T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER UZAYLAR VE KUTUPSAL UZAYLAR ÜZERİNE

Nuri KILINÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA - 2006

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER UZAYLAR VE KUTUPSAL UZAYLAR ÜZERİNE

Nuri KILINÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez .... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr . Süleyman ÇİFTÇİ (Danışman)	....	....

ÖZET

Yedi bölümden oluşan bu çalışmada lineer uzaylar ve kutupsal uzaylar ele alınmıştır.

Birinci bölümde ilerideki bölümlere hazırlık olması amacıyla bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

İkinci bölümde lineer uzayların genel özellikleri incelenip, lineer uzay örnekleri üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde D.R. Stinson'un belli sonlu lineer uzayların yokluğunu araştırdığı "The non-existence of certain finite lineer spaces" adlı makalesi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde L.M. Batten'in "The non-existence of finite lineer spaces with $\vartheta=n^2$ and $b=n^2+n+2$ lines" makalesi incelenmiştir.

Beşinci bölümde yine L.M. Batten'in "A characterization of finite lineer spaces on ϑ points, $n^2 \leq \vartheta < (n+1)^2$, and $b=n^2+n+3$ lines $n \geq 10$" makalesi incelenmiştir.

Altıncı bölümde Klaus Metsch'in "Proof of Dowling-Wilson Konjecture" adlı makalesi incelenmiştir.

Yedinci bölümde ise kutupsal uzaylar tanıtılıp, konunun ortaya çıkışının tarihçesi özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer uzay, kutupsal uzay, sonlu lineer uzay, Dowling Wilson konjektörü, sonlu lineer uzayların karakterizasyonu.

ABSTRACT

In this work which consist of seven sections, linear spaces and polar spaces are examined.

In section one, some of the main concepts are introduced as a preparation for the following sections.

In section two, general properties of linear spaces are exemined and linear space examples are stressed upon.

In section three, the article : "The nonexistence of certain finite linear space" , in which D.R. Stinson make a study of nonexistence of certain finite linear space is examined.

In section four, L.M. Batten's "The nonexistence of finite linear space with $\vartheta=n^2$ and $b=n^2+n+2$ lines" article is examined.

In section five, another study of L.M. Batten is examined on " A characterization of finite lineer spaces on ϑ points, $n^2 \leq \vartheta < (n+1)^2$, and $b=n^2+n+3$ lines $n \geq 10$"

In section six, the study of Klaus Metsch on "Proof of Dowling-Wilson Konjecture" is examined.

And in section seven , the polar spaces are introduced and the history of the subject is summerized.

Key words: Lineer space, polar space, finite lineer space, Dowling-Wilson Konjecture, Characterization of finite lineer spaces

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

ϑ : Lineer uzaydaki toplam nokta sayısı.

b : Lineer uzaydaki toplam doğru sayısı.

$\vartheta(d)$: d doğrusu üzerindeki nokta sayısı

b(N) : N noktasından geçen doğru sayısı

$\pi(p,d)$: $p \notin d$ olmak üzere, p noktasından geçip d doğrusunu kesmeyen doğru sayısı

$c(p,d)$: $p \notin d$ olmak üzere, p noktasından geçip d doğrusunu kesen doğru sayısı

GİRİŞ

Lineer uzayların sonlu ve sonsuz elemanlı sayılamayacak çoklukta örneklerini lisans seviyesinde matematik konuları içinde kullanıyoruz.

Bunların önemli sınıflarından ikisi afin uzaylar ve projektif uzaylardır. Her iki konuda da günümüzde çok yoğun araştırmalar yapılmaktadır.

Biz bu çalışmanın ilk altı bölümünde bazı lineer uzayların yokluğunu inceleyeceğiz. D.R. Stinson "The non-existence of certain finite linear spaces" (Stinson 1983) makalesinde $n^2+1\leq\vartheta\leq n^2+n+1$ özelliğini sağlayan ϑ noktalı ve b doğrulu lineer uzayları incelemiş ve $n \leq 3$ olması gerektiğini göstermiştir.

Lynn Margaret Batten "The nonexistence of finite linear spaces with $\vartheta=n^2$ points and $b=n^2+n+2$ lines" (Batten 1993) makalesinde D.R Stinsonun atladığı hal olan $\vartheta=n^2$ noktalı ve $b=n^2+n+2$ doğrulu sonlu lineer uzayların yokluğunu incelemiştir.

Yine Lynn Margaret Batten "A characterization of finite linear spaces on ϑ points, $n^2\leq\vartheta<(n+1)^2$, and $b=n^2+n+3$ lines, $n\geq10$" (Batten 1993) isimli makalesinde ϑ noktalı ve $b=n^2+n+3$ doğrulu sonlu lineer uzayların karakterizasyonu üzerinde durmuştur.

Klaus Metsch "Proof of the Dowling-Wilson Conjecture" (Metsch) isimli yayınlanmamış bir çalışmasında bir p noktasından geçen doğruların sayısı b(p) olmak üzere $b\leq\vartheta+b(p)-2$ şartını sağlayan tüm lineer uzayları sınıflandırmıştır.

Biz bu çalışmaları esas alıp ispatlarını açarak gerekli yerlerde açıklayıcı örnekler vererek konuyu bir bütün olarak incelemeye çalışacağız.

Bu tezin son bölümü kutupsal uzayların tanıtımına ayrılmıştır. Kutupsal uzaylar konusu üzerinde yoğun araştırmaların yapıldığı çok yeni bir konudur.Ancak bu konuda da yapılan araştırmalar konunun yeniliğine rağmen büyük hacimlere ulaşmıştır.Burada verdiklerimiz konunun ortaya çıkışının tarihçesi ile sınırlıdır.

1. GENEL BİLGİLER

Aşağıdaki tanım ve teoremler için Lynn Margaret Batten'ın "Combinatorics of finite geometries" adlı kitabı esas alınmıştır.(Batten 1997)

Tanım1.1. : Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir **U**(**N**,**D**) uzayına bir lineer uzay denir.

L1) Her doğrunun en az iki noktası vardır.

L2) Farklı iki noktadan bir doğru geçer.

Bir lineer uzayda ϑ ve b harfleri sırasıyla |**N** | ve |**D**| yi belirtir.

Herhangi bir $N \in \mathbf{N}$ noktası ve $d \in \mathbf{D}$ doğrusu için; b(N) ile N noktasından geçen doğru sayısı, $\vartheta(d)$ ile d doğrusu üzerindeki nokta sayısı belirtilir.

Tanım 1.2: Bir **U**(**N**, **D**) lineer uzayında r tane doğru üzerindeki nokta r-nokta, k tane noktadan geçen doğru k – doğru olarak adlandırılır.

Tanım 1.3: $\mathbf{N}_1 \subseteq \mathbf{N}$ ve $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{D}$ olmak üzere bir $\mathbf{U_1} = (\mathbf{N_1}, \mathbf{D_1})$ lineer uzayına **U = (N, D)** lineer uzayının bir alt uzayı denir

Tanım 1.4: ϑ = b ve bazı d doğruları için $\vartheta(d)=\vartheta-1$ özelliğindeki bir lineer uzaya bir yaklaşık demet denir.

Tanım 1.5: Aşağıdaki P1, P2 aksiyomlarını gerçekleyen bir **U**(**N**, **D**) lineer uzayına bir projektif düzlem denir.

P1) Herhangi iki doğru kesişir.

P2) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Bir projektif düzlemde aşağıdaki önermeleri gerçekleyen bir n,n≥2 doğal sayısı vardır. Bu sayıya projektif düzlemin mertebesi denir.

a) Her doğru üzerinde n+1 nokta vardır.

b) Her noktadan n+1 tane doğru geçer.

c) $\vartheta = n^2 + n + 1$ dir

d) $b = n^2 + n + 1$ dir

Tanım 1.6: Aşağıdaki A1, A2 aksiyomlarını gerçekleyen bir **U**(**N**, **D**) lineer uzayına bir afin düzlem denir.

A1) Bir d doğrusunun dışındaki bir noktadan geçen ve d yi kesmeyen bir tek doğru vardır.

A2) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Tanım 1.7: Ortak noktaları bulunmayan iki doğruya paralel doğrular denir.

Bir afin düzlemde aşağıdaki önermeleri sağlayan bir n, $n \geq 2$ doğal sayısı vardır. Bu sayıya afin düzlemin mertebesi denir.

a) Her doğru üzerinde n tane nokta vardır.

b) Her noktadan n + 1 tane doğru geçer.

c) $b = n^2 + n$ dir.

d) $\vartheta = n^2$ dir.

Tanım 1.8: Eğer bir afin düzlemin bir paralel sınıfındaki doğruların bir sonsuz noktasında kesişmesine izin veriliyorsa elde edilen yapıya sonsuzdaki bir noktası bulunan bir afin düzlem denir.

2. LİNEER UZAYLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ

Aşağıdaki teorem (Metsch 1989,Fowler 1984) de ispatlanmıştır. Biz ispatının bir taslağını vereceğiz.

Teorem 2.1: q bir **U** lineer uzayının bir noktası ve L_1, ... L_r q dan geçen ve i ∈ 1, ..., r için $|L_i| \leq |L_r|$ özelliğine sahip doğruları göstersin.

$$s_i = \sum_{q \neq p \in L_i} \frac{1}{b(p)-1}$$

eşitliği kurulur ve $i<r$, $s_i \neq 1$ şeklindeki indislerin sayısı w ile gösterilirse:

a) Eğer $i<r$ ise bu takdirde $s_i \leq 1$ dir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart $|L_i| = |L_r|$ olması ve tüm $p \in L_i \setminus \{q\}$ noktaları için $b(p) = |L_r|$ olmasıdır.

b) Eğer $w \leq r-2$ ise $b \geq \vartheta + w$ dır.

c) Eğer $w = r-1$ ise bu takdirde $b \geq \vartheta + r - 2$ dır. Eğer $w = r-1$ ve $s_r \leq 1$ ise bu takdirde $b \geq \vartheta + r - 1$ dir.

İspat: a) $|s_i| = 1$, $|L_i| = u+1$ ve L_i nin q dan farklı noktaları $p_1, p_2, .., p_u$ olsun.

$si = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_u} = 1$ yazalım. Bu takdirde

$a_1 \geq |L_r| - 1$

$a_2 \geq |L_r| - 1$

..

$a_u \geq |L_r| - 1$ dir.

$\forall i$ için $|L_i| < |L_r|$ kabul edilirse

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_u} < 1$ olur. O yüzden $|L_i| < |L_r|$ olamaz. Tanım gereği $|L_i| \leq |L_r|$ olduğundan $|L_i| = |L_r|$ dir.

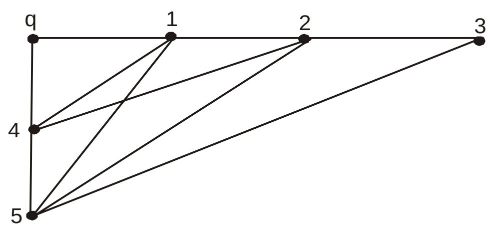
Şartın yeterliliği açıktır.

b) ve c) $i<j<r$ için $s_i \leq s_j$ olduğu kabul edilmelidir. Bu takdirde $i=1, \ldots, w$ için $s_i<1$ ve $i = w+1, \ldots, r-1$ için $s_i=1$ dir. Eğer $w \leq r-2$ ise $w' := w+1$ olarak alınsın. Eğer $w=r-1$ ise bu takdirde $w' := w+1$ olarak eğer $s_r \leq 1$ ve $s_r>1$ ise $w' := w$ olarak alınsın. O zaman $s_{w'} \leq 1$ olur. L den p noktası ve $i = 1, \ldots\ldots, w'$ olmak üzere L_i doğruları çıkarılarak bulunan D geometrik yapısının üzerinde olma matrisini A ile gösterelim ki bu bir $(\vartheta-1) x (b-w')$ matrisdir. $A^t.A$ matrisinin regüler olduğu kontrol edilirse buradan A nın rankının en az $\vartheta-1$ olduğu çıkar ki bu $b-w' \geq \vartheta-1$ olmasını gerektirir.

Sonuç 2.2 (Metsch 1989) Bir lineer uzayın $b \leq \vartheta + b(q) - 2$ olacak şekilde bir q noktasına sahip olduğu ve her $p \neq q$ için $b(p) \geq |pq|$ olduğu farzedilsin. Bu takdirde q nun üzerinde olduğu öyle bir L doğrusu vardır ki $L - \{q\}$ nun her noktasının derecesi $|L|$ dir.

Örnek 2.1: Teorem 2.1 in iddialarını sırasıyla aşağıdaki örneklerle canlandırabiliriz:

a)



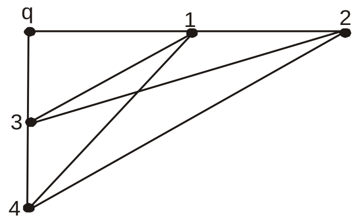
q dan geçen doğrular $L_1 = \{q,4,5\}$

$L_2 = \{q,1,2,3\}$ olarak alınırsa. $r = 2$ ve $|L_1| \leq |L_2|$ dir.

$$s_1 = \sum_{q \neq p \in L_1} \frac{1}{b(p)-1} = \frac{1}{r_4 - 1} + \frac{1}{r_5 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ olarak}$$

bulunur. $1 < 2$ ve $s_1 \neq 1$ olduğundan $w=1$ dir.

Diğer yandan aşağıdaki lineer uzayı ele alırsak q noktasından geçen doğrular



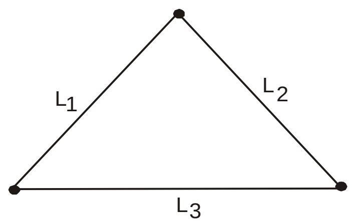
$L_1=\{q, 3, 4\}$ ve $L_2=\{q,1,2\}$, $|L_1| = |L_2|=3$ tür.

$$s_1 = \sum_{q\neq p\in L_1} \frac{1}{b(p)-1} = \frac{1}{b(3)-1} + \frac{1}{b(4)-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$L_1 \setminus \{q\}$ nun noktaları 3 ve 4 için

$r_3= r_4 =|L_2|$ dir.

b) Aşağıdaki lineer uzayı ele alalım. $| L_1| = |L_2| = |L_3|$ olduğundan $i=1,2,3$

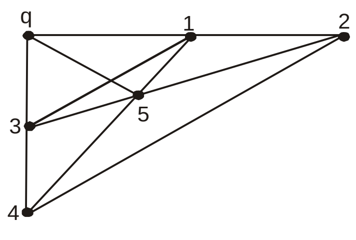


için $s_i = 1$, $r=3$ dır. O yüzden $w=0$ dır.

