T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK DİFERANSİYEL VE FARK DENKLEMİ İÇİN YEREL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Elif ÖZTÜRK

Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL
(Birinci Danışman)

Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV
(İkinci Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2013

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Elif ÖZTÜRK tarafından hazırlanan "Eliptik Diferansiyel ve Fark Denklemi için Yerel Olmayan Sınır Değer Problemleri" tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman :Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL

İkinci Danışman :Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV, Fatih Üniversitesi

Üye: Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV
Fatih Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. İlhan TAPAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Nisa ÇELİK
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
2013

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

17/06/2013

İmza

Elif ÖZTÜRK

ÖZET

Doktora Tezi

ELİPTİK DİFERANSİYEL VE FARK DENKLEMİ İÇİN YEREL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Elif ÖZTÜRK

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL

İkinci Danışman: Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV (Fatih Üniversitesi)

Bu tezde, Hilbert uzayında, kendisine eşlenik pozitif tanımlı, A operatörlü, integral şartlı, eliptik diferansiyel denklemler için lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu sınır değer probleminin iyi konumlanmışlığı ağırlıklı Hölder uzaylarında doğruluğu ortaya konulmuştur. Eliptik denklemlerde integral şartlı Bitsadze-Samarskii lokal olmayan sınır değer probleminin çözümleri için koersif kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bu probleminin yaklaşık çözümü için birinci, ikinci ve dördüncü mertebeden fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının çözümleri için kararlılık kestirimleri, koersif eşitsizlikleri ve hemen hemen koersif eşitsizlikleri sağlanmıştır. Hölder uzaylarında bu fark şemalarının çözümü için iyi konumlanmışlığı ispatlanmıştır. Fark şemalarının çözümü için bulunan teorik sonuçlar, sayısal örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bitsadze-Samarskii Problemi, Eliptik Denklem, Fark Şemaları, Kararlılık Kestirimi

2013, **ix + 148 sayfa.**

ABSTRACT

PhD THESIS

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS

Elif ÖZTÜRK

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezayi HIZLIYEL

Second Supervisor: Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV (Fatih University)

In this thesis, Bitsadze-Samarskii nonlocal boundary value problem with integral contion for elliptic differential equation in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operators A is considered. The well-posedness of this problem in Hölder spaces with a weight is established. The coercivity inequalities for the solutions of the nonlocal boundary value problem with integral condition for elliptic equation are obtained. The first, second and fourth orders of accuracy difference schemes for the approximate solutions of this nonlocal boundary value problem are presented. The stability estimates, coercivity and almost coercivity inequalities for the solution of these difference schemes are established. The well-posedness of these difference schemes in Hölder spaces with a weight is proved. The theoretical statements for the solution of these difference schemes are supported by the results of numerical examples.

Keywords: Bitsadze-Samarskii Problem, Elliptic Equation, Difference Schemes, Stability Estimates

2013, **ix + 148 pages.**

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER

Bu tez çalışması sırasında yaptığı değerli katkılar için, benden maddi ve manevi hiç bir yardımı esirgemeyen, değerli tavsiyeleriyle akademik hayatımda sürekli yol gösterici olan danışmanlarım Prof. Dr. Allaberen Ashyralyev ve Doç. Dr. Sezayi Hızlıyel'e sonsuz teşekkür ederim.

Bu çalışma sırasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Elif ÖZTÜRK

17/ 06 /2013

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Eliptik tipteki kısmi diferansiyel denklemler akışkanlar mekaniğinde, dinamik, elastikiyet ve diğer mühendislik alanlarında, fizikte, biyolojik sistemlerin birçok problemlerinde görülür.

Eliptik denklemler için basit lokal olmayan sınır değer problemi ilk kez A. V. Bitsadze ve A.A Samarskii Gürcü iki matematikçi tarafından keşfedilmiştir. (1969). Bu problemi diğer problemlerden ayıran noktası; sınır değerlerden biri bilinmektedir. Diğer sınır değer şartı herhangi bir değer ile arasındaki bağıntıyı içermesidir. Örneğin,

$$u(1) = \int_0^1 \rho(\lambda)\, u(\lambda) d\lambda + \psi$$

Bitsadze-Samarskii şartı olarak adlandırılır. A. V. Bitsadze ve A.A Samarskii (1969) çalışmasından sonra birçok denkleme Bitsadze-Samarskii tipinde problem yerleştirilmiştir. Birçok makale yayınlanmıştır. Örneğin, hiperbolik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipinde problem için şu yayınlar gösterilebilir: Salakhitdinov ve Mirsaburov (2002), Salakhitdinov ve Mirsaburov (1999), Kozhanov (2010), Akhmedov (1985). Literatür taraması sırasında parabolik hiperbolik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipinde problem için şu yayınlarla karşılaşılmıştır: Bazarov (1989), Berdyshev (2005). Parabolik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipinde problem için; Cherepova (1986), Stikonas ve Stikoniene (2009), Ivanauskas ve Meskauskas (2009), gibi araştırmacıların çalışmalarına ulaşılmıştır. Eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipinde problem için; Gordeziani (1970), Kapanadze (1987), Skubachevskii (1984), Skubachevskii (1985), Soldatov (2005), Soldatov (2006), Ashyralyev (2010), Ashyralyev (2008) yayınlarına ulaşılmıştır. Birçok araştırmacı tarafından eliptik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemlerin çözüm yöntemi çalışılmıştır (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004), (Ashyralyev 2008), (Berikelashvili 2003). Diğer taraftan eliptik denklemlerin fark şemalarının kararlılığı ve diferansiyel problemin kararlı koersif kestirimleri üzerine önemli araştırmacılar ve araştırmalar vardır (Ashyralyev ve Altay 2006), (Ashyralyev 1999), (Ashyralyev ve arkd 2008), (Sapagovas 2008).

Ashyralyev'in (2008) yayınında Banach uzayında pozitif operatörlü Bitsadze-Samarskii tipinde lokal olmayan sınır değer problemi ele alınmıştır. Düzgün fonksiyonlar uzayında bu sınır değer probleminin iyi konumlandığı kanıtlanmıştır. Eliptik denklemler için sınır değer probleminin çözümlerinin yeni tam Shölder kestirimleri elde edilmiştir.

Sapagovas'ın (2008) çalışmasında lokal olmayan sınır şartlarıyla iki boyutlu Poisson denklemi dikdörtgen bölgede incelenmiştir. Bu problem için dördüncü mertebeden yaklaşık bir fark şeması elde edilmiş ve eş fark denklem sistemini çözmek için bir iterasyon metodu doğrulanmış ve fark şemasının çözülebilirliği çalışılmıştır. Bu sistemi temsil eden detaylı bir matris çalışması verilmiştir.

Yüksek lisans olarak Türkiye'de YÖK'e kayıtlı olan tezlere bakıldığında eliptik diferansiyel denklemler için Bitsadze-Samarskii tipinde lokal olmayan sınır değer probleminin sayısal analizi ile alakalı iki çalışmaya rastlanmıştır (Ozturk 2008), (Tetikoğlu 2009). Ozturk (2008) yapılan yüksek lisans çalışmasında eliptik diferansiyel denklemler için lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer problemi

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t), \ 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi, \ u(1) = \sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u(\lambda_j) + \psi, \\ \sum\limits_{j=1}^{J} \left|\alpha_j\right| < 1, \ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_J < 1 \end{cases}$$

Hilbert uzayında ele alınmıştır. Bu problemde A kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatördür.

Bu sınır değer probleminin iyi konumlanmışlığı (well-posed) ağırlıklı Hölder uzaylarında doğruluğu ortaya konulmuştur. Eliptik denklem için Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminin çözümü için koersif (coercive) eşitsizliklerini sağladığı gösterilmiştir. Bu lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için ikinci ve dördüncü dereceden fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının çözümü için kararlılık (stability) kestirimleri ispatlanmıştır. Bu fark şemalarının iyi konumlanmışlığı Hölder uzaylarında kanıtlanmıştır. Fark şemalarının çözümü için koersif eşitsizlikleri, hemen hemen koersif eşitsizlikleri sağlanmıştır.

Eliptik denklemler için fark şemalarının yaklaşık çözümleri bilgisayar programı Matlab ile elde edilmiştir. Bu fark şemalarının çözümü için bulunan teorik sonuçlar, sayısal örneklerle desteklenmiştir.

Bu tezdeki amaç eliptik tipteki kısmi diferansiyel denklemler için Bitsadze-Samarskii lokal olmayan sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerinin fark şemalarının kararlılığını araştırmaktır. Eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii lokal olmayan sınır değer problemi analitik olarak Fourier dönüşümü yöntemi, Fourier serisi yöntemi ve Laplace dönüşümü yöntemi gibi klasik yöntemlerle çözülebilir. Bununla birlikte, bu klasik metotlar, denklem sadece sabit katsayılara sahip olduğunda kullanılabilir. Zaman (t) ve uzay (x) değişkenleri bağımlı katsayılı ise kısmi diferansiyel denklemler çözmek için en kullanışlı yöntem sonlu farklar yöntemidir.

Bu tezde,

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t), \; 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi, \; u(1) = \int_0^1 \rho(\lambda)u(\lambda)d\lambda + \psi \end{cases}$$

problemi H Hilbert uzayında çalışılacaktır. Burada A operatörü kendisine eşlenik pozitif operatördür. Tezde eliptik tipteki kısmi diferansiyel denklemler için integral şartlı lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminin fark şemalarının yaklaşık çözümlerinin kararlılığı araştırılmıştır. İntegral şartlı lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminde kararlılık kestirimleri alınmıştır. Problemin yüksek mertebeden fark şemalarının yaklaşık çözümleri için sonlu fark metotu ve uygulamaları ilgili araştırmalar kullanılmıştır. (Sobolevskii 2005), (Gordeziani 1970).

Eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii probleminin araştırılması konusunda daha önce çalışmalar olmakla beraber, taranan makalelerde ya problemin varlığı ve tekliği, ya da sayısal çözümün varlığı ile ilgilenildiği görülmektedir. Oysaki bu çalışmada Bitsadze-Samarskii probleminin incelenmesi integral şart altında daha kapsamlı olarak ele alınmıştır. Özgün kararlı fark şemalar oluşturulmuş, bunların ispatları verilmiştir. Kurulacak fark şemalar ile yüksek kararlılıkla sayısal çözümlerin elde edilmesi mümkün olmuştur. Belirsiz parametrenin t'ye bağlı olduğu durumlarda problemin koersif kestirimleri için Hölder uzayının da kullanılması gerekebilmekte olup, bu uzayda yapılan çalışmaya rastlanmamıştır.

Bu tez altı bölüm ve eklerden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmıdır.

İkinci bölüm iki alt bölümü içerir. Birinci kısımda, diferansiyel problemin çözüm formülü verilmiştir ve bu problemin ağırlıklı Hölder uzayında iyi konumlanmışlığı gösterilmiştir. İkinci kısımda, eliptik diferansiyel denklemlerin çözümleri için koersif (coercive) kararlılık eşitsizliğini veren teoremleri ve bu teoremlerin ispatlarını içerir.

Üçüncü bölüm, üç alt bölüm ve bu bölümlerinde uygulamalarını içerir. Birinci alt bölümde integral şartlı lokal olmayan Bitsadze-Samarskii probleminin yaklaşık çözümleri için Hilbert uzayında pozitif tanımlı kendisine eşlenik A operatörüyle kararlı birinci mertebeden doğruluk fark şemasının kurulması ele alınmıştır. Probleminin çözümü için bu fark şemasının kararlılık kestirimini, iyi konumlanmışlığı, hemen hemen koersif kestirimlerini sağladığı teoremleri ve ispatlarını içerir. İkinci alt bölümde integral şartlı lokal olmayan Bitsadze-Samarskii probleminin yaklaşık çözümleri için Hilbert uzayında pozitif tanımlı kendisine eşlenik A operatörünü kullanarak ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının kurulması ele alınmıştır. Bu fark şemasının probleminin çözümleri için kararlılık kestirimleri, iyi konumlanmışlığı, hemen hemen koersif kestirimlerini sağladığı teoremleri ve ispatlarını içerir. Üçüncü alt bölümde integral şartlı lokal olmayan Bitsadze-Samarskii probleminin yaklaşık çözümleri için Hilbert uzayında A operatörünü kullanarak dördüncü mertebeden doğruluk fark şemasının kurulması ele alınmıştır. Bu fark şemasının probleminin çözümleri için kararlılık kestirimleri, iyi konumlanmışlığı, hemen hemen koersif kestirimlerini sağladığı teoremleri ve bu teoremlerin ispatlarını içerir. Bu alt bölümler için birer uygulamalar verilmiştir.

Dördüncü bölüm üç alt bölümden oluşur. Sayısal sonuçları ihtiva etmektedir. İntegral koşullu Bitsadze-Samarskii tipinde lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için A operatörü kullanılarak elde edilen birinci, ikinci ve dördüncü mertebeden kararlı doğruluk fark şemalarının nümerik uygulamaları ele alınmıştır. Bu fark şemalarının uyarlanmış Gauss Eliminasyon metodu kullanılarak matrislerden oluşan bir lineer sisteme dönüştürülmesi ele alınmıştır. Ayrıca problemlerin matris sistemindeki çözümleri için, Matlab programı kullanılarak elde edilen grafikler ve hata analizlerini içeren tablolar verilmiştir.

Beşinci bölümde iki alt başlıktan oluşur. Birinci alt başlıkta yarı-lineer eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipinde lokal olmayan sınır değer problemi incelenir. Bu probleminin çözümün varlığı ve tekliği sabit nokta teoremi kullanılarak ispatlanır. İkinci alt başlıkta, yarı-lineer eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipinde lokal olmayan sınır değer problemi için kararlı birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları kurulur. Bu fark şemalarının yaklaşık çözümleri için uyarlamış Gauss Eliminasyon metodu ve iterasyon metodu kullanılmıştır. Problemin matris sistemindeki çözümleri için, Matlab programı kullanılarak elde edilen hata analizini içeren tablolar verilmiştir.

Altıncı bölümde sonuçlar kısmını içerir.

Ekler kısmında Matlab programları sunulmuştur.

2. ELİPTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN İNTEGRAL ŞARTLI BİTSADZE-SAMARSKİİ LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ

2.1. Diferansiyel Durum

Eliptik tipte diferansiyel denklem için H Hilbert uzayında integral şartlı Bitsadze-Samarskii lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t), \ 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi, \ u(1) = \int\limits_0^1 \rho(\lambda)u(\lambda)d\lambda + \psi \end{cases} \tag{2.1.1}$$

ele alınır. Burada A, $D(A) \subset H$ kapalı bölgede kendisine eşlenik pozitif tanımlı bir operatördür. $f(t)$, $[0,1]$ üzerinde tanımlı verilmiş abstract sürekli fonksiyondur ki değerleri H uzayındadır. φ ve ψ $D(A)$'nin elemanları ve $\rho(t)$ skalar fonksiyondur. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, $u(t)$ (2.1.1) probleminin bir çözümü olarak adlandırılır:

i. $u(t)$ $[0,1]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir.

ii. $u(t)$ her $t \in [0,1]$ için $D(A)$ 'ya aittir, ve $Au(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde süreklidir.

iii. $u(t)$ denklemini ve lokal olmayan sınır şartlarını sağlar.

(2.1.1) probleminin bu manada tanımlanan bir çözümü $C([0,1],H)$ uzayında (2.1.1) probleminin şu andan itibaren bir çözümü olarak bakılacaktır. Burada $C([0,1], H)$, $[0,1]$ üzerinde tanımlı ve değerleri H'de olan tüm $\varphi(t)$ sürekli fonksiyonları için

$$\|\varphi\|_{C([0,1],H)} = \max_{0 \le t \le 1} \|\varphi(t)\|_H$$

normuna göre Banach uzayı anlamına gelir. Eğer herhangi bir $\varphi(t) \in C([0,1],H)$ için (2.1.1) problemi $C([0,1],H)$ uzayında tek bir $u(t)$ çözüme sahip ve aşağıdaki koersif

$$\|u''\|_{C([0,1],H)} + \|Au\|_{C([0,1],H)} \le M_c \left[\|f\|_{C([0,1],H)} + \|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H \right]$$

eşitsizliği sağlarsa problem $C([0,1],H)$ uzayında iyi konumlanmıştır denir. Burada M_c, $f(t)$, φ ve ψ'den bağımsızdır. Maalesef, (2.1.1) problemi $C([0,1],H)$ uzayında iyi konumlanmamıştır (ill-posed).

$C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$, $0 < \alpha < 1$ ile, $[0,1]$ üzerinde tanımlı tüm $\varphi(t)$ düzgün H değerli fonksiyonlarının oluşturduğu küme

$$\|\varphi\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)} = \|\varphi\|_{C([0,1],H)} + \sup_{0\le t<t+\tau\le 1} \frac{(1-t)^{\alpha}(t+\tau)^{\alpha}\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}$$

normuyla birlikte oluşturduğu Banach uzayını göstereceğiz.

Eğer herhangi $f(t) \in C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ için (2.1.1) problemi $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayında tek bir $u(t)$ çözüme sahip ve

$$\|u''\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)} + \|Au\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)} \le M(\delta,\alpha)\left[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}\right]$$

koersif eşitsizliği sağlarsa $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayında iyi konumlanmıştır denir. Burada $M(\delta,\alpha)$ φ, ψ ve $f(t)$'den bağımsızdır.

(2.1.1) problemi

$$\int_0^1 |\rho(\lambda)|\, d\lambda < 1 \qquad (2.1.2)$$

şartı altında çalışılacaktır.

Aşağıda, ilerleyen kısımlarda gerekli olacak bazı lemmalar (yardımcı teoremler) verilecektir. Burada ve ilerleyen kısımlarda $B = A^{\frac{1}{2}}$'dir.

Lemma 2. 1 Aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\left\|B^{\alpha}\exp(-tB)\right\|_{H\to H}\le t^{-\alpha},\ 0\le\alpha\le 1, \tag{2.1.3}$$

$$\left\|(I-\exp(-2B))^{-1}\right\|_{H\to H}\le M \tag{2.1.4}$$

burada, M pozitif bir sabittir (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004).

Lemma 2. 2 Herhangi bir $0\le t<t+\tau\le 1$ ve $0\le\alpha\le 1$ için eşitsizliği

$$\left\|\exp(-tB)-\exp(-(t+\tau)B)\right\|_{H\to H}\le M\,\frac{\tau^{\alpha}}{(\tau+t)^{\alpha}} \tag{2.1.5}$$

geçerlidir. Burada M , α, t ve τ ’dan bağımsızdır (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004).

Lemma 2. 3

$$D=\int_0^1\rho(\lambda)(I-e^{-2B})^{-1}(e^{-(1-\lambda)B}-e^{-(1+\lambda)B})d\lambda$$

olsun. Bu takdirde, (2.1.2) kabülü altında $I-D$ operatörü bir

$$P=(I-D)^{-1}$$

terse sahiptir ve aşağıdaki kestirim sağlanır:

$$\|P\|_{H\to H}\le M(\delta). \tag{2.1.6}$$

Burada, M pozitif bir sabittir.

