BAZI TAMSAYI DİZİLERİ

VE

PELL DENKLEMLERİ

Arzu ÖZKOÇ

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI TAMSAYI DİZİLERİ VE PELL DENKLEMLERİ

Arzu ÖZKOÇ

Doç. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2013

TEZ ONAYI

Arzu ÖZKOÇ tarafından hazırlanan "Bazı Tamsayı Dizileri ve Pell Denklemleri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	: Doç. Dr. Ahmet TEKCAN	
Başkan	:Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye	: Prof. Dr. Refik KESKİN Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye	: Prof. Dr. İlhan TAPAN Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Anabilim Dalı	İmza
Üye	: Prof. Dr. Osman BİZİM Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye	:Doç. Dr. Ahmet TEKCAN Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı	İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
16/04/2013

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

19/03/2013

Arzu ÖZKOÇ

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI TAMSAYI DİZİLERİ VE PELL DENKLEMLERİ

Arzu ÖZKOÇ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu çalışmada tamsayı dizileri ve Pell denklemleri ele alınmış ve bunlarla ilgili bazı cebirsel bağıntılar ve özdeşlikler elde edilmiştir.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, iki ve dört parametreli tamsayı dizileri ele alınmış bu diziler ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca iki parametreli tamsayı dizisinin parametrelerine bağlı olarak tanımlanan Pell denkleminin tamsayı çözümleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, oblong sayıları ele alınmış ve bu sayıların bazı cebirsel özellikleri verildikten sonra bu sayılara bağlı olarak tanımlanan Pell formu ve Pell denklemi ele alınmıştır. Pell denkleminin tamsayı çözümlerinin oblong sayılarına bağlı olarak verilebileceği gösterilmiş ve Pell formunun indirgenmişinin devri ve has devri ele alınarak bu formun has otomorfizmlerinin yine oblong saylarına bağlı olarak tanımlanan matris yardımıyla elde edilebileceği gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, balans sayıları ele alınmış ve bu sayıların hem kendi aralarında hem de Pell ve Pell-Lucas sayıları ile olan ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca balans sayılarına bağlı olarak tam kareler ve pisagor üçlüleri elde edilmiştir.

Son bölümde ise $t \geq 2$ tamsayısı için $x^2-(t^2-t)y^2-(4t-2)x+(4t^2-4t)y=0$ Diophantine denklemi ele alınmış, bu denklemin tamsayı çözümleri $\mathbb{Z}$ de ve $p \geq 5$ asal sayısı için sonlu $\mathbb{F}_p$ cisminde ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Diophantine ve Pell denklemleri, Kuadratik formlar, Oblong sayıları, Tamsayı dizileri, Balans sayıları.

2013, vii +81 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

SOME INTEGER SEQUENCES
AND PELL EQUATIONS

Arzu ÖZKOÇ

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this work, some algebraic properties are obtained on integer sequences and Pell equations.

In the first section, the preliminary notations, definitions and theorems which are to be used in later sections are given.

In the second section, two separate integer sequences with two and four parameters are discussed and some algebraic relations on them are derived. Moreover, a Pell equation is defined using the parameters of the sequence with two parameters, and deduced the integer solutions of it including some recurrence relations.

In the third section, oblong numbers, Pell form and Pell equations have been considered. The integer solutions of Pell equation can be deduced by using oblong numbers. Also the cycle and proper cycle of the reduction of Pell form are given. Moreover, it is proved that the set of proper automorphisms of Pell form can be obtained by using the matrices related to oblong numbers.

In the fourth section balancing numbers are considered. Some algebraic relations on them and also their relationships with Pell and Pell-Lucas numbers are deduced. Further, some formulas on perfect squares and Pythagorean triples related to balancing numbers are given.

In the last section, integer solutions of Diophantine equation $x^2-(t^2-t)y^2-(4t-2)x+(4t^2-4t)y=0$ for an integer $t\geq 2$ is considered over $\mathbb{Z}$ and also over finite fields $\mathbb{F}_p$ for primes $p\geq 5$.

Key words: Diophantine and Pell equations, Quadratic forms, Oblong numbers, Integer sequences, Balancing numbers.

2013, vii + 81 pages.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın her aşamasında bilgisiyle beni yönlendiren, tecrübelerinden yararlandığım, hoşgörüsüyle her zaman yanımda olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Ahmet TEKCAN'a, çalışmalarım boyunca bana destek olan değerli hocam Prof. Dr. Osman BİZİM'e ve öğrenim hayatım süresince bana her zaman destek olan canım aileme yürekten teşekkür ederim.

Aynı zamanda doktora öğrenimim boyunca 2211 kodlu Yurt İçi Doktora Burs Programı ile beni destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na ve Uludağ Üniversitesi' ne (Bilimsel Araştırma Projesi, Proje No: UAP(F)-2010/55) teşekkürü bir borç bilirim.

Arzu ÖZKOÇ
01/04/2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
B_n	n. Balans sayısı
$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_l]$	Basit sürekli kesirli açılım
$[a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_l}]$	Basit sürekli kesirli devirli açılım
b_n	n. cobalans sayısı
o_n	n. cooblong sayısı
$T[h,k]$	T dönüşümünün bazı (tabanı)
$\# D(\mathbb{F}_p)$	$\mathbb{F}_p$ cismi üzerinde tanımlı Diophantine (Pell) denkleminin tamsayı çözümleri kümesinin eleman sayısı
F_n	n. Fibonacci sayısı
$\Delta(F) = b^2 - 4ac$	F formunun determinantı
$F_0 \sim F_1 \sim F_2 \sim \cdots \sim F_{l-1}$	F formunun devri
$Aut^+(F)$	F nin has otomorfizmleri kümesi
$Aut^-(F)$	F nin has olmayan otomorfizmleri kümesi
$\overline{\Gamma}$	Genişletilmiş modüler grup
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$	İkinci dereceden Diophantine denklemi
Q_p	İkinci dereceden kalanların kümesi
$F = (a, b, c)$	Kuadratik form
L_n	n. Lucas sayısı
C_n	n. Lucas balans sayısı
c_n	n. Lucas cobalans sayısı
Γ	Modüler grup
$\rho(N)$	N nin rankı
O_n	n. Oblong sayısı
$F_\Delta(x,y)$	Pell form
$x^2 - dy^2 = \pm N$	Pell denklemi
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
$\mathbb{F}_p$	p elemanlı sonlu cisim
$\mathbb{F}_p^*$	p elemanlı sonlu cismin çarpımsal grubu
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
(x_1, y_1)	Temel çözüm

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$	Üreteç fonksiyonu

Kısaltmalar	**Açıklama**
OEIS	Tamsayı dizileri on-line ansiklopedisi

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlara, notasyonlara ve teoremlere yer verilecektir. Çalışma iki ana bölümden oluşmakta olup bunlar tamsayı dizileri ve Diophantine denklemleri şeklindedir. Bu nedenle bu bölümde bu iki kavram hakkında genel bilgiler üzerinde durulacaktır.

1.1 Tamsayı Dizileri

Analitik sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahip olan tamsayı dizileri ilk olarak çok meşhur bir tamsayı dizisi olan Fibonacci tamsayı dizisi (A000045 OEIS tamsayı dizileri online ansiklopedisi) ile ortaya çıkmıştır. Diziye adını veren Leonardo Fibonacci (1170-1250) orta çağın en ünlü matematikçilerinden biridir. İtalyan matematikçi, matematiği araplardan alıp Avrupa'ya tanıtan kişi ve on üçüncü yüzyıl başlarında yayınlanan 'Liber Abaci' isimli kitabın yazarı olarak bilinmektedir. Daha önce Hintli matematikçilerin altıncı yüzyılda bulmuş olduğu sayı dizisi, 'Liber Abaci' kitabında tavşanların üreme probleminin hesaplanmasıyla Fibonacci sayı dizisi olarak 1202 yılında Fibonacci tarafından ortaya konmuştur. On dokuzuncu yüzyılın başlarından itibaren dizi üzerine yapılan araştırmaların sayısı giderek artmış ve en şaşırtıcı sayı dizisi olarak tarihe adını yazmıştır. Hatta Fibonacci Derneği kurulup, 1963 yılından itibaren 'The Fibonacci Quartery' isimli dergi bu konu ile ilgili yapılan çalışmaları yayınlamaya başlamıştır. Özellikle dizinin elemanları ile tabiattaki bağıntılar arasındaki benzerlikler üzerine çalışmalar yapılmış, Altın Oran olarak bilinen irrasyonel sabitin

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots$$

Fibonacci dizisinin ardışık elemanlarının oranının limitine eşit olduğu bulunmuştur. Fibonacci dizisi, ilk iki terimi haricinde diğer tüm terimleri arasında kendisinden hemen önce gelen ilk iki terimin toplamı olarak ifade edilebilme özelliğine sahiptir. Bu sayı dizisi, başlangıç değerleri $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ olan ve tüm $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

olarak tanımlanan sayı dizisidir.

Dizinin terimleri arasında birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan bazıları

$$
\begin{aligned}
&F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_n(F_n + 2F_{n-1}) = 3F_{2n-2} - F_{2n-4} \\
&F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 = 3F_{2n-1} - F_{2n-3} \\
&F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \\
&F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = 4F_{3n-3} + F_{3n-6} \\
&F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3} \\
&F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2 \\
&F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1} = F_{m+n}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Fibonacci sayı dizisine benzer bir diğer önemli sayı dizisi ise Lucas sayı dizisidir (A000032 OEIS dizisi). Bu dizi de Fibonacci sayı dizisine benzemekle birlikte sadece başlangıç değerleri farklıdır. Dizi, başlangıç değerleri $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

olarak tanımlanan bir sayı dizisidir. Bu dizinin terimleri arasında da birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan bazıları $m \geq n$ için

$$
\begin{aligned}
&L_{2m}L_{2n} = L_{m+n}^2 + L_{m-n} - 4(-1)^{m+n} \\
&L_{n+1}^3 - L_n^3 - L_{n-1}^3 = 3L_{n+1}L_nL_{n-1} \\
&L_{2m+2n} + L_{2m-2n} = L_{2m}L_{2n}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Fibonacci ve Lucas dizilerinin karakteristik denklemi aynı olup bu denklem, dizilerin genel terimleri yardımıyla elde edilir. Fibonacci dizisinin genel terimi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olduğundan $F_n = x^n$ olarak alınırsa dizinin karakteristik denklemi

$$
\begin{aligned}
x^n = x^{n-1} + x^{n-2} &\Rightarrow x^{n-2}x^2 = x^{n-2}x + x^{n-2} \\
&\Rightarrow x^{n-2}x^2 = x^{n-2}(x+1) \\
&\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir (Bu aynı zamanda Lucas dizisinin de karakteristik denklemidir). Bu denklemin kökleri

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. Bu kökler yardımıyla Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet (Jacques Phillipe Marie Binet, 1786-1856) formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} \text{ ve } L_n = a^n + b^n$$

dır.

Fibonacci ve Lucas tamsayı dizileri arasında birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan en önemli olanı

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

dir. Ayrıca bu iki dizinin terimleri arasında

$$F_{m+n} = \frac{F_m L_n + L_m F_n}{2}, \quad F_{2n} = F_n L_n, \quad L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$$

$$2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^2 = (3F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+2}^2 - 6F_{2n}F_{2n+2} - 2n - 5)/5$$

$$\left(\frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}\right)^m = \frac{L_{mn} + \sqrt{5}F_{mn}}{2}$$

$$L_{2m}L_{2n} = L_{m+n}^2 + 5F_{m-n}^2$$

$$F_n F_{n+3}^2 - F_{n+2}^3 = (-1)^{n+1} F_{n+1}$$

$$L_{(2m+1)(4n+1)} - L_{2m+1} = 5F_{2n(2m+1)}F_{(2m+1)(2n+1)}$$

şeklinde bağıntılar vardır.

$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ bir polinom olmak üzere, $p(x) = 0$ denklemi için

$$M = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

karesel matrisine, $p(x)$ polinomunun kompanion matrisi denir. Buna göre Fibonacci ve Lucas dizilerinin karakteristik denklemleri $x^2 - x - 1 = 0$ olduğundan bu dizilerin kompanion matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Bu iki tamsayı dizisinden başka önemli iki tamsayı dizisi Pell (John Pell 1611–1685) (A000129 OEIS dizisi) ve Pell-Lucas (kompanion Pell) (A122075 OEIS dizisi) tamsayı dizileridir. Bu diziler de yukarıdaki dizilere benzerlik göstermekle birlikte katsayılarında farklılıklar vardır. Bu iki tamsayı dizisi

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}\,,\ P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ ve } Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}\,,\ Q_0 = 2, Q_1 = 2$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu iki tamsayı dizisinin karakteristik denklemi

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

olup ve bu denklemin kökleri

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \beta = 1 - \sqrt{2}$$

dir. Dolayısıyla bu iki dizi için Binet formülleri sırasıyla

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{2}} \text{ ve } Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. Bu iki tamsayı dizisinin terimleri arasında da birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan en önemli olanları $n \geq m$ için aşağıdaki gibidir:

$$P_n Q_m = P_{n+m} + (-1)^m P_{n-m}\ ,\ P_{2n} = P_n Q_n\,,$$
$$P_{2n+1} = P_n + Q_{n+1} + (-1)^n,\ P_n = \frac{Q_{n+1} + Q_{n-1}}{8},$$
$$P_n^2 = \frac{Q_{2n} + (-1)^{n+1}}{8}\ ,\ P_{2n+1} = \frac{P_n Q_{n+1} + Q_n P_{n+1}}{2},$$
$$Q_{2n+1} = \frac{8P_n P_{n+1} + Q_n Q_{n+1}}{2}\ ,\ P_n P_{n+m} = \frac{Q_{2n+m} + (-1)^{n+1} Q_m}{8}.$$

Aslında yukarıda bahsedilen Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas tamsayı dizilerinin genel hali şu şekildedir: P ve Q, $P^2 - 4Q \neq 0$ özelliğinde iki tamsayı olmak üzere başlangıç değerleri $U_0 = 0, U_1 = 1$, $V_0 = 2, V_1 = P$ olan ve genel terimleri $n \geq 2$ için

$$U_n = U_n(P,Q) = PU_{n-1} - QU_{n-2} \text{ ve } V_n = V_n(P,Q) = PV_{n-1} - QV_{n-2}$$

olarak tanımlanan U_n ve V_n tamsayı dizileridir. Bu dizilerin karakteristik denklemi

$$x^2 - Px + Q = 0$$

ve bu denklemin kökleri

$$x_{1,2} = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

olup ($P^2 - 4Q \neq 0$ alınmasının sebebi, denklemin farklı iki kökünün olması istendiği için) bu diziler için Binet formülleri

$$U_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \text{ ve } V_n = x_1^n + x_2^n$$

dir. Dolayısıyla U_n ve V_n tamsayı dizilerinde *P* ve *Q* nun özel halleri için yukarıda bahsedilen tamsayı dizileri elde edilmiş olur:

Çizelge 1.1 U_n ve V_n dizilerinde *P* ve *Q* nun özel halleri

P	Q	U_n	V_n
1	-1	Fibonacci sayı dizisi	Lucas sayı dizisi
2	-1	Pell sayı dizisi	Pell-Lucas sayı dizisi
1	-2	Jacobsthal sayı dizisi (A001045 OEIS dizisi)	Jacobsthal-Lucas sayı dizisi (A014551 OEIS dizisi)

U_n ve V_n tamsayı dizilerinin karakteristik denklemi $x^2 - Px + Q = 0$ olduğundan bu dizinin kompanion matrisi

$$M = \begin{bmatrix} P & -Q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup bu matris için

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} P \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir (Ribenboim 2000 ve Koshy 2001).

Üreteç fonksiyonu, tamsayı dizilerinin terimlerini elde etmekte kullanılan bir fonksiyon olup belli bir a_n dizisi için bu fonksiyon

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

şeklinde bir seri açılımına sahiptir. Dizilerin üreteç fonksiyonları, dizilerin karakteristik denklemi yardımıyla elde edilir. Örneğin, yukarıda tanımlanan U_n dizisinin karakteristik denklemi için, $x^2 - Px + Q = 0$, $U_0 = 0, U_1 = 1$ ve $U_n = PU_{n-1} - QU_{n-2}$ olduğundan dizinin üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}(1 - Px + Qx^2)\sum_{i=0}^{\infty} U_i x^i &= (1 - Px + Qx^2)(U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots + U_n x^n + \cdots) \\ &= U_0 + (U_1 - PU_0)x + (U_2 - PU_1 + QU_0)x^2 + \cdots \\ &\quad + (U_n - PU_{n-1} + QU_{n-2})x^n + \cdots \\ &= x\end{aligned}$$

ve böylece

$$U(x)(P,Q) = \frac{x}{1 - Px + Qx^2}$$

olarak elde edilmiş olur. Benzer şekilde V_n dizisinin üreteç fonksiyonu da

$$V(x)(P,Q) = \frac{2 - Px}{1 - Px + Qx^2}$$

dır (Ribenboim 2000).

1.2 Diophantine ve Pell Denklemleri

Bu alt bölümde çalışmanın diğer bir bölümünü teşkil eden Diophantine denklemleri ve bu denklemlerin özel bir hali olan Pell denklemleri ile ilgili bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilecektir.

1.2.1 Tanım. $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1.2}$$

denklemine ikinci dereceden Diophantine denklemi denir (Barbeau 2003).

Diophantine denklemleri ile ilgili ilk teorem 1657 de Fermat (1601-1665) tarafından ispatsız olarak verilmiştir. Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri hakkındaki ilk ispatı 1768 de Lagrange (1736-1813) vermiştir. Yirminci yüzyılın başlarında, M.Ö. 600 yıllarında Hintli matematikçilerin bu denklemin tamsayı çözümlerini bulmakla ilgili bir algoritma bildikleri ortaya çıkmıştır, fakat verdikleri yöntemin bazı özel durumlarda sonuç verdiği anlaşılmıştır.

1.2.2 Tanım. *D* tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere ikinci dereceden Diophantine denkleminin özel bir hali olan

$$x^2 - Dy^2 = \pm n \qquad (1.3)$$

denklemine Pell denklemi denir (Barbeau 2003).

$x^2 - Dy^2 = n$ denklemine pozitif Pell denklemi, $x^2 - Dy^2 = -n$ denklemine ise negatif Pell denklemi denir. Eğer *D* tam kare, yani $D = t^2$ ise verilen denklem

$$x^2 - Dy^2 = (x - ty)(x + ty) = \pm n$$

şeklinde yazılabileceğinden n nin çarpanlarına göre denklemin sonlu sayıda çözümü vardır. Halbuki Teorem 1.2.9 da görüleceği üzere, *D* nin tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olması halinde $x^2 - Dy^2 = \pm n$ denkleminin çözümleri varsa bu çözümlerin sayısı sonsuzdur.

(1.3) eşitliğinde özel olarak $n = 1$ olarak alınırsa

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1 \qquad (1.4)$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme klasik Pell denklemi denir. John Pell (1611-1676) matematikte özellikle cebirsel çalışmalar yapmış, denklemler teorisi ve matematiksel tablolar gibi konulara yoğunlaşmıştır. İsviçreli bir matematikçi olan Johann Heinrich Rahn (1622-1676) tarafından 1659 da yayınlanan ‘Teutsche Algebra’ adlı kitabın düzeltilmiş baskısı 1668 de Pell tarafından yayınlanmıştır. Bu kitapta yukarıda verilen Diophantine denklemleri ele alındığından, bu tür denklemleri daha sonraki yıllarda Pell denklemleri diye isimlendirmek adet olmuştur. Gerçekte ise Pell’in bu denklemlerle bir ilgisi yoktur. Euler (1707-1783), Archimedes’e (M.Ö. 287-M.Ö. 212) kadar uzanan $x^2 - Dy^2 = 1$ denklemi ile çok az ilgilenmiş olmasına rağmen İngiliz matematikçi John

Pell'in adını vermiştir. Archimedes $x^2 - 4729494y^2 = 1$ denklemi ile ilgilenmiştir. Bu denklemin 1880 yılında Amthor tarafından bulunan en küçük pozitif çözümünde, y nin 41 basamaklı bir tamsayı olduğu bilinmektedir. Hintli bir matematikçi olan Baudhayana (M.Ö. 800) ise $x^2 - 92y^2 = 1$ nin en küçük tamsayı çözümünün

$$(x, y) = (577, 408)$$

olduğunu ve $\dfrac{577}{408}$ kesrinin yaklaşık değerini bulmuştur. Pell denklemleri ile ilgili ilk ayrıntılı incelemelere Hintli matematikçiler Brahmagupta (M.S. 600) ve Bhaskara (M.S. 1100) tarafından yapılan çalışmalarda rastlanmaktadır. Pell denklemleriyle ciddi olarak ilgilenen ilk Avrupalı matematikçi Fermat olmuştur. Aynı zamanda John Wallis (1616-1685) ve onun hocası Lord William Brouncker (1620-1684), $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli açılımının belirtilmesine benzeyen bir metodu geliştirerek Pell denklemlerinin çözümleriyle ilgilenmişlerdir. Gerçek anlamda Euler, $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin en küçük pozitif çözümünü bulmak için $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli açılımını kullanmış ve diğer çözümlerin, verilen bir çözümden bir indirgeme formülüyle nasıl üretilebileceğini göstermiştir. Euler bu denklemin bütün çözümlerinin $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli açılımından elde edilebileceğini Lagrange'dan en az on yıl önce fark etmiş olmasına rağmen, 1768 de Lagrange bu iddianın ilk tam ispatını ve her çözümün $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli açılımından elde edilebileceğini göstermiştir (Edward 1996, Jacobson ve Williams 2010, Andreescu ve ark. 2010).

