



T.C.

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

**REEL SİNÜS FREKANS
KESTİRİCİLERİNİN
KARŞILAŞTIRMALI İNCELENMESİ**

Eda YENİGÜL

Yüksek Lisans Tezi

**REEL SİNÜS FREKANS
KESTİRİCİLERİNİN
KARŞILAŞTIRMALI İNCELENMESİ**

Eda YENİGÜL



T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL SİNÜS FREKANS KESTİRİCİLERİNİN KARŞILAŞTIRMALI
İNCELENMESİ

Eda YENİGÜL

Prof Dr.Erdoğan DİLAVEROĞLU

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA-2014

TEZ ONAYI

EDA YENİGÜL tarafından hazırlanan “REEL SİNÜS FREKANS KESTİRİCİLERİNİN KARŞILAŞTIRMALI İNCELENMESİ ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof Dr.Erdoğan DİLAVEROĞLU

Başkan: Prof.Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU İmza
Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ersen YILMAZ İmza
Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Erhan PULAT İmza
Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr.Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

... / ... / 2014

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

13/ 10 /2014

İmza

Eda YENİGÜL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REEL SİNÜS FREKANS KESTİRİCİLERİN KARŞILAŞTIRMALI İNCELENMESİ

Eda YENİGÜL

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof Dr.Erdoğan DİLAVEROĞLU

Elektronik Sinyal işleme literatüründe sıklıkla karşılaşılan gürültü içeren reel sinüzoide ait frekans kestirimi bu tez çalışmasının temelini oluşturmaktadır. Bu amaçla, reel sinüs veri modeli için mevcut iki frekans kestirim yöntemi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Yazılım ortamında performans karşılaştırmaları gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frekans Kestirimi, Reel Sinüs, Yakın Frekanslar

2014, vii + 67 sayfa.

ABSTRACT

Master Thesis

A COMPARATIVE STUDY OF REAL SINUSOIDAL FREQUENCY ESTIMATORS

Eda YENİGÜL

Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electronic Engineering

Supervisor: Prof Dr.Erdoğan DİLAVEROĞLU

This thesis deals with the estimation of the frequency of real sinusoid with noise which is frequently seen in signal processing literature. For this aim, the detailed comparison of the present two frequency estimation methods for real sinusoid data model were studied. Performance comparisons of these methods were discussed in software.

Key words: Frequency Estimation, Real Sinusoid, Closely-spaced Frequencies

2014, vii + 67 pages.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımda sağladığı katkılar ve olumlu yönlendirmeleri için danışman hocam Prof Dr. Erdoğan Dilaveroğlu'na teőekkürlerimi sunarım.

Beni yetiőtiren, bu günlere getiren, her zaman yanımda olan ve bana her konuda destek olan aileme minnettarım.

EDA YENİGÜL

13/10/2014

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	2
2.1. Kestirim Teorisi.....	2
2.2. Frekans Kestirimi.....	5
2.3. Cramer Rao Sınırı.....	6
2.4. Modifiye Cramer Rao Sınırı.....	7
2.5. Kestirim Yöntemleri.....	7
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
3.1. Veri Modeli.....	9
3.2. Gürültü Modeli ve Sinyal Gürültü Oranı.....	9
3.2.1. Beyaz Gauss Gürültü.....	9
3.2.2. Sinyal Gürültü Oranı.....	10
3.3. En Küçük Varyanslı Yansız Kestirici(MVU).....	10
3.3.1. Yansız Kestirici.....	10
3.3.2. En Küçük Varyans Kriteri.....	10
3.4. En Küçük Kareler Frekans Kestirim Metodu.....	11
3.4.1. Giriş.....	11
3.4.2. En Küçük Kareler Yaklaşımı.....	11
3.4.3. En Küçük Kareler Frekans Kestirim Metodu Algoritması.....	12
3.5. Otokorelasyon Frekans Kestirim Metodu.....	14
3.5.1. Otokorelasyon Frekans Kestirim Metodu Algoritması.....	14
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	17
4.1. En Küçük Kareler Frekans Kestirimi Performans Analizi.....	17
4.2. Otokorelasyon Meodu Frekans Kestirimi Performans Analizi.....	24
4.3. Kestiricilerin Karşılaştırmalı Performans Analizi.....	36

5.	SONUÇ	45
6.	KAYNAKLAR	46
8.	EKLER.....	47
9.	EK 1	48
10.	EK 2	53
11.	EK 3.....	60
12.	ÖZGEÇMİŞ	67

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
A	Öngörü Matrisi
σ^2	Gürültünün varyansı
θ	Bilinmeyen Parametre
$\hat{\theta}$	θ 'nın kestiricisi
ω_0	Reel sinüsün frekans parametresi
φ_0	Reel sinüsün fazı
α_0	Reel sinüsün genliği
N	Toplam Örnek Sayısı
E	Beklenen Değer
y	Veri Vektörü
var	Varyans
u_n	Gauss gürültü bileşeni
ρ_k	Gürültü otokorelasyonu
M	Veri Modelinin Derecesi
r_k	Otokorelasyon Katsayısı
\hat{r}_k	Otokorelasyon Katsayı Kestiricisi
δ	Kesirli Düzeltme Sapması
μ	Veri Modelinin DC Bileşeni

Kısaltmalar	Açıklama
PDF	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu(Probability Density Function)
SNR	Sinyal Gürültü Oranı (Signal to Noise Ratio)
MVU	En Küçük Varyanslı Yansız(Minimum Variance Unbiased)
MSE	Ortalama Karesel Hata(Minimum Square Error)
CRLB	Cramer Rao Sınırı
MCRLB	Modifiye Cramer Rao Sınırı

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Örnek ortalaması ve birinci örnek değeri için histogramlar.....	5
Şekil 4.1 En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=50$ SNR=10 dB için ortalama karesel hatanın (MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	17
Şekil 4.2. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=100$ SNR=10 dB için ortalama karesel hatanın (MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	18
Şekil 4.3. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=200$ SNR=10 dB için ortalama karesel hatanın (MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	19
Şekil 4.4. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=50$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	20
Şekil 4.5. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=100$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	21
Şekil 4.6. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=200$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	22
Şekil 4.7. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde SNR=10dB ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	23
Şekil 4.8. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $\omega_0 = 0,4 \pi$ ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	24
Şekil 4.9 Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$ $q=7$, SNR=10 dB, $N=50$ için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	25

Şekil 4.10. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $q=7$ SNR=10 dB $N=100$ için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	26
Şekil 4.11. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $q=7$ SNR=10 dB $N=200$, için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	27
Şekil 4.12. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $q=7$, $N=50$ $\omega_0=0,4 \pi$ için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	28
Şekil 4.13. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $q=7$ $N=100$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	29
Şekil 4.14. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2, q=7, N=20$ $\omega_0=0,4 \pi$ için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	30
Şekil 4.15. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde SNR=10dB, $p=2$, $q=7$ ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	31
Şekil 4.16. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $\omega_0=0,4 \pi$, $p=2$ $q=7$ ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	32
Şekil 4.17. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$ SNR=10dB, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	33
Şekil 4.18. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $\omega_0=0,4 \pi$ $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	34
Şekil 4.19. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=5$ SNR=10dB $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi.....	35

Şekil 4.20. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=5$, $\omega_0=0,4\pi$ $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	36
Şekil 4.21. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde SNR=10dB, $p=2$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı ω_0/π ile değişimi.....	37
Şekil 4.22. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $\omega_0=0,4\pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi...	38
Şekil 4.23. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde SNR=10dB, $p=2$, $N=200$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı ω_0/π ile değişimi.....	39
Şekil 4.24. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $\omega_0=0,4\pi$, $q=7$ ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) sinyal gürültü oranı(SNRdB) ile değişimi...	40
Şekil 4.25. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde SNR=10dB, $p=5$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) oranlanmış frekans farkı ω_0/π ile değişimi.....	41
Şekil 4.26. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=5$, $\omega_0=0,4\pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi...	42
Şekil 4.27. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde SNR=10dB, $p=2$, $q=7$, $N=100$ için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı ω_0/π ile değişimi.....	43
Şekil 4.28. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile Frekans Kestiriminde $p=2$, $q=7$, $\omega_0=0,4\pi$, $N=100$ için Ortalama Karesel Hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi.....	44

1.GİRİŞ

Modern kestirim teorisi pek çok elektronik sinyal işleme sisteminde kullanılan temel süreçlerden birini oluşturmaktadır. Bu sistemler içerisinde; radar, sonar, konuşma görüntü işleme, biyomedikal, haberleşme, kontrol ve sismoloji sayılabilir. Bu sistemlerin tümünde ortak problem bir grup parametreye ait değerlerin kestirimidir.

Gürültü tarafından bozulmuş bir veriye ait sinüzoidal parametre kestirimi sinyal işleme literatüründe sıklıkla karşılaşılan bir problemdir. Pek çok uygulamada kesin bir frekans kestirimi zorunludur. Bu yüzden gürültü içeren tekil bir sinüzoidde ait frekansın en doğru ve en etkin biçimde kestirimi oldukça önemli bir problem haline gelmiştir.

Tez çalışmasında reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sinüs sinyalinden oluşan veri modeli ele alınmıştır. Bu veri modelinde frekans parametrelerinin kestirimi için literatürdeki iki kestirim yöntemi ve bu yöntemlere ait olan algoritmalar ele alınmıştır. Frekans kestirim yöntemlerinin performansları Cramer Rao sınırı performans ölçütü olarak seçilerek karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin Cramer Rao sınırlarının çözümsel olarak elde edilerek model parametrelerine olan bağılıkları karşılaştırılmıştır.

Yapılan karşılaştırmalar sonucunda frekansın en etkin ve doğru şekilde ve aynı zamanda en az işlemle gerçekleştirilebilmesi için kullanıma en uygun frekans kestirim yönteminin belirlenmesi üzerinde çalışılmıştır.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1. Kestirim Teorisi

Sinyal işleme alanında bilgi edinimi amacıyla tasarlanmış olan sistemlerin paylaştıkları ortak problem bir grup parametrenin kestirimine olan ihtiyaçlarıdır. Parametre değerlerinin kestirimi sürekli zaman dalga biçimlerinden örneklenen veri kümeleri kullanılarak gerçekleştirilir.

Matematiksel olarak ifade edilirse, bilinmeyen θ parametresine bağlı N adet veriden oluşan $\{y(0), y(1), \dots, y(N-1)\}$ kümesi kullanılarak (2.1.1) eşitliğinde belirtilen ifade ile $\hat{\theta}$ kestiricisi aracılığıyla θ ' nın değeri elde edilir.

$$\hat{\theta} = g (y(0), y(1), \dots, y(N-1)) \quad (2.1.1)$$

Burada, g kestiriciyi tanımlayan fonksiyondur. Kestirimin başarısı bu fonksiyonun seçimine bağlıdır.

Başarılı kestiricilerin tanımlanması için bilinmeyen parametreye bağlı veri kümesinin modellenmesi gerekir. Veriler doğal olarak rasgele oldukları için olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) yoluyla tanımlanırlar. PDF, bilinmeyen parametre θ ' nın bir fonksiyonu biçiminde düzenlenirse farklı θ değerleri için farklı değerler alan PDF kümesi elde edilir. $N=1$ ve θ parametresi ortalama değer olsun. Bu durumda verinin olasılık yoğunluk fonksiyonu (2.1.2) denklemi yardımı ile elde edilir.

$$P(y(0);\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y(0) - \theta)^2\right) \quad (2.1.2)$$

PDF fonksiyonunun belirlenmesi başarılı kestiricilerin tasarımı için önemli bir adımdır. Gerçek problemlerde PDF fonksiyonu verilmez. Problemin şartlarına ve sınırlamalarına uygun, aynı zamanda matematiksel olarak kolay bir tanesinin seçilmesi gerekir.

Uygun PDF fonksiyonu seçildikten sonra, problem en iyi kestiricinin belirlenmesi problemine dönüşür. Kestirici, veri kümesinin her bir gerçekleşmesinde θ ' ya bir değer atayan kural gibi düşünülebilir.

Verilen bir gerçeklenme için elde edilen $\hat{\theta}$ değeri ise θ 'nın bir kestirim değeridir. Kestirici ve kestirim değeri arasındaki ilişki rasgele deęiŐken ve onun aldığı bir değer arasındaki iliŐkiye benzetilebilir.

Gürültü içeren ve bir doğru akım bileşeni A 'dan oluşan bir veri kümesi (2.1.3) eşitliği ile ifade edilir.

$$y(t) = A + e(t), \quad t=0,1, \dots, N-1 \quad (2.1.3)$$

Burada $e(t)$ sıfır ortalamalı gürültü bileŐenidir. Veri kümesi $\{y(0), y(1), \dots, y(N-1)\}$ kullanılarak bilinmeyen A parametre değerini kestirebilmek için veri kümesinin ortalama değeri olan bir kestirici (2.1.4) eşitliği ile öngörölür.

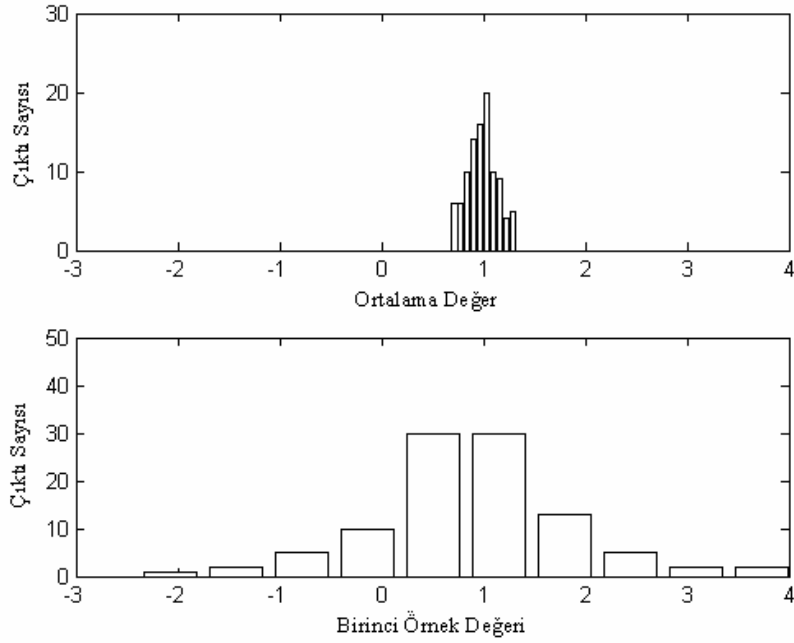
$$\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t) \quad (2.1.4)$$

Bir başka kestirici (2.1.5) eşitliğinde verildiği biçimde olabilir:

$$\check{A} = y(0) \quad (2.1.5)$$

Bu kestiricide veri kümesinin bütün elemanları kullanılmadığından performansının yüksek olmayacağını ilk bakıŐta söylenebilir. Gürültü etkisini azaltacak herhangi bir ortalama değer alınmamaktadır.

Kestirici, veri kümesinin bir fonksiyonudur ve bir rasgele deęiŐkendir. \check{A} kestiricisi sadece bir gerçeklenme için gerçek değere yakın bir sonuç vermektedir. Kestirici performansının belirlenmesi işlemi istatistiksel olarak yapılmalıdır. İncelenen veri modelinde $A=1$ değeri sabit tutularak gürültü bileşeni $e(t)$ 'in farklı değerlerinin eklenmesi yoluyla $y(t)$ için bir gerçeklenme kümesi elde edilir. Daha sonra her bir veri kümesi için iki kestiricinin değerlerini belirleyerek histogramlar çizilir. 100 gerçeklenme için elde edilen histogramlar Şekil 2.1 'de verilmiŐtir (Kay 1993).



Şekil 2.1. Örnek ortalaması ve birinci örnek değeri için histogramlar

Şekilden de görüleceği gibi \hat{A} , daha iyi bir kestiricidir, gerçek değer $A=1$ civarında daha fazla yoğunlaşmıştır. \hat{A} 'nın daha iyi bir kestirici olduğunu kanıtlanabilmesi için varyansının daha az olduğu gösterilmelidir. Modelde yer alan gürültü bileşeni $e(t)$ için daha önce yapılan varsayıma (sıfır ortalamalı olması) ek olarak ilişkisiz ve eşit σ^2 varyansa sahip olduğu varsayımları yapılır. Daha sonra ilk olarak her iki kestiricinin ortalama değerleri (2.1.6) ve (2.1.7) denklem takımları ile elde edilir:

$$E(\hat{A}) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t)\right) \quad (2.1.6)$$

$$E(\hat{A}) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} E(y(t))$$

$$E(\hat{A}) = A$$

$$E(\tilde{A}) = E(y(0)) = A \quad (2.1.7)$$

Ortalama değerde her iki kestirici de gerçek değeri vermektedir.

Kestiricilerin varyans değerleri (2.1.8) ve (2.1.9) denklemleri yardımı ile elde edilir.

$$\text{var}(\hat{A}) = \text{var}\left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t)\right) \quad (2.1.8)$$

$$\begin{aligned}
\text{var}(\hat{A}) &= \frac{1}{N^2} \sum_{t=0}^{N-1} \text{var}(y(t)) \\
\text{var}(\hat{A}) &= \frac{\sigma^2}{N} \\
\text{var}(\check{A}) &= \text{var}(y(0)) \\
\text{var}(\check{A}) &= \sigma^2
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

\hat{A} kestiricisinin varyansı toplam veri sayısı ile ters orantılı iken, \check{A} kestiricisinin varyansı veri uzunluğu ne olursa olsun sabittir, σ^2 'dir.

Sonuç olarak bir kestiricinin iyi bir kestirici olabilmesi için ortalama değerde gerçek değeri vermesi (yansız olması) tek başına yeterli değildir. Yansız bir kestiricinin performansı varyansının küçük olması ile ilişkilidir.

2.2. Frekans Kestirimi

Sinyal işleme alanında karşılaşılan bir çok problem gürültü içindeki bir ya da daha fazla sönümlü veya sönümsüz sinüsün parametrelerinin kestirimine dayanmaktadır.

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli birden fazla sinyal içeren modellerin birer prototipidir ve bu model için tasarlanmış parametre kestiricilerin performans analizinde sıklıkla kullanılmaktadır.

Bir veri modelinde, modele doğrusal olmayan biçimde bağlı parametrelerin kestirimi yapıldıktan sonra doğrusal biçimde bağlı diğer parametrelerin kestirimi, model doğrusal model biçiminde düzenlenebildiği için, en küçük kareler yöntemi ile kolaylıkla gerçekleştirilir (So ve ark. 2013).

Frekans parametreleri sinüslere doğrusal olmayan biçimde bağlı iken faz ve genlik parametreleri doğrusal biçimde bağlıdır. Frekans parametreleri kestirildikten sonra faz ve genlik parametrelerinin kestirimi kolay bir şekilde gerçekleştirilir.

Frekans kestirimi sinyal işleme alanında oldukça fazla ilgi çeken bir konudur ve bu tez çalışmasının temel amacını oluşturmaktadır.

2.3. Cramer-Rao Sınırı

Cramer Rao (C-R Sınırı), herhangi bir yansız kestiricinin varyansı için bir alt sınır ifadesidir. Kullanılan kestiriciden bağımsız olarak veri modelleri için elde edilebilecek en yüksek performansı vermektedir. Bu yüzden Cramer Rao sınırı kestiricilerin performansını değerlendirmede bir ölçüt olarak kullanılmaktadır.

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin Cramer Rao (C-R) sınırları çözümsel olarak elde edilmiştir (Kay 1993).