$w \leq r-2$ $0 \leq 3-2$ $0 \leq 1$ yani $w \leq r-2$ şartı sağlanır. O halde $b=3$ $\vartheta = 3$ $w=0$ olduğundan

$b \geq \vartheta + w$ $3\geq 3 + 0$, $3\geq 3$ yani $b \geq \vartheta + w$ olur.

Diğer bir örnek olarak aşağıdaki lineer uzayı ele alalım.q dan geçen doğrular



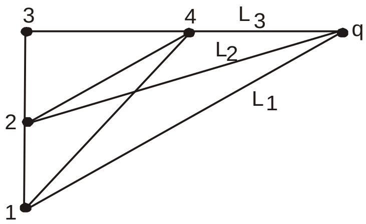
$L_1=\{q,5\}$ $L_2 = \{q, 1,2\}$ $L_3 =\{q, 3,4\}$

$|L_1|< |L_2|=|L_3|$ ve $s_1 = \frac{1}{b(5)-1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$ dir. O halde $w = 1$ dir.

$1 \leq 3-2 \Rightarrow 1 \leq 1$ $w \leq r-2$ olur

$7 \geq 6+1$ olduğundan $b \geq \vartheta+ w$ şartı sağlanır.

c) i) Aşağıdaki lineer uzayı ele alalım q dan geçen doğrular



$L_1 = \{q,1\}$ $L_2 = \{q,2\}$

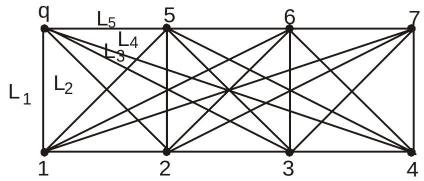
$L_3 = \{q, 4,3\}$ dür.

$|L_1| = |L_2| < |L_3|$ olur. r=3

$s_1 = \frac{1}{b(1)-1} = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{b(1)-1} = \frac{1}{2}$ olduğundan

w=2 yani w = r-1 dir. Bu takdirde b = 6 ϑ = 5, r = 3 için 6≥ 5+3-2 yani 6 = 6 olduğundan b ≥ ϑ + r –2 şartı sağlanır. Zaten b≥ ϑ+r-1 yani 6 ≥5+3-1 değildir.

ii) Aşağıdaki lineer uzayı ele alırsak q dan geçen doğrular $L_1 = \{q,1\}$



$L_2 = \{q,2\}$, $L_3 = \{q,3\}$ $L_4 = \{q, 4\}$

$L_5 = \{q, 5, 6, 7\}$ dir. r = 5

$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \frac{1}{4}$ olduğundan w = 4 dür.

Üstelik $s_5 = \frac{1}{b(5)-1} + \frac{1}{b(6)-1} + \frac{1}{r(7)-1}$

$= \frac{1}{5-1} + \frac{1}{5-1} + \frac{1}{5-1} = \frac{3}{4} \leq 1$ dir.

Bu takdirde b = 18 ϑ = 8 r = 5 olduğundan 18 ≥ 8 +5 – 1 18 ≥ 12 dir. Yani b≥ ϑ + r – 1 şartı sağlanır

Uyarı: Eğer b=ϑ+ b(q) –1 ise sonuç 2.2 geçerli değildir.Kısım 6.2 de bu eşitliği sağlamayan lineer uzay örnekleri Tip1 basit genişleme olarak tanıtacağız.

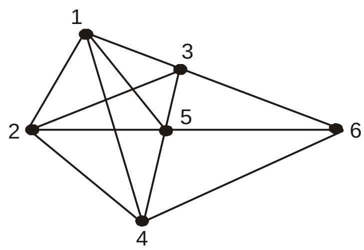
Lemma 2.3: (Transfer Lemma): p nin bir lineer uzayın iki H ve K doğrusunun dışında bir nokta olduğu farzedilsin. Eğer p H yi kesen ve K yi kesmeyen s tane doğrunun üzerinde ise bu taktirde p K yi kesen H yi kesmeyen $s + |K| - |H|$ doğrunun üzerindedir.

İspat: Hem K yı hem H yi kesen doğru sayısı a olsun.

H yi kesip K yi kesmeyen doğru sayısı $= |H| - a = s$ olmak üzere K yi kesip H yi kesmeyen doğru sayısı $= |K| - a$ olur.

$|K| - a = |K| - (|H| - s) = s + |K| - |H|$ dir.

Örnek 2.3: Şekil 2.7 de bulunan lineer uzayı ele alıp $H = \{3, 4, 5\}$ $K = \{2, 5, 6\}$



olarak alalım.

H yi kesip K yi kesmeyen doğru sayısı $s = 1$ dir.

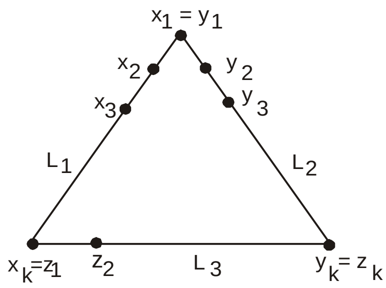
1 noktasından geçen ve H yi kesip K yi kesmeyen doğruların sayısı

$s=1$, $|K| = 3$, $|H| = 3$

$s + |K| - |H| = 1 + 3 - 3 = 1$ dir. Gerçektende bu 1 noktasından geçen K yi kesen ve H yi kesmeyen doğru sayısıdır.

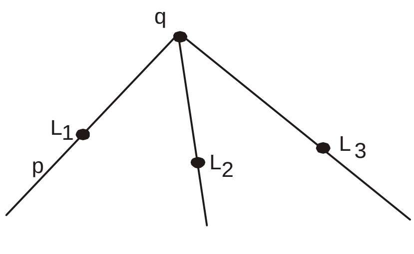
Lemma 2.4: L_1, L_2 ve L_3 bir lineer uzayda aynı k dereceli paralel olmayan üç doğru olsun. Ayrıca $L_1 \cap L_3$ noktasının derecesi k olsun. Eğer L_1, L_2 ye paralel olan s tane doğruyu kesiyorsa bu takdirde L_1, L_3 e paralel olan (en az) s doğruyu keser.

İspat : 1. DURUM: L_1, L_2 , L_3 doğruları noktadaş olmasın



L_1 in $L_1 \cap L_2$ ve $L_1 \cap L_3$ den farklı herhangi bir p noktasından geçen ve L_2 ye paralel olan doğru sayısı b(p)-k dir ki bu sayı p den geçip L_3 e paralel olan doğru sayısı ile aynıdır. Çünkü p den geçen L_2 yi kesen doğru sayısı $|L_2|=k$ dır.O da L_3 ü kesen doğru sayısıdır. $L_1 \cap L_3$ noktasından hipotez gereği k tane doğru geçmektedir. Bu noktayı L_2 nin noktalarına birleştiren doğru sayısı da k olduğundan $L_1 \cap L_3$ noktasından geçen ve L_2 ye paralel olan hiçbir doğru yoktur. Ancak $L_1 \cap L_2$ noktasından geçip L_3 e paralel olan doğru var olabilir. Bu yüzden L_1, L_3 e paralel olan en az s tane doğru keser.

2.DURUM: L_1, L_2 , L_3 doğruları bir q noktasında keşişsin.q noktasından geçipte



L_2 ye veya L_3 e paralel olan doğru yoktur. L_1 in geri kalan her p noktasından L_2 ye paralel olan b(p)-k tane doğru söz konusudur. Aynı sayı L_3 içinde geçerlidir.bu doğruların L_1 tarafından kesildiği açıktır.Dolayısıyla L_1 in kestiği L_2 ye paralel doğru sayısı ile L_3 e paralel doğru sayısı eşittir.

Teorem 2.5: (Metsch 1989) N bir lineer uzayın derecesi n ile gösterilen bir doğrusu olsun. N nin kesişen iki doğru olan L_1 ve L_2 doğrularına paralel olduğu ve $d_i=n+1-|L_i|$ olduğu kabul edilsin.

Eğer $s:=\sum_{p\in N} (b(p)-n-1)$ ise bu takdirde $d_1.d_2 \geq n-s$ dir.

İspat :

m : N ye paralel doğru sayısı

e : N ye paralel ve L_1 veya L_2 yi kesen doğru sayısı

f : L_1 ve L_2 ye paralel doğru sayısı olsun.

N , L_1 ve L_2 ye paralel olduğundan

$m-e \leq f-1$ yazabiliriz. (I.)

Lineer uzayın toplam doğru sayısı b olsun. N yi kesen doğru sayısı $\sum_{p\in N} b(p)-1$ dir. O halde N ye paralel doğru sayısı

$$m = b-1 - \sum_{p\in N} b(p)-1$$

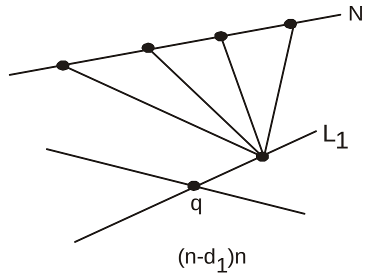
$$m = b - 1 - [(\sum_{p\in N} b(p)-1) + n^2-n^2]$$

$$m = b-1 - [\sum_{p\in N} (b(p)-n-1) + n^2]$$

$$m = b-1 - n^2-s \text{ dir.} \qquad \text{(II.)}$$

L_1 ve L_2 nin kesişme noktasını q olarak alalım. q nun derecesini n + 1 + x ile gösterelim ve $s_i = \sum_{q\neq p\in L_i} (b(p)-n-1)$ diyelim.

q dan geçen n+1 + x doğru vardır, L_1 üzerindeki q dan farklı nokta sayısı $n-d_1$ dir. Bunların herbiri N üzerindeki n nokta ile birleşeceğinden $(n-d_1)$ n tane doğru hem L_1 i hem N yi keser.



L_1 in q dan farklı belli bir p noktasından geçen ve N ye paralel olan L_1 den farklı doğruların sayısı b(p)– n–1 dir. O halde L_1 üzerindeki tüm p noktaları için $s_1 = \sum_{q \neq p \in L_1} b(p) - n - 1$ dir.

O halde L_1 e paralel doğruların sayısı

$$b - (n+1+x) - (n-d_1)\, n - s_1 \quad \text{dir.} \qquad \text{(III.)}$$

L_1 ve L_2 yi kesen doğruların sayısı $b(q) + (n-d_1)(n-d_2)$ dir. L_2 nin kestiği toplam doğru sayısı $\sum_{p \in L_2} b(p) - 1$ dir.

<u>L_1 ve L_2 ye paralel doğru sayısı f yi hesaplarsak:</u>

$$s_i = \sum_{q \neq p \in L_i} b(p)-n-1 = (n-d_i)(-n) + \sum_{q \neq p \in L_i} b(p) - 1$$

$$\sum_{q \neq p \in L_i} b(p) - 1 = s_i + n^2 - nd_i \quad \text{bulunur.}$$

$$f = b - \sum_{q \neq p \in L_1} [b(p)-1] - \sum_{q \neq p \in L_2} [b(p)-1] - b(q) + (n-d_1)(n-d_2) \qquad \text{(IV.)}$$

$$f = b - (s_1+n^2-n\, d_1) - (s_2+n^2-nd_2) - b(q) + (n-d_1)(n-d_2)$$

$$f = b - s_1 - n^2 - s_2 - n - 1 - x + d_1 . d_2$$

son olarak q N ye paralel x+1 doğru üzerinde olduğundan ve N ye paralel olup L_i yi q dan farklı bir noktada kesen doğru sayısı s_i olduğundan

$$e \leq x+1 + s_1 + s_2 \qquad \text{(V.)}$$

$$m-e \leq f-1$$

$$m-e+1 \leq f$$

$$b-1-s-n^2-x-1-s_1-s_2+1 \leq b-s_1-s_2-n^2-n-1-x+d_1.d_2$$

gerekli kısaltmalar yapılırsa

$-s\leq -n+ d_1.d_2$ bulunur.bu son istenilen sonuç olan

$n-s\leq d_1.d_2$ elde edilir.

3. BELLİ SONLU LİNEER UZAYLARIN YOKLUĞU

Sonlu bir (**N**,**D**) lineer uzayının toplam nokta sayısı ϑ ile toplam doğru sayısı b arasındaki bağıntı esas inceleme konularından birisidir. 1948 de de Bruijn ve Erdös $\vartheta \leq b$ olduğunu ve $\vartheta = b$ iken uzayın ya bir yaklaşık demet ya da bir projektif düzlem olacağını ispat etti.

D.R Stinson 1982 de $n \geq 3$ için $n^2+1 \leq \vartheta \leq n^2+n+1$ olacak şekilde bir yaklaşık lineer uzayın, bir istisna dışında var olamayacağını gösterdi. Bu bölümde adı geçen çalışmayı, bir kısım önermelerin ispatlarını eklediğimizi göz ardı edersek, olduğu gibi veriyoruz.

Esas teoremin ispatından önce **(r,1)- dizaynlar** ile ilgili bazı hazırlık tanımlarını veriyoruz

Tanım 3.1: Bir **(r,1)- dizayn** aşağıdaki şartları sağlayan bir **(N, D)** ikilisidir.

(1) **N** sonlu bir nokta kümesidir

(2) **D N'nin** blok adı verilen özel alt kümelerinin bir ailesidir. Öyle ki her nokta r blokta kapsanır ve her bir sıralı olmayan nokta ikilisi bir tek blokta bulunur. (kardinalitesi 1 olan bloklara izin verilir ve bunlar tekrarlanabilir.

Tanım 3.2: Bir **(N, D) (r,1)- dizaynda,** P N in bir parçalanışı olmak üzere $P \subseteq D$ bloklarının bir alt kümesine bir paralel sınıf denir.

Lemma 3.1: $n^2 + n+1$ bloklu bir **(n+1, 1)- dizaynda** uzunluğu k olan bir B bloğu $n^2- n(k-1)$ bloktan ayrıktır. B de olmayan her nokta tam olarak bu blokların n-k+1 tanesinde kapsanır.

İspat: B bloğundaki her noktadan B'den farklı n blok geçer. Böylece B'yi kesen kendisi dahil n.k+1 blok bulunur. B ile ayrık blok sayısı $n^2 +n+1-(n.k+1)=n^2-n(k-1)$ olur.B de kapsanmayan bir noktadan B'yi kesen k tane blok geçeceği için bu noktadan B ile ayrık n+1-k blok geçer.