1.2.3 Tanım. $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ Pell denklemini gerçekleyen en küçük pozitif (x_1, y_1) tamsayı ikilisine bu denklemin temel çözümü denir (Barbeau 2003).

$x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denklemine dikkat edilirse D ne olursa olsun $\pm(1,0)$ bu denklemi gerçekler. Bu çözüme denklemin aşikar çözümü denir. (x, y) bu denklemin bir çözümü ise gerçekte $\pm(x, y)$ çiftinin de bu denklemin çözümü olacağı açıktır. Buna karşılık genellikle denklemin sadece pozitif (x, y) tamsayı çözümleri ele alınır.

$x^2 - Dy^2 = \pm 1$ denkleminin temel çözümünün bulunması çok önemlidir. Çünkü denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri (ki bunların sayısı sonsuzdur) bu temel çözüme bağlı olarak elde edilebilir. Denklemin temel çözümü, $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli açılımına bağlı olarak bulunur. Bu temel çözümün nasıl bulunacağı ve bu temel çözüme bağlı olarak diğer tüm tamsayı çözümlerin nasıl elde edileceği aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

1.2.4 Teorem. *D* tamkare olmayan pozitif tamsayı ve $k = 0,1,2,3,\cdots$ olmak üzere a_j ler

$$\alpha_0 = \sqrt{D} \text{ ve } a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor,$$
$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

indirgeme bağıntıları ile tanımlansın. Bu takdirde

$$\sqrt{D} = [a_0\,;\overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, 2a_0}]$$

dır (Mollin 2008).

1.2.5 Tanım. Periyot uzunluğu *l* olan

$$\sqrt{D} = [a_0\,;\overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, 2a_0}]$$

nin sürekli kesirli açılımı verilsin. Bu takdirde $k \geq 0$ olmak üzere,

$$C_k = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_k]$$

ya $\sqrt{D}$ nin *k*. yaklaşımı denir. Açık olarak $\sqrt{D}$ nin *k*. yaklaşımı

$$C_k = \frac{A_k}{B_k} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_k]$$
$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \; \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

dır (Mollin 2008).

Yukarıdaki açılımda l periyot uzunluğudur, $a_l = 2a_0$ *ve* $k \geq 1$ için $a_{l+k} = a_k$ dır. Örneğin, $D = 13$ için

$$\begin{aligned}\sqrt{13} &= 3 + (\sqrt{13} - 3) \\ &= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + (\sqrt{13} - 3)}}}}}\end{aligned}$$

olduğundan $\sqrt{13} = [3; \overline{1,1,1,1,6}]$ dır. Bu açılımın periyot uzunluğu 5 dir.

Sürekli kesirlerle ilgili olarak daha fazla bilgi için Mollin (2008) adlı kaynağa bakılabilir.

1.2.6 Teorem. $\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, 2a_0}]$, basit sürekli kesirli açılım olsun. $k \geq 0$ tamsayısı için $A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, B_{-2} = 1, B_{-1} = 0$ ve

$$A_k = a_k A_{k-1} + A_{k-2} \text{ ve } B_k = a_k B_{k-1} + B_{k-2}$$

olarak tanımlanırsa

$$C_k = \frac{A_k}{B_k} = \frac{a_k A_{k-1} + A_{k-2}}{a_k B_{k-1} + B_{k-2}}$$

dır (Jacobson ve Williams 2010).

1.2.7 Teorem. D pozitif tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere $\frac{A_k}{B_k}$, $\sqrt{D}$ nin k. yaklaşımı ve $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli açılımı

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, 2a_0}]$$

olsun. Bu takdirde;

(i) $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm çözümleri, $k \geq 1$ olmak üzere l periyodu çift iken

$$(x, y) = (A_{lk-1}, B_{lk-1}),$$

l periyodu tek iken $(x, y) = (A_{2lk-1}, B_{2lk-1})$ ile verilir.

(ii) l periyodu çift iken $x^2 - Dy^2 = -1$ Pell denkleminin çözümleri yoktur. l periyodu tek iken denklemin tüm çözümleri $k \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (A_{(2k-1)l-1}, B_{(2k-1)l-1})$$

ile verilir (Mollin 2008).

1.2.8 Sonuç. D pozitif tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli açılımı $\sqrt{D} = [a_0 ; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, 2a_0}]$ olsun. Bu takdirde $x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (A_{l-1}, B_{l-1}) & l \text{ çift iken} \\ (A_{2l-1}, B_{2l-1}) & l \text{ tek iken} \end{cases}$$

dir. l periyodu çift iken negatif Pell denkleminin çözümü yoktur. l periyodu tek iken negatif Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = (A_{l-1}, B_{l-1})$$

dir (Mollin 2008).

Denklemin tüm tamsayı çözümleri, temel çözüme bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

1.2.9 Teorem. D pozitif tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere $x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. Bu takdirde denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$x_n + \sqrt{D} y_n = (x_1 + \sqrt{D} y_1)^n$$

olmak üzere (x_n, y_n) şeklindedir. Eğer (x_1, y_1), $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümü ise denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} + \sqrt{D} y_{2n-1} = (x_1 + \sqrt{D} y_1)^{2n-1}$$

olmak üzere (x_{2n-1}, y_{2n-1}) şeklindedir (Mollin 2008).

Örneğin, $D = 13$ için $\sqrt{13}$ ün basit sürekli kesirli açılımı $\sqrt{13} = [3; \overline{1,1,1,1,6}]$ olduğundan bu açılımın periyot uzunluğu $l = 5$ dir. Dolayısıyla Teorem 1.2.6 gereği

$$A_0 = 3,\ A_1 = 4,\ A_2 = 7,\ A_3 = 11,$$
$$A_4 = 18,\ A_5 = 119,\ A_6 = 137,$$
$$A_7 = 256,\ A_8 = 393,\ A_9 = 649$$

ve

$$B_0 = 1,\ B_1 = 1,\ B_2 = 2,$$
$$B_3 = 3,\ B_4 = 5,\ B_5 = 33,\ B_6 = 38,$$
$$B_7 = 71,\ B_8 = 109,\ B_9 = 180$$

dir. Buna göre, Sonuç 1.2.8 ve Teorem 1.2.9 dan, l tek olduğundan $x^2 - 13y^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = (A_9, B_9) = (649,180)$$

olup diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$x_n + \sqrt{13}y_n = (649 + 180\sqrt{13})^n$$

şeklindedir. Benzer şekilde $x^2 - 13y^2 = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = (A_4, B_4) = (18,5)$$

olup diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$x_{2n+1} + \sqrt{13}y_{2n+1} = (18 + 5\sqrt{13})^{2n+1}$$

şeklindedir.

Teorem 1.2.9 da $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin temel çözüme bağlı olarak nasıl elde edileceği verildi. Denklemin tamsayı çözümleri yine temel çözüme bağlı olarak matrisler yardımıyla da verilebilir.

1.2.10 Teorem. $x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. Bu takdirde denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (x_n, y_n) şeklindedir. Eğer (x_1, y_1), $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümü ise denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^{2n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (x_{2n-1}, y_{2n-1}) şeklindedir (Andreescu ve ark. 2010).

$x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin tamsayı çözümleri arasındaki indirgeme bağıntısı aşağıdaki gibidir.

1.2.11 Teorem. $x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin çözümleri arasında

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1 x_n + D y_1 y_n \\ y_{n+1} &= y_1 x_n + x_1 y_n \end{aligned}$$

şeklinde bir bağıntı vardır (Mollin 2008).

Bu bağıntı yardımıyla denklemin çözümleri arasında $n \geq 3$ için

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (2x_1 - 1)(x_n + x_{n-1}) - x_{n-2} \\ y_{n+1} &= (2x_1 - 1)(y_n + y_{n-1}) - y_{n-2} \end{aligned}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı vardır. Benzer şekilde Teorem 1.2.10 daki

$$\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^{2n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{2n+1} \\ y_{2n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^{2} \begin{bmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^{2n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 + Dy_1^2 & 2Dx_1y_1 \\ x_1y_1 & x_1^2 + Dy_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin çözümleri arasında da

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= (x_1^2 + Dy_1^2)x_{2n-1} + 2Dx_1y_1y_{2n-1} \\ y_{2n+1} &= 2x_1y_1x_{2n-1} + (x_1^2 + Dy_1^2)y_{2n-1} \end{aligned}$$

şeklinde bir bağıntının olduğu görülür. Üstelik denklemin çözümleri arasında $n \geq 3$ için

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= (4x_1^2 + 1)(x_{2n-1} + x_{2n-3}) - x_{2n-5} \\ y_{2n+1} &= (4x_1^2 + 1)(y_{2n-1} + y_{2n-3}) - y_{2n-5} \end{aligned}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı vardır.

1.2.12 Not. $x^2 - Dy^2 = n$ denkleminin eğer $r + s\sqrt{D}$ şeklinde bir tamsayı çözümü varsa denklemin sonsuz sayıda tamsayı çözümü bulunabilir. Bunun için $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümü $x_1 + y_1\sqrt{D}$ ise denklemin

$$x_j + y_j\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^j$$

tüm tamsayı çözümleri için

$$n = (r^2 - s^2 D)(x_j^2 - y_j^2 D) = (rx_j \pm sy_j D)^2 - D(ry_j \pm sx_j)^2$$

olduğundan

$$(rx_j \pm sy_j D) + (ry_j \pm sx_j)\sqrt{D}$$

de $x^2 - Dy^2 = n$ denkleminin bir çözümüdür. Şu halde $x^2 - Dy^2 = n$ denkleminin sonsuz sayıda tamsayı çözümü elde edilmiş olur (Mollin 2008).

Yukarıda da belirtildiği üzere

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Diophantine denklemini bu haliyle çözmek zor olabilir. Bunun yerine denklem, sadece öteleme, sadece dönme ya da öteleme ve dönme yapılarak daha basit olan Pell denklemine indirgenebilir. Dikkat edilirse bu Diophantine denklemi kartezyen koordinatlarda bir konik belirtir. Dolayısıyla Diophantine denkleminin çözümlerini bulmak demek konik üzerindeki tamsayı nokta ikililerini belirlemek demektir.

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ denklemi için $\Delta = b^2 - 4ac$ olarak tanımlanırsa

1. $\Delta < 0$ iken bu konik bir elips belirtir ve bu durumda verilen denklemin sonlu sayıda çözümü vardır.
2. $\Delta = 0$ iken bir parabol belirtir.

   i) $2ae - bd = 0$ ise $(2ax + by + d)^2 = d^2 - 4af$

   ii) $2ae - bd \neq 0$ ise $X = 2ax + by + d$ ve $Y = (4ae - 2bd)y + 4af - d^2$

   olarak alınırsa her iki halde de verilen denklem $X^2 + Y = 0$ denklemine indirgenmiş olur.
3. $\Delta > 0$ iken bir hiperbol belirtir. Yukarıda belirtilen düzenlemeler yapıldıktan sonra verilen Diophantine denklemi

$$X^2 - dY^2 = n$$

Pell denklemine indirgenir.

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ Diophantine denklemi için $\Delta > 0$ olması durumu daha çok incelemeye değerdir. Çünkü bu denklemin indirgediği denklem bir Pell denklemidir. Bu durumda bu Pell denkleminin tamsayı çözümleri elde edilir ve daha sonra elde edilen tüm bu tamsayı çözümleri ilk başta ele alınan Diophantine denklemine taşınır.

1.2.13 Örnek 1. $2x^2 - 6xy + 3y^2 + 1 = 0$ Diophantine denklemi için $\Delta = 12 > 0$ olduğundan bu bir hiperbol belirtir. Verilen denklem

$$x^2 - 3(y - x)^2 = 1$$

olarak yazılabileceğinden

$$X = x \text{ ve } Y = y - x$$

değişken değişimi yapılarak Diophantine denklemi

$$X^2 - 3Y^2 = 1$$

Pell denklemine indirgenmiş olur. Bu denklemin tüm tamsayı çözümleri

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $2x^2 - 6xy + 3y^2 + 1 = 0$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (X_n, X_n + Y_n)$$

şeklindedir.

2. $x^2 - 2y^2 - 6x + 8y = 0$ Diophantine denklemi için de $\Delta = 8 > 0$ dır ve bu denklem de

$$(x-3)^2 - 2(y-2)^2 = 1$$

olarak yazılabileceğinden

$$X = x - 3,\ Y = y - 2$$

değişken değişimi yapılarak Diophantine denklemi

$$X^2 - 2Y^2 = 1$$

Pell denklemine indirgenmiş olur. Benzer şekilde bu Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $x^2 - 2y^2 - 6x + 8y = 0$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (X_n + 3, Y_n + 2)$$

şeklindedir.

2. TAMSAYI DİZİLERİ

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmakta olup birinci bölümde ilk olarak asal sayıların gösterilmesi problemi ele alınacak ve daha sonra bu probleme bağlı olarak tanımlanan iki parametreli tamsayı dizisi ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar verilecektir. Daha sonra bu dizi yardımıyla tanımlanan Pell denklemlerinin tamsayı çözümleri ve bu tamsayı çözümleri arasındaki indirgeme bağıntıları verilecektir. İkinci alt bölümde ise Fibonacci ve Pell tamsayı dizileri ile ilişkili olan dört parametreli bir tamsayı dizisi ele alınacak ve bu dizi ile ilgili bazı cebirsel özellikler elde edilecektir.

2.1 İki Parametreli Tamsayı Dizisi

Bu alt bölümde iki parametreli bir tamsayı dizisi ele alınacak ve bu dizi ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar elde edilecektir. Esasında bu dizi, asal sayıların gösterilmesi problemine bağlı olarak tanımlanacaktır.

2.1.1 Teorem. Pozitif P ve Q tamsayıları için her bir $p \equiv 1 \pmod 4$ asal sayısı $P^2 - 4Q$ formunda yazılabilir (Tekcan ve ark. 2012).

İspat. $p \equiv 1 \pmod 4$ olsun. Bu takdirde $k \in \mathbb{Z}^+$ için $p = 1 + 4k$ olarak yazılabilir. Buna göre

$$p = P^2 - 4Q$$

denkleminin bir çözümü

$$(P, Q) = (2k + 1,\ k^2)$$

olduğundan her bir $p \equiv 1 \pmod 4$ asalı $P^2 - 4Q$ formunda yazılabilir.

Bu teoremde neden asal sayıların $P^2 - 4Q$ formunda yazılması probleminin ele alındığı düşünülebilir. Aşağıda da görüleceği üzere $P^2 - 4Q$ ifadesi, bu problemden hareketle tanımlanan iki parametreli tamsayı dizisinin karakteristik denkleminin diskriminantına eşit olacaktır.

$p \equiv 1(\bmod 4)$ asal sayısı için $(P,Q)=(2k+1,\ k^2)$ olup bu P ve Q tamsayılarına bağlı olarak iki parametreli $U_{k,n}$ tamsayı dizisi, $U_{k,0}=0$,$U_{k,1}=1$ ve $n\geq 2$ için

$$U_{k,n}=PU_{k,n-1}-QU_{k,n-2}=(2k+1)U_{k,n-1}-k^2U_{k,n-2}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde bu dizinin karakteristik denklemi $x^2-Px+Q=0$ (bu denklemin diskriminantı $\Delta=P^2-4Q=p$ dir) olup bu denklemin kökleri

$$\alpha_1=\frac{2k+1+\sqrt{p}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta_1=\frac{2k+1-\sqrt{p}}{2}$$

dır. Dolayısıyla bu dizi için Binet formülü

$$U_{k,n}=\frac{\alpha_1^n-\beta_1^n}{\alpha_1-\beta_1}$$

dir. Bu dizinin ilk $n-$terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n}U_{k,i}=\frac{U_{k,n+1}-k^2U_{k,n}-1}{2k-k^2}$$

olup dizi ile ilgili olarak aşağıdaki cebirsel bağıntılar verilebilir.

2.1.2 Teorem. $U_{k,n}$ tamsayı dizisinin terimleri arasında $n\geq 2$ tamsayısı için

$$U_{k,2n}=(2k^2+4k+1)U_{k,2n-2}-k^4U_{k,2n-4}$$
$$U_{k,2n+1}=(2k^2+4k+1)U_{k,2n-1}-k^4U_{k,2n-3}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı vardır (Tekcan ve ark. 2012).

İspat. $U_{k,2n}=(2k+1)U_{k,2n-1}-k^2U_{k,2n-2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
U_{k,2n}&=(2k+1)U_{k,2n-1}-k^2U_{k,2n-2}\\
&=(2k+1)[(2k+1)U_{k,2n-2}-k^2U_{k,2n-3}]-k^2U_{k,2n-2}\\
&=U_{k,2n\text{-}2}[(2k+1)^2-k^2]-k^2(2k+1)U_{k,2n-3}\\
&=U_{k,2n-2}[(2k+1)^2-k^2]-k^2(2k+1)[(2k+1)U_{k,2n-4}-k^2U_{k,2n-5}]\\
&=U_{k,2n-2}[(2k+1)^2-k^2]-k^2(2k+1)^2U_{k,2n-4}+k^4(2k+1)U_{k,2n-5}\\
&=U_{k,2n-2}[(2k+1)^2-2k^2]+k^2[(2k+1)U_{k,2n-3}-k^2U_{k,2n-4}]\\
&\quad -k^2(2k+1)^2U_{k,2n-4}+k^4(2k+1)U_{k,2n-5}\\
&=U_{k,2n-2}[(2k+1)^2-2k^2]-k^4U_{k,2n-4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer ifade de benzer şekilde gösterilebilir.

Dizinin genel terimi P, Q ve p sayılarının kuvvetlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

2.1.3 Teorem. $U_{k,n}$ dizisinin genel terimi $n \geq 1$ için

$$U_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} (2k+1)^{n-(2i+1)} (4k+1)^{i} & n \text{ çift iken} \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} (2k+1)^{n-(2i+1)} (4k+1)^{i} & n \text{ tek iken} \end{cases}$$

veya

$$U_{k,n} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-1-i}{i} (-1)^{i} (2k+1)^{n-(2i+1)} k^{2i} & n \text{ çift iken} \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1-i}{i} (-1)^{i} (2k+1)^{n-(2i+1)} k^{2i} & n \text{ tek iken} \end{cases}$$

dir (Tekcan ve ark. 2012).

İspat. Binet formülünden görülür.

$P = 2k+1$ ve $Q = k^2$ parametreleri için

$$M = \frac{P-2Q+\sqrt{p}}{2\sqrt{p}},\ N = P-Q-1,\ H = \frac{P+2+\sqrt{p}}{2\sqrt{p}},\ L = \frac{2Q-P+\sqrt{p}}{2Q\sqrt{p}},$$

$$K = \frac{PQ+4P+8Q-2+(3Q+2P)\sqrt{p}}{2\sqrt{p}}$$

eşitlikleri tanımlanırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

2.1.4 Teorem. $U_{k,n}$ tamsayı dizisi için

(i) $\sum_{i=1}^{n} U_{k,i} = \frac{1}{N}[M\alpha_1^n - \overline{M}\beta_1^n - 1]$ dir.

(ii) $n \geq 0$ için $U_{k,n} + U_{k,n+1} = H\alpha_1^n - \overline{H}\beta_1^n$ dır.

(iii) $n \geq 2$ için $U_{k,n+1} + U_{k,n-1} = K\alpha_1^{n-2} - \overline{K}\beta_1^{n-2}$ dir.

(iv) $n \geq 1$ için $U_{k,n} - U_{k,n-1} = L\alpha_1^n - \overline{L}\beta_1^n$ dir.

(Tekcan ve ark. 2012).

İspat. (i) $\alpha_1^{n+1} + \beta_1^{n+1} = (U_{k,n+1} - k^2U_{k,n}) + 2kU_{k,n+1} - k^2U_{k,n}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
U_{k,n+1} - k^2U_{k,n} &= \alpha_1^{n+1} + \beta_1^{n+1} - 2kU_{k,n+1} + k^2U_{k,n} \\
&= \alpha_1^{n+1} + \beta_1^{n+1} - 2k\left(\frac{\alpha_1^{n+1} - \beta_1^{n+1}}{\alpha_1 - \beta_1}\right) + k^2\left(\frac{\alpha_1^{n} - \beta_1^{n}}{\alpha_1 - \beta_1}\right) \\
&= \alpha_1^n\left(\alpha_1 - \frac{2k\alpha_1}{\sqrt{4k+1}} + \frac{k^2}{\sqrt{4k+1}}\right) + \beta_1^n\left(\beta_1 + \frac{2k\beta_1}{\sqrt{4k+1}} - \frac{k^2}{\sqrt{4k+1}}\right) \\
&= \alpha_1^n\left(\frac{2k+1-2k^2+\sqrt{4k+1}}{2\sqrt{4k+1}}\right) - \beta_1^n\left(\frac{2k+1-2k^2-\sqrt{4k+1}}{2\sqrt{4k+1}}\right) \\
&= \alpha_1^n\left(\frac{P-2Q+\sqrt{P}}{2\sqrt{P}}\right) - \beta_1^n\left(\frac{P-2Q-\sqrt{P}}{2\sqrt{P}}\right) \\
&= M\alpha_1^n - \overline{M}\beta_1^n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer yandan dizinin ilk $n-$terim toplamı dikkate alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n} U_{k,i} = \frac{1}{N}[M\alpha_1^n - \overline{M}\beta_1^n - 1]$$

olduğu görülür.