Beyaz Gauss gürültü içindeki θ bilinmeyen parametreye sahip sinyal (2.3.1) denkleminde verilen biçimde ifade edilir.

$$y(t) = s(t; \theta) + e(t), \quad t=0,1,\dots,N-1 \quad (2.3.1)$$

Olabilirlik fonksiyonu (2.3.2) denkleminde verilen biçimde ifade edilir.

$$p(y; \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} (y(t) - s(t; \theta))^2 \right\} \quad (2.3.2)$$

Olabilirlik fonksiyonunun ilk türevi (2.3.3) denkleminde verilen biçimde ifade edilir.

$$\frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} (y(t) - s(t; \theta)) \frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta} \quad (2.3.3)$$

Olabilirlik fonksiyonunun düzenlilik koşulunu sağladığı kabul edilirse (2.3.3) denkleminin beklenen değeri, bütün θ' lar için (2.3.4) ifadesinde verilen biçimde 0 olduğu görülür.

$$E\left[\frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta}\right] = 0 \quad (2.3.4)$$

Olabilirlik fonksiyonunun ikinci türevi alınır ve denklem (2.3.5) elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ (y(t) - s(t; \theta)) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta} \right) \right) - \frac{(\partial s(t; \theta))^2}{\partial \theta} \right\} \quad (2.3.5)$$

(2.3.4) ifadesinin beklenen değeri alınarak (2.3.6) eşitliği elde edilir.

$$E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta} \right)\right] = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \left(\frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \quad (2.3.6)$$

Fisher bilgi matrisi $I(\theta)$, denklem (2.3.7) ifadesi ile elde edilir.

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial \ln p(y;\theta)}{\partial\theta}\right)\right] \quad (2.3.7)$$

Bilinmeyen θ parametresinin varyansı denklem (2.3.8) yardımı ile elde edilir.

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{t=0}^{N-1} \left(\frac{\partial s(t;\theta)}{\partial\theta}\right)^2} \quad (2.3.8)$$

Cramer Rao sınırı modele ait Fisher Bilgi Matrisinin evriği alınarak elde edilir. Fisher Bilgi Matrisi ile varyans arasındaki ilişki (2.3.9) eşitliği ile gösterilmiştir.

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{I(\theta)} \quad (2.3.9)$$

Sınır ifadesi sinyalin θ 'ya bağlılığının önemini göstermektedir. Bilinmeyen parametrenin değişimleri ile hızlı değişen sinyaller doğru kestiricilere neden olurlar.

2.4. Modifiye Cramer Rao Sınırı

Modifiye Cramer Rao Sınırı, Fisher bilgi matrisinin birden fazla sinyal içeren veri modelleri için karmaşık bir yapıya sahip olmasından dolayı C-R sınırının çözümsel olarak elde edilmesi yerine sayısal yoldan hesaplanarak elde edilmektedir.

Reel beyaz Gauss gürültü içeren sinüs fonksiyonu için bilinmeyen parametrelerin kestirimine ilişkin modifiye C-R sınır ifadeleri incelenmiştir (Moeneclaey 1998).

Frekans kestiricilerin performans ölçüm kriteri olan Modifiye Cramer Rao Sınırı ve ifadeleri EK 1 'de elde edilmiştir.

Çözümsel sınır ifadeleri performans limitlerinin kuramsal olarak incelenmesine ve en uygun kestirim senaryolarının hazırlanmasına olanak verir.

2.5. Kestirim Yöntemleri

Gürültü tarafından bozulmuş bir dataya ait sinüzoidal parametre kestirimi sinyal işleme literatüründe sıklıkla karşılaşılan bir problemdir. Pek çok uygulamada kesin bir frekans kestirimi zorunludur. Bu yüzden gürültü içeren tekil bir sinüzoidde ait frekansın en doğru ve en etkin biçimde kestirimi oldukça önemli bir problem haline gelmiştir.

En küçük kareler metodu ile reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için frekans parametrelerinin kestirimi ele alınmıştır (So ve ark.2013). Gerekli matematiksel kabuller ve ifadeler eşliğinde kestiricinin performansı hem teorik hem de sayısal olarak incelenmiştir. En küçük kareler frekans kestirim metodunda teorik kestirim yaklaşım ifadeleri EK 2 'de elde edilmiştir.

Reel beyaz gauss gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için frekans parametrelerinin kestirimi otokorelasyon frekans kestirim metodu yardımı ile incelenmiştir (Ksibi ve ark.2010). Veri modelindeki sinüzoidal sinyale ait otokorelasyon katsayıları kullanılarak frekans kestirimi gerçekleştirilmiştir. Belirlenen kabuller ve matematiksel ifadeler kullanılarak sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken kestiricinin performansı hem teorik hem de sayısal olarak incelenmiştir. Otokorelasyon teorik kestirim yaklaşım ifadeleri EK 3 'de elde edilmiştir.

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Veri Modeli

Bu bölümde tez çalışmasında ele alınan gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli tanıtımı yapılmıştır. Bu model birden fazla sinyal içeren modellerin birer prototipidir ve sinyal parametreleri için tasarlanmış kestiricilerin başarısını test etmede yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bir reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli (3.1) denklemindeki şekilde tanımlanabilir.

$$y(t) = \alpha_0 * \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + e(t), \quad t=1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

Burada α_0 , φ_0 ve $\omega_0 \in (0, \pi)$ parametreleri sinüsün sırasıyla genliğini, fazını ve frekansını göstermektedir. N toplam örnek sayısını ve $e(t)$ toplanır reel gürültü bileşenini temsil etmektedir.

3.2.Gürültü Modeli ve Sinyal Gürültü Oranı

Bu bölümde tez çalışmasında gürültü bileşeni olarak seçilen gürültü modellerinin zaman bölgesi istatistiksel özellikleri verilmiş ve sinyal gürültü oranının tanımı yapılmıştır.

3.2.1. Beyaz Gauss Gürültü

Tez çalışmasında reel veri modelinde, sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı reel toplanır beyaz gauss gürültüsü gürültü bileşeni olarak seçilmiştir.

Reel beyaz gürültü bileşeni $e(t)$ 'nin zaman bölgesi istatistiksel özellikleri (3.2.1) ve (3.2.2) eşitliğinde verilmektedir.

$$E[e(t)] = 0 \quad (3.2.1)$$

$$E[e(t)e(s)] = \sigma^2 \delta_{1s} \quad (3.2.2)$$

Burada δ kronecker delta fonksiyonu ve $t, s = 1, 2, \dots, N$.

Gürültü bileşeninin gauss olması, gürültü örneklerinin genlik dağılımının gauss biçiminde olduğunu ifade eder.

3.2.2 Sinyal Gürültü Oranı

Tez çalışmasında sinyal gürültü oranı SNR ile gösterilmiştir. Reel veri modeli için (3.2.3) eşitliği ile tanımlanmıştır.

$$SNR = \frac{\alpha_0^2}{2\sigma^2} \quad (3.2.3)$$

3.3 En Küçük Varyanslı Yansız Kestirici (MVU)

3.3.1. Yansız Kestirici

Bir kestiricinin yansız olması, o kestiricinin ortalama değerde, bilinmeyen parametrenin doğru değerini vereceğini anlatır. Matematiksel olarak ifade edilirse, bir kestirici (3.3.1) eşitliğinde belirtilen koşulu sağlıyorsa yansızdır:

$$E(\hat{\theta}) = \theta, \quad a < \theta < b \quad (3.3.1)$$

Burada (a, b) θ 'nin mümkün olan değer aralığıdır.

Bir kestiricinin yanı , (3.3.2) denkleminde verilen biçimde ifade edilir:

$$b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (3.3.2)$$

Bir kestiricinin yansız olması, onun iyi bir kestirici olduğunu söylemek için tek başına yeterli değildir. Yansızlık, sadece ortalama değerde kestiricinin bilinmeyen parametrenin doğru değerini vereceğini garanti eder.

3.3.2. En Küçük Varyans Kriteri

En uygun kestirici aranırken bir takım uygunluk kriterlerine ihtiyaç var. En doğal olanlardan bir tanesi (3.3.3) denkleminde belirtildiği biçimde tanımlanan ortalama karesel hatadır.(MSE);

$$mse(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad (3.3.3)$$

MSE, kestiricinin doğru değere göre ortalama karesel sapmasının bir ölçütüdür.

Bu ölçütü daha iyi anlamak için ortalama karesel hata ifadesi açık olarak yazıldığında denklem (3.3.4) elde edilir.

$$\begin{aligned}mse(\hat{\theta}) &= E\{[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2]\} \\ &= var(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2 \\ mse(\hat{\theta}) &= var(\hat{\theta}) + b^2(\theta)\end{aligned}\quad (3.3.4)$$

MSE, kestirici varyansı ve yandan oluşmaktadır. MSE, yana bağlı olduğu için bu kriteri benimsemek bizi gerçekleşmesi mümkün olmayan kestiricilere yönlendirebilir. Bu sebepten dolayı en küçük MSE kestiricinin kullanımından kaçınılmalıdır. Alternatif bir yaklaşım ise yanı sıfır değerinde sabit tutarak en küçük varyansı veren kestiriciyi aramak olabilir. Bu kestirici en küçük varyanslı yansız (MVU) kestirici olarak isimlendirilir. Yansız bir kestiricinin varyansının küçültülmesi, aynı zamanda, kestirim hatası($\hat{\theta} - \theta$)'nın olasılık yoğunluk fonksiyonunun (PDF) sıfır civarında yoğunlaştırılması etkisine de sahiptir.

3.4. En Küçük Kareler Frekans Kestirim Metodu

3.4.1. Giriş

Bu bölümde reel beyaz gauss gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için frekans parametrelerinin kestirimi En küçük kareler frekans kestirim metodu incelenmiştir (So ve ark. 2013). Kestirim metodu kestiricinin performansını sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken incelemiştir.

3.4.2. En Küçük Kareler Yaklaşımı

Bir kestiricinin iyi bir kestirici olabilmesi için ortalama değerde gerçek değeri vermesi (yansız olması) ve minimum varyansa sahip olması beklenir. Varyansın belirlenmesinde başarı ölçütü gerçek parametre değeri ile kestirim işlemi ile elde edilen parametre arasındaki tutarsızlığı minimize etmektir. En küçük kareler yaklaşımında, gürültü içeren veri modeli ile gürültü içermeyen veri modelindeki parametrelerin farkının karesini minimize etmek amaçlanır.

Reel beyaz gauss gürültü içindeki reel sinüslerden oluşan zaman serisi veri modelinde N adet veriden oluşan y_n veri kümesi, sinüsoidal bir s_n sinyali ve u_n gürültü fonksiyonundan oluşacak şekilde (3.4.1) eşitliği ile ifade edilir.

$$y_n = s_n + u_n \quad 1 \leq n \leq N \quad (3.4.1)$$

En küçük kareler kestirim metodunda, y_n sinyal kümesini oluşturan parametrelerin s_n veri kümesini oluşturan parametrelere yakın olması amaçlanır. Yakınlığın ölçütü en küçük kareler yaklaşım hata kriteri (3.4.2) eşitliği ile ifade edilir (Kay 1993).

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - s_n)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.4.2)$$

(3.4.2) eşitliğindeki θ , s_n veri kümesini oluşturan n parametrelerine bağlı bir ifadedir. Bu ifade en küçük kareler yaklaşım hata kriteri $J(\theta)$ 'yı minimize eden değerdir ve (3.4.3) eşitliği ile elde edilir.

$$\frac{d}{d\theta} (J(\theta)) = 0 \quad (3.4.3)$$

Elde edilen θ , en küçük kareler kestirim metodunda elde edilen kestiricidir. (3.4.3) eşitliği, en küçük kareler frekans kestirim yönteminde lineer fonksiyonlu veri kümeleri için pratik bir çözümdür. Ancak lineer ifadeler içermeyen veri kümeleri için en küçük kareler yaklaşım hata kriteri, kestirilmesi istenen parametreye göre Taylor seri açılımları kullanılarak elde edilir. Teorik ortalama karesel hata ve yanlılık ifadeleri EK 2'de elde edilmiştir.

3.4.3. En Küçük Kareler Frekans Kestirim Metodu Algoritması

En küçük kareler frekans kestirim metodu ile veri modelinde toplam karesel hatayı minimize edecek şekilde ifadeler ve trigonometrik eşitlikler yardımı ile parametre kestirimi yapılır.

En küçük kareler frekans kestirim metodunda aşağıdaki adımlar ile frekans kestirimi gerçekleştirilir.

Adım 1: Reel beyaz gauss gürültü içindeki reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modelinde denklem (3.4.4) yardımı ile y_n veri kümesi elde edilir.

$$y_n = \alpha \sin(\omega_0 n + \varphi_0) + u_n, \quad 1 \leq n \leq N \quad (3.4.4)$$

Burada u_n gürültü fonksiyonu rasgele üretilen beyaz gauss gürültüsüdür ve sinyal gürültü oranına bağlı bir fonksiyondur. Modelde ele alınan örnek sayısı N ($n=0.1.2....N$) olarak belirtilmektedir. α , φ_0 ve $\omega_0 \in [0, \pi]$ parametreleri sinüsün sırasıyla genliğini, fazını ve frekansını temsil etmektedir. Sinyalin genliği (α), fazı (φ_0), ele alınacak olan y_n vektörünün boyutu (N) ve Sinyal Gürültü Oranı (SNRdB) belirlenerek y_n veri kümesi elde edilir.

Sinüsoidal bir s_n sinyali (3.4.5) eşitliğinde belirtilen trigonometrik ifadeler yardımıyla yeniden düzenlenir ve (3.4.6) eşitliği elde edilir.

$$\cos(\omega_0(n) + \varphi) + \cos(\omega_0(n-2) + \varphi) = a_0 \cos(\omega_0(n-1) + \varphi), \quad a_0 = 2\cos(\omega_0) \quad (3.4.5)$$

$$s_n + s_{n-2} - 2a_0 s_{n-1} = 0 \quad (3.4.6)$$

Adım 2: En küçük kareler yaklaşım hata kriter fonksiyonu bir J fonksiyonu (3.4.7) denklemi ile elde edilir.

$$J(a_0) = \sum_{n=3}^N (y_n + y_{n-2} - 2a_0 y_{n-1})^2 \quad (3.4.7)$$

Burada a_0 , kestirilmesi istenen bilinmeyen parametreye bağlı bir fonksiyondur ve (3.4.8) eşitliği ile ifade edilir.

$$a_0 = 2\cos(\omega_0) \quad (3.4.8)$$

Adım 3: Toplam karesel hatayı minimize eden \hat{a}_0 kestiricisi, (3.4.9) eşitliği ile elde edilir.

$$\frac{d}{d(a_0)} (J(a_0)) = 0$$

$$\frac{d}{d(a_0)} (J(a_0)) = 2 \sum_{n=3}^N (y_n + y_{n-2} - 2a_0 y_{n-1})(-2 y_{n-1}) = 0$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum_{n=3}^N (y_n + y_{n-2}) y_{n-1}}{2 \sum_{n=3}^N y_{n-1}^2} \quad (3.4.9)$$

Adım 4: \hat{a}_0 değeri kullanılarak bilinmeyen ω_0 frekansını kestirebilmek adına (3.4.10) ve (3.4.11) denklemleri kullanılır. $|\hat{a}_0| \leq 1$ şartı aranır. $\hat{\omega}_0$ elde edilir.

$$\hat{a}_0 \triangleq \cos(\hat{\omega}_0) \quad (3.4.10)$$

$$\hat{\omega}_0 = \arccos(\hat{a}_0) , \quad (3.4.11)$$

(3.4.11) 'de verilen ifadeye göre $\hat{\omega}_0$ elde edilir. Burada $\hat{\omega}_0$ 'nın elde edilmesinde cos fonksiyonunun tersi alınabilecek şekilde \hat{a}_0 değeri elde edilmeye çalışılır. Cos fonksiyonu ile tersi alınamayan \hat{a}_0 katsayıları algoritmada kullanılmaz.

$|\hat{a}_0| > 1$ ise bu \hat{a}_0 frekansı kestirmek için kullanılmaz. Adım 1'e geri dönülür. y_n veri modelindeki u_n gürültü fonksiyonunun rasgele olması ile $|\hat{a}_0| \leq 1$ olacak şekilde \hat{a}_0 üretilir ve $\hat{\omega}_0$ elde edilir.

3.5. Otokorelasyon Frekans Kestirim Metodu

Bu bölümde reel beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümsüz sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için frekans parametrelerinin kestirimi otokorelasyon frekans kestirim metodu ile incelenmiştir (Ksibi ve ark.2010). Kestirim metodu kestiricinin performansını sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken incelemiştir.

3.5.1. Otokorelasyon Frekans Kestirim Metodu Algoritması

Otokorelasyon frekans kestirim metodu ile parametre kestirimi, reel sönümsüz sinüsten oluşan zaman serisi veri modelinde, otokorelasyon katsayıları kullanılarak elde edilir.

Otokorelasyon frekans kestirim metodunda aşağıdaki adımlar ile frekans kestirimi gerçekleştirir:

Adım 1: Reel beyaz gauss gürültü içindeki reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modelinde denklem (3.5.1) yardımı ile y_n veri kümesi elde edilir.

$$y_n = \alpha \sin(\omega_0 n + \varphi_0) + u_n , \quad 1 \leq n \leq N \quad (3.5.1)$$

Burada u_n gürültü fonksiyonu rasgele üretilen beyaz gauss gürültüsüdür ve sinyal gürültü oranına bağlı bir fonksiyondur. Modelde ele alınan örnek sayısı N ($n=0.1.2....N$) olarak belirtilmektedir. α , φ_0 ve $\omega_0 \in [0,\pi]$ parametreleri sinüsün sırasıyla genliğini, fazını ve frekansını temsil etmektedir.

Sinyalin genliği (α), fazı (φ_0), ele alınacak olan y_n vektörünün boyutu (N) ve sinyal gürültü oranı (SNRdB) belirlenerek y_n vektörleri elde edilir

Adım 2: Ele alınan veri modeli için normalize edilmiş gürültü otokorelasyonu (3.5.2) denkleminde göre hesaplanır.

$$\rho_k = \frac{E\{u_n u_{n-k}\}}{\sigma^2}, \quad \rho_k = 0, \quad k > M \quad \text{için} \quad (3.5.2)$$

Bu metotta “ M ” ele alınan y_n veri modelinin derecesini ifade etmektedir. ($M = 0$)

Reel sönümsüz sinüslerden oluşan veri modelinin otokorelasyon katsayıları (3.5.3) denkleminde göre bulunur.

$$r_k \triangleq E\{y_n y_{n-k}\} = \frac{\alpha^2}{2} \cos(k\omega_0) + \sigma^2 \rho_k \quad (3.5.3)$$

(3.5.3) formülünde görüleceği üzere y_n vektör bileşenlerinin beklenen değeri alınarak elde edilen otokorelasyon katsayıları arasında $r_{k-1} + r_{k+1} = 2 r_k \cos(\omega_0)$, $k > M+1$ şeklinde trigonometrik olarak bir ilişki bulunmaktadır.

$q > p > M+1$ olacak şekilde seçilen p ve q indis değerlerine göre r_k otokorelasyon katsayıları denklem (3.5.4) yardımı ile elde edilir. Otokorelasyon frekans kestirim metodunda $M = 0$ kabul edilmiştir.

$$\sum_{k=p}^q r_k (r_{k-1} + r_{k+1}) = 2 \cos(\omega_0) \sum_{k=p}^q r_k^2, \quad k > M+1 \quad (3.5.4)$$

\hat{r}_k Otokorelasyon katsayıları kestiricisi denklem (3.5.5) ile hesaplanır.

$$\hat{r}_k \triangleq \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N y_n y_{n-k} \quad (3.5.5)$$

Adım3: Veri modeli için tayin edilen değişkenler ve \hat{r}_k , veri modelinin otokorelasyon katsayıları kestiricileri değerleri kullanılarak \hat{a}_0 kestirici (3.5.6) denkleminde yardımıyla elde edilir.

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum_{k=p}^q \hat{r}_k (\hat{r}_{k-1} + \hat{r}_{k+1})}{2 \sum_{k=p}^q \hat{r}_k^2}, \quad (3.5.6)$$

Adım 4: \hat{a}_0 değeri kullanılarak bilinmeyen ω_0 frekansını kestirebilmek adına (3.5.7) ve (3.5.8) denklemleri kullanılır. $|\hat{a}_0| \leq 1$ şartı aranır. $\hat{\omega}_0$ elde edilir.

$$\hat{a}_0 \triangleq \cos(\hat{\omega}_0) \quad (3.5.7)$$

$$\hat{\omega}_0 = \arccos(\hat{a}_0) , \quad (3.5.8)$$

(3.5.8) 'de verilen ifadeye göre $\hat{\omega}_0$ elde edilir. Burada $\hat{\omega}_0$ 'nın elde edilmesinde cos fonksiyonun tersi alınabilecek şekilde \hat{a}_0 değeri elde edilmeye çalışılır. Cos fonksiyonu ile tersi alınamayan \hat{a}_0 katsayıları algoritmada kullanılmaz.

