_0^2 g_0 x_{24} h_1 + b_0^2 g_0 x_{14} h_0 \\
&- b_0 g_0 f_1 a_0 - f_0 c_0 b_0 e_1 - b_0 g_0 f_1 x_{24} d_0 - f_0 c_0 b_0 x_{24} h_1 - f_0 c_0 b_0 x_{14} h_0 \\
&+ b_0 g_1 f_0 x_{24} d_0 + f_1 c_0 b_0 x_{24} h_0 + f_0 g_0 b_1 x_{24} d_0 + f_0 b_0 c_1 x_{24} h_0 - f_0 b_0 g_0 x_{24} d_1 \\
&- f_0 b_0 g_0 x_{14} d_0 - f_0 b_1 c_0 x_{24} h_0 - b_0^2 g_1 e_0 + b_0^2 g_0 e_1 - c_1 f_0^2 a_0 + f_0^2 c_0 a_1) \Big/ (\\
&b_0^2 g_0^2 - 2 f_0 c_0 b_0 g_0 + f_0^2 c_0^2), x_{14} = x_{14}, x_{22} = -\frac{g_0 a_0 - c_0 e_0 - c_0 x_{24} h_0 + g_0 x_{24} d_0}{b_0 g_0 - f_0 c_0}, \\
&x_{23} = \frac{-b_0 e_0 + f_0 x_{24} d_0 - b_0 x_{24} h_0 + f_0 a_0}{b_0 g_0 - f_0 c_0}, x_{24} = x_{24}\}
\end{aligned}
$$

O halde bulunan çözümlerdeki katsayılar kısaca $a', b', c', d', e', f', g', h', k', l' \in \mathbb{R}$ olarak adlandırılırsa X temsilcisinin denklik sınıfı

$$P(X) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a' + b'x_{14} + c'x_{24} & d' + e'x_{14} + f'x_{24} & x_{14} \\ 1 & g' + h'x_{24} & k' + l'x_{34} & x_{24} \end{pmatrix} \middle| x_{14}, x_{24} \in \mathbb{R} \right\}$$ şeklinde elde edilir.

II. Durum. Temsilcisi $X \in \mathbf{M}^*$ için $x_{21} = 0$, yani $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$ formunda olan bir $P(X)$ ideal noktası ele alınsın. X matrisinin

$$X=\left(X_1=\begin{pmatrix}0 & x_{11}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}x_{22} & x_{12}\\ 0 & x_{22}\end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix}x_{23} & x_{13}\\ 0 & x_{23}\end{pmatrix}, X_4=\begin{pmatrix}x_{24} & x_{14}\\ 0 & x_{24}\end{pmatrix}\right)$$

şeklinde temsil edilebildiği bilinmektedir. Burada $\exists\, x_{22}, x_{23}, x_{24} \neq 0$ olmalıdır. O halde $x_{22} \neq 0$ kabul edilirse $X_2 \in \mathbf{K}^*$ olup tersi olan bir üst üçgensel matristir. Böylece eşitliğin her tarafı X_2^{-1} matrisi ile çarpılarak X matrisi daha basitçe

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & 0 & x_{13} & x_{14}\\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24}\end{pmatrix}=\left(X_1=\begin{pmatrix}0 & x_{11}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix}x_{23} & x_{13}\\ 0 & x_{23}\end{pmatrix}, X_4=\begin{pmatrix}x_{24} & x_{14}\\ 0 & x_{24}\end{pmatrix}\right)\in\mathbf{K}^4$$

şeklinde de temsil edilebilir. Böylece $XA=0$ eşitliğinden elde edilen denklemler

$$\begin{aligned}
&b_0+x_{23}c_0+x_{24}d_0=0\\
&x_{11}a_0+b_1+x_{23}c_1+x_{13}c_0+x_{24}d_1+x_{14}d_0=0\\
&f_0+x_{23}g_0+x_{24}h_0=0\\
&x_{11}e_0+f_1+x_{23}g_1+x_{13}g_0+x_{24}h_1+x_{14}h_0=0
\end{aligned}$$

şekline dönüşür.

Bu denklem sisteminin çözümleri Maple™ 13 programında çözdürülerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
\{&x_{11}=x_{11}, x_{13}=-(c_0h_0^2x_{11}a_0+c_0h_0^2b_1-c_0h_0d_0x_{11}e_0-c_0h_0d_0f_1-c_0h_0d_1f_0\\
&+c_0d_0h_1f_0-c_1b_0h_0^2-h_0g_0d_0x_{11}a_0+h_0d_1g_0b_0+h_0d_0g_1b_0+h_0c_1d_0f_0\\
&-h_0g_0d_0b_1-d_0h_1g_0b_0-g_1d_0^2f_0+g_0d_0^2x_{11}e_0+g_0d_0^2f_1)\Big/(c_0h_0-g_0d_0)^2, x_{14}\\
&=(-c_0^2h_0x_{11}e_0+g_0d_0c_0x_{11}e_0+g_0c_0h_0x_{11}a_0-g_0^2d_0x_{11}a_0-c_0^2h_0f_1+g_0c_0h_0b_1\\
&+c_0^2h_1f_0+c_0h_0g_1b_0-g_0^2d_0b_1+g_0d_0c_0f_1-c_0h_1g_0b_0-g_1d_0c_0f_0-g_0h_0c_1b_0\\
&-g_0c_0d_1f_0+d_1g_0^2b_0+g_0c_1d_0f_0)\Big/(-2g_0d_0c_0h_0+g_0^2d_0^2+c_0^2h_0^2),\\
&x_{23}=-\frac{h_0b_0-d_0f_0}{c_0h_0-g_0d_0}, x_{24}=\frac{-c_0f_0+g_0b_0}{c_0h_0-g_0d_0}\}
\end{aligned}$$

Elde edilen sonuçlardaki bilinen katsayılar kısaca $a'', b'', c'', d'', e'', f'' \in \mathbb{R}$ olarak adlandırılırsa X temsilcisinin denklik sınıfı

$$P(X) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & a'' + b''x_{11} & c'' + d''x_{11} \\ 0 & 1 & e'' & f'' \end{pmatrix} \Big| \; x_{11} \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de tersine verilen noktalardan geçen doğruyu temsil eden üzerinde olma matrisinin nasıl bulunacağı, örnek iki nokta alınarak belirlenecektir.

I. Durum. Temsilcileri $X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 1 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} 0 & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ 1 & y_{22} & y_{23} & y_{24} \end{pmatrix}$ olmak üzere $P(X)$, $P(Y)$ normal noktaları alınsın. Aranılan matris $\mathbf{K}_2^4 \setminus J_2^4$ kümesinin

$$\begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_0 & e_1 \\ 0 & e_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ 0 & f_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g_0 & g_1 \\ 0 & g_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_0 & d_1 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ 0 & h_0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

formundaki bir elemanıdır.

Alınan matrisler

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{24} \end{pmatrix} \right)$$

ve

$$Y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{22} & y_{12} \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{23} & y_{13} \\ 0 & y_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{24} & y_{14} \\ 0 & y_{24} \end{pmatrix} \right)$$

şeklinde temsil edilirse

$XA=0$ ve $YA=0$ eşitliklerinden 16 bilinmeyenden oluşan 8 denklemli aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&a_0 + x_{22}b_0 + x_{23}c_0 + x_{24}d_0 = 0\\
&a_1 + x_{22}b_1 + x_{12}b_0 + x_{23}c_1 + x_{13}c_0 + x_{24}d_1 + x_{14}d_0 = 0\\
&e_0 + x_{22}f_0 + x_{23}g_0 + x_{24}h_0 = 0\\
&e_1 + x_{22}f_1 + x_{12}f_0 + x_{23}g_1 + x_{13}g_0 + x_{24}h_1 + x_{14}h_0 = 0\\
&a_0 + y_{22}b_0 + y_{23}c_0 + y_{24}d_0 = 0\\
&a_1 + y_{22}b_1 + y_{12}b_0 + y_{23}c_1 + y_{13}c_0 + y_{24}d_1 + y_{14}d_0 = 0\\
&e_0 + y_{22}f_0 + y_{23}g_0 + y_{24}h_0 = 0\\
&e_1 + y_{22}f_1 + y_{12}f_0 + y_{23}g_1 + y_{13}g_0 + y_{24}h_1 + y_{14}h_0 = 0
\end{aligned}
$$

Bu denklem sistemi Maple^{TM} 13 programında çözdürülerek aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\{a_0 = -\frac{x_{22}y_{24}d_0 + x_{22}y_{23}c_0 - y_{22}x_{23}c_0 - y_{22}x_{24}d_0}{-y_{22}+x_{22}},\ a_1 = -(x_{22}^2 y_{14}d_0 + x_{22}^2 y_{24}d_1\\
&\quad + x_{22}^2 y_{13}c_0 + x_{22}^2 y_{23}c_1 - y_{22}x_{22}y_{24}d_1 + x_{22}y_{12}y_{24}d_0 - x_{22}y_{12}x_{24}d_0 - y_{22}x_{22}x_{24}d_1\\
&\quad - y_{22}x_{22}x_{14}d_0 - y_{22}x_{22}x_{23}c_1 - y_{22}x_{22}x_{13}c_0 - y_{22}x_{22}y_{13}c_0 - x_{22}y_{12}x_{23}c_0\\
&\quad - y_{22}x_{22}y_{23}c_1 - y_{22}x_{22}y_{14}d_0 + x_{22}y_{12}y_{23}c_0 + y_{22}^2 x_{23}c_1 + y_{22}^2 x_{13}c_0 + y_{22}^2 x_{24}d_1\\
&\quad + y_{22}^2 x_{14}d_0 + y_{22}x_{12}x_{24}d_0 - y_{22}x_{12}y_{24}d_0 - y_{22}x_{12}y_{23}c_0 + y_{22}x_{12}x_{23}c_0)\ \Big/\\
&\quad (-y_{22}+x_{22})^2,\ b_0 = -\frac{x_{24}d_0 - y_{24}d_0 - y_{23}c_0 + x_{23}c_0}{-y_{22}+x_{22}},\ b_1 = (x_{12}x_{24}d_0 - x_{12}y_{24}d_0\\
&\quad - y_{22}y_{23}c_1 + y_{22}x_{23}c_1 + y_{22}x_{13}c_0 + y_{22}x_{24}d_1 + y_{22}x_{14}d_0 - x_{22}x_{23}c_1 - x_{22}x_{13}c_0\\
&\quad - x_{22}x_{24}d_1 - x_{22}x_{14}d_0 - x_{12}y_{23}c_0 + x_{12}x_{23}c_0 + y_{12}y_{24}d_0 - y_{22}y_{14}d_0 + x_{22}y_{23}c_1\\
&\quad - y_{22}y_{13}c_0 - y_{22}y_{24}d_1 + x_{22}y_{14}d_0 + y_{12}y_{23}c_0 + x_{22}y_{13}c_0 + x_{22}y_{24}d_1 - y_{12}x_{23}c_0\\
&\quad - y_{12}x_{24}d_0)\ \Big/\ (x_{22}^2 + y_{22}^2 - 2\,y_{22}x_{22}),\ c_0 = c_0,\ c_1 = c_1,\ d_0 = d_0,\ d_1 = d_1,\\
&\quad e_0 = -\frac{x_{22}y_{24}h_0 + x_{22}y_{23}g_0 - y_{22}x_{23}g_0 - y_{22}x_{24}h_0}{-y_{22}+x_{22}},\ e_1 = -(x_{22}^2 y_{13}g_0 + x_{22}^2 y_{23}g_1\\
&\quad + x_{22}^2 y_{14}h_0 + x_{22}^2 y_{24}h_1 - y_{22}x_{22}x_{14}h_0 - y_{22}x_{22}y_{14}h_0 - y_{22}x_{22}y_{13}g_0 - y_{22}x_{22}y_{24}h_1\\
&\quad - y_{22}x_{22}y_{23}g_1 + x_{22}y_{12}y_{23}g_0 + x_{22}y_{12}y_{24}h_0 - x_{22}y_{12}x_{24}h_0 - x_{22}y_{12}x_{23}g_0\\
&\quad - y_{22}x_{22}x_{23}g_1 - y_{22}x_{22}x_{13}g_0 - y_{22}x_{22}x_{24}h_1 + y_{22}x_{12}x_{24}h_0 - y_{22}x_{12}y_{24}h_0
\end{aligned}
$$

$$-y_{22}x_{12}y_{23}g_0+y_{22}x_{12}x_{23}g_0+y_{22}{}^2x_{23}g_1+y_{22}{}^2x_{13}g_0+y_{22}{}^2x_{24}h_1+y_{22}{}^2x_{14}h_0)\Big/$$
$$(-y_{22}+x_{22})^2, f_0=-\frac{x_{24}h_0-y_{24}h_0-y_{23}g_0+x_{23}g_0}{-y_{22}+x_{22}}, f_1=(x_{12}x_{24}h_0-x_{12}y_{24}h_0$$
$$-y_{22}y_{23}g_1+y_{22}x_{23}g_1+y_{22}x_{13}g_0+y_{22}x_{24}h_1+y_{22}x_{14}h_0-x_{22}x_{23}g_1-x_{22}x_{13}g_0$$
$$-x_{22}x_{24}h_1-x_{22}x_{14}h_0-x_{12}y_{23}g_0+x_{12}x_{23}g_0+y_{12}y_{24}h_0-y_{22}y_{14}h_0+x_{22}y_{23}g_1$$
$$-y_{22}y_{13}g_0-y_{22}y_{24}h_1+x_{22}y_{14}h_0+y_{12}y_{23}g_0+x_{22}y_{13}g_0+x_{22}y_{24}h_1-y_{12}x_{23}g_0$$
$$-y_{12}x_{24}h_0)\Big/(x_{22}{}^2+y_{22}{}^2-2y_{22}x_{22}), g_0=g_0, g_1=g_1, h_0=h_0, h_1=h_1\}$$