Lemma 3.2: $n^2 + n+1$ bloklu bir **(n+1, 1)- dizaynda** $k_1=|B_1|$ ve $k_2=|B_2|$ olmak üzere iki ayrık B_1 ve B_2 bloğunun her ikisinden ayrık blok sayısı $(n - k_1)(n - k_2) + n-1$ dir.

İspat: B_1'i $k_1.n$ ve B_2'yi $k_2.n$ blok keser. Bunlardan $k_1.k_2$ tanesi hem B_1'i hem de B_2'yi keser. Dolayısıyla B_1 veya B_2'yi kesen (kendileri dahil) $k_1.n+k_2.n+2-k_1.k_2$ blok vardır. B_1 ve B_2'nin her ikisinden ayrık blok sayısı bu sebeple $n^2 + n+1-k_1.n-k_2.n+k_1.k_2-2= (n-k_1)(n-k_2)+n-1$ dir.

Lemma 3.3: n+1 büyüklüğünde bir bloğa sahip bir **(n+1, 1)- dizayn** tam olarak $n^2 + n+1$ bloğa sahiptir.

İspat: (n+1, n)- dizaynda B_1 n+1 büyüklüğünde bir blok olsun. B_1'in her noktasından B_1'den farklı n tane blok geçtiğinden B_1 ile ayrık olmayan (B_1 dahil)

$(n+1).n+1= n^2 + n+1$ blok vardır. Eğer B_1'den ayrık ve $k \geq 2$ noktalı bir B_2 bloğu var olsaydı B_1 veya B_2'yi kesen blok sayısı $(n+1).n+k.n-(n+1)k= n^2+n-k$ olacaktı ki bu B_1'i kesen blok sayısı olan n^2+n den küçük olacaktı. Bu aşikar bir çelişki olduğundan B_1 ile ayrık herhangi bir B_2 blok yoktur. Dolayısıyla dizayndaki toplam blok sayısı $n^2 + n+1$ dir.

Şimdi lineer uzaylar ile ilgili asıl incelememize geçiyoruz.

Lemma 3.4: Eğer bir sonlu lineer uzay k uzunluklu bir doğruya sahip ise bu taktirde $b \geq 1+k^2 [(\vartheta-k) / (\vartheta-1)]$ dir.

İspat: (Stanton , Kalbfkeisch 1972**,** Stanton ve ark.1980)

Lemma 3.5: $n \geq 3$, $n^2+1 \leq \vartheta \leq n^2 + n+1$ olmak üzere ϑ noktalı bir sonlu lineer uzayda $n+2 \leq k \leq \vartheta-2$ olmak şartı ile, k noktalı bir doğru varsa, bu takdirde $b > n^2 + n+2$ dir.

İspat: Lemma 3.4 uygulansın $f(k,\upsilon) = 1+k^2 [(\vartheta-k) / (\vartheta-1)]$olarak tanımlarsın. Bu taktirde f sabit ϑ için k'nın bir fonksiyonu olarak $[2,\vartheta-1]$ aralığı üzerinde ve ünimodaldır.

Bu yüzden $b \geq \min\{f(n+2,\vartheta), f(\vartheta-2, \vartheta)\}$ dir. Ayrıca sabit k sabit için f ϑ'nin aratan bir fonksiyonudur ve $f(\vartheta-2, \vartheta)$ ϑ'nin artan bir fonksiyonudur. Bu yüzden $b \geq \min\{f(n+2, n^2+1), f(n^2-1, n^2+1)\}$ dür. Şimdi $n \geq 3$ için $f(n+2, n^2+1) = n^2+n+2+(2n^3- 2n^2- 8n- 4) / n^2 < n^2+n+2$ dir.

Aynı zamanda $n \geq 3$ için, $f(n^2-1, n^2+1) = n^2+n+2+(n^4-n^3- 5n^2+2) / n^3$ n^2+n+2'dir.

Bir sonlu lineer uzayda bir noktanın derecesi üzerinde bulunduğu doğru sayısıdır.

Lemma 3.6: Eğer F , $n \geq 3$, $n^2+1 \leq \vartheta \leq n^2 + n+1$ ve $b= n^2+n+2$ özelliğinde bir sonlu lineer uzay ise bu taktirde aşağıdakilerden biri geçerlidir:

(1) her bir noktanın derecesi en az $n+1$'dir.

(2) $\vartheta= n^2+1$ dir, bir nokta herbirinin uzunluğu $n+1$ olan n tane doğru üzerindedir, ve diğer tüm noktaların derecesi en az $n+1$ dir.

İspat: x herhangi bir nokta olsun ve x in derecesinin en çok n olduğu kabul edilsin.

Birinci olarak $\vartheta \geq n^2+2$ olduğu farzedilsin. Sonra x den geçen doğruların ortalama uzunluğu en azından $1+[(n^2+1)/n]= n+2$' dir. Eğer en uzun doğrunun uzunluğu ϑ-1 ise bu taktirde uzay bir yaklaşık demet ve b= ϑ'dir ki bu çelişkidir. Öbür türlü lemma3.5 çelişki verir.

Eğer $\vartheta= n^2+2$ ise önceki gibi bir çelişki buluruz. Ancak x in derecesi n ve x den geçen her türlü doğrunun uzunluğu n+1 hariç. O zaman diğer doğruların hiçbirinin uzunluğu n yi geçmez, böylece öteki noktaların derecesi en az $1+(\vartheta-n-1) / (n-1)= n+1$ dir.

Lemma 3.7: Eğer $n^2+1 \leq \vartheta \leq n^2 + n+1$ şartını sağlayan bir sonlu lineer uzay ϑ noktalı olup hiçbir doğrunun uzunluğu n yi geçmiyorsa $b \geq n^2+2n+2$ dir. Bu yüzden $b \geq [((n+2)\vartheta) / n] \geq n^2+2n+2$ dir.

İspat: Her noktanın derecesi en az $[(\vartheta-1) / (n-1)] \geq n+2$ dir.

Sonuç 3.8 Eğer bir sonlu lineer uzayda $n^2+1 \leq \vartheta \leq n^2 + n+1$ ve $b= n^2+n+2$ $(n\geq3)$ise bu taktirde en uzun doğrunun uzunluğu n+1 olur.

İspat: Lemma 3.5 ve lemma 3.7 den çıkar.

Esas neticemizin ispat lemma 3.6 nın muhtemel iki sonucu ile belirlenen iki parçaya ayrılmıştır.

Lemma 3.9: Bir sonlu lineer uzayın aşağıdaki şartları sağlayacağı farzedilsin.

(1) $n^2+1 \leq \vartheta \leq n^2 + n+1$ $(n \geq 3)$,

(2) $b= n^2+n+2$

(3) Her noktanın derecesi en az n+1 dir. Bu taktirde n+1 uzunluğundaki bir doğrunun üzerindeki her noktanın derecesi n+1 dir.

İspat: ℓ uzunluğu n+1 olan bir doğru olsun. $x \in \ell$ noktasının derecesinin n+2 olduğu farzedilsin. Bu taktirde ℓ yi kesen (ℓ dahil) doğruların sayısı en az $1+n+1+n.n= n^2+n+2$ dir. Böylece x in derecesi tam olarak n+2 olup diğer tüm noktalar n+1 derecelidir ve tüm doğrular ℓ yi keser.

Durum (i): x in sonlu lineer uzaydaki n+2 dereceli tek nokta olduğu farzedilsin. O zaman x i çıkarıp $\vartheta' \geq n^2$ noktalı ve $b'= n^2+n+2$ bloklu bir **(n+1,1)- dizayn** elde ederiz. Eğer uzunluğu n+1 olan bir B bloğu varsa bu taktirde $b'= n^2+n+1$ dir. (Lemma 3.3)

Bu yüzden en uzun bloğun uzunluğu n dir. Herhangi bir noktadan geçen bir bloğun ortalama uzunluğu $1+(\vartheta'-1) / (n-1) \geq n$ dir. Bu yüzden $\vartheta' =n^2$ ve diğer tüm doğruların uzunluğu n dir. Bu **(n+1,1)- dizayn** mertebesi n olan bir afin düzlem olmak zorundadır. Her paralel sınıfta n+1 blok vardır. Böylece n+2 dereceli bir x noktası eklemenin hiçbir yolu yoktur, bir çelişkidir.

Durum (ii): Derecesi n+2 olan en az bir $y \notin \ell$ noktasının varolduğu kabul edilsin. y den geçen ve ℓ yi kesen n+1 doğru vardır. Böylece y den geçen ℓ ile ayrık bir doğru var olur, çelişkidir.

Ne (i) ne de (ii) mümkün olmadığından istenen sonuç elde edilmiş olur.

Lemma 3.10: Lemma 3.9 un şartını sağlayan bir sonlu lineer uzay var olsun. bu taktirde her noktanın derecesi ya n+1 yada n+2 dir. n+2 dereceli noktaların kümeleri sonlu lineer uzayda bir doğrudur.

İspat: Birinci olarak derecesi n+2 olan en az bir nokta varolmak zorundadır. Aksi halde **(n+1,1)- dizayn** bulunur ve b= n^2+n+1 olur (Lemma 3.3)

x derecesi n+2 olan bir nokta olsun ve ℓ uzunluğu n+1 olan herhangi bir doğru olsun. Lemma 3.9 gereği x $\notin$ ℓ dir. x i kapsayan ℓ ile ayrık en az bir n doğrusu vardır. ℓ yi kesen n^2+n+1 doğru vardır.(ℓ dahil) n^2+n+2 tane doğru saymış olduk ki bu doğruların toplam sayısıdır. Bu yüzden x in derecesi (tam olarak) n+2 dir.

Şimdi, eğer y m nin üzerindeki herhangi bir nokta ise y yi ℓ ye birleştiren n+1 doğru vardır, dolayısıyla y nin derecesi n+2 dir. Geriye n+2 dereceli her noktanın n üzerinde olduğunu göstermek kaldı. z nin m üzerinde olmayan n+2 dereceli bir nokta olduğu farzedilsin. Bu durumda z yi kapsayan ve ℓ ile ayrık olan bir m' doğrusu vardır. Bu çok büyük sayıda doğru üretir ki n^2+n+1 tane doğru ℓ yi m yi ve m' yü keser. Bu yüzden n+2 dereceli noktaların kümesi kesinlikle m dir.

Lemma 3.11: Lemma 3.9 un hipotezlerini sağlayan hiçbir sonlu lineer uzay yoktur.

İspat: F nin böyle bir sonlu lineer uzay olduğu farzedilsin. F den m doğrusu (Lemma 3.10 da belirlenen) ve onun tüm noktaları çıkarılsın. Eğer m nin uzunluğu k ise n^2-1-k noktalı ve n^2+n+1 bloklu bir **G(n+1,1)- dizayn** elde edilir. m nin her bir noktası bir P_i paralel sınıfı ortaya çıkarır. $(1 \leq i \leq k)$.Bu P_i ler aşikar olarak ayrıktır. Üstelik m üzerindeki hiçbir nokta (F de) büyüklüğü n yi aşan bir doğru üzerinde değildir, dolayısıyla P_i lerdeki tüm bloklar en çok n-1 uzunlukludur.

Biz ϑ= (n-2)(n+1)+n-k+3 e sahibiz. Bu yüzden büyüklüğü n+1 olan herhangi bir P paralel sınıfı, ki uzunluğu n-1 i aşan hiçbir blok kapsamaz, uzunluğu n-1 olan en az n-k+3 blok ve uzunluğu n-1 den küçük olan en çok k-2 blok kapsar.

$B \in P_1$ uzunluğu n-1 olan bir blok olsun. B den ayrık 2.n blok vardır ve bunların n tanesi P_1 dedir. Geri kalan n sayıdaki B den ayrık bloklar ile B büyüklüğü n+1 olan bir paralel sınıf oluşturur.(Lemma3.1). Şimdi, B her P_i nin $(2 \le i \le k)$ n-1 bloğunu keser, dolayısıyla $|P \cap P_i|=2$, $2 \le i \le k$ dır. P nin uzunluğu n olan bir B_1 bloğu kapsadığı farzedilsin. O zaman $B_1 \notin \bigcup_{i=2}^{k} P_i$ olur. Bu yüzden B_1 , P_2 nin; diyelim n bloğunu keser, dolayısıyla $|P \cap P_2| = 1$ bir çelişkidir.

Bu sebeple P uzunluğu n-1 i aşan hiçbir blok kapsamaz. Bu yüzden P uzunluğu n-1 den farklı olan en çok k-2 blok kapsar. Bundan dolayı $P \cap (\bigcup_{i=2}^{k} P_i)$ deki 2k-1 blokta en az k tane n-1 uzunluklu blok vardır. Bu yüzden P ve P_{i_0} uzunluğu n-1 olan iki ortak bloğa, diyelim ki B_2 ve B_3, sahip olacak şekilde bir i_0 $(2 \le i_o \le k)$ vardır. Şimdi B_2 ve B_3 karşılıklı $P \cup P_{i_0}$ ın en az 2n-2 bloğundan ayrıktır, $n \ge 3$ olduğundan bu Lemma 3.2 ile çelişir.

Şimdi esas neticemizin ispatının ikinci kısmını ele alıyoruz.

Tanım 3.3: x bir sonlu lineer uzaydaki bir nokta olsun. $j \ge 2$ olmak üzere uzunluğu j olan tam olarak i_j doğru bulunuyorsa x $2^{i_2}3^{i_3}$..... doğru dağılımına sahiptir denir.

Aşağıdaki önermenin ispatı basit hesaplamalarla çıkarılabilir.

Lemma 3.12: ℓ_1 ve ℓ_2 nin bir sonlu lineer uzayda kesişen uzunlukları (sırasıyla) k_1 ve k_2 olan iki doğru olsun. Bu taktirde ℓ_1 veya ℓ_2 yi (ℓ_1 ve ℓ_2 dahil) kesen doğru sayısı (ℓ_1 ve ℓ_2 dahil)

$$\sum_{x \in l_1 \cup l_2} r_x - k_1 k_2 + 1 \text{ dir.}$$

Lemma 3.13: F nin $\vartheta = n^2+1$ ve $b= n^2+n+2$ özelliğinde bir sonlu lineer uzay olduğu ve bir ∞ noktasının $(n+1)^n$ doğru dağılımına sahip olduğu (ve bundan dolayı diğer tüm noktaların derecesinin en az n+1 olduğu) farzedilsin. O zaman uzunluğu $k \leq n-1$ olan bir m doğrusu vardır. Üstelik m nin üzerindeki her noktanın derecesi en az n+2 dir ve uzunluğu en çok n-1 olan en az iki doğrunun üzerindedir.