$|\hat{a}_0| > 1$ ise bu \hat{a}_0 frekansı kestirmek için kullanılmaz Adım 1'e geri dönülür. $y(n)$ veri modelindeki $u(n)$ gürültü fonksiyonunun rasgele olması ile $|\hat{a}_0| \leq 1$ olacak şekilde \hat{a}_0 üretilir ve $\hat{\omega}_0$ elde edilir.

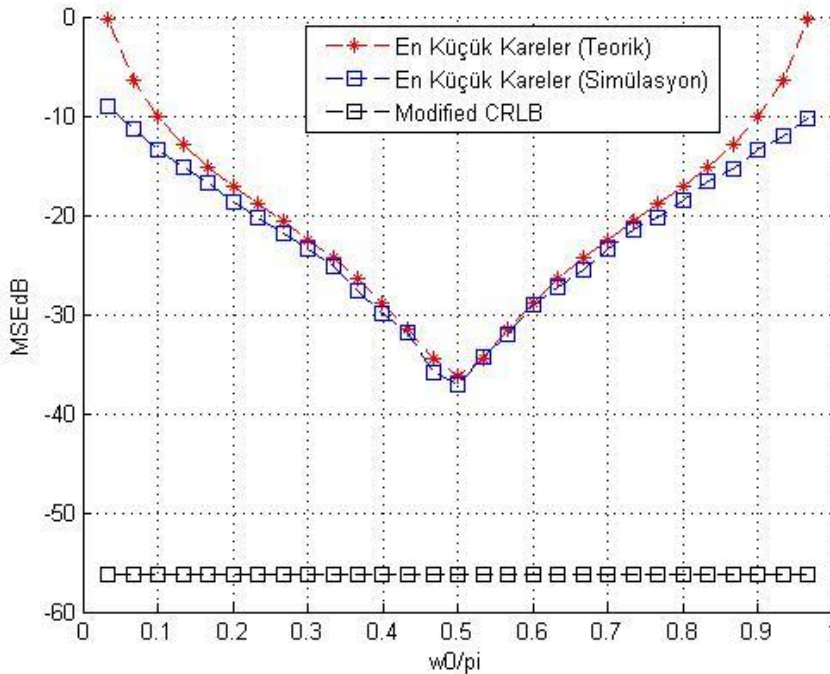
4.BULGULAR VE TARTIŞMA

Reel beyaz gauss gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan veri modelinde frekans parametresinin kestirimi en küçük kareler frekans kestirim metodu ve otokorelasyon frekans kestirim metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Kestiricilerin performansı sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.

4.1.En Küçük Kareler Frekans Kestirimi Performans Analizi

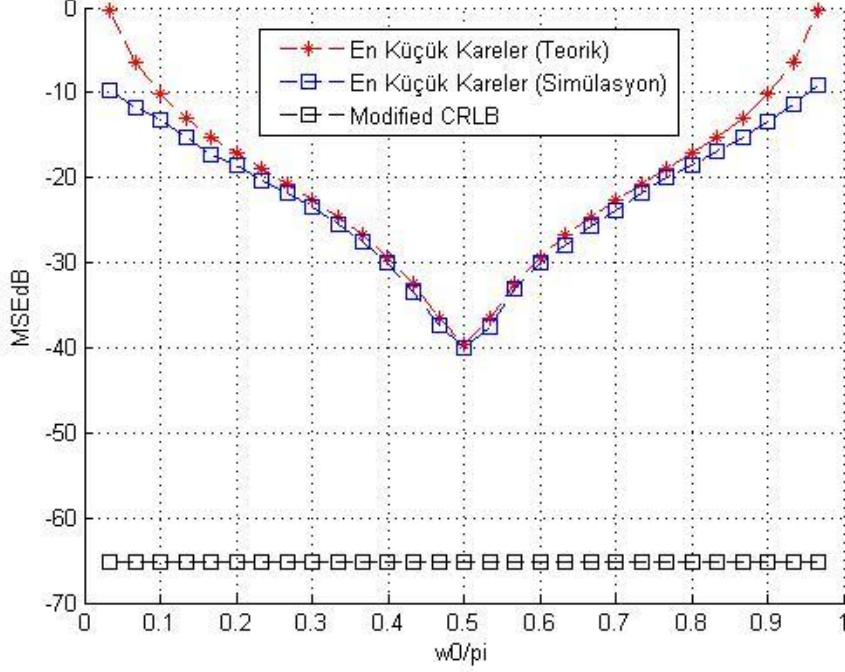
Veri modelinde, genlik parametresi $\alpha = 1$, sinyalin fazı $-\pi < \varphi_0 < \pi$ aralığında rastgele seçilerek ve gürültü bileşeni u_n olarak sıfır ortalamalı reel beyaz gauss gürültü kullanılmıştır. Farklı N örnek değerleri için benzetim sonuçları 200 Monte Carlo denemesi için elde edilmiştir.

Örnek 4.1.1: En küçük kareler frekans kestirim metodunda $N=50$, $SNR=10$ dB ve ortalama karesel hatanın (MSEdB) tayin edilen $\omega_0 \in [0, \pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.1’de gösterilmiştir.



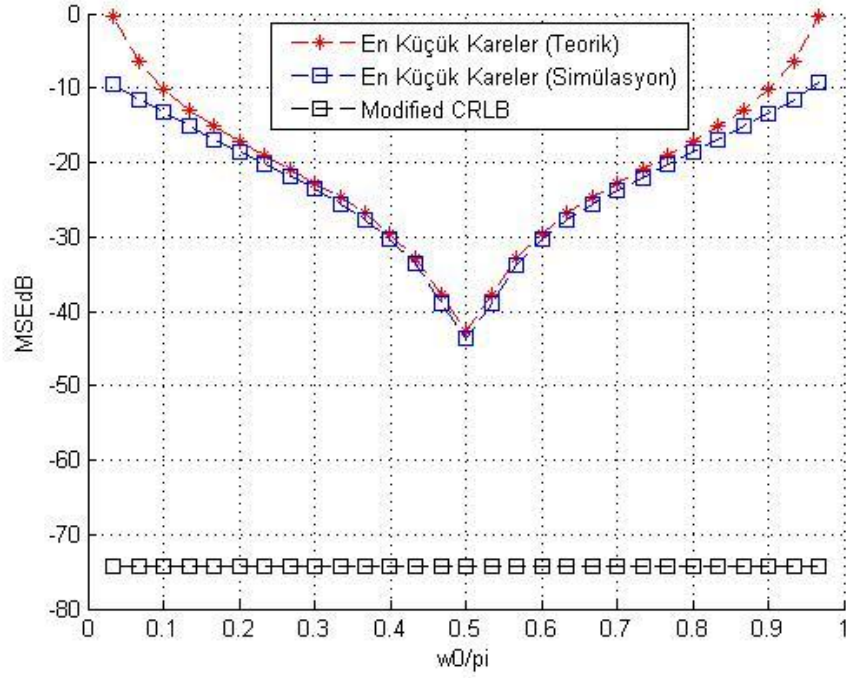
Şekil 4.1. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=50$ $SNR=10$ dB için ortalama karesel hatanın (MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi

Örnek 4.1.2: En küçük kareler frekans kestirim metodunda $N=100$, $\text{SNR}=10$ dB ve ortalama karesel hatanın(MSEdB) tayin edilen $\omega_0 \in [0,\pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.2’de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=100$, $\text{SNR}=10$ dB için ortalama karesel hatanın (MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi

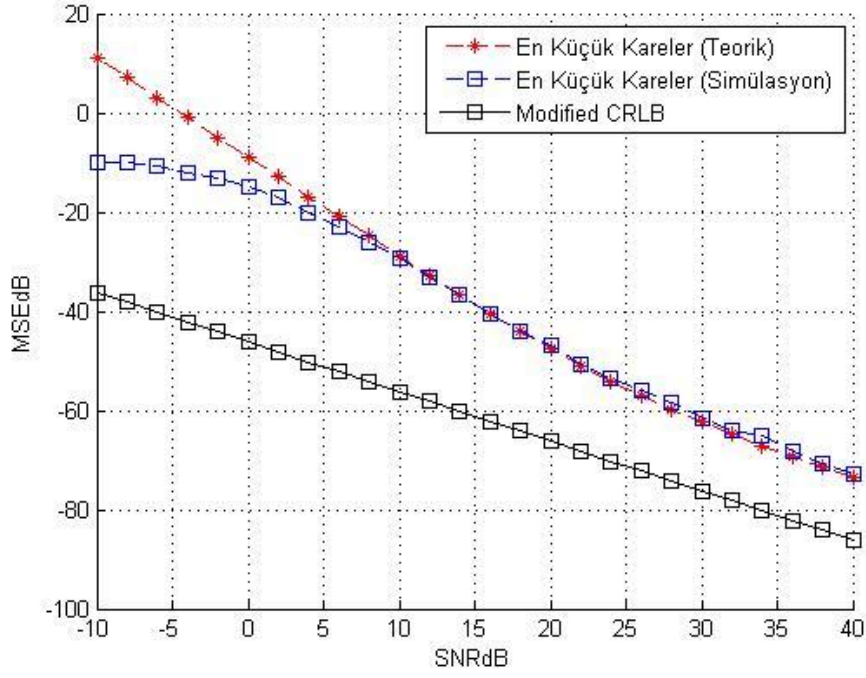
Örnek 4.1.3: En küçük kareler metodu ile frekans kestirim metodunda $N=200$, $\text{SNR}=10$ dB ve ortalama karesel hatanın(MSEdB) tayin edilen $\omega_0 \in [0,\pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.3’de gösterilmiştir.



Şekil 4.3. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=200$, $SNR=10$ dB için ortalama karesel hatanın (MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi

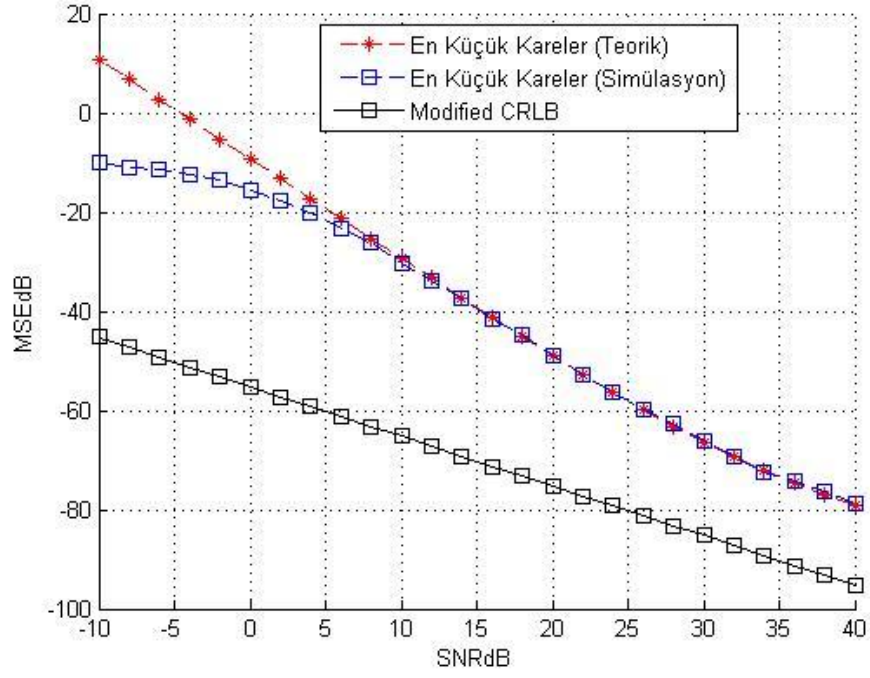
En küçük kareler metodu ile frekans kestiriminde N örnek sayısı arttıkça orta frekans bölgesinde ortalama karesel hata değerlerinin düştüğü görülmektedir.(Şekil 4.3) Bu beklenen bir sonuçtur. N örnek sayısı arttıkça kestirimin başarısı artmaktadır.

Örnek 4.1.4: En küçük kareler metodu ile frekans kestiriminde $N=50$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.4’de gösterilmiştir.



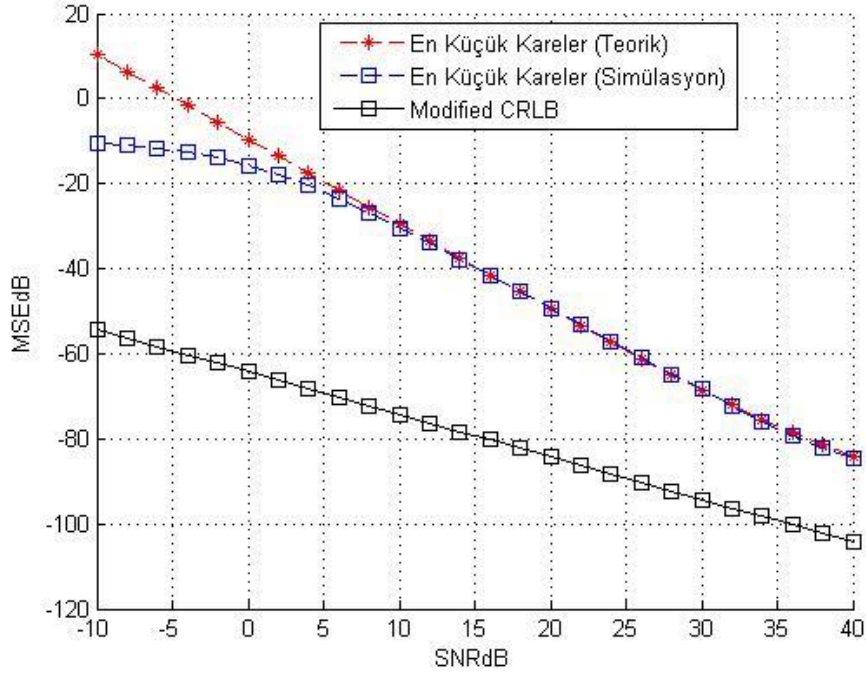
Şekil 4.4. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=50$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

Örnek 4.1.5: En küçük kareler metodu ile frekans kestiriminde $N=100$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.5’de gösterilmiştir.



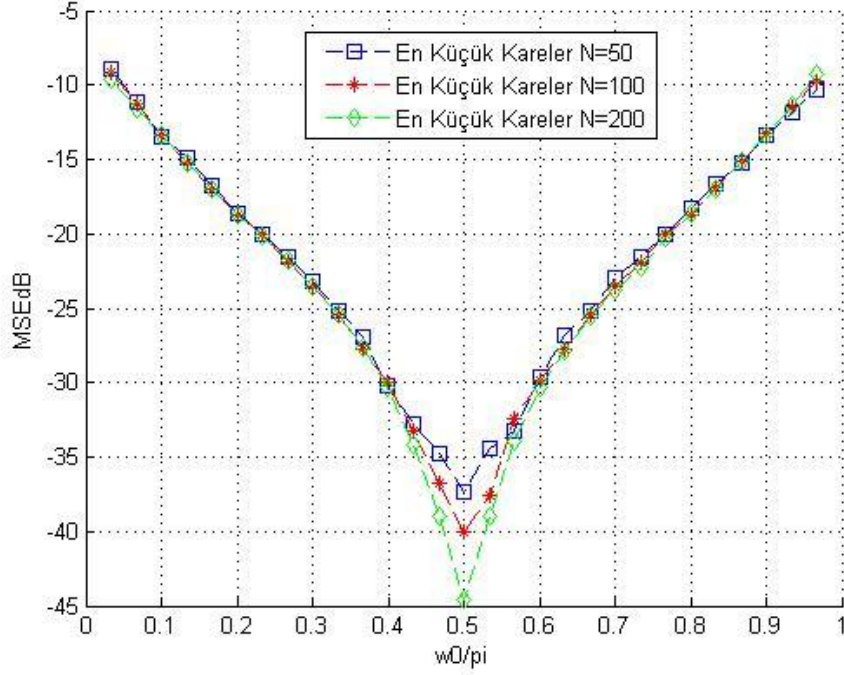
Şekil 4.5 En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=100$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

Örnek 4.1.6: En küçük kareler metodu ile frekans kestiriminde $N=200$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ değerleri için ortalama karesel hatanın (MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.6’de gösterilmiştir.



Şekil 4.6 En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $N=200$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

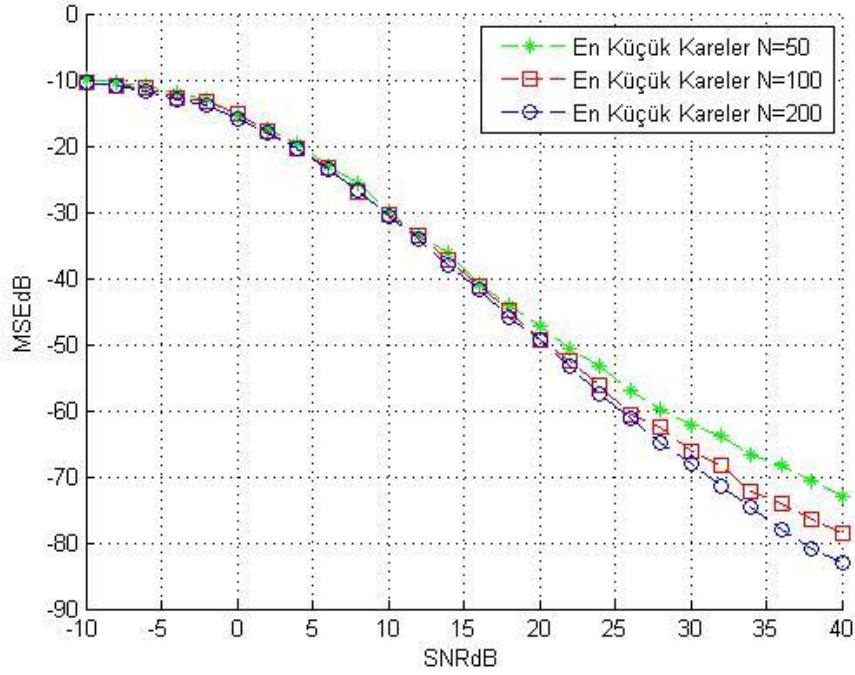
Örnek 4.1.7: En küçük kareler metodu ile frekans kestirim metodunda SNR=10 dB ve farklı N değerleri için simüle edilen ortalama karesel hatanın(MSEdB) tayin edilen $\omega_0 \in [0,\pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.7'de gösterilmiştir.



Şekil 4.7 En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde SNR=10 dB ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0/π) ile değişimi

En küçük kareler metodu ile frekans kestiriminde şekillerden görülebileceği gibi N örnek sayısı arttıkça ω_0/π 'nin 0.5 olduğu frekans bölgesine doğru gidildikçe ortalama karesel hata azalır ve kestirimin başarısı artar. Kestirimi gerçekleştirmek için ele alınan örnek sayısı arttıkça da teori ve pratik yaklaşımın simülasyon ortamında daha geniş bölgede uyumlu olduğu görülmektedir.

Örnek 4.1.8: En küçük kareler metodu ile frekans kestiriminde $\omega_0 = 0,4\pi$, farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.8'de gösterilmiştir.



