T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDO SİMETRİK MANİFOLDLAR

CİHAN ÖZGÜR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA - 2001

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDO SİMETRİK MANİFOLDLAR

CİHAN ÖZGÜR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2001

Bu tez Uludağ Üniversitesi Araştırma Fonu tarafından desteklenmiştir.

Bu tez 17. 10. 2001 tarihinde aşağıdaki juri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

....	....	....
Prof. Dr. Kadri ARSLAN (Danışman)	Prof. Dr. Ahmet AVİNÇ	Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

....	....
Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ	Yard. Doç. Dr. Cengizhan MURATHAN

ÖZET

Bu çalışmada, pseudosimetrik manifoldlar semisimetrik, Ricci semisimetrik ve Weyl semisimetrik manifoldların genelleştirilmiş hali olan pseudosimetrik manifoldlar ele alınmıştır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışmanın ileriki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde pseudosimetrik manifoldların genel bir tanıtımı yapılarak, pseudosimetrik manifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde konharmonik semiparalel ve konharmonik Ricci-simetrik hiperyüzey tanımları verilerek bu tür hiperyüzeylerin sağladığı eğrilik şartları incelenmiştir.

Beşinci bölümde B. Y. Chen eşitliğini sağlayan pseudosimetrik hiperyüzeyler incelenerek, bu sınıftaki hiperyüzeyler için pseudosimetri, Ricci-pseudosimetri ve Weyl pseudosimetri kavramlarının birbirine denk oldukları gösterilmiştir.

Altıncı bölümde semiparalel yüzeyler incelenerek, semiparalel yüzeylerin genelleştirilmesi verilmiştir.

Son bölüm olan yedinci bölümde ise 2-semiparalel altmanifold ve yüzeyler incelenerek, bu tür yüzeylerin genelleştirilmesi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Pseudosimetrik manifold, Ricci-pseudosimetrik manifold, Weyl pseudosimetrik manifold, semiparalel altmanifold, 2-semiparalel altmanifold, paralel ikinci temel formlu altmanifold, hiperyüzey, B. Y. Chen eşitliği.

ABSTRACT

In this thesis we consider pseudosymmetric manifolds are the generalized cases of semisymmetric, Ricci-semisymmetric and Weyl semisymmetric manifolds

This study consists of seven chapters.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and notions which will be used in the other chapters are given.

In the third chapter, the pseudosymmetry type manifolds are introduced and some basic definitions and theorems are given.

In the fourth chapter, the definitions of the conharmonic semiparallel and conharmonic semisymmetric hypersurfaces are given and the curvature conditions of conharmonic semiparallel and conharmonic semisymmetric hypersurfaces are investigated.

In the fifth chapter, pseudosymmetry type hypersurfaces satisfying B. Y. Chen equality are considered. It has been obtained that in the class of the hypersurfaces satisfying B. Y. Chen equality, the pseudosymmetry, Ricci-pseudosymmetry and Weyl-pseudosymmetry notions are equivalent.

In the sixth chapter, the generalizations of the semiparallel ($\overline{R} \cdot h = 0$) surfaces are given.

In the final chapter, 2-semiparallel ($\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = 0$) submanifolds and surfaces and the generalizations of such surfaces are considered.

Key words : Pseudosymmetric manifold, Ricci-pseudosymmetric manifold, Weyl-pseudosymmetric manifold, semiparallel submanifold, 2-semiparalel submanifold, submanifolds with parallel second fundamental form, hypersurface, B. Y. Chen equality.

İÇİNDEKİLER Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

M	Manifold
$M^n(c)$	Uzay form
g	Metrik tensör
$\| \ \|$	Norm
$[\ ,\ ]$	Lie Parantez operatörü
T_pM	p noktasındaki tanjant uzay
$T_p^{\perp}M$	p noktasındaki normal uzay
X_i	Vektör alanı
$\chi(M)$	M nin tanjant vektör alanlarının uzayı
$\chi^{\perp}(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
$N_p^1(M)$	Birinci normal uzay
E_s^n	n-boyutlu yarı Öklid uzayı
s	indeks
∇	M deki koneksiyon
D	N deki koneksiyon
$\nabla^{\perp}$	Normal koneksiyon
$\overline{\nabla}$	van-der Waerden-Bortolotti koneksiyonu
h	İkinci temel form
H	İkinci temel tensör
$tr(h)$	h nın izi
$\widetilde{H}$	Ortalama eğrilik vektörü
$\|\widetilde{H}\|$	Ortalama eğrilik
K	Gauss eğriliği
A_{ξ}	Şekil operatörü
$\widetilde{R}$	Riemann eğrilik tensörü

R	Riemann-Christoffel eğrilik tensörü
$R^{\perp}$	$\nabla^{\perp}$ koneksiyonuna göre eğrilik tensörü
$\overline{R}$	van der Waerden Bortolotti koneksiyonuna göre eğrilik tensörü
$\widetilde{S}$	Ricci operatörü
S	Ricci eğrilik tensörü
C	Weyl konformal eğrilik tensörü
$\mathcal{K}$	Konharmonik eğrilik tensörü
ρ	Skalar eğrilik
$\wedge_g$	g metrik tensörüne göre endomorfizm
$\widetilde{\wedge}$	Kulkarni-Nomizu çarpımı
$\otimes$	Tensör çarpımı
C_{θ}^{m}	Eliptik hiperkoni
$M(m+1, \mathbf{R})$	**R** üzerindeki (m+1) x (m+1) matrislerin kümesi
T^2	$\mathbf{R}^4$ de flat tor yüzeyi
V^m	Veronese altmanifoldu

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı konharmonik semiparalel hiperyüzeyler, semiparalel yüzeyler ve 2-semiparalel altmanifoldlar ile yüzeyleri incelemektir. Ayrıca B. Y. Chen eşitliğini sağlayan pseudosimetrik hiperyüzeyleri sınıflandırmaktır.

Bu çalışma birinci bölüm giriş olmak üzere yedi bölümden oluşmaktadır.

İkinci ve üçüncü bölüm ileriki bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremleri içermektedir. Diğer bölümler ise orijinal sonuçlar içermektedir.

İkinci bölümde bir Riemann manifoldu kavramı tanıtılarak bu tür manifoldlar üzerindeki koneksiyonlar tanımlanmıştır. Ayrıca bir M Riemann manifoldunun Riemann-Christoffel eğrilik tensörü ve Ricci tensörü tanımlanarak bunların özelikleri verilmiştir. Bundan başka bir M altmanifoldu için Gauss ve Weingarten denklemleri verilerek M nin ikinci temel formu ile ilgili özelikler tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde ağırlıklı olarak Deszcz (1992) çalışmasından yararlanılarak pseudosimetri kavramı geniş olarak tanıtılmıştır. Genel bir T tensörünün pseudosimetrik olma durumları incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca pseudosimetrik hiperyüzeylerle ilgili bazı temel teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde konharmonik semiparalel ($\mathcal{K} \cdot H = 0$) ve konharmonik Ricci-simetrik ($\mathcal{K} \cdot S = 0$) hiperyüzeyler tanımlanarak bunlarla ilgili eğrilik şartları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde B. Y. Chen eşitliğini sağlayan pseudosimetrik hiperyüzeyler incelenmiştir.

Altıncı bölümde Deprez (1985) de tanımlanan semiparalel ($\overline{R} \cdot h = 0$) yüzeyler incelenerek bunların genelleştirilmeleri olan

$\overline{R}\cdot h = L_h Q(g, h)$ ve $\overline{R}\cdot h = L_{A_{\tilde{H}}}\overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)$ eğrilik şartlarını sağlayan yüzeylerin karakterizasyonları elde edilmiştir.

Son bölümde Arslan ve ark. (2000) de tanımlanan 2-semiparalel altmanifold ve yüzeyler incelenmiştir. Ayrıca $\overline{R}\cdot\overline{\nabla}h = L_{\overline{\nabla}h}Q(g, \overline{\nabla}h)$ eğrilik şartını sağlayan flat normal koneksiyonlu altmanifoldlar ve $\overline{R}\cdot\overline{\nabla}h = L_{A_{\tilde{H}}}\overline{Q}(A^k_{\tilde{H}}, \overline{\nabla}h)$ eğrilik şartını sağlayan flat normal koneksiyonlu yüzeylerin karakterizasyonları elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 2. 1. M bir diferensiyellenebilir (C^{∞}) manifold olsun. M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den **R** ye C^{∞} fonksiyonların uzayı $C^{\infty}(M, \mathbf{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbf{R})$$

şeklinde tanımlanan g Riemann metriği ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye *bağlantılı manifold* adı verilir (O' Neill 1966).

Tanım 2. 2. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-\text{lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^{\infty}(M, \mathbf{R})$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

lineerlik özeliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir *Afin Koneksiyon* adı verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2. 3. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y \in \chi(M)$ olmak üzere; ∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği) şartlarını sağlıyorsa , ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon* veya M nin *Levi-Civita Koneksiyonu* adı verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2. 4. M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M)x\chi(M) \xrightarrow{2-\text{lineer}, C^{\infty}} \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir C^{∞} X, $Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^{∞} vektör alanı karşılık getirir. $\forall X, Y \in \chi(M)$, $\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbf{R})$ olmak üzere;

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

iii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iv) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özeliklerini sağlayan ∇ ya *Lineer Koneksiyon* (veya kovaryant türev) adı verilir (O' Neill 1983).

Tanım 2. 5. (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ de M üzerindeki Levi–Civita koneksiyonu olsun.

$$\tilde{R} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{R}(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$
$$= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (2.1)$$

ile tanımlanan $\tilde{R}$ fonksiyonu M üzerinde bir tensör alanıdır ve M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(\tilde{R}(X, Y)Z, W)$ tensörüne M nin *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* adı verilir. Burada [,] ile Lie parantez operatörü gösterilmektedir.

Her X, Y, Z, V, W $\in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$ aşağıdaki özeliklere sahiptir;

i) $\tilde{R}(X, Y)Z = - \tilde{R}(Y, X)Z$, (2. 2)

ii) $g(\tilde{R}(X, Y)V, W) = - g(\tilde{R}(X, Y)W, V)$, (2. 3)

iii) $\tilde{R}(X, Y)Z + \tilde{R}(Y, Z)X + \tilde{R}(Z, X)Y = 0$, (2. 4)

iv) $g(\tilde{R}(X, Y)V, W) = g(\tilde{R}(V, W)X, Y)$ (2. 5)

(O'Neill 1983).

Eğer M

$$\nabla R = 0$$

şartını sağlıyor ise M ye *lokal simetrik manifold* adı verilir. Bu eğrilik şartının geometrik yorumu şu şekilde verilebilir: M nin her p noktasında tanımlanan lokal geodezik simetri bir izometridir (O' Neill 1983).

(M, g) bağlantılı bir (yarı)-Riemann manifoldu olsun. Eğer her $p \in M$ için T_pM tanjant uzayı üzerinde türev dönüşümü $-I_d$ olan bir tek $F_p : M \to M$ izometrisi varsa (M, g) ye (yarı)-Riemann simetrik uzay denir (O' Neill 1983). Her (yarı)-Riemann simetrik uzay lokal simetriktir.

Tanım 2. 6. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde sırasıyla bir vektör alanı ζ ve bir r-form ω olmak üzere $v_2, ..., v_r \in T_pM$ ($r \geq 1$) vektörleri için M üzerinde

$$(C_\zeta\omega)(p)(v_2, ..., v_r) = \omega(\zeta(p), v_2, ..., v_r)$$

biçiminde tanımlanan $C_\zeta\omega$ (r-1)-formuna ω nun ζ ile *kontraksiyonu* adı verilir (Lang 1995).

Tanım 2. 7. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π olmak üzere $v, w \in \Pi$ tanjant vektörleri için Al alan fonksiyonu

$$Al(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın. Böylece $Al(V, W) \neq 0$ olmak üzere

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, W)W, V)}{Al(V, W)} \tag{2. 6}$$

ile tanımlanan K ya Π nin *kesitsel eğriliği* denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2. 8. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. Böylece

$$\tilde{S} : \chi(M) \to \chi(M)$$

$$X \to \tilde{S}X = -\sum_{i=1}^{n} \tilde{R}(e_i, X)e_i)$$

şeklinde tanımlı $\tilde{S}$ operatörüne M nin *Ricci operatörü* adı verilir. Ayrıca $\tilde{S}$ yardımıyla M nin *Ricci eğrilik tensörü* S

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^{\infty}(M, \mathbf{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = g(\tilde{S} X, Y) \tag{2. 7}$$

biçiminde tanımlanır (Chen 1973).

Ayrıca

$$S^2(X, Y) = S(\tilde{S} X, Y)$$

dir (Deszcz 1992).

Tanım 2. 9. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her X, Y $\in \chi(M)$ için

$$S(X, Y) = \lambda g(X,Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye *Einstein manifoldu* adı verilir (Besse 1987).

Tanım 2. 10. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ T_pM tanjant uzayının bir bazı olmak üzere M nin *skalar eğriliği*

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2. 8}$$

şeklinde tanımlanır (Chen 1973).

Tanım 2. 11. Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara *uzay form* denir. n-boyutlu bir M uzay formu $M^n(c)$ ile gösterilir. Eğer

$$\begin{cases} c = 0 & \text{ise} \quad M^n(c) = E^n \text{ Öklid uzayı} \\ c = \dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(c) = S^n(r) \text{ küresi} \\ c = -\dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(c) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay} \end{cases}$$

dır (Chen 1973).

Tanım 2. 12. M bir C^{∞} manifold olsun. Eğer M üzerinde

i) 2-lineer,

ii) simetrik

iii) $\forall X \in \chi(M)$ için $g(X, Y) = 0$ ise $Y = 0 \in \chi(M)$ dır,

özeliklerini sağlayan bir g metriği var ise M ye *yarı-Riemann manifoldu*, g ye de *yarı-Riemann metriği* adı verilir (O' Neill 1983).

Tanım 2. 13. (M, g) n-boyutlu bir C^{∞} manifold ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ T_pM nin bir bazı olsun. Bu takdirde bir $w_p \in T_pM$ tanjant vektörü M nin metriği g cinsinden

$$w_p = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(w_p, e_i) e_i$$

biçiminde tek türlü yazılabilir. Buradaki ε_i lerin negatif olanlarının sayısına g metrik tensörünün *indeksi* denir. Bir yarı-Riemann manifold üzerindeki metriğin indeksine *yarı-Riemann manifoldun indeksi* denir, s ile gösterilir ve $0 \le s \le n$ dir (O' Neill 1983).

Tanım 2. 14. E^n n-boyutlu Öklid uzayı verilsin. $0 \le s \le n$ olmak üzere s tamsayısı için, E^n üzerinde,

$$g(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n-s} x_i y_i - \sum_{i=n-s+1}^{n} x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa elde edilen uzay *yarı-Öklid uzay* olarak adlandırılır ve E_s^n ile gösterilir. Eğer s = 0 ise E_0^n, E^n Öklid uzayıdır (O' Neill 1983).

Tanım 2. 15. $n \ge 2$ ve $0 \le s \le n$ olsun. Bu takdirde

i) $S_s^n(r) = \{p \in E_s^{n+1} : g(p, p) = r^2\}$

hiperkuadratiğine E_s^{n+1} de r > 0 yarıçaplı, n-boyutlu s-indeksli *pseudo-küre* denir.

ii) E_s^{n+1} de $H_s^n(r) = \{p \in E_{s+1}^{n+1} : g(p, p) = -r^2\}$

ile verilen hiperkuadratiğe r > 0 yarıçaplı, n-boyutlu s-indeksli *pseudo-hiperbolik uzay* denir (O' Neill 1983).

Tanım 2. 16. M ve N birer C^{∞} manifold olsun. f, M den N ye tanımlı bir C^{∞} fonksiyon olmak üzere, $(f_*)_p$ jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm M nin her bir p noktası için birebir ise f fonksiyonuna bir *immersiyon* denir (Chen 1973).

Tanım 2. 17. M ve N birer C^{∞} manifold ve f: M → N bir C^{∞} fonksiyon olsun. f nin f_* jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm birebir ve f tek değişkenli ise f ye M den N ye bir *imbeding* adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2. 18. f bir immersiyon olmak üzere $\forall X, Y \in T_pM$ için,

$$< f_*(X), f_*(Y) > = < X, Y >$$

ise f ye bir *izometrik immersiyon* adı verilir. Burada < , >, T_pM den indirgenmiş metriktir (Chen 1973).

Tanım 2. 19. M ve N sırasıyla n ve n+d-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, N nin alt manifoldu ve ∇ ve D sırası ile M ve N de kovaryant türevler olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2. 9}$$

biçiminde *Gauss denklemi* elde edilir. Burada $\nabla_X Y$ ve h(X, Y), $D_X Y$ nin sırasıyla tanjant ve normal bileşenleridir. (2. 9) ile tanımlanan h ya M nin *ikinci temel formu* adı verilir. Eğer h = 0 ise M ye *total geodeziktir* denir (Chen 1973).

Tanım 2. 20. M ve N sırasıyla n ve n+d-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, N nin alt manifoldu olsun. M ye normal bir birim vektör alanı ξ olsun. $D_X\xi$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_\xi(X)$ ve $\nabla^\perp_X \xi$ olmak üzere,

$$A : \chi(M) \times \chi^\perp(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece;

$$D_X\xi = -A_\xi(X) + \nabla^\perp_X \xi \tag{2. 10}$$

biçiminde *Weingarten denklemi* elde edilir. Burada A_ξ ya *şekil operatörü*, $\nabla^\perp$ e de M nin $T^\perp M$ *normal demetindeki (normal) koneksiyon* adı verilir. M nin şekil operatörü A_ξ ile ikinci temel form h arasında

$$g(A_\xi X, Y) = \tilde{g}(h(X,Y), \xi) \tag{2. 11}$$

bağıntısı vardır. Burada g, T_pM de skalar çarpımdır (Chen 1973).

İkinci temel form h nın kovaryant türevi $\overline{\nabla}_X h$,

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = \nabla^\perp_X(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{2. 12}$$

şeklinde tanımlanır. h nın kovaryant türevi $\overline{\nabla} h$ ya M nin *üçüncü temel formu* adı verilir. Eğer $\overline{\nabla} h = 0$ ise M ye *paralel ikinci temel formlu* (Chen 1973) veya *1-paralel* dir (Lumiste 1999) denir. Buradaki $\overline{\nabla}$ M nin $T^\perp M$ normal demetinde tanımlanan normal koneksiyon olup buna *van der Waerden Bortolotti koneksiyonu* denir ve

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X, Z) = (\overline{\nabla}_Z h)(X,Y) \tag{2. 13}$$

şeklinde *Codazzi Eşitliği* 'ni sağlar (Chen 1973).

Tanım 2. 21. M, N nin n-boyutlu altmanifoldu olsun.

$$\tilde{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \tag{2. 14}$$

biçiminde tanımlanan $\tilde{H}$ ya M nin *ortalama eğrilik vektörü* adı verilir. Eğer $\tilde{H} = 0$ ise M altmanifolduna *minimaldir* denir. $\tilde{H}$ ortalama eğrilik vektörünün normu $\|\tilde{H}\|$ ya da M nin *ortalama eğriliği* adı verilir (Chen 1973).

Tanım 2. 22. M, E^{n+d} Öklid uzayının n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Her $p \in M$ için p noktasında *birinci normal uzay*

$$N_p^1 M = sp\{h(X, Y): X, Y \in T_pM\} \subseteq T_p^{\perp} M$$

olarak tanımlanır (Chen 1982).

Tanım 2. 23. $(N^{n+d}(c), \tilde{g})$ sabit eğrilikli uzay formunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. Bu takdirde $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= c(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) \\ &\quad + \tilde{g}((h(X, W), h(Y, Z)) - \tilde{g}((h(X, Z), h(Y, W)) \end{aligned} \tag{2. 15}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe *Gauss denklemi* adı verilir.

Ayrıca $\eta, \xi \in \chi^{\perp}(M)$ olmak üzere

$$R^{\perp}(X, Y, \eta, \xi) = g([A_\xi, A_\eta]X, Y) \tag{2. 16}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe de *Ricci denklemi* adı verilir (Chen 1973). Burada

$$[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$$

ve $R^{\perp}$ ise $\nabla^{\perp}$ normal koneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörüdür.

Eğer $R^{\perp} = 0$ ise M *flat normal koneksiyonludur* denir. (2. 16) denklemi gereği M nin normal koneksiyonunun flat olması için gerek ve yeter şart M nin şekil operatörü matrislerinin köşegenleştirilebilir olmasıdır. (2. 16) denkleminden tüm hiperyüzeyler için $R^{\perp} = 0$ olduğu açıktır (Chen 1973).

Tanım 2. 24. $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$h(X, Y) = g(X, Y)\tilde{H}$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye *total umbilik* altmanifold adı verilir.

Eğer

$$\tilde{g}(h(X, Y), \tilde{H}) = \lambda g(X, Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise M ye *pseudo-umbilik* altmanifold denir (Chen 1973).

Tanım 2. 25. (N, $\tilde{g}$) Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M, g) verilsin. M nin birim tanjant vektörü X olmak üzere γ M üzerinde $\gamma'(0) = X$ özeliğinde bir geodezik olsun. Bu takdirde γ nın 0 noktasındaki birinci Frenet eğriliği $k(0) = \|h(X,X)\|$ dır. Eğer M nin her p noktasında h(X, X) in normu $\|h(X,X)\|$ sadece p ye bağlı olup $X = \gamma'(0)$ dan bağımsız ise M ye *izotropik* altmanifold adı verilir (O' Neill 1983).

Tanım 2. 26. (N, $\tilde{g}$) Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M, g) olsun. X, Y, U, V $\in \chi(M)$ için

$$\overline{R}\cdot h:\ \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^{\perp}(M)$$

$$(\overline{R}(X, Y)\cdot h)(U,V) = R^{\perp}(X,Y)h(U,V) - h(\tilde{R}(X, Y)U, V) - h(U, \tilde{R}(X,Y)V) \quad (2.17)$$

ile tanımlanır. Eğer M nin her noktasında $\overline{R}\cdot h = 0$ ise M ye *semiparalel altmanifold* adı verilir (Deprez 1985).

3. PSEUDOSİMETRİK MANİFOLDLAR VE HİPERYÜZEYLER

Bu bölüm başlıca iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda pseudosimetrik manifoldlar, ikinci kısımda ise pseudosimetrik hiperyüzeyler incelenmiştir.

3. 1. Pseudosimetrik Manifoldlar

Bu kısımda aksi söylenmedikçe M ile n-boyutlu ($n \geq 2$), C^{∞} sınıfından bağlantılı bir (yarı)-Riemann manifoldu anlaşılacaktır.

M üzerinde tanımlı (0, 2)-tipinde bir simetrik tensör A olmak üzere $\wedge_A$ endomorfizmi

$$\wedge_A : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X \wedge_A Y)Z = A(Y, Z)X - A(X, Z)Y \tag{3. 1}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $A = g$ alınırsa (3. 1) denklemi

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \tag{3. 2}$$

biçimine indirgenir. Bundan sonra $X \wedge_g Y$ yerine kısaca $X \wedge Y$ kullanılacaktır (Chen 1973).

Her bir $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ için (M, g) nin *Weyl konformal eğrilik operatörü*

$$\widetilde{C} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$\widetilde{C}(X_1, X_2)X_3 = \widetilde{R}(X_1, X_2)X_3 + \frac{1}{n-2}\left(\frac{\rho}{n-1} X_1 \wedge X_2 - (X_1 \wedge \widetilde{S} X_2 + \widetilde{S} X_1 \wedge X_2)\right) X_3$$

ve *Weyl konformal eğrilik tensörü*

$$C: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbf{R})$$

$$C(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(\widetilde{C}(X_1, X_2) X_3, X_4) \tag{3. 3}$$

şeklinde tanımlanır. Bununla beraber $n \geq 4$ için eğer $C = 0$ ise M ye *konformal flat* dir denir. Eğer $n = 3$ ise M için her zaman $C = 0$ dır (Chen 1973).

M üzerinde (0, 2)-tipinde simetrik iki tensör A ve B ise bu tensörlerin *Kulkarni-Nomizu çarpımı* $\tilde{\wedge}$, $\forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ için

$$(A \,\tilde{\wedge}\, B)(X_1, X_2, X_3, X_4) = A(X_1, X_4)B(X_2, X_3) + A(X_2, X_3)B(X_1, X_4) - A(X_1, X_3)B(X_2, X_4) - A(X_2, X_4)B(X_1, X_3) \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır (Besse 1987).