İspat: Bir x noktasının $(n+1)^1.n^n$ doğru dağılımına sahip olması için gerek ve yeter şartın $r_x= n+1$ olması gerektiğine dikkat ediniz. Eğer tüm bloklar n veya n+1 uzunluğuna sahip ise o zaman $b= n+(n^2.n) / n= n^2+n$ çelişkisine varılır. Böylece uzunluğu $k \leq n-1$ olan bir m doğrusu vardır. $\ell_1,\ldots, \ell_n$ ∞ ve kapsayan doğrular olsun. m nin $\ell_1,\ldots, \ell_k$ kestiğini farzetmeliyiz. $x \in m$ olsun. x i ℓ_n ye birleştiren n+1 doğru vardır. Dolaysıyla x in derecesi $\geq n+2$ dir. son olarak x den geçen m dışındaki doğruların ortalama uzunluğunu hesaplarsak en az $1+(\vartheta-k) / (n+1)= n-(k-1) / (n+1) < n$ olmalıdır. Bu yüzden x uzunluğu n den az olan en az iki doğrunun üzerindedir. x m nin keyfi bir noktası olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.14: F nin $\vartheta= n^2+1$ ve $b= n^2+n+2$ özelliğinde bir sonlu lineer uzay olduğu bir ∞ noktasının $(n+1)^n$ doğru dağılımına sahip olduğu farzedilsin. O zaman F kesin olarak 10 noktaya sahiptir.

İspat: Lemma 3.13 ün ispatındaki ℓ_1 ve m doğrularını düşününüz. Lemma 3.12 gereğince bu iki doğru tarafından kesişen doğru sayısı en az $n+(n-1)(n+1)+k(n+2)-k(n+1)+1= n^2+n +k$ dır.

$b= n^2+n+2$ ve $k \geq 2$ olduğundan k= 2 elde ederiz. $m= \{x,y\}$, $x \in \ell_1$, $y \in \ell_2$ olsun. $r_x= r_y= n+2$, $r_\infty= n$ ve tüm $z \in \ell_1 / \{\infty, x\}$ noktaları için r_z n+1 olmak zorundadır.

Tüm doğrularının uzunluğunun 2, n veya n+1 olduğunu dolayısıyla x in doğru dağılımının bazı i ve j ler için $2^i.n^j (n+1)$ ve $i+j (n-1)+n= n^2$ eşitliklerine sahibiz. Bu yüzden $i= (n-1) / (n-2)$ bir tamsayıdır, dolayısıyla n= 3 ve $\vartheta= 10$ dur. □

Lemma 3.15: $\vartheta= 10$ ve b= 14 özelliğinde bir sonlu lineer uzay vardır.

İspat: π mertebesi 3 olan bir projektif düzlem olsun. ℓ bir doğru ve $x \in$ olsun.

π den ℓ yi ve ℓ / $\{x\}$ in tüm noktalarını çıkararak $\upsilon= 10$ noktalı ve b=12 doğrulu bir sonlu lineer uzay kurulsun. Bu sonlu lineer uzayda herhangi bir $\{a,b,c\}$ doğrusu $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ ve $\{b,c\}$ şeklinde üç doğru olarak yeniden oluşturulsun.Böylece elde edilen uzay istenen özelliklere sahip sonlu line er uzay olur.

$\vartheta= 10$ noktalı ve b=14 doğrulu tüm sonlu lineer uzayların bu yolla inşa edilebileceğine dikkat ediniz. Bu Lemma 3.14 ün ispatından kolayca görülebilir.

Buraya kadar esas teoremin tüm parçaları ispat edilmiş oldu. Özet olarak

Teorem 3.16: ($n^2+1 \leq \vartheta \leq n^2 + n+1$ ve $n \geq 3$) olmak üzere ϑ noktalı ve $b= n^2+n+2$ doğrulu tek sonlu lineer uzayda $\vartheta= 10$ ve b= 14 dür.

İspat: Lemma 3.6, Lemma 3.11 ve Lemma 3.14 ten çıkar. □

4. $\vartheta = n^2$ NOKTALI VE $b = n^2 + n + 2$ DOĞRULU SONLU LİNEER UZAYLARIN YOKLUĞU

Şimdide Lynn Margaret Batten'in $\vartheta = n^2$ noktalı $b = n^2 + n + 2$ doğrulu bir sonlu lineer uzay için $n \leq 4$ olduğunu gösteren ve böyle uzayların tümünü belirleyen makalesini ele alacağız. Stinson bundan önceki kısımda verdiğimiz makalesinde $n^2<\vartheta\leq b=n^2+n+2$ özelliğini sağlayan ϑ noktalı ve b doğrulu sonlu lineer uzayları incelemiş ve bunun için $n \leq 3$ olması gerektiğini göstermiştir. ($n \leq 3$ için yukarıdaki şartları sağlayan lineer uzaylar kolayca bulunur)

Bu makalede Stinson'un unuttuğu $\vartheta = n^2$ durumu incelenmektedir.

1970 lerin başlarında de Witte ölümüne kadar basılmamış olan bir müsveddesinde $b \leq n^2 + n+1$ olması için gerek ve yeter şartın **U** nun bir yaklaşık demet olması veya n mertebeli bir projektif düzleme gömülebilmesi olduğunu ispatlamıştır. Bu 1982 de Stinson tarafından tekrar ispatlanmıştır.

1983 de Stinson yukarıda belirtildiği gibi $b= n^2 + n + 2$ durumunu ele almıştır. Herhangi bir lineer uzayda $\vartheta \leq b$ olduğundan (deBrujin,Erdös 1948), Stinson tarafından düşünülmeyen tek bir durum vardır $\vartheta = n^2$ ve $b = n^2 + n + 2$. 1993 te Batten'in bu durumu incelediği makalesinde ulaştığı sonuç aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.1: $n \geq 1$ olmak üzere **U**, $\vartheta = n^2$ noktalı ve $b=n^2 + n+2$ doğrulu bir sonlu lineer uzay olsun. Bu durumda $n \leq 4$ dür ve **U** aşağıdakilerden birisidir.

i) Kesişen 7 noktalı ve 3 noktalı iki doğrusu bulunan 9 noktalı ve 14 doğrulu tek lineer uzaydır. Diğer tüm doğruların ikişer noktası vardır. (n=3)

ii) U, ya bir doğrusu tüm noktalarıyla birlikte çıkarılmış ancak 2-doğrularla birleştirilmiş sonsuzdaki üç nokta eklenmiş n=3 mertebeli bir afin düzlemdir.Veya U bir doğrusu biri hariç tüm noktalarıyla çıkarılmış,çıkarılan doğruya eşlenmeyen ve 2-doğrularla birleştirilen sonsuzdaki üç nokta eklenmiş n=4 mertebeli bir afin düzlemdir.

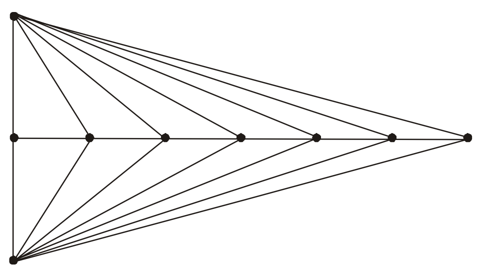
iii): İki 4-doğru ve bir 3-doğru üzerinde bir tek 3-nokta ve tam olarak her biri 3-noktadan geçen birer doğru üzerinde olan ve birbirlerine iki noktalı doğrularla bağlanmış üç tane 5-noktası bulunan ve diğer tüm noktaları 4-nokta olan 9 nokta ve 14 doğrudan oluşan tek lineer uzay. (n=3)

iv) Üç tane 5- doğrusu ve bir tane 4-doğru üzerinde bir tek 4-noktası, her biri 5-doğrular üzerinde olan ve birbirine 2-noktalı doğrularla bağlanmış tam olarak üç tane 6-noktası bulunan diğer tüm noktaları 5-noktalar olan 16 nokta ve 22 doğrudan oluşan tek lineer uzay. (n=4)

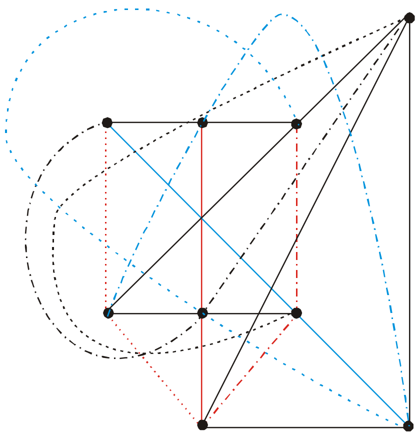
Bu şıklarda geçen uzaylara sıraya riayet ederek birer örnek veriyoruz. Ayrıca son şeklin üzerinde olma bağıntısını çiziyoruz.

Örnek 4.1:

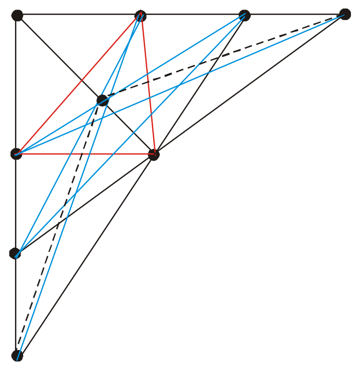
i)



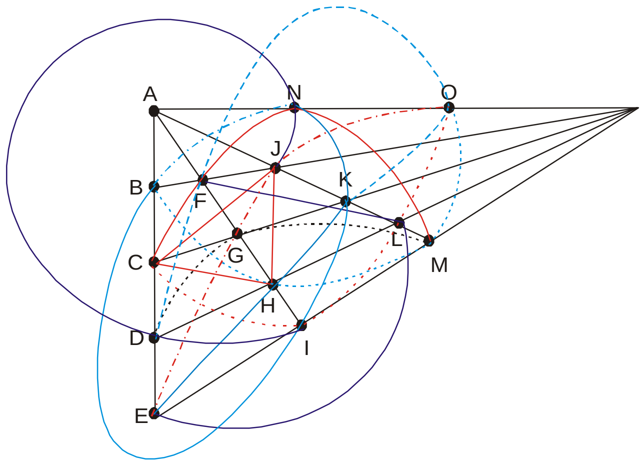
ii)



iii)



iv)



iv deki lineer uzayın üzerinde olma tablosu aşağıdaki gibidir:

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}	d_{21}	d_{22}
A	1	1	1	1																		
B	1				1									1					1	1		
C	1					1			1	1		1	1									
D	1						1									1					1	1
E	1							1							1		1	1				
F		1			1							1						1			1	
G		1				1											1		1			1
H		1					1		1		1			1	1							
I		1						1					1			1				1		
J			1		1					1	1					1	1					
K			1			1									1					1	1	
L			1				1						1					1	1			
M			1					1				1		1								1
N				1								1			1	1			1			
O				1									1	1			1				1	
P				1	1	1	1	1														

Teorem 4.1 in ispatında kullanılacak olan üç önermeyi ispatsız olarak veriyoruz.

Teo. 4.2. (deWitte,Stinson 1982) **U**, $n^2 \leq \vartheta < (n+1)^2$ noktalı yaklaşık demet olmayan bir sonlu lineer uzay olsun. Bu takdirde **U** nun n mertebeli bir projektif düzleme gömülebilmesi için gerek ve yeter şart $b \leq n^2 + n + 1$ olmasıdır.

Lemma 4.1. $\Sigma_\ell\ \vartheta(\ell)\ (\vartheta(\ell)-1) = \vartheta(\vartheta-1)$

Bu nokta çiftlerini iki yönden ele alan basit bir hesaplama tartışmasıdır.

Lemma 4.2. $\Sigma_p\ b(p)\ (b(p)-1) \leq b(b-1)$

Bu da doğru çiftlerini iki yönden ele alan basit bir hesaplamadır.

Teorem 4.1. in ispatı

Bir p noktası için, $b-\vartheta \leq b(p)-2$ ise bu taktirde $n+4 \leq b(p)$ dir. Metsch teoremini (Teo 4.2) uygularız. (a) ve (b) durumlarında nokta ve doğru sayısı eşittir ki çalışmamızı ilgilendirmeyen durumlardır. (c) durumundaki parametreler Teorem 4.1'in (i) şıkkında ortaya çıkan n=3 dışında bizimkine uymaz. (d) durumunda **U** hem bir kare hem de karenin bir fazlası sayıda noktaya sahiptir. Bu mümkün değildir. (e) durumu Teo 4.1.'in (ii) şıkkında ortaya çıkar.

Böylece tüm p noktaları için $b(p) \leq n+3$ olduğunu farzedelim. O zaman tüm ℓ doğruları için $\vartheta(\ell) \leq n+3$ olur. Eğer bir p noktası için $b(p) < n-2$ ise o zaman $\vartheta \leq (n-2)(n+2) + 1 = n^2-3$ çelişkisine varılır. Bu yüzden tüm p ler için $n-1 \leq b(p) \leq n+3$ varsaymalıyız.

Bir p, (n-1) – noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu takdirde p den geçmeyen tüm doğrular için $\vartheta(\ell) \leq n-1$ dir. Lemma 4.1'i kullanarak.

$(n-1)(n+3)(n+2) + (n^2+3)(n-1)(n-2) \geq n^2(n^2-1)$ elde ederiz ki $n \leq 4$ ortaya çıkar. n = 1, 2, 3 durumları mümkün değildir. Eğer n = 4

ϑ=16 b = 22 ise bir tek p 3-noktası vardır. Bütün ℓ doğruları için $\vartheta(\ell) \leq 7$ dir ve q≠p özelliğindeki tüm q noktaları için $4 \leq b(q) \leq 7$ dir. ℓi $1 \leq i \leq 3$ p den geçen bir doğru olsun. Burada $\{\vartheta(\ell i)\}$ için söz konusu olan 3 ihtimal {4,7}, {5,6,7}, {6} dır. a ve c sırasıyla 2-doğru ve 3-doğruların sayısı olsun. Böylece a+c = 19 olur. Lemma 4.1 den

$$\sum_{i=1}^{3} \vartheta(\ell i)\,[\vartheta(\ell i)-1] = 16.15-38-4c \text{ dir.}$$

$\{\vartheta(\ell i)\}$ için ilk iki durum 4/38 çelişkisine yol açar. 3.durumda c = 28 olur ki bu çok büyüktür. Bu yüzden n = 4 geçerli olamaz. Ve bunlardan dolayı tüm p noktaları için $\vartheta \leq b(p) \leq n+3$ dir.