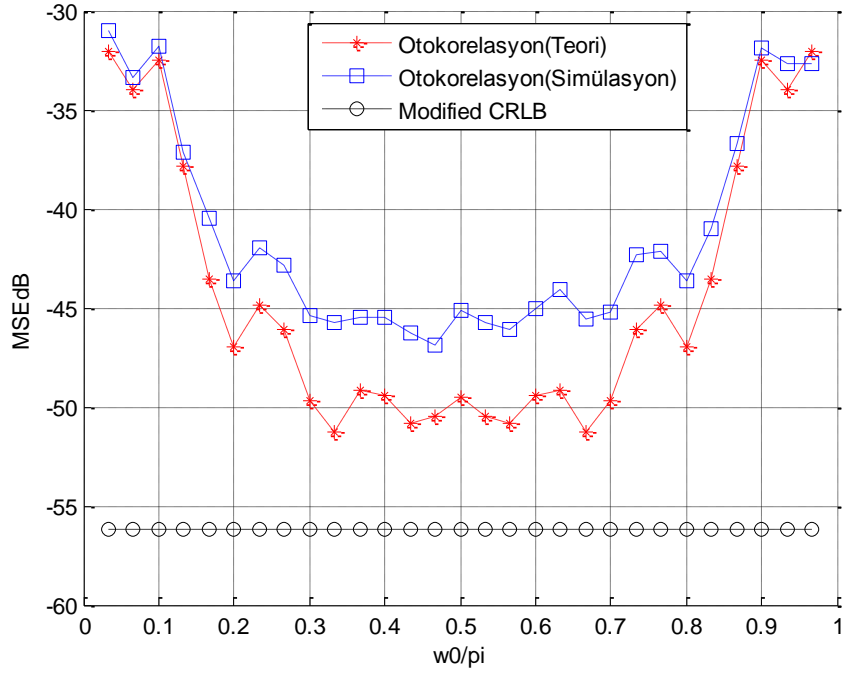
Şekil 4.8. En Küçük Kareler Metodu ile frekans kestiriminde $\omega_0 = 0,4 \pi$ ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

En küçük kareler metodu ile frekans kestiriminde şekillerden görülebileceği gibi N örnek sayısı ve sinyal gürültü oranı arttıkça ortalama karesel hata azalır. ve kestirimin başarısı artar. Kestirimi gerçekleştirmek için ele alınan örnek sayısı arttıkça teori ve pratik yaklaşımın simulasyon ortamında daha geniş bölgede uyumlu olduğu görülmektedir.

4.2.Otokorelasyon ile Frekans Kestirimi Performans Analizi

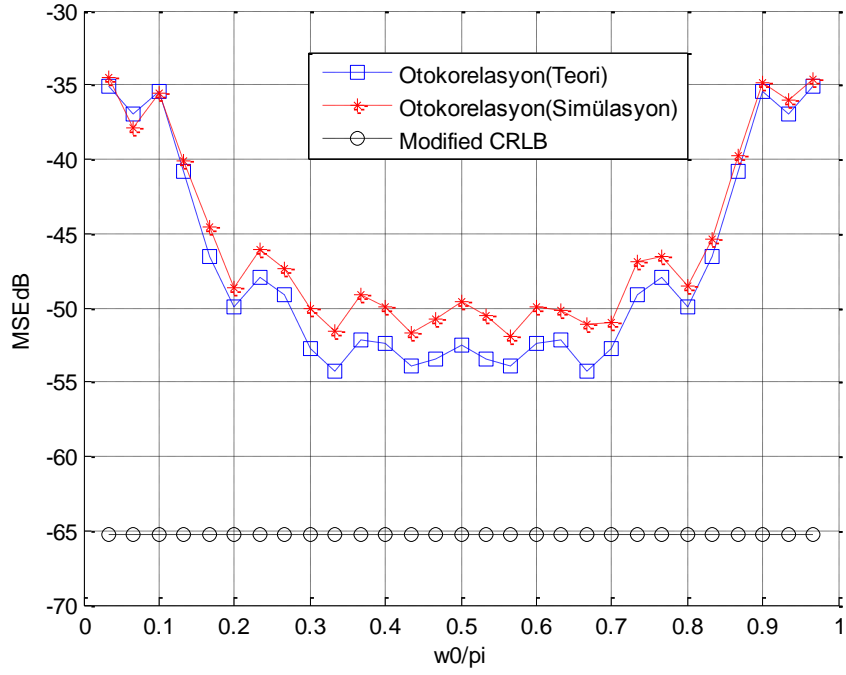
Veri modelinde, genlik parametresi $\alpha = 1$, sinyalin fazı $-\pi < \varphi_0 < \pi$ aralığında rastgele seçilerek ve gürültü bileşeni u_n olarak sıfır ortalamalı reel beyaz gauss gürültü kullanılmıştır. Farklı p,q ve N örnek sayı değerlerinde benzetim sonuçları 200 Monte Carlo denemesi için elde edilmiştir.

Örnek 4.2.1: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde SNR=10dB, $p = 2$, $q = 7$ ve $N = 50$ değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) $\omega_0 \in [0, \pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.9’da gösterilmiştir.



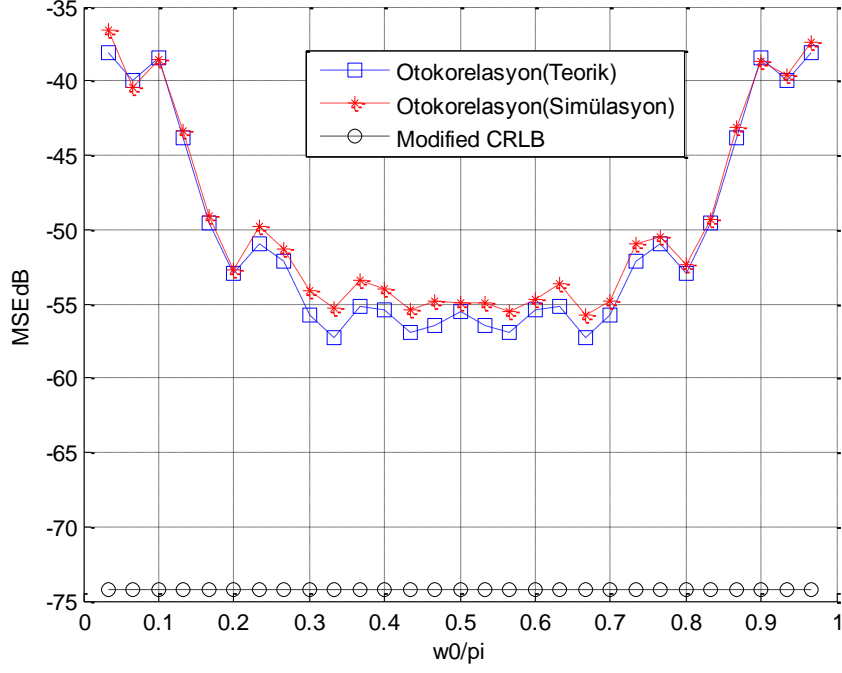
Şekil 4.9. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2, q=7$, $SNR=10$ dB, $N=50$ için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi

Örnek 4.2.2: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde $SNR=10$ dB, $p=2$, $q=7$ ve $N=100$ değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) $\omega_0 \in [0, \pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.10’da gösterilmiştir.



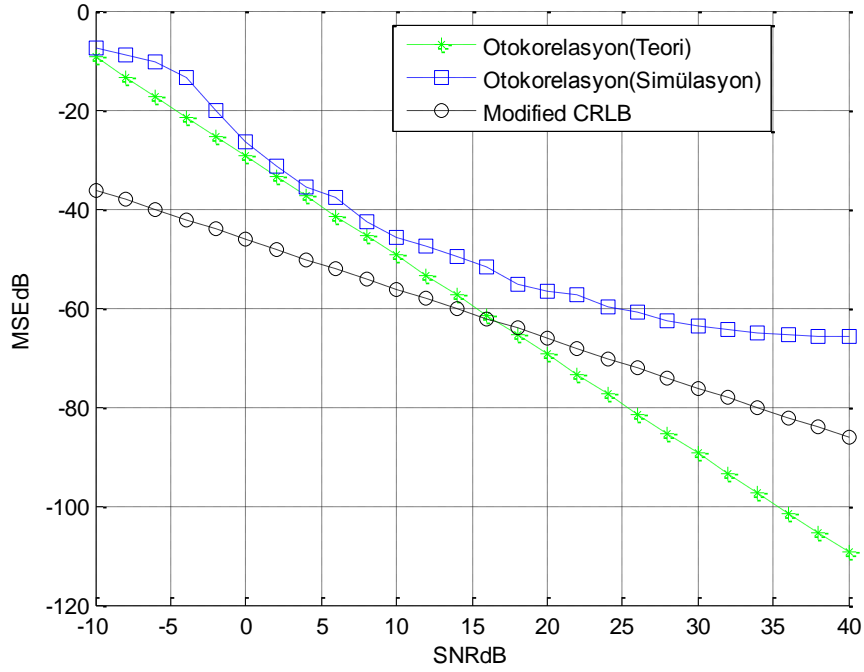
Şekil 4.10. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2, q=7$, $SNR=10$ dB, $N=100$ için ortalama karesel hatanın (MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0/π) ile değişimi

Örnek 4.2.3: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde $SNR=10$ dB, $p=2$, $q=7$ ve $N=200$ değerleri için ortalama karesel hatanın (MSEdB) $\omega_0 \in [0, \pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0/π) ile dağılımı Şekil 4.11'de gösterilmiştir.



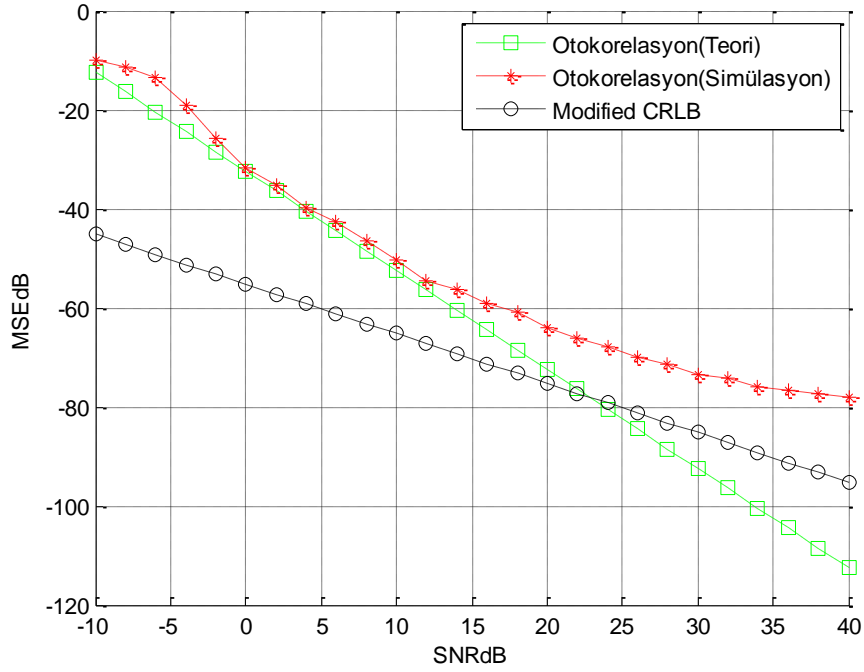
Şekil 4.11. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $q=7$, $SNR=10$ dB $N=200$ için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0/π) ile değişimi

Örnek 4.2.4: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $q=7$, $\omega_0 = 0,4\pi$ ve $N=50$ değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.12’de gösterilmiştir.



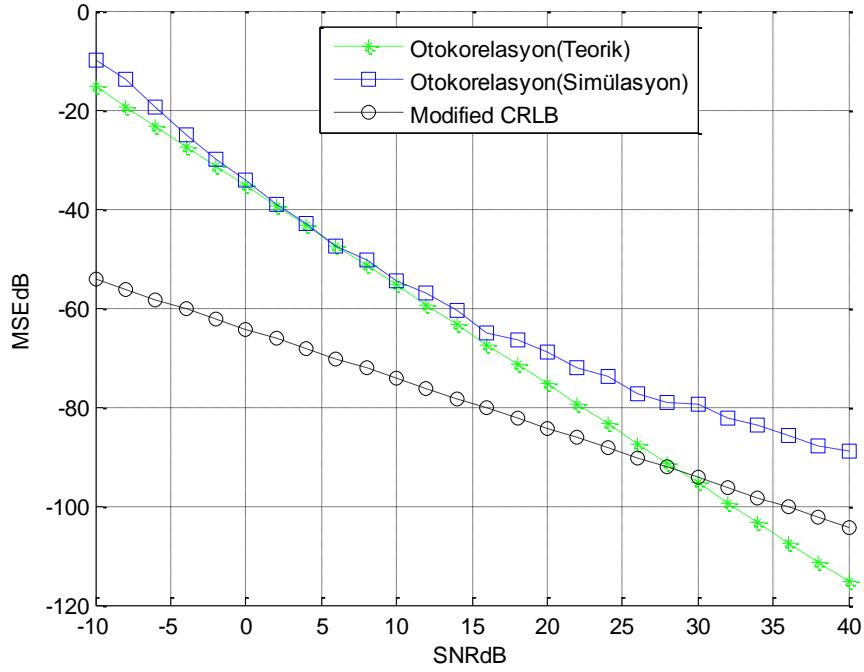
Şekil 4.12. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2, q=7, N=50, \omega_0 = 0,4 \pi$ için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

Örnek 4.2.5: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde $p=2, q=7, \omega_0 = 0,4 \pi$ ve $N=100$ değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.13’de gösterilmiştir.



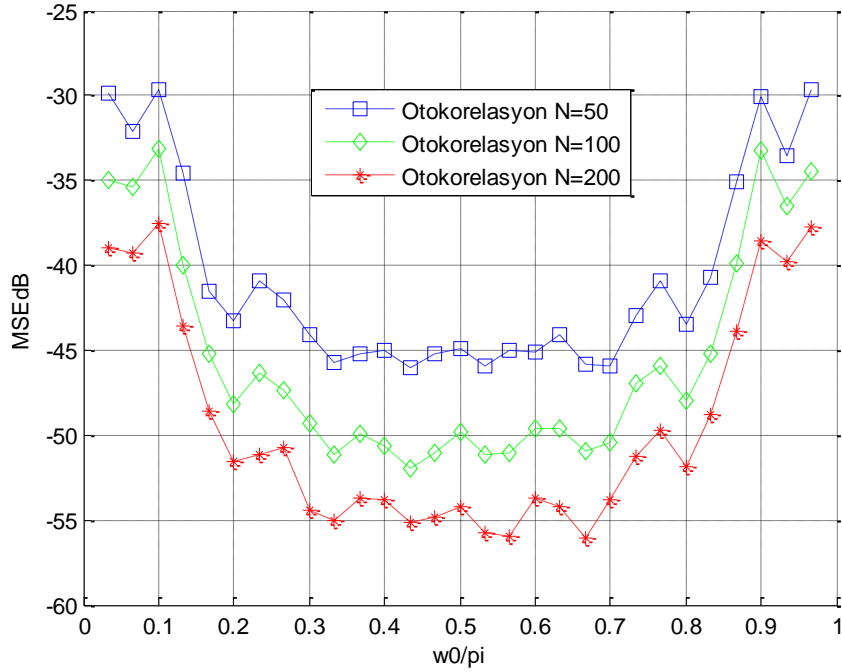
Şekil 4.13. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $q=7$, $N=100$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

Örnek 4.2.6: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $q=7$, $\omega_0 = 0,4 \pi$ ve $N=200$ değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.14’de gösterilmiştir.



Şekil 4.14. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2, q=7, N=200, \omega_0 = 0,4 \pi$ için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

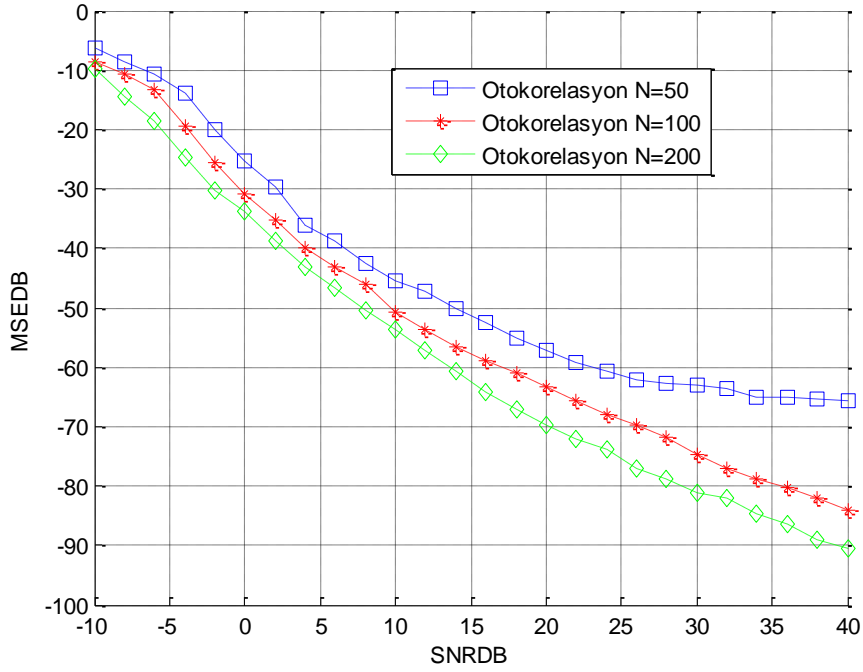
Örnek 4.2.7: Otokorelasyon metodu ile frekans kestirim metodunda $SNR=10$ dB $p=2, q=7$ ve farklı N değerleri için simüle edilen ortalama karesel hatanın(MSEdB) $\omega_0 \in [0, \pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.15’de gösterilmiştir.



Şekil 4.15. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde SNR= 10 dB, $p=2$, $q=7$ ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi

Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde şekillerden görülebileceği gibi N örnek sayısı arttıkça (ω_0 / π) 'nin 0.5 olduğu frekans bölgesine doğru gidildikçe ortalama karesel hata azalır ve kestirimin başarısı artar. Kestirimi gerçekleştirmek için ele alınan örnek sayısı arttıkça da teori ve pratik yaklaşımın simülasyon ortamında daha geniş bölgede uyumlu olduğu görülmektedir.

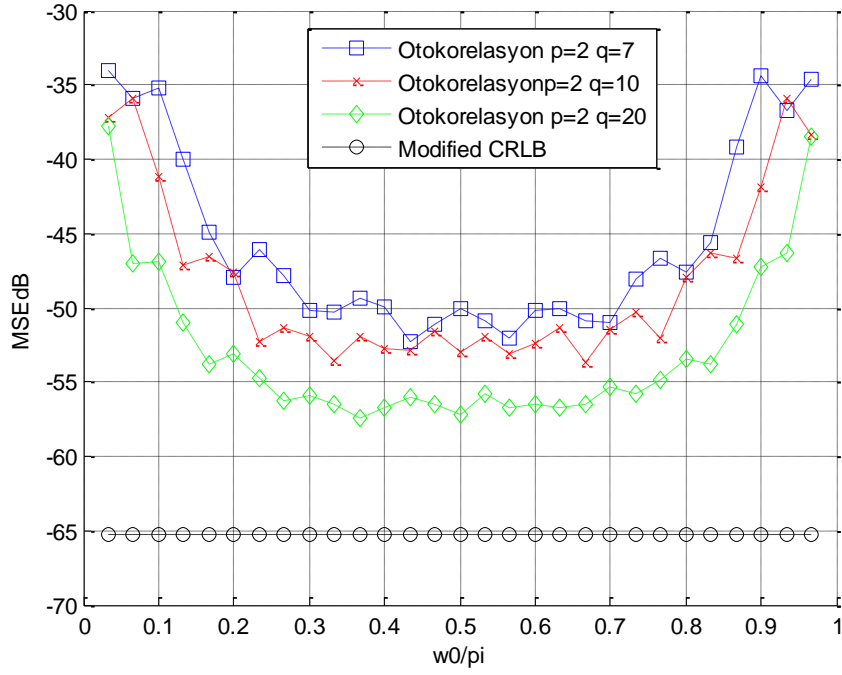
Örnek 4.2.8: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde $\omega_0 = 0,4 \pi$, $p=2$, $q=7$ ve farklı N değerleri için simüle edilen ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.16'da gösterilmiştir.