M üzerinde (0, k)-tipindeki ($k \geq 1$) bir T tensör alanı ve (0, 2)-tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde T nin *kovaryant türevi* ∇T,

$$(\nabla T)(X_1, \dots, X_k; X) = (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_k) \quad (3.5)$$

$$= \nabla_X (T(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} T(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_k),$$

biçiminde, $R \cdot T$ ve $Q(A, T)$ tensörleri ise

$$R \cdot T,\ Q(A, T) : \underbrace{\chi(M) x \dots x \chi(M)}_{(k+2)-\text{defa}} \to C^{\infty}(M, \mathbf{R})$$

$$(R \cdot T)(X_1, \dots, X_k; X, Y) = (\tilde{R}(X, Y) \cdot T))(X_1, \dots, X_k) \quad (3.6)$$

$$= - T(\tilde{R}(X, Y)X_1, X_2, \dots, X_k) - \dots - T(X_1, X_2, \dots, \tilde{R}(X, Y)X_k)$$

ve

$$Q(A, T)(X_1, \dots, X_k; X, Y) = ((X \wedge_A Y) \cdot T)(X_1, \dots, X_k) \quad (3.7)$$

$$= - T((X \wedge_A Y)X_1, X_2, \dots, X_k) - \dots - T(X_1, X_2, \dots, (X \wedge_A Y)X_k)$$

biçiminde tanımlanır. T = R ve T = C için Q(g, R) ve Q(g, C) tensörleri ilk olarak Eisenhart (1966) ve Tachibana (1974) de tanımlanmıştır.

Örneğin R nin R üzerine etkisi $R \cdot R$ ve Q(g, R) tensörü $\forall X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y \in \chi(M)$ için

$$R \cdot R,\ Q(g, R) : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbf{R})$$

$$(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R(\tilde{R}(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4)$$

$$-R(X_1, \tilde{R}(X, Y)X_2, X_3, X_4) - R(X_1, X_2, \tilde{R}(X, Y)X_3, X_4) - R(X_1, X_2, X_3, \tilde{R}(X, Y)X_4)$$

ve

$$Q(g, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = - R((X \wedge Y)X_1, X_2, X_3, X_4)$$

$$- R(X_1, (X \wedge Y)X_2, X_3, X_4) - R(X_1, X_2, (X \wedge Y)X_3, X_4) - R(X_1, X_2, X_3, (X \wedge Y)X_4)$$

ile hesaplanır.

$k \geq 1$ için $\nabla T = 0$ ise T tensör alanına *paraleldir* denir. $R \cdot T = 0$ ise T *semisimetrik* olarak adlandırılır. T tensör alanı paralel ise semisimetriktir fakat tersi her zaman doğru değildir. $k \geq 1$ için eğer $R \cdot T$ ve $Q(g, T)$ tensörleri M nin her p noktasında lineer bağımlı ise M manifolduna T tensör alanına göre *pseudosimetriktir* denir. Açıkça her semisimetrik tensör alanı pseudosimetriktir fakat tersi doğru değildir (Desczcz ve Grycak 1987). Böylece M manifoldunun T tensör alanına göre pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_T = \{p \in M : p \in M \text{ de } Q(g, T) \neq 0\}$$

kümesi üzerinde

$$R \cdot T = L_T Q(g, T) \tag{3. 8}$$

olmasıdır. Burada L_T fonksiyonu U_T kümesi üzerinde tanımlıdır.

Eğer

$$\nabla S = 0 \tag{3. 9}$$

ise M ye *Ricci-simetrik*,

$$\nabla C = 0 \tag{3. 10}$$

ise M ye *konformal simetrik manifold* denir (Chaki ve Gupta 1963).

Eğer $\nabla R = 0$ ise

$$R \cdot R = 0 \tag{3. 11}$$

dır, fakat tersi doğru değildir. (3. 11) denklemini sağlayan bir (M, g) (yarı)-Riemann manifolduna *semisimetrik*tir denir. (Sinyukov 1954, Szabó 1982, Szabó 1984, Szabó 1985 ve Kowalski 1996) çalışmalarında semisimetrik manifoldların sınıflandırılması yapılmıştır.

Eğer $\nabla S = 0$ ise

$$R \cdot S = 0 \tag{3. 12}$$

dır, fakat tersi doğru değildir. (3. 12) denklemini sağlayan bir (M, g) (yarı)-Riemann manifolduna *Ricci-semisimetriktir* denir (Deszcz 1992).

Eğer $\nabla C = 0$ ise

$$R \cdot C = 0 \tag{3. 13}$$

dır, fakat tersi doğru değildir. (3. 13) denklemini sağlayan bir (M, g) (yarı)-Riemann manifolduna *Weyl-semisimetriktir* denir (Deszcz 1992).

$n \geq 3$ boyutlu bir (M, g) (yarı)-Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $R \cdot R$ ve $Q(g, R)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye *pseudosimetrik* manifold denir (Deszcz ve Grycak 1987).

(M, g) manifoldunun pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_R = \{p \in M : \; Q(g, R) \neq 0\}$$

kümesi üzerinde

$$R \cdot R = L_R \, Q(g, R) \tag{3. 14}$$

olmasıdır. Burada L_R fonksiyonu U_R üzerinde tanımlıdır.

$n \geq 3$ boyutlu bir (M, g) (yarı)-Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $R \cdot S$ ve $Q(g, S)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye *Ricci-pseudosimetrik* manifold denir (Deszcz 1989, Deszcz ve Hotlós 1989). Bu durumda (M, g) manifoldunun Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_S = \{p \in M : p \in M \text{ de } S - \frac{\rho}{n} g \neq 0\}$$

kümesi üzerinde

$$R \cdot S = L_S Q(g, S) \tag{3. 15}$$

olmasıdır. Burada L_S fonksiyonu U_S üzerinde tanımlıdır.

Her pseudosimetrik manifold Ricci-pseudosimetriktir fakat tersi doğru değildir. Açıkça, her Ricci-semisimetrik manifold ($R \cdot S = 0$) Ricci-pseudosimetriktir fakat tersi doğru değildir (Deszcz 1989, Deszcz ve Hotlós 1989).

$n \geq 4$ boyutlu bir (M, g) (yarı)-Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $R \cdot C$ ve $Q(g, C)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye *Weyl pseudosimetrik* manifold denir (Deszcz 1990). Bu durumda (M, g) manifoldunun Weyl pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_C = \{p \in M : p \in M \text{ de } C \neq 0\}$$

kümesi üzerinde

$$R \cdot C = L_C Q(g, C) \tag{3. 16}$$

olmasıdır. Burada L_C fonksiyonu U_C üzerinde tanımlıdır.

Her pseudosimetrik manifold Weyl pseudosimetriktir fakat tersi doğru değildir. Açıkça, her Weyl semisimetrik manifold ($R \cdot C = 0$) Weyl pseudosimetriktir fakat tersi doğru değildir (Deszcz 1990).

$n \geq 4$ boyutlu bir (M, g) (yarı)-Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $C \cdot C$ ve $Q(g, C)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye *pseudosimetrik Weyl tensörlü* manifold denir (Deszcz ve ark 1994). (M, g) manifoldunun pseudosimetrik Weyl tensörlü olması için gerek ve yeter şart U_C kümesi üzerinde

$$C \cdot C = L_C Q(g, C) \tag{3. 17}$$

olmasıdır.

$n \geq 4$ boyutlu (yarı)-Riemann manifoldlarının sınıfında aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir (Deszcz 1992).

$$R \cdot R = 0 \subset R \cdot S = 0,$$

$$R \cdot R = 0 \subset R \cdot C = 0,$$

$$R \cdot S = 0 \subset R \cdot S = L_S Q(g, S),$$

$$R \cdot R = 0 \subset R \cdot R = L_R\, Q(g, R),$$

$$R \cdot C = 0 \subset R \cdot C = L_C Q(g, C),$$

$$R \cdot R = L_R\, Q(g, R) \subset R \cdot S = L_S Q(g, S),$$

$$R \cdot R = L_R\, Q(g, R) \subset R \cdot C = L_C Q(g, C).$$

3. 2. Pseudosimetrik Hiperyüzeyler

(M, g) ve $(N, \hat{g})$ sırasıyla n ve (n + 1)-boyutlu (yarı)-Riemann manifoldları olmak üzere $f : M \to N$ bir izometrik immersiyon olsun. Böylece $\xi \in \chi^{\perp}(M)$ birim normal vektör alanı ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere (2. 9) ve (2. 10) Gauss ve Weingarten denklemleri sırasıyla

$$D_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon H(X,Y)\xi \tag{3. 18}$$

$$D_X \xi = -A_\xi(X) \tag{3. 19}$$

biçiminde yeniden ifade edilebilir. Burada H, M nin ξ ye göre *ikinci temel tensörü* ve $\varepsilon = \hat{g}(\xi, \xi) = \pm 1$ dir. Böylece (2. 11) denklemi

$$g(A_\xi X, Y) = H(X, Y) \tag{3. 20}$$

olarak yeniden yazılabilir. Ayrıca $p \geq 1$ için

$$g(A_\xi^p X, Y) = H^p(X, Y) \tag{3. 21}$$

şeklinde tanımlanır.

R ve $\hat{R}$ ile sırasıyla M ve N_s^{n+1} nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörleri ve $\forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ olmak üzere M nin N_s^{n+1} de Gauss denklemi

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = \hat{R}(X_1, X_2, X_3, X_4) + \varepsilon E(X_1, X_2, X_3, X_4) \tag{3. 22}$$

olarak tanımlanır (Chen 1973). Burada E tensörü

$$E(X_1, X_2, X_3, X_4) = H(X_1, X_4)H(X_2, X_3) - H(X_1, X_3)H(X_2, X_4) \tag{3. 23}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer N_s^{n+1} yarı-Riemann manifoldu yarı-Öklid uzayı $\mathbf{E}_s^{n+1}$ ise (3. 22) Gauss denklemi

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = \varepsilon\,(H(X_1, X_4)H(X_2, X_3) - H(X_1, X_3)H(X_2, X_4)) \tag{3. 24}$$

haline dönüşür.

(3. 24) eşitliğinin uygun bir kontraksiyonu ile M nin ($\mathbf{E}_s^{n+1}$ deki) Ricci tensörü

$$S = \varepsilon(tr(H)H - H^2) \tag{3. 25}$$

olarak elde edilebilir. Buradan $\forall X_i \in \chi(M)$ için $\tilde{S}X_i$ Ricci operatörü de

$$\tilde{S}X_i = \varepsilon(tr(H)AX_i - A^2X_i) \tag{3. 26}$$

dir.

Teorem 3. 1. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M semisimetriktir $(R \cdot R = 0) \Leftrightarrow$ her $p \in M$ noktasında M nin ikinci temel tensörü $H^2 = \lambda H$ $(\lambda \in \mathbf{R})$ veya

$$H = \alpha v \otimes v + \beta w \otimes w, \qquad v, w \in T_x^*(M), \alpha, \beta \in \mathbf{R} \tag{3. 27}$$

eşitliklerinden birini sağlar (Deszcz 1996).

Teorem 3. 2. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M hiperyüzeyi pseudosimetriktir $(R \cdot R = L_R\, Q(g, R)) \Leftrightarrow$ her $p \in M$ noktası için $R \cdot R = 0$ dır veya M nin ikinci temel tensörü

$$H^2 = \alpha H + \beta g \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}) \tag{3. 28}$$

eşitliğini sağlar (Deszcz 1996).

Son teorem şu şekilde yorumlanabilir:

$M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M hiperyüzeyi pseudosimetriktir $\Leftrightarrow$ her $p \in M$ noktası için $R \cdot R = 0$ veya p noktasında M nin birbirinden farklı en fazla iki asli eğriliği vardır (Verstraelen 1993).

Teorem 3. 3. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M hiperyüzeyi Ricci- pseudosimetriktir $(R \cdot S = L_S Q(g, S)) \Leftrightarrow$ her $p \in M$ noktası için $R \cdot S = 0$ dır veya M nin ikinci temel tensörü (3. 28) eşitliğini sağlar (Defever ve ark. 1995).

Teorem 3. 2 nin yorumuna benzer şekilde Teorem 3. 3 de şu şekilde yorumlanabilir:

$M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M hiperyüzeyi Ricci-pseudosimetriktir $\Leftrightarrow$ her $p \in M$ noktası için $R \cdot S = 0$ veya p noktasında M nin birbirinden farklı en fazla iki asli eğriliği vardır (Deprez ve ark. 1988).

Teorem 3. 4. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M hiperyüzeyi Weyl pseudosimetriktir $(R \cdot C = L_C Q(g, C)) \Leftrightarrow$ pseudosimetriktir $(R \cdot R = L_R Q(g, R))$ (Arslan ve ark. 1997).

Yardımcı Teorem 3. 5. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ bir hiperyüzey olsun. O zaman

$$R \cdot R = Q(S, R) \tag{3. 29}$$

dir (Defever ve ark. 1995).

Yardımcı Teorem 3. 6. (M, g) (yarı)-Riemann manifoldunun bir p noktasında (0,2)-tipindeki iki tensörü A ve D olsun. $\forall p \in M$ için

$$\alpha Q(g, A) + \gamma Q(A, D) + \beta Q(g,D) = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \text{ ve } \gamma \neq 0)$$

eşitliği sağlanıyorsa $A - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)g$ ve $D - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(D)g$ tensörleri lineer bağımlıdır (Deszcz 1997).

Yardımcı Teorem 3. 7. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. O zaman

$$C \cdot H = \frac{\varepsilon}{n-2}[Q(g, H^3 - \mathrm{tr}(H)H^2) + (n - 3)Q(H, H^2)] + \mu Q(g, H) \tag{3. 30}$$

dir. Burada $\mu = \dfrac{\rho}{(n-1)(n-2)}$ dir (Deszcz ve ark. 1999).

Yardımcı Teorem 3. 8. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde

$$R \cdot S = Q(H, \mathrm{tr}(H)H^2 - H^3) \tag{3. 31}$$

dır (Defever ve ark 1995).

Yardımcı Teorem 3. 9. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. $X_h, X_i, X_j, X_k, X_l, X_m \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(C \cdot R)(X_h, X_i, X_j, X_k, X_l, X_m) &= \varepsilon(H \overline{\wedge} (C \cdot H))(X_h, X_i, X_j, X_k, X_l, X_m) \\ &= \varepsilon[H(X_h, X_k)(C \cdot H)(X_i, X_j, X_l, X_m) + H(X_i, X_j)(C \cdot H)(X_h, X_k, X_l, X_m) \\ &\quad - H(X_h, X_j)(C \cdot H)(X_h, X_k, X_l, X_m) - H(X_i, X_k)(C \cdot H)(X_h, X_j, X_l, X_m)]\end{aligned} \tag{3. 32}$$

dir (Arslan ve ark. (baskıda)).

Yardımcı Teorem 3. 10. (M, g) bir Riemann manifoldu A ve B (0, 2)-tipinde iki simetrik tensör olsun. Bu takdirde

$$A \overline{\wedge} Q(B, A) = Q(B, \overline{A}) \tag{3. 33}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}\overline{A}(X_h, X_i, X_j, X_k) &= \frac{1}{2}(A \overline{\wedge} A)(X_h, X_i, X_j, X_k) \\ &= A(X_h, X_k)A(X_i, X_j) + A(X_h, X_j)A(X_i, X_k)\end{aligned} \tag{3. 34}$$

dır. Özel olarak $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ hiperyüzeyi için

$$H \overline{\wedge} Q(H^2, H) = Q(H^2, \overline{H}) \tag{3. 35}$$

dir. (Deszcz, Glagowska (baskıda)).

4. KONHARMONİK SEMİPARALEL HİPERYÜZEYLER

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde (Ishii 1957) de tanımlanan konharmonik eğrilik tensörü ele alınarak, konharmonik semiparalel ve konharmonik Ricci-simetrik hiperyüzeyler tanımlanmıştır. Ayrıca $\mathbf{E}_s^{n+1}$ yarı-Öklid uzayında konharmonik semiparalel ve konharmonik Ricci-simetrik hiperyüzeylerin bazı eğrilik şartları elde edilmiştir.

Tanım 4. 1. (M, g) n-boyutlu (n > 3), bir (yarı)-Riemann manifold olmak üzere $\chi(M)$ nin X_h, X_i, X_j elemanları için M nin konharmonik eğrilik operatörü $\widetilde{K}$ ve *konharmonik eğrilik tensörü* $\mathcal{K}$ sırası ile

$$\widetilde{K}(X_h, X_i)X_j = \widetilde{R}(X_h, X_i)X_j$$

$$-\frac{1}{n-2}\{S(X_i, X_j)X_h - g(X_h, X_j)\widetilde{S}X_i + g(X_i, X_j)\widetilde{S}X_h - S(X_h, X_j)X_i\} \tag{4. 1}$$

ve

$$\mathcal{K}(X_h, X_i, X_j, X_k) = g(\widetilde{K}(X_h, X_i)X_j, X_k) \tag{4. 2}$$

şeklinde tanımlanır (Ishii 1957).

Hiperyüzeyler için Tanım 2. 26 aşağıdaki şekilde yorumlanabilir.

Tanım 4. 2. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ bir hiperyüzey olsun. $g(A_\xi X, Y) = H(X, Y)$ ve $\forall$ X, Y, U, V $\in \chi(M)$ için

$$(R(X, Y)\cdot H)(U, V) = -H(\widetilde{R}(X, Y)U, V) - H(U, \widetilde{R}(X, Y)V)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $R \cdot H = 0$ ise M ye *semiparaleldir* denir.

Bu bölümde şu andan itibaren aksi söylenmedikçe $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ bir hiperyüzey olarak düşünülecektir.

Teorem 4. 3. $M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M nin semiparalel olması için gerek ve yeter şart M nin aşağıdakilerden biri olmasıdır (Deprez 1986);

i) $\mathbf{E}^{n+1}$ in bir S^n hiperküresinin açık bir parçası,

ii) $\mathbf{E}^{n+1}$ in bir C^n hiperkonisinin açık bir parçası,

iii) Bir silindirik hiperyüzey,

iv) $S^{n_1} \times \mathbf{E}^{n-n_1} \subset \mathbf{E}^{n_1+1}$ $n_1 \in \{2, \dots, n\text{-}1\})$ çarpım hiperyüzeyi,

v) $C^{n_1} \times \mathbf{E}^{n-n_1} \subset \mathbf{E}^{n_1+1}$ $(n_1 \in \{2, \dots, n\text{-}1\})$ çarpım hiperyüzeyi.

Önerme 4. 4. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. M nin şekil operatörünü A ile gösterelim. O zaman

$$\tilde{K}(X_h, X_i)X_j = \varepsilon(H(X_i, X_j)AX_h - H(X_h, X_j)AX_i)$$
$$- \frac{1}{n-2}\{S(X_i, X_j)X_h - S(X_h, X_j)X_i - g(X_h, X_j)\tilde{S}X_i + g(X_i, X_j)\tilde{S}X_h\} \quad (4.\,3)$$

dir.

İspat. (3. 24) denklemi (4. 1) de yerine yazılırsa (4. 3) elde edilir. ■

Ayrıca $\mathcal{K} \cdot H$, $\mathcal{K} \cdot H^2$ ve $\mathcal{K} \cdot S$ nin hesabı $R \cdot H$ nın hesabına benzer biçimde yapılır.

Yardımcı Teorem 4. 5. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{K} \cdot H = \frac{\varepsilon}{n-2}\,[(n-3)\,Q(H, H^2) - tr(H)Q(g, H^2) + Q(g, H^3)] \quad (4.\,4)$$

dır.

İspat. $X_h, X_i, X_j, X_k \in \chi(M)$ olmak üzere (3. 6) denkleminde $R = \mathcal{K}$ ve $T = H$ alındığında

$$(\mathcal{K} \cdot H)(X_h, X_i; X_j, X_k) = -H(\tilde{K}(X_j, X_k)X_h, X_i) - H(X_h, \tilde{K}(X_j, X_k)X_i) \quad (4.\,5)$$

elde edilir. Böylece Önerme 4. 4 yardımı ile

$$(\mathcal{K} \cdot H)(X_h, X_i; X_j, X_k) = \varepsilon(-H(X_k, X_h)H(AX_j, X_i) + H(X_j, X_h)H(AX_k, X_i))$$
$$+ \frac{1}{n-2}[S(X_k, X_h)H(X_i, X_j) - S(X_j, X_h)H(X_i, X_k) + g(X_k, X_h)H(\tilde{S}X_j, X_i)$$
$$- g(X_j, X_h)H(\tilde{S}X_k, X_i)] + \varepsilon(-H(X_k, X_i)H(AX_j, X_h) + H(X_i, X_j)H(AX_k, X_h)) +$$

$$+\frac{1}{n-2}[S(X_k, X_i)H(X_j, X_h) - S(X_j, X_i)H(X_h, X_k) - g(X_j, X_i)H(\tilde{S}X_k, X_h)$$

$$+ g(X_k, X_i)H(\tilde{S}X_j, X_h)] \qquad (4.\ 6)$$

bulunur. Diğer taraftan (3. 20) ve (3. 21) denklemlerinden A nın self adjoint olma özeliği kullanılarak

$$H(AX_i, X_j) = g(AX_i, AX_j) = g(A^2X_i, X_j) = H^2(X_i, X_j) \qquad (4.\ 7)$$

ve

$$H(A^2X_i, X_j) = g(A^2X_i, AX_j) = g(A^3X_i, X_j) = H^3(X_i, X_j) \qquad (4.\ 8)$$

elde edilir. Ayrıca (3. 26) denkleminden

$$H(\tilde{S}X_i, X_j) = \varepsilon(tr(H)H(AX_i, X_j) - H(A^2X_i, X_j))$$

olup böylece (4. 7) ve (4. 8) eşitlikleri kullanılarak

$$H(\tilde{S}X_i, X_j) = \varepsilon(tr(H)H^2(X_i, X_j) - H^3(X_i, X_j)) \qquad (4.\ 9)$$

eşitliği bulunur. Buradan (4. 7), (4. 8) ve (4. 9) eşitlikleri (4. 6) denkleminde yerine yazılarak denklemler düzenlenirse

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}\cdot H)(X_h, X_i; X_j, X_k) &= \varepsilon(- H(X_k, X_h)H^2(X_j, X_i) + H(X_j, X_h)H^2(X_k, X_i)\\
&\quad - H(X_k, X_i)H^2(X_j, X_h) + H(X_i, X_j)H^2(X_k, X_h))\\
&+ \frac{1}{n-2}[S(X_k, X_h)H(X_i, X_j) - S(X_j, X_h)H(X_i, X_k) + S(X_k, X_i)H(X_j, X_h)\\
&- S(X_j, X_i)H(X_h, X_k)] + \frac{\varepsilon tr(H)}{n-2}[g(X_k, X_h)H^2(X_j, X_i) - g(X_j, X_h)H^2(X_k, X_i)\\
&\quad + g(X_k, X_i)H^2(X_j, X_h) - g(X_i, X_j)H^2(X_k, X_h)]\\
&\quad - \frac{\varepsilon}{n-2}[g(X_k, X_h)H^3(X_j, X_i) - g(X_j, X_h)H^3(X_k, X_i)\\
&\quad + g(X_k, X_i)H^3(X_j, X_h) - g(X_i, X_j)H^3(X_k, X_h)]\end{aligned} \qquad (4.\ 10)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3. 7) gereği

$$Q(g, H)(X_h, X_i; X_j, X_k) = - H((X_j \wedge X_k)X_h, X_i) - H(X_h, ((X_j \wedge X_k)X_i)$$

olup (3. 2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}Q(g, H)(X_h, X_i; X_j, X_k) &= - g(X_k, X_h)H(X_j, X_i) + g(X_j, X_h)H(X_k, X_i)\\
&\quad - g(X_k, X_i)H(X_j, X_h) + g(X_j, X_i)H(X_h, X_k)\end{aligned} \qquad (4.\ 11)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$Q(g, H^2)(X_h, X_i; X_j, X_k) = - g(X_k, X_h)H^2(X_j, X_i) + g(X_j, X_h)H^2(X_k, X_i) - g(X_k, X_i)H^2(X_j, X_h) + g(X_j, X_i)H^2(X_h, X_k) \qquad (4.\ 12)$$

$$Q(g, H^3)(X_h, X_i; X_j, X_k) = - g(X_k, X_h)H^3(X_j, X_i) + g(X_j, X_h)H^3(X_k, X_i) - g(X_k, X_i)H^3(X_j, X_h) + g(X_j, X_i)H^3(X_h, X_k) \qquad (4.\ 13)$$

$$Q(H, H^2)(X_h, X_i; X_j, X_k) = - H(X_k, X_h)H^2(X_j, X_i) + H(X_j, X_h)H^2(X_k, X_i) - H(X_k, X_i)H^2(X_j, X_h) + H(X_j, X_i)H^2(X_h, X_k) \qquad (4.\ 14)$$

ve

$$Q(H, S)(X_h, X_i; X_j, X_k) = - H(X_k, X_h)S(X_j, X_i) + H(X_j, X_h)S(X_k, X_i) - H(X_k, X_i)S(X_j, X_h) + H(X_j, X_i)S(X_h, X_k) \qquad (4.\ 15)$$

bulunur. Böylece (4. 11) – (4. 15) ifadeleri (4. 10) denkleminde yerine konulursa

$$\mathcal{K} \cdot H = \varepsilon Q(H, H^2) + \frac{1}{n-2} Q(H, S) - \varepsilon \frac{tr(H)}{n-2} Q(g, H^2) + \frac{\varepsilon}{n-2} Q(g, H^3) \qquad (4.\ 16)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3. 25) denkleminden

$$Q(H, S) = Q(H, \varepsilon(tr(H)H - H^2)) = \varepsilon tr(H)Q(H, H) - \varepsilon Q(H, H^2)$$

dir. Ayrıca (3. 7) denklemi yardımıyla

$$Q(H, H) = 0$$

olduğundan

$$Q(H, S) = -\varepsilon Q(H, H^2) \qquad (4.\ 17)$$

bulunur. Buradan (4. 17) eşitliği (4. 16) da yerine yazılır ve denklemler düzenlenirse (4. 4) elde edilir. ■

Tanım 4. 6. $M \subset E_s^{n+1}$ bir hiperyüzey olsun. Eğer $\mathcal{K} \cdot H = 0$ ise M ye *konharmonik semiparaleldir* denir.