II. Durum. Temsilcileri $X=\begin{pmatrix}0 & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ 1 & x_{22} & x_{23} & x_{24}\end{pmatrix}$ ve $Y=\begin{pmatrix}y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14}\\ 0 & y_{22} & y_{23} & y_{24}\end{pmatrix}$ olan $P(X)$ normal ve $P(Y)$ ideal noktaları ele alınsın. Burada $P(Y)$ ideal noktası için $\exists\, y_{22}, y_{23}, y_{24}\neq 0$ olmalıdır. O halde $y_{22}\neq 0$ kabul edilirse bu noktaların temsilcileri

$$X=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{22} & x_{12}\\ 0 & x_{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{23} & x_{13}\\ 0 & x_{23}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{24} & x_{14}\\ 0 & x_{24}\end{pmatrix}\right)$$

ve

$$Y=\left(\begin{pmatrix}0 & y_{11}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_{23} & y_{13}\\ 0 & y_{23}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_{24} & y_{14}\\ 0 & y_{24}\end{pmatrix}\right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$XA=0$ ve $YA=0$ eşitliklerinden 16 bilinmeyenden oluşan 8 denklemli aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&a_0+x_{22}b_0+x_{23}c_0+x_{24}d_0=0\\
&a_1+x_{22}b_1+x_{12}b_0+x_{23}c_1+x_{13}c_0+x_{24}d_1+x_{14}d_0=0\\
&e_0+x_{22}f_0+x_{23}g_0+x_{24}h_0=0\\
&e_1+x_{22}f_1+x_{12}f_0+x_{23}g_0+x_{24}h_1+x_{14}h_0=0\\
&b_0+y_{23}c_0+y_{24}d_0=0\\
&y_{11}a_0+b_1+y_{23}c_1+y_{13}c_0+y_{24}d_1+y_{14}d_0=0\\
&f_0+y_{23}g_0+y_{24}h_0=0\\
&y_{11}e_0+f_1+y_{23}g_1+y_{13}g_0+y_{24}h_1+y_{14}h_0=0
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemi Maple™ 13 programında çözdürülerek aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$\{a_0 = x_{22}y_{23}c_0 - x_{23}c_0 - x_{24}d_0 + x_{22}y_{24}d_0,\ a_1 = y_{11}x_{22}^2y_{23}c_0 - x_{22}y_{11}x_{23}c_0 + x_{22}y_{13}c_0$$
$$+ x_{22}y_{23}c_1 + x_{22}y_{14}d_0 - x_{22}y_{11}x_{24}d_0 + y_{11}x_{22}^2y_{24}d_0 + x_{22}y_{24}d_1 + x_{12}y_{23}c_0 - x_{13}c_0$$
$$- x_{23}c_1 - x_{14}d_0 + x_{12}y_{24}d_0 - x_{24}d_1,\ b_0 = -y_{23}c_0 - y_{24}d_0,\ b_1 =$$
$$-y_{11}x_{22}y_{23}c_0 + y_{11}x_{23}c_0 - y_{13}c_0 - y_{23}c_1 - y_{14}d_0 + y_{11}x_{24}d_0 - y_{11}x_{22}y_{24}d_0 - y_{24}d_1,$$
$$c_0 = c_0,\ c_1 = c_1,\ d_0 = d_0,\ d_1 = d_1,\ e_0 = x_{22}y_{23}g_0 - x_{23}g_0 - x_{24}h_0 + x_{22}y_{24}h_0,\ e_1 =$$
$$y_{11}x_{22}^2y_{23}g_0 - x_{22}y_{11}x_{23}g_0 + x_{22}y_{13}g_0 + x_{22}y_{23}g_1 + x_{22}y_{14}h_0 - x_{22}y_{11}x_{24}h_0$$
$$+ y_{11}x_{22}^2y_{24}h_0 + x_{22}y_{24}h_1 + x_{12}y_{23}g_0 - x_{23}g_0 - x_{14}h_0 + x_{12}y_{24}h_0 - x_{24}h_1,$$
$$f_0 = -y_{23}g_0 - y_{24}h_0,\ f_1 =$$
$$-y_{11}x_{22}y_{23}g_0 + y_{11}x_{23}g_0 - y_{13}g_0 - y_{23}g_1 - y_{14}h_0 + y_{11}x_{24}h_0 - y_{11}x_{22}y_{24}h_0 - y_{24}h_1,$$
$$g_0 = g_0,\ g_1 = g_1,\ h_0 = h_0,\ h_1 = h_1\}$$

Son olarak $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ olmak üzere tüm ideal noktaların $XA = 0$ denklemini sağladığı açıktır. Bu eşitlik ideal doğru için matris temsiline gerek olmadığını gösterir. O halde ideal doğrunun tüm ideal noktaların kümesi olarak tanımlanması yeterlidir.

Şimdi de $m = 3$ ve $n = 3$ alındığında oluşan $3-$boyutlu farklı bir $P(\mathbf{M})$ projektif koordinat uzayı incelenecektir.

Örnek 6.3.2. $m = 3$ ve $n = 3$ seçilerek oluşturulan $3-$boyutlu $P(\mathbf{M})$ projektif koordinat uzayında bir doğrunun $P(X)$ noktalarının $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$ temsilcileri, A bileşenleri $\mathbf{K}$ halkasının elemanları ve rankı $3-1=2$ olan bir 4×2

matris olmak üzere $XA=0$ denklemini sağlarlar. O halde $P(\mathbf{M})$ uzayında doğru kavramı $\left\{P(X)\middle|XA=0, A\in\mathbf{K}_2^4\setminus J_2^4\right\}$ şeklinde de tanımlanabilir.

Şimdi de üzerinde olma matrisi $\mathbf{K}_2^4\setminus J_2^4$ kümesinin

$$\begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ 0 & f_0 & f_1 \\ 0 & 0 & f_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ 0 & g_0 & g_1 \\ 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ 0 & h_0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

biçiminde bir elemanı olan bir doğrunun üzerinde bulunan bütün noktalar özel durumlar gözönüne alınarak tespit edilecektir. Burada $\exists\ a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0, h_0 \neq 0$ olduğu açıktır.

Aranılan $P(X)$ noktalarının temsilcilerinin sağladığı $XA=0$ denklemi açık yazılarak

$$\left(\begin{pmatrix} x_{31} & x_{21} & x_{11} \\ 0 & x_{31} & x_{21} \\ 0 & 0 & x_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{32} & x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{32} & x_{22} \\ 0 & 0 & x_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{33} & x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{33} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{34} & x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{34} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{34} \end{pmatrix}\right)\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ 0 & f_0 & f_1 \\ 0 & 0 & f_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ 0 & g_0 & g_1 \\ 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ 0 & h_0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

eşitliği ve buradan da

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{31} & x_{21} & x_{11} \\ 0 & x_{31} & x_{21} \\ 0 & 0 & x_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{32} & x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{32} & x_{22} \\ 0 & 0 & x_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{33} & x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{33} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} x_{34} & x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{34} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} x_{31} & x_{21} & x_{11} \\ 0 & x_{31} & x_{21} \\ 0 & 0 & x_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{32} & x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{32} & x_{22} \\ 0 & 0 & x_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ 0 & f_0 & f_1 \\ 0 & 0 & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{33} & x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{33} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ 0 & g_0 & g_1 \\ 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} x_{34} & x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{34} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ 0 & h_0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada matris çarpımları yapılarak oniki bilinmeyen bulunduran aşağıdaki altı denklem yazılır:

$$x_{31}a_0 + x_{32}b_0 + x_{33}c_0 + x_{34}d_0 = 0$$
$$x_{31}a_1 + x_{21}a_0 + x_{32}b_1 + x_{22}b_0 + x_{33}c_1 + x_{23}c_0 + x_{34}d_1 + x_{24}d_0 = 0$$
$$x_{31}a_2 + x_{21}a_1 + x_{11}a_0 + x_{32}b_2 + x_{22}b_1 + x_{12}b_0 + x_{33}c_2 + x_{23}c_1 + x_{13}c_0 + x_{34}d_2 + x_{24}d_1 + x_{14}d_0 = 0$$
$$x_{31}e_0 + x_{32}f_0 + x_{33}g_0 + x_{34}h_0 = 0$$
$$x_{31}e_1 + x_{21}e_0 + x_{32}f_1 + x_{22}f_0 + x_{33}g_1 + x_{23}g_0 + x_{34}h_1 + x_{24}h_0 = 0$$
$$x_{31}e_2 + x_{21}e_1 + x_{11}e_0 + x_{32}f_2 + x_{22}f_1 + x_{12}f_0 + x_{33}g_2 + x_{23}g_1 + x_{13}g_0 + x_{34}h_2 + x_{24}h_1 + x_{14}h_0 = 0$$

I. Durum. $X \in \mathbf{M}^*$ temsilcisi için $x_{31} \neq 0$ yani $P(X)$, temsilcisi $X = (I_3, X_2, X_3, X_4)$ formunda yazılabilen normal bir nokta ise $XA = 0$ eşitliğinden elde edilen denklemler

$$
\begin{aligned}
& a_0 + x_{32}b_0 + x_{33}c_0 + x_{34}d_0 = 0 \\
& a_1 + x_{32}b_1 + x_{22}b_0 + x_{33}c_1 + x_{23}c_0 + x_{34}d_1 + x_{24}d_0 = 0 \\
& a_2 + x_{32}b_2 + x_{22}b_1 + x_{12}b_0 + x_{33}c_2 + x_{23}c_1 + x_{13}c_0 + x_{34}d_2 + x_{24}d_1 + x_{14}d_0 = 0 \\
& e_0 + x_{32}f_0 + x_{33}g_0 + x_{34}h_0 = 0 \\
& e_1 + x_{32}f_1 + x_{22}f_0 + x_{33}g_1 + x_{23}g_0 + x_{34}h_1 + x_{24}h_0 = 0 \\
& e_2 + x_{32}f_2 + x_{22}f_1 + x_{12}f_0 + x_{33}g_2 + x_{23}g_1 + x_{13}g_0 + x_{34}h_2 + x_{24}h_1 + x_{14}h_0 = 0
\end{aligned}
$$

şekline dönüşür.

Bu denklem sisteminin çözümleri Maple™ 13 programında çözdürülerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\{x_{12} = (& f_0 c_0^2 g_1 f_1 a_0 - g_0 f_0 c_0 b_1 c_1 x_{34} h_0 + b_0 f_0 c_0^2 g_2 x_{34} h_0 - 2 g_0 b_1 c_0 g_1 f_0 x_{34} d_0 \\
& - g_0 x_{34} c_1 f_1 d_0 f_0 c_0 + b_0 g_0 c_0 g_1 f_1 x_{34} d_0 + b_0 g_0 c_0 g_1 f_0 x_{34} d_1 + b_0 g_0 c_0 g_1 f_0 x_{24} d_0 \\
& - b_0 g_0 f_0 c_0 c_2 x_{34} h_0 - b_0 g_0 c_1 f_0 c_0 x_{34} h_1 - b_0 g_0 c_1 f_0 c_0 x_{24} h_0 + b_0 g_0 c_1 g_1 f_0 x_{34} d_0 \\
& + 2 b_0 g_0 c_1 f_1 c_0 x_{34} h_0 + b_0 g_0 b_1 c_0 g_1 x_{34} h_0 + b_0 g_0 c_0 g_2 f_0 x_{34} d_0 - b_0 x_{34} c_1 g_1 h_0 f_0 c_0 \\
& - b_0 g_0 c_1 f_0 c_0 e_1 + b_0 f_0 c_0^2 g_1 x_{24} h_0 - b_0 c_0 g_1^2 f_0 x_{34} d_0 - b_0 c_0 g_1 f_0 c_1 e_0 \\
& + 2 b_0 g_0^2 f_0 c_0 x_{24} d_1 - b_0 g_0^2 c_0 f_1 x_{24} d_0 - b_0 g_0^2 x_{34} b_1 c_0 h_1 + 2 b_0 g_0^2 f_0 c_0 x_{34} d_2 \\
& - b_0 g_0^2 c_2 f_0 x_{34} d_0 - b_0 g_0^2 b_1 c_1 x_{34} h_0 - b_0 g_0^2 d_0 x_{34} c_1 f_1 - b_0 g_0^2 x_{34} c_1 f_0 d_1 \\
& - b_0 g_0^2 b_2 c_0 x_{34} h_0 + b_0 g_0 f_2 c_0^2 x_{34} h_0 + b_0 g_0 f_1 c_0^2 x_{34} h_1 + b_0 f_0 c_0^2 g_1 x_{34} h_1 \\
& + b_0 g_0 c_1 g_1 f_0 a_0 - b_0^2 g_0 c_0 g_2 x_{34} h_0 - b_0^2 g_0 c_0 g_1 x_{24} h_0 + b_0 g_0 c_0 g_2 f_0 a_0 \\
& + b_0 g_0 c_0 g_1 f_1 a_0 + b_0 g_0 c_0 g_1 f_0 a_1 - b_0 g_0 f_0 c_0 c_2 e_0 + b_0 g_0 c_1^2 f_0 x_{34} h_0 \\
& - 2 b_0 g_1 f_1 c_0^2 x_{34} h_0 - b_0 g_0^2 x_{24} b_1 c_0 h_0 - b_0 g_0^2 x_{24} c_1 f_0 d_0 - b_0 g_0^2 c_0 f_1 x_{34} d_1 \\
& - b_0 g_0^2 c_0 f_2 x_{34} d_0 + 2 b_0 g_0^2 f_0 c_0 x_{14} d_0 + b_0 g_0 f_1 c_0^2 x_{24} h_0 - 2 b_0 g_0 f_0 c_0^2 x_{14} h_0 \\
& - 2 b_0 g_0 f_0 c_0^2 x_{34} h_2 - 2 b_0 g_0 f_0 c_0^2 x_{24} h_1 + f_0 c_0^2 g_1 f_1 x_{34} d_0 + x_{34} c_1 g_1 f_0^2 d_0 c_0 \\
& + 2 g_0^2 b_1 c_1 f_0 x_{34} d_0 - g_0^2 b_1 f_0 c_0 x_{24} d_0 - g_0^2 f_0 c_0 b_2 x_{34} d_0 + 2 g_0^2 x_{34} b_1 c_0 f_1 d_0 \\
& + g_0 f_0^2 c_0 c_2 x_{34} d_0 + g_0 f_0 c_0^2 b_2 x_{34} h_0 - g_0 f_0 c_0 b_1 c_1 e_0 + g_0 c_1 f_0^2 c_0 x_{24} d_0 \\
& + g_0 c_1 f_0^2 c_0 x_{34} d_1 + g_0 b_1 c_0^2 f_0 x_{34} h_1 + g_0 b_1 c_0^2 f_0 x_{24} h_0 - 2 g_0 b_1 c_0^2 f_1 x_{34} h_0
\end{aligned}
$$