Şekil 4.16. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $\omega_0=0,4 \pi$, $p=2$, $q=7$ ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatasının(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

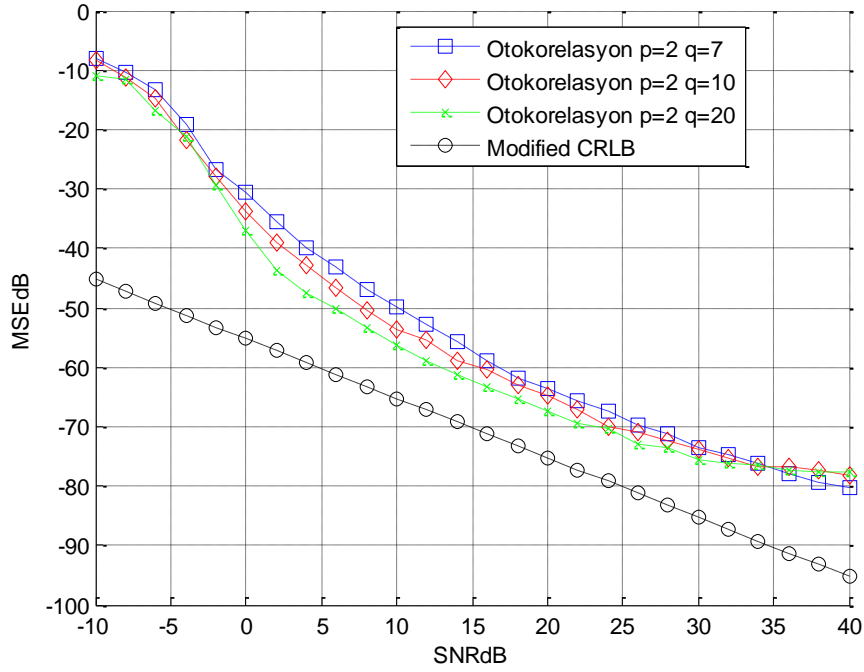
Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde N örnek sayısı ve sinyal gürültü oranı arttıkça ortalama karesel hata azalır ve kestirimin başarısı artar. Kestirimi gerçekleştirmek için ele alınan örnek sayısı arttıkça teori ve pratik yaklaşımın simülasyon ortamında daha geniş bölgede uyumlu olduğu görülmektedir.

Örnek 4.2.9: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde SNR=10 dB, $p=2$, N=100 ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) $\omega_0 \in [0,\pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.17’de gösterilmiştir.



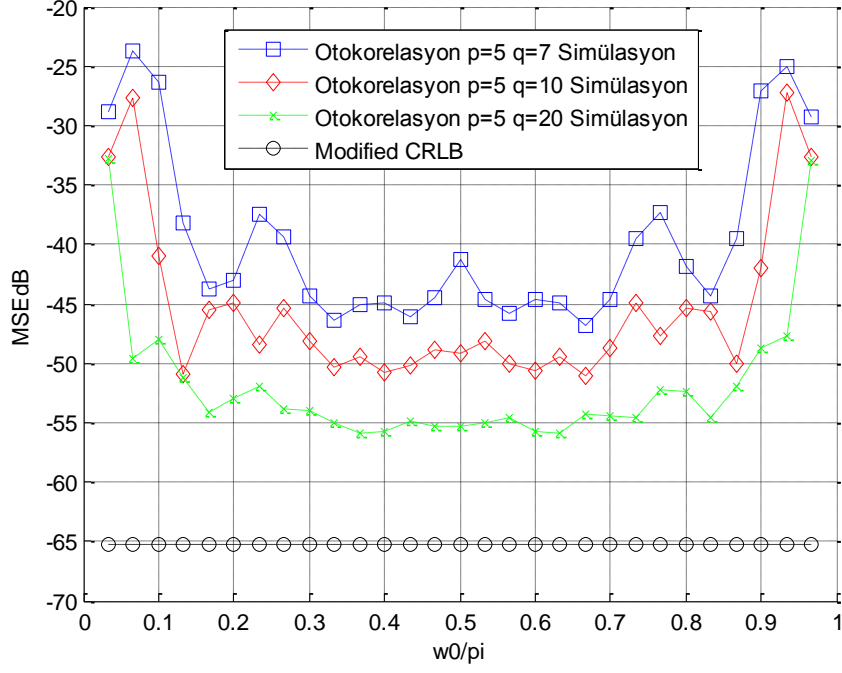
Şekil 4.17. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $SNR=10dB$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile değişimi

Örnek 4.2.10: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $\omega_0=0,4 \pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.18’de gösterilmiştir.



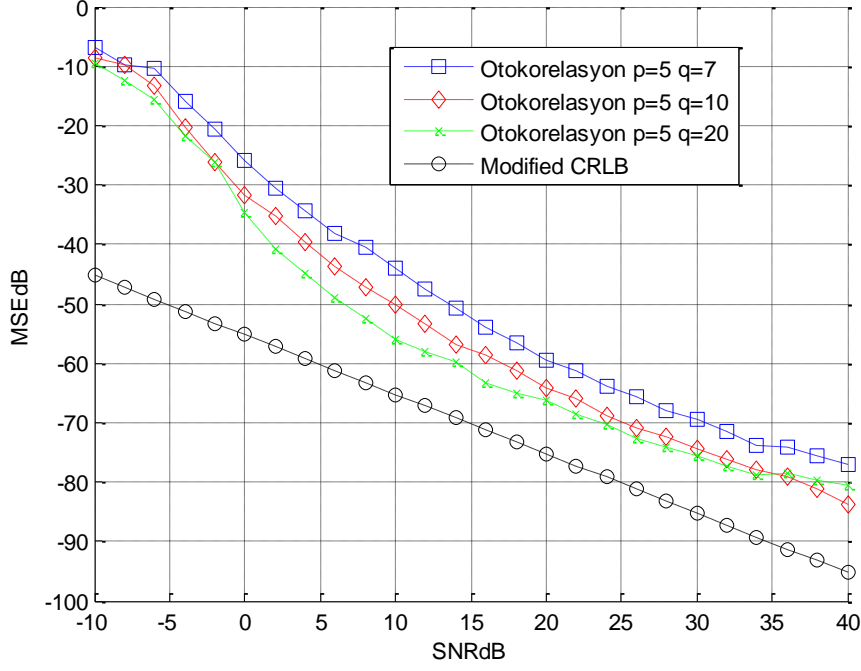
Şekil 4.18. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $\omega_0 = 0,4\pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

Örnek 4.2.11: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde $SNR=10$ dB, $p=5$ $N=100$ ve farklı q değerleri için Ortalama Karesel Hatanın(MSEdB) $\omega_0 \in [0,\pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.19’da gösterilmiştir.



Şekil 4.19. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=5$, $SNR=10dB$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı ω_0 / π ile değişimi

Örnek 4.2.12: Otokorelasyon metodu ile frekans kestiriminde $p=5$, $\omega_0 = 0,4 \pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.20’de gösterilmiştir.



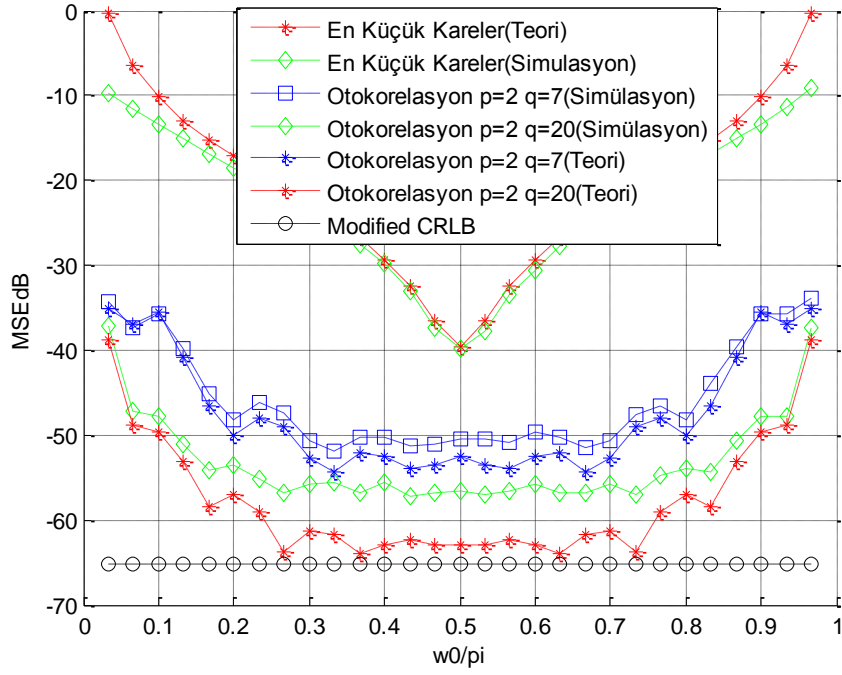
Şekil 4.20. Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=5$, $\omega_0 = 0,4\pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın (MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

Şekillerden görülebileceği gibi $q > p > M+1$ olacak şekilde q değerleri arttıkça ortalama karesel hata azalır. ve kestirimin başarısı artar.

4.3. Kestiricilerin Karşılaştırmalı Performans Analizi

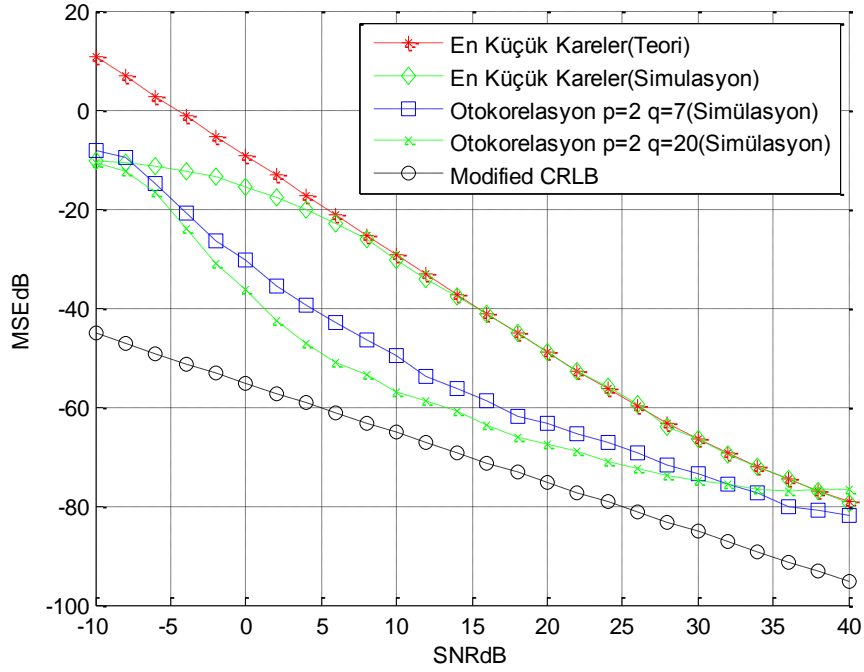
Reel beyaz gauss gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan veri modelinde frekans parametresinin kestirimi En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Kestiricilerin performansları sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Sayısal örnekler yardımıyla kestiricilerin performans sonuçları 200 Monte Carlo denemesi için elde edilmiştir.

Örnek 4.3.1: En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $SNR=10dB$, $p=2$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın (MSEdB), $\omega_0 \in [0, \pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.21’de gösterilmiştir.



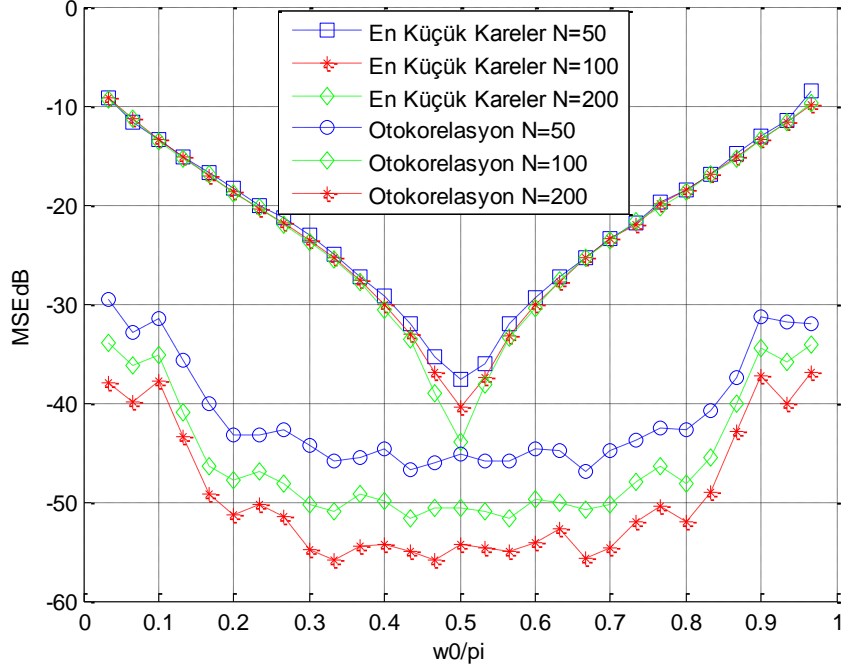
Şekil 4.21. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $SNR=10dB$, $p=2$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatasının (MSE) oranlanmış frekans farkı ω_0/π ile değişimi

Örnek 4.3.2: En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $\omega_0 = 0,4\pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın (MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.22’de gösterilmiştir.



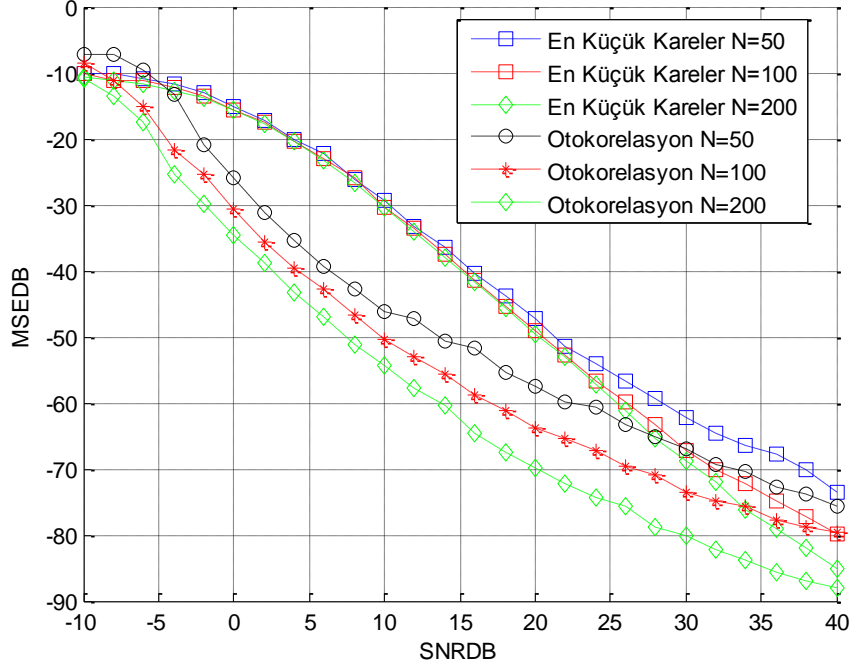
Şekil 4.22. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $\omega_0 = 0,4 \pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

Örnek 4.3.3: En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $SNR=10dB$, $p=2$, $q=7$ ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) $\omega_0 \in [0,\pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.23’de gösterilmiştir.



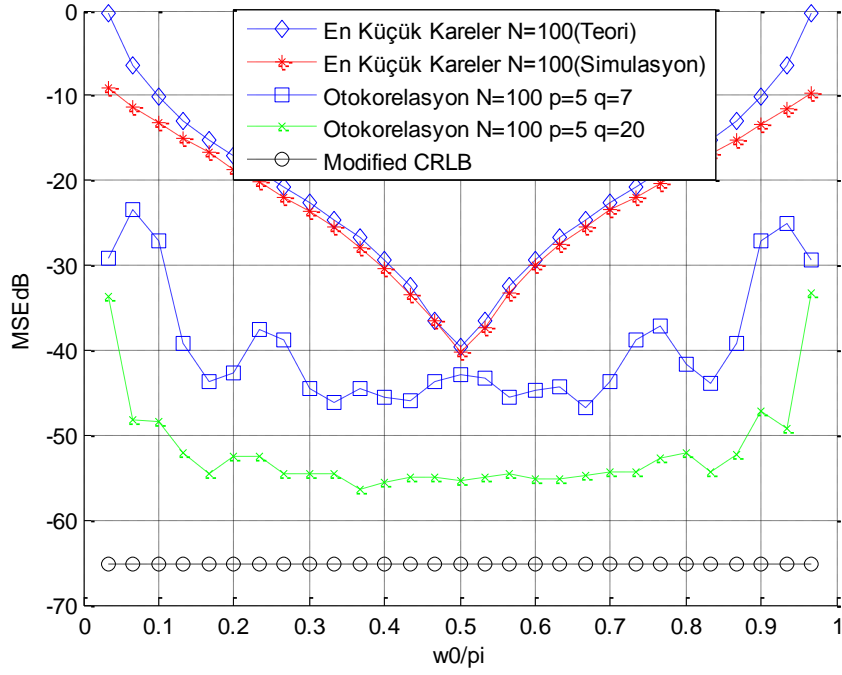
Şekil 4.23. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde SNR=10dB, q=7 ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı ω_0 / π ile değişimi

Örnek 4.3.4: En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $\omega_0 = 0,4 \pi$, q=7 ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.24'de gösterilmiştir.



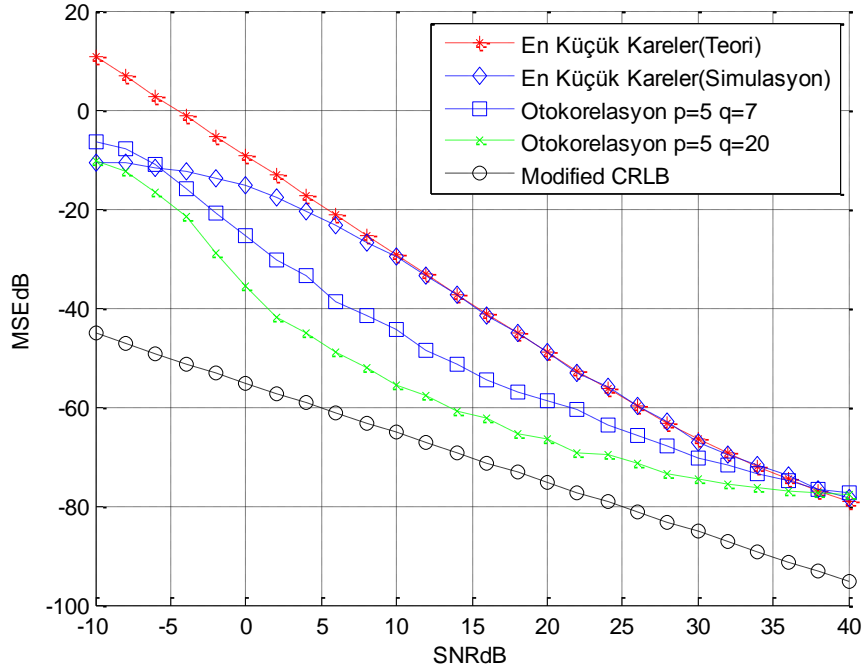
Şekil 4.24. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $\omega_0 = 0,4\pi$, $q=7$ ve farklı N değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

Örnek 4.3.5: En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $SNR=10dB$, $p=5$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) $\omega_0 \in [0,\pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.25’de gösterilmiştir.



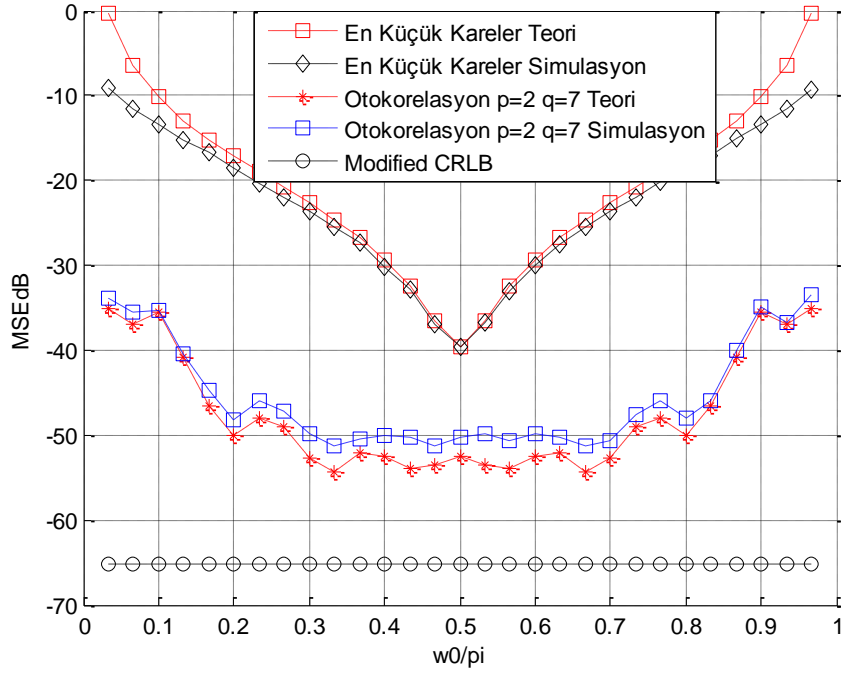
Şekil 4.25 En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde SNR=10dB, $p=5$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı ω_0 / π ile değişimi

Örnek 4.3.6: En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=5$, $\omega_0 = 0,4 \pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.26'da gösterilmiştir.