Teorem 4. 7. $M \subset E_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. Eğer M konharmonik semiparalel ise pseudosimetriktir.

İspat. M konharmonik semiparalel olduğundan, Tanım 4. 6 ve Yardımcı Teorem 4. 5 gereği

$$\frac{1}{n-2} \varepsilon[(n-3)Q(H, H^2) - tr(H)Q(g, H^2) + Q(g, H^3)] = 0 \qquad (4.\ 18)$$

yazılabilir. Ayrıca (4. 18) denklemine kontraksiyon uygulanırsa

$$\varepsilon H^3 = - \frac{3}{n} \varepsilon tr(H)H^2 - \frac{n-3}{n} \varepsilon tr(H^2)H - \frac{1}{n} [\varepsilon tr(H)tr(H^2) + \varepsilon tr(H^3)]g \qquad (4.\ 19)$$

elde edilir. Bununla beraber (4. 19) ifadesi (4. 18) de yerine yazılırsa

$$(n-3)\varepsilon Q(H, H^2) - \frac{n-3}{n} tr(H)Q(g, H^2) - [\frac{n-3}{n}\varepsilon tr(H^2)]Q(g, H) = 0$$

bulunur. Böylece Yardımcı Teorem 3. 6 gereği

$$H^2 - \frac{1}{n}tr(H^2)g \quad \text{ve} \quad H - \frac{1}{n}tr(H)g$$

tensörleri lineer bağımlıdır. Böylece M üzerinde

$$H^2 - \frac{1}{n}tr(H^2)g = \lambda(H - \frac{1}{n}tr(H)g)$$

olacak şekilde bir λ fonksiyonu vardır. Bu ise

$$H^2 = \lambda H + \frac{1}{n}(tr(H^2) - \lambda tr(H))g$$

demektir. Buradan Teorem 3. 2 gereği M hiperyüzeyi pseudosimetriktir. ■

Yardımcı Teorem 4. 8. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. O zaman

$$\mathcal{K} \cdot H^2 = \varepsilon Q(H, H^3) + \frac{1}{n-2}\varepsilon[- tr(H)Q(H, H^2) - tr(H)Q(g, H^3) + Q(g, H^4)] \quad (4.20)$$

dir.

İspat. $X_h, X_i, X_j, X_k \in \chi(M)$ olmak üzere (3. 6) denkleminde $R = \mathcal{K}$ ve $T = H^2$ alındığında

$$(\mathcal{K}\cdot H^2)(X_h, X_i ; X_j, X_k) = - H^2(\tilde{K} (X_j, X_k)X_h, X_i) - H^2(X_h, \tilde{K} (X_j, X_k)X_i) \quad (4.21)$$

yazılabilir. Buradan Önerme 4. 4 yardımı ile

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}\cdot H^2)(X_h, X_i; X_j, X_k) &= -\varepsilon(H(X_k, X_h)H^2(AX_j, X_i) - H(X_j, X_h)H^2(AX_k, X_i)) \\ &+ \frac{1}{n-2}[S(X_k, X_h)H^2(X_i, X_j) - S(X_j, X_h)H^2(X_i, X_k) + g(X_k, X_h)H^2(\tilde{S}X_j, X_i) \\ &- g(X_j, X_h)H^2(\tilde{S}X_k, X_i)] - \varepsilon(H(X_k, X_i)H^2(AX_j, X_h) - H(X_i, X_j)H^2(AX_k, X_h)) \\ &+ \frac{1}{n-2}[S(X_k, X_i)H^2(X_j, X_h) - S(X_j, X_i)H^2(X_h, X_k) - g(X_j, X_i)H^2(\tilde{S}X_k, X_h) \\ &+ g(X_k, X_i)H^2(\tilde{S}X_j, X_h)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

yazılabilir. Diğer taraftan (3. 21) denklemi yardımıyla A nın self adjoint olma özeliği kullanılarak

$$H^2(AX_i, X_j) = g(AX_i, A^2X_j) = g(A^3X_i, X_j) = H^3(X_i, X_j) \quad (4.23)$$

ve

$$H^2(A^2X_i, X_j) = g(A^2X_i, A^2X_j) = g(A^4X_i, X_j) = H^4(X_i, X_j) \qquad (4.24)$$

elde edilir. (3. 26) denkleminden

$$H^2(\widetilde{S}X_i, X_j) = \varepsilon(tr(H)H^2(AX_i, X_j) - H^2(A^2X_i, X_j))$$

olup, (4. 23) ve (4. 24) eşitlikleri yardımıyla

$$H^2(\widetilde{S}X_i, X_j) = \varepsilon(tr(H)H^3(X_i, X_j) - H^4(X_i, X_j)) \qquad (4.25)$$

eşitliği bulunur. Buradan (4. 23), (4. 24) ve (4. 25) eşitlikleri (4. 22) denkleminde yerine yazılırsa, denklemler düzenlenerek

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}\cdot H^2)(X_h, X_i; X_j, X_k) &= \varepsilon(- H(X_k, X_h)H^3(X_j, X_i) + H(X_j, X_h)H^3(X_k, X_i) \\
&\quad - H(X_k, X_i)H^3(X_j, X_h) + H(X_i, X_j)H^3(X_k, X_h)) \\
&+ \frac{1}{n-2}[S(X_k, X_h)H^2(X_i, X_j) - S(X_j, X_h)H^2(X_i, X_k) + S(X_k, X_i)H^2(X_j, X_h) \\
&-S(X_j, X_i)H^2(X_h, X_k)] + \frac{\varepsilon tr(H)}{n-2}[g(X_k, X_h)H^3(X_j, X_i) - g(X_j, X_h)H^3(X_k, X_i) \\
&+ g(X_k, X_i)H^3(X_j, X_h) - g(X_i, X_j)H^3(X_k, X_h)] \\
&- \frac{\varepsilon}{n-2}[g(X_k, X_h)H^4(X_j, X_i) - g(X_j, X_h)H^4(X_k, X_i) \\
&+ g(X_k, X_i)H^4(X_j, X_h) - g(X_i, X_j)H^4(X_k, X_h)] \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3. 7) gereği

$$\begin{aligned}
Q(g, H^4)(X_h, X_i; X_j, X_k) &= - g(X_k, X_h)H^4(X_j, X_i) + g(X_j, X_h)H^4(X_k, X_i) \\
&\quad - g(X_k, X_i)H^4(X_j, X_h) + g(X_j, X_i)H^4(X_h, X_k) \qquad (4.27) \\
Q(H, H^3)(X_h, X_i; X_j, X_k) &= - H(X_k, X_h)H^3(X_j, X_i) + H(X_j, X_h)H^3(X_k, X_i) \\
&\quad - H(X_k, X_i)H^3(X_j, X_h) + H(X_j, X_i)H^3(X_h, X_k) \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Q(H^2, S)(X_h, X_i; X_j, X_k) &= - H^2(X_k, X_h)S(X_j, X_i) + H^2(X_j, X_h)S(X_k, X_i) \\
&\quad - H^2(X_k, X_i)S(X_j, X_h) + H^2(X_j, X_i)S(X_h, X_k) \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

olup, (4. 13), (4. 27), (4. 28) ve (4. 29) ifadeleri (4. 26) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathcal{K}\cdot H^2 = \varepsilon\, Q(H, H^3) + \frac{1}{n-2}Q(H^2, S) - \frac{\varepsilon tr(H)}{n-2}Q(g, H^3) + \frac{\varepsilon}{n-2}Q(g, H^4) \qquad (4.30)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3. 25) denkleminden

$$Q(H^2, S) = Q(H^2, \varepsilon(tr(H)H - H^2)) = \varepsilon tr(H)Q(H^2, H) - \varepsilon Q(H^2, H^2)$$

dir ve (3. 7) denkleminden

$$Q(H^2, H^2) = 0 \text{ ve } Q(H^2, H) = - Q(H, H^2)$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece

$$Q(H^2, S) = -\varepsilon tr(H)Q(H, H^2) \tag{4. 31}$$

bulunur. Buradan (4. 31) eşitliği (4. 30) da yerine yazılır ve denklemler düzenlenirse (4. 20) elde edilir. ■

Tanım 4. 9. $M \subset E_s^{n+1}$ bir hiperyüzey olsun.

$$(\mathcal{K}(X, Y)\cdot S)(U, V) = -S(\tilde{K}(X, Y)U, V) - S(U, \tilde{K}(X, Y)V) \tag{4. 32}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\mathcal{K}\cdot S = 0$ ise M ye *konharmonik Ricci-simetrik* denir.

Yardımcı Teorem 4. 10. $M \subset E_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. Eğer M konharmonik Ricci-simetrik ise M üzerinde reel değerli en az bir λ fonksiyonu vardır öyleki

$$H^3 = tr(H)H^2 + \lambda H + \frac{1}{n}[- \lambda tr(H) - tr(H)tr(H^2) + tr(H^3)]g \tag{4. 33}$$

dir.

İspat. M hiperyüzeyi konharmonik Ricci-simetrik olduğundan Tanım 4. 9 gereği $\mathcal{K}\cdot S = 0$ dır. Böylece (3. 25) denklemi kullanılarak

$$\mathcal{K}\cdot S = \varepsilon(tr(H)\, \mathcal{K}\cdot H - \mathcal{K}\cdot H^2) \tag{4. 34}$$

yazılabilir. Ayrıca (4. 4) ve (4. 20) denklemleri (4. 34) denkleminde yerine yazılırsa $\mathcal{K}\cdot S = 0$ yardımıyla

$$\begin{aligned} &- Q(H, H^3) + tr(H)Q(H, H^2) \\ &+ \frac{1}{n-2}[- tr(H)^2Q(g, H^2) + 2tr(H)Q(g, H^3) - Q(g, H^4)] = 0 \end{aligned} \tag{4. 35}$$

elde edilir. Bununla beraber (4. 35) denklemine kontraksiyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n-2}H^4 &= \frac{1}{n(n-2)}[- (n+2)tr(H)H^3 + 2tr(H)^2]H^2 \\ &+ \frac{1}{n}[- tr(H^3) + tr(H)tr(H^2)]H + [\text{bazı terimler}]g \end{aligned} \tag{4. 36}$$

bulunur. Ayrıca (4. 36) denklemi (4. 35) de yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{n}tr(H)Q(g, tr(H)H^2 - H^3) + Q(H, tr(H)H^2 - H^3)$$

$$+\frac{1}{n}[-tr(H^3) + tr(H)tr(H^2)]Q(g, H) = 0$$

elde edilir. Buradan Yardımcı Teorem 3. 6 gereği

$$tr(H)H^2 - H^3 - \frac{tr(H)tr(H^2) - tr(H^3)}{n}g \text{ ve } H - \frac{1}{n}tr(H)g$$

tensörleri lineer bağımlıdır. Yani en az bir reel değerli λ fonksiyonu vardır öyle ki

$$tr(H)H^2 - H^3 - \frac{tr(H)tr(H^2) - tr(H^3)}{n}g = \lambda(H - \frac{1}{n}tr(H)g)$$

dır. ■

Önerme 4. 11. $M \subset E_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$, bir hiperyüzey olsun. O zaman

$$Q(H, R) = 0$$

dır.

İspat. $X_h, X_i, X_j, X_k \in \chi(M)$ için

$$Q(H, R)(X_h, X_i, X_j, X_k; X_l, X_m) = - R((X_l \wedge_H X_m)X_h, X_i, X_j, X_k)$$
$$- R(X_h, (X_l \wedge_H X_m)X_i, X_j, X_k) - R(X_h, X_i, (X_l \wedge_H X_m)X_j, X_k) - R(X_h, X_i, X_j, (X_l \wedge_H X_m)X_k)$$

olup burada (3. 7) denklemi kullanılırsa

$$Q(H, R)(X_h, X_i, X_j, X_k; X_l, X_m) = - H(X_m, X_h)R(X_l, X_i, X_j, X_k)$$
$$+ H(X_l, X_h)R(X_m, X_i, X_j, X_k) - H(X_m, X_i)R(X_h, X_l, X_j, X_k) + H(X_l, X_i)R(X_h, X_m, X_j, X_k)$$
$$- H(X_m, X_j)R(X_h, X_i, X_l, X_k) + H(X_l, X_j)R(X_h, X_i, X_m, X_k) - H(X_m, X_k)R(X_h, X_i, X_j, X_l)$$
$$+ H(X_l, X_k)R(X_h, X_i, X_j, X_m)$$

yazılabilir. Böylece (3. 24) Gauss denklemi kullanılarak $Q(H, R) = 0$ elde edilir. ■

Teorem 4. 12. $M \subset E_s^{n+1}$ $(n \geq 4)$ bir hiperyüzey olsun. Eğer M konharmonik Ricci-simetrik ve $C \cdot R = 0$ şartını sağlıyor ise pseudosimetriktir.

İspat. M hiperyüzeyi konharmonik Ricci-simetrik olduğundan (4. 33) eşitliği geçerlidir. (4. 33) eşitliği (3. 30) da yerine konulursa

$$C \cdot H = \frac{1}{n-2}[(\lambda\varepsilon + \frac{\kappa}{n-1})Q(g, H) - (n\text{-}3)\varepsilon Q(H, H^2)] \tag{4. 37}$$

elde edilir. Ayrıca (3. 32) gereği $C \cdot R = \varepsilon(H \barwedge (C \cdot H))$ olduğundan

$$C \cdot R = \frac{1}{n-2}[\lambda + \varepsilon\frac{\kappa}{n-1}]H \barwedge Q(g, H) - (n - 3)H \barwedge Q(H, H^2) \tag{4. 38}$$

bulunur. Buradan (3. 34) denklemi kullanılırsa (4. 38) denklemi

$$C \cdot R = \frac{1}{n-2}[\lambda + \varepsilon \frac{\kappa}{n-1}]Q(g, \overline{H}) + (n-3)Q(H^2, \overline{H}) \tag{4. 39}$$

haline dönüşür. Diğer taraftan (3. 25) denkleminden

$$H^2 = \varepsilon S - tr(H)H \tag{4. 40}$$

olup (4. 40) eşitliği (4. 39) da yerine yazılırsa

$$C \cdot R = \frac{1}{n-2}[\lambda + \varepsilon \frac{\kappa}{n-1}]Q(g, \overline{H}) + (n-3)Q(\varepsilon S - tr(H)H, \overline{H})$$

elde edilir. Böylece (3. 34) ve (3. 24) gereği $\overline{H} = \varepsilon R$ olduğundan

$$C \cdot R = \frac{1}{n-2}\varepsilon [\lambda + \frac{\kappa}{n-1}] Q(g, \varepsilon R) - \varepsilon(n-3)[Q(S, \varepsilon R) - tr(H)Q(H, \varepsilon R)] \tag{4. 41}$$

bulunur. Böylece

$$C \cdot R = \frac{1}{n-2}[\lambda + \frac{\kappa}{n-1}] Q(g, R) - (n-3)[Q(S, R) - tr(H)Q(H, R)] \tag{4. 42}$$

elde edilir. Önerme 4. 11 den $Q(H, R) = 0$ ve Yardımcı Teorem 3. 5 den de $R \cdot R = Q(S, R)$ olduğunu biliyoruz. Böylece bu eşitlikler (4. 42) denkleminde yerine yazılırsa

$$C \cdot R = \frac{1}{n-2}[\lambda + \frac{\kappa}{n-1}] Q(g, R) - (n-3)R \cdot R \tag{4. 43}$$

elde edilir. Buradan eğer $C \cdot R = 0$ ise

$$R \cdot R = [\frac{1}{(n-2)(n-3)}(\lambda + \frac{\kappa}{n-1}\varepsilon)]Q(g, R)$$

olup, (3. 14) gereği M pseudosimetriktir. ■

Teorem 4. 13. (M, g) ($n \geq 4$) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M manifoldu konharmonik Ricci-simetrik ve $\alpha, \beta : M \to \mathbf{R}$ için M nin Ricci eğriliği $S^2 = \alpha S + \beta g$ şartını sağlıyor ise M Ricci-pseudosimetriktir.

İspat. M konharmonik Ricci-simetrik olduğundan $\mathcal{K} \cdot S = 0$ dır. (4. 1) ve (4. 2) denklemlerinden

$$\mathcal{K}(X_h, X_i, X_j, X_k) = R(X_h, X_i, X_j, X_k)$$

$$-\frac{1}{n-2}\{g(X_l, X_i)S(X_k, X_j) - g(X_k, X_i)S(X_l, X_j) + g(X_k, X_j)S(X_i, X_l) - g(X_l, X_j)S(X_k, X_i)\}$$

yazılabilir. Böylece eşitliğin her iki tarafına S (Ricci eğrilik tensörü) etki ettirilirse

$$(\mathcal{K}\cdot S)(X_h, X_i; X_j, X_k) = (R \cdot S)(X_h, X_i, X_j, X_k) - \frac{1}{n-2}(W \cdot S)(X_h, X_i, X_j, X_k) = 0 \quad (4.\ 44)$$

elde edilir. Buradaki W tensörü

$$\widetilde{W}\ (X_h, X_i)X_j = S(X_i, X_j)X_h - g(X_h, X_j)\,\widetilde{S}X_i + g(X_i, X_j)\ \widetilde{S}X_h - S(X_h, X_j)X_i$$

ve

$$W(X_h, X_i, X_j, X_k) = g(\widetilde{W}\ (X_h, X_i)X_j, X_k)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece (3. 6) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}(W \cdot S)(X_h, X_i; X_j, X_k) &= -\,S(\widetilde{W}\ (X_j, X_k)X_h, X_i) - S(X_h,\ \widetilde{W}\ (X_j, X_k)X_i)\\ &= g(X_j, X_h)S(\widetilde{S}X_k, X_i) - g(X_h, X_k)S(\widetilde{S}X_j, X_i)\\ &\quad -g(X_i, X_k)S(\widetilde{S}X_j, X_h) + g(X_j, X_i)S(\widetilde{S}X_k, X_h)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Tanım 2.8 gereği $S(\widetilde{S}X_k, X_h) = S^2(X_k, X_h)$ olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan (3. 7) gereği

$$\begin{aligned}Q(g, S^2)(X_i, X_j; X_k, X_l) &= g(X_l, X_i)S^2(X_k, X_j) - g(X_k, X_i)\ S^2(X_l, X_j)\\ &\quad + g(X_k, X_j)S^2(X_i, X_l) - g(X_l, X_j)S^2(X_k, X_i)\end{aligned}$$

olduğundan

$$W \cdot S = Q(g, S^2)$$

bulunur. Böylece (4. 44) ifadesinden

$$\mathcal{K}\cdot S = R \cdot S - \frac{1}{n-2}Q(g, S^2) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\alpha, \beta : M \to \mathbf{R}$ için $S^2 = \alpha S + \beta g$ ise

$$R \cdot S = \frac{1}{n-2}\alpha Q(g, S)$$

sonucuna varılır. Böylece (3. 15) gereği M Ricci-pseudosimetriktir. ■

Teorem 4. 14. $M \subset \mathbf{E}_s^{n+1}$ $(n \geq 3)$ hiperyüzeyi verilsin. Eğer $H^3 = tr(H)H^2$ şartı sağlanır ise M hiperyüzeyi konharmonik semisimetriktir.

İspat. M hiperyüzeyi $H^3 = tr(H)H^2$ şartını sağladığından Yardımcı Teorem 3. 8 gereği $R \cdot S = 0$ dır. Teorem 4. 13 ün ispatında $\mathcal{K}\cdot S = R \cdot S - \frac{1}{n-2}Q(g, S^2)$ olduğu gösterilmişti. $R \cdot S = 0$ olduğundan $\mathcal{K}\cdot S = 0$ olduğunu göstermek için $Q(g, S^2) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$H^3 = tr(H)H^2$ olduğundan (3. 21) denklemi gereği

$$H^4 = tr(H)H^3 = tr(H)^2H^2 \tag{4. 45}$$

elde edilir. Tanım 2.8 den $S^2(X, Y) = S(\widetilde{S}X, Y)$ olduğundan (3. 25), (3. 26) ve (4. 45) denklemleri kullanılarak

$$S^2 = tr(H)^2H^2 - 2tr(H)H^3 + H^4$$

bulunur. Böylece $H^3 = tr(H)H^2$ ve (4. 45) eşitlikleri kullanılarak $S^2 = 0$ elde edilir. Böylece $Q(g, S^2) = 0$ olup $\mathcal{K} \cdot S = 0$ dır. ■

Örnek 4. 15. $n > 1$ ve $S^n = \{p \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\}$ n-boyutlu standart birim küre olsun.

$$M^{2n} = S_1^n \times S_2^n = \{(p, q) \in \mathbf{R}^{2n+2} = \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \|p\| = \|q\| = 1\}$$

çarpım manifoldunu düşünelim. M^{2n} üzerine kurulan orijin tepe noktalı C^{2n+1} hiperkonisinin parametrelendirmesi

$$C^{2n+1} = \{(tp, tq) \in \mathbf{R}^{2n+2} \mid \|p\| = \|q\| = 1,\ t \in \mathbf{R}\}$$

şeklinde tanımlanır (Abdalla ve Dillen (baskıda)). Aynı çalışmada $C^{2n+1} \subset \mathbf{R}^{2n+2}$ hiperkonisinin şekil operatörü matrisinin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2t}} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2t}} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2t}} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2t}} \end{bmatrix} \tag{4. 46}$$

biçiminde olduğu gösterilmiştir. Bu hiperkoni semisimetrik olmayıp $(R \cdot R \neq 0)$ Ricci-semisimetrik $(R \cdot S = 0)$ olan hiperyüzeylere verilen ilk örnektir.

Bu örnek yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4. 16. $C^5 \subset \mathbf{R}^6$ hiperkonisi konharmonik Ricci-simetriktir.