(ii) $U_{k,n+1} = (2k+1)U_{k,n} - k^2U_{k,n-1}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
U_{k,n+1} - (2k+1)U_{k,n} = -k^2U_{k,n-1} &\Leftrightarrow U_{k,n+1} - 2kU_{k,n} - 2U_{k,n} + U_{k,n} = -k^2U_{k,n-1} \\
&\Leftrightarrow U_{k,n+1} + U_{k,n} - (2k+2)U_{k,n} = -k^2U_{k,n-1} \\
&\Leftrightarrow U_{k,n+1} + U_{k,n} = (2k+2)U_{k,n} - k^2U_{k,n-1} \\
&\Leftrightarrow U_{k,n+1} + U_{k,n} = (2k+2)\left(\frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{\sqrt{p}}\right) - k^2\left(\frac{\alpha_1^{n-1} - \beta_1^{n-1}}{\sqrt{p}}\right) \\
&\Leftrightarrow U_{k,n+1} + U_{k,n} = \left(\frac{2k+3+\sqrt{p}}{2\sqrt{p}}\right)\alpha_1^n - \left(\frac{2k+3-\sqrt{p}}{2\sqrt{p}}\right)\beta_1^n \\
&\Leftrightarrow U_{k,n+1} + U_{k,n} = \left(\frac{P+2+\sqrt{p}}{2\sqrt{p}}\right)\alpha_1^n - \left(\frac{P+2-\sqrt{p}}{2\sqrt{p}}\right)\beta_1^n \\
&\Leftrightarrow U_{k,n+1} + U_{k,n} = H\alpha_1^n - \overline{H}\beta_1^n
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

$U_{k,n}$ tamsayı dizisi için

$$M(U_{k,n}) = \begin{bmatrix} 2k+1 & -k^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } W(U_{k,n}) = \begin{bmatrix} 2k+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlanırsa (*M* kompanion matrisidir)

$$\begin{bmatrix} U_{k,n} \\ U_{k,n-1} \end{bmatrix} = (M(U_{k,n}))^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } (M(U_{k,n}))^n = \begin{bmatrix} U_{k,n+1} & U_{k,n} \\ U_{k,n} & U_{k,n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu açıktır. Bu matrisler yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

2.1.5 Teorem. $U_{k,n}$ dizisi verilsin. Bu takdirde her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\begin{bmatrix} U_{k,n+1} & U_{k,n} \\ U_{k,n} & U_{k,n-1} \end{bmatrix} = (M(U_{k,n}))^{n-1} W(U_{k,n})$$

dir (Tekcan ve ark. 2012).

İspat. $n = 1$ için

$$\begin{bmatrix} U_{k,2} & U_{k,1} \\ U_{k,1} & U_{k,0} \end{bmatrix} = W(U_{k,n}) = \begin{bmatrix} U_{k,2} & U_{k,1} \\ U_{k,1} & U_{k,0} \end{bmatrix}$$

olup eşitlik doğrudur. Eşitliğin $n-1$ için doğru olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$\begin{bmatrix} U_{k,n+1} & U_{k,n} \\ U_{k,n} & U_{k,n-1} \end{bmatrix} = (M(U_{k,n}))^{n-1} W(U_{k,n}) = M(U_{k,n}) \begin{bmatrix} U_{k,n} & U_{k,n-1} \\ U_{k,n-1} & U_{k,n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2k+1)U_{k,n} - k^2 U_{k,n-1} & (2k+1)U_{k,n-1} - k^2 U_{k,n-2} \\ U_{k,n} & U_{k,n-1} \end{bmatrix}$$

olduğundan eşitlik her *n* için doğrudur.

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir.

2.1.6 Sonuç. $U_{k,n}$ tamsayı dizisi verilsin. Bu takdirde

(i) $n \geq 1$ için $U_{k,n-1} U_{k,n+1} - U_{k,n}^2 = (k^2)^n$ dir.

(ii) $n \geq 0$ için $U_{k,n+1}^2 - (2k+1) U_{k,n+1} U_{k,n} + k^2 U_{k,n}^2 = -(k^2)^{n+1}$ dir.

(Tekcan ve ark. 2012).

Şimdi $p \equiv 1(\bmod 4)$ asal sayısı için elde edilen P ve Q tamsayılarına bağlı olarak tanımlanan

$$x^2 - Py^2 = Q$$

Pell denklemi ele alınabilir. Ancak bu Pell denklemi iki halde ele alınmak zorundadır. Çünkü $p = 5$ için $k = 1$ olduğundan $x^2 - 3y^2 = 1$ klasik Pell denklemi elde edilir. Diğer $p > 5$ asalları için ise $x^2 - Py^2 = Q$ Pell denklemi elde edilir.

1. Hal. $p = 5$ olsun. Bu takdirde $x^2 - 3y^2 = 1$ klasik Pell denklemi için $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$ olduğundan denklemin temel çözümü Sonuç 1.2.8 gereği $(x_1, y_1) = (2, 1)$ dir. Dolayısıyla Teorem 1.2.10 gereği denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (x_n, y_n) şeklindedir. Ayrıca Teorem 1.2.11 den denklemin çözümleri arasında $n \geq 2$ için

$$x_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1} \text{ ve } y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$$

şeklinde bir bağıntı ve $n \geq 4$ için

$$x_n = 3(x_{n-1} + x_{n-2}) - x_{n-3} \text{ ve } y_n = 3(y_{n-1} + y_{n-2}) - y_{n-3}$$

indirgeme bağıntısının olduğu açıktır. $n \geq 2$ için denklemin (x_n, y_n) çözümü Teorem 1.2.7 (i) gereği

$$\frac{x_n}{y_n} = [1; \underbrace{1, 2, \cdots, 1, 2}_{n-2 \text{ tane}}, 1, 3]$$

basit sürekli kesirli açılımı ile verilebilir.

2. Hal. $p > 5$ ise $x^2 - Py^2 = Q$ Pell denkleminin temel çözümü $(X_1, Y_1) = (k+1, 1)$ dir. $\sqrt{P}$ nin basit sürekli kesirli açılımı

$$\sqrt{P} = \begin{cases} [t; \overline{2t}] & p = 2t^2 + 1 \text{ ise} \\ [t; \overline{t, 2t}] & p = 2t^2 + 3 \text{ ise} \\ [t-1; \overline{1, t-2, 1, 2t-2}] & p = 2t^2 - 5 \text{ ise} \end{cases}$$

olup $n \geq 1$ için $x^2 - Py^2 = 1$ Pell denkleminin tamsayı çözümleri (x_n, y_n) olmak üzere, $x^2 - Py^2 = Q$ Pell denkleminin tamsayı çözümleri Not 1.2.12 gereği

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 & 2k+1 \\ 1 & k+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

için (X_n, Y_n) dir. $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 & 2k+1 \\ 1 & k+1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa her n için $u_n^2 - Pv_n^2 = Q^n$ dir.

Son olarak $p \geq 5$ asalı için $x^2 - Py^2 = Q$ Pell denkleminin tamsayı çözümleri sonlu $\mathbb{F}_p$ cisimlerinde ele alınabilir. Bu denklemin $\mathbb{F}_p$ deki hali

$$D_p : x^2 - Py^2 \equiv Q \pmod p$$

olup bu denklemin tamsayı çözümlerinin kümesi

$$D_p(\mathbb{F}_p) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p : x^2 - Py^2 \equiv Q \pmod p\}$$

ile gösterilirse aşağıdaki teorem verilebilir.

2.1.7 Teorem. $x^2 - Py^2 = Q$ Pell denklemi için

$$\# D_p(\mathbb{F}_p) = \begin{cases} p+1 & p \equiv 5 \pmod 8 \text{ ise} \\ p-1 & p \equiv 1 \pmod 8 \text{ ise} \end{cases}$$

dir (Tekcan ve ark. 2010).

İspat. $p \equiv 5 \pmod 8$ olsun. $y = 0$ ise

$$x^2 \equiv k^2 \pmod p \Leftrightarrow x = k \text{ ve } x = p - k$$

olduğundan denklemin $(k, 0)$ ve $(p-k, 0)$ gibi iki çözümü vardır. Benzer şekilde $x = 0$ ise $-(2k+1)y^2 \equiv k^2 \pmod p$ kongrüansının çözümü yoktur. $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{F}_p - \{0\}$ olmak üzere $S_p = \mathbb{F}_p^* - \{k, p-k\}$ kümesinde $\frac{x^2 - Q}{P}$ tam kare olacak şekilde $\frac{p-1}{2}$ tane eleman vardır. Buna göre $u \neq 0$ için $\frac{x^2 - Q}{P} = u^2$ denilirse

$$y^2 \equiv u^2 \pmod p \Leftrightarrow y = u \text{ ve } y = p - u$$

olur, yani denklemin (x,u) ve $(x, p-u)$ gibi iki çözümü vardır. S_p deki her bir eleman için denklemin bu şekilde iki çözümü olduğundan denklemin toplam $2(\frac{p-1}{2}) = p-1$ tane çözümü vardır. Denklemin $(k,0)$ ve $(p-k,0)$ gibi iki tane daha çözümü olduğundan toplam $p-1+2 = p+1$ tane çözümü vardır. Benzer şekilde $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 8)$ için denklemin $p-1$ tane çözümü olduğu da gösterilebilir.

2.2 Dört Parametreli Tamsayı Dizisi

Bu alt bölümde Fibonacci ve Pell tamsayı dizileri ile ilişkili olan dört parametreli bir T_n tamsayı dizisi ele alınacak ve bu dizi ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar elde edilecektir. Üstelik dizinin karakteristik denklemi ve dizinin terimleri ile Fibonacci ve Pell dizisi arasındaki ilişki ortaya çıkarılacaktır. Esasında dört parametreli tamsayı dizisi, bir önceki alt bölümde ele alınan iki parametreli tamsayı dizisinin genel bir halidir.

Buna göre P, Q, R, S tamsayı olmak üzere dört parametreli bir tamsayı dizisi, başlangıç değerleri K_0, K_1, K_2, K_3 olan ve genel terimi, $n \geq 4$ için

$$K_n = K_n(P,Q,R,S) = PK_{n-1} - QK_{n-2} - RK_{n-3} - SK_{n-4}$$

olarak verilen bir dizidir. Bu dizinin karakteristik denklemi

$$x^4 - Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$$

dir. Bu denklemin kökleri yardımıyla dizi için Binet formülü elde edilir.

Bu açıklamalardan sonra esas problem ele alınabilir. Dört parametreli tamsayı dizisi başlangıç değerleri $T_0 = 0, T_1 = 0, T_2 = -3, T_3 = 12$ ve genel terimi, $n \geq 4$ için

$$T_n = -5T_{n-1} - 5T_{n-2} + 2T_{n-3} + 2T_{n-4}$$

olarak tanımlansın. Bu kısımda böyle bir T_n dizisi seçmemizin nedeni, dizinin karakteristik denkleminin kökleri ve dizinin terimleri ile Fibonacci ve Pell tamsayı dizilerinin terimleri arasında bir bağıntının olmasıdır.

Bu takdirde dizinin karakteristik denklemi

$$x^4+5x^3+5x^2-2x-2=0$$

olup bu denklemin kökleri

$$\gamma_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \gamma_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \gamma_3=-2+\sqrt{2}\ \text{ ve } \gamma_4=-2-\sqrt{2} \tag{2.5}$$

dir. Buna göre dizi ile ilgili aşağıdaki teoremler verilebilir.

2.2.1. Teorem. T_n dizisinin üreteç fonksiyonu

$$T(x)=\frac{-3x^3-3x^2}{-2x^4-2x^3+5x^2+5x+1}$$

dir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. Dizinin karakteristik denklemi $x^4+5x^3+5x^2-2x-2=0$ olduğundan

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}T_nx^n=T_0+T_1x+T_2x^2+\cdots+T_nx^n+\cdots$$

serisi için

$$\begin{aligned}(1+5x+5x^2-2x^3-2x^4)T(x)=T_0&+(T_1+5T_0)x+(T_2+5T_1+5T_0)x^2\\&+(T_3+5T_2+5T_1-2T_0)x^3\\&+(T_4+5T_3+5T_2-2T_1-2T_0)x^4\\&+\cdots+(T_n+5T_{n-1}+5T_{n-2}-2T_{n-3}-2T_{n-4})x^n+\cdots\end{aligned}$$

elde edilir. $T_0=0, T_1=0, T_2=-3, T_3=12$ ve $T_n=-5T_{n-1}-5T_{n-2}+2T_{n-3}+2T_{n-4}$ olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$(-2x^4-2x^3+5x^2+5x+1)T(x)=-3x^3-3x^2$$

haline gelir. Buradan dizinin üreteç fonksiyonu

$$T(x)=\frac{-3x^3-3x^2}{-2x^4-2x^3+5x^2+5x+1}$$

olarak elde edilir.

2.2.2 Teorem. T_n dizisinin Binet formülü $n\geq 0$ için

$$T_n=\left(\frac{\gamma_3^n-\gamma_4^n}{\gamma_3-\gamma_4}\right)-\left(\frac{\gamma_1^n-\gamma_2^n}{\gamma_1-\gamma_2}\right)$$

dir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. Dizinin karakteristik denklemi için

$$-2x^4-2x^3+5x^2+5x+1 \;=(2x^2+4x+1)(-x^2+x+1)$$

olduğundan dizinin üreteç fonksiyonu

$$T(x)=\frac{x}{2x^2+4x+1}-\frac{x}{-x^2+x+1} \tag{2.6}$$

olarak yazılabilir. Birinci bölümde U_n dizisinin üreteç fonksiyonu

$$U(x)(P,Q)=\frac{x}{1-Px+Qx^2}$$

olarak elde edilmişti. Burada sırasıyla, $P=-4,\ Q=2$ ve $P=-1,\ Q=-1$ olarak alınırsa

$$U(x)(-4,2)=\frac{x}{1+4x+2x^2} \text{ ve } U(x)(-1,-1)=\frac{x}{1+x-x^2}$$

olur. Üstelik P ve Q nun bu değerleri için U_n dizisinin Binet formülleri sırasıyla

$$U_n(-4,2)=\frac{\gamma_3^n-\gamma_4^n}{\gamma_3-\gamma_4} \text{ ve } U_n(-1,-1)=\frac{\gamma_1^n-\gamma_2^n}{\gamma_1-\gamma_2}$$

dir. Dolayısıyla (2.6) eşitliği $T(x)=U(-4,2)(x)-U(-1,-1)(x)$ olarak yazılabileceğinden

$$T_n=\left(\frac{\gamma_3^n-\gamma_4^n}{\gamma_3-\gamma_4}\right)-\left(\frac{\gamma_1^n-\gamma_2^n}{\gamma_1-\gamma_2}\right)$$

olur.

2.2.3 Teorem. T_n dizisinin ilk $n-$ terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n}T_i=\frac{6T_n+T_{n-1}-4T_{n-2}-2T_{n-3}-6}{7}$$

dir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. Dizi için $5T_{n-1}+5T_{n-2}=2T_{n-3}+2T_{n-4}-T_n$ olup bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
5T_3+5T_2&=2T_1+2T_0-T_4\\
5T_4+5T_3&=2T_2+2T_1-T_5\\
&\cdots\\
5T_{n-2}+5T_{n-3}&=2T_{n-4}+2T_{n-5}-T_{n-1}\\
5T_{n-1}+5T_{n-2}&=2T_{n-3}+2T_{n-4}-T_n
\end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. (2.7) de verilen denklemler taraf tarafa toplanırsa

$$5T_2 + 5T_{n-1} + 10(T_3 + T_4 + \cdots + T_{n-2}) = -(T_4 + T_5 + \cdots + T_{n-1} + T_n)$$
$$+ 4(T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-5} + T_{n-4}) + 2T_{n-3} + 2T_0$$

olup buradan

$$T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1} + T_n = 2T_{n-3} + 2T_0 - 5T_2 - 5T_{n-1}$$
$$+ T_1 + T_2 + T_3 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \cdots + T_{n-5} + T_{n-4}$$
$$- 10(T_3 + T_4 + \cdots + T_{n-4}) - 10(T_{n-3} + T_{n-2})$$

ve böylece

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{6T_n + T_{n-1} - 4T_{n-2} - 2T_{n-3} - 6}{7}$$

olur.

2.2.4 Teorem. T_n dizisinin tek ve çift terimleri toplamı

(i) n çift ise

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} T_{2i} = \frac{-4T_n - 17T_{n-1} - 2T_{n-2} + 6T_{n-3} - 3}{7}$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} T_{2i+1} = \frac{-32T_n - 17T_{n-1} + 12T_{n-2} + 6T_{n-3} - 3}{7}$$

(ii) n tek ise

$$\sum_{i=0}^{\frac{n+1}{2}} T_{2i} = \frac{-32T_n - 17T_{n-1} + 12T_{n-2} + 6T_{n-3} - 3}{7}$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} T_{2i+1} = \frac{-4T_n - 17T_{n-1} - 2T_{n-2} + 6T_{n-3} - 3}{7}$$

dir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde dizinin genel terimi kullanılarak gösterilebilir.

2.2.5 Sonuç. T_n dizisi için n çift iken

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} T_{2i+1} - \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} T_{2i} = -4T_n + 2T_{n-2}$$

ve n tek iken

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} T_{2i+1} - \sum_{i=0}^{\frac{n+1}{2}} T_{2i} = 4T_n - 2T_{n-2}$$

dir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

2.2.6 Teorem. T_n dizisinin terimleri arasında her $n \geq 4$ için

$$T_{2n} = 15T_{2n-2} - 41T_{2n-4} + 24T_{2n-6} - 4T_{2n-8}$$

$$T_{2n+1} = 15T_{2n-1} - 41T_{2n-3} + 24T_{2n-5} - 4T_{2n-7}$$

şeklinde indirgeme bağıntısı vardır (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. $T_{2n} = -5T_{2n-1} - 5T_{2n-2} + 2T_{2n-3} + 2T_{2n-4}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
T_{2n} &= -5T_{2n-1} - 5T_{2n-2} + 2T_{2n-3} + 2T_{2n-4} \\
&= -5(-5T_{2n-2} - 5T_{2n-3} + 2T_{2n-4} + 2T_{2n-5}) - 5(-5T_{2n-3} - 5T_{2n-4} + 2T_{2n-5} + 2T_{2n-6}) \\
&\quad + 2(-5T_{2n-4} - 5T_{2n-5} + 2T_{2n-6} + 2T_{2n-7}) + 2T_{2n-4} \\
&= 25T_{2n-2} + 25T_{2n-3} - 10T_{2n-4} - 10T_{2n-5} + 25T_{2n-3} + 25T_{2n-4} - 10T_{2n-5} \\
&\quad - 10T_{2n-6} - 8T_{2n-4} - 10T_{2n-5} + 4T_{2n-6} + 4T_{2n-7} \\
&= 25T_{2n-2} - 10(-5T_{2n-3} - 5T_{2n-4} + 2T_{2n-5} + 2T_{2n-6}) - 10T_{2n-5} \\
&\quad - 43T_{2n-4} + 14T_{2n-6} + 4T_{2n-7} - 10T_{2n-6} + 10T_{2n-6} - 4T_{2n-8} \\
&= 15T_{2n-2} - 41T_{2n-4} + 24T_{2n-6} - 4T_{2n-8}
\end{aligned}$$

dır. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

2.2.7 Teorem. T_n dizisinin karakteristik denkleminin kökleri $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ olmak üzere bu kökler ile Fibonacci ve Pell sayıları arasındaki ilişkiler;

(i) $n \geq 3$ için $\gamma_1^n + \gamma_2^n = (-1)^n (2F_n + F_{n-3})$

(ii) $n \geq 0$ için $\gamma_1^n - \gamma_2^n = (-1)^{n+1} F_n \sqrt{5}$

(iii) $n \geq 1$ için

$$\gamma_3^n + \gamma_4^n = \begin{cases} 2^{\frac{n+2}{2}} (P_n + P_{n-1}) & n \text{ çift iken} \\ -2^{\frac{n+3}{2}} P_n & n \text{ tek iken} \end{cases}$$

ve

$$\gamma_3^n - \gamma_4^n = \begin{cases} -2^{\frac{n+2}{2}} P_n & n \text{ çift iken} \\ -2^{\frac{n+1}{2}} (P_n + P_{n-1}) & n \text{ tek iken} \end{cases}$$

biçimindedir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. **(i)** Fibonacci dizisinin karakteristik denkleminin kökleri $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğundan

$$-a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \gamma_2 \text{ ve } -b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \gamma_1$$

dir. Diğer yandan Fibonacci dizisinin Binet formülü $F_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}$ olduğundan

$$2F_n = \frac{2(a^n - b^n)}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}[(-\gamma_2)^n - (-\gamma_1)^n] = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{5}}(\gamma_2^n - \gamma_1^n) \tag{2.8}$$

dır. Benzer şekilde

$$F_{n-3} = \frac{a^{n-3} - b^{n-3}}{\sqrt{5}} = (-1)^n \left(\frac{-2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \gamma_2^n + \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \gamma_1^n \right) \tag{2.9}$$

dir. (2.8) ve (2.9) eşitliklerinden

$$2F_n + F_{n-3} = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{5}}(\gamma_2^n - \gamma_1^n) + (-1)^n \left(\frac{-2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \gamma_2^n + \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \gamma_1^n \right)$$

ve böylece $(-1)^n (2F_n + F_{n-3}) = \gamma_1^n + \gamma_2^n$ elde edilir.