$$-2\,g_0\,b_1\,c_0\,g_1\,f_0\,a_0+g_0\,f_0\,c_0^{\,2}\,f_2\,x_{34}\,d_0+g_0\,f_0\,c_0^{\,2}\,f_1\,x_{34}\,d_1+g_0\,f_0\,c_0^{\,2}\,f_1\,x_{24}\,d_0$$
$$-g_0\,c_0\,f_1\,c_1\,f_0\,a_0-b_0^{\,2}\,g_0\,c_1\,g_1\,x_{34}\,h_0-b_0^{\,2}\,g_0\,c_0\,g_1\,x_{34}\,h_1+f_0^{\,2}\,c_0^{\,3}\,e_2+f_1^{\,2}\,c_0^{\,3}\,e_0$$
$$-g_0^{\,3}\,a_0\,b_1^{\,2}-b_0^{\,2}\,g_0^{\,3}\,a_2+f_1^{\,2}\,c_0^{\,3}\,x_{34}\,h_0+f_0^{\,2}\,c_0^{\,3}\,x_{14}\,h_0-f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,g_2\,a_0-f_0\,c_0^{\,3}\,f_2\,e_0$$
$$-f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,g_1\,a_1-f_0\,c_0^{\,3}\,f_1\,e_1+f_0^{\,2}\,c_0^{\,3}\,x_{34}\,h_2+f_0^{\,2}\,c_0^{\,3}\,x_{24}\,h_1-g_0^{\,3}\,d_0\,x_{34}\,b_1^{\,2}+g_0^{\,2}\,b_1^{\,2}\,c_0\,e_0$$
$$-g_0\,f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,a_2-g_0\,c_1^{\,2}\,f_0^{\,2}\,a_0-g_0\,f_1^{\,2}\,c_0^{\,2}\,a_0-b_0^{\,2}\,g_0^{\,3}\,x_{24}\,d_1-b_0^{\,2}\,g_0^{\,3}\,x_{34}\,d_2$$
$$-b_0^{\,2}\,g_0^{\,3}\,x_{14}\,d_0+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,c_0\,e_2+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,e_1\,c_1+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,c_2\,e_0+b_0^{\,2}\,c_0\,g_1^{\,2}\,e_0$$
$$+b_0\,g_0^{\,3}\,b_2\,a_0+b_0\,g_0^{\,3}\,a_1\,b_1+c_0\,g_1\,c_1\,f_0^{\,2}\,a_0-f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,g_1\,x_{34}\,d_1-f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,g_1\,x_{24}\,d_0$$
$$-f_0\,c_0^{\,3}\,f_1\,x_{34}\,h_1-f_0\,c_0^{\,3}\,f_1\,x_{24}\,h_0+g_1\,f_0\,b_1\,c_0^{\,2}\,e_0-f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,g_2\,x_{34}\,d_0-f_0\,c_0^{\,3}\,f_2\,x_{34}\,h_0$$
$$+2\,g_0^{\,2}\,c_0\,f_1\,b_1\,a_0+g_0^{\,2}\,b_1^{\,2}\,c_0\,x_{34}\,h_0-g_0^{\,2}\,f_0\,c_0\,b_2\,a_0-g_0^{\,2}\,b_1\,f_0\,c_0\,a_1+2\,g_0^{\,2}\,b_1\,c_1\,f_0\,a_0$$
$$-g_0\,f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,x_{34}\,d_2-g_0\,f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,x_{24}\,d_1-g_0\,f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,x_{14}\,d_0+g_0\,f_0^{\,2}\,c_0\,c_2\,a_0+g_0\,f_0\,c_0^{\,2}\,b_2\,e_0$$
$$+g_0\,c_1\,f_0^{\,2}\,c_0\,a_1-g_0\,c_1^{\,2}\,f_0^{\,2}\,x_{34}\,d_0+g_0\,b_1\,c_0^{\,2}\,f_0\,e_1-2\,g_0\,b_1\,c_0^{\,2}\,f_1\,e_0+g_0\,f_0\,c_0^{\,2}\,f_2\,a_0$$
$$+g_0\,f_0\,c_0^{\,2}\,f_1\,a_1-g_0\,f_1^{\,2}\,c_0^{\,2}\,x_{34}\,d_0+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,h_0\,x_{24}\,c_1+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,c_0\,x_{24}\,h_1+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,c_0\,x_{34}\,h_2$$
$$+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,c_0\,x_{14}\,h_0+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,c_2\,x_{34}\,h_0+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,h_1\,x_{34}\,c_1-b_0^{\,2}\,g_0\,c_1\,g_1\,e_0-b_0^{\,2}\,g_0\,c_0\,g_1\,e_1$$
$$-b_0^{\,2}\,g_0\,c_0\,g_2\,e_0+b_0^{\,2}\,c_0\,g_1^{\,2}\,x_{34}\,h_0-2\,b_0\,g_1\,f_1\,c_0^{\,2}\,e_0+b_0\,f_0\,c_0^{\,2}\,g_2\,e_0+b_0\,f_0\,c_0^{\,2}\,g_1\,e_1$$
$$-b_0\,c_0\,g_1^{\,2}\,f_0\,a_0+b_0\,g_0^{\,3}\,d_1\,x_{34}\,b_1+b_0\,g_0^{\,3}\,d_0\,x_{24}\,b_1+b_0\,g_0^{\,3}\,b_2\,x_{34}\,d_0+2\,b_0\,g_0^{\,2}\,f_0\,c_0\,a_2$$
$$-b_0\,g_0^{\,2}\,a_0\,c_1\,f_1-b_0\,g_0^{\,2}\,c_0\,f_2\,a_0-b_0\,g_0^{\,2}\,b_1\,c_0\,e_1-b_0\,g_0^{\,2}\,c_2\,f_0\,a_0-b_0\,g_0^{\,2}\,b_1\,c_1\,e_0$$
$$-b_0\,g_0^{\,2}\,c_1\,f_0\,a_1-b_0\,g_0^{\,2}\,b_2\,c_0\,e_0-b_0\,g_0^{\,2}\,c_0\,f_1\,a_1+b_0\,g_0\,c_1^{\,2}\,f_0\,e_0-2\,b_0\,g_0\,f_0\,c_0^{\,2}\,e_2$$
$$+b_0\,g_0\,f_2\,c_0^{\,2}\,e_0+b_0\,g_0\,f_1\,c_0^{\,2}\,e_1+x_{34}\,b_1\,c_0^{\,2}\,g_1\,h_0\,f_0+2\,b_0\,g_0\,c_1\,f_1\,c_0\,e_0$$
$$+b_0\,g_0\,b_1\,c_0\,g_1\,e_0-g_0^{\,2}\,b_1\,f_0\,c_0\,x_{34}\,d_1)\Big/((-2\,f_0\,c_0\,b_0\,g_0+b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}+f_0^{\,2}\,c_0^{\,2})$$
$$(b_0\,g_0-f_0\,c_0)),\ x_{13}=-(-2\,b_0\,g_0\,f_1\,c_1\,f_0\,x_{34}\,d_0-b_0\,g_0\,f_1\,b_1\,c_0\,x_{34}\,h_0-f_0^{\,3}\,c_0^{\,2}\,a_2$$
$$+b_0^{\,3}\,g_0^{\,2}\,e_2+b_0^{\,3}\,g_1^{\,2}\,e_0-c_1^{\,2}\,f_0^{\,3}\,a_0-f_0^{\,3}\,c_0^{\,2}\,x_{34}\,d_2-f_0^{\,3}\,c_0^{\,2}\,x_{24}\,d_1-f_0^{\,3}\,c_0^{\,2}\,x_{14}\,d_0$$
$$+f_0^{\,3}\,c_0\,c_2\,a_0+f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,b_2\,e_0+c_1\,f_0^{\,3}\,c_0\,a_1-c_1^{\,2}\,f_0^{\,3}\,x_{34}\,d_0+b_1\,c_0^{\,2}\,f_0^{\,2}\,e_1+b_0\,c_1^{\,2}\,f_0^{\,2}\,e_0$$
$$-f_0\,g_0^{\,2}\,b_1^{\,2}\,a_0-f_0\,b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,a_2+b_0^{\,3}\,g_0^{\,2}\,x_{14}\,h_0-b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,f_2\,a_0+b_0^{\,3}\,g_0^{\,2}\,x_{34}\,h_2$$
$$+b_0^{\,3}\,g_0^{\,2}\,x_{24}\,h_1-b_0^{\,3}\,g_0\,g_2\,e_0-b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,f_1\,a_1+f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,b_0\,e_2+b_0^{\,3}\,g_1^{\,2}\,x_{34}\,h_0$$
$$-b_0^{\,2}\,g_1^{\,2}\,f_0\,a_0-b_0^{\,3}\,g_1\,g_0\,e_1+f_1^{\,2}\,c_0^{\,2}\,b_0\,e_0-b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,f_2\,x_{34}\,d_0-2\,b_0^{\,2}\,g_0\,f_0\,c_0\,e_2$$
$$-b_0^{\,3}\,g_0\,g_2\,x_{34}\,h_0+b_0^{\,2}\,g_0\,g_2\,f_0\,a_0+b_0^{\,2}\,g_0\,f_2\,c_0\,e_0+b_0^{\,2}\,g_0\,f_1\,c_1\,e_0+b_0\,g_0^{\,2}\,f_1\,b_1\,a_0$$
$$-b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,f_1\,x_{34}\,d_1-b_0^{\,2}\,g_0^{\,2}\,f_1\,x_{24}\,d_0+f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,b_0\,x_{34}\,h_2+f_0^{\,2}\,c_0^{\,2}\,b_0\,x_{24}\,h_1$$

$$+ f_0^2 c_0^2 b_0 x_{14} h_0 - f_0^2 c_0 b_0 g_2 a_0 - f_0 c_0^2 f_2 b_0 e_0 + f_0 c_0 b_0^2 g_2 e_0 - f_0 c_0^2 f_1 b_1 e_0$$
$$- b_0^2 g_1^2 f_0 x_{34} d_0 - b_0^3 g_1 g_0 x_{34} h_1 - b_0^3 g_1 g_0 x_{24} h_0 + b_0^2 g_1 g_0 f_1 a_0 + b_0^2 g_1 f_0 c_0 e_1$$
$$- 2 b_0^2 g_1 f_1 c_0 e_0 + 2 b_0 g_1 c_1 f_0^2 a_0 - b_0 g_1 f_0^2 c_0 a_1 - 2 b_0^2 g_1 f_0 c_1 e_0 + b_0^2 g_1 f_0 g_0 a_1$$
$$+ f_1^2 c_0^2 b_0 x_{34} h_0 - f_1^2 c_0 b_0 g_0 a_0 - f_1 c_0^2 f_0 b_0 e_1 + f_1 c_0 b_0^2 g_0 e_1 + f_0 g_0 b_1^2 c_0 e_0$$
$$- f_0 g_0^2 b_1^2 x_{34} d_0 + f_0 b_0^2 c_1 g_0 e_1 - f_0 b_0^2 g_0^2 x_{34} d_2 - f_0 b_0^2 g_0^2 x_{14} d_0 + f_0 b_0^2 g_0 c_2 e_0$$
$$- f_0 b_0^2 g_0^2 x_{24} d_1 + f_0 b_0 g_0^2 b_2 a_0 + f_0 b_0 g_0^2 b_1 a_1 + 2 g_0 b_1 c_1 f_0^2 a_0 - g_0 b_1 f_0^2 c_0 a_1$$
$$+ f_0^3 c_0 c_2 x_{34} d_0 + f_0^2 c_0^2 b_2 x_{34} h_0 - f_0^2 c_0 g_0 b_2 a_0 - f_0^2 c_0 b_1 c_1 e_0 + c_1 f_0^3 c_0 x_{24} d_0$$
$$+ c_1 f_0^3 c_0 x_{34} d_1 + b_1 c_0^2 f_0^2 x_{34} h_1 + b_1 c_0^2 f_0^2 x_{24} h_0 - b_1 c_0 g_1 f_0^2 a_0 + 2 b_0 g_0 f_0^2 c_0 a_2$$
$$- b_0 g_0 c_2 f_0^2 a_0 - b_0 f_0^2 c_0 c_2 e_0 + b_0 c_1^2 f_0^2 x_{34} h_0 - b_0 c_1 f_0^2 c_0 e_1 - b_0 c_1 f_0^2 g_0 a_1$$
$$- 2 b_0^2 g_0 f_0 c_0 x_{14} h_0 + b_0^2 g_0 g_2 f_0 x_{34} d_0 + b_0^2 g_0 f_2 c_0 x_{34} h_0 + b_0 g_0^2 f_1 b_1 x_{34} d_0$$
$$+ b_0^2 g_0 f_1 c_1 x_{34} h_0 - 2 b_0 g_0 f_1 c_1 f_0 a_0 - b_0 g_0 f_1 b_1 c_0 e_0 + b_0 g_0 f_1 f_0 c_0 a_1$$
$$- f_0^2 c_0 b_0 g_2 x_{34} d_0 - f_0 c_0^2 f_2 b_0 x_{34} h_0 + f_0 c_0 b_0 g_0 f_2 a_0 + f_0 c_0 b_0^2 g_2 x_{34} h_0$$
$$+ f_0 c_0 f_1 b_0 c_1 e_0 + f_0 c_0 f_1 g_0 b_1 a_0 - f_0 c_0^2 f_1 b_1 x_{34} h_0 + b_0^2 g_1 g_0 f_1 x_{34} d_0$$
$$+ b_0^2 g_1 f_0 c_0 x_{34} h_1 + b_0^2 g_1 f_0 c_0 x_{24} h_0 - 2 b_0^2 g_1 f_1 c_0 x_{34} h_0 - 2 b_0^2 g_1 f_0 c_1 x_{34} h_0$$
$$+ b_0^2 g_1 f_0 g_0 x_{34} d_1 + b_0^2 g_1 f_0 g_0 x_{24} d_0 + 2 b_0 g_1 c_1 f_0^2 x_{34} d_0 - b_0 g_1 f_0 g_0 b_1 a_0$$
$$+ 2 b_0 g_1 f_0 b_1 c_0 e_0 - b_0 g_1 f_0^2 c_0 x_{24} d_0 - b_0 g_1 f_0^2 c_0 x_{34} d_1 - f_1^2 c_0 b_0 g_0 x_{34} d_0$$
$$- f_1 c_0^2 f_0 b_0 x_{34} h_1 - f_1 c_0^2 f_0 b_0 x_{24} h_0 + f_1 c_0 b_0^2 g_0 x_{34} h_1 + f_1 c_0 b_0^2 g_0 x_{24} h_0$$
$$+ f_1 c_0 b_0 g_1 f_0 a_0 - 2 b_0^2 g_0 f_0 c_0 x_{34} h_2 - 2 b_0^2 g_0 f_0 c_0 x_{24} h_1 - f_0 b_0 g_0 b_1 c_1 e_0$$
$$- f_0 b_0 b_1 c_0 g_0 e_1 + 2 g_0 b_1 c_1 f_0^2 x_{34} d_0 - g_0 b_1 f_0^2 c_0 x_{24} d_0 - g_0 b_1 f_0^2 c_0 x_{34} d_1$$
$$- f_0^2 c_0 g_0 b_2 x_{34} d_0 - f_0^2 c_0 b_1 c_1 x_{34} h_0 - b_1 c_0 g_1 f_0^2 x_{34} d_0 + 2 b_0 g_0 f_0^2 c_0 x_{24} d_1$$
$$+ 2 b_0 g_0 f_0^2 c_0 x_{14} d_0 - b_0 g_0 c_2 f_0^2 x_{34} d_0 - b_0 f_0^2 c_0 c_2 x_{34} h_0 - b_0 c_1 f_0^2 c_0 x_{34} h_1$$
$$- b_0 c_1 f_0^2 c_0 x_{24} h_0 - b_0 c_1 f_0^2 g_0 x_{34} d_1 - b_0 c_1 f_0^2 g_0 x_{24} d_0 + 2 b_0 g_0 f_0^2 c_0 x_{34} d_2$$
$$+ f_0 g_0 b_1^2 c_0 x_{34} h_0 + f_0 b_0^2 g_0 c_2 x_{34} h_0 + f_0 b_0^2 c_1 g_0 x_{34} h_1 + f_0 b_0^2 c_1 g_0 x_{24} h_0$$
$$+ f_0 b_0 g_0^2 b_2 x_{34} d_0 + f_0 b_0 g_0^2 b_1 x_{34} d_1 + f_0 b_0 g_0^2 b_1 x_{24} d_0 - f_0 b_0 g_0 b_2 c_0 e_0$$
$$+ b_0 g_0 f_1 f_0 c_0 x_{24} d_0 + b_0 g_0 f_1 f_0 c_0 x_{34} d_1 + f_0 c_0 b_0 g_0 f_2 x_{34} d_0 + f_0 c_0 f_1 g_0 b_1 x_{34} d_0$$
$$+ f_0 c_0 f_1 b_0 c_1 x_{34} h_0 - b_0 g_1 f_0 g_0 b_1 x_{34} d_0 + 2 b_0 g_1 f_0 b_1 c_0 x_{34} h_0 + f_1 c_0 b_0 g_1 f_0 x_{34} d_0$$
$$- f_0 b_0 g_0 b_2 c_0 x_{34} h_0 - f_0 b_0 g_0 b_1 c_1 x_{34} h_0 - f_0 b_0 b_1 c_0 g_0 x_{34} h_1 - f_0 b_0 b_1 c_0 g_0 x_{24} h_0)$$
$$\Big/ (b_0^3 g_0^3 - f_0^3 c_0^3 - 3 b_0^2 g_0^2 f_0 c_0 + 3 f_0^2 c_0^2 b_0 g_0), x_{14} = x_{14}, x_{22} = (-f_0 c_0^2 e_1$$