İspat. Örnek 4. 15 yardımıyla C^5 hiperkonisinin şekil operatörü matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2t}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2t}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2t}} \end{bmatrix} \tag{4. 47}$$

biçimindedir. Ayrıca T_pC^5 tanjant uzayının ortonormal vektörleri e_i, e_j olmak üzere bu vektörler tarafından gerilen düzlem kesitinin eğriliği $K_{ij} = K(e_i \wedge e_j)$ ile gösterilsin. Böylece $C^5 \subset \mathbf{R}^6$ bir hiperyüzey olduğundan (3. 24) Gauss denklemi $T_p\, C^5$ in e_i, e_j ortonormal vektörleri için

$$\tilde{R}\,(e_i, e_j) = Ae_i \wedge Ae_j = K_{ij}(ei \wedge e_j) \tag{4. 48}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Ayrıca (3. 2) denklemi kullanılarak (4. 48) denkleminden

$$\begin{aligned}\tilde{R}\,(e_1, e_2)e_1 &= (Ae_1 \wedge Ae_2)e_1 = K_{12}(e_1 \wedge e_2)e_1 \\ &= g(Ae_2, e_1)Ae_1 - g(Ae_1, e_1)Ae_2 = K_{12}(g(e_2, e_1)e_1 - g(e_1, e_1)e_2)\end{aligned} \tag{4. 49}$$

elde edilir. Diğer taraftan C^5 hiperkonisinin şekil operatörü matrisi (4. 47) formunda olduğundan

$$Ae_1 = 0e_1 \text{ ve } Ae_2 = \frac{1}{\sqrt{2t}}e_2 \quad (e_1 \neq 0)$$

yazılabilir. Bununla beraber e_1 ve e_2 ortonormal olduklarından

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1 \text{ ve } g(e_1, e_2) = 0$$

dır. Böylece son ifadeler (4. 49) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{R}\,(e_1, e_2)e_1 = 0e_2 = -K_{12}e_2$$

yani $K_{12} = 0$ bulunur. Benzer şekilde $K_{1j}e_1 = 0e_1$ olduğundan $2 \leq j \leq 5$ için

$$\tilde{R}\,(e_1, e_j)e_j = (Ae_1 \wedge Ae_j)e_j = K_{1j}(e_1 \wedge e_j)e_j$$

ifadesinden, (4. 47) şekil operatörü matrisi kullanılarak $K_{1j} = 0$ elde edilir. Benzer işlemler yapıldığında

$$\tilde{R}\,(e_2, e_3)e_3 = (Ae_2 \wedge Ae_3)e_3 = K_{23}(e_2 \wedge e_3)e_3$$

ifadesinden $K_{23} = \dfrac{1}{2t^2}$ ve

$$\tilde{R}\,(e_2, e_4)e_4 = (Ae_2 \wedge Ae_4)e_4 = K_{24}(e_2 \wedge e_4)e_4$$

ifadesinden de $K_{24} = -\frac{1}{2t^2}$ elde edilir. Aynı şekilde $K_{25} = K_{34} = K_{35} = -\frac{1}{2t^2}$ ve

$K_{45} = \frac{1}{2t^2}$ olduğunu görmek mümkündür. Diğer taraftan (2. 7) denkleminden

$$S(e_1, e_1) = \sum_{i=1}^{5} g(\widetilde{R}(e_i, e_1)e_1, e_i)$$

yazılabilir. $K_{1i} = 0$ $(1 \leq i \leq 5)$ olduğundan (4. 48) denklemi yardımıyla

$$S(e_1, e_1) = 0,\ S(e_2, e_2) = S(e_3, e_3) = S(e_4, e_4) = S(e_5, e_5) = -\frac{1}{2t^2} \tag{4.50}$$

ve $i \neq j$ için $S(e_i, e_j) = 0$ bulunur. Böylece Tanım 2.8 yardımıyla

$$\widetilde{S}e_1 = 0e_1,\ \widetilde{S}e_2 = -\frac{1}{2t^2}e_2,\ \widetilde{S}e_3 = -\frac{1}{2t^2}e_3,\ \widetilde{S}e_4 = -\frac{1}{2t^2}e_4,\ \widetilde{S}e_5 = -\frac{1}{2t^2}e_5 \tag{4. 51}$$

yazılabilir. Ayrıca Tanım 2.8 kullanılarak $1 \leq j \leq 5$ için

$$S^2(e_1, e_j) = S(\widetilde{S}e_1, e_j) = 0$$

ve $2 \leq i \leq 5$ için (4. 50) denklemleri yardımıyla

$$S^2(e_i, e_i) = S(\widetilde{S}e_i, e_i) = -\frac{1}{2t^2} S(e_i, e_i) = \frac{1}{4t^4} \tag{4. 52}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3. 7) denkleminde $T = S^2$ alınarak

$$Q(g, S^2)(e_i, e_j; e_i, e_j) = -S^2((e_i \wedge e_j)e_i, e_j) - S^2(e_i, (e_i \wedge e_j)e_j)$$

yazılabilir. Buradan (3. 2) denklemi yardımıyla e_i ve e_j T_pC^5 tanjant uzayının ortonormal vektörleri olduğundan

$$Q(g, S^2)(e_i, e_j; e_i, e_j) = S^2(e_j, e_j) - S^2(e_i, e_i) \tag{4. 53}$$

elde edilir. Böylece (4. 52) denklemi gereği $Q(g, S^2) = 0$ dır. Ayrıca Örnek 4. 15 gereği $C^5 \subset \mathbf{R}^6$ için $R \cdot S = 0$ dır. Bununla birlikte Teorem 4. 13 ün ispatından

$$\mathcal{K} \cdot S = R \cdot S - \frac{1}{n-2} Q(g, S^2)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece $C^5 \subset \mathbf{R}^6$ için $R \cdot S = 0$ ve $Q(g, S^2) = 0$ olduğundan $\mathcal{K} \cdot S = 0$ dır. ■

5. B. Y. CHEN EŞİTLİĞİNİ SAĞLAYAN PSEUDOSİMETRİK HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde Chen eşitliğini sağlayan pseudosimetrik hiperyüzeyler incelenecektir. Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir.

$M \subset \mathbf{E}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olmak üzere $e_1, \ldots, e_n$ T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazını ve K da M nin kesitsel eğriliğini göstersin. e_i ve e_j vektörleri tarafından gerilen düzlem kesitini $e_i \wedge e_j$ $(i \neq j)$ ile gösterelim. ρ, M hiperyüzeyinin skalar eğriliği olmak üzere her $p \in M$ noktası için M üzerinde bir

$$(\inf K)(p) := \inf \{K(\pi) : \pi \subset T_pM \text{ bir düzlemdir}\}$$

reel fonksiyonu tanımlansın. B. Y. Chen inf K, ρ ve ortalama eğrilik vektörünün boyu $\|\tilde{H}\|$ arasında aşağıdaki

$$(\inf K) \geq \frac{1}{2}\{\rho - \frac{n^2(n-2)}{n-1}\|\tilde{H}\|^2\} \tag{5. 1}$$

eşitsizliği Chen (1993) de ispatladı. Bu eşitsizlik daha sonraları literatürde B. Y. Chen Eşitsizliği olarak kullanılmaya başlanıldı (Arslan ve ark. (baskıda), Defever ve ark. (1997), Dillen ve ark. (1997)).

Teorem 5. 1. $M \subset \mathbf{E}^{n+d}$ n-boyutlu $(n \geq 2)$ bir altmanifold olsun $(m = n + p, p \geq 1)$. O zaman (5. 1) eşitsizliği sağlanır. (5. 1) denkleminde eşitlik sağlanır $\Leftrightarrow$ T_pM tanjant uzayının uygun bir $e_1, \ldots, e_n$ lokal ortonormal çatısı için $\xi_t = e_{n+t}$ $(t = 1, \ldots, p)$ (normal) kesitine göre M nin şekil operatörü matrisleri

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_t} = \begin{bmatrix} c_t & d_t & 0 & \cdots & 0 \\ d_t & -c_t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, (t > 1), \tag{5.2}$$

formundadır. Burada $\mu = a + b$ dir.

Açıkça eğer M altmanifoldunun boyutu 2 (yani $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ bir yüzey) ise Chen eşitliği aşikar olarak sağlanır.

$M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ Chen eşitliğini sağlayan bir hiperyüzey olsun. e_r, e_s T_pM tanjant uzayının ortonormal vektörleri olmak üzere bu vektörler tarafindan gerilen düzlem kesitinin eğriliği $K_{rs} = K(e_r \wedge e_s)$ ile gösterilsin. Şimdi daha sonraki hesaplamalarımızda kullanacağımız aşağıdaki önermeleri verelim.

Önerme 5. 2. $M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ B. Y. Chen eşitliğini sağlayan bir hiperyüzey olsun. i, j > 2 için

$$K_{12} = ab, \quad K_{1j} = a\mu, \quad K_{2j} = b\mu, \quad K_{ij} = \mu^2 \tag{5. 3}$$

dır. Ayrıca i, j, k nın üçü birbirinden farklı iken $\tilde{R}(e_i, e_j)e_k = 0$ dır.

İspat. $M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ bir hiperyüzey olduğundan (3. 24) Gauss denklemi T_pM nin e_i, e_j ortonormal vektörleri için

$$\tilde{R}(e_i, e_j) = Ae_i \wedge Ae_j = K_{ij}(ei \wedge e_j) \tag{5. 4}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Ayrıca (3. 2) denklemi yardımıyla (5. 4) denkleminden

$$\begin{aligned} \tilde{R}(e_1, e_2)e_1 &= (Ae_1 \wedge Ae_2)e_1 = K_{12}(e_1 \wedge e_2)e_1 \\ &= g(Ae_2, e_1)Ae_1 - g(Ae_1, e_1)Ae_2 = K_{12}(g(e_2, e_1)e_1 - g(e_1, e_1)e_2) \end{aligned} \tag{5. 5}$$

dır. M hiperyüzeyi B. Y. Chen eşitliğini sağladığından (5. 2) şekil operatörü matrisinden $A_\xi = A$ olduğu düşünülerek $Ae_1 = ae_1$ ve $Ae_2 = be_2$ yazılabilir. Bununla beraber e_1 ve e_2 ortonormal olduklarından

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1 \text{ ve } g(e_1, e_2) = 0$$

dır. Böylece bu ifadeler (5. 5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{R}(e_1, e_2)e_1 = -abe_2 = -K_{12}e_2$$

yani $K_{12} = ab$ elde edilir. Benzer şekilde $j > 2$ için

$$\tilde{R}(e_1, e_j)e_j = (Ae_1 \wedge Ae_j)e_j = K_{1j}(e_1 \wedge e_j)e_j$$

ifadesinden (5. 2) şekil operatörü matrisi kullanılarak $K_{1j}e_1 = a\mu e_1$ olduğundan $K_{1j} = a\mu$ elde edilir. Benzer işlemler yapıldığında

$$\tilde{R}(e_2, e_j)e_j = (Ae_2 \wedge Ae_j)e_j = K_{2j}(e_1 \wedge e_j)e_j$$

ifadesinden $K_{2j} = b\mu$ ve

$$\tilde{R}(e_i, e_j)e_j = (Ae_i \wedge Ae_j)e_j = K_{ij}(e_i \wedge e_j)e_j$$

ifadesinden de $K_{ij} = \mu^2$ elde edilir.

Ayrıca i, j, k nın üçü birbirinden farklı iken

$$\widetilde{R}(e_i, e_j)e_k = g(Ae_j, e_k)Ae_i - g(Ae_i, e_k)Ae_j = 0$$

olduğu açıktır. ■

Önerme 5. 3. $M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ B. Y. Chen eşitliğini sağlayan bir hiperyüzey olsun. Bu durumda

$$\left.\begin{aligned} S(e_1, e_1) &= (n-2)a\mu + ab \\ S(e_2, e_2) &= (n-2)b\mu + ab \\ S(e_3, e_3) = \ldots = S(e_n, e_n) &= (n-2)\mu^2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.\ 6)$$

ve $i \neq j$ ise $S(e_i, e_j) = 0$ dır.

İspat. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun. Böylece (2. 7) denkleminden

$$S(e_j, e_j) = \sum_{i=1}^{n} g(\widetilde{R}(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

yazılabilir. Ayrıca (5. 4) yardımıyla

$$S(e_j, e_j) = \sum_{i=1}^{n} g(K_{ji}(e_i \wedge e_j)e_j, e_i)$$

olup (3. 2) denklemi kullanılarak son denklem

$$S(e_j, e_j) = \sum_{i=1}^{n} K_{ji}$$

biçimine indirgenir. Ayrıca (2. 6) gereği

$$K_{ii} = 0 \text{ ve } K_{ij} = K_{ji}$$

olduğundan Önerme 5. 2 yardımıyla (5. 6) elde edilir. ■

Örnek 5. 4. Johan Deprez Eliptik Hiperkoniyi

$$C_\theta^m := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0 > 0 \text{ ve } (tg^2\theta)x_0^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2\},\ \theta \neq 0$$

biçiminde tanımlamıştır (Deprez 1986). Burada C_θ^m eliptik hiperkonisi

$$L_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} := \{t, \lambda_1 t, \ldots, \lambda_n t \mid t \in \mathbf{R}_0^+\}$$

doğruları ve

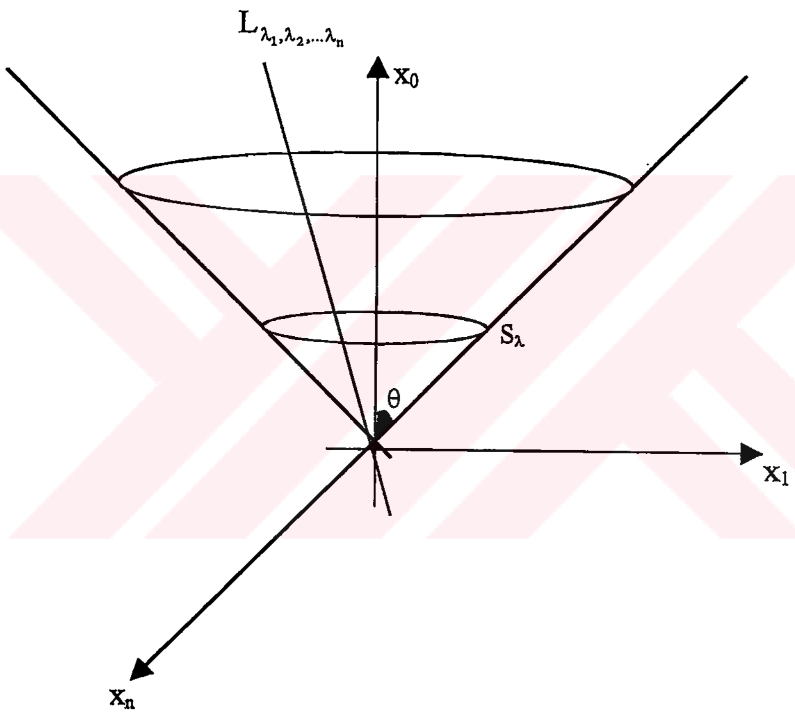
$$S_\lambda := \{(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \text{ ve } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda^2 tg^2\theta\}$$

hiperküreleri tarafından üretilir (Bakınız Şekil 5. 1).

Aynı yazar, aynı çalışmada C_θ^m eliptik hiperkonisinin şekil operatörü matrisinin

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\dfrac{1}{x_0} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\dfrac{1}{x_0} \end{bmatrix}$$

biçiminde olduğunu göstermiştir. Böylece C_θ^m nin B. Y. Chen eşitliğini sağladığı Teorem 5. 1 den açık olarak görülmektedir.



Şekil 5. 1

Dillen ve ark. (1997) de $M \subset E^{n+d}$ altmanifoldu için aşağıdaki sınıflandırma verilmiştir.

Teorem 5. 5. $M \subset E^{n+d}$ $(n \geq 3)$ Chen eşitliğini sağlayan bir altmanifold olsun. Bu takdirde M semisimetrik $(R \cdot R = 0)$ tir $\Leftrightarrow$

i) M minimal bir altmanifolddur veya

ii) $M \subset E^{n+1}$ bir eliptik hiperkonidir.

Teorem 5. 6. $M \subset E^{n+d}$ $(n \geq 3)$ Chen eşitliğini sağlayan bir altmanifold olsun. Bu takdirde M için semisimetri $(R \cdot R = 0)$ ve Ricci semisimetri $(R \cdot S = 0)$ birbirine denk olan kavramlardır (Dillen ve ark. (1997)).

Deszcz ve ark. (1999) çalışmasında aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 5. 7. $M \subset E^{n+1}$ $(n \geq 4)$ Chen eşitliğini sağlayan bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M pseudosimetrik Weyl tensörlü $(C \cdot C = L_C Q(g, C))$ bir hiperyüzeydir.

İlerleyen kısımlarda Teorem 5. 5 in hiperyüzeyler için bir genişletilmesi verilecektir. Önce aşağıdaki Yardımcı Teoremler ile buna hazırlık yapılacaktır.

Yardımcı Teorem 5. 8. $M \subset E^{n+1}$ $(n \geq 3)$ Chen eşitliğini sağlayan bir hiperyüzey olsun.

$$(\widetilde{R}(e_1, e_3) \cdot \widetilde{R})(e_2, e_3)e_1 = a\mu b^2 e_2 \tag{5. 7}$$

ve

$$(\widetilde{R}(e_2, e_3) \cdot \widetilde{R})(e_1, e_3)e_2 = b\mu a^2 e_1 \tag{5. 8}$$

dir.

İspat. $M \subset E^{n+1}$ hiperyüzey olduğundan T_pM tanjant uzayının e_i, e_j ortonormal vektörleri için (3. 6) denkleminde $R = \widetilde{R}$ ve $T = \widetilde{R}$ alınarak

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}(e_1, e_3) \cdot \widetilde{R})(e_2, e_3)e_1 &= \widetilde{R}(e_1, e_3)(\widetilde{R}(e_2, e_3)e_1) - \widetilde{R}(\widetilde{R}(e_1, e_3)e_2, e_3)e_1 \\ &\quad - \widetilde{R}(e_2, \widetilde{R}(e_1, e_3)e_3)e_1 - \widetilde{R}(e_2, e_3)(\widetilde{R}(e_1, e_3)e_1)\end{aligned} \tag{5. 9}$$

ve

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}(e_2, e_3) \cdot \widetilde{R})(e_1, e_3)e_2 &= \widetilde{R}(e_2, e_3)(\widetilde{R}(e_1, e_3)e_2) - \widetilde{R}(\widetilde{R}(e_2, e_3)e_1, e_3)e_2 \\ &\quad - \widetilde{R}(e_1, \widetilde{R}(e_2, e_3)e_3)e_2 - \widetilde{R}(e_1, e_3)(\widetilde{R}(e_2, e_3)e_2)\end{aligned} \tag{5. 10}$$

elde edilir. Ayrıca (5. 4) denklemi yardımıyla

$$\left.\begin{array}{lcl} \widetilde{R}(e_1, e_3)e_1 = -K_{13}e_3 & \text{ve} & \widetilde{R}(e_1, e_3)e_3 = K_{13}e_1 \\ \widetilde{R}(e_2, e_1)e_1 = K_{12}e_2 & \text{ve} & \widetilde{R}(e_1, e_3)e_1 = -K_{12}e_1 \\ \widetilde{R}(e_2, e_3)e_2 = -K_{23}e_3 & \text{ve} & \widetilde{R}(e_2, e_3)e_3 = K_{23}e_2 \end{array}\right\} \tag{5. 11}$$

bulunur. Buradan (5. 3) eşitlikleri (5. 11) de yerine konulursa

$$\left.\begin{array}{lcl} \widetilde{R}(e_1, e_3)e_1 = -a\mu e_3 & \text{ve} & \widetilde{R}(e_1, e_3)e_3 = a\mu e_1 \\ \widetilde{R}(e_2, e_1)e_1 = abe_2 & \text{ve} & \widetilde{R}(e_1, e_3)e_1 = -a\mu e_3 \\ \widetilde{R}(e_2, e_3)e_2 = -b\mu e_3 & \text{ve} & \widetilde{R}(e_2, e_3)e_3 = b\mu e_2 \end{array}\right\} \tag{5. 12}$$

bulunur. Böylece (5. 12) eşitlikleri (5. 9) ve (5. 10) denklemlerinde yerine konularak (5. 7) ve (5. 8) elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 5. 9. $M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ $(n \geq 3)$ Chen eşitliğini sağlayan bir hiperyüzey olsun.

$$Q(g, \tilde{R})(e_2, e_3, e_1; e_1, e_3) = b^2 e_2 \tag{5. 13}$$

ve

$$Q(g, \tilde{R})(e_1, e_3, e_2; e_2, e_3) = a^2 e_1 \tag{5. 14}$$

dir.

İspat. (3. 7) denkleminde $T = \tilde{R}$ alınarak

$$\begin{aligned} Q(g, \tilde{R})(e_2, e_3, e_1; e_1, e_3) &= (e_1 \wedge e_3)\tilde{R}(e_2, e_3)e_1 - \tilde{R}((e_1 \wedge e_3)e_2, e_3)e_1 \\ &\quad - \tilde{R}(e_2, (e_1 \wedge e_3)e_3)e_1 - \tilde{R}(e_2, e_3)((e_1 \wedge e_3)e_1) \end{aligned} \tag{5. 15}$$

ve

$$\begin{aligned} Q(g, \tilde{R})(e_2, e_3, e_2; e_2, e_3) &= (e_1 \wedge e_3)\tilde{R}(e_1, e_3)e_2 - \tilde{R}((e_2 \wedge e_3)e_1, e_3)e_2 \\ &\quad - \tilde{R}(e_1, (e_2 \wedge e_3)e_3)e_2 - \tilde{R}(e_1, e_3)((e_2 \wedge e_3)e_2) \end{aligned} \tag{5. 16}$$

elde edilir. Böylece (5. 12) eşitlikleri (5. 15) ve (5. 16) denklemlerinde yerine yazılırsa (5. 13) ve (5. 14) bulunur. ■

Teorem 5. 10. $M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ $(n \geq 3)$ Chen eşitliğini sağlayan bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M pseudosimetriktir $(R \cdot R = L_R Q(g, R)) \Leftrightarrow$

(i) $M = \mathbf{E}^n$ dir yada

(ii) $M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ bir eliptik hiperkonidir veya

(iii) $M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ bir minimal hiperyüzey dir veya

(iv) M şekil operatörü

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a \end{bmatrix} \tag{5. 17}$$

formunda olan bir hiperyüzeydir.

İspat. $M \subset E^{n+1}$ hiperyüzeyi pseudosimetrik olduğundan (3. 14) eşitliği yardımıyla

$$(\tilde{R}(e_1, e_3) \cdot \tilde{R})(e_2, e_3)e_1 = L_R Q(g, \tilde{R})(e_2, e_3, e_1; e_1, e_3) \qquad (5.\ 18)$$

ve

$$(\tilde{R}(e_2, e_3) \cdot \tilde{R})(e_1, e_3)e_2 = L_R Q(g, \tilde{R})(e_1, e_3, e_2; e_2, e_3) \qquad (5.\ 19)$$

yazılabilir. Ayrıca M hiperyüzeyi Chen eşitliğini sağladığı için Yardımcı Teorem 5. 8 ve Yardımcı Teorem 5. 9 gereği (5. 18) ve (5. 19) denklemleri

$$(a\mu - L_R)b^2 = 0 \qquad (5.\ 20)$$

ve

$$(b\mu - L_R)a^2 = 0 \qquad (5.\ 21)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilirler.

Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur.

1. Durum

$$\left.\begin{array}{ll} a = 0 \ , & a\mu - L_R \neq 0 \\ b = 0 \ , & b\mu - L_R \neq 0 \end{array}\right\}, \qquad (5.\ 22)$$

2. Durum

$$\left.\begin{array}{ll} a\mu - L_R = 0 \ , & b \neq 0 \\ a = 0 \ , & b\mu - L_R \neq 0 \end{array}\right\}, \qquad (5.\ 23)$$

3. Durum

$$\left.\begin{array}{ll} b\mu - L_R = 0 \ , & a \neq 0 \\ b = 0 \ , & a\mu - L_R \neq 0 \end{array}\right\}, \qquad (5.\ 24)$$

4. Durum

$$\left.\begin{array}{ll} a\mu - L_R = 0 \ , & a \neq 0 \\ b\mu - L_R = 0 \ , & b \neq 0 \end{array}\right\}. \qquad (5.\ 25)$$

Şimdi bu durumları sırasıyla inceleyelim.