(ii) $-a = \gamma_2$ ve $-b = \gamma_1$ olduğu dikkate alınırsa

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}[(-\gamma_2)^n - (-\gamma_1)^n] = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}(\gamma_2^n - \gamma_1^n)$$

olduğundan $(-1)^{n+1} F_n \sqrt{5} = (-1)^{2n+1}(\gamma_2^n - \gamma_1^n) = \gamma_1^n - \gamma_2^n$ elde edilir.

(iii) Pell denkleminin karakteristik denkleminin kökleri $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ için

$$P_n + P_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}$$

dir. Buna göre n çift ise $\frac{\alpha^n + \beta^n}{2} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} 2^i$ olur. Böylece

$$2^{\frac{n+2}{2}}(P_n+P_{n-1})=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2i}2^{n+1-i} \tag{2.10}$$

elde edilir. Karakteristik denklemin $\gamma_3=-2+\sqrt{2}$ ve $\gamma_4=-2-\sqrt{2}$ kökleri için

$$\gamma_3^n+\gamma_4^n=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2i}2^{n+1-i} \tag{2.11}$$

olduğundan (2.10) ve (2.11) eşitliklerinden

$$\gamma_3^n+\gamma_4^n=2^{\frac{n+2}{2}}(P_n+P_{n-1})$$

elde edilir. n nin tek olması hali de benzer şekilde gösterilir.

Yukarıdaki teoreme benzer şekilde, T_n dizisinin terimleri ile Fibonacci ve Pell dizilerinin terimleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

2.2.8 Teorem. T_n dizisi verilmiş olsun. Bu takdirde $n \geq 3$ için

(i) n çift ise $2^{\frac{n+2}{2}}(P_n+P_{n-1})-2F_n-F_{n-3}=-3T_n+2T_{n-2}$ dir.

(ii) n tek ise $-2^{\frac{n+3}{2}}P_n+2F_n+F_{n-3}=-3T_n+2T_{n-2}$ dir.

(Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. Yukarıdaki teoremin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

2.2.9 Teorem. $n \geq 5$ için T_n dizisinin ardışık herhangi iki teriminin toplamı

$$T_n+T_{n-1}=-3T_{n-1}+7T_{n-3}-2T_{n-5}$$

dir. (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. $T_n=-5T_{n-1}-5T_{n-2}+2T_{n-3}+2T_{n-4}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
T_n &= -5T_{n-1}-5T_{n-2}+2T_{n-3}+2T_{n-4} \\
&= -4T_{n-1}-T_{n-1}-5T_{n-2}+2T_{n-3}+2T_{n-4} \\
&= -4T_{n-1}-(-5T_{n-2}-5T_{n-3}+2T_{n-4}+2T_{n-5})-5T_{n-2}+2T_{n-3}+2T_{n-4} \\
&= -4T_{n-1}+7T_{n-3}-2T_{n-5} \\
&= -T_{n-1}-3T_{n-1}+7T_{n-3}-2T_{n-5}
\end{aligned}$$

dir. Böylece $T_n+T_{n-1}=-3T_{n-1}+7T_{n-3}-2T_{n-5}$ bulunur.

2.2.10 Uyarı. T_n dizisinde ardışık herhangi iki terimin toplamı daima 3 ile bölünür, yani

$$\frac{T_n + T_{n-1}}{3} \in \mathbb{Z}$$

dir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

2.2.11 Tanım. *N* bir tamsayı olmak üzere *N* nin rankı $\rho(N)$ ile gösterilir ve

$$\rho(N) = \begin{cases} p & p \mid N \text{ en küçük asal} \\ \infty & N \text{ asal} \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Ribenboim 2000).

Buna göre T_n dizisinin terimlerinin rankı aşağıdaki teoremde belirtildiği gibi 2 ve 3 dür.

2.2.12 Teorem. $n \geq 2$ olmak üzere T_n dizisinin terimlerinin rankı

$$\rho(T_n) = \begin{cases} 2 & n \equiv 0 (\text{mod } 3) \text{ ise} \\ 3 & n \equiv 1,2 (\text{mod } 3) \text{ ise} \end{cases}$$

dir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, yani $k \geq 1$ tamsayısı için $n = 3k$ olsun. $k = 1$ ise $T_3 = 12 = 2^2 \cdot 3$ olduğundan $\rho(T_3) = 2$ dir. $\rho(T_{3k-3}) = 2$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde $u \geq 1$ ve $v > 0$ tamsayıları için $T_{3k-3} = 2^u \cdot v$ dır. O halde

$$\begin{aligned} T_{3k} &= -5T_{3k-1} - 5T_{3k-2} + 2T_{3k-3} + 2T_{3k-4} \\ &= 20T_{3k-2} + 27T_{3k-3} - 8T_{3k-4} - 10T_{3k-5} \\ &= 2[10T_{3k-2} + 27 \cdot 2^{u-1} \cdot v - 4T_{3k-4} - 5T_{3k-5}] \end{aligned}$$

dir, yani $\rho(T_n) = 2$ dir.

$n \equiv 2(\text{mod } 3)$, yani $k \geq 0$ tamsayısı için $n = 3k + 2$ olsun. $k = 0$ ise $T_2 = -3 = 3 \cdot (-1)$ olduğundan $\rho(T_2) = 3$ olduğu açıktır. $\rho(T_{3k-1}) = 3$ olduğu kabul edilsin, yani $x \geq 1$ ve $y > 0$ tamsayıları için $T_{3k-1} = 3^x \cdot y$ dır. O halde

$$\begin{aligned} T_{3k+1} &= -5T_{3k+1} - 5T_{3k} + 2T_{3k-1} + 2T_{3k-2} \\ &= 20T_{3k} + 27T_{3k-1} - 8T_{3k-2} - 10T_{3k-3} \\ &= -73T_{3k-1} - 108T_{3k-2} + 30T_{3k-3} + 40T_{3k-4} \\ &= -73T_{3k-1} - 108T_{3k-2} + 30T_{3k-3} + 40[-5(T_{3k-5} + T_{3k-6}) + 2(T_{3k-7} + T_{3k-8})] \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan $\frac{T_n + T_{n-1}}{3} \in \mathbb{Z}$ olduğundan $K \neq 0,\ L \neq 0$ tamsayıları için

$$T_{3k-5} + T_{3k-6} = 3K \text{ ve } T_{3k-7} + T_{3k-8} = 3L$$

dir. O halde yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} T_{3k+1} &= -5T_{3k+1} - 5T_{3k} + 2T_{3k-1} + 2T_{3k-2} \\ &= 20T_{3k} + 27T_{3k-1} - 8T_{3k-2} - 10T_{3k-3} \\ &= -73T_{3k-1} - 108T_{3k-2} + 30T_{3k-3} + 40T_{3k-4} \\ &= -73T_{3k-1} - 108T_{3k-2} + 30T_{3k-3} + 40[-5(T_{3k-5} + T_{3k-6}) + 2(T_{3k-7} + T_{3k-8})] \\ &= -73T_{3k-1} - 108T_{3k-2} + 30T_{3k-3} - 200(3K) + 80(3L) \\ &= 3[-73 \cdot 3^{x-1} \cdot y - 36T_{3k-2} + 10T_{3k-3} - 200K + 80L] \end{aligned}$$

haline gelir, yani $\rho(T_n) = 3$ dür. $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ hali de benzer şekilde yapılabilir.

T_n dizisine dikkat edilirse her $n \geq 2$ için her bir terimi 3 ile tam bölünebilir, yani $\frac{T_n}{3}$ bir tamsayıdır. Buna göre, $W_0 = 0,\ W_1 = 0$ olmak üzere

$$W_n = \frac{T_n}{3} \tag{2.12}$$

dizisi tanımlansın. Bu takdirde T_n dizisi için

$$M = M(T_n) = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = B(T_n) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$A = A(T_n) = \begin{bmatrix} -45 & 12 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan matrisler için, M nin kompanion matrisi ve A nın

$$A = [T_4 \quad T_3 \quad T_2 \quad T_1]$$

olduğu açıktır. Böylece M kompanion matrisi ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

2.2.13 Teorem. T_n dizisi için, $W_n = \frac{T_n}{3}$ olmak üzere

(i) $n \geq 5$ tek ise

$$M^n = \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^{n+2}(-1)^i W_i & -5\left(\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}W_i\right)-2W_n & -2W_{n+1} & -2\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i W_i \\ \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}W_i & -5\left(\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}W_i\right)-2W_{n-1} & -2W_{n} & -2\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1} W_i \\ \sum_{i=2}^{n}(-1)^i W_i & -5\left(\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i+1}W_i\right)-2W_{n-2} & -2W_{n-1} & -2\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i W_i \\ \sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i+1}W_i & -5\left(\sum_{i=2}^{n-2}(-1)^{i}W_i\right)-2W_{n-3} & -2W_{n-2} & -2\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+1} W_i \end{bmatrix}$$

dir.

(ii) $n \geq 4$ çift ise

$$M^n = \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^{n+2}(-1)^{i+1} W_i & -5\left(\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i}W_i\right)-2W_n & -2W_{n+1} & -2\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+1} W_i \\ \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i}W_i & -5\left(\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}W_i\right)-2W_{n-1} & -2W_{n} & -2\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i} W_i \\ \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1} W_i & -5\left(\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i}W_i\right)-2W_{n-2} & -2W_{n-1} & -2\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1} W_i \\ \sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i}W_i & -5\left(\sum_{i=2}^{n-2}(-1)^{i-1}W_i\right)-2W_{n-3} & -2W_{n-2} & -2\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i} W_i \end{bmatrix}$$

dir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. (i) n tek olsun. $n = 5$ için ifadenin gerçeklendiği açıktır. $n > 5$ olmak üzere eşitliğin $n-2$ için doğru olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$\begin{bmatrix} 20 & 27 & -8 & -10 \\ -5 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times M^{n-2} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} M_{21} &= -5\left(\sum_{i=2}^{n}(-1)^i W_i\right) - 5\left(\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i+1}W_i\right) + 2\left(\sum_{i=2}^{n-2}(-1)^i W_i\right) + 2\left(\sum_{i=2}^{n-3}(-1)^{i+1}W_i\right) \\ &= -5(W_2 - W_3 - \cdots + W_{n-1} - W_n) - 5(-W_2 + W_3 - \cdots + W_{n-2} - W_{n-1}) \\ &\quad + 2(W_2 - W_3 - \cdots + W_{n-3} - W_{n-2}) + 2(-W_2 + W_3 + \cdots + W_{n-4} - W_{n-3}) \\ &= -2W_{n-2} + 5W_n - W_2 - W_3 + 5W_2 - 2W_0 - 2W_1 + 2W_1 \\ &\quad + 2W_2 - 2W_2 + 5W_{n-2} - 5W_{n-2} - 5W_{n-1} + 5W_{n-1} \end{aligned} \qquad (2.13)$$

olur. Diğer yandan $W_n = \frac{T_n}{3}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
-W_2 &= -W_2 \\
W_3 &= W_3 \\
-W_4 &= 5W_3 + 5W_2 - 2W_1 - 2W_0 \\
&\cdots \\
-W_{n+1} &= 5W_n + 5W_{n-1} - 2W_{n-2} - 2W_{n-3}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

dır. Eğer (2.14) deki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}W_i &= -W_2 + W_3 - \cdots + W_n - W_{n+1} \\
&= -2W_{n-2} + 5W_n - W_2 + W_3 + 5W_2 - 2W_0 - 2W_1 + 2W_1 \\
&\quad + 2W_2 - 2W_2 + 5W_{n-2} - 5W_{n-2} - 5W_{n-1} + 5W_{n-1}
\end{aligned}$$

ve böylece $M_{21} = \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}W_i$ olarak bulunur. Bu matrisin diğer terimleri de benzer şekilde elde edilebilir. Dolayısıyla

$$\begin{bmatrix} 20 & 27 & -8 & -10 \\ -5 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times M^{n-2} = M^n$$

yani, önerme $n > 5$ tek için doğrudur. Benzer şekilde ispat $n \geq 4$ çift sayısı içinde yapılabilir.

2.2.14 Teorem. T_n dizisinde $n \geq 4$ için $T_n = A(M^{n-4})^t B$ dir (Tekcan, Özkoç ve ark. 2013a).

İspat. Tümevarımla yapılabilir.

2.2.15 Örnek. T_n dizisi için $n = 12$ olsun. $T_{12} = -886896$ dir. Diğer yandan

$$M^8 = \begin{bmatrix} 35824 & 56723 & -14836 & -20954 \\ -10477 & -16561 & 4338 & 6118 \\ 3059 & 4818 & -1266 & -1780 \\ -890 & -1391 & 368 & 514 \end{bmatrix}$$

olduğundan $A(M^8)^t B = -886896 = T_{12}$ dir.

3. OBLONG SAYILARI VE KUADRATİK FORMLAR

Bu bölümde oblong ve cooblong sayıları ve bu sayıların bazı cebirsel özellikleri ele alınacak ve daha sonra bu sayılar yardımıyla tanımlanan Pell formunun indirgenmişinin devri ve has devri ile bu Pell formun has otomorfizmleri kümesi ele alınacaktır. Ayrıca bu bölümde bu Pell formu ile tanımlanan Pell denkleminin tamsayı çözümleri ve bu çözümler arasında indirgeme bağıntıları ele alınacaktır. Elde edilen tüm sonuçların oblong ve dolayısıyla cooblong sayılarına bağlı olduğu gösterilecektir.

3.1 Oblong ve Cooblong Sayıları

Bu alt bölümde oblong ve cooblong sayıları ele alınacak ve bu sayılar ile ilgili bazı cebirsel özellikler verilecektir. $k \geq 0$ tamsayı olmak üzere oblong sayı dizisi

$$O_k = k(k+1)$$

şeklindeki sayılardan oluşan tamsayı dizisidir (A002378 OEIS dizisi). Dizinin ilk birkaç terimi $0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, \cdots$ dir. Ardışık iki oblong sayısının çarpımı da bir oblong sayısıdır. Gerçekten de O_{k-1} ve O_k oblong sayılarının çarpımı

$$O_{k-1}O_k = [(k-1)k][k(k+1)] = (k^2-1)k^2 = O_{k^2-1}$$

ve bu eşitlikten O_{k^2-1} sayısının da bir oblong sayısı olduğu görülür. Ayrıca bir oblong sayısının yarısı, $\frac{O_k}{2} = T_k$ üçgensel bir sayıdır (A000217 OEIS dizisi).

Oblong sayı dizisinin tanımına dikkat edilirse $k \geq 1$ için $O_k = O_{k-1} + 2k$ dır. Dolayısıyla

$$O_{k+1} = O_k + 2(k+1)$$
$$O_k = O_{k-1} + 2k$$

olduğundan bu iki eşitlik birbirinden çıkartılırsa

$$O_{k+1} - O_k = O_k - O_{k-1} + 2(k+1) - 2k$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$O_{k+1} = 2O_k - O_{k-1} + 2$$
$$O_k = 2O_{k-1} - O_{k-2} + 2$$

olup yine bu iki eşitlik birbirinden çıkartılırsa

$$O_{k+1} - O_k = 2O_k - O_{k-1} + 2 - 2O_{k-1} + O_{k-2} - 2$$

elde edilir. Bu son eşitlikten $O_{k+1} = 3O_k - 3O_{k-1} + O_{k-2}$ olup

$$O_k = 3O_{k-1} - 3O_{k-2} + O_{k-3}$$

dir. O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

3.1.1 Teorem. Oblong sayılarının indirgeme bağıntısı $O_0 = 0,\ O_1 = 2, O_2 = 6$ olmak üzere $k \geq 3$ için

$$O_k = 3O_{k-1} - 3O_{k-2} + O_{k-3}$$

dir (Gözeri ve ark 2013).

3.1.2 Teorem. Oblong sayılarının üreteç fonksiyonu

$$O(x) = \frac{2x}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

dir (Gözeri ve ark 2013).

İspat. $O_k = 3O_{k-1} - 3O_{k-2} + O_{k-3}$ olduğundan oblong sayılarının karakteristik denklemi $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ dir. Dolayısıyla

$$O(x) = \sum_{n=0}^{\infty} O_n x^n = O_0 + O_1 x + O_2 x^2 + \cdots + O_n x^n + \cdots$$

serisi için

$$\begin{aligned}(1 - 3x + 3x^2 - x^3)O(x) = O_0 &+ (O_1 - 3O_0)x + (O_2 - 3O_1 + 3O_0)x^2 \\ &+ (O_3 - 3O_2 + 3O_1 - O_0)x^3 + \cdots \\ &+ (O_n - 3O_{n-1} + 3O_{n-2} - O_{n-3})x^n + \cdots\end{aligned}$$

dir. $O_0 = 0, O_1 = 2, O_2 = 6$ ve $O_k = 3O_{k-1} - 3O_{k-2} + O_{k-3}$ olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$(1 - 3x + 3x^2 - x^3)O(x) = 2x$$

haline gelir. Buradan $O(x) = \dfrac{2x}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$ elde edilir.

Oblong sayılarının genel teriminin $O_k = k(k+1)$ olduğu dikkate alınırsa bu sayıların ilk $k-$terim toplamının

$$\sum_{i=1}^{k} O_i = \sum_{i=1}^{k} (i^2 + i) = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{3}$$

şeklinde olduğu görülür. Üstelik bu toplam oblong sayılarına bağlı olarak

$$\sum_{i=1}^{k} O_i = \frac{O_k^2 - O_{k^2-1} + 4O_k}{6}$$

şeklinde de verilebilir. Teorem 3.1.12 den oblong sayıları arasındaki indirgeme bağıntısı aşağıdaki gibi verilebilir.

3.1.3 Teorem. Oblong sayıları, her $k \geq 3$ tamsayısı için

$$O_{2k} = 3O_{2k-2} - 3O_{2k-4} + O_{2k-6} \ \text{ ve } \ O_{2k+1} = 3O_{2k-1} - 3O_{2k-3} + O_{2k-5}$$

indirgeme bağıntılarını gerçekler (Gözeri ve ark 2013).

İspat. $Q_{2k} = 3O_{2k-1} - 3O_{2k-2} + O_{2k-3}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
O_{2k} &= 3O_{2k-1} - 3O_{2k-2} + O_{2k-3} \\
&= 3(3O_{2k-2} - 3Q_{2k-3} + O_{2k-4}) - 3O_{2k-2} + O_{2k-3} \\
&= 9O_{2k-2} - 9O_{2k-3} + 3O_{2k-4} - 3Q_{2k-2} + O_{2k-3} \\
&= 6O_{2k-2} - 8(3O_{2k-4} - 3O_{2k-5} + O_{2k-6}) + 3O_{2k-4} \\
&= 6O_{2k-2} - 21O_{2k-4} + 24O_{2k-5} - 8O_{2k-6} \\
&= 6O_{2k-2} - 3O_{2k-2} + 3O_{2k-2} - 21O_{2k-4} + 24O_{2k-5} - 8O_{2k-6} \\
&= 3O_{2k-2} + 3(3O_{2k-3} - 3O_{2k-4} + O_{2k-5}) - 21O_{2k-4} + 24O_{2k-5} - 8O_{2k-6} \\
&= 3O_{2k-2} + 9(3O_{2k-4} - 3O_{2k-5} + O_{2k-6}) - 9O_{2k-4} + 3O_{2k-5} - 21O_{2k-4} \\
&\quad + 24O_{2k-5} - 8O_{2k-6} \\
&= 3O_{2k-2} + 27O_{2k-4} - 27O_{2k-5} + 9O_{2k-6} - 30O_{2k-4} + 27O_{2k-5} - 8O_{2k-6} \\
&= 3O_{2k-2} - 3O_{2k-4} + O_{2k-6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

Oblong sayılarının genel teriminin ve ardışık iki teriminin oranlarının sürekli kesirli açılımları aşağıdaki gibidir.

3.1.4 Teorem. O_k oblong sayısı için $\sqrt{O_k}$ nın basit sürekli kesirli devirli açılımı

$$\sqrt{O_k} = \begin{cases} [1;\overline{2}] & k = 1 \text{ iken} \\ [k;\overline{2,2k}] & k > 1 \text{ iken} \end{cases}$$

ve $\dfrac{O_{k+1}}{O_k}$ nin basit sürekli kesirli açılımı

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=\begin{cases}\left[1;\dfrac{k-1}{2},2\right] & k\geq 3 \text{ tek iken}\\ \left[1;\dfrac{k}{2}\right] & k\geq 4 \text{ çift iken}\end{cases}$$

dir (Gözeri ve ark 2013).

İspat. $k=1$ için $\sqrt{2}=[1;\overline{2}]$ olduğu açıktır. $O_k=k^2+k$ olduğundan $\sqrt{O_k}=[k;\overline{2,2k}]$ dır.

(ii) k tek yani, $t\in\mathbb{Z}^+$ için $k=2t+1$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=\frac{k+2}{k}=\frac{2t+3}{2t+1}=1+\frac{1}{t+\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=[1;t,2]=[1;\frac{k-1}{2},2]$$

dir. Benzer şekilde k çift yani $k=2t$ için

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=\frac{k+2}{k}=\frac{t+1}{t}=1+\frac{1}{t}$$

olduğundan

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=[1;t]=[1;\frac{k}{2}]$$

dir.

Şimdi cooblong sayıları ele alınabilir. O_k bir oblong sayısı olmak üzere $O_k=k(k+1)$ eşitliğinden

$$k=\frac{-1+\sqrt{1+4O_k}}{2}$$

olur. Dolayısıyla k. cooblong sayısı

$$o_k=\sqrt{1+4O_k}$$

olarak tanımlanırsa $O_k=k^2+k$ olduğundan $o_k=2k+1$ olduğu görülür. Bu sayı dizisinin ilk $k-$terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{k} o_i = k^2 + 2k$$

dir ve bu toplam cooblong sayılarına bağlı olarak

$$\sum_{i=1}^{k} o_i = \frac{o_k^2 + 2o_k - 3}{4}$$

şeklinde de verilebilir. Üstelik bu sayılar ile ilgili olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir (ispatları bir önceki teoremlere benzer şekilde yapılabilir).