$$
\begin{aligned}
&+f_1 c_0^2 e_0+g_0^2 b_1 a_0-b_0 g_0^2 a_1-f_0 c_0^2 x_{34} h_1-f_0 c_0^2 x_{24} h_0+f_1 c_0^2 x_{34} h_0+c_0 g_1 f_0 a_0 \\
&-g_0 c_0 f_1 a_0-g_0 b_1 c_0 e_0-g_0 c_1 f_0 a_0+g_0 f_0 c_0 a_1-b_0 g_0^2 x_{34} d_1+b_0 g_0 c_0 e_1 \\
&+b_0 g_0 c_1 e_0-b_0 c_0 g_1 e_0+g_0^2 b_1 x_{34} d_0-b_0 g_0^2 x_{24} d_0+b_0 g_0 c_1 x_{34} h_0+b_0 g_0 c_0 x_{34} h_1 \\
&+b_0 g_0 c_0 x_{24} h_0-b_0 c_0 g_1 x_{34} h_0-g_0 c_0 f_1 x_{34} d_0-g_0 b_1 c_0 x_{34} h_0+g_0 f_0 c_0 x_{24} d_0 \\
&-g_0 c_1 f_0 x_{34} d_0+c_0 g_1 f_0 x_{34} d_0+g_0 f_0 c_0 x_{34} d_1) \Big/ (b_0 g_0-f_0 c_0)^2, x_{23}=-(b_0^2 g_0 e_1 \\
&-b_0^2 g_1 e_0-c_1 f_0^2 a_0+f_0^2 c_0 a_1+b_0^2 g_0 x_{34} h_1+b_0^2 g_0 x_{24} h_0-b_0 g_0 f_1 a_0-f_0 c_0 b_0 e_1 \\
&-b_0^2 g_1 x_{34} h_0+b_0 g_1 f_0 a_0+f_1 c_0 b_0 e_0+f_0 b_0 c_1 e_0-f_0 b_0 g_0 a_1-c_1 f_0^2 x_{34} d_0 \\
&+f_0 g_0 b_1 a_0-f_0 b_1 c_0 e_0+f_0^2 c_0 x_{24} d_0+f_0^2 c_0 x_{34} d_1-b_0 g_0 f_1 x_{34} d_0-f_0 c_0 b_0 x_{34} h_1 \\
&-f_0 c_0 b_0 x_{24} h_0+b_0 g_1 f_0 x_{34} d_0+f_1 c_0 b_0 x_{34} h_0+f_0 g_0 b_1 x_{34} d_0+f_0 b_0 c_1 x_{34} h_0 \\
&-f_0 b_0 g_0 x_{34} d_1-f_0 b_0 g_0 x_{24} d_0-f_0 b_1 c_0 x_{34} h_0) \Big/ (-2 f_0 c_0 b_0 g_0+b_0^2 g_0^2+f_0^2 c_0^2), \\
&x_{24}=x_{24}, x_{32}=-\frac{g_0 a_0-c_0 e_0-c_0 x_{34} h_0+g_0 x_{34} d_0}{b_0 g_0-f_0 c_0}, \\
&x_{33}=\frac{-b_0 e_0+f_0 x_{34} d_0-b_0 x_{34} h_0+f_0 a_0}{b_0 g_0-f_0 c_0}, x_{34}=x_{34}\}
\end{aligned}
$$

O halde bulunan çözümlerdeki katsayılar kısaca $a',b',c',d',e',f',g',h',k',l',m',n',p',r',s',t',u',v' \in \mathbb{R}$ olarak adlandırılırsa X temsilcisinin denklik sınıfı

$$
P(X)=\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a'+b'x_{14}+c'x_{24}+d'x_{34} & e'+f'x_{14}+g'x_{24}+h'x_{34} & x_{14} \\ 0 & k'+l'x_{24}+m'x_{34} & n'+p'x_{24}+r'x_{34} & x_{24} \\ 1 & s'+t'x_{34} & u'+v'x_{34} & x_{34} \end{pmatrix} \middle| \, x_{14},\, x_{24},\, x_{34} \in \mathbb{R} \right\}
$$

şeklinde elde edilir.

II. Durum. Temsilcisi $X \in \mathbf{M}^*$ için $x_{31}=0$, yani $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$ formunda olan bir $P(X)$ ideal noktası alınsın. X matrisi

$$
X=\left(X_1=\begin{pmatrix} 0 & x_{21} & x_{11} \\ 0 & 0 & x_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} x_{32} & x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{32} & x_{22} \\ 0 & 0 & x_{32} \end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix} x_{33} & x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{33} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}, X_4=\begin{pmatrix} x_{34} & x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{34} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{34} \end{pmatrix} \right)
$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada $\exists\, x_{32}, x_{33}, x_{34} \neq 0$ olmalıdır. O halde $x_{32} \neq 0$ kabul edilirse $X_2 \in \mathbf{K}^*$ olup tersi olan bir üst üçgensel matristir. Böylece eşitliğin her tarafı X_2^{-1} matrisi ile çarpılarak X matrisi daha basitçe

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 1 & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & x_{21} & x_{11} \\ 0 & 0 & x_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{33} & x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{33} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{34} & x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{34} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{34} \end{pmatrix} \right) \in \mathbf{K}^4$$

şeklinde de temsil edilebilir. Böylece $XA = 0$ eşitliğinden elde edilen denklemler

$$\begin{aligned}
&b_0 + x_{33}c_0 + x_{34}d_0 = 0 \\
&x_{21}a_0 + b_1 + x_{33}c_1 + x_{23}c_0 + x_{34}d_1 + x_{24}d_0 = 0 \\
&x_{21}a_1 + x_{11}a_0 + b_2 + x_{33}c_2 + x_{23}c_1 + x_{13}c_0 + x_{34}d_2 + x_{24}d_1 + x_{14}d_0 = 0 \\
&f_0 + x_{33}g_0 + x_{34}h_0 = 0 \\
&x_{21}e_0 + f_1 + x_{33}g_1 + x_{23}g_0 + x_{34}h_1 + x_{24}h_0 = 0 \\
&x_{21}e_1 + x_{11}e_0 + f_2 + x_{33}g_2 + x_{23}g_1 + x_{13}g_0 + x_{34}h_2 + x_{24}h_1 + x_{14}h_0 = 0
\end{aligned}$$

şekline dönüşür.