1. Durum. $a = 0$, $b = 0$ ise $\mu = 0$ dır ve $M = E^n$ dir.

2. Durum. $a = 0$, $a\mu - L_R = 0$ ise $L_R = 0$ dır. Yani $R \cdot R = 0$ dır. Bu da M nin semisimetrik olduğunu gösterir. Eğer $a = 0$ ise $\mu = b$ dir ve böylece M bir eliptik hiperkonidir.

3. Durum. $b = 0$ ise $L_R = 0$ dır. Bu $R \cdot R = 0$ yani M nin semisimetrik olması demektir. $b = 0$ ise $\mu = a$ dır ve böylece M bir eliptik hiperkonidir.

4. Durum. $a\mu = L_R$ ve $b\mu = L_R$ ise $(a - b)\mu = 0$ dır. Böylece $a - b = 0$ veya $\mu = 0$ dır. Eğer $\mu = 0$ ise M minimaldir. Eğer $a - b = 0$ ise $a = b$ ve $\mu = 2a$ olup buradan M hiperyüzeyinin şekil operatörü matrisi (5. 17) formundadır. Buda teoremi ispatlar. ■

Sonuç 5. 11. $M \subset \mathbf{E}^{n+1}$ $(n \geq 4)$ Chen eşitliğini sağlayan bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde M için pseudosimetri, Ricci-pseudosimetri ve Weyl-pseudosimetri birbirine denk olan kavramlardır.

İspat. Teorem 3. 4 gereği $n \geq 4$ boyutlu hiperyüzeyler için Pseudosimetri ve Weyl pseudosimetrinin birbirine denk kavramlar olduğunu biliyoruz. Teorem 5. 6 gereği M hiperyüzeyi için semisimetri ve Ricci semisimetri birbirine denk kavramlar olduğundan Teorem 3. 2 ve Teorem 3. 3 gereği M için pseudosimetri ve Ricci pseudosimetri de birbirine denk olan kavramlardır. Bu da ispatı tamamlar. ■

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ SEMİPARALEL YÜZEYLER

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermekte olup $\mathbf{E}^{2+d}$ Öklid uzayındaki semiparalel yüzeyler için Deprez (1985) de verilen sınıflandırma teoreminin genelleştirilmeleri verilmiştir.

Lumiste (1999) ve Deprez (1985) de sırasıyla $N^{2+d}(c)$ sabit eğrilikli uzay formunda ve $\mathbf{E}^{2+d}$ Öklid uzayındaki semiparalel yüzeylerin sınıflandırması sırasıyla aşağıdaki teoremlerle yapılmıştır.

Teorem 6. 1. $M \subset N^{2+d}(c)$ bir yüzey olsun. Eğer M semiparalel ($\overline{R} \cdot h = 0$) ise

i) M bir total geodezik veya total umbilik yüzey veya

ii) $\overline{\nabla}$ van der Waerden-Bortolotti koneksiyonu flat olan bir yüzey (yani $\overline{R} = 0$) veya

iii) Ortalama eğrilik vektörü $\widetilde{H}$ ve Gauss eğriliği K arasında $\|\widetilde{H}\|^2 = 3K - c$ bağıntısı bulunan bir izotropik yüzeydir.

Teorem 6. 2. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ bir yüzey olsun. Bu takdirde M semiparaleldir $\Leftrightarrow$ (lokal olarak)

i) M yüzeyi S^2 küresine denktir veya

ii) M normal koneksiyonu flat olan bir lokal flat yüzeydir veya

iii) $M \subset \mathbf{E}^5 \subset \mathbf{E}^{2+d}$ izotropik bir yüzeydir ve $\|\widetilde{H}\|^2 = 3K$ eşitliğini sağlar.

Önerme 6. 3. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ bir yüzey olsun. Eğer M nin ξ_1 normal vektör alanı ortalama eğrilik vektörü $\widetilde{H}$ yönünde (yani $\widetilde{H} = \|\widetilde{H}\|\xi_1$) ise T_pM nin uygun seçilen bir $\{e_1, e_2\}$ bazına göre M nin şekil operatörü matrisleri

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_2} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_3} = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ b_3 & -a_3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Lumiste 1986).

Yardımcı Teorem 6. 4. $M \subset E^{2+d}$ bir yüzey olsun.

$$(\overline{R}(e_1,e_2)\cdot h)(e_1, e_1) = [\lambda-\mu][a_2b_2 + a_3b_3]\xi_1 + [-\lambda(\lambda-\mu)b_2 + 2\beta a_3 + 2Kb_2]\,\xi_2 + [-\lambda(\lambda-\mu)b_3 - 2\beta a_2 + 2Kb_3]\,\xi_3, \quad (6.\ 1)$$

$$(\overline{R}(e_1,e_2)\cdot h)(e_1, e_2) = [\lambda-\mu][\ b_2^2+b_3^2 - K]\xi_1 + 2[\beta b_3 - Ka_2]\,\xi_2 - 2\,[\beta b_2 + Ka_3]\,\xi_3 \quad (6.\ 2)$$

ve

$$(\overline{R}(e_1,e_2)\cdot h)(e_2, e_2) = -[\lambda-\mu][a_2b_2 + a_3b_3]\xi_1 + [-\mu(\lambda-\mu)b_2 - 2\beta a_3 - 2Kb_2]\,\xi_2 + [-\mu(\lambda-\mu)b_3 + 2\beta a_2 - 2Kb_3]\,\xi_3, \quad (6.\ 3)$$

dır. Burada K, $M \subset E^{2+d}$ nin Gauss eğriliği ve $\beta = a_2b_3 - a_3b_2$ dir.

İspat. $M \subset E^{2+d}$ yüzeyinin T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$olsun. Böylece (2. 15) Gauss denkleminden

$$\widetilde{R}(e_1, e_2) = K(e_1 \wedge e_2) \quad (6.\ 4)$$

yazılabilir. Burada K Gauss eğriliği olup Önerme 6. 3 den

$$K = \lambda\mu - a_2^2 - b_2^2 - a_3^2 - b_3^2 \quad (6.\ 5)$$

bulunur. Tanım 2. 26 gereği

$$(\overline{R}(e_1,e_2)\cdot h)(e_1, e_1) = R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_1, e_1) - 2h(\widetilde{R}(e_1,e_2)e_1, e_2), \quad (6.\ 6)$$

$$(\overline{R}(e_1,e_2)\cdot h)(e_1, e_2) = R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_1, e_2) - h(\widetilde{R}(e_1,e_2)e_1, e_2) - h(e_1, \widetilde{R}(e_1,e_2)e_2) \quad (6.\ 7)$$

ve

$$(\overline{R}(e_1,e_2)\cdot h)(e_2, e_2) = R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_2, e_2) - 2h(\widetilde{R}(e_1,e_2)e_2, e_2), \quad (6.\ 8)$$

yazılabilir. Diğer taraftan her $i \in \{2, 3\}$ için (2. 16) Ricci denkleminden

$$\langle R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_1, \xi_i\rangle = -(\lambda-\mu)b_i \quad (6.\ 9)$$

ve

$$\langle R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_2, \xi_3\rangle = -2(a_2b_3 - a_3b_2) \quad (6.\ 10)$$

elde edilir. Böylece (6. 9) ve (6. 10) denklemleri yardımıyla

$$R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_1 = -(\lambda-\mu)b_2\xi_2 - (\lambda-\mu)b_3\xi_3, \quad (6.\ 11)$$

$$R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_2 = (\lambda-\mu)b_2\xi_1 - 2\beta\xi_3 \quad (6.\ 12)$$

ve

$$R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_3 = (\lambda-\mu)b_3\xi_1 + 2\beta\xi_2 \quad (6.\ 13)$$

bulunur. Önerme 6. 3 deki şekil operatörü matrisleri kullanılarak

$$h(e_1, e_1) = \lambda\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3, \quad (6.\ 14)$$

$$h(e_1, e_2) = b_2\xi_2 + b_3\xi_3 \qquad (6.\ 15)$$

ve

$$h(e_2, e_2) = \mu\xi_1 - a_2\xi_2 - a_3\xi_3, \qquad (6.\ 16)$$

elde edilir. Böylece (6. 14) – (6. 16) denklemlerinden

$$R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_1, e_1) = \lambda R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_1 + a_2R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_2 + a_3R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_3,$$

$$R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_1, e_2) = b_2R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_2 + b_3R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_3,$$

$$R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_2, e_2) = \mu R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_1 - a_2R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_2 - a_3R^{\perp}(e_1, e_2)\xi_3$$

olup, buradan (6. 11)-(6.13) denklemleri yardımıyla

$$R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_1, e_1) = [\lambda-\mu][a_2b_2 + a_3b_3]\xi_1 + [-\lambda(\lambda-\mu)b_2 + 2\beta a_3]\ \xi_2$$
$$+ [-\lambda(\lambda-\mu)b_3 + 2\beta a_2]\ \xi_3, \qquad (6.\ 17)$$

$$R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_1, e_2) = [\lambda-\mu][b_2^2+b_3^2]\xi_1 + 2\beta b_3\ \xi_2 - 2\beta b_2\xi_3 \qquad (6.\ 18)$$

ve

$$R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_2, e_2) = -[\lambda-\mu][a_2b_2 + a_3b_3]\xi_1 + [-\mu(\lambda-\mu)b_2 - 2\beta a_3]\ \xi_2$$
$$+ [-\mu(\lambda-\mu)b_3 + 2\beta a_2]\ \xi_3 \qquad (6.\ 19)$$

bulunur. Ayrıca $\{e_1, e_2\}$ ortonormal olduğundan (3. 2) ve (6. 4) denklemlerinden

$$\tilde{R}(e_1, e_2)e_1 = -Ke_2 \quad \text{ve} \quad \tilde{R}(e_1, e_2)e_2 = Ke_1 \qquad (6.\ 20)$$

yazılabilir. Böylece (6. 17)-(6. 20) denklemleri sırasıyla (6. 6), (6. 7) ve (6. 8) de yerine yazılırsa sırasıyla (6. 1), (6. 2) ve (6. 3) elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 6. 5. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ bir yüzey olsun.

$$Q(g, h)(e_1, e_1; e_1, e_2) = 2(b_2\xi_2 + b_3\xi_3), \qquad (6.\ 21)$$

$$Q(g, h)(e_1, e_2; e_1, e_2) = -(\lambda-\mu)\xi_1 - 2a_2\xi_2 - 2a_3\xi_3 \qquad (6.\ 22)$$

ve

$$Q(g, h)(e_2, e_2; e_1, e_2) = -2(b_2\xi_2 + b_3\xi_3) \qquad (6.\ 23)$$

dır.

İspat. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ yüzeyinin T_pM tanjant uzayının ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2\}$ olsun. Böylece (3. 7) denkleminde $T = h$ alınıp, ikinci temel form h nın simetri özeliği kullanılırsa

$$Q(g, h)(e_1, e_1; e_1, e_2) = -2h((e_1 \wedge e_2)e_1, e_1)$$

yazılabilir. Buradan (3. 2) denklemi yardımıyla

$$Q(g, h)(e_1, e_1; e_1, e_2) = 2h(e_1, e_2) \qquad (6.\ 24)$$

elde edilir. Böylece (6. 15) denklemi (6. 24) de yerine yazılırsa (6. 21) elde edilir.

Benzer şekilde

$$Q(g, h)(e_1, e_2; e_1, e_2) = - h((e_1 \wedge e_2)e_1, e_2) - h(e_1, (e_1 \wedge e_2)e_2)$$

olup (3. 2), (6. 14) ve (6. 16) denklemleri kullanılarak (6. 22) elde edilir.

Aynı işlemler tekrarlanırsa

$$Q(g, h)(e_2, e_2; e_1, e_2) = -2h((e_1 \wedge e_2)e_2, e_2)$$

olup buradan (3. 2) ve (6. 15) denklemleri yardımıyla (6. 23) elde edilir. ■

Tanım 6. 6. M (n + d)–boyutlu $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer M nin her noktasında $\overline{R} \cdot h$ ve Q(g, h) tensörleri lineer bağımlı ise M ye *h tensörüne göre pseudosimetriktir* denir. Böylece M nin h tensörüne göre pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_h = \{p \in M : p \in M \text{ de M total umbilik değildir}\}$$

kümesi üzerinde $\overline{R} \cdot h = L_h Q(g, h)$ olmasıdır. Burada L_h, U_h üzerinde bir fonksiyondur.

Yardımcı Teorem 6. 7. $M \subset E^{2+d}$ yüzeyi $\overline{R} \cdot h = L_h Q(g, h)$ şartını sağlar (yani M yüzeyi h tensörüne göre pseudosimetrik) ise M nin $\widetilde{H}$ ortalama eğrilik vektörü için $R^{\perp}\widetilde{H} = 0$ dır.

İspat. M nin herhangi bir p noktasındaki normal vektörü ξ olsun. Ayrıca T_pM nin $A_\xi e_i = \lambda_i e_i$ $(1 \leq i \leq 2)$ şartını sağlayan bir $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı için

$$\overline{R}(e_1,e_2)\cdot h(e_i, e_i) = L_h Q(g, h)(e_i, e_i; e_1,e_2)$$

ise (2. 17), (6. 1), (3. 7) ve (3. 2) denklemlerinden

$$R^{\perp}(e_1,e_2)h(e_i,e_i) - 2h(\widetilde{R}(e_1, e_2)e_i, e_i) = L_h(e_1 \wedge e_2)(e_i, e_i)$$

yani

$$R^{\perp}(e_1,e_2)h(e_i,e_i) = 2h(\widetilde{R}(e_1, e_2)e_i, e_i) - 2L_h g(e_2, e_i)h(e_1,e_i) + 2 L_h g(e_1, e_i)h(e_2,e_i) \qquad (6. 25)$$

yazılabilir. Böylece son eşitliğin her iki tarafının ξ ile iç çarpımı alınarak

$$g(R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H}, \xi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} g(R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_i, e_i), \xi) \qquad (6. 26)$$

elde edilir. Ayrıca (6. 25) eşitliği (6. 26) da yerine yazılırsa,

$$g(R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H}, \xi) = \sum_{i=1}^{2} g(h(\widetilde{R}(e_1, e_2)e_i, e_i), \xi)$$

$$- L_h g(e_2, e_i)g(h(e_1,e_i),\xi) + L_h g(e_1, e_i)g(h(e_2,e_i),\xi) \qquad (6. 27)$$

elde edilir. Bununla beraber

$$g(A_\xi X, Y) = g(h(X, Y), \xi)$$

eşitliği yardımıyla (6. 27) denklemi

$$g(R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H}, \xi) = \sum_{i=1}^{2} g((\widetilde{R}(e_1,e_2)e_i, A_\xi e_i)$$

$$- L_h g(e_2, e_i)g(e_1, A_\xi e_i) + L_h g(e_1, e_i)\, g(e_2, A_\xi e_i)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Böylece

$$g(R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H}, \xi) = g(\widetilde{R}(e_1,e_2)e_1, A_\xi e_1) + g(\widetilde{R}(e_1,e_2)e_2, A_\xi e_2)$$

$$- L_h g(e_2, e_1)g(e_1, A_\xi e_1) \ - L_h g(e_2, e_2)g(e_1, A_\xi e_2)$$

$$+ L_h g(e_1, e_1)\, g(e_2, A_\xi e_1) + L_h g(e_1, e_2)\, g(e_2, A_\xi e_2)$$

olup, $A_\xi e_i = \lambda_i e_i$ eşitliği kullanılarak $g(R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H}, \xi) = 0$ elde edilir. Ayrıca ξ keyfi bir normal vektör olduğundan $R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H} = 0$ bulunur. ■

Teorem 6. 8. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ yüzeyi $\overline{R} \cdot h = L_h Q(g, h)$ şartını sağlayan (yani M yüzeyi h tensörüne göre pseudosimetrik) bir yüzey olsun. O zaman (lokal olarak) ya

i) M bir semiparalel yüzeydir veya

ii) Gauss eğriliği $K = L_h$ olan bir yüzey veya

iii) Ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği arasında $\|\widetilde{H}\|^2 = 3K - 2L_h$ bağıntısı bulunan izotropik bir $M \subset \mathbf{E}^5 \subset \mathbf{E}^{2+d}$ yüzeyidir.

İspat. Eğer $\overline{R} \cdot h = 0$ ise açık olarak $\overline{R} \cdot h = L_h Q(g, h)$ sağlanır.

Şimdi $\overline{R} \cdot h \neq 0$ ve $\overline{R}(e_1,e_2) \cdot h = L_h Q(g, h)$ olduğunu kabul edelim. Böylece (6. 1) ve (6. 21) denklemleri yardımıyla

$$[\lambda-\mu][a_2b_2 + a_3b_3]\xi_1 + [-\lambda(\lambda-\mu)b_2 + 2\beta a_3 + 2b_2(K - L_h)]\,\xi_2$$
$$+ [-\lambda(\lambda-\mu)b_3 - 2\beta a_2 + 2b_3(K - L_h)]\xi_3 = 0, \qquad (6.\ 28)$$

(6. 2) ve (6. 22) denklemleri yardımıyla

$$[\lambda-\mu][b_2^2 + b_3^2 - K + L_h]\xi_1 + 2[\beta b_3 - (K - L_h)a_2]\,\xi_2$$
$$-2[\beta b_2 + (K - L_h)a_3]\,\xi_3 = 0 \qquad (6.\ 29)$$

ve (6. 3) ve (6. 23) denklemleri yardımıyla da

$$-[\lambda-\mu][a_2b_2 + a_3b_3]\xi_1 + [-\mu(\lambda-\mu)b_2 - 2\beta a_3 - 2b_2(K - L_h)]\,\xi_2$$
$$+ [-\mu(\lambda-\mu)b_3 + 2\beta a_2 - 2b_3(K - L_h)]\,\xi_3 = 0 \qquad (6.\ 30)$$

elde edilir.

Ayrıca ξ_1, ξ_2 ve ξ_3 normal vektörleri lineer bağımsız olduğundan (6. 30) eşitliğinde katsayılar sıfıra eşit olacaktır. Yani

$$[\lambda-\mu][a_2b_2 + a_3b_3] = 0, \qquad (6.31)$$

$$-\lambda(\lambda-\mu)b_2 + 2\beta a_3 + 2b_2(K- L_h) = 0, \qquad (6.32)$$

$$-\lambda(\lambda-\mu)b_3 - 2\beta a_2 + 2b_3(K - L_h) = 0, \qquad (6.33)$$

$$[\lambda-\mu][b_2^2+b_3^2 - K + L_h] = 0, \qquad (6.34)$$

$$\beta b_3 - (K - L_h)a_2 = 0, \qquad (6.35)$$

$$\beta b_2 + (K - L_h)a_3 = 0, \qquad (6.36)$$

$$-\mu(\lambda-\mu)b_2 - 2\beta a_3 - 2b_2(K - L_h) = 0 \qquad (6.37)$$

ve

$$-\mu(\lambda-\mu)b_3 + 2\beta a_2 - 2b_3(K - L_h) = 0 \qquad (6.38)$$

bulunur. Ayrıca ξ_1 ortalama eğrilik vektörü $\widetilde{H}$ yönünde olduğundan Yardımcı Teorem 6. 7 gereği $R^{\perp}(e_1,e_2)\xi_1 = 0$ dır. Böylece (6. 11) denkleminden

$$(\lambda-\mu)b_2 = 0 \text{ ve } (\lambda-\mu)b_3 = 0 \qquad (6.39)$$

bulunur. Böylece iki durum söz konusudur; ya $b_2 = b_3 = 0$ dır yada $\lambda = \mu$ dür.

I. Durum. ($b_2 = b_3 = 0$ hali)

$\lambda \neq \mu$ olduğundan $b_2 = b_3 = 0$ olup, Önerme 6. 3 deki şekil operatörü matrisleri diyagonalleştirilebilir olduğundan $R^{\perp} = 0$ yani M nin normal koneksiyonu flat dir ve (6. 34) denkleminden de $K = L_h$ dir.

II. Durum. ($\lambda = \mu$ hali)

$\lambda = \mu$ olsun. T_pM tanjant uzayının $A_{\xi_1}\widetilde{e}_1 = \lambda_1\widetilde{e}_1$ ve $A_{\xi_2}\widetilde{e}_2 = \lambda_2\widetilde{e}_2$ olacak biçimde bir $\{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2\}$ bazını seçelim. Böylece Önerme 6. 3 den $b_2 = 0$ ve $\beta = \widetilde{a}_2 b_3$ olup (6. 31)-(6. 38) denklemleri

$$\widetilde{a}_2 b_3 a_3 = 0, \qquad (6.40)$$

$$[-\widetilde{a}_2^2 + (K - L_h)]b_3 = 0, \qquad (6.41)$$

$$[b_3^2 - (K - L_h)]\widetilde{a}_2 = 0, \qquad (6.42)$$

$$(K - L_h)a_3 = 0, \qquad (6.43)$$

haline dönüşür. Bu eşitlikler incelendiğinde aşağıdaki alt durumlar ortaya çıkar.

a) $b_3 = \tilde{a}_2 = a_3 = 0$ olduğunu göz önüne alalım. O zaman Önerme 6. 3 gereği

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup M p noktasında total umbiliktir ve S^2 küresine denktir. Fakat kabulümüz gereği $\overline{R} \cdot h \neq 0$ olduğundan M yüzeyi S^2 küresine denk olamaz. Böylece bu durum söz konusu değildir.

b) $b_3 = 0$, $\tilde{a}_2 \neq 0$ ise Önerme 6. 3 gereği

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_2} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_2 & 0 \\ 0 & -\tilde{a}_2 \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_3} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_2 \end{bmatrix}$$

olup şekil operatörü matrisleri diyagonalleştirilebilir olduğundan p noktasında $R^{\perp} = 0$ dır yani M nin $p \in M$ de normal koneksiyonu flat dir ve (6. 42) denkleminden p noktasında $K = L_h$ dir.

c) Şimdi $b_3 \neq 0$ olduğunu düşünelim. Eğer $\tilde{a}_2 = 0$ ise (6. 41) denkleminden $K = L_h$ bulunur. Eğer $\tilde{a}_2 \neq 0$ ise (6. 40) denkleminden $a_3 = 0$ dır. Böylece Önerme 6. 3 gereği

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_2} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_2 & 0 \\ 0 & -\tilde{a}_2 \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_3} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$K = \lambda^2 - 2\tilde{a}_2^2$$

yani

$$\tilde{a}_2^2 = \frac{\lambda^2 - K}{2} \tag{6. 44}$$

dir. Böylece (6. 44) denklemi (6. 41) de yerine yazılırsa

$$3K - 2L_h = \lambda^2 \tag{6. 45}$$

elde edilir. Bu durumda M nin birinci normal uzayı $N_p^1(M)$ nin boyutu $\dim(N_p^1(M)) = 3$ dir. Bununla birlikte M nin ortalama eğrilik vektörü $\tilde{H} = \frac{1}{2}(h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2))$ olduğundan $\tilde{H} = \lambda\xi_1$ dir. Böylece

$$\|\tilde{H}\| = \lambda \tag{6. 46}$$

olup, bu $\|h(X,X)\|$ in T_pM deki birim X vektörünün seçiminden bağımsız olması demek yani M nin izotropik bir yüzey olması demektir. Böylece (6. 46) eşitliği (6. 45) denkleminde yerine yazılırsa

$$\|\tilde{H}\|^2 = 3K - 2L_h$$

elde edilir. ■

Tanım 6. 9. M (n + d)–boyutlu $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun ve A_ξ M nin ξ normal vektör alanına göre şekil operatörünü göstersin. $X_1, ..., X_n, X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere (M, g) üzerinde (0, k)-tipindeki (k ≥ 1) bir T tensör alanı için

$$\overline{Q}(A_\xi^k, T)(X_1, ..., X_n; X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} T(X_1, ..., (X \wedge_{A_\xi^k} Y)X_i, ..., X_n) \qquad (6.\ 47)$$

tensörünü tanımlayalım. Burada

$$(X \wedge_{A_\xi^k} Y)X_i = g(A_\xi^k Y, X_i)X - g(A_\xi^k X, X_i)Y \qquad (6.\ 48)$$

ve

$$A_\xi^k X = \underbrace{A_\xi(A_\xi ... A_\xi))}_{k \text{ defa}}(X) \qquad (6.\ 48)^*$$

biçiminde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 6. 10. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ bir yüzey olsun.

$$\overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)(e_1, e_1; e_1, e_2) = 2\lambda(\lambda + \mu)(b_2\xi_2 + b_3\xi_3), \qquad (6.\ 49)$$

$$\overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)(e_1, e_2; e_1, e_2) = -(\lambda + \mu)^2(a_2\xi_2 + a_3\xi_3) \qquad (6.\ 50)$$

ve

$$\overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)(e_2, e_2; e_1, e_2) = -2\mu(\lambda + \mu)(b_2\xi_2 + b_3\xi_3) \qquad (6.\ 51)$$

dir.