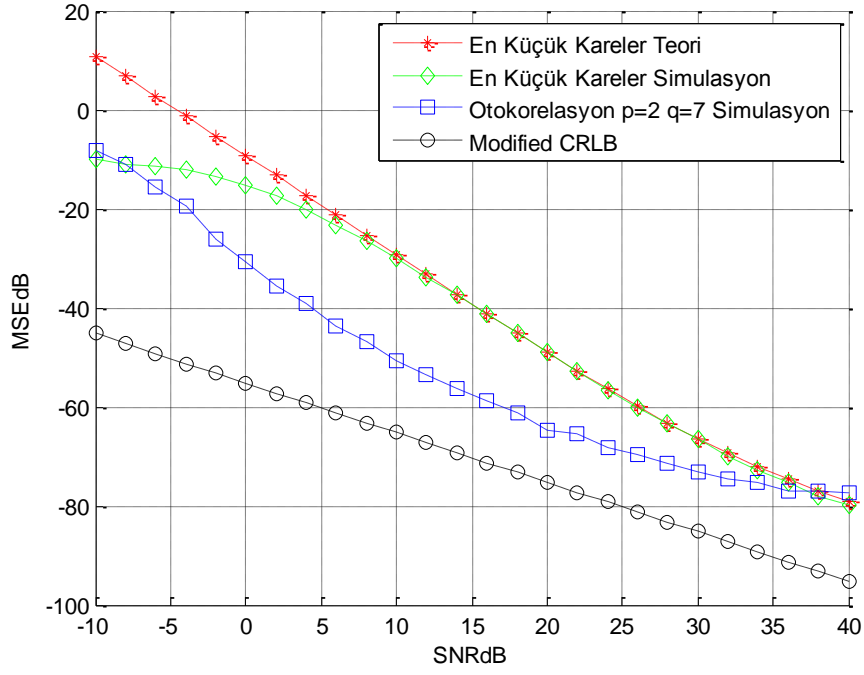
Şekil 4.26. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=5$, $\omega_0 = 0,4\pi$, $N=100$ ve farklı q değerleri için ortalama karesel hatanın(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

Örnek 4.3.7: En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $SNR=10dB$, $p=2$, $q=7$, $N=100$ için ortalama karesel hatanın(MSEdB) $\omega_0 \in [0,\pi]$ frekans değerlerine göre oranlanmış frekans farkı (ω_0 / π) ile dağılımı Şekil 4.27’de gösterilmiştir.



Şekil 4.27. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $SNR=10dB$, $p=2$, $q=7$, $N=100$ için ortalama karesel hatanın(MSE) oranlanmış frekans farkı ω_0 / π ile değişimi

Örnek 4.3.8: En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2, q=7$, $\omega_0 = 0,4 \pi$, $N=100$ için ortalama karesel hatanın(MSEdB) farklı sinyal gürültü oranı değerlerine göre dağılımı Şekil 4.28’de gösterilmiştir.



Şekil 4.28. En Küçük Kareler Metodu ve Otokorelasyon Metodu ile frekans kestiriminde $p=2$, $q=7$, $\omega_0=0,4 \pi$, $N=100$ için ortalama karesel hatasının(MSE) sinyal gürültü oranı (SNRdB) ile değişimi

5.SONUÇ

Otokorelasyon frekans kestirim metodunda veri modelindeki sinüzoidal sinyale ait otokorelasyon katsayıları kullanılarak frekans kestirimi gerçekleştirilmiştir. Belirlenen kabuller ve matematiksel ifadeler kullanılarak sinyal gürültü oranı, frekans farkı ve toplam örnek sayısı değişirken kestiricinin performansı hem teorik hem de sayısal olarak incelenmiştir. Otokorelasyon frekans kestirim metodunda, verinin otokorelasyonu arasındaki mesafe arttıkça gürültünün otokorelasyon üzerindeki etkisi azalır ve bu durumda daha başarılı bir kestirim elde edilir. Dolayısıyla otokorelasyon yönteminde diğer yöntemlere göre daha iyi kestirim gerçekleşir.

En küçük kareler frekans kestirim metodunda gürültü içeren veri modeli ile gürültü içermeyen veri modelindeki parametrelerin farkının karesini minimize etmek amaçlanmıştır. Gerekli matematiksel kabuller ve ifadeler eşliğinde kestiricinin performansı hem teorik hem de sayısal olarak incelenmiştir. En küçük kareler frekans kestirim yöntemi diğer yöntemlere alternatif olarak daha hızlı sonuç vermektedir ancak var olan gürültü, kestirimin başarısını olumsuz etkilemektedir.

Frekans kestirim yöntemlerinin performansları Cramer Rao sınırı performans ölçütü olarak seçilerek karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Frekans parametresinin kestirimine ilişkin Modifiye Cramer-Rao sınırının çözümsel olarak elde edilerek model parametrelerine olan bağılıkları karşılaştırılmıştır. Elde edilen simülasyon sonuçları ele alınan N örnek sayısı arttıkça her iki yöntemde de kestirim başarısının arttığını göstermiştir. Ancak otokorelasyon frekans kestirim yönteminde en küçük kareler frekans kestirim yöntemine göre örnek sayısının artmasıyla gürültünün kestirim üzerindeki etkisi azalmaktadır. Otokorelasyon frekans kestirim yöntemi ile daha hassas kestirim sonuçları elde edilmekte; fakat daha uzun simülasyon zamanı gerekmektedir. Kaba bir frekans kestirimi öngörülüyorsa en küçük kareler frekans kestirim yöntemi tercih edilebilir.

KAYNAKLAR

Kay, S. M. 1993. Fundamentals of statistical signal processing Estimation theory. Prentice-Hall, New Jersey, 595pp.

Moeneclaey, M. 1998. On the true and the modified cramer-rao bounds for the estimation of a scalar parameter in the presence of nuisance parameters. *IEEE Transactions on Communications*, 46(11) : 1536-1544.

So, H., Chan, Y., Ho, K., Chen, Y. 2013. Simple Formulas for Bias and Mean Square Error Computation. *IEEE Signal Processing Magazine*, 30(4): 162-165.

Ksibi, R.E., Besbes, H., Valcarce, R.L., Cherif, S. 2010. Frequency Estimation of real-valued single-tone in colored noise using multiple autocorrelation lags. *Signal Processing*, 90(2010): 2303-2307.

EKLER

- EK 1** Bir Reel Sönümlü Sinüs için Modifiye Cramer Rao Sınırı
- EK2** En Küçük Kareler Yöntemi ile Teorik Kestirim Yaklaşımı
- EK3** Otokorelasyon Yöntemi ile Teorik Kestirim Yaklaşımı

EK 1

Bir Reel Sönümlü Sinüs için Modifiye Cramer Rao Sınırı

Reel beyaz Gauss gürültü içeren sinüs fonksiyonu için bilinmeyen parametrelerin kestirimine ilişkin C-R sınır ifadeleri elde edilmiştir (Moeneclaey 1998).

Gauss gürültü içerisindeki bilinmeyen θ parametresine bağlı N adet veriden oluşan $y = [y_1, \dots, y_N]^T$ veri modeli E.1.1 denkleminde verilen biçimde yazılır.

$$y(t) = s(t; \theta) + e(t), \quad t=0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{E.1.1})$$

Veri modelinde bilinmeyen parametre vektörü $\theta = [\sigma^2, \alpha, \omega_0]^T$ kullanılarak (E.1.2) eşitliğinde belirtilen ifade ile $\hat{\theta}$ kestiricisi aracılığıyla θ ' nın değeri elde edilir.

$$\hat{\theta} = g (y(0), y(1), \dots, y(N-1)) \quad (\text{E.1.2})$$

Burada, g kestiriciyi tanımlayan fonksiyondur. Kestirimin başarısı bu fonksiyonun seçimine bağlıdır.

Başarılı kestiricilerin tanımlanmasında ilk adım bilinmeyen parametreye bağlı veri kümesinin modellenmesidir. Veriler doğal olarak rasgele oldukları için olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) yoluyla tanımlanırlar. PDF, bilinmeyen parametre θ ' nın bir fonksiyonu biçiminde düzenlenirse farklı θ değerleri için farklı değerler alan PDF kümesi elde edilir.

İlk adım olarak bilinen φ faz parametresi için olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(y|\varphi)$ ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} p(y|\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[y_1 - \alpha \sin(\omega_0 + \varphi)]^2}{2\sigma^2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[y_N - \alpha \sin(N\omega_0 + \varphi)]^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N [y_n - \alpha \sin(n\omega_0 + \varphi)]^2} \end{aligned} \quad (\text{E.1.3})$$

Cramer Rao sınırı için sınır ifadesi olan Fisher bilgi matrisi $I(\theta)$, E(1.4) eşitliği ile ifade edilir.

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial \ln p(y;\theta)}{\partial\theta}\right)\right] \quad (E.1.4)$$

$I(\theta)$ 'nın hesaplanabilmesi için olasılık yoğunluk fonksiyonu olan $p(y|\varphi)$ 'nın bilinmeyen θ parametre vektör bileşenlerine göre birinci ve ikinci dereceden türevi alınır.

$$\ln p = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N [y_n - \alpha \sin(n\omega_0 + \varphi)]^2$$

$$\frac{\partial \ln p}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{n=1}^N [y_n - \alpha \sin(n\omega_0 + \varphi)]^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N 2[y_n - \alpha \sin(n\omega_0 + \varphi)][-\sin(n\omega_0 + \varphi)] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N [y_n \sin(n\omega_0 + \varphi) - \alpha \sin^2(n\omega_0 + \varphi)] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N y_n \sin(n\omega_0 + \varphi) - \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \frac{1 - \cos(2n\omega_0 + 2\varphi)}{2} \\ &= -\frac{N\alpha}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N y_n \sin(n\omega_0 + \varphi) + \frac{\alpha}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N \cos(2n\omega_0 + 2\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p}{\partial \omega_0} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N 2[y_n - \alpha \sin(n\omega_0 + \varphi)][-\alpha n \cos(n\omega_0 + \varphi)] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N [\alpha n y_n \cos(n\omega_0 + \varphi) - \alpha^2 n \sin(n\omega_0 + \varphi) \cos(n\omega_0 + \varphi)] \\ &= \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n y_n \cos(n\omega_0 + \varphi) - \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n \frac{2 \sin(n\omega_0 + \varphi) \cos(n\omega_0 + \varphi)}{2} \\ &= \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n y_n \cos(n\omega_0 + \varphi) - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N n \sin(2n\omega_0 + 2\varphi). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} = \frac{N}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{n=1}^N [y_n - \alpha \sin(n\omega_0 + \varphi)]^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \sigma^2 \partial \alpha} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{n=1}^N 2[y_n - \alpha \sin(n\omega_0 + \varphi)][-\sin(n\omega_0 + \varphi)]$$

$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \sigma^2 \partial \omega_0} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{n=1}^N 2[y_n - \alpha \sin(n\omega_0 + \varphi)][-\alpha n \cos(n\omega_0 + \varphi)]$$

$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \alpha \partial \alpha} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N \cos(2n\omega_0 + 2\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \alpha \partial \omega_0} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n y_n \cos(n\omega_0 + \varphi) - \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n \sin(2n\omega_0 + 2\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \omega_0 \partial \omega_0} = -\frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 y_n \sin(n\omega_0 + \varphi) - \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \cos(2n\omega_0 + 2\varphi)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun bilinmeyen parametrelere göre alınan ikinci türevlerinin beklenen değerleri hesaplanır.

$$E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} = \frac{N}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{n=1}^N E u_n^2 = \frac{N}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{n=1}^N \sigma^2 = \frac{N}{2\sigma^4} - \frac{N}{\sigma^4} = -\frac{N}{2\sigma^4}$$

$$E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \sigma^2 \partial \alpha} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{n=1}^N 2(E u_n) [-\sin(n\omega_0 + \varphi)] = 0$$

$$E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \sigma^2 \partial \omega_0} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{n=1}^N 2(E u_n) [-\alpha n \cos(n\omega_0 + \varphi)] = 0$$

$$E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \alpha \partial \alpha} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N \cos(2n\omega_0 + 2\varphi)$$

$$\begin{aligned} E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \alpha \partial \omega_0} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n (E y_n) \cos(n\omega_0 + \varphi) - \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n \sin(2n\omega_0 + 2\varphi) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n \alpha \sin(n\omega_0 + \varphi) \cos(n\omega_0 + \varphi) - \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n \sin(2n\omega_0 + 2\varphi) \\ &= -\frac{\alpha}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N n \sin(2n\omega_0 + 2\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \omega_0 \partial \omega_0} &= -\frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 E(y_n) \sin(n\omega_0 + \varphi) - \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \cos(2n\omega_0 + 2\varphi) \\
&= -\frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \alpha \sin^2(n\omega_0 + \varphi) - \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \cos(2n\omega_0 + 2\varphi) \\
&= -\frac{\alpha^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \frac{1 - \cos(2\omega_0 n + 2\varphi)}{2} - \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \cos(2n\omega_0 + 2\varphi) \\
&= -\frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \cos(2n\omega_0 + 2\varphi) \\
&= -\frac{N(N+1)(2N+1)\alpha^2}{12\sigma^2} - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 \cos(2n\omega_0 + 2\varphi).
\end{aligned}$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun bilinmeyen θ parametrelerine göre alınan ikinci türev ifadelerinin beklenen değerleri kullanılarak Fisher bilgi matrisi $I(\theta)$ elemanları elde edilir.

$$[I_M(\theta)]_{11} = E_\varphi \left\{ -E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} \right\} = \frac{N}{2\sigma^4}$$

$$[I_M(\theta)]_{12} = E_\varphi \left\{ -E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \sigma^2 \partial \alpha} \right\} = 0$$

$$[I_M(\theta)]_{13} = E_\varphi \left\{ -E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \sigma^2 \partial \omega_0} \right\} = 0$$

$$[I_M(\theta)]_{22} = E_\varphi \left\{ -E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \alpha \partial \alpha} \right\} = \frac{N}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N E_\varphi[\cos(2n\omega_0 + 2\varphi)] = \frac{N}{2\sigma^2}$$

$$[I_M(\theta)]_{23} = E_\varphi \left\{ -E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \alpha \partial \omega_0} \right\} = \frac{\alpha}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N n E_\varphi[\sin(2n\omega_0 + 2\varphi)] = 0$$

$$\begin{aligned}
[I_M(\theta)]_{33} &= E_\varphi \left\{ -E_{y|\varphi} \frac{\partial^2 \ln p}{\partial \omega_0 \partial \omega_0} \right\} = \frac{N(N+1)(2N+1)\alpha^2}{12\sigma^2} + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N n^2 E_\varphi[\cos(2n\omega_0 + 2\varphi)] \\
&= \frac{N(N+1)(2N+1)\alpha^2}{12\sigma^2} \approx \frac{N^3\alpha^2}{6\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Diagonal $I(\theta)$ matris elemanları oluşturulur.

$$I_M(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{N}{2\sigma^4} & & \\ & \frac{N}{2\sigma^2} & \\ & & \frac{N^3\alpha^2}{6\sigma^2} \end{bmatrix}$$

Fisher bilgi matrisinin tersi alınır.

$$I_M^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma^4}{N} & & \\ & \frac{2\sigma^2}{N} & \\ & & \frac{6\sigma^2}{N^3\alpha^2} \end{bmatrix}$$

Belirtilen matematiksel eşitlikler kullanılarak Modifiye Cramer Rao Lower Bound sınırı E(1.5) ifadesi ile elde edilir.

$$\text{MCRB}(\omega_0) = \frac{6\sigma^2}{N^3\alpha^2} = \frac{3}{N^3 \text{SNR}} \quad \text{E(1.5)}$$

EK 2

En Küçük Kareler Yöntemi ile Teorik Kestirim Yaklaşımı

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki reel sinüslerden oluşan zaman serisi veri modelinde N adet veriden oluşan y_n veri kümesi, sinüsoidal bir s_n sinyali ve u_n gürültü fonksiyonundan oluşacak şekilde (E.2.1) eşitliği ile ifade edilir.

$$y_n = s_n + u_n \quad 1 \leq n \leq N \quad (\text{E.2.1})$$

En küçük kareler kestirim metodunda, y_n sinyal kümesini oluşturan parametrelerin s_n veri kümesini oluşturan parametrelere yakın olması amaçlanır.

Bir kestiricinin yansız olması, o kestiricinin ortalama değerinde, bilinmeyen parametrenin doğru değerini vereceğini anlatır. Matematiksel olarak ifade edilirse, bir kestirici (E.2.2) eşitliğinde belirtilen koşulu sağlıyorsa yansızdır:

$$E(\hat{\theta}) = \theta, \quad a < \theta < b \quad (\text{E.2.2})$$

Burada (a, b) θ 'nin mümkün olan değer aralığıdır.