İspat. (2.1.6) kestirimin ispatı

$$\left\langle (I-D)u,u \right\rangle \geq \left(1-\int_0^1 |\rho(\lambda)|\, d\lambda\right)\left\langle u,u \right\rangle \tag{2.1.7}$$

kestirimine dayanır. B ’nin spektral temsilini ve Cauchy eşitsizliği kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle (I-e^{-2B})^{-1}(e^{-(1-\lambda)B}-e^{-(1+\lambda)B})u,u \right\rangle\right| \\
&\leq \left\|(I-e^{-2B})^{-1}(e^{-(1-\lambda)B}-e^{-(1+\lambda)B})u\right\|_H \|u\|_H \\
&\leq \left\|(I-e^{-2B})^{-1}(e^{-(1-\lambda)B}-e^{-(1+\lambda)B})\right\|_{H\to H} \|u\|_H \|u\|_H \\
&\leq \sup_{\delta^{\frac{1}{2}}\leq\mu<\infty} \left|(1-e^{-2\mu})^{-1}(e^{-(1-\lambda)\mu}-e^{-(1+\lambda)\mu})\right| \|u\|_H^2 \\
&\leq e^{-(1-\lambda)\delta^{\frac{1}{2}}} \sup_{\delta^{\frac{1}{2}}\leq\mu<\infty} (1-e^{-2\mu})^{-1}(1-e^{-2\lambda\mu})\left\langle u,u \right\rangle \\
&\leq e^{-(1-\lambda)\delta^{\frac{1}{2}}}\left\langle u,u \right\rangle \\
&\leq \left\langle u,u \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

bulunur. Bu taktirde, üçgen eşitsizliği ve (2.1.8) kestirimini kullanarak

$$\begin{aligned}
\left\langle (I-D)u,u \right\rangle &\geq \left\langle u,u \right\rangle - \left|\left\langle Du,u \right\rangle\right| \geq \left\langle u,u \right\rangle - \int_0^1 |\rho(\lambda)|\, d\lambda \left\langle u,u \right\rangle \\
&= \left(1-\int_0^1 |\rho(\lambda)|\, d\lambda\right)\left\langle u,u \right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir, (2.1.7) kestirimi sağlanır. Böylece, Lemma 2.3 ispatlanmıştır.
Şimdi, (2.1.1) probleminin çözümü için temsil formülü elde edilecektir.

$$-\frac{d^2u(t)}{dt^2}+Au(t)=f(t),\ 0<t<1, u(0)=u_0, u(1)=u_1 \tag{2.1.9}$$

eliptik denklem için sınır değer probleminin bir tek

$$u(t)=(I-e^{-2B})^{-1}\Big\{(e^{-tB}-e^{-(2-t)B})u(0)+(e^{-(1-t)B}-e^{-(1+t)B})u(1)$$
$$-(e^{-(1-t)B}-e^{-(1+t)B})(2B)^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B}-e^{-(1+s)B})f(s)ds\Big\} \tag{2.1.10}$$
$$+(2B)^{-1}\int_0^1(e^{-|t-s|B}-e^{-(t+s)B})f(s)ds$$

çözüme sahiptir (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004). (2.1.10) ve lokal olmayan sınır şartları kullanarak

$$u(0)=\varphi,\ u(1)=\int_0^1\rho(\lambda)[(I-e^{-2B})^{-1}\Big\{(e^{-\lambda B}-e^{-(2-\lambda)B})u(0)+(e^{-(1-\lambda)B}-e^{-(1+\lambda)B})u(1)$$
$$-(e^{-(1-\lambda)B}-e^{-(1+\lambda)B})(2B)^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B}-e^{-(1+s)B})f(s)ds\}$$
$$+(2B)^{-1}\int_0^1(e^{-|\lambda-s|B}-e^{-(\lambda+s)B})f(s)ds]d\lambda+\psi$$

elde edilir. Lemma 2. 3'den:

$$I-\int_0^1\rho(\lambda)(I-e^{-2B})^{-1}(e^{-(1-\lambda)B}-e^{-(1+\lambda)B})d\lambda$$

bir tersi vardır. Böylece,

$$u(1)=P\Bigg[\psi+\int_0^1\rho(\lambda)(I-e^{-2B})^{-1}\Big\{\big(e^{-\lambda B}-e^{-(2-\lambda)B}\big)\varphi$$
$$-(e^{-(1-\lambda)B}-e^{-(1+\lambda)B})(2B)^{-1}\int_0^1(e^{-(1-s)B}-e^{-(1+s)B})f(s)ds\Big\}d\lambda$$
$$+\int_0^1\rho(\lambda)(2B)^{-1}\left(\int_0^{\lambda}e^{-(\lambda-s)B}f(s)ds+\int_{\lambda}^1 e^{-(s-\lambda)B}f(s)ds-\int_0^1 e^{-(\lambda+s)B}f(s)ds\right)d\lambda\Bigg] \tag{2.1.11}$$

dır. Burada

$$P=\left(I-\int_0^1 \rho(\lambda)(I-e^{-2B})^{-1}(e^{-(1-\lambda)B}-e^{-(1+\lambda)B})d\lambda\right)^{-1}$$

dır. Sonuç olarak, $\psi \in D(A)$ $f(t)$.fonksiyonu [0,1] aralığında sürekli diferansiyellenebilir ve $\varphi, \psi \in D(A)$ ise (2.1.10), (2.1.11) formülleri (2.1.1) probleminin çözümünü verir.

Teorem 2.1.1 $\varphi, \psi \in D(A)$ ve $f(t) \in C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ $(0<\alpha<1)$ olsun. Bu takdirde, eğer Hölder uzayında A kendisine eşlenik pozitif tanımlı bir operatör ise (2.1.1) lokal olmayan sınır değer problemi $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ Hölder uzayında iyi konumlanmıştır. $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayında $u(t)$ çözümleri için (2.1.1) lokal olmayan sınır değer problemi:

$$\|u''\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}+\|Au\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)} \le M(\delta)\left[\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}\right]$$

koersif eşitsizliğini sağlar. Burada $M(\delta)$, α, φ, ψ ve $f(t)$'den bağımsızdır.

İspat. (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004)'de, (2.1.9) sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned}&\|u''\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}+\|Au\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}\\ &\quad\le \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}+M(\delta)\left\{\|Au(0)\|_H+\|Au(1)\|_H\right\}\end{aligned} \qquad (2.1.12)$$

koersif eşitsizliği geçerlidir. Bu taktirde, Teorem 2.1.1'in ispatı (2.1.12) koersif eşitsizliğine ve

$$\|Au(1)\|_H \le \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}+M(\delta)\left\{\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H\right\} \qquad (2.1.13)$$

kestirimine dayanır. O halde, (2.1.13) ispatlanmalıdır. İlk başta, (2.1.11) formülünün uygulanmasıyla,

$$
\begin{aligned}
Au(1) = P\Bigg(\int_0^1 \rho(\lambda)\Big((I - e^{-2B})^{-1}\Big\{\Big(e^{-\lambda B} - e^{-(2-\lambda)B}\Big)A\varphi \\
- \Big(e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B}\Big)\frac{B}{2}\int_0^1 \Big(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B}\Big)(f(s) - f(\lambda))ds \\
- \Big(e^{-(1-\lambda)B} - e^{-(1+\lambda)B}\Big)\frac{B}{2}\int_0^1 \Big(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B}\Big)f(\lambda)ds\Big\} + \frac{B}{2}\Bigg(\int_0^1 \Big(e^{-|\lambda-s|B} - e^{-(s+\lambda)B}\Big) \\
\times (f(s) - f(\lambda))ds + \frac{B}{2}\int_0^1 \Big(e^{-|\lambda-s|B} - e^{-(s+\lambda)B}\Big)f(\lambda)dsd\lambda\Bigg) + A\psi\Bigg)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$$\int_0^\lambda Be^{-(\lambda-s)B}ds = I - e^{-\lambda B},$$

$$\int_\lambda^1 Be^{-(s-\lambda)B}ds = I - e^{-(1-\lambda)B},$$

özdeşliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
Au(1) = P\Bigg(\int_0^1 \rho(\lambda)(I - e^{-2B})^{-1}\Big\{\Big(e^{-\lambda B} - e^{-(2-\lambda)B}\Big)A\varphi \\
+ \Big(I - e^{-\lambda B}\Big)\Big(I - e^{-(1-\lambda)B}\Big)\Big(I - e^{-B}\Big)f(\lambda) \\
+ \frac{B}{2}\Big(I - e^{-2(1-\lambda)B}\Big)\int_0^\lambda \Big(e^{-(\lambda-s)B}\Big(I - e^{-2sB}\Big)\Big)(f(s) - f(\lambda))ds \\
+ \frac{B}{2}\Big(I - e^{-2\lambda B}\Big)\int_\lambda^1 \Big(e^{-(s-\lambda)B}\Big(I - e^{-2(1-s)B}\Big)\Big)(f(s) - f(\lambda))ds\Big\}d\lambda + A\psi\Bigg) \\
= J_1 + J_2 + J_3 + J_4
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada,

$$J_1 = P\left(\int_0^1 \rho(\lambda)(I - e^{-2B})^{-1}(e^{-\lambda B} - e^{-(2-\lambda)B})A\varphi d\lambda + A\psi \right),$$