3.1.5 Teorem. Cooblong sayıları başlangıç değerleri $o_0 = 1,\ o_1 = 3,\ o_2 = 5$ ve $k \geq 3$ tamsayısı için

$$o_k = 3o_{k-1} - 3o_{k-2} + o_{k-3}$$

genel terimi ile verilen bir tamsayı dizisidir (Gözeri ve ark 2013).

3.1.6 Teorem. Cooblong sayılarının üreteç fonksiyonu

$$o(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

dür (Gözeri ve ark 2013).

3.1.7 Teorem. $k \geq 3$ tamsayısı için cooblong sayıları

$$o_{2k} = 3o_{2k-2} - 3o_{2k-4} + o_{2k-6} \text{ ve } o_{2k+1} = 3o_{2k-1} - 3o_{2k-3} + o_{2k-5}$$

indirgeme bağıntılarını gerçekler (Gözeri ve ark 2013).

3.1.8 Teorem. Cooblong sayılarının ardışık iki teriminin basit sürekli kesirli açılımı

$$\frac{o_{k+1}}{o_k} = [1; k, 2]$$

dir (Gözeri ve ark 2013).

3.2 Oblong Sayıları ve Kuadratik Formlar

Bu alt bölümde, bu bölümün bir önceki kısmında ele alınan oblong sayılarına bağlı olarak tanımlanan ikinci dereceden bir form olan Pell formu ve Pell denklemi ele alınacaktır. Bu Pell formun indirgenmişinin devri ve has devri ile Pell formun has otomorfizmlerinin kümesi elde edilecektir. Ayrıca Pell denkleminin tamsayı çözümleri ve bu çözümler arasında indirgeme bağıntıları verilecektir. Elde edilecek tüm sonuçların oblong ve dolayısıyla cooblong sayılarına bağlı olduğu gösterilecektir.

Bunun için ilk olarak kuadratik formlar ile ilgili bazı temel kavramlar ve notasyonlar verilecektir.

3.2.1 Tanım. $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$aX^2 + bXY + cY^2$$

şeklindeki polinomlara kuadratik (ikinci dereceden) form denir ve bu form kısaca katsayılar yardımıyla $F = (a, b, c)$ ile gösterilir (Flath 1989).

Bu formun determinantı $\Delta(F)$ ile gösterilir ve $\Delta(F) = b^2 - 4ac$ olarak tanımlanır. Üstelik "F tam $\Leftrightarrow$ $a,b,c \in \mathbb{Z}$", "F pozitif tanımlı $\Leftrightarrow$ $\Delta(F) < 0,\ a,c > 0$" ve "F belirsiz (indefinite) formdur $\Leftrightarrow$ $\Delta(F) > 0$" dır.

3.2.2 Tanım. $\Delta \neq 0$ tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere $F_\Delta(x, y)$ Pell formu

$$F_\Delta(x,y) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{\Delta}{4}y^2 & \Delta \equiv 0 (\operatorname{mod} 4) \text{ ise} \\ x^2 + xy - \dfrac{1-\Delta}{4}y^2 & \Delta \equiv 1 (\operatorname{mod} 4) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Flath 1989).

Bu Pell form yardımıyla Pell denklemi $F_\Delta(x, y) = \pm 1$ olarak tanımlanır.

$$g = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix},\ r,s,t,u \in \mathbb{Z},\ ru - st = 1$$

şeklindeki matrislerin kümesi SL(2, $\mathbb{Z}$) olmak üzere, SL(2, $\mathbb{Z}$) matrislerin çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu matrise karşılık gelen $z \in \mathbb{C}$ için

$$z \to T(z) = \frac{rz + s}{tz + u},\ ru - st = 1$$

biçiminde tanımlı dönüşümlerin kümesi $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ de dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir gruptur. Şu halde bu iki grup arasında bir

$$\Phi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$$
$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \to \frac{rz+s}{tz+u}$$

grup homomorfizmi vardır. Bu homomorfizmin çekirdeği

$$\text{Çek}(\Phi) = \left\{ \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Phi\left(\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \right) = z \right\} = \{\pm I\}$$

dir. Buna göre birinci izomorfizm teoremi gereği $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ grubu ile $\Phi(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ grubu izomorftur. Φ homomorfizmi üzerine olduğundan

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm I\} \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$$

dir. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ grubu, modüler grup olarak isimlendirilir ve genellikle Γ ile gösterilir. $R(z) = -\bar{z}$, sanal eksene göre yansıma dönüşümü olmak üzere $\Gamma \cup R\Gamma$ kümesi de bir grup olup bu gruba genişletilmiş modüler grup denir ve $\bar{\Gamma}$ ile gösterilir, yani

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup R\Gamma$$

dır. Dolayısıyla yukarıda belirtilen açıklamalar neticesinde, $r,s,t,u \in \mathbb{Z}$ ve $ru - st = \pm 1$ olmak üzere $\dfrac{rz+s}{tz+u}$ dönüşümü (yani modüler veya genişletilmiş modüler grubun elemanları)

$$g = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$$

matrisi ile gösterilecektir.

Formların birçok önemli özelliği (denkliği, devirleri, has devirleri, indirgenmişi) modüler veya genişletilmiş modüler grup yardımıyla verilir. $F = (a,b,c)$ herhangi bir form ve $g = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \bar{\Gamma}$ dönüşümü için F nin g altındaki gF resmi

$$\begin{aligned} gF(X,Y) = {} & (ar^2 + brs + cs^2)X^2 + (2art + bru + bts + 2csu)XY \\ & + (at^2 + btu + cu^2)Y^2 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu tanıma göre gF de ikinci dereceden bir form olup F ile aynı determinantlı, yani $\Delta(F) = \Delta(gF)$ dir. Yukarıdaki tanıma göre

$$gF = F(rX + tY, sX + uY)$$

dir. gF nin bu şekildeki tanımı genişletilmiş modüler grubun formlar kümesi üzerinde bir grup etkisidir, yani her $g, h \in \overline{\Gamma}$ için

$$g(hF) = (gh)F \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F = F$$

dir.

F ve G herhangi iki form olsun. $gF = G$ olacak şekilde en az bir $g \in \overline{\Gamma}$ varsa bu iki forma denktir denir. $\det(g) = 1$ ise formlara has denk, $\det(g) = -1$ ise has olmayan denk denir. Eğer bir g dönüşümü F yi kendisine resmediyor, yani $gF = F$ ise g ye F nin bir otomorfizmi denir. Eğer $\det(g) = 1$ ise g ye has otomorfizm, $\det(g) = -1$ ise has olmayan otomorfizm denir. F nin has otomorfizmlerinin kümesi $Aut^{+}(F)$, has olmayan otomorfizmlerinin kümesi ise $Aut^{-}(F)$ ile gösterilir.

$F = (a, b, c)$ belirsiz formu için $|\sqrt{\Delta} - 2|a|| < b < \sqrt{\Delta}$ eşitsizliği gerçekleniyor ise F ye indirgenebilir form denir. Eğer F formu indirgenebilir değilse, bu form aşağıda verilen indirgeme algoritması kullanılarak indirgenebilir hale getirilebilir (Buell 1989).

3.2.3 Teorem. $F = (a, b, c)$ belirsiz formu indirgenebilir olmasın. Bu takdirde $i \geq 0$ için

$$r_i = \begin{cases} \operatorname{sgn}(c_i)\left\lfloor \dfrac{b_i}{2|c_i|} \right\rfloor & |c_i| \geq \sqrt{\Delta} \\[2ex] \operatorname{sgn}(c_i)\left\lfloor \dfrac{b_i + \sqrt{\Delta}}{2|c_i|} \right\rfloor & |c_i| < \sqrt{\Delta} \end{cases}$$

olmak üzere F nin indirgenmişi

$$\rho^{i+1}(F) = (c_i, -b_i + 2c_i r_i,\; c_i r_i^2 - b_i r_i + a_i)$$

dir (Buchmann ve Vollmer 2007).

Bu teoreme göre, F formu indirgenebilir değilse bu forma yukarıdaki algoritma uygulanarak $\rho^1(F)$ formu elde edilir. Eğer $\rho^1(F)$ indirgenebilir değilse, bu forma bir kez daha indirgeme algoritması uygulanarak $\rho^2(F)$ formu elde edilir. Bu şekilde devam edilirse sonlu bir $j \geq 1$ adımda indirgenebilir $\rho^j(F)$ formu elde edilmiş olur. Elde edilen bu son forma, F nin indirgenmişi denir. Üstelik

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & r \end{bmatrix} \in \Gamma$$

için $\rho^1(F) = gF$ dir. Dolayısıyla F ve $\rho^1(F)$ birbirine has denktir. Belirsiz formların devirleri ve has devirleri aşağıdaki gibidir.

3.2.4 Tanım. $F = (a,b,c)$ indirgenebilir belirsiz formunun devri, birbirine denk olan formların $F_0 \sim F_1 \sim F_2 \sim \cdots \sim F_{l-1}$ bir dizisidir. Bu dizideki formlar $i \geq 0$ için

$$s_i = \left\lfloor \frac{b_i + \sqrt{\Delta}}{2\,|\,c_i\,|} \right\rfloor$$

olmak üzere

$$F_{i+1} = (|\,c_i\,|,\, -b_i + 2s_i\,|\,c_i\,|,\, -a_i - b_i s_i - c_i s_i^2)$$

şeklindedir. $\tau(F) = (-a, b, -c)$ dönüşümü için F nin has devri, birbirine has denk olan formların bir dizisi olup bu dizi l çift iken

$$F_0 \sim \tau(F_1) \sim F_2 \sim \tau(F_3) \sim \cdots \sim F_{l-2} \sim \tau(F_{l-1})$$

ve l tek iken

$$F_0 \sim \tau(F_1) \sim F_2 \sim \tau(F_3) \sim \cdots \sim \tau(F_{l-2}) \sim F_{l-1} \sim \tau(F_0) \sim F_1 \sim \tau(F_2) \sim \cdots \sim F_{l-2} \sim \tau(F_{l-1})$$

dir (Buchmann ve Vollmer 2007).

Kuadratik formlarla ilgili olarak bu açıklamalardan sonra esas problem ele alınabilir. O_k oblong sayısı için $\Delta_k = 4O_k$ olarak tanımlansın. Bu seçim $\Delta_k \equiv 0 \pmod 4$ olması için yapılmıştır. Bu takdirde Tanım 3.2.2 den Pell formu

$$F_{\Delta_k}(x,y) = x^2 - O_k y^2$$

dır. Dolayısıyla bu Pell forma karşılık gelen Pell denklemi de

$$F_{\Delta_k}(x,y)=x^2-O_k y^2=1$$

olur. Burada ilk olarak $F_{\Delta_k}(x,y)=1$ Pell denklemi ele alınacaktır. Bir önceki kısımda $\sqrt{O_k}$ nın basit sürekli kesirli açılımının $\sqrt{O_k}=[k;\overline{2,2k}]$ şeklinde olduğu görülmüştü. Bu açılım oblong sayılarına bağlı olarak

$$\sqrt{O_k}=\begin{cases} [1;\overline{O_1}] & k=1 \text{ ise} \\ \left[\dfrac{\sqrt{4O_k+1}-1}{2};\overline{O_1,\sqrt{4O_k+1}-1}\right] & k>1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde de verilebilir. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.5 Teorem. $F_{\Delta_k}(x,y)=1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1,y_1)=(\sqrt{4O_k+1},O_1)$ ve diğer tüm tamsayı çözümleri, $n\geq 2$ için

$$\frac{x_n}{y_n}=\left[\frac{\sqrt{4O_k+1}-1}{2};\underbrace{O_1,\sqrt{4O_k+1}-1,O_1}_{n-1\text{ tane}}\right]$$

olmak üzere (x_n,y_n) şeklindedir. Denklemin çözümleri arasında $n\geq 2$ için

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{4O_k+1}x_{n-1}+O_1O_k y_{n-1} \\ y_n &= O_1x_{n-1}+\sqrt{4O_k+1}y_{n-1} \end{aligned}$$

bağıntısı ve $n\geq 4$ için

$$\begin{aligned} x_n &= (2\sqrt{4O_k+1}-1)(x_{n-1}+x_{n-2})-x_{n-3} \\ y_n &= (2\sqrt{4O_k+1}-1)(y_{n-1}+y_{n-2})-y_{n-3} \end{aligned}$$

indirgeme bağıntısı vardır (Tekcan ve Özkoç 2013).

İspat. $\sqrt{O_k}=\left[\dfrac{\sqrt{4O_k+1}-1}{2};\overline{O_1,\sqrt{4O_k+1}-1}\right]$ olduğundan bu devrin uzunluğu 2 dir. Dolayısıyla Sonuç 1.2.8 gereği

$$A_0=\frac{\sqrt{4O_k+1}-1}{2},\ A_1=\sqrt{4O_k+1},\ B_0=1,\ B_1=O_1$$

olup denklemin temel çözümü $(x_1,y_1)=(A_1,B_1)=(\sqrt{4O_k+1},O_1)$ dir. (x_{n-1},y_{n-1}), bu denklemin bir çözümü, yani

$$x_{n-1}^2-O_k y_{n-1}^2=1$$

olsun. Bu takdirde Teorem 1.2.7 (i) gereği denklemin tüm çözümleri

$$\frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{\sqrt{4O_k+1}-1}{2}; \underbrace{O_1, \sqrt{4O_k+1}-1}_{n-1 \text{ tane}}, O_1 \right]$$

şeklindedir.

Denklemin temel çözümü $(x_1, y_1) = (\sqrt{4O_k+1}, O_1)$ olduğundan Teorem 1.2.11 gereği denklemin çözümleri arasında

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{4O_k+1}x_{n-1} + O_1 O_k y_{n-1} \\ y_n &= O_1 x_{n-1} + \sqrt{4O_k+1} y_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde bir bağıntı ve

$$\begin{aligned} x_n &= (2\sqrt{4O_k+1}-1)(x_{n-1}+x_{n-2}) - x_{n-3} \\ y_n &= (2\sqrt{4O_k+1}-1)(y_{n-1}+y_{n-2}) - y_{n-3} \end{aligned}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı olduğu açıktır.

O_k oblong sayısı için

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{4O_k+1} & O_1 O_k \\ O_1 & \sqrt{4O_k+1} \end{bmatrix}$$

matrisi tanımlansın. Bu takdirde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.6 Teorem. $n \geq 1$ tamsayısı için M matrisinin n. kuvveti

(i) n çift iken

$$M_{11}^n = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C(n,2i)(\sqrt{4O_k+1})^{n-2i} O_1^{2i} O_k^i = M_{22}^n$$

$$M_{12}^n = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} C(n,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{n-1-2i} O_1^{2i+1} O_k^{i+1}$$

$$M_{21}^n = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} C(n,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{n-1-2i} O_1^{2i+1} O_k^{i}$$

(ii) n tek iken

$$M_{11}^{n}=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C(n,2i)(\sqrt{4O_k+1})^{n-2i}O_1^{2i}O_k^{i}=M_{22}^{n}$$

$$M_{12}^{n}=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C(n,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{n-1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i+1}$$

$$M_{21}^{n}=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C(n,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{n-1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i}$$

olmak üzere

$$M^{n}=\begin{bmatrix}M_{11}^{n} & M_{12}^{n}\\ M_{21}^{n} & M_{22}^{n}\end{bmatrix}$$

dir (Burada $C(n,i)$, n nin i-li kombinasyonudur) (Tekcan ve Özkoç 2013).

İspat: n çift olsun. $n=2$ için

$$M_{11}^{2}=\sum_{i=0}^{1}C(2,2i)(\sqrt{4O_k+1})^{2-2i}O_1^{2i}O_k^{i}=M_{22}^{2}$$

$$M_{12}^{2}=\sum_{i=0}^{0}C(2,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i+1}=2O_1O_k\sqrt{4O_k+1}$$

$$M_{21}^{2}=\sum_{i=0}^{0}C(2,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i}=2O_1\sqrt{4O_k+1}$$

olmak üzere

$$M^{2}=\begin{bmatrix}4O_k+1+O_1^2O_k & 2O_1O_k\sqrt{4O_k+1}\\ 2O_1\sqrt{4O_k+1} & 4O_k+1+O_1^2O_k\end{bmatrix}$$

elde edilir, yani eşitlik $n=2$ için doğrudur. Eşitlik $n-2$ için doğru olsun, yani

$$M_{11}^{n-2}=\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}C(n-2,2i)(\sqrt{4O_k+1})^{n-2-2i}O_1^{2i}O_k^{i}=M_{22}^{n-2}$$

$$M_{12}^{n-2}=\sum_{i=0}^{\frac{n-4}{2}}C(n-2,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{n-3-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i+1}$$

$$M_{21}^{n-2}=\sum_{i=0}^{\frac{n-4}{2}}C(n-2,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{n-3-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i}$$

için $M^{n-2}=\begin{bmatrix} M_{11}^{n-2} & M_{12}^{n-2} \\ M_{21}^{n-2} & M_{22}^{n-2}\end{bmatrix}$ olsun. Bu takdirde $M^n=M^{n-2}\cdot M^2$ ve

$$M^2=\begin{bmatrix} 4O_k+1+O_1^2O_k & 2O_1O_k\sqrt{4O_k+1} \\ 2O_1\sqrt{4O_k+1} & 4O_k+1+O_1^2O_k\end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
M_{11}^n &= M_{11}^{n-2}(4O_k+1+O_1^2O_k)+M_{12}^{n-2}(2O_1\sqrt{4O_k+1})\\
&=[(\sqrt{4O_k+1})^{n-2}+C(n-2,2)(\sqrt{4O_k+1})^{n-4}O_1^2O_k+\cdots+C(n-2,n-4)(\sqrt{4O_k+1})^2\\
&\quad O_1^{n-4}O_k^{\frac{n-4}{2}}+O_1^{n-2}O_k^{\frac{n-2}{2}}][4O_k+1+O_1^2O_k]\\
&\quad +[C(n-2,1)(\sqrt{4O_k+1})^{n-3}O_1O_k+C(n-2,3)(\sqrt{4O_k+1})^{n-5}O_1^3O_k^2+\cdots\\
&\quad +C(n-2,n-5)(\sqrt{4O_k+1})^3O_1^{n-5}O_k^{\frac{n-4}{2}}\\
&\quad +C(n-2,n-3)(\sqrt{4O_k+1})O_1^{n-3}O_k^{\frac{n-2}{2}}][2O_1\sqrt{4O_k+1}]\\
&=(\sqrt{4O_k+1})^n+[C(n-2,2)+1+2C(n-2,1)](\sqrt{4O_k+1})^{n-2}O_1^2O_k\\
&\quad +[C(n-2,4)+C(n-2,2)+2C(n-2,3)](\sqrt{4O_k+1})^{n-4}O_1^4O_k^2\\
&\quad +\cdots+[C(n-2,n-4)+C(n-2,n-6)+2C(n-2,n-5)](\sqrt{4O_k+1})^4O_1^{n-4}O_k^{\frac{n-4}{2}}\\
&\quad +[1+C(n-2,n-4)+2C(n-2,n-3)](\sqrt{4O_k+1})^2O_1^{n-2}O_k^{\frac{n-2}{2}}+O_1^nO_k^{\frac{n}{2}}\\
&=(\sqrt{4O_k+1})^n+C(n,2)(\sqrt{4O_k+1})^{n-2}O_1^2O_k+C(n,4)(\sqrt{4O_k+1})^{n-4}O_1^4O_k^2+\cdots\\
&\quad +C(n,n-2)(\sqrt{4O_k+1})^2O_1^{n-2}O_k^{\frac{n-2}{2}}+O_1^nO_k^{\frac{n}{2}}\\
&=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}C(n,2i)(\sqrt{4O_k+1})^{n-2i}O_1^{2i}O_k^i
\end{aligned}$$

elde edilir (Burada $i=1,2,\cdots,\dfrac{n-2}{2}$ için

$$C(n,2i)=C(n-2,2i)+C(n-2,2i-2)+2C(n-2,2i-1)$$

olduğu dikkate alınmıştır). Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
M_{12}^n &= M_{11}^{n-2}[2O_1O_k\sqrt{4O_k+1}]+M_{12}^{n-2}[4O_k+1+O_1^2O_k]\\
M_{21}^n &= M_{21}^{n-2}[4O_k+1+O_1^2O_k]+M_{22}^{n-2}[2O_1\sqrt{4O_k+1}]\\
M_{22}^n &= M_{21}^{n-2}[2O_1O_k\sqrt{4O_k+1}]+M_{22}^{n-2}[4O_k+1+O_1^2O_k]
\end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. O halde eşitlik her n için gerçeklenmiş olur. n nin tek olması durumu da benzer şekilde gösterilebilir.

3.2.7 Teorem. $F_{\Delta_k}(x,y)=1$ Pell denkleminin tamsayı çözümleri, $n\geq 2$ için

$$x_n=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{\frac{n}{2}}C(n,2i)(\sqrt{4O_k+1})^{n-2i}O_1^{2i}O_k^{i} & n \text{ çift iken}\\ \sum\limits_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C(n,2i)(\sqrt{4O_k+1})^{n-2i}O_1^{2i}O_k^{i} & n \text{ tek iken}\end{cases}$$

ve

$$y_n=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}C(n,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{n-1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i} & n \text{ çift iken}\\ \sum\limits_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C(n,2i+1)(\sqrt{4O_k+1})^{n-1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i} & n \text{ tek iken}\end{cases}$$

olmak üzere (x_n,y_n) şeklindedir (Tekcan ve Özkoç 2013).