ℓ bir n+3 – doğru olsun. ℓ yi kesen doğrular sayılır. $b \geq (n+3)(n+1)+1 = n^2 + 2n-2$ ortaya çıkar ki bu yüzden $n \leq 4$ olur. n = 1,2 durumları aşikar olarak dışlanır ve n = 3 ün imkansız olduğu hemen görülür. Eğer n = 4 ise her doğru ℓ yi keser ve ℓ nin her noktası bir 4-doğru olduğu çıkar. Ancak ℓ nin herhangi bir noktası bir 7-noktadır ve böyle bir noktada ϑ sayılırsa bir çelişki verir.

ℓ bir (n+2) – doğru olsun. Eğer ℓ nin her bir noktası en az n+1 doğru üzerinde ise bu takdirde $b \geq (n+2)n+1$ çelişkisine varılır.

Gerçekte bu sayma tartışmaları $n \geq 3$ olmak üzere ℓ nin en az iki n-noktadan geçtiğini gösterir. Aşikar olarak n 2 olamaz. Böylece p ve q ℓ nin farklı n-noktaları kabul edilsin. Eğer p den geçen ℓ den farklı bir doğru n den fazla noktaya sahip ise q nun bir n-nokta olması ile çelişiriz. Bu yüzden $\vartheta \leq n+2+(n-1)^2 = n^2 - n+3$, n = 3, ϑ = 9, b = 14 olmasını gerektirir ve ℓ nin tam olarak iki noktası 3-noktadır. Bu mümkün değildir. Bu yüzden (n+2) doğrular mevcut değildir.

p yi n-noktası olarak farzedelim. v yi p üzerinden sayarsak p nin n-1 tane (n+1)-doğruları ve bir tane n -doğrusunda olduğunu görürüz. n = 1, 2 durumları mümkün değildir ve $n \geq 3$ ise p tektir. En azından n^2+n doğruları bir (n+1) doğrusu ile kesişir ve bunu (n+2)- veya (n+3)- noktalarının oluşumu takip eder. x'i herhangi bir nokta ve ℓ yi x den geçmeyen bir (n+1) doğrusu olarak farzedelim. Öyleyse ℓ yi kesmeyen x den geçen bir h doğrusu vardır ve h nin hiçbir noktası bir n- veya (n+1)- noktası değildir.

Eğer $|h| \geq 3$ ise h bir (n+1) - doğrusu olan ℓ yi bir y noktasında keser ve $h\setminus\{y\}$ nin her noktası ℓ yi kesmeyen bir doğru üzerindedir. ℓ yi kesen ve kesmeyen doğruları saymak $b \geq n^2+n+3$ sonucunu verir. Bu bir çelişkidir. Öyleyse $|h| = 2$ dir. $h = \{x,y\}$ olarak alalım ve x'i bir (n+1) doğrusu olan ℓ üzerinde diye düşünelim. ℓ yi kesmeyen y üzerinde bir h' doğrusu vardır. Aynen yukarıdaki gibi, bazı z noktası için $h' = \{y,z\}$ dir. Aynı şekilde $\vartheta(xz)=2$ dir. Öyleyse n-noktasız ve (n+1) noktasız noktalar 3 noktala bir üçgen oluştururlar ve b yi de sayarak bu noktaların (n+2)- noktası ve n = 3 veya 4 olması takip eder.**U** Teo.4.1 in (iii) veya (iv) ve olduğu gibi olmalıdır.

Tüm p noktaları ve ℓ doğruları için $n+1 \leq b(p) \leq n + 3$ olduğunu ve $\vartheta(\ell) \leq n + 1$ olduğunu varsayabiliriz.

Ayrıca Lemma 4.1 ile (n+1)- doğruları oluşur. ℓ yi bir (n+1)- doğru olarak farzedelim. En azından n^2+n+1 doğruları onunla kesişir ya **U** dA ℓ üzerinde tek bir (n+2)-noktası vardır ya da ℓ den geçmeyen (n+2)- noktasının tek bir h doğrusu vardır. (Her iki durumda da (n+3)- nokta yoktur)

x'i tek bir (n+2)- noktası ve $x \in \ell$ olarak farzedelim. Eğer x den geçmeyen bir (n+1)- doğrusu varsa ve ℓ yi kesmeyen x ile birleşen (n+2) - noktalarının bir doğrusu vardır. Bu bir çelişkidir. Öyleyse tüm (n+1) - doğruları x den geçer. p'yi (n+1)- doğrusu üzerinde olmayan bir nokta olarak alalım. p, n+1 tane n-doğrusu üzerindedir. Ve özellikle px bir n- doğrusudur. Bunun sonucunda x'ten geçen bütün doğrular n- ya da (n+1)- doğrularıdır. ϑ yi x ten saymak bir çelişki doğurur.

Öyleyse ℓ yi kesmeyen (n+2)- noktalarının bir h doğrusunu ve diğer noktaların (n+1)- noktası olduğunu farzedelim. Böylece h nin tüm (n+1)- doğrularını kesmediğini kabul edebiliriz. v yi h nin bir noktasından sayarak h nin herhangi bir noktasının en azından 3 n-doğrusu üzerinde olduğunu görürüz. h ile kesişen bir n- doğrusunu düşünerek ve b yi sayarak $|h| \leq \frac{n}{2} + 1$ i buluruz. Eğer h nin bazı noktaları h den farklı bir 2-doğru üzerindeyse ve $\frac{n}{2}+2+n(n+1) \geq v$, $n \leq 4$ olduğunu gösterir. n= 1,2 durumları kısaca ele alınmaz. n = 3 durumu Teorem 4.1 in (ii) sine götürür. Eğer n = 4 ise |h| = 2 veya 3 tür. İlk önce h={x,y,z} ve |xp| = 2 olarak düşünelim. O zaman p iki 5- doğrusu üzerindedir. Bunları {p, 1,2,3,4} ve {p,5,6,7,8} olarak adlandıralım. x üzerinde kalan diğer doğrular {x, 1, 5, 12}, {x, 2, 6, 11}, {x, 3, 7, 10} , {x, 4, 8, 9} olarak adlandırılabilir.

y yi 11 ve 12 ye bağlayan doğrular 4- nokta doğruları olmalıdır. 3 farklı durum vardır.

(i) $11 \in 1y$, $12 \in 2y$, 9 üzerindeki doğruları düşünelim. $3,5 \in 911$ ve $3, 6 \in 912$ ye sahip olmalıyız ki bu çelişkidir.

(ii) $11 \in 1y$, $12 \in 3y$, 9 ve 10 üzerindeki doğruları düşünelim. $3,5 \in 911$ ve $4,5 \in 1011$ e sahip olmalıyız ki bu bir çelişkidir.

(iii) $11 \in 3y$, $12 \in 4y$, bazı hesaplamalardan sonra şu grupların doğrular olması gerekir: {y,12, 4,6}, {10,12,2,8}, {10,11,5,4}, {y,11,3,8}, {9,11,1,7}, {9,12,3,6}, {z,9,2,5}, {z,10,1,6}, {y,2,7} {y,1,8} Şimdi z ve 3 ; 5,6 ve 8 le beraber bir doğru üzerinde olmalıdır, bu mümkün değildir.

n = 4, |h| = 2, h = {x,y} ve xp nin bir 2 -doğru olduğunu düşünelim. İki alt durum vardır. (a) p üç tane 5- doğru üzerindedir. Ve |py| = 3 dür. (b) p iki 5- doğru ve iki 4- doğru üzerindedir.

(a) durumunda q, py nin üçüncü noktası olarak farzedelim. q dan geçen her doğru her 5- doğrusunu keser ve böylece q dört tane 4- doğru üzeridedir. Ama q bunun yanısıra qp ve qx ayrık doğruları üzerindedir. Bu da b(p) = 5 olması ile çelişir.

(b) durumunda q ve z yi py üzerindeki iki ayrı nokta olarak farzedelim ve ℓ yi py den farklı p den geçen 4- doğru olarak farzedelim. xy ℓ yi kesmez, böylece xq, xz den biri ℓ yi keser, orada xq diyelim. Ama xq p üzerindeki 5 - doğrularını keser ve kendisi bir 5- doğrusudur, bu bir çelişkidir.

Bundan sonra h nin hiçbir noktasını, h den farklı bir 2-doğru üzerinde düşünmeyi.

Şimdi $2 \leq |h| \leq \frac{n}{2}+1$ üzerinde tümevarımla **U**/h nin n mertebeli bir projektif düzlem içine gömülebildiğini kanıtlıyoruz.

|h| = 2. h nin bir noktasını silelim. Oluşan lineer uzayın n^2-1 noktası ve n^2+n+1 doğrusu vardır. Ek olarak n-doğrularını içerir. Boşluk (spread) oluşturmak ve yeni bir nokta oluşturmak için (yeni bir doğru değil) bir n- doğrusu kullanalım. de Witte (Teo.4,1) teoremiyle bu yeni yapı ve dolayısıyla **U**/h n mertebeli bir projektif düzlemine yerleşir.

$2 < |h| \leq \frac{n}{2} + 1$ Bazı n-doğrusu olan ℓ lerin h yi kesmediğini düşünelim. Böylece **U** nin her noktası ℓ yi kesmeyen h den başka ayrı bir doğru üzerindedir. (n+1) doğruları var olduğu için n+1 gibi doğrular vardır ve biz h deki bir noktayı silerken yeni bir (n+1)- nokta oluştururuz. Yeni yapıdaki doğruların sayısı, yeni sistemdeki hiçbir (n+1)- doğrusu h yi kendi noktalarından daha az kesmez. Böylece tümevarımla **U**/h nin n mertebeli projektif düzlemine yerleşir.

Tüm n doğrularının h yi kestiğini düşünelim. Eğer bütün n- doğruları birbirini keserse verilen n-doğrusu ℓ, **U**/h yi n+1 nokta kümelerine bölünmesine neden olur.

$v-|h| \leq (n+1)(n-2) + n+1-2(|h| - 1)$ bu da bir çelişkiye yol açar. O halde n-doğruları olan ℓ ve $\ell\,'$ arasında yanlış bağlantı vardır. Bunun gibi iki n doğrusu tam olarak n+1- doğrularını kapsayan **U**/h nin bölünmesine neden olur. Ama ℓ ve ℓ'nün her biri tam olarak n^2+2 doğruları ile kesişir ve birlikte n^2 doğruları ile kesişir. O halde tam olarak n-2 –doğruları ikisini de kesmez. Şimdi h de ki ℓ ve ℓ' ile kesişmeyen herhangi bir doğru bir bölümün içendedir ve h üzerinde ℓ ve ℓ' ile kesişen bölümlerin doğruları ile birliktedir. Sonuç olarak n+2 doğruları bölümün içindedir ki bu çelişkidir.

Bu tümevarım ispatını tamamlar.

Lineer uzay $\mathbf{U}' = \mathbf{U}/h$ nin $b'=n^2+n+1$ doğrulu ve $v' = n^2 - |h|$ noktaları vardır. h nin bir n(n+2) noktası $\mathbf{U}'$ deki n+1 doğrularını bölümüne tekabül eder. $\mathbf{U}'$, n^2+n+1 doğrularını içerdiği için bu gibi herhangi bir bölünme ortak bir doğru üzerindedir. Öyleyse **U** yoktur.

5. $n \geq 10$ ve $n^2 \leq \vartheta < (n+1)^2$ OLMAK ÜZERE ϑ NOKTALI VE $b = n^2 + n + 3$ DOĞRULU SONLU LİNEER UZAYLARIN KARAKTERİZASYONU

Bu kısımda Lynn Margaret Batten'in " A characterization of finite linear spaces on υ points, $n^2 \leq \vartheta < (n+1)^2$, and $b=n^2+n+3$ lines, $n \geq 10$ " isimli çalışmasını inceleyeceğiz.

1970 lerin başlarında de Witte ölümüne kadar basılmamış olan bir müsveddesinde sonlu bir U lineer uzayında $b \leq n^2 + n + 1$ olması için gerek ve yeter şartın ya U nun bir yaklaşık demet olması yada n mertebeli bir projektif düzleme gömülebilmesi olduğunu ispatlamıştır. Bu 1982'de Stinson tarafından tekrar ispatlanmıştır.

1983 de Stinson bu sonucu $b=n^2+n+2$ durumuna genişletmiş ve $n^2+1 \leq \vartheta \leq n^2 + n+1$ ise $n \leq 3$ olduğunu göstermiştir.Bu durumda kolayca hesaplanabilen örneklerin varlığını ortaya çıkarmıştır.

Herhangi bir lineer uzayda $\vartheta \leq b$ olduğundan, Stinson'un düşünmediği tek durum $\vartheta = n^2$ ve $b = n^2 + n + 2$ dir. Buna karşın $\vartheta = b = n^2 + n + 2$ ise **U** nin yaklaşık demet olduğu (deBrujin,Erdös 1948) deki sonuçlardan çıkar. $\vartheta = n^2$ durumu Batten tarafından tamamlanmıştır. (Batten 1993)

$n^2 \leq \vartheta < (n+1)^2$ olmak üzere ϑ noktalı ve $b = n^2 + n+1$ doğrulu lineeer uzaylar ile ϑ noktalı ve $b = n^2 + n + 2$ doğrulu lineer uzaylar de Witte (basılmamış notlar) , Stinson (1983) ve Batten (1980) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada karakterizasyon $b = n^2 + n+3$ durumuna genişletilmiştir. Eğer $n \geq 10$ ise ve uzayın bir yaklaşık demet, değil ise uzayın üç noktası çıkarılmış ve sonsuzdaki üç nokta ve bunları ikişer

ikişer birleştiren üç doğru eklenmiş bir afin düzlem olduğunu gösterilmiştir.

Tanım 5.1: $(b-\vartheta)^2 \leq \vartheta$ özelliğindeki ϑ noktalı b doğrulu lineer uzaya kısıtlanmış lineer uzay denir.

Teorem 5.1: U(N,D) ϑ noktalı bir sonlu lineer uzay olsun. $n \geq 10$ da $n^2 \leq \vartheta < (n+1)^2$ olacak şekildeki tek tamsayı olsun. Eğer $b = n^2 + n + 3$ ise ve **U** bir yaklaşık demet değilse, bu takdirde **U** aşağıdaki gibi olmak zorundadır:

U, 0, 1, 2 veya 3 noktası çıkarılmış ve sonsuzdaki üç nokta ve bu üç noktayı ikişer ikişer birleştiren üç doğru eklenmiş n mertebeli bir afin düzlemdir.