Bu denklem sisteminin çözümleri Maple™ 13 programında çözdürülerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
\{x_{11} = x_{11}, x_{13} = -(&-c_0 h_0 g_2 d_0^2 f_0 - c_0 h_0 d_0 h_1 g_0 x_{21} a_0 + c_0 h_0^2 c_2 d_0 f_0 + 2 c_0 h_0 g_0 d_0^2 f_2 \\
&- 2 c_0 h_0^2 g_0 d_0 b_2 + c_0 h_0^2 b_0 d_1 g_1 + c_0 h_0^2 c_1 d_1 f_0 + c_0 h_0^2 d_1 g_0 b_1 + c_0 h_0^2 d_2 g_0 b_0 \\
&+ c_0 d_0 h_1^2 g_0 b_0 - c_0 g_0 d_0^2 h_2 f_0 - c_0 h_1 g_0 d_0^2 f_1 + 2 c_0 h_1 g_1 d_0^2 f_0 - c_0 h_0^3 x_{21} c_1 a_0 \\
&+ c_0 h_0^2 d_0 g_1 b_1 + c_0 h_0^2 d_0 g_2 b_0 + c_0 h_0^2 c_1 d_0 f_1 - h_0 c_1 d_0^2 g_0 f_1 + 2 h_0 c_1 d_0^2 g_1 f_0 \\
&- h_0 d_1 g_0^2 d_0 b_1 - h_0 g_0^2 d_0 d_2 b_0 - h_0 g_0 d_0^2 c_2 f_0 - c_0^2 h_0^2 d_0 x_{21} e_1 - c_0^2 h_0^2 x_{21} d_1 e_0 \\
&- c_0^2 h_0^2 d_0 x_{11} e_0 + c_0^2 h_0 d_0 h_2 f_0 + c_0^2 h_0 d_1 h_1 f_0 + c_0^2 h_0 d_0 h_1 f_1 - c_0 h_0 d_1^2 g_0 f_0 \\
&- c_0 h_0 g_1 d_0^2 f_1 + g_1 d_0^3 g_0 x_{21} e_0 - g_1 d_0^2 h_1 g_0 b_0 + h_1 g_0^2 d_0^2 x_{21} a_0 - h_1 g_0 c_1 d_0^2 f_0 \\
&- d_0 h_1 d_1 g_0^2 b_0 - 2 h_0^2 d_0 g_1 c_1 b_0 + h_0^2 c_1 g_0 d_0 b_1 - 2 h_0^2 c_1 d_1 g_0 b_0 + h_0^2 g_0 d_0 c_2 b_0 \\
&- h_0 g_1 g_0 d_0^2 b_1 - h_0 g_0 d_0^2 g_2 b_0 + h_0 g_0^2 d_0^2 x_{11} a_0 + h_0 g_0^2 d_0^2 x_{21} a_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- c_0 h_0 d_0 h_2 g_0 b_0 - c_0 h_0 d_0 h_1 g_1 b_0 + c_0 h_0 d_1 g_0 d_0 f_1 + 2 c_0 h_0 g_0 d_0^{2} x_{11} e_0 \\
&- c_0 h_0 g_1 d_0^{2} x_{21} e_0 - c_0 h_0 d_0 h_1 g_0 b_1 + 2 c_0 h_0 g_0 d_0^{2} x_{21} e_1 - 2 c_0 h_0 d_1 g_1 d_0 f_0 \\
&+ c_0 h_0 g_0 d_0 d_2 f_0 - c_0 h_0 d_1 h_1 g_0 b_0 - c_0 h_0 c_1 d_0 h_1 f_0 + h_0^{2} c_1 g_0 d_0 x_{21} a_0 \\
&+ h_0 g_0 d_0 c_1 d_1 f_0 - h_0 c_1 d_0^{2} g_0 x_{21} e_0 - h_0 g_1 g_0 d_0^{2} x_{21} a_0 - h_0 d_1 g_0^{2} d_0 x_{21} a_0 \\
&+ h_0 d_0 g_1 d_1 g_0 b_0 + 2 h_0 c_1 d_0 h_1 g_0 b_0 + c_0^{2} h_0 d_0 h_1 x_{21} e_0 - c_0 h_1 g_0 d_0^{2} x_{21} e_0 \\
&+ c_0 d_0 h_1 g_0 d_1 f_0 - 2 c_0 h_0^{2} g_0 d_0 x_{21} a_1 + c_0 h_0^{2} x_{21} c_1 d_0 e_0 - 2 c_0 h_0^{2} g_0 d_0 x_{11} a_0 \\
&+ c_0 h_0^{2} d_0 g_1 x_{21} a_0 + c_0 h_0^{2} x_{21} d_1 g_0 a_0 + c_0^{2} h_0^{3} x_{11} a_0 + c_0^{2} h_0^{3} x_{21} a_1 - c_0^{2} h_0^{2} d_2 f_0 \\
&- c_0^{2} h_0^{2} f_1 d_1 - c_0^{2} h_0^{2} d_0 f_2 - c_0^{2} d_0 h_1^{2} f_0 - c_0 h_0^{3} c_2 b_0 - c_0 h_0^{3} b_1 c_1 - g_0^{2} d_0^{3} x_{11} e_0 \\
&+ g_0^{2} d_0^{2} h_2 b_0 + g_0 d_0^{3} g_2 f_0 - g_0^{2} d_0^{3} x_{21} e_1 + h_1 g_0^{2} d_0^{2} b_1 + g_1 d_0^{3} g_0 f_1 - h_0^{2} c_1^{2} d_0 f_0 \\
&+ h_0 g_0^{2} d_0^{2} b_2 + h_0 g_1^{2} d_0^{2} b_0 + h_0 d_1^{2} g_0^{2} b_0 + c_0 h_0 d_1 g_0 d_0 x_{21} e_0 + c_0^{2} h_0^{3} b_2 \\
&- g_1^{2} d_0^{3} f_0 + b_0 c_1^{2} h_0^{3} - g_0^{2} d_0^{3} f_2) \Big/ ((c_0^{2} h_0^{2} - 2 g_0 d_0 c_0 h_0 + g_0^{2} d_0^{2}) \\
&(c_0 h_0 - g_0 d_0)), x_{14} = (-c_0^{2} h_0 g_1 d_1 f_0 - c_0 h_0^{2} g_1 c_1 b_0 - c_0^{2} h_0 h_2 g_0 b_0 - c_0^{2} h_0 g_2 d_0 f_0 \\
&+ c_0^{2} h_0^{2} g_1 x_{21} a_0 + 2 c_0^{2} h_0 g_0 d_0 f_2 - 2 c_0 h_0 g_0^{2} d_0 x_{21} a_1 - g_0 c_0^{2} d_1 h_0 x_{21} e_0 \\
&- g_0 c_0 h_0^{2} c_1 x_{21} a_0 + g_0 c_0 h_0 c_1 d_1 f_0 + g_0 c_0 h_0 c_2 d_0 f_0 + g_0 c_0 c_1 d_0 h_0 f_1 \\
&+ g_1 d_0^{2} g_0 c_0 x_{21} e_0 - g_1 d_0 c_0 h_1 g_0 b_0 + h_0 c_1 g_0^{2} d_0 x_{21} a_0 + c_0 d_1 g_0^{2} d_0 x_{21} e_0 \\
&+ c_0 d_1 g_0^{2} h_0 x_{21} a_0 - 2 c_0 h_0 g_0^{2} d_0 x_{11} a_0 + 2 c_0 h_0 g_1 d_1 g_0 b_0 + c_0 h_0 g_1 c_1 d_0 f_0 \\
&- c_0 h_0 g_1 g_0 d_0 b_1 - g_0 d_0 c_0 h_0 g_2 b_0 - g_0 d_0 g_1 c_0 d_1 f_0 - g_0 d_0 g_1 h_0 c_1 b_0 \\
&- c_0^{2} h_1 g_0 h_0 x_{21} a_0 + c_0 h_1 g_0^{2} d_0 x_{21} a_0 + c_0 h_1 g_0 h_0 c_1 b_0 - 2 c_0 h_1 g_0 c_1 d_0 f_0 \\
&- g_1 d_0 c_0^{2} h_0 x_{21} e_0 + 2 c_0^{2} h_0 g_0 d_0 x_{11} e_0 + 2 c_0^{2} h_0 g_0 d_0 x_{21} e_1 - c_0^{2} h_1 g_0 d_0 x_{21} e_0 \\
&- c_0^{3} h_0^{2} x_{21} e_1 - c_0^{3} h_0^{2} x_{11} e_0 + c_0^{2} h_0^{2} g_2 b_0 + c_0^{3} h_0 h_2 f_0 + c_0^{2} h_0^{2} g_1 b_1 - g_0^{2} d_0^{2} c_0 f_2 \\
&+ c_0^{3} h_1 h_0 f_1 + c_0^{2} h_1^{2} g_0 b_0 - g_1^{2} d_0^{2} c_0 f_0 + g_0^{3} d_0^{2} x_{21} a_1 + g_0^{3} d_0^{2} x_{11} a_0 \\
&- g_0^{3} d_0 d_2 b_0 - g_0^{2} d_0^{2} c_2 f_0 - d_1 g_0^{3} d_0 b_1 - c_1 d_0^{2} g_0^{2} f_1 - c_0 d_1^{2} g_0^{2} f_0 + g_0 h_0^{2} c_1^{2} b_0 \\
&+ g_0 c_0^{2} h_0^{2} b_2 - c_0 h_0 g_1 g_0 d_0 x_{21} a_0 + g_0 c_0 c_1 d_0 h_0 x_{21} e_0 - c_0^{3} h_0^{2} f_2 - c_0^{3} h_1^{2} f_0 \\
&+ g_0^{3} d_0^{2} b_2 + d_1^{2} g_0^{3} b_0 - g_0^{2} d_0^{2} c_0 x_{11} e_0 + g_0^{2} d_0 c_0 h_2 b_0 + g_0 d_0^{2} g_2 c_0 f_0 \\
&- g_0 d_0 c_0^{2} h_2 f_0 - g_0^{2} d_0^{2} c_0 x_{21} e_1 + g_0 d_0^{2} g_1 c_1 f_0 + c_0^{3} h_1 h_0 x_{21} e_0 - c_0^{2} h_1 g_0 h_0 b_1 \\
&- c_0^{2} h_1 h_0 g_1 b_0 + c_0 h_1 g_0^{2} d_0 b_1 - c_0^{2} h_1 g_0 d_0 f_1 + 2 c_0^{2} h_1 g_1 d_0 f_0 + 2 c_0^{2} h_1 g_0 d_1 f_0 \\
&- 2 c_0 h_1 d_1 g_0^{2} b_0 - g_1 d_0 c_0^{2} h_0 f_1 + g_1^{2} d_0 c_0 h_0 b_0 + g_1 d_0^{2} g_0 c_0 f_1 - g_0 h_0 c_1^{2} d_0 f_0
\end{aligned}
$$

$$+g_0c_0^2h_0^2x_{21}a_1-g_0c_0^2d_1h_0f_1-g_0c_0^2h_0d_2f_0+g_0c_0^2h_0^2x_{11}a_0-g_0c_0h_0^2c_1b_1$$
$$-g_0c_0h_0^2c_2b_0-2h_0c_1d_1g_0^2b_0+h_0c_1g_0^2d_0b_1+g_0^2d_0h_0c_2b_0+g_0^2d_0c_1d_1f_0$$
$$-d_1g_0^3d_0x_{21}a_0-c_1d_0^2g_0^2x_{21}e_0+c_1d_0h_1g_0^2b_0-2c_0h_0g_0^2d_0b_2+c_0g_0^2d_0d_2f_0$$
$$+c_0d_1g_0^2h_0b_1+c_0h_0d_2g_0^2b_0+c_0d_1g_0^2d_0f_1)\Big/($$
$$-g_0^3d_0^3-3c_0^2h_0^2g_0d_0+3g_0^2d_0^2c_0h_0+c_0^3h_0^3),x_{21}=x_{21},x_{23}=-(c_0h_0^2x_{21}a_0$$
$$+c_0h_0^2b_1-c_0h_0d_0x_{21}e_0-c_0h_0d_0f_1-c_0h_0d_1f_0+c_0d_0h_1f_0-c_1b_0h_0^2$$
$$-h_0g_0d_0x_{21}a_0+h_0d_1g_0b_0+h_0c_1d_0f_0-h_0g_0d_0b_1+h_0d_0g_1b_0-g_1d_0^2f_0$$
$$-d_0h_1g_0b_0+g_0d_0^2f_1+g_0d_0^2x_{21}e_0)\Big/(c_0h_0-g_0d_0)^2,x_{24}=(-c_0^2h_0x_{21}e_0$$
$$+g_0d_0c_0x_{21}e_0+g_0c_0h_0x_{21}a_0-g_0^2d_0x_{21}a_0-c_0^2h_0f_1+g_0c_0h_0b_1+c_0^2h_1f_0$$
$$+c_0h_0g_1b_0-g_0^2d_0b_1+g_0d_0c_0f_1-c_0h_1g_0b_0-g_1d_0c_0f_0-g_0h_0c_1b_0-g_0c_0d_1f_0$$
$$+d_1g_0^2b_0+g_0c_1d_0f_0)\Big/(c_0^2h_0^2-2g_0d_0c_0h_0+g_0^2d_0^2),x_{33}=-\frac{h_0b_0-d_0f_0}{c_0h_0-g_0d_0},$$
$$x_{34}=\frac{-c_0f_0+g_0b_0}{c_0h_0-g_0d_0}\}$$

Elde edilen sonuçlardaki bilinen katsayılar kısaca $a'',b'',c'',d'',e'',f'',g'',h'',k'',l'',m''\in\mathbb{R}$ olarak adlandırılırsa X temsilcisinin denklik sınıfı

$$P(X)=\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & a''+b''x_{11}+c''x_{21} & d''+e''x_{11}+f''x_{21} \\ x_{21} & 0 & f''+g''x_{21} & h''+k''x_{21} \\ 0 & 1 & l'' & m'' \end{pmatrix}\middle| x_{11},x_{21}\in\mathbb{R}\right\}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de tersine verilen noktalardan geçen doğruyu temsil eden üzerinde olma matrisinin nasıl bulunacağı, örnek iki nokta alınarak belirlenecektir.

I. Durum. Temsilcileri $X=\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 1 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$ ve $Y=\begin{pmatrix} 0 & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ 0 & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ 1 & y_{32} & y_{33} & y_{34} \end{pmatrix}$ olmak üzere $P(X)$, $P(Y)$ normal noktaları alınsın. Aranılan matris $\mathbf{K}_2^4\setminus J_2^4$ kümesinin

$$A=\begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ 0 & f_0 & f_1 \\ 0 & 0 & f_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ 0 & g_0 & g_1 \\ 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ 0 & h_0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

formundaki bir elemanıdır.

Alınan matrisler

$$X=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_{32} & x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{32} & x_{22} \\ 0 & 0 & x_{32} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_{33} & x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{33} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_{34} & x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{34} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{34} \end{pmatrix}\right)$$

ve

$$Y=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_{32} & y_{22} & y_{12} \\ 0 & y_{32} & y_{22} \\ 0 & 0 & y_{32} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_{33} & y_{23} & y_{13} \\ 0 & y_{33} & y_{23} \\ 0 & 0 & y_{33} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_{34} & y_{24} & y_{14} \\ 0 & y_{34} & y_{24} \\ 0 & 0 & y_{34} \end{pmatrix},\right)$$

şeklinde temsil edilirse $XA=0$ ve $YA=0$ eşitliklerinden 24 bilinmeyenden oluşan 12 denklemli aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir:

$$a_0 + x_{32}b_0 + x_{33}c_0 + x_{34}d_0 = 0$$
$$a_1 + x_{32}b_1 + x_{22}b_0 + x_{33}c_1 + x_{23}c_0 + x_{34}d_1 + x_{24}d_0 = 0$$
$$a_2 + x_{32}b_2 + x_{22}b_1 + x_{12}b_0 + x_{33}c_2 + x_{23}c_1 + x_{13}c_0 + x_{34}d_2 + x_{24}d_1 + x_{14}d_0 = 0$$
$$e_0 + x_{32}f_0 + x_{33}g_0 + x_{34}h_0 = 0$$
$$e_1 + x_{32}f_1 + x_{22}f_0 + x_{33}g_1 + x_{23}g_0 + x_{34}h_1 + x_{24}h_0 = 0$$
$$e_2 + x_{32}f_2 + x_{22}f_1 + x_{12}f_0 + x_{33}g_2 + x_{23}g_1 + x_{13}g_0 + x_{34}h_2 + x_{24}h_1 + x_{14}h_0 = 0$$
$$a_0 + y_{32}b_0 + y_{33}c_0 + y_{34}d_0 = 0$$
$$a_1 + y_{32}b_1 + y_{22}b_0 + y_{33}c_1 + y_{23}c_0 + y_{34}d_1 + y_{24}d_0 = 0$$
$$a_2 + y_{32}b_2 + y_{22}b_1 + y_{12}b_0 + y_{33}c_2 + y_{23}c_1 + y_{13}c_0 + y_{34}d_2 + y_{24}d_1 + y_{14}d_0 = 0$$
$$e_0 + y_{32}f_0 + y_{33}g_0 + y_{34}h_0 = 0$$
$$e_1 + y_{32}f_1 + y_{22}f_0 + y_{33}g_1 + y_{23}g_0 + y_{34}h_1 + y_{24}h_0 = 0$$
$$e_2 + y_{32}f_2 + y_{22}f_1 + y_{12}f_0 + y_{33}g_2 + y_{23}g_1 + y_{13}g_0 + y_{34}h_2 + y_{24}h_1 + y_{14}h_0 = 0$$