İspat. Tümevarımla benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi F_{Δ_k} Pell formu ele alınabilir. Burada ilk olarak bu formun indirgenmişi, indirgenmişinin devri, has devri ve son olarak da bu formun has otomorfizmleri kümesi ele alınacaktır.

3.2.8 Teorem. F_{Δ_k} Pell formunun indirgenmişi

$$\rho^2(F_{\Delta_k})=\left(1,\sqrt{4O_k+1}-1,\frac{1-\sqrt{4O_k+1}}{2}\right)$$

dir (Tekcan ve Özkoç 2013).

İspat. F_{Δ_k} Pell formu indirgenebilir değildir. Çünkü

$$|\sqrt{4O_k}-2|=2|\sqrt{O_k}-1|>0$$

dır. $F_{\Delta_k}=F_{\Delta_{k,0}}=(1,\ 0,-O_k)$ olsun. Bu takdirde Teorem 3.2.4 den $r_0=0$ olup

$$\rho^1(F_{\Delta_k})=(-O_k,\ 0,\ 1)$$

formu elde edilir. Bu form indirgenebilir olmadığından bir kez daha indirgeme algoritması uygulanırsa $r_1=\dfrac{\sqrt{4O_k+1}-1}{2}$ olup

$$\rho^2(F_{\Delta_k}) = \left(1,\ \sqrt{4O_k+1}-1,\ \frac{1-\sqrt{4O_k+1}}{2}\right)$$

formu elde edilir. Bu form indirgenebilir olduğundan teorem ispatlanmış olur.

F_{Δ_k} formunun $\rho^2(F_{\Delta_k})$ indirgenmişinin devri ve has devri ise aşağıdaki gibidir.

3.2.9 Teorem. $\rho^2(F_{\Delta_k})$ formunun devri 2 uzunlukludur ve

$$\left(1,\ \sqrt{4O_k+1}-1,\ \frac{1-\sqrt{4O_k+1}}{2}\right) \sim \left(\frac{\sqrt{4O_k+1}-1}{2},\ \sqrt{4O_k+1}-1, -1\right)$$

şeklindedir. Has devri ise

$$\left(1,\ \sqrt{4O_k+1}-1,\ \frac{1-\sqrt{4O_k+1}}{2}\right) \sim \left(\frac{1-\sqrt{4O_k+1}}{2},\ \sqrt{4O_k+1}-1,\ 1\right)$$

dir (Tekcan ve Özkoç 2013).

İspat. $\rho^2(F_{\Delta_{k,0}}) = \left(1,\ \sqrt{4O_k+1}-1,\ \frac{1-\sqrt{4O_k+1}}{2}\right)$ olsun. Bu takdirde Teorem 3.2.5 gereği $s_0 = O_1$ olup

$$\rho^2(F_{\Delta_{k,1}}) = \left(\frac{\sqrt{4O_k+1}-1}{2},\ \sqrt{4O_k+1}-1, -1\right)$$

dir. Bu son form için $s_1 = \sqrt{4O_k+1}-1$ olup

$$\rho^2(F_{\Delta_{k,2}}) = \left(1,\ \sqrt{4O_k+1}-1, \frac{1-\sqrt{4O_k+1}}{2}\right) = \rho^2(F_{\Delta_{k,0}})$$

dir. Dolayısıyla $\rho^2(F_{\Delta_k})$ formunun devri $\rho^2(F_{\Delta_{k,0}}) \sim \rho^2(F_{\Delta_{k,1}})$ dir. Bu devrin uzunluğu $l = 2$ olduğundan yine aynı teorem gereği has devri

$$\left(1,\ \sqrt{4O_k+1}-1,\ \frac{1-\sqrt{4O_k+1}}{2}\right) \sim \left(\frac{1-\sqrt{4O_k+1}}{2},\ \sqrt{4O_k+1}-1,\ 1\right)$$

olarak elde edilir.

O_k oblong sayısı için

$$g_{F_{\Delta_k}} = \begin{bmatrix} \sqrt{4O_k+1} & O_1 \\ O_1O_k & \sqrt{4O_k+1} \end{bmatrix}$$

matrisi tanımlansın. Bu takdirde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.10 Teorem. $g_{F_{\Delta_k}}$ yukarıdaki matris olmak üzere

(i) F_{Δ_k} Pell formunun has otomorfizmlerinin kümesi

$$Aut^+(F_{\Delta_k}) = \{\pm g^n_{F_{\Delta_k}} : n \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

(ii) $n \geq 1$ için $F_{\Delta_k}(x,y)=1$ Pell denkleminin tamsayı çözümleri

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = (g^n_{F_{\Delta_k}})^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (x_n, y_n) dir (Tekcan ve Özkoç 2013).

İspat. Tümevarımla yapılabilir.

3.2.11 Örnek. $k=3$ olsun. Bu takdirde $O_3=12$ ve $\sqrt{12}=[3;\overline{2,6}]$ dir.

$$g_{F_{\Delta_3}} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$$

olup $F_{\Delta_3}(x,y): x^2-12y^2=1$ Pell denkleminin tamsayı çözümleri

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = (g^2_{F_{\Delta_3}})^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = (g^3_{F_{\Delta_3}})^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1351 \\ 390 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = (g^4_{F_{\Delta_3}})^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18817 \\ 5432 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix} = (g^5_{F_{\Delta_3}})^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262087 \\ 75658 \end{bmatrix}$$

şeklinde devam etmektedir.

$F_{\Delta_3}(x,y)=x^2-12y^2$ formunun indirgenmişi $\rho^2(F_{\Delta_3})=(1,6,-3)$ olup bu formun devri

$$\rho^2(F_{\Delta_{3,0}})=(1,6,-3)\sim\rho^2(F_{\Delta_{3,1}})=(3,6,-1)$$

ve has devri

$$\rho^2(F_{\Delta_{3,0}})=(1,6,-3)\sim\rho^2(F_{\Delta_{3,1}})=(-3,6,1)$$

dir. F_{Δ_3} ün has otomorfizmlerinin kümesi ise

$$Aut^+(F_{\Delta_3})=\{\pm g_{F_{\Delta_3}}^n : n\in\mathbb{Z}\}$$

dir.

3.2.12 Not. O_k bir oblong sayısı olmak üzere *k*. cooblong sayısı

$$o_k=\sqrt{1+4O_k}$$

olarak tanımlanmıştı. Bu alt bölümde elde edilen tüm teoremlere dikkat edilirse her birinde $\sqrt{1+4O_k}$ ifadesinin olduğu görülür. Dolayısıyla elde edilen tüm bağıntılar cooblong sayılarına bağlı olarak elde edilmiş olur.

4. BALANS SAYILARI

Bu bölümde balans sayıları ve bu sayıların Pell ve Pell-Lucas sayıları ile olan ilişkisi ele alınacaktır.

Balans sayıları tamsayı dizilerinde yeni bir konu olup ilk defa 1999 yılında Panda ve Behera tarafından ele alınmıştır ve esasında *r* pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$1+2+\cdots+(n-1)=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r) \tag{4.1}$$

şeklindeki Diophantine denklemleri ile çalışılırken ortaya çıkmıştır. (4.1) eşitliğini gerçekleyen pozitif *n* tam sayısına bir balans sayısı denir. Bu eşitlikteki *r* sayısına ise balans sayısının balansırı-dengeleyicisi (veya cobalans sayısı) denir. Örneğin 6, 35, 204 sayıları, cobalansları sırasıyla 2, 14, 84 olan birer balans sayısıdır.
(4.1) eşitliğinden

$$\frac{(n-1)n}{2}=rn+\frac{r(r+1)}{2}$$

olup bu denklem *r* ve *n* ye göre çözülürse

$$r=\frac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2} \quad \text{ve} \quad n=\frac{2r+1+\sqrt{8r^2+8r+1}}{2} \tag{4.2}$$

elde edilir. Buna göre, *n* bir balans sayısı ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i. *n* bir balans sayısıdır.

ii. n^2 bir üçgensel sayıdır, yani $k\in\mathbb{Z}^+$ için $n^2=\dfrac{k(k+1)}{2}$ dir.

iii. $8n^2+1$ bir tam karedir.

Balans sayıları B_n ve cobalans sayıları b_n ile gösterilirse bu sayılar için indirgeme formülleri, $n\geq 2$ için

$$B_1=1,\ B_2=6,\ \ B_{n+1}=6B_n-B_{n-1}$$

$$b_1=0,\ b_2=2,\ \ b_{n+1}=6b_n-b_{n-1}+2$$

şeklindedir.

(4.2) eşitliğine göre, B_n balans ve b_n cobalans sayıları olduğundan

$$8B_n^2+1 \text{ ve } 8b_n^2+8b_n+1$$

birer tam karedir. Buna göre

$$C_n=\sqrt{8B_n^2+1} \text{ ve } c_n=\sqrt{8b_n^2+8b_n+1}$$

olarak tanımlanan sayılara ise sırasıyla *n*. Lucas balans ve *n*. Lucas cobalans sayıları denir. Behera ve Panda (1999) balans sayıları için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

4.1 Teorem. Her bir $n>1$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} B_{n+1}B_{n-1} &= (B_n+1)(B_n-1) \\ B_n &= B_kB_{n-k}-B_{k-1}B_{n-k-1} \\ B_{2n} &= B_n^2-B_{n-1}^2 \\ B_{2n+1} &= B_n(B_{n+1}-B_{n-1}) \end{aligned}$$

dir (Behera ve Panda 1999).

4.2 Teorem. *m* ve *k* doğal sayılar ve $k<m$ olmak üzere

$$(B_m+B_k)(B_m-B_k)=B_{m+k}B_{m-k}$$

dır (Panda 2009).

4.3 Teorem. B_m balans sayısı için

$$\begin{aligned} B_1+B_3+\cdots+B_{2m-1} &= B_m^2 \\ B_2+B_4+\cdots+B_{2m} &= B_mB_{m+1} \\ B_1+B_2+\cdots+B_{2m} &= B_m(B_mB_{m+1}) \end{aligned}$$

dir (Panda 2009).

Behera ve Panda (1999), verilen herhangi bir *x* ve *y* balans sayıları için

$$F(x)=2x\sqrt{8x^2+1},\ G(x)=3x+\sqrt{8x^2+1},\ H(x)=17x+6\sqrt{8x^2+1}$$

ve

$$f(x,y)=x\sqrt{8y^2+1}+y\sqrt{8x^2+1}$$

fonksiyonlarını tanımlamışlar ve aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

4.4 Teorem. Her bir x ve y balans sayıları için, yukarıda tanımlanan F, G ve H fonksiyonlarının x de aldığı değer ile f fonksiyonunun (x, y) de aldığı değer de birer balans sayısıdır (Behera ve Panda 1999).

Balans sayılarına benzer şekilde Ray (2009) da herhangi iki x ve y cobalans sayıları için

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$
$$g(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 8$$
$$h(x) = 8x^2 + 8x + 1 + (2x + 1)\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$
$$\begin{aligned} t(x, y) = \frac{1}{2}[2(2x+1)(2y+1) &+ (2x+1)\sqrt{8y^2 + 8y + 1} \\ &+ (2y+1)\sqrt{8x^2 + 8x + 1} \\ &+ \sqrt{8x^2 + 8x + 1}\sqrt{8y^2 + 8y + 1} - 1] \end{aligned}$$

fonksiyonlarını tanımlayarak aşağıdaki teoremleri vermiştir.

4.5 Teorem. Herhangi iki x ve y cobalans sayısı için yukarıda tanımlanan f, g, h fonksiyonlarının x de aldığı değer ile t fonksiyonunun (x, y) de aldığı değer de birer cobalans sayısıdır (Ray 2009).

4.6 Teorem. x herhangi bir cobalans sayısı olmak üzere, x den önce ve sonra gelen cobalans sayıları sırasıyla

$$\tilde{f}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1 \text{ ve } f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

fonksiyonlarının x de aldığı değerlerdir (Ray 2009).

Ray (2009) balans sayıları ile Pell sayıları arasındaki ilişkiyi ortaya çıkartarak Pell sayıları ile ilgili bazı cebirsel özellikleri balans sayılarına bağlı olarak ifade etmeyi başarmıştır. x in bir balans sayısı iken $8x^2 + 1$ in bir tam kare olacağı gerçeğinden hareketle Ray (2009) aşağıdaki gibi bir ilişki ortaya çıkarmıştır: $y \neq 0$ için

$$8x^2 + 1 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - 8x^2 = 1$$

olsun. Bu durumda $y^2 - 8x^2 = 1$ bir Pell denklemi olup bu Pell denkleminin temel çözümü $(y_1, x_1) = (3, 1)$ dir. Dolayısıyla da denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri Teorem 1.2.9 gereği $n \geq 1$ için

$$y_n + x_n\sqrt{8} = (3+\sqrt{8})^n$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$y_n - x_n\sqrt{8} = (3-\sqrt{8})^n$$

dir. Bu son iki eşitlikten

$$x_n = \frac{(3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}$$

elde edilir. Bu ise balans sayıları için Binet formülüdür. Buna göre

$$\gamma = 3+\sqrt{8} \text{ ve } \delta = 3-\sqrt{8}$$

olarak alınırsa $x_n = \dfrac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$ olur. O halde balans sayıları için Binet formülü

$$B_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

dir. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

4.7 Teorem. B_n balans sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = 3+\sqrt{8} = \gamma$$

dir (Behera ve Panda 1999).

Pell sayılarının karakteristik denkleminin kökleri olan $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ sayıları için

$$\alpha^2 = 3+2\sqrt{2} = \gamma \text{ ve } \beta^2 = 3-2\sqrt{2} = \delta$$

olduğundan balans sayılarının Binet formülü α ve β ya bağlı olarak

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

elde edilir. Dolayısıyla da balans sayıları ile Pell sayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur. Balans sayılarına benzer şekilde cobalans, Lucas balans ve Lucas cobalans sayılarının Binet formülleri de yine Pell sayılarının karakteristik denkleminin köklerine bağlı olarak

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, \; C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} \;\text{ ve }\; c_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2}$$

şeklindedir (Panda ve Ray (2005) ve (2011)).

Yukarıda verilen balans sayıları ile ilgili cebirsel bağıntılardan farklı olarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

4.8 Teorem. Balans sayılarının Pell sayıları ile olan ilişkisi

$$B_n = P_n^2 + P_n P_{n-1}$$
$$b_n = \begin{cases} P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} & n \geq 1 \text{ tek ise} \\ P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} - 1 & n \geq 2 \text{ çift ise} \end{cases}$$
$$C_n = P_{2n} + P_{2n-1}$$
$$c_n = P_{2n-1} + P_{2n-2}$$

şeklindedir (Gözeri ve ark 2013).

İspat. Pell ve balans sayılarının Binet formülleri $P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{2}}$ ve $B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$ olduğundan

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} = \frac{(\alpha^{2n} + \beta^{2n})\sqrt{2}}{8} \\ &= \frac{\alpha^{2n}(1+\frac{1}{\alpha}) + \beta^{2n}(1+\frac{1}{\beta}) - (\alpha\beta)^n(2+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})}{8} \\ &= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1} - \alpha^n\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta^n}{8} \\ &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{2\sqrt{2}}\right) \\ &= P_n^2 + P_n P_{n-1} \end{aligned}$$

dır. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir.

4.9 Sonuç. Balans ve Pell sayıları için

(i) Ardışık iki balans ve cobalans sayılarının toplamı ve farkı

$$B_n + B_{n-1} = P_{2n-1} + P_{2n-2} \qquad B_n - B_{n-1} = P_n^2 + P_{n-1}^2$$
$$\text{ve}$$
$$b_n + b_{n-1} = P_{2n-2} + P_{2n-3} - 1 \qquad b_n - b_{n-1} = P_{2n-2}$$

dir.

(ii) *n*. balans sayısının, *n*. cobalans sayısına oranı

$$\frac{B_n}{b_n} = \begin{cases} \dfrac{P_n}{P_{n-1}} & n \geq 3 \text{ tek ise} \\[2ex] \dfrac{P_n + P_{n-1}}{P_{n-1} + P_{n-2}} & n \geq 2 \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

(iii) $C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$ ve $c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$ eşitliklerinden farklı olarak Lucas balans, Lucas cobalans ve balans sayıları arasındaki ilişki

$$C_n = 2B_n + 2b_n + 1 \;\text{ ve }\; c_n = 2B_n - 2b_n - 1$$

dir.

(iv) Ardışık iki Pell sayısının toplamı

$$P_n + P_{n+1} = 1 + 2\begin{cases} B_{\frac{n+1}{2}} + b_{\frac{n+1}{2}} & n \geq 1 \text{ tek ise} \\ B_{\frac{n+2}{2}} - b_{\frac{n+2}{2}} - 1 & n \geq 2 \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

(v) Ardışık iki Pell sayısının kareleri farkı

$$P_n^2 - P_{n-1}^2 = \begin{cases} b_n + B_{n-1} + 1 & n \geq 1 \text{ tek ise} \\ b_n + B_{n-1} & n \geq 2 \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir

(vi) $n \geq 1$ tek tamsayısı için *n*. balans ve cobalans sayılarının toplamı bir tam kare, yani

$$B_n + b_n = (P_n + P_{n-1})^2$$

dir. Farkları ise iki kare farkı, yani

$$B_n - b_n = P_n^2 - P_{n-1}^2$$

dir.

(vii) $n \geq 2$ çift tamsayısı için *n*. balans ve cobalans sayılarının toplamı tam karenin 1 eksiği, yani

$$B_n + b_n = (P_n + P_{n-1})^2 - 1$$

dir. Farkları ise iki kare farkının 1 fazlası, yani

$$B_n - b_n = P_n^2 - P_{n-1}^2 + 1$$

dir. (Gözeri ve ark 2013).

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde balans sayıları ve Pell sayısının Binet formüllerinden elde edilir.

Panda ve Ray (2011), Pell sayılarının terimlerinin toplamları ile balans sayıları arasında aşağıdaki gibi sonuçlar elde etmişlerdir.

4.10 Teorem. İlk $(2n-1)$ Pell sayısının toplamı, n. balans ve cobalans sayılarının toplamına eşittir, yani

$$\sum_{i=1}^{2n-1} P_i = B_n + b_n$$

dir (Panda ve Ray 2011).

4.11 Teorem. İlk $(2n)$ Pell sayısının toplamı, *n*. balans ve $(n+1)$. cobalans sayılarının toplamına eşittir, yani

$$\sum_{i=1}^{2n} P_i = B_n + b_{n+1}$$

dir (Panda ve Ray 2011).

4.12 Teorem. 1 den n ye kadar çift Pell sayılarının toplamı $(n+1)$. cobalans sayısına eşittir, yani

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i} = b_{n+1}$$

dir (Panda ve Ray 2011).

Yukarıda verilen teoremlerden farklı olarak aşağıdaki üç teorem verilebilir.

4.13 Teorem. Balans sayılarının toplamları

$$\sum_{i=1}^{2n} B_i = B_n c_{n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} B_i = B_{n+1} c_{n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n} B_{2i} = C_n c_{n+1} P_{2n} P_{2n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} (B_i + B_{i+1}) = 8 B_n B_{n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} (B_i + B_{i+1}) = c_{n+1} c_{n+2}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} (B_{2i+1} + B_{2i+2}) = c_{n+1} c_{2n+2} P_{2n+1}$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

İspat. Pell sayılarının karakteristik denkleminin kökleri olan $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ sayıları için

$$\sum_{i=1}^{2n} \alpha^{2i} = \frac{\alpha^{4n+1} - \alpha}{2} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{2n} \beta^{2i} = \frac{\beta^{4n+1} - \beta}{2}$$

eşitliklerinin doğru olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} B_i &= B_1 + B_2 + \cdots + B_{2n} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[(\alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^{4n}) - (\beta^2 + \beta^4 + \cdots + \beta^{4n}) \right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[(1+\sqrt{2})(\frac{\alpha^{4n} - 1}{2}) - (1-\sqrt{2})(\frac{\beta^{4n} - 1}{2}) \right] \\
&= \frac{\alpha^{4n}(2+\sqrt{2}) + \beta^{4n}(2-\sqrt{2}) - 4}{16} \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n} + \alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{2\sqrt{2}} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\alpha^{2n}(2+\sqrt{2}) + \beta^{2n}(-2+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} \right) \\
&= B_n c_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Ayrıca, Pell ve Pell-Lucas sayılarının toplamları ile balans sayıları arasında da bir ilişki vardır. Bu ilişki ise aşağıdaki iki teoremde verilmiştir (İspatları yukarıdaki teoreme benzer şekilde yapılabilir).

4.14 Teorem. P_n Pell sayısı için

(i) 0 dan $(2n)$ ye kadar $(2i+1)$. ve $(2i+2)$. Pell sayılarının toplamı, $(n+1)$. Lucas balans ve Lucas cobalans sayılarının çarpımı, yani

$$\sum_{i=0}^{2n}(P_{2i+1}+P_{2i+2})=C_{n+1}c_{n+1}$$

dir.