$$J_2 = P\int_0^1 \rho(\lambda)(I-e^{-2B})^{-1}\left(I-e^{-\lambda B}\right)\left(I-e^{-(1-\lambda)B}\right)\left(I-e^{-B}\right)f(\lambda)d\lambda,$$

$$J_3 = P\int_0^1 \rho(\lambda)(I-e^{-2B})^{-1}\frac{1}{2}$$
$$\times\int_0^{\lambda}\left(Be^{-(\lambda-s)B}\left(I-e^{-2(1-\lambda)B}\right)\left(I-e^{-2sB}\right)\right)(f(s)-f(\lambda))dsd\lambda,$$

$$J_4 = P\int_0^1 \rho(\lambda)\frac{B}{2}\left(I-e^{-2B}\right)^{-1}$$
$$\times\int_{\lambda}^{1}\left(e^{-(s-\lambda)B}\left(I-e^{-2(1-s)B}\right)\left(I-e^{-2\lambda B}\right)\right)(f(s)-f(\lambda))dsd\lambda$$

dır. $k=1,\cdots,4$ için J_k'ların ayrı ayrı kestirimleri hesaplanmalıdır. J_1 ile başlanır. (2.1.4), (2.1.5) ve (2.1.6) kestirimlerini kullanarak,

$$\|J_1\|_H \le \|P\|_{H\to H}\int_0^1|\rho(\lambda)|\left\|\left(I-e^{-2B}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|e^{-\lambda B}-e^{-(2-\lambda)B}\right\|_{H\to H}\|A\varphi\|_H\, d\lambda$$
$$+\|P\|_{H\to H}\|A\psi\|_H \le M(\delta)\int_0^1|\rho(\lambda)|\,d\lambda\left[\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H\right]$$

elde edilir. Böylece (2.1.2) şartından

$$\|J_1\|_H \le M_1(\delta)\left[\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H\right]$$

dır. J_2'nin kestirimi,

$$\|J_2\|_H \le \|P\|_{H\to H}\int_0^1|\rho(\lambda)|\left\|\left(I-e^{-2B}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|I-e^{-\lambda B}\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left\|I-e^{-(1-\lambda)B}\right\|_{H\to H}\left\|I-e^{-B}\right\|_{H\to H}\|f(\lambda)\|_H\, d\lambda$$

dır. (2.1.4), (2.1.6) kestirimlerini ve $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayında norm tanımını kullanarak

$$\|J_2\|_H \le M_2(\delta)\int_0^1 |\rho(\lambda)|\,d\lambda \max_{0\le t\le 1}\|f(t)\|_H$$

elde edilir. (2.1.2) şartından

$$\|J_2\|_H \le M_2(\delta)\|f(t)\|_{C([0,1],H)} \le M_2(\delta)\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}$$

dır. Şimdi J_3 kestirimi alınır.

$$J_3^1 = P\int_0^{\frac{1}{2}} \rho(\lambda)(I-e^{-2B})^{-1}\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}(Be^{-(\lambda-s)B}(I-e^{-2(1-\lambda)B})(I-e^{-2sB}))(f(s)-f(\lambda))dsd\lambda$$

$$J_3^2 = P\int_{\frac{1}{2}}^{1} \rho(\lambda)(I-e^{-2B})^{-1}\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\left(Be^{-(\lambda-s)B}\left(I-e^{-2(1-\lambda)B}\right)\left(I-e^{-2sB}\right)\right)(f(s)-f(\lambda))dsd\lambda$$

denirse $J_3 = J_3^1 + J_3^2$ olarak yazılabilir. İlk olarak J_3^1 kestirimi alınır.

$$\begin{aligned}\|J_3^1\|_H \le \|P\|_{H\to H}\int_0^{\frac{1}{2}}|\rho(\lambda)|\left\|(I-e^{-2B})^{-1}\right\|_{H\to H}\frac{1}{2}\\ \times\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\left(\left\|Be^{-(\lambda-s)B}\left(I-e^{-2(1-\lambda)B}\right)\right\|_{H\to H}\left\|I-e^{-2sB}\right\|_{H\to H}\right)\|f(s)-f(\lambda)\|_H\,dsd\lambda\end{aligned}$$

Ayrıca, (2.1.3), (2.1.4), (2.1.6) kestirimlerini ve $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayında norm tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}\left\|J_3^1\right\|_H &\le M(\delta)\int_0^{\frac{1}{2}}|\rho(\lambda)|\int_0^{\lambda}\frac{ds}{(\lambda-s)^{1-\alpha}\lambda^{\alpha}(1-s)^{\alpha}}d\lambda\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}\\ &\le M(\delta)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{|\rho(\lambda)|}{\alpha}(1-\lambda)^{-\alpha}d\lambda\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}\\ &\le \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\int_0^{\frac{1}{2}}|\rho(\lambda)|d\lambda\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}\end{aligned}$$

elde edilir.

İkinci olarak J_3^2 kestirimi alınır. Şimdi, J_3^2 kestirimi yapılacaktır. (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) kestirimlerini ve $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayında norm tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}\left\|J_3^2\right\|_H &\le \|P\|_{H\to H}\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\rho(\lambda)|\left\|(I-e^{-2B})^{-1}\right\|_{H\to H}\\ &\times\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\left\|Be^{-(\lambda-s)B}\left(I-e^{-2(1-\lambda)B}\right)\right\|_{H\to H}\left\|I-e^{-2sB}\right\|_{H\to H}\|f(s)-f(\lambda)\|_H\,dsd\lambda\\ &\le M(\delta)\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\rho(\lambda)|\int_0^{\lambda}\frac{(2(1-\lambda))^{\alpha}ds}{(\lambda-s)(2-\lambda-s)^{\alpha}\lambda^{\alpha}(1-s)^{\alpha}}d\lambda\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\int_0^{\lambda}\frac{(2(1-\lambda))^{\alpha}}{(1-s)^{\alpha}(\lambda-s)^{1-\alpha}\lambda^{\alpha}(2-\lambda-s)^{\alpha}}ds &\le \frac{1}{\lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha}}\int_0^{\lambda}\frac{2^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha}}{(\lambda-s)^{1-\alpha}(1-\lambda+1-s)^{\alpha}}ds\\ &\le \frac{2^{\alpha}}{\lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha}}\int_0^{\lambda}\frac{ds}{(\lambda-s)^{1-\alpha}}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left\|J_3^2\right\|_H \le \frac{M(\delta)2^{\alpha-1}}{\alpha}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{|\rho(\lambda)|}{(1-\lambda)^{\alpha}}d\lambda\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)} \le \frac{M(\delta)2^{2\alpha-2}}{\alpha(1-\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\rho(\lambda)|d\lambda\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}$$

dır. J_3^1 ve J_3^2 birleştirilirse

$$\|J_3\|_H \leq \frac{M_3(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\int_0^1 |\rho(\lambda)|\, d\lambda \|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}$$

elde edilir ve (2.1.2) şartından

$$\|J_3\|_H \leq \frac{M_4(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}$$

dır. Şimdi J_4 kestirimi alınır.

$$J_4^1 = P\int_0^{\frac{1}{2}} \rho(\lambda)\frac{1}{2}\left(I-e^{-2B}\right)^{-1}\int_{\lambda}^1 \left(Be^{-(s-\lambda)B}\left(I-e^{-2(1-s)B}\right)\left(I-e^{-2\lambda B}\right)\right)(f(s)-f(\lambda))dsd\lambda,$$

$$J_4^2 = P\int_{\frac{1}{2}}^1 \rho(\lambda)\frac{1}{2}\int_{\lambda}^1 \left(Be^{-(s-\lambda)B}\left(I-e^{-2(1-s)B}\right)\left(I-e^{-2\lambda B}\right)\right)(f(s)-f(\lambda))dsd\lambda,$$

denirse $J_4 = J_4^1 + J_4^2$ yazılabilir. İlk olarak J_4^1 için kestirim alınır.

$$\begin{aligned}\|J_4^1\|_H &\leq \|P\|_{H\to H}\int_0^{\frac{1}{2}} |\rho(\lambda)| \left\|(I-e^{-2B})^{-1}\right\|_{H\to H} \\ &\times \int_{\lambda}^1 \left\|Be^{-(s-\lambda)B}\left(I-e^{-2(1-s)B}\right)\right\|_{H\to H}\left\|I-e^{-2\lambda B}\right\|_{H\to H}\|f(s)-f(\lambda)\|_H\, dsd\lambda.\end{aligned}$$