Bu denklem sistemi Maple™ 13 programında çözdürülerek aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\{ a_0 = -\frac{x_{32} y_{33} c_0 + x_{32} y_{34} d_0 - y_{32} x_{33} c_0 - y_{32} x_{34} d_0}{-y_{32} + x_{32}},\ & a_1 = -\,(x_{32}^2 y_{33} c_1 + x_{32}^2 y_{23} c_0 \\
& + x_{32}^2 y_{24} d_0 + x_{32}^2 y_{34} d_1 - y_{32} x_{32} y_{24} d_0 - y_{32} x_{32} x_{33} c_1 - y_{32} x_{32} x_{23} c_0 - y_{32} x_{32} y_{34} d_1 \\
& - y_{32} x_{32} y_{23} c_0 - y_{32} x_{32} y_{33} c_1 - x_{32} y_{22} x_{33} c_0 - y_{32} x_{32} x_{34} d_1 - y_{32} x_{32} x_{24} d_0 \\
& - x_{32} y_{22} x_{34} d_0 + x_{32} y_{22} y_{33} c_0 + x_{32} y_{22} y_{34} d_0 + y_{32}^2 x_{33} c_1 + y_{32}^2 x_{23} c_0 + y_{32}^2 x_{34} d_1 \\
& + y_{32}^2 x_{24} d_0 - y_{32} x_{22} y_{33} c_0 + y_{32} x_{22} x_{33} c_0 + y_{32} x_{22} x_{34} d_0 - y_{32} x_{22} y_{34} d_0) \Big/ (\\
& -2 y_{32} x_{32} + x_{32}^2 + y_{32}^2),\ a_2 = -\,(-y_{32} x_{32} x_{12} y_{33} c_0 - x_{32} y_{22}^2 x_{33} c_0 - x_{32} y_{22}^2 x_{34} d_0 \\
& + y_{32}^2 x_{12} y_{34} d_0 + y_{32}^2 x_{32} y_{33} c_2 + y_{32}^2 x_{32} y_{23} c_1 + y_{32}^2 x_{32} y_{13} c_0 + y_{32}^2 x_{32} y_{34} d_2 \\
& + y_{32}^2 x_{32} y_{24} d_1 + y_{32}^2 x_{32} y_{14} d_0 - y_{32} x_{32}^2 x_{33} c_2 - y_{32} x_{32}^2 x_{23} c_1 - y_{32} x_{32}^2 x_{13} c_0 \\
& - y_{32} x_{32}^2 x_{34} d_2 - y_{32} x_{32}^2 x_{24} d_1 - y_{32} x_{32}^2 x_{14} d_0 - 2\, y_{32} x_{32}^2 y_{33} c_2 - 2\, y_{32} x_{32}^2 y_{23} c_1 \\
& - 2\, y_{32} x_{32}^2 y_{13} c_0 - 2\, y_{32} x_{32}^2 y_{34} d_2 - 2\, y_{32} x_{32}^2 y_{24} d_1 - 2\, y_{32} x_{32}^2 y_{14} d_0 + y_{32} x_{22}^2 y_{33} c_0 \\
& - y_{32} x_{22}^2 x_{33} c_0 - y_{32} x_{22}^2 x_{34} d_0 + y_{32} x_{22}^2 y_{34} d_0 + x_{22} y_{32}^2 y_{33} c_1 - x_{22} y_{32}^2 x_{33} c_1 \\
& - x_{22} y_{32}^2 x_{23} c_0 - x_{22} y_{32}^2 x_{34} d_1 - x_{22} y_{32}^2 x_{24} d_0 + x_{22} y_{32}^2 y_{23} c_0 + x_{22} y_{32}^2 y_{34} d_1 \\
& + x_{22} y_{32}^2 y_{24} d_0 + x_{32} y_{22}^2 y_{33} c_0 + y_{32}^2 x_{12} y_{33} c_0 + 2\, y_{32}^2 x_{32} x_{33} c_2 + 2\, y_{32}^2 x_{32} x_{23} c_1 \\
& + 2\, y_{32}^2 x_{32} x_{13} c_0 + 2\, y_{32}^2 x_{32} x_{34} d_2 + 2\, y_{32}^2 x_{32} x_{24} d_1 + 2\, y_{32}^2 x_{32} x_{14} d_0 - y_{32}^2 x_{12} x_{33} c_0 \\
& - y_{32}^2 x_{12} x_{34} d_0 - y_{32}^3 x_{34} d_2 - y_{32}^3 x_{24} d_1 - y_{32}^3 x_{33} c_2 - y_{32}^3 x_{23} c_1 - y_{32}^3 x_{13} c_0
\end{aligned}
$$

$$-{y_{32}}^{3} x_{14} d_0 + {x_{32}}^{3} y_{33} c_2 + {x_{32}}^{3} y_{23} c_1 + {x_{32}}^{3} y_{13} c_0 + {x_{32}}^{3} y_{34} d_2 + {x_{32}}^{3} y_{24} d_1 + {x_{32}}^{3} y_{14} d_0$$

$$+ y_{32} x_{32} x_{12} x_{34} d_0 - y_{32} x_{32} x_{12} y_{34} d_0 - y_{32} x_{32} y_{12} y_{33} c_0 + y_{32} x_{32} y_{12} x_{33} c_0$$

$$+ y_{32} x_{32} y_{12} x_{34} d_0 - y_{32} x_{32} y_{12} y_{34} d_0 + y_{32} x_{22} x_{32} x_{33} c_1 + y_{32} x_{22} x_{32} x_{23} c_0$$

$$+ y_{32} x_{22} x_{32} x_{34} d_1 + y_{32} x_{22} x_{32} x_{24} d_0 - y_{32} x_{22} x_{32} y_{33} c_1 - y_{32} x_{22} y_{22} y_{33} c_0$$

$$- y_{32} x_{22} x_{32} y_{23} c_0 - y_{32} x_{22} x_{32} y_{34} d_1 - y_{32} x_{22} x_{32} y_{24} d_0 + y_{32} x_{22} y_{22} x_{33} c_0$$

$$+ y_{32} x_{22} y_{22} x_{34} d_0 - y_{32} x_{22} y_{22} y_{34} d_0 + y_{32} y_{22} x_{32} x_{33} c_1 + y_{32} y_{22} x_{32} x_{23} c_0$$

$$+ y_{32} y_{22} x_{32} x_{34} d_1 + y_{32} y_{22} x_{32} x_{24} d_0 - y_{32} y_{22} x_{32} y_{33} c_1 - y_{32} y_{22} x_{32} y_{23} c_0$$

$$- y_{32} y_{22} x_{32} y_{34} d_1 - y_{32} y_{22} x_{32} y_{24} d_0 - x_{32} x_{22} y_{22} y_{33} c_0 + x_{32} x_{22} y_{22} x_{33} c_0$$

$$+ x_{32} x_{22} y_{22} x_{34} d_0 - x_{32} x_{22} y_{22} y_{34} d_0 + y_{32} x_{32} x_{12} x_{33} c_0 + x_{32} {y_{22}}^{2} y_{34} d_0 + {x_{32}}^{2} y_{12} y_{33} c_0$$

$$- {x_{32}}^{2} y_{12} x_{33} c_0 - {x_{32}}^{2} y_{12} x_{34} d_0 + {x_{32}}^{2} y_{12} y_{34} d_0 - y_{22} {x_{32}}^{2} x_{33} c_1 - y_{22} {x_{32}}^{2} x_{23} c_0$$

$$- y_{22} {x_{32}}^{2} x_{34} d_1 - y_{22} {x_{32}}^{2} x_{24} d_0 + y_{22} {x_{32}}^{2} y_{33} c_1 + y_{22} {x_{32}}^{2} y_{23} c_0 + y_{22} {x_{32}}^{2} y_{34} d_1$$

$$+ y_{22} {x_{32}}^{2} y_{24} d_0) \Big/ ((-y_{32} + x_{32}) (-2 y_{32} x_{32} + {x_{32}}^{2} + {y_{32}}^{2})),$$

$$b_0 = -\frac{-y_{33} c_0 + x_{33} c_0 + x_{34} d_0 - y_{34} d_0}{-y_{32} + x_{32}}, \; b_1 = (-y_{32} y_{33} c_1 + y_{32} x_{33} c_1 + y_{32} x_{23} c_0$$

$$+ y_{32} x_{34} d_1 + y_{32} x_{24} d_0 - x_{32} x_{33} c_1 - x_{32} x_{23} c_0 - x_{32} x_{34} d_1 - x_{32} x_{24} d_0 - x_{22} y_{33} c_0$$

$$+ x_{22} x_{33} c_0 + x_{22} x_{34} d_0 - x_{22} y_{34} d_0 + x_{32} y_{33} c_1 - y_{32} y_{23} c_0 - y_{32} y_{34} d_1 - y_{32} y_{24} d_0$$

$$+ y_{22} y_{33} c_0 + x_{32} y_{23} c_0 + x_{32} y_{34} d_1 + x_{32} y_{24} d_0 - y_{22} x_{33} c_0 - y_{22} x_{34} d_0 + y_{22} y_{34} d_0) \Big/ ($$

$$-2 y_{32} x_{32} + {x_{32}}^{2} + {y_{32}}^{2}), \; b_2 = ({y_{32}}^{2} y_{34} d_2 - {y_{32}}^{2} x_{34} d_2 - {y_{32}}^{2} x_{24} d_1 - {y_{32}}^{2} x_{33} c_2$$

$$- {y_{32}}^{2} x_{23} c_1 + {y_{32}}^{2} y_{23} c_1 - {y_{32}}^{2} x_{13} c_0 + {y_{32}}^{2} y_{33} c_2 + {y_{32}}^{2} y_{13} c_0 - {y_{32}}^{2} x_{14} d_0 + {y_{32}}^{2} y_{24} d_1$$

$$+ {y_{32}}^{2} y_{14} d_0 - {x_{32}}^{2} x_{33} c_2 - {x_{32}}^{2} x_{23} c_1 - {x_{32}}^{2} x_{13} c_0 - {x_{32}}^{2} x_{34} d_2 - {x_{32}}^{2} x_{24} d_1 - {x_{32}}^{2} x_{14} d_0$$

$$+ {x_{32}}^{2} y_{33} c_2 + {x_{32}}^{2} y_{23} c_1 + {x_{32}}^{2} y_{13} c_0 + {x_{32}}^{2} y_{34} d_2 + {x_{32}}^{2} y_{24} d_1 + {x_{32}}^{2} y_{14} d_0 + {x_{22}}^{2} y_{33} c_0$$

$$- {x_{22}}^{2} x_{33} c_0 - {x_{22}}^{2} x_{34} d_0 + {x_{22}}^{2} y_{34} d_0 + {y_{22}}^{2} y_{33} c_0 - {y_{22}}^{2} x_{33} c_0 - {y_{22}}^{2} x_{34} d_0 + {y_{22}}^{2} y_{34} d_0$$

$$+ y_{32} x_{12} y_{33} c_0 + 2 y_{32} x_{32} x_{33} c_2 + 2 y_{32} x_{32} x_{23} c_1 + 2 y_{32} x_{32} x_{13} c_0 + 2 y_{32} x_{32} x_{34} d_2$$

$$+ 2 y_{32} x_{32} x_{24} d_1 + 2 y_{32} x_{32} x_{14} d_0 - y_{32} x_{12} x_{33} c_0 - y_{32} x_{12} x_{34} d_0 + y_{32} x_{12} y_{34} d_0$$

$$- 2 y_{32} x_{32} y_{33} c_2 - 2 y_{32} x_{32} y_{23} c_1 - 2 y_{32} x_{32} y_{13} c_0 - 2 y_{32} x_{32} y_{34} d_2 - 2 y_{32} x_{32} y_{24} d_1$$

$$- 2 y_{32} x_{32} y_{14} d_0 - y_{32} y_{12} y_{33} c_0 + y_{32} y_{12} x_{33} c_0 + y_{32} y_{12} x_{34} d_0 - y_{32} y_{12} y_{34} d_0$$

$$- x_{32} x_{12} y_{33} c_0 + x_{32} x_{12} x_{33} c_0 + x_{32} x_{12} x_{34} d_0 - x_{32} x_{12} y_{34} d_0 + x_{32} y_{12} y_{33} c_0$$

$$- x_{32} y_{12} x_{33} c_0 - x_{32} y_{12} x_{34} d_0 + x_{32} y_{12} y_{34} d_0 + x_{22} y_{32} y_{33} c_1 - x_{22} y_{32} x_{33} c_1$$

$$- x_{22} y_{32} x_{23} c_0 - x_{22} y_{32} x_{34} d_1 - x_{22} y_{32} x_{24} d_0 + x_{22} x_{32} x_{33} c_1 + x_{22} x_{32} x_{23} c_0$$