İspat. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ yüzeyinin tanjant uzayı T_pM olmak üzere $\{e_1, e_2\}$ T_pM nin bir ortonormal bazı olsun. Böylece (6. 47) denkleminde T = h, $\xi = \tilde{H}$ ve k = 1 alınırsa, h simetrik olduğundan

$$\overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)(e_1, e_1; e_1, e_2) = -2h((e_1 \wedge_{A_{\tilde{H}}} e_2)e_1, e_1)$$

yazılabilir. Buradan (6. 48) denklemi yardımıyla yukarıdaki denklem

$$\overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)(e_1, e_1; e_1, e_2) = 2g(A_{\tilde{H}} e_1, e_1)h(e_1, e_2) \qquad (6.\ 52)$$

$$\overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)(e_1, e_1; e_1, e_2) = 2g(A_{\tilde{H}}\, e_1, e_1)h(e_1, e_2) \tag{6. 52}$$

biçiminde yazılır. Önerme 6. 3 gereği $A_{\tilde{H}}\, e_1 = (\lambda + \mu)\lambda e_1$ olduğundan bu ifade ve (6. 15) denklemi (6. 52) de yerine yazılırsa (6. 49) elde edilir.

Benzer şekilde

$$\overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)(e_1, e_2; e_1, e_2) = - h((e_1 \wedge_{A_{\tilde{H}}} e_2)e_1, e_2) - h(e_1, (e_1 \wedge_{A_{\tilde{H}}} e_2)e_2)$$

dir. Önerme 6. 3 gereği $A_{\tilde{H}}\, e_2 = (\lambda + \mu)\mu e_2$ olduğu kullanılırsa (6. 48), (6. 14) ve (6. 16) denklemleri yardımıyla (6. 50) elde edilir.

Aynı işlemler tekrarlanırsa

$$\overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)(e_2, e_2; e_1, e_2) = -2h((e_1 \wedge_{A_{\tilde{H}}} e_2)e_2, e_2)$$

olup buradan (6. 48) ve (6. 15) denklemleri yardımıyla (6. 51) elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 6. 11. $M \subset E^{2+d}$ yüzeyi $\overline{R} \cdot h = L_{A_{\tilde{H}}} \overline{Q}(A_{\tilde{H}}, h)$ şartını sağlıyorsa M nin $\tilde{H}$ ortalama eğrilik vektörü için $R^{\perp}\tilde{H} = 0$ dır.

İspat. M nin herhangi bir p noktasındaki normal vektörü ξ olsun. Ayrıca T_pM nin $A_\xi e_i = \lambda_i e_i$ $(1 \leq i \leq 2)$ şartını sağlayan bir $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı için

$$\overline{R}(e_1,e_2) \cdot h(e_i, e_i) = L_{A_{\tilde{H}}} \overline{Q}(A^k_{\tilde{H}}, h)(e_i, e_i; e_1, e_2)$$

ise

$$R^{\perp}(e_1,e_2)h(e_i,e_i) - 2h(\tilde{R}(e_1, e_2)e_i, e_i) = L_{A_{\tilde{H}}}(e_1 \wedge_{A^k_{\tilde{H}}} e_2)(e_i, e_i)$$

yada

$$R^{\perp}(e_1,e_2)h(e_i,e_i) = 2h(R^{\perp}(e_1,e_2)e_i, e_i)$$
$$-2L_{A_{\tilde{H}}}\, g(A^k_{\tilde{H}}\, e_2, e_i)h(e_1,e_i) + 2L_{A_{\tilde{H}}}\, g(A^k_{\tilde{H}}\, e_1, e_i)h(e_2,e_i) \tag{6. 53}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece her iki tarafın ξ ile iç çarpımı alınarak

$$g(R^{\perp}(e_1,e_2)\tilde{H}, \xi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} g(R^{\perp}(e_1, e_2)h(e_i, e_i), \xi) \tag{6. 54}$$

elde edilir. Ayrıca (6. 53) eşitliği (6. 54) de yerine yazılırsa,

$$g(R^{\perp}(e_1,e_2)\tilde{H}, \xi) = \sum_{i=1}^{2} g(h(\tilde{R}(e_1, e_2)e_i, e_i), \xi)$$
$$- L_{A_{\tilde{H}}}\, g(A^k_{\tilde{H}}\, e_2, e_i)g(h(e_1,e_i),\xi) + L_{A_{\tilde{H}}}\, g(A^k_{\tilde{H}}\, e_1, e_i)g(h(e_2,e_i),\xi) \tag{6. 55}$$

elde edilir. Bununla beraber

$$g(A_\xi X, Y) = g(h(X, Y), \xi)$$

eşitliği yardımıyla, (6. 55) denklemi

$$g(R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H}, \xi) = \sum_{i=1}^{2} g((\widetilde{R}(e_1, e_2)e_i, A_\xi e_i)$$

$$- L_{A_{\widetilde{H}}} g(A^k_{\widetilde{H}} e_2, e_i)g(e_1, A_\xi e_i) + L_{A_{\widetilde{H}}} g(A^k_{\widetilde{H}} e_1, e_i)\, g(e_2, A_\xi e_i)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Böylece

$$g(R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H}, \xi) = g(\widetilde{R}(e_1, e_2)e_1, A_\xi e_1) + g(\widetilde{R}(e_1, e_2)e_2, A_\xi e_2)$$

$$- L_{A_{\widetilde{H}}}\, g(A^k_{\widetilde{H}} e_2, e_1)g(e_1, A_\xi e_1) - L_{A_{\widetilde{H}}}\, g(A^k_{\widetilde{H}} e_2, e_2)g(e_1, A_\xi e_2)$$

$$+ L_{A_{\widetilde{H}}} g(A^k_{\widetilde{H}} e_1, e_1)\, g(e_2, A_\xi e_1) + L_{A_{\widetilde{H}}} g(A^k_{\widetilde{H}} e_1, e_2)\, g(e_2, A_\xi e_2)$$

olup Önerme 6. 3 den

$$A^k_{\widetilde{H}} e_1 = (\lambda + \mu)\lambda^k e_1, \quad A^k_{\widetilde{H}} e_2 = (\lambda + \mu)\mu^k e_2$$

eşitlikleri ve

$$A_\xi e_i = \lambda_i e_i$$

kullanılırsa

$$g(R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H}, \xi) = \lambda_1\, g(\widetilde{R}\,(e_1,e_2)e_1, e_1) + \lambda_2 g(\widetilde{R}\,(e_1,e_2)e_2, e_2)$$

$$- L_{A_{\widetilde{H}}} (\lambda + \mu)\mu^k[\, \lambda_1 g(e_2, e_1)g(e_1, e_1) + \lambda_2 g(e_2, e_2)g(e_1, e_2)]$$

$$+ L_{A_{\widetilde{H}}} (\lambda + \mu)\lambda^k[\lambda_1 g(e_1, e_1)\, g(e_2, e_1) + \lambda_2 g(e_1, e_2)\, g(e_2, e_2)]$$

yazılabilir. Böylece $\{e_1, e_2\}$ vektörleri T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazı olduğundan $g(R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H}, \xi) = 0$ dır. Ayrıca ξ keyfi bir normal vektör olduğundan $R^{\perp}(e_1,e_2)\widetilde{H} = 0$ bulunur. ■

Teorem 6. 12. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ yüzeyi $\overline{R} \cdot h = L_{A_{\widetilde{H}}}\, \overline{Q}\,(A_{\widetilde{H}}, h)$ şartını sağlar ise (lokal olarak) ya

i) M semiparalel dir veya

ii) $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ normal koneksiyonu flat ve Gauss eğriliği $K = 2\|\widetilde{H}\|^2 L_{A_{\widetilde{H}}}$ olan bir yüzeydir veya

iii) $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ Gauss eğriliği ile ortalama eğriliği arasında $3K = (1 + 4L_{A_{\widetilde{H}}})\|\widetilde{H}\|^2$ bağıntısı olan bir yüzeydir.

İspat. Eğer $\overline{R}\cdot h = 0$ ise açık olarak $\overline{R}\cdot h = L_{A_{\widetilde{H}}}\overline{Q}(A_{\widetilde{H}}, h)$ sağlanır.

Şimdi $\overline{R}\cdot h \neq 0$ olduğunu kabul edelim. M yüzeyi $\overline{R}\cdot h = L_{A_{\widetilde{H}}}\overline{Q}(A_{\widetilde{H}}, h)$ eğrilik şartını sağlandığından Yardımcı Teorem 6. 4 ve Yardımcı Teorem 6. 10 yardımıyla

$$[\lambda-\mu][a_2b_2 + a_3b_3] = 0, \tag{6. 56}$$

$$-\lambda(\lambda-\mu)b_2 + 2\beta a_3 + 2b_2[K - L_{A_{\widetilde{H}}}\lambda(\lambda+\mu)] = 0, \tag{6. 57}$$

$$-\lambda(\lambda-\mu)b_3 - 2\beta a_2 + 2b_3[K - L_{A_{\widetilde{H}}}\lambda(\lambda+\mu)] = 0, \tag{6. 58}$$

$$[\lambda-\mu][b_2^2 + b_3^2 - K] = 0, \tag{6. 59}$$

$$2\beta b_3 - (2K - L_{A_{\widetilde{H}}}(\lambda+\mu)^2)a_2 = 0, \tag{6. 60}$$

$$-2\beta b_2 - (2K - (\lambda+\mu)^2)a_3 = 0, \tag{6. 61}$$

$$-\mu(\lambda-\mu)b_2 - 2\beta a_3 - 2b_2(K - L_{A_{\widetilde{H}}}\mu(\lambda+\mu)) = 0 \tag{6. 62}$$

ve

$$-\mu(\lambda-\mu)b_3 + 2\beta a_2 - 2b_3(K - L_{A_{\widetilde{H}}}\mu(\lambda+\mu)) = 0 \tag{6. 63}$$

yazılabilir. Ayrıca ξ_1 vektörü $\widetilde{H}$ yönünde olduğundan Yardımcı Teorem 6. 11 gereği $R^{\perp}(e_1,e_2)\xi_1 = 0$ dır. Böylece (6. 11) denklemi gereği

$$(\lambda-\mu)b_2 = 0 \text{ ve } (\lambda-\mu)b_3 = 0 \tag{6. 64}$$

dır. O halde iki durum söz konusudur: ya $b_2 = b_3 = 0$ dır yada $\lambda = \mu$ dür.

I. Durum. $b_2 = b_3 = 0$ olsun. Bu takdirde Önerme 6. 3 deki şekil operatörü matrisleri köşegenleştirilebilir olduğundan $R^{\perp} = 0$ (yani M nin normal koneksiyonu flat dir) ve (6. 59) denkleminden $K = 0$ bulunur. Bu ise M nin semiparallel olmasını gerektirir. Fakat kabulümüz gereği M semiparalel olmadığından bu durum söz konusu değildir.

II. Durum. $\lambda = \mu$ olsun. T_pM tanjant uzayının bir $\{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2\}$ ortonormal bazını $A_{\xi_1}\widetilde{e}_1 = \lambda_1\widetilde{e}_1$ ve $A_{\xi_2}\widetilde{e}_2 = \lambda_2\widetilde{e}_2$ olacak biçimde seçelim. Böylece Önerme 6. 3 yardımıyla $b_2 = 0$ ve $\beta = \widetilde{a}_2 b_3$ olduğundan (6. 56) - (6. 63) denklemleri yardımıyla

$$\widetilde{a}_2 b_3 a_3 = 0, \tag{6. 65}$$

$$[-\widetilde{a}_2^2 + K - 2L_{A_{\widetilde{H}}}\lambda^2]b_3 = 0, \tag{6. 66}$$

$$[b_3^2 - K + 2L_{A_{\widetilde{H}}}\lambda^2]a_2 = 0, \tag{6. 67}$$

$$[K - 2L_{A_{\widetilde{H}}}\lambda^2]a_3 = 0 \tag{6. 68}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki alt durumlar söz konusudur.

a) $b_3 = \widetilde{a}_2 = a_3 = 0$ olsun. Bu takdirde Önerme 6. 3 gereği

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \; A_{\xi_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_{\xi_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup bu da M yüzeyinin $p \in M$ noktasında total umbilik olduğunu gösterir. Böylece lokal olarak M yüzeyi $S^2 \subset \mathbf{E}^3 \subset \mathbf{E}^{2+d}$ 2-küresine denktir. Fakat kabulümüz gereği M semiparalel olmadığından bu durum söz konusu değildir.

b) $b_3 = 0$, $\widetilde{a}_2 \neq 0$ olsun. Böylece Önerme 6. 3 gereği

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \; A_{\xi_2} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_2 & 0 \\ 0 & -\widetilde{a}_2 \end{bmatrix}, \; A_{\xi_3} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_2 & 0 \\ 0 & \widetilde{a}_2 \end{bmatrix}$$

olup M nin şekil operatörü matrisleri köşegenleştirilebilir olduğundan $p \in M$ noktasında $R^{\perp} = 0$ dır, (yani M nin normal koneksiyonu flat dir) ve (6. 67) denkleminden p noktasında $K = 2L_{A_{\widetilde{H}}}\lambda^2$ elde edilir. (6. 46) denklemi kullanılarak bu son eşitlik

$$K = 2\|\widetilde{H}\|^2 L_{A_{\widetilde{H}}}$$

biçiminde yazılabilir.

c) Şimdi $b_3 \neq 0$ olsun. Eğer $\widetilde{a}_2 = 0$ ise (6. 66) denkleminden $K = 2L_{A_{\widetilde{H}}}\lambda^2$ elde edilir. Yukarıdaki duruma benzer şekilde $\lambda^2 = \|\widetilde{H}\|^2$ olduğundan (6. 46) denkleminden son eşitlik

$$K = 2\|\widetilde{H}\|^2 L_{A_{\widetilde{H}}}$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer $\widetilde{a}_2 \neq 0$ ise (6. 65) denkleminden $a_3 = 0$ dır. Bu taktirde Önerme 6. 3 gereği M nin şekil operatörü matrisleri

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \; A_{\xi_2} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_2 & 0 \\ 0 & -\widetilde{a}_2 \end{bmatrix}, \; A_{\xi_3} = \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Böylece (6. 66) ve (6. 67) denklemlerinden

$$\widetilde{a}_2^2 = K - 2L_{A_{\widetilde{H}}}\lambda^2 \;\text{ ve }\; b_3^2 = K - 2L_{A_{\widetilde{H}}}\lambda^2$$

elde edilir. (6. 46) denkleminden $\lambda^2 = \|\widetilde{H}\|^2$ olduğundan $\widetilde{a}_2^2 = 2L_{A_{\widetilde{H}}}\|\widetilde{H}\|^2$ ve $b_3^2 = 2L_{A_{\widetilde{H}}}\|\widetilde{H}\|^2$ bulunur. Böylece $K = \lambda^2 - \widetilde{a}_2^2 - b_3^2$ olduğundan

$$3K = \|\widetilde{H}\|^2 + 4L_{A_{\widetilde{H}}}\|\widetilde{H}\|^2$$

yani

$$3K = (1 + 4L_{A_{\widetilde{H}}})\|\widetilde{H}\|^2$$

elde edilir. ■

7. GENELLEŞTİRİLMİŞ 2-SEMİPARALEL ALTMANİFOLDLAR

Bu bölümde (Arslan ve ark. 2000) de tanımlanan 2-semiparalel altmanifoldların genelleştirilmeleri verilmiştir.

Tanım 7. 1. M ve $\tilde{M}$ sırasıyla n ve (n + d)–boyutlu Riemann manifoldları ve M manifoldu $\tilde{M}$ nın bir altmanifoldu olsun. Her X, Y, U, V, W $\in \chi(M)$ için

$$\overline{R}\cdot\overline{\nabla}h:\ \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi^{\perp}(M)$$

$$(\overline{R}(X,Y)\cdot\overline{\nabla}h)(U,V,W)=R^{\perp}(X,Y)\overline{\nabla}h(U,V,W)-(\overline{\nabla}h)(\tilde{R}(X,Y)U,V,W)$$
$$-(\overline{\nabla}h)(U,\tilde{R}(X,Y)V,W)-(\overline{\nabla}h)(U,V,\tilde{R}(X,Y)W)\qquad(7.\ 1)$$

ile tanımlanır. Eğer M nin her p noktasında $\overline{R}(X,Y)\cdot\overline{\nabla}h = 0$ şartı sağlanırsa M ye *2-semiparalel altmanifold* adı verilir (Arslan ve ark. 2000).

(Arslan ve ark. 2000) de $N^{2+d}(c)$ uzay formunda normal koneksiyonu flat olan 2-semiparalel yüzeylerin sınıflandırması aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 7. 2. $M\subset N^{2+d}(c)$ normal koneksiyonu flat olan 2-semiparalel bir yüzey olsun. O zaman ya

i) M nin van der Waerden-Bortolotti koneksiyonu $\overline{\nabla}$ flat (yani $\overline{R}=0$) dır (Bu durumda M nin Gauss eğriliği K = 0 dır) veya

ii) M nin ikinci temel formu h paraleldir ve bu durumda M total umbiliktir yada ikinci temel formu paralel olan iki eğrinin çarpımıdır.

Lumiste (1999) ve Walden (1973) çalışmalarında $N^{2+d}(c)$ uzay formunda ve E^{2+d} Öklid uzayında ikinci temel formu paralel olan yüzeylerin sınıflandırması sırasıyla aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

Teorem 7. 3. $M\subset N^{2+d}(c)$ yüzeyinin ikinci temel formu h paralel ise bu takdirde M yüzeyi

i) total geodeziktir veya

ii) total umbiliktir veya

iii) ikinci temel formu paralel olan iki eğrinin çarpım yüzeyi veya

iv) $\mathbf{E}^5$ de $\mathbf{V}^2$ Veronese yüzeyi veya bu yüzeyin açık bir parçasıdır.

Teorem 7. 4. f: M $\to \mathbf{E}^{2+d}$ bir M yüzeyinden $\mathbf{E}^{2+d}$ Öklid uzayına bir izometrik immersiyon olsun. Eğer M nin ikinci temel formu paralel ise f(M) aşağıdaki yüzeylerden birisidir:

i) $\mathbf{E}^2$ nin bir açık parçası veya

ii) $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{E}^3$ küre yüzeyinin bir açık parçası veya

iii) $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R} \subset \mathbf{E}^3$ silindir yüzeyinin bir açık parçası veya

iv) $\mathbf{S}^1(r_1) \times \mathbf{S}^1(r_2) \subset \mathbf{E}^4$ tor yüzeyinin bir açık parçası veya

v) $\mathbf{V}^2 \subset \mathbf{E}^5$ Veronese yüzeyinin bir açık parçasıdır.

Yardımcı Teorem 7. 5. $M \subset \mathbf{E}^{n+d}$ n-boyutlu, flat normal koneksiyonlu bir altmanifold olsun. Bu takdirde T_pM tanjant uzayından alınan her e_i ve e_j ($1 \le i, j \le n$) ortonormal tanjant vektörleri için

$$(\overline{R}(e_i, e_j)\cdot \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i) = 3K_{ij}(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_i), \tag{7. 2}$$

$$(\overline{R}(e_i, e_j)\cdot \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j) = K_{ij}[2(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_j) - (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i)], \tag{7. 3}$$

$$(\overline{R}(e_i, e_j)\cdot \overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j) = K_{ij}[(\overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j) - 2(\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j)], \tag{7. 4}$$

$$(\overline{R}(e_i, e_j)\cdot \overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j) = -3K_{ij}(\overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j) \tag{7. 5}$$

dir.

İspat. M nin normal koneksiyonu $\nabla^{\perp}$ flat olduğundan T_pM tanjant uzayından alınan her e_i ve e_j ($1 \le i, j \le n$) ortonormal tanjant vektörleri için $R^{\perp}(e_i, e_j) = 0$ dır. Böylece (7. 1) denklemi kullanılarak

$$(\overline{R}(e_i, e_j)\cdot \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i) = -(\overline{\nabla} h)(\widetilde{R}(e_i, e_j)e_i, e_i, e_i) - (\overline{\nabla} h)(e_i, \widetilde{R}(e_i, e_j)e_i, e_i)$$
$$- (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, \widetilde{R}(e_i, e_j)e_i) \tag{7. 6}$$

yazılabilir. (2. 13) Codazzi denklemleri kullanılarak (7. 6) ifadesi

$$(\overline{R}(e_i, e_j)\cdot \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i) = 3(\overline{\nabla} h)(\widetilde{R}(e_i, e_j)e_i, e_i, e_i) \tag{7. 7}$$

şekline dönüşür. Böylece (2. 15) Gauss denklemi ve (2. 6) gereği $\widetilde{R}(e_i, e_j)e_i = K_{ij}(e_i \wedge e_j)e_i$ olup buradan

$$\widetilde{R}(e_i, e_j)e_i = -K_{ij}e_j \tag{7. 8}$$

ve

$$\widetilde{R}(e_i, e_j)e_j = K_{ij}e_i \tag{7. 9}$$

bulunur. Bununla beraber (7. 8) eşitliği (7. 7) de yerine yazılırsa (7. 2) elde edilir. Benzer şekilde (2. 13) Codazzi denklemleri kullanılarak

$$(\overline{R}(e_i, e_j)\cdot \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j) = -2(\overline{\nabla} h)(\tilde{R}(e_i, e_j)e_i, e_i, e_j) - (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, \tilde{R}(e_i, e_j)e_j),$$

$$(\overline{R}(e_i, e_j)\cdot \overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j) = -(\overline{\nabla} h)(\tilde{R}(e_i, e_j)e_i, e_j, e_j) - 2(\overline{\nabla} h)(e_i, e_j, \tilde{R}(e_i, e_j)e_j)$$

ve

$$(\overline{R}(e_i, e_j)\cdot \overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j) = -3(\overline{\nabla} h)(\tilde{R}(e_i, e_j)e_j, e_j, e_j)$$

olduğundan (7. 8) ve (7. 9) denklemleri son üç denklemde yerlerine yazılarak (7. 3), (7. 4) ve (7. 5) denklemleri elde edilir. ■

$M \subset E^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. M nin $U_\alpha = \{p_1 \in M : \overline{\nabla} h \neq 0\}$ ve $U_\beta = M \setminus U_\alpha$ açık altkümelerini $U_\alpha \cup U_\beta = M$ olacak biçimde tanımlayalım.

$M \subset E^{n+d}$ bir altmanifold olması durumunda Teorem 7. 2 nin karşılığı aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 7. 6. $M \subset E^{n+d}$ n-boyutlu, flat normal koneksiyonlu 2-semiparalel bir altmanifold olsun. Bu takdirde (lokal olarak) ya

i) M altmanifoldu paralel ikinci temel formludur yada

ii) M bir flat manifolddur. Yani T_pM nin e_i ve e_j $(1 \leq i, j \leq n)$ teğet vektörlerinin gerdiği düzlem kesitinin eğriliği $K_{ij} = 0$ dır.

İspat. $p \in M$ olsun. M altmanifoldu 2-semiparalel olduğundan Tanım 7. 1 den $\overline{R}\cdot\overline{\nabla} h = 0$ dır. M nin normal koneksiyonu flat olduğundan Yardımcı Teorem 7. 5 den $p \in M$ noktasında

$$K_{ij}(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_i) = 0, \tag{7. 10}$$

$$K_{ij}[2(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_j) - (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i)] = 0, \tag{7. 11}$$

$$K_{ij}[(\overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j) - 2(\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j)] = 0, \tag{7. 12}$$

$$K_{ij}(\overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j) = 0 \tag{7. 13}$$

elde edilir.

M nin $U_\alpha = \{p_1 \in M : \overline{\nabla} h \neq 0\}$ açık altkümesi için (7. 10)–(7. 13) denklemleri yardımıyla $K_{ij} = 0$ yazılabilir.