Ayrıca, (2.1.3), (2.1.4) ve (2.1.6) kestirimleri ve $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayında norm tanımından

$$
\begin{aligned}
\left\|J_4^1\right\|_H &\le M(\delta)\int_0^{\frac{1}{2}}|\rho(\lambda)|\int_\lambda^1 \frac{(1-s)^\alpha\, ds}{(1-\lambda)^\alpha s^\alpha (s-\lambda)^{1-\alpha}(2-s-\lambda)^\alpha}\, d\lambda \|f\|_{C_{01}^\alpha([0,1],H)} \\
&\le M(\delta)\int_0^{\frac{1}{2}}|\rho(\lambda)|\int_\lambda^1 \frac{ds}{s^\alpha (s-\lambda)^{1-\alpha}(1-s+1-\lambda)^\alpha}\, d\lambda \|f\|_{C_{01}^\alpha([0,1],H)} \\
&\le M(\delta)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{|\rho(\lambda)|}{\lambda^\alpha (1-\lambda)^\alpha}\int_\lambda^1 \frac{ds}{(s-\lambda)^{1-\alpha}}\, d\lambda \|f\|_{C_{01}^\alpha([0,1],H)} \\
&\le \frac{M_5(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\int_0^{\frac{1}{2}}|\rho(\lambda)|\, d\lambda \|f\|_{C_{01}^\alpha([0,1],H)}
\end{aligned}
$$

bulunur. Son olarak J_4^2 için (2.1.3), (2.1.4) ve (2.1.6) kestirimleri ve $C_{01}^\alpha([0,1],H)$ uzayında norm tanımına başvurarak

$$
\begin{aligned}
\left\|J_4^2\right\|_H &\le \|P\|_{H\to H}\int_{\frac{1}{2}}^1 |\rho(\lambda)| \left\|(I-e^{-2B})^{-1}\right\|_{H\to H} \\
&\quad \times \frac{1}{2}\int_\lambda^1 \left\|Be^{-(s-\lambda)B}\left(I-e^{-2(1-s)B}\right)\right\|_{H\to H} \left\|I-e^{-2\lambda B}\right\|_{H\to H} \|f(s)-f(\lambda)\|_H\, ds d\lambda \\
&\le M(\delta)\int_{\frac{1}{2}}^1 |\rho(\lambda)|\int_\lambda^1 \frac{ds}{(1-\lambda)^\alpha s^\alpha (s-\lambda)^{1-\alpha}}\, d\lambda \|f\|_{C_{01}^\alpha([0,1],H)} \\
&\le M(\delta)\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{|\rho(\lambda)|}{\lambda^\alpha \alpha}\, d\lambda \|f\|_{C_{01}^\alpha([0,1],H)} \\
&\le \frac{M(\delta)2^{\alpha-2}}{\alpha(1-\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^1 |\rho(\lambda)|\, d\lambda \|f\|_{C_{01}^\alpha([0,1],H)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. J_4^1 ve J_4^2 birleştirilerek

$$
\|J_4\|_H \le \frac{M_6(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\int_0^1 |\rho(\lambda)|\, d\lambda \|f\|_{C_{01}^\alpha([0,1],H)}
$$

elde edilir. Burada, (2.1.2) şartından

$$\|J_4\|_H \le \frac{M_7(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],H)}$$

dır. H uzayında J_k, $k=1,\cdots,4$ için kestirimler birleştirilirse (2.1.13)'den Teorem 2.1.1 ispatı tamamlanır.

2.2. Uygulamalar

İlk başta,

$$\begin{cases} -u_{tt}-(a(x)u_x)_x+\delta u = f(t,x), 0<t<1, 0<x<1, \\ u(t,0)=u(t,1),\ u_x(t,1)=u_x(t,0), 0\le t\le 1, \\ u(0,x)=\varphi(x), u(1,x)=\int_0^1 \rho(\lambda)u(\lambda,x)d\lambda+\psi(x), 0\le x\le 1 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

eliptik denklemleri için karışık sınır değer problemi düşünülür. Burada $a(x)\ge a>0$, $\delta = sabit > 0$, $a(1)=a(0)$, için $a(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ve $f(t,x)$ verilmiş yeterince düzgün fonksiyonlardır. (2.2.1) problemi (2.1.2) şartı altında çalışılır. Problem tek bir $u(t,x)$ çözüme sahiptir. Bu bize, (2.2.1) karışık sınır değer problemini $H=L_2[0,1]$ uzayında (2.1.1) lokal olmayan sınır değer problemine indirgemeye izin verir. Burada, (2.2.1) probleminde tanımlanmış A operatörü kendisine eşlenik pozitif tanımlı bir operatördür ve $H=L_2[0,1]$ uzayında normlar

$$\|f\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|f\|_{W_2^2[0,1]} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |f_x(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |f_{xx}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

dır.

Teorem 2.2.1 (2.2.1) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümleri

$$\|u_{tt}\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],L_2[0,1])} + \|u\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],W_2^2[0,1])} \le \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],L_2[0,1])} + M(\delta)\left[\|\varphi\|_{W_2^2[0,1]} + \|\psi\|_{W_2^2[0,1]}\right]$$

koersif eşitsizliğini sağlar. Burada $M(\delta)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$'den bağımsızdır. Teorem 2.2.1'nin ispatı Teorem 2.1.1 ve (2.2.1) problemi ile üretilmiş uzay operatörünün simetri özellikleri kullanarak yapılır.

İkinci olarak, Ω $R^n\{x=(x_1,\cdots,x_n):\ 0<x_k<1,\ 1\le k\le n\}$'de S sınırı ile açık birim küp olsun, $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$'dır. $[0,1]\times\Omega$'da çok boyutlu eliptik denklem için

$$\begin{cases} -u_{tt}-\sum\limits_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r})_{x_r}=f(t,x), 0<t<1,\ x=(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega, \\ u(0,x)=\varphi(x),\ u(1,x)=\int\limits_0^1\rho(\lambda)u(\lambda,x)d\lambda+\psi(x),\ x\in\overline{\Omega}, \\ u(t,x)\mid_{x\in S}=0, x\in\overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Dirichlet-Bitsadze-Samarskii tipi karışık sınır değer problemi ele alınır. (2.2.2) problemi (2.1.2) kabulü altında çalışılır. Problem düzgün $\alpha_r(x)\ge a>0$ $(x\in\Omega)$, $f(t,x)$ $(t\in(0,1),\ x\in\overline{\Omega})$, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları için tek bir düzgün $u(t,x)$ çözümüne sahiptir. Bu bize (2.2.2) Dirichlet-Bitsadze-Samarskii tipi karışık sınır değer problemini $H=L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzayında kendisine eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü,. (2.1.1) lokal olmayan sınır değer problemine indirgemeye izin verir. $\overline{\Omega}$ kümesinde tanımlanan tüm integrallenebilen fonksiyonlar $H=L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzayı olarak tanımlanır. Bu uzayda normlar

$$\|f\|_{L_2(\overline{\Omega})} = \left\{\int\cdots\int\limits_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)|^2dx_1\cdots dx_n\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|f\|_{W_2^2(\bar\Omega)} = \|f\|_{L_2(\bar\Omega)} + \left(\int\cdots\int_{x\in\bar\Omega}\sum_{r=1}^{n}\left|f_{x_r}\right|^2 dx_1\cdots dx_n\right)^{1/2} + \left(\int\cdots\int_{x\in\bar\Omega}\sum_{r=1}^{n}\left|f_{x_r,x_r}\right|^2 dx_1\cdots dx_n\right)^{1/2}$$

dır.

Teorem 2.2.2 (2.2.2) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümleri koersif eşitsizliğini

$$\|u_{tt}\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],L_2(\bar\Omega))} + \|u\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],W_2^2(\bar\Omega))} \le \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],L_2(\bar\Omega))} + M(\delta)\left[\|\varphi\|_{W_2^2(\bar\Omega)} + \|\psi\|_{W_2^2(\bar\Omega)}\right]$$

sağlar. Burada $M(\delta)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarına bağlı değildir.

Teorem 2.2.2'nin ispatı Teorem 2.1.1, (2.2.2) problemi ile üretilmiş uzay operatörünün simetrik özellikleri ve $L_2(\bar\Omega)$'de eliptik diferansiyel problemin çözümü için aşağıda verilen koersif eşitsizliği teoremine dayanır.

Teorem 2.2.3 Eliptik diferansiyel problemin çözümleri için

$$\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r})_{x_r} = \omega(x), x\in\Omega,$$
$$u(x)=0,\ x\in S$$

aşağıdaki koersif eşitsizliği

$$\|u\|_{W_2^2(\bar\Omega)} \le M\,\|\omega\|_{L_2(\bar\Omega)}$$

vardır (Sobolevskii 1975).

Üçüncü olarak, Ω $R^m\left(x=(x_1,\cdots,x_m):\ 0<x_k<1,\ 1\le k\le m\right)$'de S sınırı ile açık birim küp olsun, $\bar\Omega=\Omega\cup S$'dir. $[0,1]\times\Omega$'da çok boyutlu eliptik denklem için (2.2.3) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipinde sınır değer problemi

$$
\begin{cases}
-u_{tt}-\sum\limits_{r=1}^{m}\left(a_r(x)u_{x_r}\right)_{x_r}+\eta u=f(t,x), 0<t<1, x=(x_1,\cdots,x_m)\in\Omega,\\
u(0,x)=\varphi(x), u(1,x)=\sum\limits_{j=1}^{J}\rho_j u(\lambda_j,x)+\psi(x), x\in\overline{\Omega},\\
\sum\limits_{j=1}^{J}\left|\rho_j\right|\leq 1, 0<\lambda_1<\cdots<\lambda_J<1,\\
u(t,x)\mid_{x\in S^1}=0, \frac{\partial u(t,x)}{\partial \vec{n}}\mid_{x\in S^2}=0, S^1\cup S^2=S
\end{cases}
\tag{2.2.3}
$$

ele alınır. Burada $a_r(x), (x\in\Omega), \psi(x), \varphi(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)$ $(t\in(0,1),\ x\in\Omega)$ verilmiş düzgün fonksiyonlar ve $a_r(x)\geq a>0$'dır. η pozitif bir sayı ve $\vec{\mathbf{n}}$, Ω'da normal bir vektördür. Düzgün $\alpha_r(x)\geq a>0$ $(x\in\Omega)$ $f(t,x)$ $(t\in(0,1), x\in\overline{\Omega})$, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları için tek bir düzgün $u(t,x)$ çözümüne sahiptir. Bu bize (2.2.3) Dirichlet-Bitsadze-Samarskii tipi karışık sınır değer problemini $H=L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzayında Ozturk (2008) tezinde yer alan (3.1.1) lokal olmayan sınır değer problemine indirgemeye fırsat verir. Burada $H=L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzayında normları yukarıda verildiği gibidir ve (2.2.3)'de tanımlanan A operatörü pozitif tanımlı kendisine eşleniktir.