$$+ x_{22} x_{32} x_{34} d_1 + x_{22} x_{32} x_{24} d_0 - x_{22} x_{32} y_{33} c_1 + x_{22} y_{32} y_{23} c_0 + x_{22} y_{32} y_{34} d_1$$
$$+ x_{22} y_{32} y_{24} d_0 - 2 x_{22} y_{22} y_{33} c_0 - x_{22} x_{32} y_{23} c_0 - x_{22} x_{32} y_{34} d_1 - x_{22} x_{32} y_{24} d_0$$
$$+ 2 x_{22} y_{22} x_{33} c_0 + 2 x_{22} y_{22} x_{34} d_0 - 2 x_{22} y_{22} y_{34} d_0 - y_{22} y_{32} y_{33} c_1 + y_{22} y_{32} x_{33} c_1$$
$$+ y_{22} y_{32} x_{23} c_0 + y_{22} y_{32} x_{34} d_1 + y_{22} y_{32} x_{24} d_0 - y_{22} x_{32} x_{33} c_1 - y_{22} x_{32} x_{23} c_0$$
$$- y_{22} x_{32} x_{34} d_1 - y_{22} x_{32} x_{24} d_0 + y_{22} x_{32} y_{33} c_1 - y_{22} y_{32} y_{23} c_0 - y_{22} y_{32} y_{34} d_1$$
$$- y_{22} y_{32} y_{24} d_0 + y_{22} x_{32} y_{23} c_0 + y_{22} x_{32} y_{34} d_1 + y_{22} x_{32} y_{24} d_0) \Big/ ($$
$$-3 y_{32} x_{32}^{2} - y_{32}^{3} + x_{32}^{3} + 3 y_{32}^{2} x_{32}), c_0 = c_0, c_1 = c_1, c_2 = c_2, d_0 = d_0, d_1 = d_1, d_2 = d_2,$$
$$e_0 = -\frac{x_{32} y_{33} g_0 + x_{32} y_{34} h_0 - y_{32} x_{33} g_0 - y_{32} x_{34} h_0}{-y_{32} + x_{32}}, e_1 = -(x_{32}^{2} y_{24} h_0 + x_{32}^{2} y_{34} h_1$$
$$+ x_{32}^{2} y_{23} g_0 + x_{32}^{2} y_{33} g_1 - y_{32} x_{32} x_{33} g_1 + x_{32} y_{22} y_{34} h_0 - x_{32} y_{22} x_{34} h_0 - y_{32} x_{32} x_{24} h_0$$
$$- y_{32} x_{32} y_{33} g_1 - y_{32} x_{32} x_{23} g_0 - y_{32} x_{32} x_{34} h_1 - y_{32} x_{32} y_{24} h_0 - x_{32} y_{22} x_{33} g_0$$
$$- y_{32} x_{32} y_{23} g_0 - y_{32} x_{32} y_{34} h_1 + x_{32} y_{22} y_{33} g_0 - y_{32} x_{22} y_{33} g_0 + y_{32} x_{22} x_{33} g_0$$
$$+ y_{32} x_{22} x_{34} h_0 - y_{32} x_{22} y_{34} h_0 + y_{32}^{2} x_{33} g_1 + y_{32}^{2} x_{23} g_0 + y_{32}^{2} x_{34} h_1 + y_{32}^{2} x_{24} h_0) \Big/ ($$
$$-2 y_{32} x_{32} + x_{32}^{2} + y_{32}^{2}), e_2 = -(-y_{32}^{3} x_{13} g_0 - y_{32}^{3} x_{33} g_2 - y_{32}^{3} x_{24} h_1 - y_{32}^{3} x_{23} g_1$$
$$- y_{32}^{3} x_{14} h_0 + x_{32}^{3} y_{33} g_2 + x_{32}^{3} y_{23} g_1 + x_{32}^{3} y_{13} g_0 + x_{32}^{3} y_{34} h_2 + x_{32}^{3} y_{24} h_1$$
$$+ x_{32}^{3} y_{14} h_0 - y_{32}^{3} x_{34} h_2 - y_{32} x_{32} x_{12} y_{33} g_0 + y_{32} x_{32} x_{12} x_{33} g_0 + y_{32} x_{32} x_{12} x_{34} h_0$$
$$- y_{32} x_{32} x_{12} y_{34} h_0 - y_{32} x_{32} y_{12} y_{33} g_0 + y_{32} x_{32} y_{12} x_{33} g_0 + y_{32} x_{32} y_{12} x_{34} h_0$$
$$- y_{32} x_{32} y_{12} y_{34} h_0 + y_{32} x_{22} x_{32} x_{33} g_1 + y_{32} x_{22} x_{32} x_{23} g_0 + y_{32} x_{22} x_{32} x_{34} h_1$$
$$+ y_{32} x_{22} x_{32} x_{24} h_0 - y_{32} x_{22} x_{32} y_{33} g_1 - y_{32} x_{22} y_{22} y_{33} g_0 - y_{32} x_{22} x_{32} y_{23} g_0$$
$$- y_{32} x_{22} x_{32} y_{34} h_1 - y_{32} x_{22} x_{32} y_{24} h_0 + y_{32} x_{22} y_{22} x_{33} g_0 + y_{32} x_{22} y_{22} x_{34} h_0$$
$$- y_{32} x_{22} y_{22} y_{34} h_0 + y_{32} y_{22} x_{32} x_{33} g_1 + y_{32} y_{22} x_{32} x_{23} g_0 + y_{32} y_{22} x_{32} x_{34} h_1$$
$$+ y_{32} y_{22} x_{32} x_{24} h_0 - y_{32} y_{22} x_{32} y_{33} g_1 - y_{32} y_{22} x_{32} y_{23} g_0 - y_{32} y_{22} x_{32} y_{34} h_1$$
$$- y_{32} y_{22} x_{32} y_{24} h_0 - x_{32} x_{22} y_{22} y_{33} g_0 + x_{32} x_{22} y_{22} x_{33} g_0 + x_{32} x_{22} y_{22} x_{34} h_0$$
$$- x_{32} x_{22} y_{22} y_{34} h_0 - y_{32} x_{22}^{2} x_{34} h_0 + y_{32} x_{22}^{2} y_{34} h_0 - 2 y_{32} x_{32}^{2} y_{24} h_1 - 2 y_{32} x_{32}^{2} y_{14} h_0$$
$$- y_{32} x_{22}^{2} x_{33} g_0 - 2 y_{32} x_{32}^{2} y_{33} g_2 - 2 y_{32} x_{32}^{2} y_{23} g_1 - 2 y_{32} x_{32}^{2} y_{13} g_0 - 2 y_{32} x_{32}^{2} y_{34} h_2$$
$$- y_{32} x_{32}^{2} x_{13} g_0 - y_{32} x_{32}^{2} x_{33} g_2 - y_{32} x_{32}^{2} x_{23} g_1 - y_{32} x_{32}^{2} x_{34} h_2 - y_{32} x_{32}^{2} x_{24} h_1$$
$$- y_{32} x_{32}^{2} x_{14} h_0 + y_{32} x_{22}^{2} y_{33} g_0 + 2 y_{32}^{2} x_{32} x_{33} g_2 + 2 y_{32}^{2} x_{32} x_{23} g_1 + 2 y_{32}^{2} x_{32} x_{13} g_0$$
$$+ 2 y_{32}^{2} x_{32} x_{34} h_2 + 2 y_{32}^{2} x_{32} x_{24} h_1 + 2 y_{32}^{2} x_{32} x_{14} h_0 + y_{32}^{2} x_{12} y_{33} g_0 - y_{32}^{2} x_{12} x_{33} g_0$$
$$- y_{32}^{2} x_{12} x_{34} h_0 + y_{32}^{2} x_{12} y_{34} h_0 + y_{32}^{2} x_{32} y_{33} g_2 + y_{32}^{2} x_{32} y_{23} g_1 + y_{32}^{2} x_{32} y_{13} g_0$$
$$+ y_{32}^{2} x_{32} y_{34} h_2 + y_{32}^{2} x_{32} y_{24} h_1 + y_{32}^{2} x_{32} y_{14} h_0 + x_{22} y_{32}^{2} y_{33} g_1 - x_{22} y_{32}^{2} x_{33} g_1$$

$$- x_{22} y_{32}^{2} x_{23} g_{0} - x_{22} y_{32}^{2} x_{34} h_{1} - x_{22} y_{32}^{2} x_{24} h_{0} + x_{22} y_{32}^{2} y_{23} g_{0} + x_{22} y_{32}^{2} y_{34} h_{1}$$
$$+ x_{22} y_{32}^{2} y_{24} h_{0} + x_{32} y_{22}^{2} y_{33} g_{0} - x_{32} y_{22}^{2} x_{33} g_{0} - x_{32} y_{22}^{2} x_{34} h_{0} + x_{32} y_{22}^{2} y_{34} h_{0}$$
$$+ x_{32}^{2} y_{12} y_{33} g_{0} - x_{32}^{2} y_{12} x_{33} g_{0} - x_{32}^{2} y_{12} x_{34} h_{0} + x_{32}^{2} y_{12} y_{34} h_{0} - y_{22} x_{32}^{2} x_{33} g_{1}$$
$$- y_{22} x_{32}^{2} x_{23} g_{0} - y_{22} x_{32}^{2} x_{34} h_{1} - y_{22} x_{32}^{2} x_{24} h_{0} + y_{22} x_{32}^{2} y_{33} g_{1} + y_{22} x_{32}^{2} y_{23} g_{0}$$
$$+ y_{22} x_{32}^{2} y_{34} h_{1} + y_{22} x_{32}^{2} y_{24} h_{0}) \Big/ ((-y_{32} + x_{32}) (-2 y_{32} x_{32} + x_{32}^{2} + y_{32}^{2})),$$
$$f_{0} = - \frac{-y_{33} g_{0} + x_{33} g_{0} + x_{34} h_{0} - y_{34} h_{0}}{-y_{32} + x_{32}}, f_{1} = (-y_{32} y_{33} g_{1} + y_{32} x_{33} g_{1} + y_{32} x_{23} g_{0}$$
$$+ y_{32} x_{34} h_{1} + y_{32} x_{24} h_{0} - x_{32} x_{33} g_{1} - x_{32} x_{23} g_{0} - x_{32} x_{34} h_{1} - x_{32} x_{24} h_{0} - x_{22} y_{33} g_{0}$$
$$+ x_{22} x_{33} g_{0} + x_{22} x_{34} h_{0} - x_{22} y_{34} h_{0} + x_{32} y_{33} g_{1} - y_{32} y_{23} g_{0} - y_{32} y_{34} h_{1} - y_{32} y_{24} h_{0}$$
$$+ y_{22} y_{33} g_{0} + x_{32} y_{23} g_{0} + x_{32} y_{34} h_{1} + x_{32} y_{24} h_{0} - y_{22} x_{33} g_{0} - y_{22} x_{34} h_{0} + y_{22} y_{34} h_{0}) \Big/ ($$
$$-2 y_{32} x_{32} + x_{32}^{2} + y_{32}^{2}), f_{2} = (x_{22}^{2} y_{33} g_{0} - y_{32}^{2} x_{34} h_{2} - y_{32}^{2} x_{13} g_{0} + y_{32}^{2} y_{23} g_{1}$$
$$- x_{32}^{2} x_{13} g_{0} + y_{32}^{2} y_{34} h_{2} - y_{32}^{2} x_{33} g_{2} - y_{32}^{2} x_{24} h_{1} - x_{32}^{2} x_{33} g_{2} + y_{32}^{2} y_{13} g_{0}$$
$$+ y_{32}^{2} y_{24} h_{1} + y_{32}^{2} y_{14} h_{0} - y_{32}^{2} x_{23} g_{1} - y_{32}^{2} x_{14} h_{0} + y_{32}^{2} y_{33} g_{2} - x_{32}^{2} x_{23} g_{1}$$
$$- x_{32}^{2} x_{34} h_{2} - x_{32}^{2} x_{24} h_{1} - x_{32}^{2} x_{14} h_{0} + x_{32}^{2} y_{33} g_{2} + x_{32}^{2} y_{23} g_{1} + x_{32}^{2} y_{13} g_{0}$$
$$+ x_{32}^{2} y_{34} h_{2} + x_{32}^{2} y_{24} h_{1} + x_{32}^{2} y_{14} h_{0} - x_{22}^{2} x_{33} g_{0} - x_{22}^{2} x_{34} h_{0} + x_{22}^{2} y_{34} h_{0}$$
$$+ y_{22}^{2} y_{33} g_{0} - y_{22}^{2} x_{33} g_{0} - y_{22}^{2} x_{34} h_{0} + y_{22}^{2} y_{34} h_{0} + 2 y_{32} x_{32} x_{33} g_{2} + 2 y_{32} x_{32} x_{23} g_{1}$$
$$+ 2 y_{32} x_{32} x_{13} g_{0} + 2 y_{32} x_{32} x_{34} h_{2} + 2 y_{32} x_{32} x_{24} h_{1} + 2 y_{32} x_{32} x_{14} h_{0} + y_{32} x_{12} y_{33} g_{0}$$
$$- y_{32} x_{12} x_{33} g_{0} - y_{32} x_{12} x_{34} h_{0} + y_{32} x_{12} y_{34} h_{0} - 2 y_{32} x_{32} y_{33} g_{2} - 2 y_{32} x_{32} y_{23} g_{1}$$
$$- 2 y_{32} x_{32} y_{13} g_{0} - 2 y_{32} x_{32} y_{34} h_{2} - 2 y_{32} x_{32} y_{24} h_{1} - 2 y_{32} x_{32} y_{14} h_{0} - y_{32} y_{12} y_{33} g_{0}$$
$$+ y_{32} y_{12} x_{33} g_{0} + y_{32} y_{12} x_{34} h_{0} - y_{32} y_{12} y_{34} h_{0} - x_{32} x_{12} y_{33} g_{0} + x_{32} x_{12} x_{33} g_{0}$$
$$+ x_{32} x_{12} x_{34} h_{0} - x_{32} x_{12} y_{34} h_{0} + x_{32} y_{12} y_{33} g_{0} - x_{32} y_{12} x_{33} g_{0} - x_{32} y_{12} x_{34} h_{0}$$
$$+ x_{32} y_{12} y_{34} h_{0} + x_{22} y_{32} y_{33} g_{1} - x_{22} y_{32} x_{33} g_{1} - x_{22} y_{32} x_{23} g_{0} - x_{22} y_{32} x_{34} h_{1}$$
$$- x_{22} y_{32} x_{24} h_{0} + x_{22} x_{32} x_{33} g_{1} + x_{22} x_{32} x_{23} g_{0} + x_{22} x_{32} x_{34} h_{1} + x_{22} x_{32} x_{24} h_{0}$$
$$- x_{22} x_{32} y_{33} g_{1} + x_{22} y_{32} y_{23} g_{0} + x_{22} y_{32} y_{34} h_{1} + x_{22} y_{32} y_{24} h_{0} - 2 x_{22} y_{22} y_{33} g_{0}$$
$$- x_{22} x_{32} y_{23} g_{0} - x_{22} x_{32} y_{34} h_{1} - x_{22} x_{32} y_{24} h_{0} + 2 x_{22} y_{22} x_{33} g_{0} + 2 x_{22} y_{22} x_{34} h_{0}$$
$$- 2 x_{22} y_{22} y_{34} h_{0} - y_{22} y_{32} y_{33} g_{1} + y_{22} y_{32} x_{33} g_{1} + y_{22} y_{32} x_{23} g_{0} + y_{22} y_{32} x_{34} h_{1}$$
$$+ y_{22} y_{32} x_{24} h_{0} - y_{22} x_{32} x_{33} g_{1} - y_{22} x_{32} x_{23} g_{0} - y_{22} x_{32} x_{34} h_{1} - y_{22} x_{32} x_{24} h_{0}$$
$$+ y_{22} x_{32} y_{33} g_{1} - y_{22} y_{32} y_{23} g_{0} - y_{22} y_{32} y_{34} h_{1} - y_{22} y_{32} y_{24} h_{0} + y_{22} x_{32} y_{23} g_{0}$$
$$+ y_{22} x_{32} y_{34} h_{1} + y_{22} x_{32} y_{24} h_{0}) \Big/ (-3 y_{32} x_{32}^{2} - y_{32}^{3} + x_{32}^{3} + 3 y_{32}^{2} x_{32}), g_{0} = g_{0},$$
$$g_{1} = g_{1}, g_{2} = g_{2}, h_{0} = h_{0}, h_{1} = h_{1}, h_{2} = h_{2} \}$$

II. Durum. Temsilcileri $X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 1 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ 0 & y_{32} & y_{33} & y_{34} \end{pmatrix}$ olan $P(X)$ normal ve $P(Y)$ ideal noktaları ele alınsın. Burada $P(Y)$ ideal noktası için $\exists\, y_{32}, y_{33}, y_{34} \neq 0$ olmalıdır. Burada $y_{32} \neq 0$ kabul edilirse bu noktaların temsilcileri