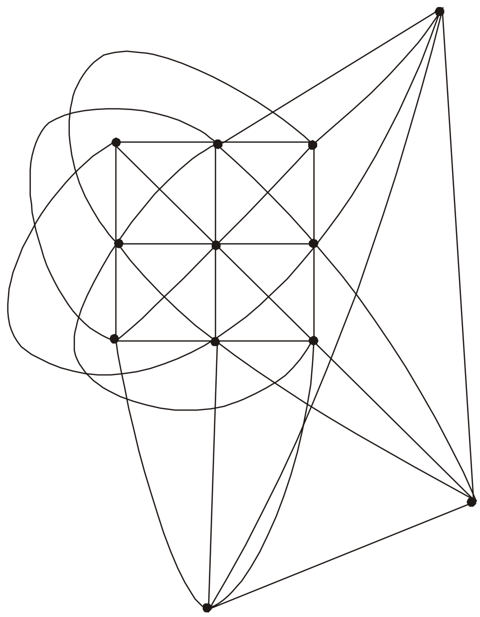
Dikkat ediniz ki bu hatta $n < 10$ için afin düzlemden doğruların hiçbiri atılmadan nokta çıkarıldığındaki duruma da bir örnektir.

Önce bu teoremi canlandırmamıza yarayacak aşağıdaki örneği vereceğiz.

Örnek.5.1: 3.mertebeden afin düzlemi ele alalım.

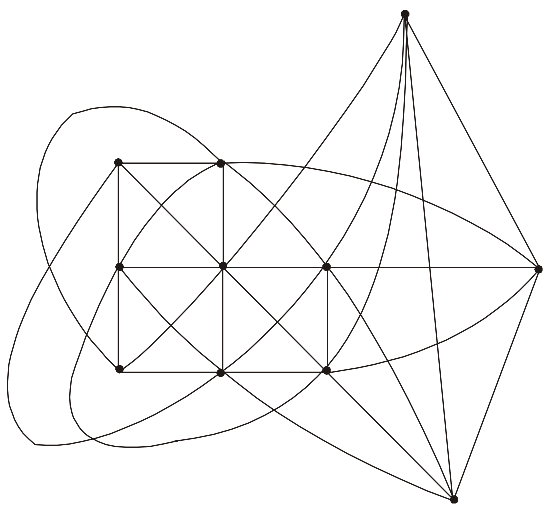
a) Afin düzlemden hiç nokta çıkarılmaz ve sonsuzdaki üç nokta ile bunları birbirine ikişer ikişer birleştiren üç doğru eklenirse,

$n = 3 \Rightarrow 3^2 \leq 12 < 16$ ve $b = 3^2 + 3 + 3$



ii. Afin düzlemden <u>bir nokta</u> çıkarılır ve sonsuzdaki üç nokta ile bunları birbirine ikişer ikişer birleştiren üç doğru eklenirse;

$3^2 \leq 11 < 16$ ve
$b = 3^2 + 3 + 3 = 15$



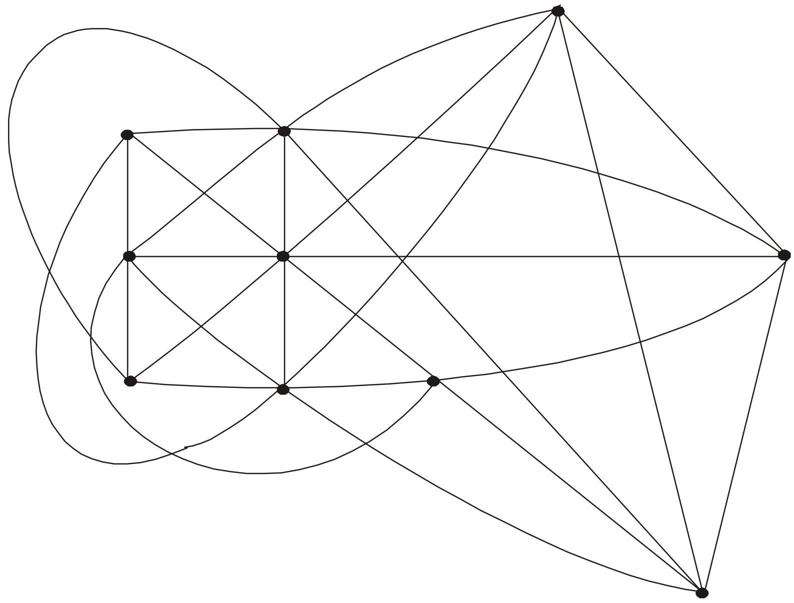
iii. Afin düzlemden <u>2 nokta</u> çıkarılır ve sonsuzdaki üç nokta ile bunları birbirine ikişer ikişer birleştiren üç doğru eklenirse

$3^2 \leq 10 < 4^2$

$9 \leq 10 < 16$ ve

$b = 3^2 + 3 + 3$

$b = 15$



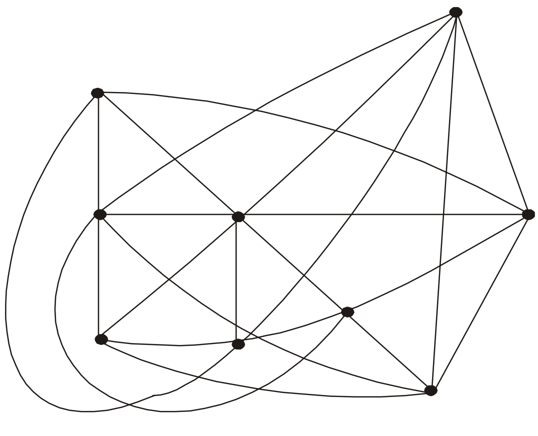
iv) Afin düzlemden <u>3 nokta</u> çıkarılır ve sonsuzdaki üç nokta ile bunları birbirine ikişer ikişer birleştiren üç doğru eklenirse

$3^2 \leq 9 < 4^2$

$9 \leq 9 < 16$ ve

$b = 3^2 + 3 + 3$

$b = 15$



Teorem 5.2. (deWitte),(Stinson 1982) **U** bir yaklaşık demet olmayan $n^2 \leq \vartheta < (n+1)^2$ noktalı sonlu bir lineer uzay olsun. Bu takdirde **U** nin n mertebeli bir projektif düzleme gömülebilmesi için gerek ve yeter şart $b \leq n^2 + n + 1$ olmasıdır.

Teorem 5.3: (Totten 1976) **U** bir kısıtlanmış lineer uzay olsun. Bu takdirde **U** aşağıdakilerden birisidir.

a) Bir yaklaşık demet

b) Mertebesi n olan bir afin düzlem

c) 0 veya 1 noktası çıkarılmış ve sonsuzdaki bir nokta eklenmiş n mertebeli bir afin düzlem

d) En fazla n noktası çıkarılmış hiçbir doğrusu atılmamış n mertebeli bir projektif düzlem.

e) s kere şişirilmiş n mertebeli bir projektif düzlem.

f) $\vartheta = 6$ noktalı bir tek 4-doğru ve bir tek 3-doğrusu bulunan tek lineer uzay

Teorem 5.4 (Batten 1980) **U,** $\vartheta \leq n^2$ noktalı ve {n-1, n, n+1} doğru bölgeli sonlu bir lineer uzay olsun. Eğer $n \geq 8$ ise **U** mertebesi n-2, n-1 veya n olan bir projektif düzleme gömülebilir ve aşağıdakilerden biridir.

a) 3 doğrusu ve onların bütün noktaları veya onlar noktadaş ise belki arakesitten farklı bir noktası bırakılmış diğer tüm noktaları atılmış n+1 mertebeli bir projektif düzlem.

b) 11, 12, 13 veya 46 nokta üzerinde istinai kısa listelerden biri

Teorem 5.5: (Stinson 1983) $n \geq 3$ ve $n^2 + 1 \leq \vartheta \leq n^2 + n + 1$ olmak üzere ϑ noktalı $b = n^2 + n + 2$ doğrulu tek sonlu lineer uzay için $n = 3$, $\vartheta = 10$, $b = 14$ dür.

Teorem 5.6: (Metsch 1988) $n \geq 1$ olmak üzere **U** $\vartheta \leq \frac{n^2 - n}{6}$, $b = n^2 + n + 1$ ve her p noktası için $b(p) = n+1$ özelliğinde bir sonlu lineer uzay olsun.

Bu takdirde **U** n mertebeli bir projektif düzleme gömülebilir. Üstelik gömme izomorfizm hariç tektir.

Teorem 5.7: (Metsch) **U** bazı p noktaları için $b \leq \vartheta + b(p)-2$ özelliğinde bir sonlu lineer uzay olsun. O zaman aşağıdaki durumlardan biri söz konusudur.

a) **U**, p herhangi bir nokta olmak üzere $b-\vartheta$ den küçük $b(p)-1$ mertebeli bir projektif düzlemdir.

b) **U** bir yaklaşık demettir.

c) **U** bir projektif düzlemdir veya bir doğrusuna bir p noktası ve gerekli 2-noktalı doğrular eklenmiş bir yaklaşık demettir.

d) **U,** p sonsuzdaki nokta olmamak şartıyla sonsuzdaki bir nokta eklenmiş $b(p)-1$ mertebeli bir afin düzlemdir.

e) **U** s kere şişirilmiş n mertebeli projektif düzlemdir.$(1 \leq s \leq n)$

Teorem 5.8: (Batten 1993) **U** $\vartheta = n^2$, $b = n^2 + n + 1$ özelliğinde bir sonlu lineer uzay olsun. Bu takdirde $n \leq 4$ dür.

6. DOWLING - WILSON KONJEKTÖRÜNÜN İSPATI

Şimdi Klaus Metsch in Dowling Wilson Konjektörünün ispatını verdiği makaleyi ele alıyoruz. Bu makalede p noktasından geçen doğruların sayısı b(p) olmak üzere $b \leq \vartheta + b(p)-2$ şartını sağlayan tüm lineer uzaylar sınıflandırılmaktadır. Bu lineer uzayların her birinin bir projektif düzlemle yakından bağlantılı olduğu görülür. Bu sınıflandırma kullanılarak "bazı noktaların verilen bir doğruyu kesmeyen t-doğru üzerinde olmasını sağlayan bir lineer uzayda, doğru sayısının nokta sayısından en az t tane fazla" olduğunu söyleyen Dowling Wilson konjektörü ispatlanmaktadır.

İyi bilinen bir sonuç her lineer uzayda en az nokta sayısı kadar doğrunun var olduğunu ve herhangi iki doğrunun kesişmesi halinde yani lineer uzay bir genelleştirilmiş projektif düzlem iken (bir yaklaşık demet veya projektif düzlem) eşitliğin geçerli olacağını ifade eder (deBrujin,Erdös 1948). Dowling Wilson konjektürü bu sonucu genelleştirir ve çakışmayan her (p,d) nokta doğru ikilisi için bir lineer uzayda $b \geq \vartheta + \pi(p,d)$ şartının geçerli olduğunu ifade eder. Bu makalede bu konjektör ispat edilecektir. Fazladan olarak bir p noktası için $b \leq \vartheta + b(p)-2$ şartını sağlayan tüm lineer uzayların bir sınıflandırması elde edilecektir. Sonuçları vermeden bazı tanımlar veriyoruz.

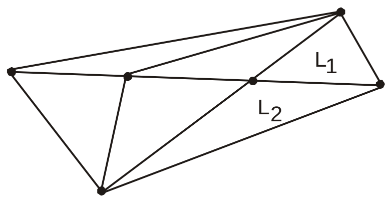
Gösterim: Her p noktası ve $p \notin d$ özelliğindeki her d doğrusu için p den geçen ve d yi kesmeyen doğru sayısı $\pi(p,d)$ ile gösterilir

Tanım 6.1: d_1 ve d_2 dereceleri sırasıyla k_1 ve k_2 olan kesişen 2 doğru olmak üzere her noktası d_1 veya d_2 nin üzerinde olan bir lineer uzaya bir (k_1, k_2) çatma denir.

Bunlara ait örneklerimiz aşağıdadır.

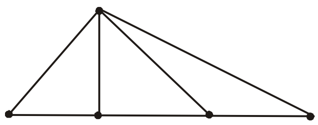
Örnek 6.1:

a)



Bir (3,4) çatma

b)



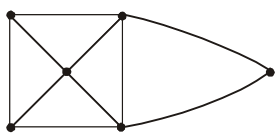
Bir (2,4) çatma

Not: Bir (2,k) çatmaya yaklaşık demet denir.

Bir yaklaşık demet olmayan bir lineer uzaya non-dejenere lineer uzay denir.

Örnek 6.2

n = 2 için 2. mertebeden afin düzlemi düşünüldüğünde ve onun bir paralel sınıfındaki doğruları sonsuzdaki bir noktada kesiştirildiğinde

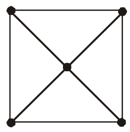


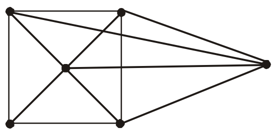
lineer uzayını elde edilir. Elde edilen bu yapı sonsuzda bir noktası bulunan 2 mertebeli bir afin düzlemdir.

Tanım 6.2: **U** nin bir lineer uzay olduğunu farzedilsin. Bu takdirde **U** dan değişik yollarla yeni lineer uzaylar elde edilebilir. Bu yollardan biri ona yeni bir nokta katmak ve bu yeni noktayı eski noktaların her biri ile derecesi 2 olan bir doğru ile birleştirmektir. Elde edilen yapıya **U** nun bir tip 1 basit genişlemesi denir. Aynı zamanda **U** nun bir doğrusuna yeni bir nokta katılabilir ve katılan nokta bu doğru üzerinde olmayan her noktaya derecesi 2 olan bir doğru ile birleştirilebilir. Bu durumda elde edilen uzaya **U**'nun bir tip 2 basit genişlemesi denir. Her iki durumda da yeni noktaya genişlemenin özel noktası denir.

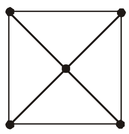
Örnek 6.3:

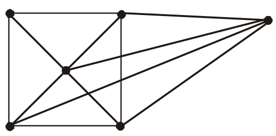
a)

 lineer uzayını tip 1 şeklinde basit genişletirsek

 lineer uzayını elde ederiz.

.

b) Aynı  lineer uzayını tip 2 basit genişletirsek

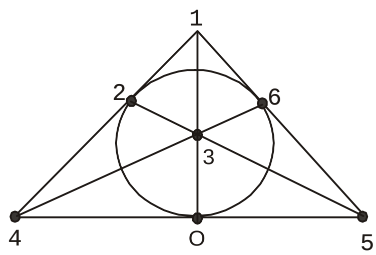
 lineer uzayını elde ederiz.