Bir kestiricinin yanlılığı, (E.2.3) denkleminde verilen biçimde ifade edilir:

$$b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (\text{E.2.3})$$

Kestirim işleminde yanlılık ifadesi kestirimin başarısında ölçüt olarak değerlendirilir. En küçük kareler yaklaşım hata kriteri (E.2.4) eşitliği ile ifade edilir.

$$J(a_0) = \sum_{n=3}^N (y_n + y_{n-2} - 2a_0 y_{n-1})^2 \quad (\text{E.2.4})$$

Burada a_0 , kestirilmesi istenen bilinmeyen parametreye bağlı bir fonksiyondur ve (E.2.5) eşitliği ile ifade edilir.

$$a_0 = 2\cos(\omega_0) \quad (\text{E.2.5})$$

Bilinmeyen frekansa ilişkin parametre kestiriminde yanlılık ifadesi elde edilmesi için birinci ve ikinci seviyeden türevler alınır.

$$J'(a_0) = -4 \sum_{n=3}^N (y_n + y_{n-2} - 2a_0 y_{n-1}) y_{n-1}$$

$$J''(a_0) = 8 \sum_{n=3}^N y_{n-1}^2$$

Türevi alınan ifadelerin beklenen değerleri hesaplanır.

$$\begin{aligned} EJ'(a_0) &= -4 \sum_{n=3}^N E(y_n + y_{n-2} - 2a_0 y_{n-1}) y_{n-1} = -4 \sum_{n=3}^N E(u_n + u_{n-2} - 2a_0 u_{n-1}) y_{n-1} \\ &= -4 \sum_{n=3}^N E(u_n + u_{n-2} - 2a_0 u_{n-1})(s_{n-1} + u_{n-1}) \\ &= -4 \sum_{n=3}^N E(s_{n-1} u_n + s_{n-1} u_{n-2} - 2a_0 s_{n-1} u_{n-1} + u_{n-1} u_n + u_{n-1} u_{n-2} - 2a_0 u_{n-1}^2) \\ &= 8a_0 \sum_{n=3}^N E u_{n-1}^2 = 8a_0 \sum_{n=3}^N \sigma^2 = 8a_0(N-2)\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ''(a_0) &= 8 \sum_{n=3}^N E y_{n-1}^2 = 8 \sum_{n=3}^N E(s_{n-1} + u_{n-1})^2 = 8 \sum_{n=3}^N E(s_{n-1}^2 + 2s_{n-1} u_{n-1} + u_{n-1}^2) \\ &= 8 \sum_{n=3}^N (E s_{n-1}^2 + E u_{n-1}^2) = 8 \sum_{n=3}^N (E \alpha^2 \sin^2((n-1)\omega_0 + \varphi) + \sigma^2) \\ &= 8 \sum_{n=3}^N (E \alpha^2 \frac{1 - \cos(2(n-1)\omega_0 + 2\varphi)}{2} + \sigma^2) \\ &= 8 \sum_{n=3}^N (\frac{\alpha^2}{2} + \sigma^2) = 4(N-2)\alpha^2 + 8(N-2)\sigma^2. \end{aligned}$$

En küçük kareler yaklaşım hata kriterinin türevlerinin beklenen değerleri kullanılarak kestiricinin yanı (E.2.6) denklemi ile elde edilir.

$$\text{bias}(\hat{a}_0) = E\hat{a}_0 - a_0 \approx -\frac{EJ'(a_0)}{EJ''(a_0)} \quad (\text{E.2.6})$$

$$\text{bias}(\hat{a}_0) = E\hat{a}_0 - a_0 \approx -\frac{EJ'(a_0)}{EJ''(a_0)} = -\frac{8a_0(N-2)\sigma^2}{4(N-2)\alpha^2 + 8(N-2)\sigma^2} = -\frac{a_0}{1 + \text{SNR}}$$

Kestirimde değerlendirme kriteri olarak Ortalama Karesel Hata ifadesi (E.2.7) denklemi ile elde edilir.

$$\text{MSE}(\hat{a}_0) = E(\hat{a}_0 - a_0)^2 \approx \frac{E(J'(a_0))^2}{(EJ''(a_0))^2} \quad (\text{E.2.7})$$

$$\begin{aligned} E(J'(a_0))^2 &= 16E \sum_{n=3}^N (y_n + y_{n-2} - 2a_0 y_{n-1}) y_{n-1} \sum_{m=3}^N (y_m + y_{m-2} - 2a_0 y_{m-1}) y_{m-1} \\ &= 16E \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (y_n + y_{n-2} - 2a_0 y_{n-1}) y_{n-1} (y_m + y_{m-2} - 2a_0 y_{m-1}) y_{m-1} \\ &= 16E \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (u_n + u_{n-2} - 2a_0 u_{n-1}) y_{n-1} (u_m + u_{m-2} - 2a_0 u_{m-1}) y_{m-1} \\ &= 16 \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N \underbrace{(Eu_n u_m y_{n-1} y_{m-1})}_{T_1} + \underbrace{Eu_n u_{m-2} y_{n-1} y_{m-1}}_{T_2} - 2a_0 \underbrace{Eu_n u_{m-1} y_{n-1} y_{m-1}}_{T_3} \\ &\quad + \underbrace{Eu_{n-2} u_m y_{n-1} y_{m-1}}_{T_4} + \underbrace{Eu_{n-2} u_{m-2} y_{n-1} y_{m-1}}_{T_5} - 2a_0 \underbrace{Eu_{n-2} u_{m-1} y_{n-1} y_{m-1}}_{T_6} \\ &\quad - 2a_0 \underbrace{Eu_{n-1} u_m y_{n-1} y_{m-1}}_{T_7} - 2a_0 \underbrace{Eu_{n-1} u_{m-2} y_{n-1} y_{m-1}}_{T_8} + 4a_0^2 \underbrace{Eu_{n-1} u_{m-1} y_{n-1} y_{m-1}}_{T_9}. \end{aligned}$$

Toplamı oluşturan $T_1 \dots T_9$ ifadeleri matematiksel olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N Eu_n u_m y_{n-1} y_{m-1} = \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N Eu_n u_m (s_{n-1} + u_{n-1})(s_{m-1} + u_{m-1}) \\ &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_n u_m Es_{n-1} s_{m-1} + \underbrace{Eu_n u_m u_{m-1}}_{=0} Es_{n-1} + \underbrace{Eu_n u_m u_{n-1}}_{=0} Es_{m-1} + Eu_n u_m u_{n-1} u_{m-1}) \\ &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_n u_m Es_{n-1} s_{m-1} + Eu_n u_m u_{n-1} u_{m-1}) \\ &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_n u_m Es_{n-1} s_{m-1} + Eu_n u_m Eu_{n-1} u_{m-1} + \underbrace{Eu_n u_{n-1} Eu_m u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{Eu_n u_{m-1} Eu_{n-1} u_m}_{=0}) \\ &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (\sigma^2 \delta[n-m] Es_{n-1} s_{m-1} + \sigma^4 \delta[n-m]) \\ &= \sigma^2 \sum_{n=3}^N Es_{n-1}^2 + \sigma^4 \sum_{n=3}^N 1 = \sigma^2 \sum_{n=3}^N \frac{\alpha^2}{2} + (N-2)\sigma^4 \\ &= \sigma^2 (N-2) \frac{\alpha^2}{2} + (N-2)\sigma^4 = \sigma^4 (N-2) \text{SNR} + \sigma^4 (N-2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{n=3m=3}^N \sum_{m=3}^N Eu_n u_{m-2} y_{n-1} y_{m-1} = \sum_{n=3m=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_n u_{m-2} Es_{n-1} s_{m-1} + Eu_n u_{m-2} u_{n-1} u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=3m=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_n u_{m-2} Es_{n-1} s_{m-1} + \underbrace{Eu_n u_{m-2} Eu_{n-1} u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{Eu_n u_{n-1} Eu_{m-2} u_{m-1}}_{=0} + Eu_n u_{m-1} Eu_{n-1} u_{m-2}) \\
&= \sum_{n=3}^N \sum_{m=1}^{N-2} Eu_n u_m Es_{n-1} s_{m+1} + \sum_{n=3m=2}^N \sum_{m=2}^{N-1} Eu_n u_m Eu_{n-1} u_{m-1} \\
&= \sum_{n=3}^N \sum_{m=1}^{N-2} \sigma^2 \delta[n-m] Es_{n-1} s_{m+1} + \sum_{n=3m=2}^N \sum_{m=2}^{N-1} \sigma^4 \delta[n-m] \\
&= \sigma^2 \sum_{n=3}^{N-2} Es_{n-1} s_{n+1} + \sigma^4 \sum_{n=3}^{N-1} 1 = \sigma^2 \sum_{n=3}^{N-2} \frac{\alpha^2}{2} \cos 2\omega_0 + (N-3)\sigma^4 \\
&= \sigma^2 (N-4) \frac{\alpha^2}{2} \cos 2\omega_0 + (N-3)\sigma^4 = \sigma^4 (N-4) \text{SNR} \cos 2\omega_0 + \sigma^4 (N-3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 &= \sum_{n=3m=3}^N \sum_{m=3}^N Eu_n u_{m-1} y_{n-1} y_{m-1} = \sum_{n=3m=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_n u_{m-1} Es_{n-1} s_{m-1} + Eu_n u_{m-1} u_{n-1} u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=3m=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_n u_{m-1} Es_{n-1} s_{m-1} + \underbrace{Eu_n u_{m-1} Eu_{n-1} u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{Eu_n u_{n-1} Eu_{m-1} u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{Eu_n u_{m-1} Eu_{n-1} u_{m-1}}_{=0}) \\
&= \sum_{n=3m=2}^N \sum_{m=2}^{N-1} Eu_n u_m Es_{n-1} s_m = \sum_{n=3m=2}^N \sum_{m=2}^{N-1} \sigma^2 \delta[n-m] Es_{n-1} s_m \\
&= \sigma^2 \sum_{n=3}^{N-1} Es_{n-1} s_n = \sigma^2 \sum_{n=3}^{N-1} \frac{\alpha^2}{2} \cos \omega_0 \\
&= \sigma^2 (N-3) \frac{\alpha^2}{2} \cos 2\omega_0 = \sigma^4 (N-3) \text{SNR} \cos \omega_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4 &= \sum_{n=3m=3}^N \sum_{m=3}^N Eu_{n-2} u_m y_{n-1} y_{m-1} = \sum_{n=3m=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_{n-2} u_m Es_{n-1} s_{m-1} + Eu_{n-2} u_m u_{n-1} u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=3m=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_{n-2} u_m Es_{n-1} s_{m-1} + \underbrace{Eu_{n-2} u_m Eu_{n-1} u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{Eu_{n-2} u_{n-1} Eu_m u_{m-1}}_{=0} + Eu_{n-2} u_{m-1} Eu_{n-1} u_m) \\
&= \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=3}^N Eu_n u_m Es_{n+1} s_{m-1} + \sum_{n=2m=3}^{N-1} \sum_{m=3}^N Eu_n u_m Eu_{n-1} u_{m-1} \\
&= \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=3}^N \sigma^2 \delta[n-m] Es_{n+1} s_{m-1} + \sum_{n=2m=3}^{N-1} \sum_{m=3}^N \sigma^4 \delta[n-m] \\
&= \sigma^2 \sum_{n=3}^{N-2} Es_{n+1} s_{n-1} + \sigma^4 \sum_{n=3}^{N-1} 1 = \sigma^2 \sum_{n=3}^{N-2} \frac{\alpha^2}{2} \cos 2\omega_0 + (N-3)\sigma^4 \\
&= \sigma^2 (N-4) \frac{\alpha^2}{2} \cos 2\omega_0 + (N-3)\sigma^4 = \sigma^4 (N-4) \text{SNR} \cos 2\omega_0 + \sigma^4 (N-3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_5 &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N \mathbb{E} u_{n-2} u_{m-2} y_{n-1} y_{m-1} = \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (\mathbb{E} u_{n-2} u_{m-2} \mathbb{E} s_{n-1} s_{m-1} + \mathbb{E} u_{n-2} u_{m-2} u_{n-1} u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (\mathbb{E} u_{n-2} u_{m-2} \mathbb{E} s_{n-1} s_{m-1} + \mathbb{E} u_{n-2} u_{m-2} \mathbb{E} u_{n-1} u_{m-1} + \underbrace{\mathbb{E} u_{n-2} u_{n-1} \mathbb{E} u_{m-2} u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E} u_{n-2} u_{m-1} \mathbb{E} u_{n-1} u_{m-2}}_{=0}) \\
&= \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=1}^{N-2} \mathbb{E} u_n u_m \mathbb{E} s_{n+1} s_{m+1} + \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N \mathbb{E} u_{n-2} u_{m-2} \mathbb{E} u_{n-1} u_{m-1} \\
&= \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=1}^{N-2} \sigma^2 \delta[n-m] \mathbb{E} s_{n+1} s_{m+1} + \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N \sigma^4 \delta[n-m] \\
&= \sigma^2 \sum_{n=1}^{N-2} \mathbb{E} s_{n+1}^2 + \sigma^4 \sum_{n=3}^N 1 = \sigma^2 \sum_{n=1}^{N-2} \frac{\alpha^2}{2} + (N-2)\sigma^4 \\
&= \sigma^2 (N-2) \frac{\alpha^2}{2} + (N-2)\sigma^4 = \sigma^4 (N-2) \text{SNR} + \sigma^4 (N-2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_6 &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N \mathbb{E} u_{n-2} u_{m-1} y_{n-1} y_{m-1} = \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (\mathbb{E} u_{n-2} u_{m-1} \mathbb{E} s_{n-1} s_{m-1} + \mathbb{E} u_{n-2} u_{m-1} u_{n-1} u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (\mathbb{E} u_{n-2} u_{m-1} \mathbb{E} s_{n-1} s_{m-1} + \underbrace{\mathbb{E} u_{n-2} u_{m-1} \mathbb{E} u_{n-1} u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E} u_{n-2} u_{n-1} \mathbb{E} u_{m-1} u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E} u_{n-2} u_{m-1} \mathbb{E} u_{n-1} u_{m-1}}_{=0}) \\
&= \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=2}^{N-1} \mathbb{E} u_n u_m \mathbb{E} s_{n+1} s_m = \sum_{n=1}^{N-2} \sum_{m=2}^{N-1} \sigma^2 \delta[n-m] \mathbb{E} s_{n+1} s_m \\
&= \sigma^2 \sum_{n=2}^{N-2} \mathbb{E} s_{n+1} s_n = \sigma^2 \sum_{n=2}^{N-2} \frac{\alpha^2}{2} \cos \omega_0 \\
&= \sigma^2 (N-3) \frac{\alpha^2}{2} \cos \omega_0 = \sigma^4 (N-3) \text{SNR} \cos \omega_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_7 &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N \mathbb{E} u_{n-1} u_m y_{n-1} y_{m-1} = \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (\mathbb{E} u_{n-1} u_m \mathbb{E} s_{n-1} s_{m-1} + \mathbb{E} u_{n-1} u_m u_{n-1} u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (\mathbb{E} u_{n-1} u_m \mathbb{E} s_{n-1} s_{m-1} + \underbrace{\mathbb{E} u_{n-1} u_m \mathbb{E} u_{n-1} u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E} u_{n-1} u_{n-1} \mathbb{E} u_m u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E} u_{n-1} u_{m-1} \mathbb{E} u_{n-1} u_m}_{=0}) \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{m=3}^N \mathbb{E} u_n u_m \mathbb{E} s_n s_{m-1} = \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{m=3}^N \sigma^2 \delta[n-m] \mathbb{E} s_n s_{m-1} \\
&= \sigma^2 \sum_{n=3}^{N-1} \mathbb{E} s_n s_{n-1} = \sigma^2 \sum_{n=3}^{N-1} \frac{\alpha^2}{2} \cos \omega_0 \\
&= \sigma^2 (N-3) \frac{\alpha^2}{2} \cos \omega_0 = \sigma^4 (N-3) \text{SNR} \cos \omega_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_8 &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N Eu_{n-1}u_{m-2}y_{n-1}y_{m-1} = \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_{n-1}u_{m-2}Es_{n-1}s_{m-1} + Eu_{n-1}u_{m-2}u_{n-1}u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_{n-1}u_{m-2}Es_{n-1}s_{m-1} + \underbrace{Eu_{n-1}u_{m-2}Eu_{n-1}u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{Eu_{n-1}u_{n-1}Eu_{m-2}u_{m-1}}_{=0} + \underbrace{Eu_{n-1}u_{m-1}Eu_{n-1}u_{m-2}}_{=0}) \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-2} Eu_n u_m Es_n s_{m+1} = \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-2} \sigma^2 \delta[n-m] Es_n s_{m+1} \\
&= \sigma^2 \sum_{n=2}^{N-2} Es_n s_{n+1} = \sigma^2 \sum_{n=2}^{N-2} \frac{\alpha^2}{2} \cos \omega_0 \\
&= \sigma^2 (N-3) \frac{\alpha^2}{2} \cos \omega_0 = \sigma^4 (N-3) \text{SNR} \cos \omega_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_9 &= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N Eu_{n-1}u_{m-1}y_{n-1}y_{m-1} = \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_{n-1}u_{m-1}Es_{n-1}s_{m-1} + Eu_{n-1}u_{m-1}u_{n-1}u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (Eu_{n-1}u_{m-1}Es_{n-1}s_{m-1} + Eu_{n-1}u_{m-1}Eu_{n-1}u_{m-1} + Eu_{n-1}u_{n-1}Eu_{m-1}u_{m-1} + Eu_{n-1}u_{m-1}Eu_{n-1}u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{m=2}^{N-1} Eu_n u_m Es_n s_m + \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N (2E^2 u_{n-1}u_{m-1} + Eu_{n-1}u_{n-1}Eu_{m-1}u_{m-1}) \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{m=2}^{N-1} \sigma^2 \delta[n-m] Es_n s_m + \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N 2\sigma^4 \delta[n-m] + \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N \sigma^4 \delta[0] \\
&= \sigma^2 \sum_{n=2}^{N-1} Es_n^2 + 2\sigma^4 \sum_{n=3}^N 1 + \sigma^4 \sum_{n=3}^N \sum_{m=3}^N \delta[0] = \sigma^2 \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\alpha^2}{2} + 2(N-2)\sigma^4 + (N-2)^2 \sigma^4 \\
&= \sigma^2 (N-2) \frac{\alpha^2}{2} + 2(N-2)\sigma^4 + (N-2)^2 \sigma^4 = \sigma^4 (N-2) \text{SNR} + 2\sigma^4 (N-2) + \sigma^4 (N-2)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(J'(a_0))^2 &= 16 \left\{ \sigma^4 (N-2) \text{SNR} + \sigma^4 (N-2) + \sigma^4 (N-4) \text{SNR} \cos 2\omega_0 + \sigma^4 (N-3) \right. \\
&\quad - 2a_0 \sigma^4 (N-3) \text{SNR} \cos \omega_0 + \sigma^4 (N-4) \text{SNR} \cos 2\omega_0 + \sigma^4 (N-3) \\
&\quad + \sigma^4 (N-2) \text{SNR} + \sigma^4 (N-2) - 2a_0 \sigma^4 (N-3) \text{SNR} \cos \omega_0 \\
&\quad - 2a_0 \sigma^4 (N-3) \text{SNR} \cos \omega_0 - 2a_0 \sigma^4 (N-3) \text{SNR} \cos \omega_0 \\
&\quad \left. + 4a_0^2 \left[\sigma^4 (N-2) \text{SNR} + 2\sigma^4 (N-2) + \sigma^4 (N-2)^2 \right] \right\} \\
&= 16\sigma^4 \left\{ 2(2N-5) + 2(N-2) \text{SNR} - 4(N-4) \text{SNR} \cos^2 \omega_0 \right. \\
&\quad \left. + 2(N-4) \text{SNR} \cos 2\omega_0 + 4N(N-2) \cos^2 \omega_0 \right\} \\
&= 32\sigma^4 \left\{ (2N-5) + (N-2) \text{SNR} - 2(N-4) \text{SNR} \cos^2 \omega_0 \right. \\
&\quad \left. + (N-4) \text{SNR} (2 \cos^2 \omega_0 - 1) + 2N(N-2) \cos^2 \omega_0 \right\} \\
&= 32\sigma^4 \left\{ (2N-5) + 2 \text{SNR} + 2N(N-2) \cos^2 \omega_0 \right\}.
\end{aligned}$$

En küçük kareler yaklaşım hata kriterinin türevlerinin beklenen değer ifadeleri kullanılarak ortalama karesel hata hesaplanır.

$$\text{MSE}(\hat{a}_0) = E(\hat{a}_0 - a_0)^2 \approx \frac{E(J'(a_0))^2}{(EJ''(a_0))^2} = \frac{32\sigma^4 \{(2N-5) + 2\text{SNR} + 2N(N-2)\cos^2 \omega_0\}}{(8(N-2)\sigma^2(1+\text{SNR}))^2}$$

$$\text{MSE}(\hat{a}_0) = \frac{(2N-5) + 2\text{SNR} + 2N(N-2)\cos^2 \omega_0}{2(N-2)^2(1+\text{SNR})^2}.$$

\hat{a}_0 ifadesi bilinmeyen ω_0 frekansının fonksiyonu olan a_0 ifadesinin kestirim sonucudur ve (E.2.8) eşitliği ile ifade edilir.

$$\hat{a}_0 = \cos \hat{\omega}_0 = f(\hat{\omega}_0) \quad (\text{E.2.8})$$

$$f(\hat{\omega}_0) \approx f(\omega_0) + f'(\omega_0)(\hat{\omega}_0 - \omega_0)$$

Frekans kestirimindeki teorik yanlılık (E.2.9) denklemleri ile elde edilir.

$$E\hat{\omega}_0 - \omega_0 \approx \frac{Ef(\hat{\omega}_0) - f(\omega_0)}{f'(\omega_0)} = \frac{E\hat{a}_0 - a_0}{-\sin \omega_0} = -\frac{\text{bias}(\hat{a}_0)}{\sin \omega_0}$$

$$= \frac{a_0}{(1+\text{SNR})\sin \omega_0} = \frac{\cos \omega_0}{(1+\text{SNR})\sin \omega_0} \approx \frac{\cos \omega_0}{\text{SNR} \sin \omega_0}$$

$$E\hat{\omega}_0 - \omega_0 \approx \frac{\cos \omega_0}{\text{SNR} \sin \omega_0} \quad (\text{E.2.9})$$

En küçük kareler yaklaşımı ile frekans kestiriminde bilinmeyen ω_0 frekansları için ortalama karesel hata (MSE), (E.2.10) denklemleri ile teorik olarak ifade edilir.

$$\text{MSE}(\hat{\omega}_0) = E(\hat{\omega}_0 - \omega_0)^2 \approx \frac{E(f(\hat{\omega}_0) - f(\omega_0))^2}{(f'(\omega_0))^2} = \frac{E(\hat{a}_0 - a_0)^2}{\sin^2 \omega_0} = \frac{\text{MSE}(\hat{a}_0)}{\sin^2 \omega_0}$$

$$= \frac{(2N-5) + 2\text{SNR} + 2N(N-2)\cos^2 \omega_0}{2(N-2)^2(1+\text{SNR})^2 \sin^2 \omega_0} \quad (\text{E.2.10})$$

$$\approx \frac{N + \text{SNR} + N^2 \cos^2 \omega_0}{N^2 \text{SNR}^2 \sin^2 \omega_0}.$$

EK 3

Otokorelasyon Yöntemi ile Teorik Kestirim Yaklaşımı

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki reel sinüslerden oluşan zaman serisi veri modelinde N adet veriden oluşan y_n veri kümesi, sinüsoidal bir s_n sinyali ve u_n gürültü fonksiyonundan oluşacak şekilde (E.3.1) eşitliği ile ifade edilir.

$$y_n = s_n + u_n \quad 1 \leq n \leq N \quad (\text{E.3.1})$$

Reel sönümsüz sinüslerden oluşan veri modelinin otokorelasyon katsayıları (E.3.2) denkleminde göre bulunur.

$$r_k \triangleq E\{y_n y_{n-k}\} = \frac{\alpha^2}{2} \cos(k\omega_0) + \sigma^2 \rho_k \quad (\text{E.3.2})$$

y_n vektör bileşenlerinin beklenen değeri alınarak elde edilen otokorelasyon katsayıları arasında $r_{k-1} + r_{k+1} = 2 r_k \cos(\omega_0)$, $k > M+1$

şeklinde trigonometrik olarak bir ilişki bulunmaktadır.