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{32} & x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{32} & x_{22} \\ 0 & 0 & x_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{33} & x_{23} & x_{13} \\ 0 & x_{33} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{34} & x_{24} & x_{14} \\ 0 & x_{34} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{34} \end{pmatrix} \right)$$

ve

$$Y = \left(\begin{pmatrix} 0 & y_{21} & y_{11} \\ 0 & 0 & y_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{33} & y_{23} & y_{13} \\ 0 & y_{33} & y_{23} \\ 0 & 0 & y_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{34} & y_{24} & y_{14} \\ 0 & y_{34} & y_{24} \\ 0 & 0 & y_{34} \end{pmatrix} \right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$XA = 0$ ve $YA = 0$ eşitliklerinden 24 bilinmeyenden oluşan 12 denklemli aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&a_0 + x_{32}b_0 + x_{33}c_0 + x_{34}d_0 = 0 \\
&a_1 + x_{32}b_1 + x_{22}b_0 + x_{33}c_1 + x_{23}c_0 + x_{34}d_1 + x_{24}d_0 = 0 \\
&a_2 + x_{32}b_2 + x_{22}b_1 + x_{12}b_0 + x_{33}c_2 + x_{23}c_1 + x_{13}c_0 + x_{34}d_2 + x_{24}d_1 + x_{14}d_0 = 0 \\
&e_0 + x_{32}f_0 + x_{33}g_0 + x_{34}h_0 = 0 \\
&e_1 + x_{32}f_1 + x_{22}f_0 + x_{33}g_1 + x_{23}g_0 + x_{34}h_1 + x_{24}h_0 = 0 \\
&e_2 + x_{32}f_2 + x_{22}f_1 + x_{12}f_0 + x_{33}g_2 + x_{23}g_1 + x_{13}g_0 + x_{34}h_2 + x_{24}h_1 + x_{14}h_0 = 0 \\
&b_0 + y_{33}c_0 + y_{34}d_0 = 0 \\
&y_{21}a_0 + b_1 + y_{33}c_1 + y_{23}c_0 + y_{34}d_1 + y_{24}d_0 = 0 \\
&y_{21}a_1 + y_{11}a_0 + b_2 + y_{33}c_2 + y_{23}c_1 + y_{13}c_0 + y_{34}d_2 + y_{24}d_1 + y_{14}d_0 = 0 \\
&f_0 + y_{33}g_0 + y_{34}h_0 = 0 \\
&y_{21}e_0 + f_1 + y_{33}g_1 + y_{23}g_0 + y_{34}h_1 + y_{24}h_0 = 0 \\
&y_{21}e_1 + y_{11}e_0 + f_2 + y_{33}g_2 + y_{23}g_1 + y_{13}g_0 + y_{34}h_2 + y_{24}h_1 + y_{14}h_0 = 0
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemi Maple™ 13 programında çözdürülerek aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$\{a_0 = x_{32} y_{33} c_0 - x_{33} c_0 - x_{34} d_0 + x_{32} y_{34} d_0, a_1 = y_{21} x_{32}^2 y_{33} c_0 - x_{32} y_{21} x_{33} c_0 + x_{32} y_{23} c_0$$
$$+ x_{32} y_{33} c_1 + x_{32} y_{24} d_0 - x_{32} y_{21} x_{34} d_0 + y_{21} x_{32}^2 y_{34} d_0 + x_{32} y_{34} d_1 + x_{22} y_{33} c_0 - x_{23} c_0$$
$$- x_{33} c_1 + x_{22} y_{34} d_0 - x_{24} d_0 - x_{34} d_1, a_2 = -x_{33} c_2 - x_{23} c_1 - x_{13} c_0 - x_{34} d_2 - x_{24} d_1$$
$$- x_{14} d_0 + 2 x_{22} y_{21} x_{32} y_{33} c_0 + x_{12} y_{33} c_0 + x_{12} y_{34} d_0 + x_{22} y_{23} c_0 + x_{22} y_{33} c_1 + x_{22} y_{24} d_0$$
$$+ x_{22} y_{34} d_1 + x_{32} y_{13} c_0 + x_{32} y_{23} c_1 + x_{32} y_{33} c_2 + x_{32} y_{14} d_0 + x_{32} y_{24} d_1 + x_{32} y_{34} d_2$$
$$- x_{22} y_{21} x_{34} d_0 + y_{21} x_{32}^2 y_{23} c_0 - x_{32} y_{11} x_{33} c_0 - y_{21}^2 x_{32}^2 x_{33} c_0 - x_{32} y_{21} x_{23} c_0$$
$$+ y_{11} x_{32}^2 y_{33} c_0 + y_{21}^2 x_{32}^3 y_{33} c_0 + y_{21} x_{32}^2 y_{33} c_1 - x_{32} y_{21} x_{33} c_1 - x_{32} y_{11} x_{34} d_0$$
$$+ y_{21}^2 x_{32}^3 y_{34} d_0 + y_{21} x_{32}^2 y_{24} d_0 - y_{21}^2 x_{32}^2 x_{34} d_0 - x_{32} y_{21} x_{24} d_0 + y_{11} x_{32}^2 y_{34} d_0$$
$$- x_{32} y_{21} x_{34} d_1 + y_{21} x_{32}^2 y_{34} d_1 - x_{22} y_{21} x_{33} c_0 + 2 x_{22} y_{21} x_{32} y_{34} d_0, b_0 = -y_{33} c_0 - y_{34} d_0,$$
$$b_1 =$$
$$-y_{21} x_{32} y_{33} c_0 + y_{21} x_{33} c_0 - y_{23} c_0 - y_{33} c_1 - y_{24} d_0 + y_{21} x_{34} d_0 - y_{21} x_{32} y_{34} d_0 - y_{34} d_1, b_2$$
$$= -y_{21} x_{32} y_{23} c_0 + y_{11} x_{33} c_0 + y_{21}^2 x_{32} x_{33} c_0 + y_{21} x_{23} c_0 - y_{11} x_{32} y_{33} c_0 - y_{13} c_0$$
$$- y_{21} x_{22} y_{33} c_0 - y_{21}^2 x_{32}^2 y_{33} c_0 - y_{21} x_{32} y_{33} c_1 + y_{21} x_{33} c_1 - y_{23} c_1 - y_{33} c_2 + y_{11} x_{34} d_0$$
$$- y_{21}^2 x_{32}^2 y_{34} d_0 - y_{14} d_0 - y_{21} x_{32} y_{24} d_0 + y_{21}^2 x_{32} x_{34} d_0 - y_{21} x_{22} y_{34} d_0 + y_{21} x_{24} d_0$$
$$- y_{11} x_{32} y_{34} d_0 - y_{24} d_1 + y_{21} x_{34} d_1 - y_{21} x_{32} y_{34} d_1 - y_{34} d_2, c_0 = c_0, c_1 = c_1, c_2 = c_2,$$
$$d_0 = d_0, d_1 = d_1, d_2 = d_2, e_0 = x_{32} y_{33} g_0 - x_{33} g_0 - x_{34} h_0 + x_{32} y_{34} h_0, e_1 = y_{21} x_{32}^2 y_{33} g_0$$
$$- x_{32} y_{21} x_{33} g_0 + x_{32} y_{23} g_0 + x_{32} y_{33} g_1 + x_{32} y_{24} h_0 - x_{32} y_{21} x_{34} h_0 + y_{21} x_{32}^2 y_{34} h_0$$
$$+ x_{32} y_{34} h_1 + x_{22} y_{33} g_0 - x_{23} g_0 - x_{33} g_1 + x_{22} y_{34} h_0 - x_{24} h_0 - x_{34} h_1, e_2 = -x_{33} g_2$$
$$- x_{23} g_1 - x_{13} g_0 - x_{34} h_2 - x_{24} h_1 - x_{14} h_0 + 2 x_{22} y_{21} x_{32} y_{33} g_0 + 2 x_{22} y_{21} x_{32} y_{34} h_0$$
$$- x_{22} y_{21} x_{33} g_0 - x_{22} y_{21} x_{34} h_0 + y_{21} x_{32}^2 y_{23} g_0 - x_{32} y_{11} x_{33} g_0 - y_{21}^2 x_{32}^2 x_{33} g_0$$
$$- x_{32} y_{21} x_{23} g_0 + y_{11} x_{32}^2 y_{33} g_0 + y_{21}^2 x_{32}^3 y_{33} g_0 + y_{21} x_{32}^2 y_{33} g_1 - x_{32} y_{21} x_{33} g_1$$
$$- x_{32} y_{11} x_{34} h_0 + y_{21}^2 x_{32}^3 y_{34} h_0 + y_{21} x_{32}^2 y_{24} h_0 - y_{21}^2 x_{32}^2 x_{34} h_0 - x_{32} y_{21} x_{24} h_0$$
$$+ y_{11} x_{32}^2 y_{34} h_0 - x_{32} y_{21} x_{34} h_1 + y_{21} x_{32}^2 y_{34} h_1 + x_{12} y_{33} g_0 + x_{12} y_{34} h_0 + x_{22} y_{23} g_0$$
$$+ x_{22} y_{33} g_1 + x_{22} y_{24} h_0 + x_{22} y_{34} h_1 + x_{32} y_{13} g_0 + x_{32} y_{23} g_1 + x_{32} y_{33} g_2 + x_{32} y_{14} h_0$$
$$+ x_{32} y_{24} h_1 + x_{32} y_{34} h_2, f_0 = -y_{33} g_0 - y_{34} h_0, f_1 =$$
$$-y_{21} x_{32} y_{33} g_0 + y_{21} x_{33} g_0 - y_{23} g_0 - y_{33} g_1 - y_{24} h_0 + y_{21} x_{34} h_0 - y_{21} x_{32} y_{34} h_0 - y_{34} h_1, f_2$$
$$= -y_{21} x_{32} y_{23} g_0 + y_{11} x_{33} g_0 + y_{21}^2 x_{32} x_{33} g_0 + y_{21} x_{23} g_0 - y_{11} x_{32} y_{33} g_0 - y_{13} g_0$$

$-y_{21}x_{22}y_{33}g_0-y_{21}^{\ 2}x_{32}^{\ 2}y_{33}g_0-y_{21}x_{32}y_{33}g_1+y_{21}x_{33}g_1-y_{23}g_1-y_{33}g_2+y_{11}x_{34}h_0$
$-y_{21}^{\ 2}x_{32}^{\ 2}y_{34}h_0-y_{14}h_0-y_{21}x_{32}y_{24}h_0+y_{21}^{\ 2}x_{32}x_{34}h_0-y_{21}x_{22}y_{34}h_0+y_{21}x_{24}h_0$
$-y_{11}x_{32}y_{34}h_0-y_{24}h_1+y_{21}x_{34}h_1-y_{21}x_{32}y_{34}h_1-y_{34}h_2, g_0=g_0, g_1=g_1, g_2=g_2,$
$h_0=h_0, h_1=h_1, h_2=h_2\}$

Burada da $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}=\begin{pmatrix}0&0&e\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ olmak üzere ideal doğrunun matris temsilinin $A=\begin{bmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{e}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$ şeklinde olduğu açıktır.

KAYNAKLAR

Anderson, F. W., Kent, R. F. 1992. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, New York, 376 pp.

Asar, A. O., Arıkan, A., Arıkan, A. 2009. Cebir. Eflatun Yayınevi, Ankara, 373 s.

Batten, L. M. 1986. Combinatorics of Finite Geometries. Cambridge Press, United Kingdom, 193 pp.

Beachy, J. A. 1999. Introductory Lectures on Rings and Modules. Cambridge University Press, United Kingdom, 238 pp.

Borsuk, K. 1969. Multidimensional Analytic Geometry. PWN Polish Scientific Publishers, Waszawa (Poland), 443 pp.

Erdoğan, F. Ö., Çiftçi, S., Akpınar, A. 2014. On Modules Over Local Rings. *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta-Seria Matematica* isimli dergiye kabul edildi.

Fraleigh, J. B. 1989. A First Course in Abstract Algebra. Addison Wesley P.C., USA, 518 pp.

Hacısalihoğlu, H. H. 2010. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler. Bilecik Üniversitesi, Bilecik, 252 s.

Hirschfeld, J. W. P. 1998. Projective Geometries over Finite Fields. Oxford Science Publications, New York, 555 pp.

Hungerford, T. W. 1974. Algebra. Halt, Rinehart and Winston Inc., New York, 502 pp.

Jacobson, N. 1985. Basic Algebra I(2. Edition). W. H. Freeman and Company, New York, 499 pp.

Jukl, M. 1993. Linear forms on free modules over certain local ring. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 32: 49-62.

Jukl, M. 1995. Grassmann formula for certain type of modules. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 34: 69-74.

Jukl, M., Snasel, V. 2009. Projective equivalence of quadrics in Klingenberg Projective Spaces over a special local ring. *International Journal of Geometry*, 2: 34-38.

Kaya, R. 2005. Projektif Geometri. Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 392 s.

Keppens, D. 1988. Coordinatization of projective Klingenberg planes (part I*). Simon Stevin*, 62: 63-90.

Lenz, H. 1965. Vorlesungen über projektive Geometrie I. Leipzig, 360 pp.

Lingenberg, R. 1969. Grundlagen der Geometrie I. Bibliographisches Institut Mannheim (Wien), Zürich.

Machala, F. 1980. Fundamentalsatze der projektiven Geometrie mit Homomorphismus. Rozpravy CSAV, Rada Mat. Prirod. Ved 90, sesit 5, Academia, Praha, 80 pp.

McDonald, B. R. 1976. Geometric Algebra Over Local Rings. Marcel Dekker Inc., New York, 421 pp.

Nomizu, K. 1966. Fundamentals of Linear Algebra, McGraw-Hill, New York, 325 pp.

Stevenson, F. W. 1972. Projective Planes. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 415 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Fatma ÖZEN ERDOĞAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 03/06/1985
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Bursa Şükrü Şankaya Anadolu Lisesi, 1996-2003
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2003-2007
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2007-2009
Çalıştığı Kurum ve Yıl	: Uludağ Üniversitesi 2008 – …
İletişim (e–posta)	: fatmaozen@uludag.edu.tr

Yayınları: :

Erdoğan, F.Ö., Çelik, B., Çiftçi, S. 2011. On Some Geometric Structures and Local Rings. *Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM,* 1389: 321-324.

Çelik, B., Erdoğan, F.Ö. 2013. On addition and multiplication of points in a certain class of projective Klingenberg planes. *Journal of Inequalities and Applications*, 230: 1-9.

Bayraktar, A., Erdoğan, F.Ö., Akpınar, A. 2013. A Note on the Total Number of Lines of Finite Projective Space. *International Journal of Geometry,* 2: 46-49.

Erdoğan, F. Ö., Çiftçi, S., Akpınar, A. 2014. On Modules Over Local Rings. *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta-Seria Matematica* isimli dergiye kabul edildi.

Erdoğan, F. Ö., Çiftçi, S., 2013. Projective Coordinate Spaces over Local Rings. (Hakem incelemesinde)