Ayrıca her $p_2 \in U_\beta = M \setminus U_\alpha \subset M$ noktası için (7. 10)–(7.13) denklemleri yardımıyla

$$(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_i) = 0, \tag{7. 14}$$

$$2(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_j) - (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i) = 0, \tag{7. 15}$$

$$(\overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j) - 2(\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j) = 0, \tag{7. 16}$$

$$(\overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j) = 0 \tag{7. 17}$$

yazılabilir. Böylece (2. 13) Codazzi denklemleri gereği $(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_i) = (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j)$ ve $(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_j) = (\overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j)$ olduğundan (7. 14) denklemi (7. 16) da yerine konulursa $(\overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j) = 0$ ve (7. 17) denklemi de (7. 15) de yerine konulursa $(\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $(\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i) = (\overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j) = 0$ olup bu da Tanım 2. 20 gereği M altmanifoldunun (lokal olarak) paralel ikinci temel formlu olduğunu gösterir. ■

Örnek 7. 7. $M(m + 1; \mathbf{R})$ $\mathbf{R}$ üzerindeki $(m + 1) \times (m + 1)$ tipindeki matrislerin uzayı olsun. M yi $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A.B^T)$ iç çarpımı ile birlikte $(m + 1)^2$- boyutlu Öklid uzayı olarak düşünebiliriz. Burada B^T ile B matrisinin transpozu gösterilmektedir. ζ bir kolon vektörü ve $\lambda \in \mathbf{R}$ sayısı $|\lambda| = 1$ özeliğinde olsun. $\mathbf{P}^m$ reel projektif uzayını,

$$\mathbf{S}^m = \{\zeta \in \mathbf{R}^{m+1} : \zeta^T \zeta = 1\}$$

hiperküresinin, ζ nın $\zeta\lambda$ ile özdeşlenmesi ile elde edilen bölüm uzayı olarak göz önüne alalım (Chen 1984).

$$\zeta = (\zeta_i) \in \mathbf{S}^m \subset \mathbf{R}^{m+1},\ 0 \le i \le m$$

için

$$\widetilde{\varphi} : \mathbf{S}^m \to H(m + 1; \mathbf{R}) = \{A \in M(m + 1; \mathbf{R}) : A^T = A\}$$

dönüşümünü

$$\widetilde{\varphi}(\zeta) = \zeta\zeta^T = \begin{pmatrix} |\zeta_0|^2 & \zeta_0\zeta_1 & - & \zeta_0\zeta_m \\ - & - & - & - \\ \zeta_m\zeta_0 & \zeta_m\zeta_1 & - & |\zeta_m|^2 \end{pmatrix} \tag{7. 18}$$

ile tanımlayalım. $\pi : \mathbf{S}^m \to \mathbf{P}^m$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere $\widetilde{\varphi}$ $\mathbf{P}^m$ den $H(m + 1; \mathbf{R})$ ye

$$\varphi(\pi(\zeta)) = \widetilde{\varphi}(\zeta) = \zeta\zeta^T \tag{7. 19}$$

biçiminde bir φ dönüşümü indirger. $\varphi(\pi(\zeta))$ yı kısaca $\varphi(\zeta)$ ile gösterelim. (7. 18) den $\mathbf{P}^m$ nin φ altındaki görüntüsü

$$\varphi(\mathbf{P}^m) = \{A \in H(m + 1; \mathbf{R}) : A^2 = A \text{ ve } \operatorname{tr}A = 1\}$$

ile verilir. Böylece (7. 19) ile tanımlı $\varphi : \mathbf{S}^m \to H(m+1; \mathbf{R})$ izometrik imbedingi $\mathbf{P}^m$ nin $H(m+1; \mathbf{R})$ deki birinci standart imbedingidir ve $\mathbf{P}^m$ $H(m+1; \mathbf{R})$ nin $\frac{1}{m+1}I$ merkezli ve $r = \sqrt{\frac{m}{2}(m+1)}$ yarıçaplı hiperküresinde yatar (Chen 1984).

$\varphi : \mathbf{P}^m \to \mathbf{R}^{m+\frac{1}{2}m(m+1)}$ m-boyutlu reel projektif uzayından $\mathbf{R}^{m+\frac{1}{2}m(m+1)}$ ye (7. 19) ile tanımlı bir izometrik imbeding olsun. Bu şekilde tanımlanan $\mathbf{P}^m$ ye *Veronese altmanifoldu* denir ve $\mathbf{V}^m$ ile gösterilir. (Chen 1984).

$\mathbf{V}^m$ Veronese altmanifoldunun paralel ikinci temel formlu olduğu (Arslan, Özgür 1999) da gösterilmiştir.

Tanım 7. 8. $M \subset \widetilde{M}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olmak üzere M nin her p noktasında $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h$ ve $Q(g, \overline{\nabla} h)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye $\overline{\nabla} h$ *tensörüne göre pseudosimetriktir* denir. M nin $\overline{\nabla} h$ tensörüne göre pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_{\overline{\nabla} h} = \{p \in M : p \in M \text{ de } \overline{\nabla} h \neq 0\}$$

kümesi üzerinde

$$\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{\overline{\nabla} h} Q(g, \overline{\nabla} h) \tag{7. 20}$$

olmasıdır. Burada $L_{\overline{\nabla} h}$ fonksiyonu $U_{\overline{\nabla} h}$ üzerinde tanımlıdır.

Yardımcı Teorem 7. 9. $M \subset \mathbf{E}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. Bu takdirde T_pM tanjant uzayından alınan her e_i ve e_j $(1 \leq i, j \leq n)$ ortonormal tanjant vektörleri için

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i; e_i, e_j) = 3(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_i), \tag{7. 21}$$

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j; e_i, e_j) = 2(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_j) - (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i), \tag{7. 22}$$

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j; e_i, e_j) = (\overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j) - 2(\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j), \tag{7. 23}$$

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j; e_i, e_j) = -3(\overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j) \tag{7. 24}$$

dir.

İspat. M nin $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_pM nin ortonormal vektörleri e_i, e_j $(1 \leq i, j \leq n)$ olsun. Böylece (3. 7) denkleminde $T = \overline{\nabla} h$ alınarak

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i; e_i, e_j) = -(\overline{\nabla} h)((e_i \wedge e_j)e_i, e_i, e_i) - (\overline{\nabla} h)(e_i, (e_i \wedge e_j)e_i, e_i) - (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, (e_i \wedge e_j)e_i) \tag{7. 25}$$

yazılabilir. Ayrıca (2. 13) Codazzi denklemleri kullanılırsa (7. 25) ifadesi

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i; e_i, e_j) = -3(\overline{\nabla} h)((e_i \wedge e_j)e_i, e_i, e_i) \quad (7.26)$$

şekline dönüşür. Bununla beraber (3. 2) denklemi kullanılarak (7. 26) denkleminden

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i; e_i, e_j) = -3(\overline{\nabla} h)(-e_j, e_i, e_i) = 3(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_i)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (2. 13) Codazzi denklemleri ve (3. 7) denkleminden

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j; e_i, e_j) = -2(\overline{\nabla} h)((e_i \wedge e_j)e_i, e_i, e_i) - (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, (e_i \wedge e_j)e_j),$$

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j; e_i, e_j) = -(\overline{\nabla} h)((e_i \wedge e_j)e_i, e_i, e_i) - 2(\overline{\nabla} h)(e_i, (e_i \wedge e_j)e_j, e_j)$$

ve

$$Q(g, \overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j; e_i, e_j) = -3(\overline{\nabla} h)((e_i \wedge e_j)e_j, e_j, e_j)$$

olup son üç denklemde (3. 2) denklemi kullanılarak (7. 21)-(7. 24) denklemleri elde edilir. ■

Teorem 7. 10. $M \subset E^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. Eğer M altmanifoldu $\overline{\nabla} h$ tensörüne göre pseudosimetrik ise (yani (7. 20) sağlanıyorsa) ya M 2-semiparaleldir yada bir Einstein manifoldudur.

İspat. Eğer M altmanifoldu 2-semiparalel ise $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{\overline{\nabla} h} Q(g, \overline{\nabla} h)$ eşitliği aşikar olarak sağlanır. Şimdi M nin 2-semiparalel olmadığını kabul edelim. Böylece Yardımcı Teorem 7. 5 ve Yardımcı Teorem 7. 9 gereği

$$3[K_{ij} - L_{\overline{\nabla} h}](\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_i) = 0,$$

$$[K_{ij} - L_{\overline{\nabla} h}][2(\overline{\nabla} h)(e_j, e_i, e_j) - (\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_i)] = 0,$$

$$[K_{ij} - L_{\overline{\nabla} h}][(\overline{\nabla} h)(e_j, e_j, e_j) - 2(\overline{\nabla} h)(e_i, e_i, e_j)] = 0,$$

$$[K_{ij} - L_{\overline{\nabla} h}](\overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_j) = 0$$

yazılabilir. Bununla birlikte M altmanifoldu 2-semiparalel olmadığından $\overline{\nabla} h \neq 0$ dır. Böylece yukarıdaki denklemlerden $K_{ij} = L_{\overline{\nabla} h}$ elde edilir. Diğer taraftan Tanım 2. 8 gereği

$$S(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^{n} g(\widetilde{R}(e_j, e_i)e_i, e_j)$$

yazılabilir. Böylece $S(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^{n} g(\widetilde{R}(e_j, e_i)e_i, e_j) = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}$ olup buradan

$$S(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^{n} L_{\overline{\nabla} h} = n L_{\overline{\nabla} h}$$

bulunur. Sonuç olarak e_i tanjant vektörü birim uzunluklu olduğundan bu son eşitlik

$$S(e_i, e_i) = n L_{\overline{\nabla} h}\, g(e_i, e_i)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ise Tanım 2. 9 gereği M nin Einstein manifoldu olması demektir. ■

Tanım 7. 11. $M \subset \widetilde{M}$ flat normal koneksiyonlu bir altmanifold olsun. Her X, Y, U, V, W $\in \chi(M)$ için

$$S \cdot \overline{\nabla} h: \ \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

$$(S \cdot \overline{\nabla} h)(X, Y, W) = -(\overline{\nabla} h)(\widetilde{S} X, Y, W) - (\overline{\nabla} h)(X, \widetilde{S} Y, W)$$
$$-(\overline{\nabla} h)(X, Y, \widetilde{S} W) \tag{7. 27}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer her $p \in M$ noktasında $S \cdot \overline{\nabla} h = 0$ ise M ye *Ricci 2-semiparalel altmanifold* adı verilir.

Yardımcı Teorem 7. 12. $M \subset E^{2+d}$ yüzeyi için M nin T_pM tanjant uzayının bir $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı verildiğinde

$$(S \cdot \overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1) = -3K(\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1), \tag{7. 28}$$

$$(S \cdot \overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_1) = -3K(\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_1), \tag{7. 29}$$

$$(S \cdot \overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) = -3K(\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2), \tag{7. 30}$$

$$(S \cdot \overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2) = -3K(\overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2) \tag{7. 31}$$

dir.

İspat. T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$ olsun. Diğer taraftan (2. 7) gereği X, Y $\in T_pM$ için

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{2} g(\widetilde{R}(e_i, X)Y, e_i)$$

dır. Bununla birlikte (2. 3) eşitliğinden

$$S(X, Y) = -\sum_{i=1}^{2} g(\widetilde{R}(e_i, X)e_i, Y)$$

yazılabilir. Buradan Tanım 2. 8 yardımıyla

$$\widetilde{S} X = \sum_{i=1}^{2} \widetilde{R}(X, e_i)e_i \tag{7. 32}$$

biçiminde ifade edilebilir. Böylece (7. 32) kullanılarak $p \in M$ noktasında

$$\tilde{S}e_1 = \sum_{i=1}^{2} \tilde{R}(e_1, e_i)e_i \tag{7. 33}$$

ve

$$\tilde{S}e_2 = \sum_{i=1}^{2} \tilde{R}(e_2, e_i)e_i \tag{7. 34}$$

elde edilir. Bununla beraber (7. 33) ve (7. 34) eşitliklerinden sırası ile

$$\tilde{S}e_1 = Ke_1 \tag{7. 35}$$

ve

$$\tilde{S}e_2 = Ke_2 \tag{7. 36}$$

bulunur. Böylece (7. 27) ve (2. 13) Codazzi denklemleri gereği

$$(S \cdot \overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1) = -3(\overline{\nabla} h)(\tilde{S} e_1, e_1, e_1) \tag{7. 37}$$

olduğundan (7. 35) eşitliği (7. 37) de yerine yazılırsa (7. 28) elde edilir.

Benzer şekilde (7. 27) ve (2. 13) Codazzi denklemleri gereği

$$(S \cdot \overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_1) = -2(\overline{\nabla} h)(\tilde{S} e_1, e_2, e_1) - (\overline{\nabla} h)(e_1, \tilde{S} e_2, e_1)$$

$$(S \cdot \overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) = -(\overline{\nabla} h)(\tilde{S} e_1, e_2, e_2) - 2(\overline{\nabla} h)(e_1, \tilde{S} e_2, e_2)$$

ve

$$(S \cdot \overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2) = -3(\overline{\nabla} h)(\tilde{S} e_2, e_2, e_2)$$

olduğundan (7. 35) ve (7. 36) denklemleri son üç denklemde yerine yazılırsa (7. 29), (7. 30) ve (7. 31) denklemleri elde edilir. ■

Teorem 7. 13. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu bir Ricci 2-semiparalel yüzey olsun. Bu takdirde (lokal olarak) ya

i) M yüzeyi paralel ikinci temel formludur yada

ii) M nin Gauss eğriliği $K = 0$ dır.

İspat. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu bir Ricci 2-semiparalel yüzey olduğundan her $p \in M$ noktasında $S \cdot \overline{\nabla} h = 0$ dır.

$p_1 \in U_\alpha = \{p_1 \in M : \overline{\nabla} h \neq 0\} \subset M$ noktasını göz önüne alalım. Böylece (7. 28)-(7. 31) denklemleri yardımıyla her $p_1 \in U_\alpha$ için $K = 0$ dır.

$p_2 \in U_\beta = M \setminus U_\alpha \subset M$ noktasını göz önünde bulunduralım. Bu durumda (7. 28)–(7. 31) denklemlerinden

$$(\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1) = (\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_1) = (\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) = (\overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2) = 0$$

elde edilir. Bu ise Tanım 2. 20 gereği M nin (lokal olarak) paralel ikinci temel formlu olduğunu gösterir. ■

Örnek 7. 14. $\mathbf{T}^2 := S^1(a) x S^1(b) \subset \mathbf{R}^4$

$$X(\theta,\varphi) = (a\cos\frac{\theta}{a}, a\sin\frac{\theta}{a}, b\cos\frac{\varphi}{b}, a\sin\frac{\varphi}{b}), \quad a, b \in \mathbf{R}$$

şeklinde tanımlanan tor yüzeyinin ikinci temel formunun paralel olduğunu gösterelim. $X(\theta,\varphi)$ ifadesinden tor yüzeyi için kısmi türev alınarak,

$$X_\theta = (-\sin\frac{\theta}{a}, \cos\frac{\theta}{a}, 0, 0) \text{ ve } X_\varphi = (0, 0, -\sin\frac{\varphi}{b}, \cos\frac{\varphi}{b})$$

tanjant vektörleri elde edilir.

$$n_1 = (\cos\frac{\theta}{a}, \sin\frac{\theta}{a}, 0, 0) \text{ ve } n_2 = (0, 0, \cos\frac{\varphi}{b}, \sin\frac{\varphi}{b})$$

vektörleri X_θ ve X_φ tanjant vektörlerine dik olduğundan buradan $\mathbf{T}^2$ nin,

$$X = \frac{X_\theta}{\|X_\theta\|} = X_\theta \text{ ve } Y = \frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|} = X_\varphi ,$$

$$\upsilon_1 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = n_1 \text{ ve } \upsilon_2 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = n_2$$

ortonormal çatısı elde edilir. Böylece X, Y, υ_1 ve υ_2 nin kovaryant türevleri alınarak,

$$D_X X = D_{\frac{X_\theta}{\|X_\theta\|}} X = \frac{1}{\|X_\theta\|} D_{X_\theta} X = (-\frac{1}{a}\cos\frac{\theta}{a}, -\frac{1}{a}\sin\frac{\theta}{a}, 0, 0) = -\frac{1}{a}\upsilon_1,$$

$$D_X Y = 0,$$

$$D_Y X = 0,$$

$$D_Y Y = D_{\frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|}} X = \frac{1}{\|X_\varphi\|} D_{X_\varphi} Y = (0, 0, -\frac{1}{b}\cos\frac{\varphi}{b}, -\frac{1}{b}\sin\frac{\varphi}{b}) = -\frac{1}{b}\upsilon_2,$$

$$D_X \upsilon_1 = D_{\frac{X_\theta}{\|X_\theta\|}} \upsilon_1 = \frac{1}{\|X_\theta\|} D_{X_\theta} \upsilon_1 = (-\frac{1}{a}\sin\frac{\theta}{a}, \frac{1}{a}\cos\frac{\theta}{a}, 0, 0) = \frac{1}{a} X,$$

$$D_X \upsilon_2 = 0,$$

$$D_Y \upsilon_1 = 0,$$

$$D_Y\upsilon_2 = D_{\frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|}}\upsilon_2 = \frac{1}{\|X_\varphi\|}D_{X_\varphi}\upsilon_2 = (0,0,-\frac{1}{b}\sin\frac{\varphi}{b},\frac{1}{b}\cos\frac{\varphi}{b}) = \frac{1}{b}Y$$

olup (2. 9) ve (2.10) dan

$$\nabla_X X = 0, \qquad h(X,X) = -\frac{1}{a}\upsilon_1,$$
$$\nabla_X Y = 0, \qquad h(X,Y) = 0,$$
$$\nabla_Y X = 0, \qquad h(Y,X) = 0,$$
$$\nabla_Y Y = 0, \qquad h(Y,Y) = -\frac{1}{b}\upsilon_2,$$
$$A_{\upsilon_1}X = -\frac{1}{a}X, \qquad \overline{\nabla}_X\upsilon_1 = 0,$$
$$A_{\upsilon_2}X = 0, \qquad \overline{\nabla}_X\upsilon_2 = 0,$$
$$A_{\upsilon_1}Y = 0, \qquad \overline{\nabla}_Y\upsilon_1 = 0,$$
$$A_{\upsilon_2}Y = -\frac{1}{b}Y, \qquad \overline{\nabla}_Y\upsilon_2 = 0$$

elde edilir. Ayrıca $Z = \lambda X + \mu Y$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ olacak şekilde bir Z genel tanjant vektör alanı seçilirse

$$h(Z,Z) = \lambda^2 h(X,X) + \mu^2 h(Y,Y) + 2\lambda\mu h(X,Y)$$

olup

$$h(Z,Z) = -\frac{1}{a}\lambda^2\upsilon_1 - -\frac{1}{b}\mu^2\upsilon_2$$

bulunur. Diğer taraftan

$$D_X(h(X,X)) = D_X(-\frac{1}{a}\upsilon_1) = -\frac{1}{a}D_X\upsilon_1 = -\frac{1}{a^2}X,$$
$$D_X(h(X,Y)) = 0\ ,$$
$$D_X(h(Y,Y)) = 0\ ,$$
$$D_Y(h(X,X)) = 0\ ,$$
$$D_Y(h(X,Y)) = 0\ ,$$
$$D_Y(h(Y,Y)) = -\frac{1}{b}D_Y\upsilon_2 = -\frac{1}{b^2}Y$$

olduğundan (2. 10) dan

$$A_{h(X,X)}X = \frac{1}{a^2}X, \qquad \overline{\nabla}_X(h(X,X)) = 0,$$

$$A_{h(X,Y)}X = 0, \qquad \overline{\nabla}_X(h(X,Y)) = 0,$$

$$A_{h(Y,Y)}X = 0, \qquad \overline{\nabla}_X(h(Y,Y)) = 0,$$

$$A_{h(X,X)}Y = 0, \qquad \overline{\nabla}_Y(h(X,X)) = 0,$$

$$A_{h(X,Y)}Y = 0, \qquad \overline{\nabla}_Y(h(X,Y)) = 0,$$

$$A_{h(Y,Y)}Y = \frac{1}{b^2}Y, \qquad \overline{\nabla}_Y(h(Y,Y)) = 0$$

elde edilir. Bununla beraber,

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = \overline{\nabla}_X(h(X,Y)) - h(\nabla_X X, Y) - h(X, \nabla_X Y)$$

olduğundan,

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,X) = 0, \qquad (\overline{\nabla}_X h)(X,Y) = 0\,,$$
$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Y) = 0, \qquad (\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y) = 0$$

bulunur. Böylece

$$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z) = \lambda^3(\overline{\nabla}_X h)(X,X) + 3\mu\lambda^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,X) + 3\lambda\mu^2(\overline{\nabla}_Y h)(X,Y) + \mu^3(\overline{\nabla}_Y h)(Y,Y)$$

olduğundan

$$(\overline{\nabla}_Z h)(Z,Z) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\mathbf{T}^2{:}S^1(a)xS^1(b) \subset \mathbf{R}^4$ yüzeyinin ikinci temel formunun paralel olduğunu gösterir. (Daha detaylı bilgi için Arslan (1993)' e bakınız).

Yardımcı Teorem 7. 15. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu bir yüzey olsun. M nin T_pM tanjant uzayının bir $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı verildiğinde

$$(\overline{R}(e_1, e_2)\cdot \overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1) = -3K(\overline{\nabla} h)(e_2, e_1, e_1), \tag{7. 38}$$

$$(\overline{R}(e_1, e_2)\cdot \overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_2) = K[2(\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) - (\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1)], \tag{7. 39}$$

$$(\overline{R}(e_1, e_2)\cdot \overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) = K[(\overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2) - 2(\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_2)], \tag{7. 40}$$

$$(\overline{R}(e_1, e_2)\cdot \overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2) = 3K(\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) \tag{7. 41}$$

dir.

İspat. Yüzeyler için kesitsel eğrilikle Gauss eğriliği çakıştığı için Yardımcı Teorem 7. 5 de K_{ij} kesitsel eğriliği yerine Gauss eğriliği olan K, e_i, e_j yerine e_1, e_2 alınırsa (7. 38)-(7. 41) elde edilir. ■

a_α bir M yüzeyi üzerinde reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\xi = \sum_{\alpha=1}^{d} a_\alpha \xi_\alpha$, $A_{\xi_\alpha} e_1 = k_1^\alpha e_1$ ve $A_{\xi_\alpha} e_2 = k_2^\alpha e_2$ tanımlansın. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Yardımcı Teorem 7. 16 . $M \subset E^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu bir yüzey olsun. M nin T_pM tanjant uzayının bir $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı verildiğinde

$$\overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1; e_1, e_2) = 3 \sum_\alpha a_\alpha k_1^\alpha (\overline{\nabla} h)(e_2, e_1, e_1), \tag{7. 42}$$

$$\overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_1; e_1, e_2) = 2 \sum_\alpha a_\alpha k_1^\alpha (\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) - \sum_\alpha a_\alpha k_2^\alpha (\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1), \tag{7. 43}$$

$$\overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2; e_1, e_2) = 2 \sum_\alpha a_\alpha k_2^\alpha (\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_2) - \sum_\alpha a_\alpha k_1^\alpha (\overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2), \tag{7. 44}$$

$$\overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2; e_1, e_2) = 3 \sum_\alpha a_\alpha k_2^\alpha (\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) \tag{7. 45}$$

dir.

İspat. T_pM tanjant uzayının bir bazı $\{e_1, e_2\}$, $T_p^\perp M$ normal uzayının bir bazı $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d\}$ ve $\xi = \sum_{\alpha=1}^{d} a_\alpha \xi_\alpha$ da M nin bir genel normal vektör alanı olsun. Böylece (6. 48) den

$$(e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_1 = g(A_\xi e_2, e_1)e_1 - g(A_\xi e_1, e_1)e_2 \tag{7. 46}$$

$$(e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_2 = g(A_\xi e_2, e_2)e_1 - g(A_\xi e_1, e_2)e_2 \tag{7. 47}$$

bulunur. $A_{\xi_\alpha} e_1 = k_1^\alpha e_1$ ve $A_{\xi_\alpha} e_2 = k_2^\alpha e_2$ ifadeleri (7. 46) ve (7. 47) de yerine yazılırsa

$$(e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_1 = -k_1^\alpha e_2 \tag{7. 48}$$

$$(e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_2 = k_2^\alpha e_2 \tag{7. 49}$$

elde edilir. Böylece (6. 47) gereği (2. 13) Codazzi denklemleri kullanılarak

$$\overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1; e_1, e_2) = -3(\overline{\nabla} h)((e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_1, e_1, e_1) \tag{7. 50}$$

bulunur ve (7. 48) denklemi (7. 50) de yerine yazılarak (7. 42) elde edilir.