Teorem 2.2.4 (2.2.3) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümleri koersif eşitsizliğini

$$
\begin{aligned}
&\left\|u_{tt}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],L_2(\overline{\Omega}))}+\left\|u\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],W_2^2(\overline{\Omega}))}\\
&\qquad\leq\frac{M(\delta,\lambda_1,\lambda_J)}{\alpha(1-\alpha)}\left\|f\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1],L_2(\overline{\Omega}))}+M\left[\left\|\varphi\right\|_{W_2^2(\overline{\Omega})}+\left\|\psi\right\|_{W_2^2(\overline{\Omega})}\right]
\end{aligned}
$$

sağlar. Burada $M(\delta)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarına bağlı değildir.

Teorem 2.2.4'ün ispatı Ozturk (2008) tezinde yer alan Teorem 3.1 ve problem (2.2.3) ile üretilmiş genelleştirilen A operatör uzayının simetrik özelliklerine ve aşağıdaki $L_2(\overline{\Omega})$'de eliptik diferansiyel problemin çözümü için verilen koersif eşitsizliği üzerine verilen teoreme dayanır.

Teorem 2.2.5 Eliptik diferansiyel problemin çözümleri için

$$\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r})_{x_r} + \eta u = \omega(x), x \in \overline{\Omega},$$
$$u(t,x)|_{x\in S^1} = 0, \frac{\partial u(t,x)}{\partial \vec{n}}|_{x\in S^2} = 0,\ S^1 \cup S^2 = S$$

aşağıdaki koersif eşitsizliği

$$\|u\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} \le M \,\|\, \omega \,\|_{L_2(\overline{\Omega})}$$

vardır. Burada η pozitif bir sayı ve $\vec{n}$ S^2'nin normal vektörüdür.

3. ELİPTİK FARK DENKLEMİ İÇİN İNTEGRAL ŞARTLI BİTSADZE-SAMARSKİİ LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ

3.1. Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması

Bu bölümde (2.1.1) lokal olmayan sınır değer problemi fark problemi ile ilişkilendirilmiştir. (2.1.1) diferansiyel problemi için birinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\frac{1}{\tau^2}[u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}] + Au_k = \varphi_k, \\ \varphi_k = f(t_k),\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N-1,\ N\tau = 1 \\ u_0 = \varphi,\ u_N = \sum\limits_{j=1}^{N} \rho(t_j) u_j \tau + \psi \end{cases} \tag{3.1.1}$$

kurulmuştur. Lokal olmayan sınır değer problemini sadece zaman üzerindeki ayrışımı (discreatization) çalışması eğer değişkenler uzayında diferansiyel operatör A, $0 \le h \le h_0$ için pozitif tanımlı kendisine eşlenik A_h, fark operatörüyle yer değiştirilmesiyle H_h Hilbert uzayında uygulamada genel bir fark şemalarına izin verir. A kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatör olduğu bilinmektedir (Sobolevskii 1969). Tüm H uzayında $B = \frac{1}{2}(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2})$ kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatördür ve $R = (I + \tau B)^{-1}$ .sınırlı bir operatördür. (3.1.1) problemi

$$\sum_{j=1}^{N} \left|\rho(t_j)\right| \tau < 1 \tag{3.1.2}$$

şartında çalışılacaktır. Burada, I birim operatördür. Aşağıda ilerleyen kısımlarda gerekli olacak bazı lemmalar verilecektir:

Lemma 3.1.1 Kestirimler

$$\begin{cases} \left\| e^{-k\tau A^{\frac{1}{2}}} - R^k \right\|_{H \mapsto H} \leq \frac{M(\delta)\tau}{k\tau}, \ k \geq 1, \left\| \left(I - R^{2N}\right)^{-1} \right\|_{H \to H} \leq M(\delta), \\ \left\| R^k \right\|_{H \mapsto H} \leq M(\delta)(1+\delta\tau)^{-k}, \ k\tau \left\| BR^k \right\|_{H \mapsto H} \leq M(\delta), k \geq 1, \delta > 0, \\ \left\| B^{\beta}\left(R^{k+r} - R^k\right) \right\|_{H \mapsto H} \leq M(\delta) \frac{(r\tau)^{\alpha}}{(k\tau)^{\alpha+\beta}}, 1 \leq k < k+r \leq N, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

geçerlidir (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004).

Lemma 3.1.2 H Hilbert uzayında A pozitif operatör olsun. Bu taktirde aşağıdaki kestirim sağlanır.

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left\| (I-R)R^{j-1} \right\|_{H \to H} \leq M \, \mathbf{min} \left(\mathbf{ln}(\frac{1}{\tau}), 1 + \tau \left| \mathbf{ln} \|B\|_{H \to H} \right| \right) \tag{3.1.4}$$

burada M sabiti τ'dan bağımsızdır.

İspat. (3.1.3) kestirimini kullanarak,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left\| (I-R)R^{j-1} \right\|_{H \to H} \leq M \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j} \leq M \int_1^N \frac{ds}{s} = M \ln N \leq M_1 \ln \frac{1}{\tau}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.3) kullanarak

$$\left\| (I-R)R^{j-1} \right\|_{H \to H} \leq M \min \left\{ \frac{1}{\tau}, \tau \|B\|_{H \to H} \right\}$$

elde edilir.

Eğer $\|B\|_{H \to H} > N,$ ise

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{j-1}\right\|_{H\to H} \le M\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j} \le M\int_1^N \frac{ds}{s} < M\int_1^{\|B\|_{H\to H}} \frac{ds}{s} \le M\ln\left\|B\right\|_{H\to H}\Big|$$

dır. Eğer $\|B\|_{H\to H} < 1,$ ise

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{j-1}\right\|_{H\to H} \le M\sum_{j=1}^{N-1}\tau\|B\|_{H\to H} \le M_1.$$

M_1 sabitinden küçüktür. Son olarak, eğer $1\le\|B\|_{H\to H}\le N,$ ise

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{j-1}\right\|_{H\to H} &\le \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{\|B\|_{H\to H}}\right]}\tau\|B\|_{H\to H} + \sum_{j=\left[\frac{N}{\|B\|_{H\to H}}\right]+1}^{N-1}\frac{1}{j}\\ &\le M\left(1+\int_{\frac{1}{\|B\|_{H\to H}}}^{1}\frac{ds}{s}\right) \le M\left(1+\mathbf{ln}\left\|B\right\|_{H\to H}\Big|\right)\end{aligned}$$

dır. Böylece tüm durumlar için

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{j-1}\right\|_{H\to H} \le M\left(1+\ln\left\|B\right\|_{H\to H}\Big|\right)$$

kestirimi geçerlidir.

Lemma 3.1.3

$I-\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)$ operatörünün,

$$K_\tau = \left(I-\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}(R^{N-j}-R^{N+j})\right)^{-1}$$

tersine sahiptir ve (3.1.2) kabulü altında

$$\|K_\tau\|_{H\to H} \le M(\delta)\tau \tag{3.1.5}$$

kestirimi sağlanır, burada M sabiti τ'dan bağımsızdır.

İspat. (3.1.5) kestirimin ispatı

$$\langle (I-Z)u,u\rangle \ge \left(1-\sum_{j=1}^{N}\left|\rho(t_j)\right|\tau\right)\langle u,u\rangle \tag{3.1.6}$$

kestirimine dayanır. Burada,

$$Z=\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)$$

dir. B'nin spektral temsilini ve Cauchy eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)u,u\right\rangle\right| \le \left\|\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)u\right\|_H \|u\|_H \\
&\le \left\|\left(I-\left(I+\frac{\tau}{2}\left(\tau A+\sqrt{4A+\tau^2A^2}\right)\right)^{-2N}\right)^{-1}\left(\left(I+\frac{\tau}{2}\left(\tau A+\sqrt{4A+\tau^2A^2}\right)\right)^{-(N-j)}\right.\right. \\
&\left.\left.-\left(I+\frac{\tau}{2}\left(\tau A+\sqrt{4A+\tau^2A^2}\right)\right)^{-(N+j)}\right)\right\|_{H\to H} \|u\|_H\|u\|_H \\
&\le \sup_{\delta^{\frac{1}{2}}\le\mu<\infty}\left|\left(1-\left(1+\frac{\tau}{2}\left(\tau\mu+\sqrt{4\mu+\tau^2\mu^2}\right)\right)^{-2N}\right)^{-1}\right. \\
&\left.\times\left(\left(1+\frac{\tau}{2}\left(\tau\mu+\sqrt{4\mu+\tau^2\mu^2}\right)\right)^{-(N-j)}-\left(1+\frac{\tau}{2}\left(\tau\mu+\sqrt{4\mu+\tau^2\mu^2}\right)\right)^{-(N+j)}\right)\right|\|u\|_H^2
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

$$\leq \left(1+\frac{\tau}{2}\left(\tau\delta^{\frac{1}{2}}+\sqrt{4\delta^{\frac{1}{2}}+\tau^2\delta}\right)\right)^{-(N-j)} \sup_{\delta^{\frac{1}{2}}\leq\mu<\infty}\left|\left(1-\left(1+\frac{\tau}{2}\left(\tau\mu+\sqrt{4\mu+\tau^2\mu^2}\right)\right)^{-2N}\right)^{-1}\right.$$

$$\left.\times\left(1-\left(1+\frac{\tau}{2}\left(\tau\mu+\sqrt{4\mu+\tau^2\mu^2}\right)\right)^{-2j}\right)\right|\langle u,u\rangle$$