Tanım 6.3: $i = 1, \ldots\ldots, s \quad s > 1$ olmak üzere **U** lineer uzayının $\mathbf{U_i(N_i, D_i)}$ alt uzaylarına sahip olduğu ve $i \neq j$ için **N** nin $N_i \cap N_j = \{q\}$ olacak şekilde

bir q noktasının var olduğu farzedilsin. Eğer s = 1 ise fazladan olarak $q \in \mathbf{N_1}$ ve $\mathbf{U_1} \neq \mathbf{U}$ olduğu farzedilsin. Bu takdirde **U** aşağıdaki gibi düzlenebilir: i = 1, ..., s olmak üzere $\mathbf{U_i}$ bir doğru olarak yeniden yerleştirilir. (Yani $\mathbf{U_i}$ nin bütün doğruları siliniyor ve $\mathbf{N_i}$ kümesi yeni bir doğru olarak alınıyor) Bu şekilde elde edilen lineer uzaya $\mathbf{U}'$ denilsin. $\mathbf{U}'$ nun n^2+n+1 doğruya sahip olduğu ve mertebesi n olan bir $\mathbf{P}'$ projektif düzlemine genişletilebildiği kabul edilsin. Bu takdirde **U** ya mertebesi n olan bir s-kere şişirilmiş projektif düzlem denir.

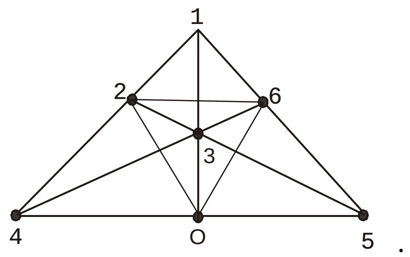
Aşağıdaki örnek s-kere şişirilmiş projektif düzlem kavramının daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır.

Örnek 6.4 Projektif düzlem olarak Fano düzlemini alalım.



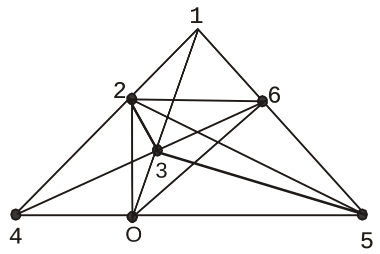
N= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
D= {{1, 2, 4}, {1,3,0}, {1,6,5}, {2,3,5}, {4,0,5} {4,3,6}, {2,0,6}} dır.

N_1 ={0, 2, 6} ⊂ **N** ve D_1 = {{0,2}, {0,6}, {2,6}} olarak alırsak yani {0,2,6} doğrusunu silip noktaları iki noktalı doğrularla birleştirirsek şekil 6.1 de elde ettiğimiz lineer uzay 1- kere şişirilmiş 2- mertebeli projektif düzlemdir.

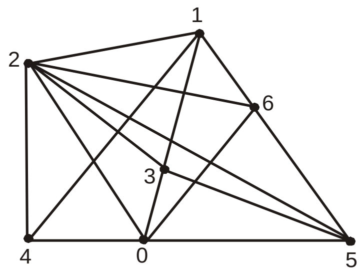


.

N_2 ={2,3,5} ⊂**N** $\mathbf{D_2}$ = {{2,3}, {2,5} , {3,5}} olarak alırsak yani {2,3,5} doğrusunu silip noktaları iki noktalı doğrularla birleştirirsek şekil 6.2 de elde ettiğimiz lineer uzay 2- kere şişirilmiş 2- mertebeli projektif düzlemdir.



$N_3 = \{1, 2, 4\} \subset \mathbf{N}$ $\mathbf{D}_3 = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{1,4\}\}$ olarak alırsak yani $\{1,2,4\}$ doğrusunu silip noktaları iki noktalı doğrularla birleştirirsek şekil 6.3 de elde ettiğimiz lineer uzay, 3- kere şişirilmiş 2 -mertebeli projektif düzlemdir.



Teorem 6.1: **U** bir q noktası için $b \leq \vartheta + b(q) - 2$ özelliğinde bir lineer uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlardan birisi oluşur.

i) q düzlemin bir noktası olmak üzere ,**U** mertebesi $n=b(q)-1$ olan bir projektif düzlemden $b-\vartheta (\leq n-1)$ nokta atılarak elde edilebilir.

ii) **U** bir yaklaşık demettir ve q bu yaklaşık demetin herhangi bir noktasıdır.

iii) **U** bir genelleştirilmiş projektif düzlemin tip 2 şeklinde olan bir basit genişletmesidir ve q özel bir noktadır.

iv) **U** mertebesi n olan ve sonsuzda bir noktası bulunan bir afin düzlemdir ve q sonsuzdaki nokta değildir.

v) $1 \leq s < n$ olmak üzere **U** bazı s ve n tamsayıları için mertebesi n olan bir s-kere şişirilmiş projektif düzlemdir. Eğer $\mathbf{U}_1$, …… , $\mathbf{U}_s$ esas alt uzaylar iseler bu takdirde q her bir $\mathbf{U}_i$ alt uzayının bir noktasıdır. Ayrıca bi $\mathbf{U}_i$ nin doğrularının sayısı ϑ_i onun noktalarının sayısı, r_i

q nun U_i deki derecesi ve d U nun defiency (eksikliği) ise bu takdirde tüm i ler için $b_i \leq \vartheta_i + r_i - 2$ dir ve $2+d+(s-1)(n+1) + \sum_{i=1}^{s} (b_i-\vartheta_i-r_i) \leq 0$ dır.

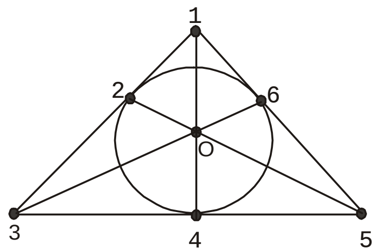
Karşıt olarak 1, 2, 3, 4 veya 5 i sağlayan bir lineer uzay olup bir q noktasına sahip olan her lineer uzay $b \leq \vartheta + b(q) - 2$ özelliğini sağlar.

Teorem 6.1'i Kullanarak Dowling–Wilson konjektürünü ispatlaya-bileceğiz.

Bu teoremin daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bazı örnekler veriyoruz.

Örnek 6.4:

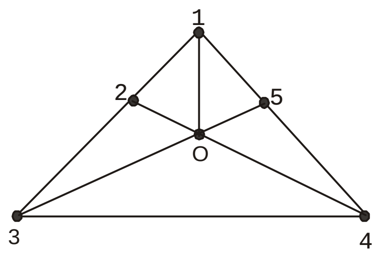
i)



2. mertebeden projektif düzlemi alalım. (q=4 olsun)

$n = b(q)-1=3-1=2$

$b = 7$ $\vartheta = 6$ olarak alalım. $b - \vartheta = 7-6 = 1 \leq 2$ dir. q = 4 noktasını atarsak



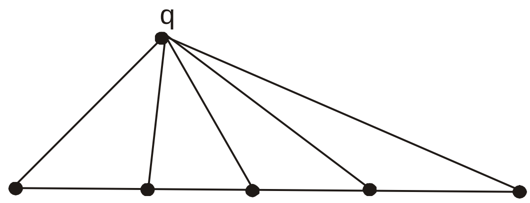
lineer uzayını elde ederiz. Bu lineer uzay için

$b \leq \vartheta + b(q) - 2$

$7 \leq 6 + 3 - 2$

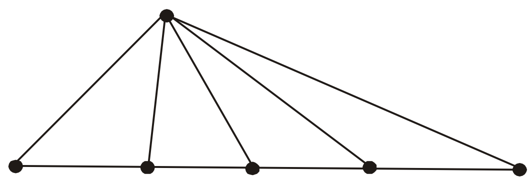
$7 \leq 7$ olup eşitsizlik sağlanır.

ii)

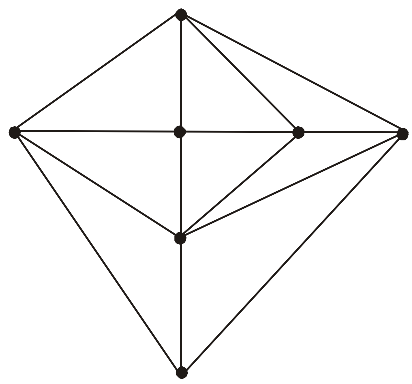


$b = b \quad \vartheta = 6$
$6 \leq 6 + 2 - 2$
$6 \leq 6$ olup $b \leq \vartheta + b(q) - 2$ özelliğini sağlar.

iii)

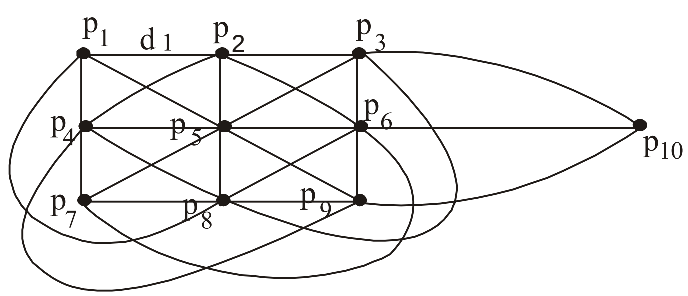


Genelleştirilmiş projektif düzlemini alalım ve tip 2 şeklinde basit genişletelim.



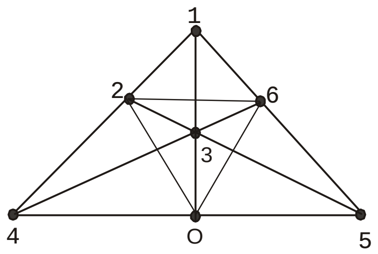
Bu genişlemede $\vartheta = 7 \quad b = 10$ dur.
$10 \leq 7 + 5 - 2$
$10 \leq 10$ olup
$b \leq \vartheta + b(q) - 2$ özelliği sağlanır.

iv)



Sonsuzda bir noktası bulunan U afin düzlemini alalım. (q sonsuzdaki nokta değil)
$b = 12 \quad \vartheta = 10 \quad b(q) = 4$ olup
$12 \leq 10 + 4 - 2$
$12 \leq 12$ olup $b \leq \vartheta + b(q) - 2$ özelliğini sağlar.

v)

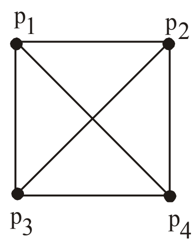


1-kere şişirilmiş 2 mertebeli projektif düzlemi düşünelim. q noktası olarak 2 noktasını alalım.
$b = 9$, $\vartheta = 7$, $b(q) = 4$
$9 \leq 7+4-2$
$9 = 9$ olup özelliği sağlanır.

Teorem 6.2: ϑ noktalı ve b doğrulu her lineer uzay $p \notin$ **d** özelliğindeki tüm p noktaları ve tüm d doğruları için $b \geq \vartheta + \pi(p,d)$ eşitsizliğini sağlar.

Bu teoreme ait örneğimiz aşağıdadır.

Örnek 6.4



$b = 6$ $\vartheta = 4$

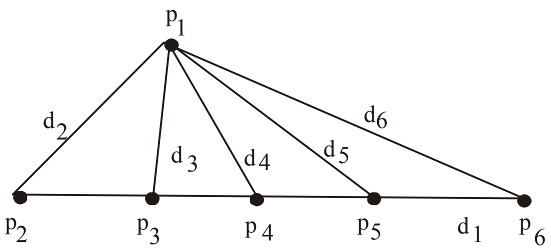
p_1 noktası için $\pi(p_3, p_1p_2) = 1$ dir. O halde $b = 6$ $\vartheta = 4$ için $6 \geq 4 + 1$, $6 \geq 5$ olup teorem gerçekleşir.

Tanım 6.4 : Çakışmayan bir (p, d) nokta-doğru çifti için $b = \vartheta + \pi(p,d)$ eşitliğini sağlayan bir lineer uzaya bir Dowling-Wilson uzayı denir.

Aşağıda bazı Dowling-Wilson uzayı örneklerini veriyoruz.

Örnek 6.5

1)



$\pi(p_1, d_1) = 0$ dır.

$b=6$

$\vartheta=6$

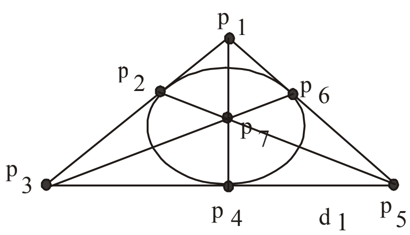
ve

$b=\vartheta + \pi(p,d)$

$6=6 + 0$

6=6 olduğundan bu yaklaşık demet bir Dowling-Wilson uzayıdır.

2)



Fano düzlemini ele alırsak

$b = n^2 + n + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 7$

$\vartheta = n^2+n+1 = 2^2 + 2+1 = 7$

$\pi(p_1, d_1) = 0$

olup

$b = \vartheta + \pi(p,d)$

$7 = 7 + 0$

7 = 7 olduğundan fano düzlemi bir Dowling –Wilson uzayıdır.

Tanım 6.5: Mertebesi n ve defiency (eksikliği) 0 olan bir 1kere şişirilmiş projektif düzlemine mertebesi n olan bir **U** şişirilmiş afin düzlem veya sonsuzda bir lineer uzayı bulunan n mertebeli bir afin düzlem denir.

Tanımda verilen uzay mertebesi n olan bir A afin düzlemi ile A nın sonsuzdaki bazı noktaları üzerine konmuş bir lineer uzayın birlikte oluşturduğu uzay olarak düşünülebilir.

Mertebesi n olan bir **U** şişirilmiş afin düzlemini ve sonsuzdaki **D** uzayını düşününüz. Eğer D b tane doğru ve ϑ tane noktaya sahip ise bu takdirde **U** n^2+n+b doğruya ve $n^2+\vartheta$ noktaya sahiptir. Üstelik eğer p **D** nin bir noktası ve L bir doğrusu ise ve t **D** nin p den geçen ve L yi kesmeyen doğrularının sayısıysa bu takdirde t + n, **U** nun p den geçen ve L yi kesmeyen doğrularının sayısıdır. Sonuç olarak **U** nin Dowling-Wilson uzayı olması için gerek ve yeterli şart **D** nin Dowling-Wilson uzayı olmasıdır. Biz şimdi **U** yu bir **D** şişirilmiş afin düzleminin sonsuzdaki lineer uzayı olarak kullanabiliriz ki,eğer **D** Dowling-Wilson uzayı ise o halen bir Dowling-Wilson uzayıdır. Bu Dowling-Wilson uzaylarının oldukça karmaşık olduğunu gösterir.