$q > p > M+1$ olacak şekilde seçilen p ve q indis değerlerine göre r_k otokorelasyon katsayıları denklem (E.3.3) yardımı ile elde edilir. $M=0$ kabul edilmiştir.

$$\sum_{k=p}^q r_k (r_{k-1} + r_{k+1}) = 2 \cos(\omega_0) \sum_{k=p}^q r_k^2, \quad k > M+1 \quad (\text{E.3.3})$$

\hat{r}_k Otokorelasyon katsayıları kestiricisi denklem (E.3.4) ile hesaplanır.

$$\hat{r}_k \triangleq \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N y_n y_{n-k} \quad (\text{E.3.4})$$

Veri modeli için tayin edilen değişkenler ve \hat{r}_k , veri modelinin otokorelasyon katsayıları kestiricileri değerleri kullanılarak $\hat{\alpha}_0$ kestirici (E.3.5) denklemi yardımıyla elde edilir.

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\sum_{k=p}^q \hat{r}_k (\hat{r}_{k-1} + \hat{r}_{k+1})}{2 \sum_{k=p}^q \hat{r}_k^2}, \quad (\text{E.3.5})$$

Otokorelasyon katsayıları kestirim fonksiyonu $\hat{r} = [\hat{r}_{p-1} \hat{r}_p \dots \hat{r}_{q+1}]^T$ şeklinde kestirim katsayılarının fonksiyonu olarak (E.3.6) yardımı ile yazılabilir.

$$f(\hat{r}) \approx f(r) + v^T (\hat{r} - r) \quad v = \left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}} \right|_{\hat{r}=r}, r = [r_{p-1} r_p \dots r_{q+1}]^T. \quad (\text{E.3.6})$$

\hat{a}_0 kestiricisinin ortalama karesel hatası ve yanlılık ifadeleri (E.3.7) yardımı ile elde edilir.

$$\text{bias}(\hat{a}_0) = E\hat{a}_0 - a_0 \approx v^T (E\hat{r} - r) = 0$$

$$\text{MSE}(\hat{a}_0) = E(\hat{a}_0 - a_0)^2 \approx v^T C v \quad (\text{E.3.7})$$

(E.3.7) ifadesini $C = E(\hat{r} - r)(\hat{r} - r)^T$ şeklinde beklenen değer ve varyans ifadeleri biçiminde yazılabilir. Bunun için v 'nin her bir elemanını hesaplamak gerekir.

$$\left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_{p-1}} \right|_{\hat{r}=r} = \frac{\hat{r}_p}{2\sum \hat{r}_k^2}, \left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_{p-1}} \right|_{\hat{r}=r} = \frac{r_p}{2\sum r_k^2} = \frac{\frac{\alpha^2}{2} \cos(p\omega_0)}{2\sum \frac{\alpha^4}{4} \cos^2(k\omega_0)} = \frac{\cos(p\omega_0)}{\alpha^2 \Delta}$$

$$\Delta = \sum_{k=p}^q \cos^2(k\omega_0)$$

$$\left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_p} \right|_{\hat{r}=r} = \frac{(\hat{r}_{p-1} + 2\hat{r}_{p+1})(2\sum \hat{r}_k^2) - \sum \hat{r}_k (\hat{r}_{k-1} + \hat{r}_{k+1})(4\hat{r}_p)}{(2\sum \hat{r}_k^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_p} \right|_{\hat{r}=r} &= \frac{r_{p-1} + 2r_{p+1} - \cos(\omega_0)(4r_p)}{2\sum r_k^2} = \frac{r_{p+1} - 2\cos(\omega_0)r_p}{2\sum r_k^2} = \frac{-r_{p-1}}{2\sum r_k^2} \\ &= \frac{-\frac{\alpha^2}{2} \cos((p-1)\omega_0)}{2\sum \frac{\alpha^4}{4} \cos^2(k\omega_0)} = \frac{-\cos((p-1)\omega_0)}{\alpha^2 \Delta}, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_{p+1}} \right|_{\hat{r}=r} = \frac{2(\hat{r}_p + \hat{r}_{p+2})(2\sum \hat{r}_k^2) - \sum \hat{r}_k (\hat{r}_{k-1} + 2\hat{r}_{k+1})(4\hat{r}_{p+1})}{(2\sum \hat{r}_k^2)^2}$$

$$\left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_{p+1}} \right|_{\hat{r}=r} = \frac{2(r_p + r_{p+2})(2\sum r_k^2) - 2\cos(\omega_0)(\sum r_k^2)(4r_{p+1})}{(2\sum r_k^2)^2} = 0,$$

⋮

$$\left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_{q-1}} \right|_{\hat{r}=r} = 0,$$

$$\frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_q} = \frac{(2\hat{r}_{q-1} + \hat{r}_{q+1})(2\sum \hat{r}_k^2) - \sum \hat{r}_k(\hat{r}_{k-1} + \hat{r}_{k+1})(4\hat{r}_q)}{(2\sum \hat{r}_k^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_q} \right|_{\hat{r}=r} &= \frac{2r_{q-1} + r_{q+1} - \cos(\omega_0)(4r_q)}{2\sum r_k^2} = \frac{r_{q-1} - 2\cos(\omega_0)r_q}{2\sum r_k^2} = \frac{-r_{q+1}}{2\sum r_k^2} \\ &= \frac{-\frac{\alpha^2}{2}\cos((q+1)\omega_0)}{2\sum \frac{\alpha^4}{4}\cos^2(k\omega_0)} = \frac{-\cos((q+1)\omega_0)}{\alpha^2 \Delta}, \end{aligned}$$

$$\frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_{q+1}} = \frac{\hat{r}_q}{2\sum \hat{r}_k^2}, \quad \left. \frac{df(\hat{r})}{d\hat{r}_{q+1}} \right|_{\hat{r}=r} = \frac{r_q}{2\sum r_k^2} = \frac{\frac{\alpha^2}{2}\cos(q\omega_0)}{2\sum \frac{\alpha^4}{4}\cos^2(k\omega_0)} = \frac{\cos(q\omega_0)}{\alpha^2 \Delta}$$

$$v = \frac{1}{\alpha^2 \Delta} [\cos(p\omega_0) \quad -\cos((p-1)\omega_0) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -\cos((q+1)\omega_0) \quad \cos(q\omega_0)]^T$$

Elde edilen v fonksiyon değerleri kullanılarak C kovaryans matrisinin tüm elemanları elde edilir.

$$\begin{aligned} E\hat{r}_k \hat{r}_m &= \frac{1}{N-k} \frac{1}{N-m} \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E y_i y_{i-k} y_j y_{j-m} \\ &= \frac{1}{N-k} \frac{1}{N-m} \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E (s_i + u_i)(s_{i-k} + u_{i-k})(s_j + u_j)(s_{j-m} + u_{j-m}) \\ &= \frac{1}{N-k} \frac{1}{N-m} \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E \underbrace{(s_i s_{i-k} s_j s_{j-m})}_{T_1} + \underbrace{(s_i s_{i-k} u_j u_{j-m})}_{T_2} + \underbrace{(s_i s_j u_{i-k} u_{j-m})}_{T_3} + \underbrace{(s_i s_{j-m} u_{i-k} u_j)}_{T_4} \\ &\quad + \underbrace{(s_{i-k} s_j u_i u_{j-m})}_{T_5} + \underbrace{(s_{i-k} s_{j-m} u_i u_j)}_{T_6} + \underbrace{(s_j s_{j-m} u_i u_{i-k})}_{T_7} + \underbrace{(u_i u_{i-k} u_j u_{j-m})}_{T_8}. \end{aligned}$$

$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ ve T_8 ifadeleri tek tek elde edilir.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E s_i s_{i-k} s_j s_{j-m} \\
&= \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E \alpha \sin(i\omega_0 + \varphi) \alpha \sin((i-k)\omega_0 + \varphi) \alpha \sin(j\omega_0 + \varphi) \alpha \sin((j-m)\omega_0 + \varphi) \\
&= \frac{\alpha^4}{4} \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E [\cos(k\omega_0) - \cos((2i-k)\omega_0 + 2\varphi)] [\cos(m\omega_0) - \cos((2j-m)\omega_0 + 2\varphi)] \\
&= \frac{\alpha^4}{4} \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N [\cos(k\omega_0) \cos(m\omega_0) + E \cos((2i-k)\omega_0 + 2\varphi) \cos((2j-m)\omega_0 + 2\varphi)] \\
&= \frac{\alpha^4}{4} \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N \cos(k\omega_0) \cos(m\omega_0) + \frac{\alpha^4}{8} \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N \cos((2i-2j-k+m)\omega_0) \\
&= \frac{\alpha^4}{4} (N-k)(N-m) \cos(k\omega_0) \cos(m\omega_0) + \frac{\alpha^4}{8} \frac{\sin((N-k)\omega_0) \sin((N-m)\omega_0)}{\sin^2 \omega_0},
\end{aligned}$$

$$T_2 = \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E s_i s_{i-k} u_j u_{j-m} = \sum_{i=k+1}^N E s_i s_{i-k} \underbrace{\sum_{j=k+1}^N E u_j u_{j-m}}_{\sigma^2 \delta_{[m]=0}} = 0$$

$$\begin{aligned}
T_3 &= \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E s_i s_{j-m} u_{i-k} u_{j-m} = \sum_{i=1}^{N-k} \sum_{j=1}^{N-m} E s_{i+k} s_{j+m} E u_i u_j = \sum_{i=1}^{N-k} \sum_{j=1}^{N-m} E s_{i+k} s_{j+m} \sigma^2 \delta[i-j] \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{N-\max(k,m)} E s_{i+k} s_{i+m} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{N-\max(k,m)} \frac{\alpha^2}{2} \cos((k-m)\omega_0) \\
&= \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2} (N - \max(k, m)) \cos((k-m)\omega_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4 &= \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E s_i s_{j-m} u_{i-k} u_j = \sum_{i=1}^{N-k} \sum_{j=m+1}^N E s_{i+k} s_{j-m} E u_i u_j = \sum_{i=1}^{N-k} \sum_{j=m+1}^N E s_{i+k} s_{j-m} \sigma^2 \delta[i-j] \\
&= \sigma^2 \sum_{i=m+1}^{N-k} E s_{i+k} s_{i-m} = \sigma^2 \sum_{i=m+1}^{N-k} \frac{\alpha^2}{2} \cos((k+m)\omega_0) \\
&= \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2} (N - k - m) \cos((k+m)\omega_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_5 &= \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N E s_{i-k} s_j u_i u_{j-m} = \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=1}^{N-m} E s_{i-k} s_{j+m} E u_i u_j = \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=1}^{N-m} E s_{i-k} s_{j+m} \sigma^2 \delta[i-j] \\
&= \sigma^2 \sum_{i=k+1}^{N-m} E s_{i-k} s_{i+m} = \sigma^2 \sum_{i=k+1}^{N-m} \frac{\alpha^2}{2} \cos((k+m)\omega_0) \\
&= \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2} (N - k - m) \cos((k+m)\omega_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_6 &= \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N Es_{i-k} s_{j-m} u_i u_j = \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N Es_{i-k} s_{j-m} Eu_i u_j = \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N Es_{i-k} s_{j-m} \sigma^2 \delta[i-j] \\
&= \sigma^2 \sum_{i=\max(k,m)+1}^N Es_{i-k} s_{i-m} = \sigma^2 \sum_{i=\max(k,m)+1}^N \frac{\alpha^2}{2} \cos((k-m)\omega_0) \\
&= \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2} (N - \max(k,m)) \cos((k-m)\omega_0),
\end{aligned}$$

$$T_7 = \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N Es_j s_{j-m} u_i u_{i-k} = \sum_{j=m+1}^N Es_j s_{j-m} \sum_{i=k+1}^N \underbrace{Eu_i u_{i-k}}_{\sigma^2 \delta[k]=0} = 0$$

$$\begin{aligned}
T_8 &= \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N Eu_i u_{i-k} u_j u_{j-m} = \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N (\underbrace{Eu_i u_{i-k}}_{\sigma^2 \delta[k]=0} \underbrace{Eu_j u_{j-m}}_{\sigma^2 \delta[m]=0} + Eu_i u_j Eu_{i-k} u_{j-m} + Eu_i u_{j-m} Eu_{i-k} u_j) \\
&= \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N \sigma^2 \delta[i-j] \sigma^2 \delta[i-j-(k-m)] + \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=m+1}^N \sigma^2 \delta[i-j+m] \sigma^2 \delta[i-j-k] \\
&= \sum_{i=\max(k,m)+1}^N \sigma^4 \delta[k-m] = (N-k) \sigma^4 \delta[k-m].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\hat{r}_k \hat{r}_m^T - r_k r_m^T &= \frac{\alpha^4}{8} \frac{\sin((N-k)\omega_0) \sin((N-m)\omega_0)}{(N-k)(N-m) \sin^2 \omega_0} \\
&\quad + \frac{\alpha^2 \sigma^2}{N - \min(k,m)} \cos((k-m)\omega_0) \\
&\quad + \frac{(N-k-m)\alpha^2 \sigma^2}{(N-k)(N-m)} \cos((k+m)\omega_0) \\
&\quad + \frac{\sigma^4}{N-k} \delta[k-m] \\
&\approx \frac{\alpha^2 \sigma^2}{N} [\cos((k-m)\omega_0) + \cos((k+m)\omega_0)] + \frac{\sigma^4}{N} \delta[k-m] \\
&= \frac{2\alpha^2 \sigma^2}{N} \cos(k\omega_0) \cos(m\omega_0) + \frac{\sigma^4}{N} \delta[k-m].
\end{aligned}$$

Belirtilen ifadeler matematiksel olarak matris formatına getirilirse (E.3.8) ifadesi elde edilir.

$$v^T C v = \begin{bmatrix} v_1^T & 0^T & v_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12}^T & C_{22} & C_{23} \\ C_{13}^T & C_{23}^T & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1^T C_{11} v_1 + 2v_1^T C_{13} v_2 + v_2^T C_{33} v_2 \quad (\text{E.3.8})$$

Tüm matris elemanları matematiksel formda yazılabilir.

$$v_1 = \frac{1}{\alpha^2 \Delta} [\cos(p\omega_0) \quad -\cos((p-1)\omega_0)]^T$$

$$v_2 = \frac{1}{\alpha^2 \Delta} [-\cos((q+1)\omega_0) \quad \cos(q\omega_0)]^T$$

$$[C_{11}]_{11} = E\hat{r}_{p-1}\hat{r}_{p-1} - r_{p-1}r_{p-1} = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos^2((p-1)\omega_0) + \frac{\sigma^4}{N}$$

$$[C_{11}]_{21} = E\hat{r}_p\hat{r}_{p-1} - r_p r_{p-1} = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos((p-1)\omega_0) \cos(p\omega_0)$$

$$[C_{11}]_{21} = E\hat{r}_p\hat{r}_{p-1} - r_p r_{p-1} = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos((p-1)\omega_0) \cos(p\omega_0)$$

$$[C_{11}]_{22} = E\hat{r}_p\hat{r}_p - r_p r_p = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos^2(p\omega_0) + \frac{\sigma^4}{N}$$

$$[C_{13}]_{11} = E\hat{r}_{p-1}\hat{r}_q - r_{p-1}r_q = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos((p-1)\omega_0) \cos(q\omega_0)$$

$$[C_{13}]_{12} = E\hat{r}_{p-1}\hat{r}_{q+1} - r_{p-1}r_{q+1} = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos((p-1)\omega_0) \cos((q+1)\omega_0)$$

$$[C_{13}]_{22} = E\hat{r}_p\hat{r}_{q+1} - r_p r_{q+1} = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos(p\omega_0) \cos((q+1)\omega_0)$$

$$[C_{33}]_{11} = E\hat{r}_q\hat{r}_q - r_q r_q = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos^2(q\omega_0) + \frac{\sigma^4}{N}$$

$$[C_{33}]_{12} = E\hat{r}_q\hat{r}_{q+1} - r_q r_{q+1} = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos(q\omega_0) \cos((q+1)\omega_0)$$

$$[C_{33}]_{21} = E\hat{r}_{q+1}\hat{r}_q - r_{q+1}r_q = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos(q\omega_0) \cos((q+1)\omega_0)$$

$$[C_{33}]_{22} = E\hat{r}_{q+1}\hat{r}_{q+1} - r_{q+1}r_{q+1} = \frac{2\alpha^2\sigma^2}{N} \cos^2((q+1)\omega_0) + \frac{\sigma^4}{N}$$

C kovaryans matrisinin elemanları kullanılarak \hat{a}_0 kestiricisinin ortalama karesel hatası elde edilir.

$$\text{MSE}(\hat{a}_0) \approx v^T C v = \frac{\sigma^4}{N\alpha^4\Delta^2} \left[\cos^2((p-1)\omega_0) + \cos^2(p\omega_0) + \cos^2(q\omega_0) + \cos^2((q+1)\omega_0) \right]$$

$\hat{\omega}_0$ 'nın yanlılık ve ortalama karesel hata ifadeleri elde edilir.

$$\text{bias}(\hat{\omega}_0) \approx -\frac{\text{bias}(\hat{a}_0)}{\sin \omega_0} = 0$$

$$\text{MSE}(\hat{\omega}_0) \approx \frac{\text{MSE}(\hat{a}_0)}{\sin^2 \omega_0} = \frac{\cos^2((p-1)\omega_0) + \cos^2(p\omega_0) + \cos^2(q\omega_0) + \cos^2((q+1)\omega_0)}{4N \text{SNR}^2 \Delta^2 \sin^2 \omega_0}$$

(E.3.9) matematiksel eşitliği yardımıyla bilinmeyen w_0 frekansına ait teorik ortalama karesel hata ifadesi elde edilir.

$$\Delta = \frac{q-p+1}{2} + \frac{\cos((p+q)\omega_0) \sin((q-p+1)\omega_0)}{2 \sin \omega_0} \quad (\text{E.3.9})$$

$$\text{MSE}(\hat{\omega}_0) \approx \frac{\cos^2((p-1)\omega_0) + \cos^2(p\omega_0) + \cos^2(q\omega_0) + \cos^2((q+1)\omega_0)}{N \text{SNR}^2 \left[(q-p+1) \sin \omega_0 + \cos((p+q)\omega_0) \sin((q-p+1)\omega_0) \right]^2}$$

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Eda Yenigül

Doğum Yeri ve Tarihi : Kars 1987

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Kars Anadolu Lisesi (2005)

Lisans : Uludağ Üniversitesi (2010)

Çalıştığı Kurum : SCHNEIDER ELECTRIC (2014)

İletişim(e-posta) : yeniguleda@hotmail.com