Benzer şekilde (6. 47) ve (2. 13) Codazzi denklemleri kullanılarak

$$\overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_1; e_1, e_2) = -2(\overline{\nabla} h)((e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_1, e_2, e_1)$$
$$-(\overline{\nabla} h)(e_1, (e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_2, e_1)$$
$$\overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2; e_1, e_2) = -(\overline{\nabla} h)((e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_1, e_2, e_2)$$
$$-2(\overline{\nabla} h)(e_1, (e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_2, e_2)$$
$$\overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2; e_1, e_2) = -3(\overline{\nabla} h)((e_1 \wedge_{A_\xi} e_2)e_2, e_2, e_2)$$

yazılabilir. Böylece (7. 48) ve (7. 49) denklemleri son üç denklemde yerine yazılarak (7. 43)-(7. 45) elde edilir. ■

Teorem 7. 17. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu bir yüzey olsun. Eğer M yüzeyi $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_\xi} \overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)$ şartını sağlıyor ise ya

i) M 2-semiparalel dir yada

ii) M nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{2} L_{A_\xi} \sum_{\alpha=1}^{d} a_\alpha (k_1^\alpha + k_2^\alpha)$$

dır.

İspat. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ yüzeyinin flat normal koneksiyonlu olup $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_\xi} \overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)$ şartını sağladığını varsayalım. Eğer M yüzeyi 2-semiparalel ise bu şart aşikar olarak sağlanır. Şimdi M nin 2-semiparalel olmadığını varsayalım. Ayrıca $\{e_1, e_2\}$ T_pM tanjant uzayının bir bazı ve $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d\}$ de M nin $T_p^\perp M$ normal uzayının bir bazı olsun. $\xi = \sum_{\alpha=1}^{d} a_\alpha \xi_\alpha$ M nin bir genel normal vektör alanı olmak üzere

$$(\overline{R}(e_1, e_2) \cdot \overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_k) = L_{A_\xi} \overline{Q}(A_\xi, \overline{\nabla} h)(e_i, e_j, e_k; e_1, e_2) \tag{7. 51}$$

yazılabilir. Buradan $1 \le i, j, k \le 2$ için Yardımcı Teorem 7. 15 ve Yardımcı Teorem 7. 16 gereği

$$(K - L_{A_\xi} \sum_\alpha a_\alpha k_1^\alpha)(\overline{\nabla} h)(e_2, e_1, e_1) = 0, \tag{7. 52}$$

$$(K - L_{A_\xi} \sum_\alpha a_\alpha k_2^\alpha)(\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) = 0, \tag{7. 53}$$

$$2(K - L_{A_\xi} \sum_\alpha a_\alpha k_1^\alpha)(\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) - (K - L_{A_\xi} \sum_\alpha a_\alpha k_2^\alpha)(\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1) = 0, \tag{7. 54}$$

$$2(K - L_{A_\xi}\sum_\alpha a_\alpha k_2^\alpha)(\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_2) - (K - L_{A_\xi}\sum_\alpha a_\alpha k_1^\alpha)(\overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2) = 0 \quad (7.55)$$

elde edilir.

M yüzeyi 2-semiparalel olmadığından her $p \in M$ noktası için

$$(K - L_{A_\xi}\sum_\alpha a_\alpha k_1^\alpha) = 0$$

$$(K - L_{A_\xi}\sum_\alpha a_\alpha k_2^\alpha) = 0$$

dır. Bu son iki denklemin toplamı

$$2K = L_{A_\xi}\sum_{k=1}^{d} a_\alpha (k_1^\alpha + k_2^\alpha)$$

denklemini verir. Bu da teoremi ispatlar. ■

Teorem 7. 17 den aşağıdaki sonuç kolayca elde edilebilir.

Sonuç 7. 18. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu bir yüzey olsun. Eğer M yüzeyi $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_\xi}\,\overline{Q}(A_\xi^k, \overline{\nabla} h)$ şartını sağlıyor ise ya

i) M 2-semiparalel dir yada

ii) M nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{2} L_{A_\xi}\sum_{\alpha=1}^{d} a_\alpha [(k_1^\alpha)^k + (k_2^\alpha)^k]$$

dır. Burada A_ξ^k (6. 48)* de tanımlandığı gibidir. ■

Tanım 7. 19. $M \subset \mathbf{E}^{n+d}$ n-boyutlu bir altmanifold olsun. M üzerinde bir normal vektör alanı ξ olmak üzere, $\{\xi_1 = \frac{\xi}{\|\xi\|}, \xi_2, \ldots, \xi_d\}$, $T_p^\perp M$ normal uzayının bir bazı olsun.

Böylece ξ normal vektör alanının *müttefik vektör alanı*

$$a(\xi) = \frac{\|\xi\|}{n}\sum_{r=2}^{d}[\operatorname{tr}(A_{\xi_1}.A_{\xi_r})]\xi_r$$

ile tanımlanır (Chen 1984). $\widetilde{H}$ ortalama eğrilik vektörünü göstermek üzere $a(\widetilde{H}) = 0$ ise M *$\mathcal{A}$ altmanifoldu* olarak adlandırılır (Chen 1984). Bu tip altmanifoldlar aynı zamanda *Chen altmanifoldu* olarak da bilinirler (Dursun 1999), (Gheysens ve ark. 1983), (Rouxel 1981 ve 1982), (Lie ve Houh 1993). Chen altmanifoldlarının sınıfı tüm minimal, pseudo-umbilik, ve birinci normal uzay $N_p^1 M$ nin boyutu $\dim N_p^1 M \leq 1$ olacak şekildeki tüm altmanifoldları kapsar. Bu tür altmanifoldlara *aşikar Chen altmanifoldları* denir. Tüm hiperyüzeyler için $\dim N_p^1 M = 1$ olduğu için her hiperyüzey aynı zamanda bir Chen altmanifoldudur (Gheysens ve ark. 1983).

Yardımcı Teorem 7. 20. $M \subset E^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu bir yüzey olsun. Eğer M yüzeyi $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_{\tilde{H}}} \overline{Q}(A_{\tilde{H}}^k, \overline{\nabla} h)$ şartını sağlıyor ise ya

i) M yüzeyi 2-semiparalel dir yada

ii) $L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)(\lambda^k - \mu^k) = 0$ eşitliği M üzerinde sağlanır.

İspat. Eğer M yüzeyi 2-semiparalel ise $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_{\tilde{H}}} \overline{Q}(A_{\tilde{H}}^k, \overline{\nabla} h)$ şartı aşikar olarak sağlanır. Şimdi M nin 2-semiparalel olmadığını kabul edelim. $M \subset E^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu bir yüzey olduğundan (7. 38)-(7. 41) ve (7.42)-(7. 45) eşitlikleri ve Önerme 6. 3 yardımıyla

$$[K - L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)\lambda^k](\overline{\nabla} h)(e_2, e_1, e_1) = 0, \quad (7.\ 56)$$

$$[K - L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)\mu^k](\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) = 0, \quad (7.\ 57)$$

$$2[K - L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)\lambda^k](\overline{\nabla} h)(e_1, e_2, e_2) - [K - L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)\mu^k](\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_1) = 0, \quad (7.\ 58)$$

$$-2[K - L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)\mu^k](\overline{\nabla} h)(e_1, e_1, e_2) + [K - L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)\lambda^k](\overline{\nabla} h)(e_2, e_2, e_2) = 0 \quad (7.\ 59)$$

elde edilir.

Kabulümüz gereği M yüzeyi 2-semiparalel olmadığından $\overline{\nabla} h \neq 0$ dır. Böylece (7. 56)-(7. 59) denklemlerinden

$$K - L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)\lambda^k = 0,$$

$$K - L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)\mu^k = 0$$

olup bu bize $L_{A_{\tilde{H}}} (\lambda + \mu)(\lambda^k - \mu^k) = 0$ bağıntısını verir. ■

Teorem 7. 21. $M \subset E^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu ve $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_{\tilde{H}}} \overline{Q}(A_{\tilde{H}}^2, \overline{\nabla} h)$ şartını sağlayan bir yüzey olsun. O zaman ya

i) M 2-semiparalel dir yada

ii) M pseudo-umbiliktir ve böylece aşikar Chen altmanifoldu dur.

İspat. Eğer M yüzeyi 2-semiparalel ise $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_{\tilde{H}}} \overline{Q}(A_{\tilde{H}}^2, \overline{\nabla} h)$ şartı aşikar olarak sağlanır. Şimdi M nin 2-semiparalel olmadığını kabul edelim. M yüzeyi

$\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_{\overline{H}}} \overline{Q}(A^2_{\overline{H}}, \overline{\nabla} h)$ şartını sağladığından Yardımcı Teorem 7. 20 de $k = 2$ alınırsa her $p \in M$ noktasında $L_{A_{\overline{H}}}(\lambda + \mu)(\lambda^2 - \mu^2) = 0$ eşitliği sağlanır. Böylece $L_{A_{\overline{H}}}(\lambda + \mu)^2(\lambda - \mu) = 0$ yazılabilir. Eğer $\lambda + \mu = 0$ ise M minimaldir. Fakat bu takdirde $A_{\overline{H}}$ anlamsızdır. Dolayısıyla bu durum söz konusu değildir. Eğer $\lambda - \mu = 0$ ise M pseudo-umbiliktir ve böylece aşikar Chen altmanifoldu dur. Eğer $L_{A_{\overline{H}}} = 0$ ise M 2-semiparalel dir. Fakat kabulümüz gereği M 2-semiparalel olmadığından bu durumda söz konusu değildir. Bu da teoremi ispatlar. ■

Teorem 7. 22. $M \subset \mathbf{E}^{2+d}$ flat normal koneksiyonlu ve $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_{\overline{H}}} \overline{Q}(A^3_{\overline{H}}, \overline{\nabla} h)$ şartını sağlayan bir yüzey olsun. O zaman ya

i) M 2-semiparalel dir yada

ii) M pseudo-umbiliktir ve böylece aşikar Chen altmanifoldu dur.

İspat. Eğer M yüzeyi 2-semiparalel ise $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_{\overline{H}}} \overline{Q}(A^3_{\overline{H}}, \overline{\nabla} h)$ şartı aşikar olarak sağlanır. Şimdi M nin 2-semiparalel olmadığını kabul edelim. M yüzeyi $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = L_{A_{\overline{H}}} \overline{Q}(A^3_{\overline{H}}, \overline{\nabla} h)$ şartını sağladığından Yardımcı Teorem 7. 20 de $k = 3$ alınırsa her $p \in M$ noktasında $L_{A_{\overline{H}}}(\lambda + \mu)(\lambda^3 - \mu^3) = 0$ eşitliği sağlanır. Böylece $L_{A_{\overline{H}}}(\lambda + \mu)(\lambda - \mu)(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) = 0$ yazılabilir. Kabulümüz gereği M 2-semiparalel olmadığından $L_{A_{\overline{H}}} \neq 0$ dır. Eğer $\lambda + \mu = 0$ ise M minimaldir. Bu takdirde $A^3_{\overline{H}}$ anlamsız olacağından bu durum söz konusu değildir. Eğer $\lambda - \mu = 0$ ise M pseudo-umbiliktir ve böylece aşikar Chen altmanifoldudur. Eğer $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 0$ ise bu denklemin $\lambda = \mu = 0$ dan başka reel çözümü yoktur. Böylece bu durum da söz konusu değildir. Bu da teoremi ispatlar. ■

KAYNAKLAR

ABDALLA, B. E. ve **F. DILLEN.** A Ricci-semisymmetric Hypersurface of Euclidean space which is not semisymmetric. Baskıda.

ADATI, T. ve **T. MIYAZAWA.** 1967. On a Riemannian space with recurrent conformal curvature, Tensor, N. S., 18, 348-354.

ARSLAN, K. 1993. Isoparametric Submanifolds with Pk-PNS. Doktora Tezi (Yayımlanmamış), Leeds Üniversitesi.

ARSLAN, K., R. DESZCZ ve **Ş. YAPRAK.** 1997. On Weyl Pseudosymmetric hypersurfaces, Colloquium Math., 72, 353-360.

ARSLAN, K., R. DESZCZ ve **R. EZENTAŞ.** 1999. On a certain class of hypersurfaces in semi-Euclidean spaces, Soochow J. Math., 25, 221-234.

ARSLAN, K., R. DESZCZ, R. EZENTAŞ, C. MURATHAN ve **C. ÖZGÜR.** On some pseudosymmetry type hypersurfaces of semi-Euclidean spaces I. Baskıda.

ARSLAN, K., R. EZENTAŞ, I. MIHAI, C. MURATHAN ve **C. ÖZGÜR.** B. Y. Chen Inequalities for submanifolds in locally conformal almost cosymplectic manifolds. Bulletin of Inst. Math. Acad. Sinica. Baskıda.

ARSLAN, K., Ü. LUMISTE, C. MURATHAN ve **C. ÖZGÜR.** 2000. 2-Semiparallel Surfaces in Space Forms I: Two Particular Cases". Proc. Est. Ac. 49(3), 139-148.

ARSLAN, K. ve **C. ÖZGÜR.** 1999. On normal sections of Veronese Submanifold, Balkan J. Geom. and its Appl., 1-8.

BESSE, A. L. 1987. Einstein Manifolds, Springer Verlag, 510p.

BOECKX, E., O. KOWALSKI ve **L. VANHECKE.** 1996. Riemannian manifolds of conullity two, World Scientific, 300p.

CHAKI, M. C. ve **B. GUPTA.** 1963. On conformally symmetric spaces, Indian J. Math., 5, 113-122.

CHEN, B. Y. 1973. Geometry of Submanifolds, Dekker, New York, 298p.

CHEN, B. Y. 1973. Pseudo-umbilical submanifolds of a Riemannian manifold of constant curature II, J. Math. Soc. Japan, 25, 105-114.

CHEN, B. Y. 1982. Differential Geometry of submanifolds with planar normal sections, Ann. Mat. Pura. Appl. 130, 59-67.

CHEN, B. Y. 1984. Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific, 352p.

CHEN, B. Y. 1986. Classification of surfaces with pointwise planar normal sections and its application to Famenko's conjecture, Journal of Geom., 21-34.

CHEN, B. Y. 1993. Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds, Archiv för Mathematik, 60, 568-578.

CHEN, B. Y. 1994. A Riemannian invariant for submanifolds in space forms and its applications, Geometry and Topology of Submanifolds VI, World .Sci., Singapore, 58-81.

CHEN, B. Y. 1998. Differential geometry of submanifolds with arbitrary codimensions, Geometry and Topology of Submanifolds VIII, World .Sci., Singapore, 69-73.

CHEN, B. Y. ve J. YANG. 1999. Elliptic functions, theta function and hypersurfaces satisfying a basic equality, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 125, 463-509.

CHEN, B. Y., F. DILLEN, L. VERSTRAELEN ve L. VRANCKEN. 2000. Characterizations of Riemannian space forms, Einstein spaces and conformally flat spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 128, 589-598.

DEFEVER, F., R. DESZCZ, P. DHOOGHE, L. VERSTRAELEN ve **Ş. YAPRAK.** 1995. On Ricci-pseudosymmetric hypersurfaces in spaces of constant curvature, Results in Math., 27, 227-236.

DEFEVER, F., I. MIHAI ve **L. VERSTRAELEN.** 1997. B. Y. Chen's inequality for totally real submanifolds of Sasakian space forms, Boll. Un. Mat. Ital. B, 7, 11, 2, 365-374.

DEPREZ, J. 1985. Semiparallel surfaces in Euclidean space, J.Geom. 25,192-200.

DEPREZ, J. 1986. Semiparallel hypersurfaces, Rend. Sem. Mat. Univers. Politechn. Torino 44, 2, 303-316.

DEPREZ, J., R. DESZCZ ve **L. VERSTRAELEN.** 1988. Pseudo-symmetry curvature conditions on hypersurfaces of Euclidean spaces and Kählerian manifolds, Ann. Fac. Sci. Toulouse 9, 183-192.

DEPREZ, J., R. DESZCZ ve **L. VERSTRAELEN.** 1989. Examples of pseudo-symmetric conformally flat warped products, Chinese J. Math., 17, 51-65.

DESZCZ, R. 1989. On Ricci-pseudosymmetric warped products, Demonstratio Math. 22, 1053-1065.

DESZCZ, R. 1990. Examples of four-dimensional Riemannian manifolds satisfying some pseudosymmetry curvature conditions, Geometry and Topology of Submanifolds II, Worl .Sci., Singapore, 134-143.

DESZCZ, R. 1991. On four-dimensional warped product manifolds satisfying certain pseudosymmetry curvature conditions, Colloquium Math., 62, 103-120.

DESZCZ, R. 1992. On pseudosymmetric spaces, Bull. Soc. Math. Belg., 44, ser. A, 1-34.

DESZCZ, R. 1996. On certain classes of hypersurfaces in space of constant curvature, Geometry and Topology of Submanifolds VIII, Worl .Sci., Singapore, 100-110 .

DESZCZ, R. 1997. Pseudosymmetric hypersurfaces in space of constant curvature. Tensor, N. S. 58, 253-269.

DESZCZ, R. ve **M. GLAGOWSKA.** Some non-semisymmetric Ricci-semisymmetric warped product hypersurfaces. Baskıda.

DESZCZ, R. ve **W. GRYCAK,** 1987. On some class of warped product manifolds, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 15, 311-322.

DESZCZ, R. ve **M. HOTLÓS.** 1989. Remarks on Riemannian manifolds satisfying a certain curvature condition imposed on the Ricci tensor, Prace Nauk. Pol. Szczec., 11, 13-34.

DESZCZ, R. ve **Ş. YAPRAK.** 1994. Curvature properties of Cartan Hypersurfaces, Colloquium Math., 67, 91-98.

DESZCZ, R., L. VERSTRAELEN ve **Ş. YAPRAK.** 1994. Warped products realizing a certain condition of pseudosymmetry type imposed on the Weyl curvature tensor, Chinese J. Math., 22, 139-157.

DESZCZ, R., L. VERSTRAELEN ve **Ş. YAPRAK.** 1999. Hypersurfaces with pseudosymmetric Weyl tensor in conformally flat manifolds, Geometry and Topology of Submanifolds IX, Worl .Sci., Singapore, 108-117.

DILLEN, F., M. PETROVIC ve **L. VERSTRAELEN.** 1997. Einstein, conformally flat and semi-symmetric submanifolds stisfying Chen's equality, Israel J. Math. 100, 163-169.

DURSUN U. 1999. On product k-Chen submanifolds of pseudo-Riemannian manifolds, Algebras Groups and Geometries, 16, 411-421.

EISENHART, L. P. 1966. Riemannian Geometry, Princeton, 272p.

GHEYSENS, L. P. VERHEYEN ve L. VERSTRAELEN. 1983. Characterization and Examples of Chen submanifolds, J. Geom., 20, 47-62.

HACISALİHOĞLU, H. H. 1980. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi, 895p.

ISHII, Y. 1957. On conharmonic transformations, Tensor 7, 73-80.

KOBAYASHI, S. ve **K. NOMIZU.** 1963. Foundations of Differential Geometry, Volume I, Interscience Publishers, 329p.

KOBAYASHI, S. ve **K. NOMIZU.** 1969. Foundations of Differential Geometry, Volume II, Interscience Publishers, 470p.

KOWALSKI, O. 1996. An explicit classification of 3-dimensional Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$, Czech. Math. J. 46, 121, 3, 427-474.

LANG, S. 1995. Differential and Riemannian manifolds, Springer-Verlag, 360p.

Lİ, S. J. and **C. S. HOUH.** 1993. Generalized Chen Submanifolds, Journal of Geom. 48, 144-156.

LUMISTE, Ü. 1986. Small dimensional irreducible submanifolds with parallel third fundamental form, Tartu Ülikooli Toimetised Acta et comm. Univ. Tartuensis, 734, 50-62.

LUMISTE, Ü. 1999. Submanifolds with parallel fundamental form, Handbook of Differential Geometry, Vol I, Chapter 7, 86p.

O' NEILL, B. 1966. Elementary Differential Geometry, 411p.

O' NEILL, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry, 468p.

NOMIZU, K. 1972. On the decomposition of generalized curvature tensor fields, Differential Geometry in Honor of K. Yano, Tokyo, 335-345.

ROUXEL, B. 1980. A-surfaces in Euclidean space E^n, Soochow J. Math., 6, 117-121.

ROUXEL, B. 1981. A-submanifolds in Euclidean space, Kodai Math. J., 4, 181-188.

SINYUKOV, N. S. 1954. Geodesic Mappings onto symmetric spaces, Dokl. Acad. Nauk. S.S.S.R, 98, 36-54.

SZABO, Z. I. 1982. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y)\cdot R = 0$ I, The local version, J. Diff. Geom., 17, 531-582.

SZABO, Z. I. 1984. Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying $R(X, Y)\cdot R = 0$, Acta Sci. Math., 47, 321-348.

SZABO, Z. I. 1985. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y)\cdot R = 0$ II, Global version, Geom. Dedicata, 19, 65-108.

S. TACHIBANA. 1974. A theorem on Riemannian manifolds of positive curvature operator, Proc. Japan Acad. Ser. Math. Sci., 50, 301-302.

WALDEN, R. 1973. Untermannigfaltigkeiten mit parallel zweiter Fundamental form in Euclidishen Raumen and Spharen, Manuscripta Math. 10, 91-102.

VERSTRAELEN, L. 1994. Comments on pseudo-symmetry in the sense of Ryszard Deszcz, Geometry and Topology of Submanifolds, VI, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 108-117.

YANO, K. ve **M. KON.** 1984. Structures on Manifolds, World Scientific, 508p.

İNDEKS

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana her türlü destek ve yardımı yapan, bu çalışmayı yöneten sayın hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN' a, pseudosimetrik manifoldlarla bizi tanıştıran ve bu konuda gerekli kaynaklara sahip olmamıza yardımcı olan sayın Prof. Dr. Ryszard DESZCZ'e (Polonya, Wroclaw Üniversitesi), öneri ve görüşlerinden faydalandığım hocalarım sayın Yard. Doç. Dr. Cengizhan MURATHAN'a, sayın Doç. Dr. Rıdvan EZENTAŞ'a, sayın Prof. Dr. Ülo LUMISTE' ye (Estonya, Tartu Üniversitesi) ve sayın Prof. Dr. Ion MIHAI' ye (Romanya, Bükreş Üniversitesi), ayrıca Doktora çalışmalarımın aksamadan yürümesi için doktora eğitimim boyunca Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne görevlendirilmemi sağlayan başta Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Başkanı sayın hocam Prof. Dr. Musa ERDEM'e, sayın hocam Prof. Dr. Turgut BAŞKAN' a ve Araştırma Görevlisi olarak göreve başladığım ilk günden beri bana sonuna kadar destek veren sayın hocam Prof. Dr. Servettin BİLİR'e (Kocaeli Üniversitesi) teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmanın meydana gelmesinde beni sonuna kadar destekleyen eşim ve meslektaşım Yard. Doç. Dr. Nihal ÖZGÜR'e, bana her zaman moral kaynağı olan annem, babam ve kardeşime teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Bursa'da doğdu, İlkokul öğrenimini Isparta'da, Ortaokul öğrenimini Tunceli'de ve lise öğrenimini ise İstanbul Kabataş Erkek Lisesi'nde 1990 yılında tamamladı. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne başlayarak 1994 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 1994 de Kocaeli Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başlayarak, Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 1997 yılında Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Şubat 1997 de Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi kadrosuna atandı. 1998 Eylül döneminde Uludağ Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora öğrenimine başladı. 1999 Nisan ayında Y.Ö.K tarafından Doktora eğitimi amacıyla, Doktora öğrenimi süresince Uludağ Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi kadrosuna atandı.