$$\leq \left(1+\frac{\tau}{2}\left(\tau\delta^{\frac{1}{2}}+\sqrt{4\delta^{\frac{1}{2}}+\tau^2\delta}\right)\right)^{-(N-j)}\langle u,u\rangle \leq \langle u,u\rangle$$

elde edilir. Bu takdirde, (3.1.7) kestirimi ve üçgen eşitsizliği kullanılmasıyla,

$$\langle (I-Z)u,u\rangle \geq \langle u,u\rangle - \left|\langle Zu,u\rangle\right| \geq \langle u,u\rangle - \sum_{j=1}^{N}\left|\rho(t_j)\right|\tau\langle u,u\rangle = \left(1-\sum_{j=1}^{N}\left|\rho(t_j)\right|\tau\right)\langle u,u\rangle$$

elde edilir. Böylece (3.1.5) kestirimi sağlandığından Lemma 3.1.3 ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.1 Her φ_k, $1\leq k\leq N-1$ (3.1.1) probleminin çözümü vardır ve aşağıdaki formül sağlanır. $0\leq k\leq N-1$ için

$$\begin{aligned} u_k &= (I-R^{2N})^{-1}\Big\{\left(R^k-R^{2N-k}\right)\varphi+\left(R^{N-k}-R^{N+k}\right)u_N \\ &\quad -\left(R^{N-k}-R^{N+k}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i}-R^{N-1+i}\right)\varphi_i\tau\Big\} \\ &\quad +(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{|k-i|-1}-R^{k+i-1}\right)\varphi_i\tau, \end{aligned}$$

k=N için

$$\begin{aligned} u_N &= K_\tau\left(\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\Big\{\left(R^j-R^{2N-j}\right)\varphi-\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)\right. \\ &\quad \times(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}B^{-1}\left(R^{N-1-i}-R^{N-1+i}\right)\varphi_i\tau\Big\}+(2I+\tau B)^{-1}B^{-1} \\ &\quad \left.\times(I+\tau B)\left(\sum_{i=1}^{j}R^{j-i-1}\varphi_i\tau+\sum_{i=j+1}^{N-1}R^{i-j-1}\varphi_i\tau-\sum_{i=1}^{N-1}R^{j+i-1}\varphi_i\tau\right)+\psi\right). \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

dır.

İspat. İkinci mertebeden doğruluk fark şemasının

$$\begin{cases} -\frac{1}{\tau^2}[u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}] + Au_k = \varphi_k, 1 \le k \le N-1, N\tau = 1, \\ \qquad u_0 = \varphi,\ u_N \ \text{ verilmistir} \end{cases} \tag{3.1.9}$$

bir çözümü vardır ve aşağıdaki formül

$$\begin{aligned} u_k &= (I - R^{2N})^{-1}\Big\{ \big(R^k - R^{2N-k}\big)\varphi + \big(R^{N-k} - R^{N+k}\big)u_N \\ &\quad - \big(R^{N-k} - R^{N+k}\big)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \big(R^{N-1-i} - R^{N-1+i}\big)\varphi_i \tau \Big\} \\ &\quad + (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \big(R^{|k-i|-1} - R^{k+i-1}\big)\varphi_i \tau \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

sağlanır. (3.1.10) formülü ve

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} \rho(t_j) u_j \tau + \psi,$$

lokal olmayan sınır koşulunu kullanarak

$$\begin{aligned} u_N &= \sum_{j=1}^{N} \rho(t_j)\tau \Big\{ (I - R^{2N})^{-1}\Big\{ \big(R^j - R^{2N-j}\big)\varphi + \big(R^{N-j} - R^{N+j}\big)u_N \\ &\quad - \big(R^{N-j} - R^{N+j}\big)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \big(R^{N-1-i} - R^{N-1+i}\big)\varphi_i \tau \Big\} \\ &\quad + (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \left(\sum_{i=1}^{j} R^{j-i-1}\varphi_i \tau + \sum_{i=j+1}^{N-1} R^{i-j-1}\varphi_i \tau - \sum_{i=1}^{N-1} R^{j+i-1}\varphi_i \tau \right) + \psi \end{aligned}$$

elde edilir.

$$I - \sum_{j=1}^{N} \rho(t_j)\tau (I - R^{2N})^{-1} (R^{N-j} + R^{N+j})$$

operatörünün bir K_τ tersine sahip olduğundan

$$u_N = K_\tau \Bigg(\sum_{j=1}^{N} \rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}\Big\{ (R^j - R^{2N-j})\varphi$$
$$-(R^{N-j}-R^{N+j})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}(R^{N-1-i}-R^{N-1+i})\varphi_i\tau \Big\}$$
$$+(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\left(\sum_{i=1}^{j-1}R^{j-i-1}\varphi_i\tau+\sum_{i=j}^{N-1}R^{i-j-1}\varphi_i\tau-\sum_{i=1}^{N-1}R^{j+i-1}\varphi_i\tau\right)+\psi\Bigg)$$

formülünden Teorem 3.1.1'in ispatı tamamlanır.

Bu bölümde, $F([0,1]_\tau, H)$, $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_1^{N-1}$ Hilbert uzayında değerleriyle ağ (mesh) fonksiyonlarının oluşturduğu lineer uzayıdır.

$$\| \varphi^\tau \|_{C([0,1]_\tau, H)} = \max_{1 \le k \le N-1} \| \varphi_k \|_H,$$

$$\|\varphi^\tau\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)} = \|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau, H)} + \sup_{1 \le k \le k+r \le N-1} \frac{((N-k)\tau)^\alpha((k+r)\tau)^\alpha}{(r\tau)^\alpha}\|\varphi_{k+r}-\varphi_k\|_H$$

normlu bütün $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_1^{N-1}$ ağ (mesh) fonksiyonlarının uzayları da $C([0,1]_\tau, H)$ ve $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$, $0 < \alpha < 1$ Banach uzaylarıdır.

(3.1.1), (3.2.1) ve (3.3.1) lokal olmayan sınır değer problemleri için

$$\|u^\tau\|_{F([0,1]_\tau, H)} \le M(\delta)\left[\|\varphi^\tau\|_{F([0,1]_\tau, H)} + \|\varphi\|_H + \|\psi\|_H\right]$$

eşitsizliği varsa $F([0,1]_\tau, H)$ uzayında kararlıdır denir.

Teorem 3.1.2 (3.1.2) kabulü altında (3.1.1) fark şemasının çözümleri

$$\|u^\tau\|_{C([0,1]_\tau, H)} \le M(\delta)\left[\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau, H)} + \|\varphi\|_H + \|\psi\|_H\right], \tag{3.1.11}$$

kararlılık kestirimini sağlar.

İspat.

$$\left\| u^{\tau} \right\|_{C([0,1]_{\tau},H)} \leq M(\delta)\left[\left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C([0,1]_{\tau},H)} + \left\| \varphi \right\|_{H} + \left\| u_N \right\|_{H} \right] \tag{3.1.12}$$

(3.1.9) fark şeması çözümü için ispatlanmıştır (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004). Bu takdirde, (3.1.11)'in ispatı (3.1.12) ve

$$\left\| u_N \right\|_{H} \leq M(\delta)\left[\left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C([0,1]_{\tau},H)} + \left\| \varphi \right\|_{H} + \left\| \psi \right\|_{H} \right]$$

kestirimine dayanır. (3.1.8) formülü ve (3.1.3), (3.1.5) kestirimleri kullanarak

$$\begin{aligned}
\left\| u_N \right\|_{H} &\leq \left\| K_{\tau} \right\|_{H\to H} \left(\sum_{j=1}^{N} \left| \rho(t_j) \right| \tau \left\| (I - R^{2N})^{-1} \right\|_{H\to H} \left\{ \left(\left\| R^{j} \right\|_{H\to H} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. + \left\| R^{2N-j} \right\|_{H\to H} \right) \left\| \varphi \right\|_{H} + \left(\left\| R^{N-j} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{N+j} \right\|_{H\to H} \right) \left\| (I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1} \right\|_{H\to H} \\
&\quad \left. \times \left\| B^{-1} \right\|_{H\to H} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\left\| R^{N-i-1} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{N+i-1} \right\|_{H\to H} \right) \left\| \varphi_i \right\|_{H} \tau \right\} \\
&\quad + \left\| (I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1} \right\|_{H\to H} \left\| B^{-1} \right\|_{H\to H} \\
&\quad \left. \times \left(\sum_{i=1}^{j-1} \left\| R^{j-i-1} \right\|_{H\to H} \left\| \varphi_i \right\|_{H} \tau + \sum_{i=j}^{N-1} \left\| R^{i-j-1} \right\|_{H\to H} \left\| \varphi_i \right\|_{H} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} \left\| R^{j+i-1} \right\|_{H\to H} \left\| \varphi_i \right\|_{H} \tau \right) + \left\| \psi \right\|_{H} \right) \\
&\leq M(\delta)\left[\left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C([0,1]_{\tau},H)} + \left\| \varphi \right\|_{H} + \left\| \psi \right\|_{H} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, Teorem 3.1.2'nin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.3 $C([0,1]_{\tau},H)$ uzayında (3.1.2) kabulü altında (3.1.1) fark probleminin çözümü aşağıdaki hemen hemen koersif eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned}
&\left\| \{\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})\}_1^{N-1} \right\|_{C([0,1]_{\tau},H)} + \left\| \{Au_k\}_1^{N} \right\|_{C([0,1]_{\tau},H)} \\
&\quad \leq M(\delta)\left[\mathbf{min}\left\{ \mathbf{ln}\frac{1}{\tau}, 1 + \left| \mathbf{ln}\left\| B \right\|_{H\to H} \right| \right\} \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C([0,1]_{\tau},H)} + \left\| A\varphi \right\|_{H} + \left\| A\psi \right\|_{H} \right].
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

İspat.