(ii) 0 (veya 1 den) dan $(2n)$ ye kadar tek ve çift Pell sayılarının toplamları

$$\sum_{i=1}^{2n}P_{2i+1}=2B_nC_{n+1} \qquad \sum_{i=0}^{2n}P_{2i+1}=c_{n+1}P_{2n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n}P_{2i-1}=2B_nC_n$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

4.15 Teorem. Q_n Pell-Lucas sayısı için

(i) 0 dan $(2n-1)$ e kadar Pell-Lucas sayılarının toplamı, n. Lucas balans ve Lucas cobalans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=0}^{2n-1}Q_i=C_n+c_n$$

dir.

(ii) 1 den $(2n)$ e kadar Pell-Lucas sayılarının toplamı, $(n+1)$. cobalans sayısının 4 katı, yani

$$\sum_{i=1}^{2n}Q_i=4b_{n+1}$$

dir.

(iii) 1 den n ye kadar $(2i-1)$. Pell-Lucas sayılarının toplamı, n. balans ve cobalans sayıları ile 1 den n ye kadar Lucas cobalans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{n}Q_{2i-1}=B_n+b_n+\sum_{i=1}^{n}c_i$$

dir.

(iv) 1 den n ye kadar $(2i)$. Pell-Lucas sayılarının toplamı, $(n+1)$. balans, n. cobalans sayıları ile 1 den $(n-1)$ e kadar Lucas balans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{2i} = B_{n+1} + b_n + \sum_{i=1}^{n-1} C_i$$

dir.

(v) 1 den $(2n)$ ye kadar çift Pell-Lucas sayılarının toplamı ve 1 den $(2n+1)$ e kadar Pell-Lucas sayılarının toplamları sırasıyla

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i} = 8B_n(2b_{n+1}+1) \ \text{ ve } \quad \sum_{i=1}^{2n+1} Q_i = 2(2B_{n+1}-1)$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

Santana ve Diaz Barrero (2006), ilk $(4n+1)$ Pell sayısının toplamının bir tam kare, yani

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} 2^i \right)^2$$

olduğunu göstermişlerdir. Bu bağıntıya benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.16 Teorem. Pell, Pell-Lucas ve balans sayıları için

(i) 1 den $(4n-3)$ e kadar Pell sayılarının toplamı, n. Lucas cobalans sayısının karesi, yani

$$\sum_{i=1}^{4n-3} P_i = (c_n)^2$$

dir.

(ii) 1 den $(4n-1)$ e kadar Pell sayılarının toplamının 1 fazlası, n. Lucas balans sayısının karesi, yani

$$1 + \sum_{i=1}^{4n-1} P_i = (C_n)^2$$

dir.

(iii) 1 den $(2n)$ ye kadar $(2i-1)$. Pell-Lucas sayılarının toplamı, n. balans sayısının 4 katının karesi, yani

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1} = (4B_n)^2$$

dir.

(iv) 0 dan $(2n)$ ye kadar $(2i+1)$. Pell-Lucas sayılarının toplamının yarısı, $(n+1)$. Lucas cobalans sayısının karesi, yani

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}}{2} = (c_{n+1})^2$$

dir.

(v) 0 dan $(2n)$ ye kadar $(2i+1)$. balans sayılarının toplamı, $(2n+1)$. balans sayısının karesi, yani

$$\sum_{i=0}^{2n} B_{2i+1} = (B_{2n+1})^2$$

dir.

(vi) 1 den $(2n)$ ye kadar $(2i-1)$. balans sayılarının toplamı, $(2n)$. balans sayısının karesi, yani

$$\sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} = (B_{2n})^2$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

İspat (i) Pell sayılarının ilk $n-$terim toplamının $\sum_{i=1}^{n} P_i = \frac{P_n + P_{n+1} - 1}{2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4n-3} P_i &= \frac{\frac{\alpha^{4n-3} - \beta^{4n-3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{4n-2} - \beta^{4n-2}}{2\sqrt{2}} - 1}{2} \\
&= \frac{\alpha^{4n-2}(\alpha^{-1}+1) - \beta^{4n-2}(\beta^{-1}+1) - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{4n-2}(\sqrt{2}) + \beta^{4n-2}(\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{4n-2} + \beta^{4n-2} + 2(\alpha\beta)^{2n-1}}{4} \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2}\right)^2 \\
&= (c_n)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Santana ve Diaz Barrero (2006), yukarıda elde ettikleri Pell sayılarının toplamlarına benzer şekilde

$$P_{2n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1}\right. \text{ ve } P_{2n}\left|\sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1}\right.$$

eşitliklerinin de doğru olduğunu göstermişlerdir. Eğer yukarıdaki toplamlar daha açık bir şekilde yazılırsa, bu toplamların

$$\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} = P_{2n+1}(P_{2n} + P_{2n+1}) \text{ ve } \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} = P_{2n+1}(P_{2n} + P_{2n-1})$$

şeklinde olduğu görülür. Dolayısıyla

$$(P_{2n} + P_{2n+1})\left|\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1}\right. \text{ ve } (P_{2n} + P_{2n-1})\left|\sum_{i=0}^{2n} P_{2i-1}\right.$$

dir. Yukarıda elde edilen 4.13-4.16 Teoremlerinden aşağıdaki teorem verilebilir.

4.17 Teorem. Balans, Pell ve Pell-Lucas sayıları için aşağıdaki bölünebilme özellikleri gerçeklenir:

$$B_n\left|\sum_{i=1}^{2n} B_i\right. \qquad c_{n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n} B_i\right. \qquad C_n\left|\sum_{i=1}^{2n} B_{2i}\right. \qquad c_{n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n} B_{2i}\right.$$

$$P_{2n}\left|\sum_{i=1}^{2n} B_{2i}\right. \qquad P_{2n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n} B_{2i}\right. \qquad C_{n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n} P_{2i+1}\right. \qquad B_n\left|\sum_{i=1}^{2n} P_{2i+1}\right.$$

$$c_{n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1}\right. \qquad P_{2n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1}\right. \qquad b_{n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n} Q_i\right. \qquad B_n\left|\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i}\right.$$

$$c_n\left|\sum_{i=1}^{4n-3} P_i\right. \qquad B_n\left|\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1}\right. \qquad c_{n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}\right. \qquad B_{2n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n} B_{2i+1}\right.$$

$$B_{2n}\left|\sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1}\right. \qquad B_n\left|\sum_{i=1}^{2n} (B_i + B_{i+1})\right. \qquad B_{n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n} (B_i + B_{i+1})\right.$$

$$c_{n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n+1}(B_i+B_{i+1})\right. \qquad c_{n+2}\left|\sum_{i=1}^{2n+1}(B_i+B_{i+1})\right. \qquad c_{n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n}(B_{2i+1}+B_{2i+2})\right.$$

$$c_{2n+2}\left|\sum_{i=0}^{2n}(B_{2i+1}+B_{2i+2})\right. \qquad P_{2n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n}(B_{2i+1}+B_{2i+2})\right. \qquad C_{n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n}(P_{2i+1}+P_{2i+2})\right.$$

$$c_{n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n}(P_{2i+1}+P_{2i+2})\right.$$

(Gözeri ve ark. 2013).

Şimdi balans sayıları ve tam kareler ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

4.18 Teorem. Balans ve Pell sayıları için

(i) $n \geq 1$ tek ise

$$\sqrt{P_n^2+4b_n}=P_n+2P_{n-1}$$

ve $n \geq 2$ çift ise

$$\sqrt{P_n^2+4b_n+4}=P_n+2P_{n-1}$$

dir.

(ii) $n \geq 1$ ise

$$\sqrt{b_n^2+B_n+b_n+2B_nb_n}=B_n \quad \text{ve} \quad \sqrt{B_n^2-B_n-b_n-2B_nb_n}=b_n$$

dir.

(iii) $n \geq 0$ ise

$$\sqrt{P_{n+1}^2+P_nP_{n+2}}=P_n+P_{n+1}$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

İspat (i) n tek yani, $n=2k+1$ olsun. Bu takdirde

$$\sqrt{P_n^2+4b_n}=\sqrt{\left(\frac{\alpha^{2k+1}-\beta^{2k+1}}{2\sqrt{2}}\right)^2+4\left(\frac{\alpha^{4k+1}-\beta^{4k+1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha^{4k+2} - 2(\alpha\beta)^{2k+1} + \beta^{4k+2}}{8} + \frac{\alpha^{4k+1} - \beta^{4k+1} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha^{4k+2}(9 - 4\sqrt{2}) + \beta^{4k+2}(9 + 4\sqrt{2}) - 14}{8}}$$
$$= \sqrt{\left[\frac{\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}}{2\sqrt{2}} + 2\left(\frac{\alpha^{2k} - \beta^{2k}}{2\sqrt{2}}\right)\right]^2}$$
$$= P_n + 2P_{n-1}$$

dir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilir.

4.19 Tanım. a, b, c pozitif tamsayılar olmak üzere

$$a^2 + b^2 = c^2$$

eşitliğini gerçekleyen (a, b, c) üçlüsüne Pisagor üçlüsü denir (Mollin 2010).

Tamsayı dizileri ile Pisagor üçlüleri arasında bir ilişki vardır. Örneğin Pell sayıları için

$$(2P_nP_{n+1}, P_{n+1}^2 - P_n^2,\ P_{n+1}^2 + P_n^2)$$

bir Pisagor üçlüsüdür.

4.20 Tanım. a, b, c herhangi üç pozitif sayı olmak üzere, kenarları a, b, c olan dik üçgenin alanına (yani $\frac{ab}{2}$ sayısına) bir kongruent (congruent) sayı (A003273 OEIS dizisi) denir (Mollin 2010).

Bu tanıma göre, (a, b, c) bir Pisagor üçlüsü ise $\frac{ab}{2}$ bir kongruent sayıdır. Örneğin, kenarları $\frac{20}{3}$, $\frac{3}{2}$ ve $\frac{41}{6}$ olan dik üçgenin alanı

$$\frac{(\frac{20}{3})(\frac{3}{2})}{2} = 5$$

olduğundan 5 bir kongruent sayıdır.

Balans sayıları ve Pisagor üçlüleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

4.21 Teorem. Balans sayıları için

(i)

$$(B_{n+1}-b_{n+1}, B_{n+1}-b_{n+1}-1, 2b_{n+1}+1)$$

bir Pisagor üçlüsüdür.

(ii)

$$\left(4(-1)^n\sum_{i=1}^{n}(-1)^n B_i, (-1)^n\left[1+4\sum_{i=1}^{n}(-1)^n B_i\right], B_{n+1}-B\right)$$

bir Pisagor üçlüsüdür.

(iii) n tek ise

$$a=(b_{\frac{n+3}{2}}-b_{\frac{n+1}{2}})(b_{\frac{n+3}{2}}-2b_{\frac{n+1}{2}}+b_{\frac{n-1}{2}})$$
$$b=3B^2_{\frac{n+1}{2}}+2B_{\frac{n+1}{2}}B_{\frac{n-1}{2}}-B^2_{\frac{n-1}{2}}$$
$$c=5B^2_{\frac{n+1}{2}}-2B_{\frac{n+1}{2}}B_{\frac{n-1}{2}}+B^2_{\frac{n-1}{2}}$$

ve n çift ise

$$a=(b_{\frac{n+2}{2}}-b_{\frac{n}{2}})(b_{\frac{n+4}{2}}-2b_{\frac{n+2}{2}}+b_{\frac{n}{2}})$$
$$b=B^2_{\frac{n+2}{2}}-2B_{\frac{n+2}{2}}B_{\frac{n}{2}}-3B^2_{\frac{n}{2}}$$
$$c=B^2_{\frac{n+2}{2}}-2B_{\frac{n+2}{2}}B_{\frac{n}{2}}+5B^2_{\frac{n}{2}}$$

olmak üzere (a,b,c) bir Pisagor üçlüsüdür (Gözeri ve ark. 2013).

İspat. (i)

$$\begin{aligned}(B_{n+1}-b_{n+1})^2+(B_{n+1}-b_{n+1}-1)^2 &= \left(\frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}}-\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\\ &\quad+\left(\frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}}-\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-1\right)^2\\ &=\left(\frac{\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+2}+\beta^{2n+1}+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right)^2\\ &\quad+\left(\frac{\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+2}+\beta^{2n+1}-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right)^2\end{aligned}$$

$$= \frac{2\begin{bmatrix}(\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n+1})^2-2(\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n+1}) \\ \times(\beta^{2n+2}-\beta^{2n+1})+(\beta^{2n+2}-\beta^{2n+1})^2\end{bmatrix}+16}{32}$$

$$= \frac{\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2}+2}{8}$$

$$= \left[2\left(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)+1\right]^2$$

$$= (2b_{n+1}+1)^2$$

elde edilir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

4.22 Sonuç. Balans sayıları için

(i) $\dfrac{(B_{n+1}-b_{n+1})(B_{n+1}-b_{n+1}-1)}{2}$, $n \geq 0$

(ii) $\left(2(-1)^n \sum_{i=1}^{n}(-1)^n B_i\right)\left((-1)^n\left[1+4\sum_{i=1}^{n}(-1)^n B_i\right]\right)$, $n \geq 0$

(iii) $\dfrac{[(b_{\frac{n+3}{2}}-b_{\frac{n+1}{2}})(b_{\frac{n+3}{2}}-2b_{\frac{n+1}{2}}+b_{\frac{n-1}{2}})][3B^2_{\frac{n+1}{2}}+2B_{\frac{n+1}{2}}B_{\frac{n-1}{2}}-B^2_{\frac{n-1}{2}}]}{2}$, n tek

(iv) $\dfrac{[(b_{\frac{n+2}{2}}-b_{\frac{n}{2}})(b_{\frac{n+4}{2}}-2b_{\frac{n+2}{2}}+b_{\frac{n}{2}})][3B^2_{\frac{n+2}{2}}+2B_{\frac{n+2}{2}}B_{\frac{n}{2}}-3B^2_{\frac{n}{2}}]}{2}$, n çift

sayıları birer kongruent sayıdır (Gözeri ve ark. 2013).

3. Bölümde oblong sayıları ele alınmış ve bu sayılar ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar elde edilmişti. Bu sayıların balans sayıları ile olan ilişkisi ise aşağıdaki teoremdeki gibidir.

4.23 Teorem. Oblong ve balans sayıları için

(i) $\left(\dfrac{3B_n-B_{n-1}-1}{2}\right)$. oblong sayısının yarısı, n. balans sayısının karesi, yani

$$\frac{O_{\left(\frac{3B_n-B_{n-1}-1}{2}\right)}}{2} = B_n^2$$

dir.

(ii) $\left(\dfrac{b_{n+1}-3b_n-2}{2}\right)$. oblong sayısının yarısı, n. cobalans sayısının karesi ile kendisinin toplamı, yani

$$\frac{O_{\left(\frac{b_{n+1}-3b_n-2}{2}\right)}}{2}=b_n^2+b_n$$

dir.

(iii) $\left(\dfrac{C_n-1}{2}\right)$. oblong sayısının dört katının bir fazlası, n. Lucas balans sayısının karesi, yani

$$4O_{\left(\frac{C_n-1}{2}\right)}+1=C_n^2$$

dir.

(iv) $\left(\dfrac{c_n-1}{2}\right)$. oblong sayısının dört katının bir fazlası, n. Lucas cobalans sayısının karesi, yani

$$4O_{\left(\frac{c_n-1}{2}\right)}+1=c_n^2$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

İspat. (i) Balans ve cobalans sayısı arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\\
&= \frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\\
&= \frac{\alpha^{2n-1}(\alpha-\alpha^{-1})-\beta^{2n-1}(\beta-\beta^{-1})-4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\\
&= \frac{\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}-\dfrac{\alpha^{2n-2}-\beta^{2n-2}}{4\sqrt{2}}-1}{2}\\
&= \frac{B_n-B_{n-1}-1}{2}
\end{aligned}$$

dir. Buna göre k. oblong sayısı için $\dfrac{O_k}{2}=B_n^2$ eşitliğinden

$$k^2+k-2B_n^2=0 \Rightarrow k=\frac{-1+\sqrt{1+8B_n^2}}{2}$$

elde edilir. Diğer yandan balans ve cobalans sayıları arasındaki

$$b_n=\frac{B_n-B_{n-1}-1}{2}$$

ilişki dikkate alınırsa (4.2) eşitliğinden

$$b_n=\frac{B_n-B_{n-1}-1}{2}=\frac{-(2B_n+1)+\sqrt{1+8B_n^2}}{2}$$

olduğu görülür. O halde

$$\frac{B_n-B_{n-1}-1}{2}=-B_n+\frac{-1+\sqrt{1+8B_n^2}}{2}=-B_n+k$$

ve böylece $k=\frac{3B_n-B_{n-1}-1}{2}$ olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{O_{\left(\frac{3B_n-B_{n-1}-1}{2}\right)}}{2}=B_n^2$$

dir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

5. $x^2-(t^2-t)y^2-(4t-2)x+(4t^2-4t)y=0$ DIOPHANTINE DENKLEMİ

Bu bölümde $t\geq 2$ tamsayısı için

$$D: x^2-(t^2-t)y^2-(4t-2)x+(4t^2-4t)y=0 \tag{5.1}$$

Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri, $\mathbb{Z}$ de ve $p\geq 5$ asalı için sonlu $\mathbb{F}_p$ cisminde ele alınacak ve bu çözümleri arasında indirgeme bağıntıları elde edilecektir.

h ve k herhangi iki sabit sayı olmak üzere

$$T:\begin{cases} x=u+h \\ y=v+k \end{cases} \tag{5.2}$$

öteleme dönüşümü ele alınsın. Bu durumda $\{h,k\}$ ikilisine T dönüşümünün bazı (tabanı) denir ve $T[h,k]=\{h,k\}$ ile gösterilir.

(5.1) de verilen Diophantine denklemine bu T dönüşümü uygulanırsa

$$T(D)=\widetilde{D}:(u+h)^2-(t^2-t)(v+k)^2-(4t-2)(u+h)+(4t^2-4t)(v+k)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{D}: u^2-(t^2-t)v^2+u(2h-4t+2)+v(-2kt^2+2tk+4t^2-4t)\\ +h^2-t^2k^2+tk^2-4th+2h+4t^2k-4tk=0\end{aligned}$$

elde edilir. u ve v nin katsayıları sıfır olacağından

$$h=2t-1 \text{ ve } k=2 \tag{5.3}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $x=u+2t-1$ ve $y=v+2$ olduğundan (5.1) deki Diophantine denklemi

$$\widetilde{D}: u^2-(t^2-t)v^2=1 \tag{5.4}$$

Pell denklemine indirgenmiş olur. Burada ilk olarak bu Pell denkleminin tamsayı çözümleri ele alınacak, bu çözümler arasında bağıntılar ve indirgeme formülleri elde edilecektir. Daha sonra bu Pell denkleminin tamsayı çözümleri $p \geq 5$ asalı için sonlu $\mathbb{F}_p$ cisminde ele alınacaktır. Son olarak elde edilen tüm sonuçlar T dönüşümünün tersi ile (5.1) de verilen Diophantine denklemine taşınacaktır.

5.1 Teorem. (5.4) de tanımlanan $\widetilde{D}$ Pell denklemi için

(i) $\sqrt{t^2 - t}$ nin basit sürekli kesirli açılımı

$$\sqrt{t^2 - t} = \begin{cases} [1; \overline{2}] & t = 2 \text{ ise} \\ [t-1; \overline{2, 2t-2}] & t > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

(ii) Denklemin temel çözümü $(u_1, v_1) = (2t-1, 2)$ dir.

(iii) $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t-1 & 2t^2 - 2t \\ 2 & 2t-1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere denklemin tüm tamsayı çözümleri (u_n, v_n) şeklindedir.

(iv) Denklemin (u_n, v_n) çözümleri arasında $n \geq 2$ için

$$u_n = (2t-1)u_{n-1} + (2t^2 - 2t)v_{n-1} \text{ ve } v_n = 2u_{n-1} + (2t-1)v_{n-1}$$

bağıntısı vardır.

(v) Denklemin (u_n, v_n) çözümleri $n \geq 4$ için

$$u_n = (4t-3)(u_{n-1} + u_{n-2}) - u_{n-3} \text{ ve } v_n = (4t-3)(v_{n-1} + v_{n-2}) - v_{n-3}$$

indirgeme bağıntısını gerçekler.

(vi) $n \geq 1$ için denklemin (u_n, v_n) tamsayı çözümü

$$\frac{u_n}{v_n} = \left[t-1; \underbrace{2, 2t-2, \cdots, 2, 2t-2}_{n-1 \text{ tane}}, 2 \right]$$

basit sürekli kesirli açılımı ile de verilebilir (Özkoç ve Tekcan 2010).

İspat. (i) $t = 2$ olsun. Bu takdirde $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ olduğu açıktır. $t > 2$ için

$$\sqrt{t^2 - t} = t - 1 + (\sqrt{t^2 - t} - t + 1) = t - 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{t^2 - t} - (t-1)}}$$

$$= t-1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{t^2-t}+t-1}{t-1}} = t-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{t^2-t}-t+1}{t-1}}$$

$$= t-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{t-1}{\sqrt{t^2-t}-t+1}}} = t-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{t^2-t}+t-1}}$$

$$= t-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2t-2+(\sqrt{t^2-t}-t+1)}}$$

olduğundan $\sqrt{t^2-t}=[t-1;\overline{2,2t-2}]$ dir.

(ii) $\sqrt{t^2-t}=[t-1;\overline{2,2t-2}]$ olduğundan Sonuç 1.2.8 gereği denklemin temel çözümü $(u_1,v_1)=(2t-1,2)$ dir.

(iii) Denklemin temel çözümü $(u_1,v_1)=(2t-1,2)$ olduğundan Teorem 1.2.10 gereği denklemin tüm tamsayı çözümleri

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t-1 & 2t^2-2t \\ 2 & 2t-1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (u_n,v_n) şeklindedir.