Teorem 6.3: **U** nun bir Dowling-Wilson uzayı olduğu farzedelsin ve $t := b-\vartheta$ olarak alınsın bu takdirde aşağıdaki durumlardan birisi oluşur.

i) **U** bir d doğrusundan t nokta atılması suretiyle $n \geq t + 1$ mertebeli bir projektif düzlemden elde edilebilir.

ii) $t = 0$ ve **U** bir yaklaşık demettir

iii) **U** bir (3, t + 2) çatmadır.

iv) **U** mertebesi $n \geq t$ olan ve sonsuzda bir **D** Dowling-Wilson uzayı bulunan bir afin düzlemdir. **D** noktalardan t-n tane fazla doğruya sahiptir. Eğer (p,d) üzerinde olmayan herhangi nokta doğru çift ve $b=\vartheta+\pi(p,d)$ ise bu takdirde p **D** nin bir noktası ve d **D** nin bir doğrusudur.

Karşıt olarak 1, 2, 3 veya 4'ü sağlayan her **U** lineer uzayı noktalardan t tane fazla doğruya sahip bir Dowling-Wilson uzayıdır.

Teorem 6.1'in ileri sonuçları olarak Totten teoremini ve (Metsch) de ispatsız olarak bahsedilen aşağıdaki sonuç elde edilir.

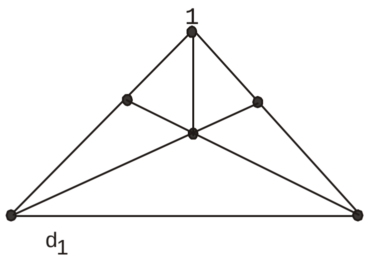
Sonuç 6.1 : **U** non-dejenere bir lineer uzay,p onun bir noktası ve w p den geçmeyen doğru sayısı olsun. Bu takdirde $w \geq [\vartheta-\sqrt{\vartheta}]$ eşitliğinin geçerli olması için gerek ve yeter şart **U** nun bir projektif düzlem olmasıdır.

Teorem 6.2 ve 6.3 Teorem 6.1 in sonuçları olarak hemen hemen hazırdırlar. Ancak Dowling-Wilson konjektürünü Teorem 6.1'i kullanmadan ispatlamak çok kolay görünmemektedir. $b \leq \vartheta + \pi(p,\ d)$ özelliğinde bir lineer uzayı çalıştığımızı ve eşitliğin geçerli olduğunu göstermeye çalıştığımızı farzediniz. **U** nin derecesinin 2 olmasında doğar. Bu takdirde hipotez yalnız $b \leq \vartheta + \vartheta(p) - 2$ yi verir. Bu yüzden derecesi 2 olan bir d doğrusunun varlığını bilme hariç teorem 1 deki durumdayız. Bununla beraber bir 2-doğrunun kullanımını yapmak oldukça güç göründüğünden biz hemen teorem 6.1 in ispatının gücüne başvururuz.

Teorem 6.3 ün iddialarını örnekleyelim

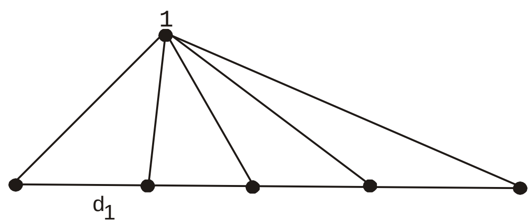
Örnek 6.6:

i) 2. mertebeden projektif düzlemi ele alalım ve $3 \geq 1 + 1$ olmak üzere projektif düzlemin bir noktasını atalım $t = 1$



$b = 7 \quad \vartheta = 6$
$t = b\text{-}\vartheta = 7\text{-}6 = 1$
oluşan uzay $\pi(1,d_1) = 1$
$7 = 6+1$
$7 = 7$ olup $b = \vartheta+\pi\ (p,d)$
özelliğini sağlar. Yani bir Dowling Wilson uzayıdır.

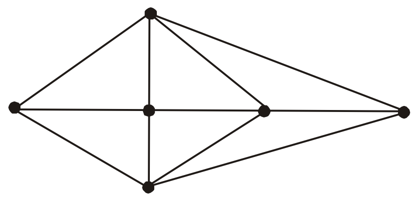
ii)



$b = b \quad \vartheta = 6$
$t = b - \vartheta = 6\text{-}6 = 0$
$\pi(1,\ d_1) = 0$
$7 = 7+0 = 7$ olup

$b = \vartheta + \pi(p,d)$ özelliği sağlanır. Yani bir yaklaşık demet bu özellikte bir Dowling-Wilson uzayıdır.

iii)



(3, 4} çatmayı düşünelim. $b = 8$, $\vartheta = 6$
$t = b - \vartheta = 8-6 = 2$ dir. $8=6+2$ olup $b = \vartheta + \pi(p,d)$ özelliği sağlanır. Yani bir Dowling – Wilson uzayıdır.

.

7. KUTUPSAL UZAYLAR

Son olarak kutupsal uzaylar hakkında bazı tanım ve teoremleri ifade etmekle yetineceğimiz bu kısımdaki bilgiler için Lynn Margaret Batten'in Combinatarics of Finite Geometries kitabını esas alıyoruz.(Batten 1997)

Kutupsal uzaylar ilk olarak Veldkamp, F.D. tarafından 1959'da tanımlanmıştır.Bu konuda Buekenhout anda Deheider (1971) ve Buekenhout and Shult'te (1974) detaylı bilgi bulunabilir. Kutupsal uzaylar teorisi Tits (1974) tarafından büyük oranda geliştirilmiştir. Aşağıdaki kutupsal uzay tanımı Buekenhout and Shult den (1974) verilmiştir.

Tanım 7.1. Bir **U(N,D)** yaklaşık lineer uzayında herhangi bir d doğrusu üzerinde olmayan her n noktası için $c(n,d) = 1$ veya ϑ (d) ise **U** uzayına bir kutupsal uzay denir.

Burada c(n,d) koneksiyon sayısı $n \notin d$ için n den geçip d yi kesen doğru sayısıdır.

Bir **U** kutupsal uzayında bir nokta tüm noktalarla doğrudaş ise **U** ya dejeneredir denir.

Her lineer uzay bir dejenere kutupsal uzaydır. Özel olarak her afin uzay ve her projektif uzay bir dejenere lineer uzay örneği olarak ele alınabilir.

Dezargsel bir projektif uzaydaki bir kutupluluğun mutlak noktalarının cümlesi ile bir cisim üzerindeki bir projektif uzayın dejenere olmayan quadriklerinin (mutlak noktalarının) bir çok özelliklerinin ortak olduğu bilinmektedir. Weldkamp 1959 da bu sistemlerin her ikisini kapsayan, ancak daha fazla bir şey kapsamayan bir yapı örneği verdi. Ancak kurduğu teoride karakteristiğin 2 olması halinde problem vardı. Tits 1974 te Weldkamp sistemlerini aşağıdaki tanımla ıslah etti.

Bir **U** kutupsal uzayı, alt uzay denilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan seçkin alt cümlelerle birlikte bir noktalar cümlesidir:

i) Bir alt uzay kapsandığı alt uzaylarla birlikte bir n tamsayısı için $1 < i \leq n - 1$ olmak üzere i-boyutlu bir projektif uzaydır. (Bunun oluşturduğu en küçük n sayısına **U** nun rankı denir.)

ii) Herhangi iki alt uzayın kesişimi bir alt uzaydır.

iii) Boyutu n-1 olan bir V alt uzayı ve bir $n \in U \backslash V$ noktası verildiğinde n noktasını kapsayan $(M \cap V) = n-2$ olacak şekilde bir tek M alt uzayı vardır. M, V nin n ye 1-boyutlu alt uzaylar (doğrular) ile birleşen tüm noktalarını kapsar.

iv) Boyutları n-1 olan ayrık alt uzaylar vardır.

Tits (1974) de rankı en az 3 olan kutupsal uzayların tam bir sınıflandırmasını aşağıdaki teoremde vermiştir.

Teorem 7.1. **U**, rankı en az 3 olan bir kutupsal uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumların yalnız ve ancak bir tanesi gerçeklenir.

(1) U, σ-Hermityen formun iz-değeri ile belirlenen bir projektif uzaydaki bir kutupluluk tarafından meydana getirilmiş bir kutupsal uzaydır.

(2) U, bir projektif düzlemdeki bir F bölümlü halkası üzerinde bir pseudo-kuadrik formundan oluşturulan bir kutupsal uzaydır. Burada F nin karakteristiği 2 dir ve kapsanan σ otomorfizmi $\sigma^2 = 1$ özelliğini sağlar. Ayrıca $\{t \in F | t^n = t\} \neq \{u + \sigma(u) | \ u \in F\}$ dir.

(3) U, karakteristiği 2 den farklı olan bir cisim üzerine kurulu bir projektif uzaydaki syplectik kutupluluktan oluşturulan bir kutupsal uzaydır.

(4) U maksimal alt uzayları Moufang düzlemleri ve rankı 3 olan bir kutupsal uzaydır.

(5) U bir non-kamutatif bölümlü halka üzerindeki 3-boyutlu bir projektif uzaya eşlenen ve rankı 3 olan bir kutupsal uzaydır.

Rankı 2 olan kutupsal uzaylar genelleştirilmiş dörtgenlerdir. Bu konuda son zamanlarda yoğun araştırmalar yapılmaktadır.

Ernest Shult GF(2) cismi üzerindeki karakterizasyon problemini bağımsız olarak incelemiştir. (Shult 1972).O nun bulduğu sonuçlar Graf teori dilinin iskeletini oluşturur. Esas teoremini aşağıda veriyoruz.

Teorem 7.2: G regüler bir sonlu grafik olsun G nin her (a,b) kenarı için

i) (a,c) ve (b,c) kenarlarıdır.

ii) G\{a,b,c} nin her noktası {a,b,c} nin ya bir ya da tüm noktalarına birleşir. şartlarını sağlayan bir c noktasının varolduğu farzedilsin. Bu takdirde G bir tam grafik veya hiç kenarı bulunmayan bir grafik olmadıkça Teorem 7.1 in (1) veya (2) deki sistemlerinden birine izomorftur.

Bir Shult uzayı kavramı Bukenhout and Shult (1974) te verilmiştir.

Tanım 7.2: Bir U Shult uzayı kardinaliteleri 2 veya daha büyük olan ve doğru adı verilen belirli alt kümelerle birlikte bir noktalar kümesidir. U nun her d doğrusu ve her $n \in U \backslash d$ noktası için n, d nin ya bir ya da tüm noktalarına birleşir. Hiçbir nokta diğer noktaların tümü ile birleşmiyorsa Shult uzayı non dejeneredir denir.

Tanım 7.3: Bir **U** Shult uzayının bir V alt uzayı “V yi birden fazla noktada kesen herhangi bir doğru V de kapsanır.” özelliğindeki ikişer ikişer bitişik noktaların boş olmayan bir cümlesidir. Eğer **U** nun her $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_i$ farklı alt uzayları zinciri en çok n tane elemana sahip olacak şekilde bir n tamsayısı varsa **U** sonlu ranklıdır denir.

Bukenhout and Shult (1974) ün en önemli sonucu aşağıdadır.

Teorem 7.3: **U** sonlu ranklı ve tüm doğrularının kardinalitesi 3 veya daha büyük olan non-dejenere bir Shult uzayı olsun. Bu takdirde **U** bir kutupsal uzaydır.

Konunun başında kullandığımız kutupsal uzay tanımı Bukenhout and Shult (1974) te verilen aşağıdaki teorem sayesinde verilmiştir.

Teorem 7.4: Her kutupsal uzay bir Shult uzayıdır.

KAYNAKLAR

BATTEN, L. M. 1980.Linear spaces with line range {n-1,n,n+1} and at most n^2 points,J.Austral.math.Soc.Ser.A 30: 215-228.

BATTEN, L. M. 1993. A characterization of finite lineer spaces on υ points $n^2 \leq \vartheta < (n+1)^2$ and $b=n^2+n+3$ lines $n\geq10$, Discrete Mathematics 118: 1-9.

BATTEN, L. M. 1993. The non- existance of finite lineer spaces with $\upsilon=n^2$ points and $b=n^2+n+2$ lines, Discrete Mathematics 115: 11-15.

BATTEN, L. M. 1997. Combinatorics of finite geometrics.Cambridge University press,Second Edition.

de BRUJİN, N.G. and ERDÖS,P. 1948. On a combinatorial Problem. Neder. Akad. Wetensch, Indag.Math. 10: 421-423, 1277- 1279.

BUEKENHOUT, F.N. and SHULT, E. (1974) on the foundations of polar geometry. Geom. Ded. 3: 155-70.

ERDÖS, P. FOWLER, J.C. SOS ,V.T. and WİLSON, R.M. 1985.On 2-desings,

J.Comb.Theory (A) 38: 131-141.

FOWLER, J.C. 1984.A short proof of Totten's classification of restricted lineer spaces, Geom Dedicate 15: 413-422.

METSCH,K. 1988.An improved bound for the embedding of linear spaces into projective planes,Geom.Dedicate 333-340

METSCH, K. 1989. Lineer spaces with few lines Ph.D. Thesis, University of mainz

METSCH, K. Proof of the Dowling-Wilson conjecture, submitted

STANTON, R.G., EADES, P.D., VAN REES, G.H.J. and COWAN, D.D. 1980. "Computation of some Exact g-Cove rings" util.Math 18: 269-282.

STANTON, R.G. and KALBFLEİSCH, J.G: 1972 "The λ-m. Problem: $\lambda=1$ and m=3", in Proc.Second Chapel Hill Conf, On Combinatorics.Chapel Hill, 451-462.

STİNSON, D.R. 1982. A short proof of a theorem of de Witte, Ars Combin. 14: 79-86.

STİNSON, D.R. 1983 The non- existence of certain finite lineer spaces, Geom.Dedicate 13: 429- 434

TİTS, J. (1974). Buildgs of Spherical Type and Finite BN-Pairs. Springer-Verlag. Berlin/Heidelber/New York

TOTTEN,J. 1976.Classification of restricted lineer spaces, Canad J. Math. 28: 321 - 333.

de WİTTE,P. on the embedding of lineer spaces in projective planes of order n unpublished.

VELDKAMP, F.D. (1959) Polar Geometry, 1-V. Proc.Kon. Ned.Akad. Wet. A62, 512-51; A.63, 207-12 (In Indag.Math.)

İNDEKS

ÖZGEÇMİŞ

06.08.1981 tarihinde Antalya'da doğan Nuri Kılınç; ilk, orta ve lise eğitimini Antalya'da tamamladıktan sonra 1999 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2003 yılında lisans öğrenimini tamamladıktan sonra yine aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.2003 yılından itibaren özel bir öğretim kurumunda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten; her türlü yardım ve desteği esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ'ye, yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda destek olan Araş. Gör. Atilla AKPINAR'a en içten teşekkürlerimi sunarım.