(iv-v) Denklemin temel çözümü $(u_1,v_1)=(2t-1,2)$ olduğundan Teorem 1.2.11 gereği denklemin (u_n,v_n) çözümleri arasında $n\geq 2$ için

$$u_n=(2t-1)u_{n-1}+(2t^2-2t)v_{n-1} \text{ ve } v_n=2u_{n-1}+(2t-1)v_{n-1}$$

şeklinde bir bağıntı ve $n\geq 4$ için

$$u_n=(4t-3)(u_{n-1}+u_{n-2})-u_{n-3} \text{ ve } v_n=(4t-3)(v_{n-1}+v_{n-2})-v_{n-3}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı olduğu açıktır.

(vi) Teorem 1.2.7 (i) den görülür.

5.2 Örnek. $t=4$ olsun. Bu takdirde $\widetilde{D}:u^2-12v^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü $(u_1,v_1)=(7,2)$ ve bazı tamsayı çözümleri

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1351 \\ 390 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18817 \\ 5432 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262087 \\ 75658 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Denklemin tamsayı çözümleri arasında $n \geq 2$ için

$$u_n = 7u_{n-1} + 24v_{n-1} \text{ ve } v_n = 2u_{n-1} + 7v_{n-1}$$

şeklinde bir bağıntı ve $n \geq 4$ için

$$u_n = 13(u_{n-1} + u_{n-2}) - u_{n-3} \text{ ve } v_n = 13(v_{n-1} + v_{n-2}) - v_{n-3}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı vardır. Ayrıca denklemin yukarıdaki tamsayı çözümleri sürekli kesirli açılım cinsinden

$$\frac{u_2}{v_2} = [3; 2, 6, 2] = \frac{97}{28}$$

$$\frac{u_3}{v_3} = [3; 2, 6, 2, 6, 2] = \frac{1351}{390}$$

$$\frac{u_4}{v_4} = [3; 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2] = \frac{18817}{5432}$$

$$\frac{u_5}{v_5} = [3; 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2] = \frac{262087}{75658}$$

olarak da elde edilebilir.

Bu bölümde, neden $D: x^2 - (t^2 - t)y^2 - (4t - 2)x + (4t^2 - 4t)y = 0$ şeklinde bir Diophantine denkleminin ele alındığı merak edilebilir. Bunun sebebi aşağıdaki sonuçta da görüleceği üzere, bu Diophantine denklemine uygulanan T dönüşümünün bazının, $\widetilde{D}$ Pell denkleminin temel çözümüne karşılık gelmesidir.

5.3 Sonuç. (5.2) deki T dönüşümünün tabanı $\widetilde{D}$ Pell denkleminin temel çözümü, yani

$$T[h, k] = \{h, k\} = \{u_1, v_1\}$$

dir (Özkoç ve Tekcan 2010).

İspat. Teorem 5.1 de $\widetilde{D}$ Pell denkleminin temel çözümünün $(u_1, v_1) = (2t-1, 2)$ olduğu görüldü. Diğer yandan T dönüşümü için $h = 2t-1$ ve $k = 2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$T[h,k] = \{h,k\} = \{2t-1, 2\}$$

olduğu açıktır.

Şimdi $\widetilde{D}$ Pell denklemi için yukarıda elde edilen sonuçlar T dönüşümünün tersi ile D Diophantine denklemine taşınabilir. $x = u + 2t - 1$ ve $y = v + 2$ olduğu dikkate alınırsa D Diophantine denklemi için aşağıdaki teorem verilebilir.

5.4 Teorem. (5.1) deki D Diophantine denklemi için

(i) Denklemin temel çözümü $(x_1, y_1) = (4t-2, 4)$ dür.

(ii) $\{(u_n, v_n)\}$ dizisi yardımıyla

$$\{(x_n, y_n)\} = \{(u_n + 2t - 1, v_n + 2)\}, \ n \geq 1$$

tanımlanan dizi için (x_n, y_n) tamsayı ikilisi, D Diophantine denkleminin bir çözümüdür. Şu halde denklemin sonsuz çoklukta $(x_n, y_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tamsayı çözümü vardır. Üstelik tüm tamsayı çözümleri bu şekildedir.

(iii) Denklemin (x_n, y_n) çözümleri arasında $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} x_n &= (2t-1)x_{n-1} + (2t^2 - 2t)y_{n-1} - 8t^2 + 10t - 2 \\ y_n &= 2x_{n-1} + (2t-1)y_{n-1} - 8t + 6 \end{aligned}$$

bağıntısı ve $n \geq 4$ için

$$\begin{aligned} x_n &= (4t-3)(x_{n-1} + x_{n-2}) - x_{n-3} - 16t^2 + 24t - 8 \\ y_n &= (4t-3)(y_{n-1} + y_{n-2}) - y_{n-3} - 16t + 16 \end{aligned}$$

indirgeme bağıntısı vardır (Özkoç ve Tekcan 2010).

İspat. Teorem 5.1 in ispatına benzer yolla yapılabilir.

Şimdi D Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri $p \geq 5$ asalı için sonlu $\mathbb{F}_p$ cisminde ele alınabilir. Ancak bunun için ilk olarak ikinci dereceden kalan tanımına ihtiyaç vardır.

5.5 Tanım. $a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$ ve $(a,n)=1$ olmak üzere

$$x^2 \equiv a(\operatorname{mod} n)$$

olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Z}$ varsa a ya modülo n de bir ikinci dereceden kalan denir. İkinci dereceden kalanların kümesi Q_n ile gösterilir (Mollin 2008).

$t \neq 0,1$ olmak üzere $t^2 - t \equiv d\,(\operatorname{mod} p)$ olarak tanımlanırsa $\widetilde{D}$ Pell denklemi

$$\widetilde{D}_p^d : u^2 - dv^2 \equiv 1\,(\operatorname{mod} p) \tag{5.5}$$

Pell denklemine indirgenmiş olur. Bu denklemin tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\widetilde{D}_p^d(\mathbb{F}_p) = \{(u,v) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p : u^2 - dv^2 \equiv 1\,(\operatorname{mod} p)\}$$

ile gösterilirse aşağıdaki teorem verilebilir.

5.6 Teorem. (5.5) deki $\widetilde{D}_p^d$ Pell denklemi için

$$\#\widetilde{D}_p^d(\mathbb{F}_p) = \begin{cases} p-1 & d \in Q_p \text{ ise} \\ p+1 & d \notin Q_p \text{ ise} \end{cases}$$

dir (Özkoç ve Tekcan 2010).

İspat. $d \in Q_p$ olsun.

1. Hal. $p \equiv 1,5\,(\operatorname{mod} 8)$ olsun. Eğer $v=0$ ise

$$u^2 \equiv 1(\operatorname{mod} p) \Leftrightarrow u \equiv \pm 1(\operatorname{mod} p)$$

dir. Dolayısıyla $\widetilde{D}_p^d$ Pell denkleminin $(1,0)$ ve $(p-1,0)$ gibi iki tamsayı çözümü vardır. Eğer $u=0$ ise

$$-dv^2 \equiv 1\,(\operatorname{mod} p)$$

olur. Bu takdirde $d \in Q_p$ olduğundan bu kongrüansın v_1, v_2 gibi iki çözümü ve böylece $\widetilde{D}_p^d$ Pell denkleminin $(0,v_1)$ ve $(0,v_2)$ gibi iki çözümü vardır. $S_p = \mathbb{F}_p^* - \{1, p-1\}$ olsun. Bu takdirde $\dfrac{u^2-1}{d}$ ifadesi tam kare olacak şekilde S_p de $\dfrac{p-5}{2}$ tane u elemanı vardır. O halde belli bir $c \neq 0$ tamsayısı için $\dfrac{u^2-1}{d} = c^2$ denilirse

$$v^2 \equiv c^2\,(\operatorname{mod} p) \Leftrightarrow v \equiv \pm c\,(\operatorname{mod} p)$$

olur. Dolayısıyla $\widetilde{D}_p^d$ Pell denkleminin (u,c) ve $(u,p-c)$ gibi iki çözümü vardır. S_p deki her bir u değeri için $\widetilde{D}_p^d$ Pell denkleminin bu şekilde iki çözümü olduğundan denklemin $2(\frac{p-5}{2}) = p-5$ tane çözümü vardır. Yukarıda elde edilen çözümler de dikkate alınırsa denklemin toplam $p-5+4 = p-1$ tane çözümünün olduğu görülür.

2.Hal. $p \equiv 3,7 \,(\mathrm{mod}\, 8)$ olsun. Eğer $v = 0$ ise

$$u^2 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p)$$

olduğundan bu kongrüansın $u = 1$ ve $u = p-1$ gibi iki çözümü vardır. Dolayısıyla $\widetilde{D}_p^d$ Pell denkleminin $(1,0)$ ve $(p-1,0)$ gibi iki çözümü vardır. Eğer $u = 0$ ise

$$-dv^2 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p)$$

kongrüansının çözümü yoktur, yani $\widetilde{D}_p^d$ Pell denkleminin $(0,v)$ gibi bir çözümü yoktur. Üstelik S_p de $\frac{u^2-1}{d}$ tam kare olacak şekilde $\frac{p-3}{2}$ tane u elemanı vardır. Eğer $j \neq 0$ için $\frac{u^2-1}{d} = j^2$ denilirse

$$v^2 \equiv j^2 \,(\mathrm{mod}\, p) \Leftrightarrow v \equiv \pm j \,(\mathrm{mod}\, p)$$

olur. Bu ise $\widetilde{D}_p^d$ Pell denkleminin (u,j) ve $(u,p-j)$ gibi iki çözümünün olması demektir, yani S_p deki her bir u elemanı için $\widetilde{D}_p^d$ Pell denkleminin iki çözümü vardır. Dolayısıyla denklemin $2(\frac{p-3}{2}) = p-3$ tane çözümü vardır. Ayrıca $(1,0)$ ve $(p-1,0)$ da bu denklemin birer çözümü olduğundan denklemin $p-3+2 = p-1$ tane çözümü vardır. Şu halde her iki halde de $d \in Q_p$ için $\widetilde{D}_p^d$ Pell denkleminin $p-1$ tane çözümü vardır. Benzer şekilde $d \notin Q_p$ iken denklemin $p+1$ tane çözümünün olduğu da gösterilebilir.

5.7 Örnek. $p = 7$ için $Q_7 = \{1,2,4\}$ dir. $t = 4$ için $4^2 - 4 \equiv 5 \,(\mathrm{mod}\, 7)$ olduğundan

$$\widetilde{D}_7^5 : u^2 - 5v^2 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 7)$$

Pell denklemi elde edilir. Bu denklemin tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\widetilde{D}_7^5(\mathbb{F}_7)=\{(0,2),(0,5),(1,0),(2,3),(2,4),(5,3),(5,4),(6,0)\}$$

dır. Buna göre $\#\widetilde{D}_7^5(\mathbb{F}_7)=8$ dir. Benzer şekilde $t=6$ için $6^2-6\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$ olduğundan

$$\widetilde{D}_7^2: u^2-2v^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$$

dir. Bu Pell denkleminin tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\widetilde{D}_7^2(\mathbb{F}_7)=\{(1,0),(3,2),(3,5),(4,2),(4,5),(6,0)\}$$

dır. Buna göre $\#\widetilde{D}_7^2(\mathbb{F}_7)=6$ dır.

Son olarak D Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri sonlu $\mathbb{F}_p$ cisminde ele alınırsa bu denklemin tamsayı çözümlerinin kümesi

$$D(\mathbb{F}_p)=\{(x,y)\in\mathbb{F}_p\times\mathbb{F}_p: x^2-(t^2-t)y^2-(4t-2)x+(4t^2-4t)y\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)\}$$

için aşağıdaki teorem verilebilir.

5.8 Teorem. D Diophantine denklemi için

$$\#D(\mathbb{F}_p)=\begin{cases} p-1 & t^2-t\in Q_p \text{ ise} \\ p+1 & t^2-t\notin Q_p \text{ ise}\end{cases}$$

dir (Özkoç ve Tekcan 2010).

İspat. Bir önceki teoreme benzer şekilde gösterilebilir.

KAYNAKLAR

Andreescu, T., Andrica, D. and Cucurezeanu I. 2010. An Introduction to Diophantine Equations. Springer, New York,Dordrecht, Heidelberg, London, 339 pp.

Barbeau, E., 2003. Pell's Equation. Springer-Verlag, New York, Inc. 212 pp.

Behera A., Panda G. K 1999. On the Square Roots of Triangular Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* 37(2): 98-105.

Buchmann J. and Vollmer U. 2007. Binary Quadratic Forms: An algorithmic Approach. Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, 150 pp.

Buell D. A. 1989. Binary Quadratic forms, Clasical Theory and Modern Computations. Springer-Verlag, New York, 243 pp.

Edward, H. P. 1996. Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Num-ber Theory. Corrected reprint of the 1977 original. Graduate Texts in Mathematics, 50. Springer-Verlag, New York, 401 pp.

Flath D. E. 1989. Introduction to Number Theory. Wiley, 205 pp.

Gözeri G. K., Özkoç A. and Tekcan A. 2013. *On Oblong and Balancing Numbers*. Yayına gönderildi.

Jacobson M., Williams H. 2010. Solving the Pell Equation, CMS Books in Mathematics, Springer, 495 pp.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Pure and Applied Mathematics A Wiley-Interscience Series of Texts, monographs and Tracts, 652 pp.

Mollin R. A. 2008. Fundamental Number Theory with Applications. CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, 369 pp.

Mollin R. A. 2010. Advanced Number Theory with Applications CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, 466 pp.

Özkoç A., Tekcan, A. 2010. Quadratic Diophantine Equation $x^2-(t^2-t)y^2-(4t-2)x+(4t^2-4t)y=0$. *Bull. of the Malaysian Math. Sci. Soc.* 33(2): 273-280.

Panda G. K., Ray P. K. 2005. Cobalancing Numbers and Cobalancers. *Int. J. Math. Sci.* 8: 1189-1200.

Panda G. K. 2009. Some Fascinating Properties of Balancing Numbers. *Proceedings of the Eleventh International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications*, Cong. Numer. 194: 185-189.

Ray P. K. 2009. Balancing and Cobalancing Numbers. PhD thesis, Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.

Panda G. K., Ray P. K. 2011. Some Links of Balancing and Cobalancing Numbers with Pell and Associated Pell Numbers. *Bul. of Inst. of Math. Acad. Sinica* 6(1): 41-72.

Ribenboim P. 2000. My Numbers, My Friends, Popular Lectures on Number Theory, Springer-Verlag, New York, Inc, 375 pp.

Santana S. F., Diaz-Barrero J. L. 2006. Some Properties of Sums Involving Pell Numbers. *Missouri Journal of Mathematical Science* 18(1): 33-40.

Tekcan A., Özkoç, A., Kocapınar, C., Alkan, H. 2010. The Diophantine Equation $x^2 - Py^2 = Q$. *Int. Jour. of Comp. and Math.Sci.* 4(2): 59-62.

Tekcan A., Özkoç A., and Özbek M. E. 2012. Representation of Primes, Integer Sequence and Pell Equation. Yayına gönderildi.

Tekcan A., Özkoç A. 2013. Pell Form and Pell Equation via Oblong Numbers. *Serdica Mathematical Journal*. 39: 37-52.

Tekcan A., Özkoç A., Engür M. and Özbek M. E. 2013a. On Algebraic Identities on a New Integer Sequence with Four Parameters. *Ars Combinatorica* dergisinde yayına kabul edildi.

http://oeis.org/ (tamsayı dizileri on-line ansiklopedisi)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Arzu ÖZKOÇ
Doğum Yeri ve Tarihi: Antalya, 04.12.1984
Yabancı Dil: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):
   Lise: Antalya Anadolu Lisesi, 2003
   Lisans: Uludağ Üniversitesi, 2007
   Yüksek Lisans: Uludağ Üniversitesi, 2009
   Doktora: Uludağ Üniversitesi, 2013
Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:
İletişim: arzuozkoc@gmail.com
Yayınları:

1. **Tekcan A., Özkoç A., Gezer B., Bizim O. 2008.** Some Relations Involving the Sums of Fibonacci Numbers. *Proc. of the Jangjeon Math. Soc.* 11(1): 1-12.
2. **Tekcan A., Özkoç A., Gezer B., Bizim O. 2008.** Elliptic Curves, Conics and Cubic Congruences Associated with Indefinite Binary Quadratic Forms. *Novi Sad J. Math.* 38(2): 71-81.
3. **Tekcan A., Özkoç A. 2009.** Quadratic Irrationals, Quadratic Ideals and Indefinite Quadratic Forms II. *Int. Jour. of Comp.and Math. Sci.* 3(2): 56-59.
4. **Tekcan A., Özkoç A. 2009.** Positive Definite Binary Quadratic Forms, Quadratic Congruences and Singular Curves. *Comptes Rendus Mathématiques-Mathematical Reports* 31(2): 53-64.
5. **Tekcan A., Özkoç A., Alkan H. 2009.** The Diophantine Equation $y^2-2yx-3=0$ and Corresponding Curves over $\mathbb{F}_p$. *Int. Jour. of Comp. and Math. Sci* 3 (6): 260-263.
6. **A.Tekcan, A.Özkoç 2010.** The Diophantine Equation $x^2-(t^2+t)y^2-(4t+2)x$ $(4t^2+4t)y=0$. *Revista Matemática Complutense* 23: 251-260. (SCI-Exp)
7. **Tekcan A., Özkoç A., Kocapınar C., Alkan H. 2010.** The Diophantine Equation $x^2-Py^2=Q$. *Int. Jour. of Comp. and Math.Sci.* 4(2): 59-62.
8. **Özkoç A., Tekcan A. 2010.** Quadratic Diophantine Equation $x^2-(t^2-t)y^2-(4t-2)x+(4t^2-4t)y=0$. *Bul. of the Malaysian Math. Sci. Soc.* 33(2): 273-280. (SCI-Exp)
9. **Tekcan A., Özkoç A. 2010.** *n*-Universal Quadratic Forms and Quadratic Forms over Finite Fields. *Bulletin of Irish Math. Society* 65: 11-21.
10. **Tekcan A., Özkoç A., Cangül İ.N. 2010.** Indefinite Quadratic Forms and their Neighbours. *Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2011 AIP Conf. Proc.* 1281: 1102-1105. (SCI-Exp)
11. **Tekcan A., Özkoç A., Alkan H. 2010**. On Cycles and Products of Ideals and Corresponding Indefinite Quadratic Forms. *Comptes Rendus Math. Mat. Reports* 32(2): 40-51.
12. **Tekcan A., Alkan H., Özkoç A., Çetin E., Cangül İ. N. 2010.** Rational Points on Curves over Finite Fields. *Ant. Jour. of Mathematics* 7(4): 431-437.

13. **Özkoç A., Tekcan A. 2010.** The Family of Indefinite Binary Quadratic Forms and Elliptic Curves over Finite Fields. *General Mathematics* 18(4): 3-17.
14. **Tekcan A., Özkoç A., Çetin E., Alkan H., Cangül İ. N. 2011.** Quadratic Forms, Elliptic Curves and Integer Sequence. *Acta Universitatis Apulensis* 25: 9-30.
15. **Tekcan A., Özkoç A. 2011.** *n*-Universal Quadratic Forms, Quadratic Ideals and Elliptic Curves over Finite Fields. *Math. Reports* 13(2): 205-216. (SCI-Exp)
16. **Özkoç A., Tekcan A. 2011.** Integer Solutions of a Special Diophantine Equation. *Num. Anal. and Appl. Maths. ICNAAM 2011 AIP Conf. Proc.* 1389: 371-374. (SCI-Exp)
17. **Özkoç A., Tekcan A.**, **Cangül İ. N. 2011.** Solving Some Parametric Quadratic Diophantine Equation over $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{F}_p$. *Applied Maths. and Computation* 218: 703-706. (SCI)
18. **Tekcan A., Özkoç A., Gezer B., Bizim O. 2011.** Representations of Positive Integers by Positive Quadratic Forms. *Southeast Asian Bulletin of Maths.* 35(1): 137-148.
19. **Tekcan A., Özkoç A. 2013.** Pell Form and Pell Equation via Oblong Numbers. *Serdica Mathematical Journal*. 39: 37-52.
20. **Tekcan A., Özkoç A., Özbek M. E.** Sequences of Right and Left Neighbours of Six Type Intedifinite Binary Quadratic Forms and their Proper Automorphisms. *Journal of Mathematical Sciences*: *Advances and Applications* dergisinde yayına kabul edildi.
21. **Kocapınar C., Özkoç A., Tekcan A.** The Integer Sequence $B = B_n(P,Q)$ with Parameters P and Q. *Ars Combinatoria* dergisinde yayına kabul edildi. (SCI-Exp)
22. **Tekcan A., Özkoç A., Özbek M. E.** Some Algebraic Relations on Integer Sequences Involving Oblong and Balancing Numbers. *Ars Combinatoria* dergisinde yayına kabul edildi. (SCI-Exp)
23. **Özkoç A., Tekcan A., Gözeri G. K.** Triangular and Square Triangular Numbers Involving Generalized Pell Numbers. *Utilitas Mathematica* dergisinde yayına kabul edildi. (SCI-Exp)
24. **Tekcan A., Özkoç A., Engür M., Özbek M. E.** On Algebraic Identities on a New Integer Sequence with Four Parameters. *Ars Combinatoria* dergisinde yayına kabul edildi. (SCI-Exp)