(3.1.9) sınır değer probleminin çözümleri için

$$\left\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\left\|\{Au_k\}_1^N\right\|_{C([0,1]_\tau,H)}$$
$$\leq M(\delta)\left[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|A\varphi\|_H+\|Au_N\|_H\right] \tag{3.1.14}$$

eşitsizliğin geçerliliği ispatlanmıştır (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004). (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) kestirimleri ve (3.1.8) formülü kullanarak,

$$\|Au_N\|_H\leq M(\delta)\left(\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H\right) \tag{3.1.15}$$

ispatlanmalıdır. (3.1.1) fark şemasının çözümü için (3.1.15) elde edilmelidir. (3.1.8) formülünün kullanılmasıyla ve $A=B^2R$ eşitliğinden

$$Au_N=J_1+J_2,$$

yazılır. Burada,

$$J_1=K_\tau\left(\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}\left(R^j-R^{2N-j}\right)A\varphi+A\psi\right) \tag{3.1.16}$$

ve

$$J_2=K_\tau\Big(\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau\Big\{(I-R^{2N})^{-1}\left(-R^{N-j}+R^{N+j}\right)(I+\tau B)$$
$$\times(2I+\tau B)^{-1}B\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\varphi_i\tau\Big\}+(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B \tag{3.1.17}$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{j-1}R^{j-i}\varphi_i\tau+\sum_{i=j}^{N-1}R^{i-j}\varphi_i\tau-\sum_{i=1}^{N-1}R^{j+i}\varphi_i\tau\right)\Big)$$

dır. İspatın tamamlanabilmesi için

$$\|J_1\|_H \le M(\delta)[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H] \tag{3.1.18}$$

ve

$$\|J_2\|_H \le M(\delta)\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau, H)} \tag{3.1.19}$$

gösterilmelidir. (3.1.18) kestirimi, (3.1.16) formülü ve (3.1.3), (3.1.5) kestirimlerinden elde edilir. (3.1.17) formülünü (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) kestirimlerini ve (3.1.2) şartını kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_H &\le \|K_\tau\|_{H\to H}\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\rho(t_j)\right|\tau\left(\|(I-R^{2N})^{-1}\|_{H\to H}\left(\|R^{N-j}\|_{H\to H} + \|R^{N+j}\|_{H\to H}\right)\right.\right.\\
&\quad \left.\times\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|\sum_{i=1}^{N-1}\left(\left\|(I-R)R^{N-i-1}\right\|_{H\to H} + \left\|(I-R)R^{N+i-1}\right\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H\right\}\\
&\quad + \left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\sum_{i=1}^{j}\left\|(I-R)R^{j-i-1}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H\right.\\
&\quad \left.\left. + \sum_{i=j+1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{i-j-1}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H + \sum_{i=1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{j+i-1}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H\right)\right)\\
&\le M(\delta)\,\mathbf{min}\left\{\mathbf{ln}\frac{1}{\tau}, 1+\left|\mathbf{ln}\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau, H)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son kestirim ve (3.1.8) kestirimi (3.1.15) kestirimini verir. Bu Teorem 3.1.3'ü ispatlar.

Teorem 3.1.4 (3.1.2) kabulü ile (3.1.1) fark problemi $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$ Hölder uzayında aşağıdaki koersif eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\left\|\{\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)} + \left\|\{Au_k\}_1^N\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)}\\
&\quad \le M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|\varphi^\tau\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)} + \| A\varphi \|_H + \| A\psi \|_H\right]
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

geçerli olması halinde iyi konumlanmıştır.

İspat.

$$\left\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+\left\|\{Au_k\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}$$
$$\leq M(\delta)\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+M(\delta)[\|A\varphi\|_H+\|Au_N\|_H] \tag{3.1.21}$$

eşitsizliği (3.1.9) fark şemasının çözümü için ispatlanmıştır (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004). Bu taktirde, (3.1.20)'nin ispatı (3.1.21)'e ve

$$\left\|Au_N\right\|_H\leq M(\delta)\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+M(\delta)[\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H]$$

kestirimine dayanır. Üçgen eşitsizliğini (3.1.16) ve (3.1.17) formüllerini ve (3.1.18) kestirimini uygulayarak

$$\left\|Au_N\right\|_H\leq\left\|J_1\right\|_H+\left\|J_2\right\|_H\leq\left\|J_2\right\|_H+M(\delta)[\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H]$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için

$$\left\|J_2\right\|_H\leq M(\delta)\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)} \tag{3.1.22}$$

olduğu gösterilmeli. (3.1.17) formülünü uygulayarak,

$$\begin{aligned}J_2&=K_\tau\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}\Big\{-\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)\tau^{-2}(I-R)^2\\&\times\sum_{i=1}^{j-1}\tau^2\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\\&+\left(-\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)\right)\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=j+1}^{N-1}\tau^2\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\\&+(I-R^{2N})\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=1}^{j-1}\tau^2\left(R^{j-i}-R^{j+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(I-R^{2N})\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=j+1}^{N-1}\tau^2\left(R^{i-j}-R^{j+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\\
&-\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=1}^{j-1}\tau^2\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\varphi_j\\
&-\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=j+1}^{N-1}\tau^2\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\varphi_j\\
&+(I-R^{2N})\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=1}^{j-1}\tau^2\left(R^{j-i}-R^{j+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\varphi_j\\
&\left.+(I-R^{2N})\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=j+1}^{N-1}\tau^2\left(R^{i-j}-R^{j+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\varphi_j\right\}=\sum_{z=2}^{4}J_2^z
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada,

$$
J_2^2=K_\tau\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}\left(R^{2N-j-1}\left(I-R-R^2+R^3\right)+R^{2N+j}\left(I+R-R^j-R^{-1}\right)\right)\varphi_j
$$

$$
\begin{aligned}
J_2^3&=K_\tau\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}(I-R)\left(I-R^{2N-2j}\right)\sum_{i=1}^{j-1}R^{j-i}\left(I-R^{2i}\right)(I+R)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\\
&=J_2^{3,1}+J_2^{3,2},
\end{aligned}
$$

$$
J_2^{3,1}=K_\tau\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}(I-R)\left(I-R^{2N-2j}\right)\sum_{i=1}^{j-1}R^{j-i}\left(I-R^{2i}\right)(I+R)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right),
$$

$$
J_2^{3,2}=K_\tau\sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N}\rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}(I-R)\left(I-R^{2N-2j}\right)\sum_{i=1}^{j-1}R^{j-i}\left(I-R^{2i}\right)(I+R)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right).
$$

$$
\begin{aligned}
J_2^4&=K_\tau\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}(I-R)\left(I-R^{2j}\right)\sum_{i=j+1}^{N-1}R^{i-j}\left(I-R^{2N-2i}\right)(I+R)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\\
&=J_2^{4,1}+J_2^{4,2},
\end{aligned}
$$

$$
J_2^{4,1}=K_\tau\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}(I-R)\left(I-R^{2j}\right)\sum_{i=j+1}^{N-1}R^{i-j}\left(I-R^{2N-2i}\right)(I+R)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)
$$

$$J_2^{4,2} = K_\tau \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \rho(t_j)\tau(I-R^{2N})^{-1}(I-R)(I-R^{2j})\sum_{i=j+1}^{N-1} R^{i-j}(I-R^{2N-2i})(I+R)^{-1}(\varphi_i-\varphi_j)$$

dir.

Her bir J_2^m, $m=2,\cdots,4$ için ayrı ayrı kestirim alınır. J_2^2 ile başlanır. (3.1.3) ve (3.1.5) kestirimlerinden

$$\begin{aligned}\left\|J_2^2\right\|_H &\le \left\|K_\tau\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{N}\left|\rho(t_j)\right|\tau\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\\ &\quad\times\Big(\left\|R^{2N-j-1}\right\|_{H\to H}\left(I+\|R\|_{H\to H}+\left\|R^2\right\|_{H\to H}+\left\|R^3\right\|_{H\to H}\right)\\ &\quad+\left\|R^{2N+j}\right\|_{H\to H}\left(I+\|R\|_{H\to H}+\left\|R^j\right\|_{H\to H}+\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\right)\Big)\left\|\varphi_j\right\|_H\\ &\le M_1(\delta)\sum_{j=1}^{N}\left|\rho(t_j)\right|\tau\max_{1\le j\le N}\left\|\varphi_j\right\|_H \le M_1(\delta)\sum_{j=1}^{N}\left|\rho(t_j)\right|\tau\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.2) şartından

$$\left\|J_2^2\right\|_H \le M_2(\delta)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}$$

elde edilir. Şimdi, $J_2^{3,1}$ kestirimi hesaplanır. (3.1.3), (3.1.5) ve $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)$ uzayında norm tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}\left\|J_2^{3,1}\right\|_H &\le \left\|K_\tau\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\rho(t_j)\right|\tau\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\\ &\quad\times\sum_{i=1}^{j-1}\left\|R^{j-i}(I-R^{2N-2j})(I-R)\right\|_{H\to H}\left\|I-R^{2i}\right\|_{H\to H}\left\|(I+R)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_j\right\|_H\\ &\le M(\delta)\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\rho(t_j)\right|\tau\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\tau((j-i)\tau)^\alpha}{(j-i)\tau((N-i)\tau)^\alpha(j\tau)^\alpha}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}\\ &\le M(\delta)\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{\left|\rho(t_j)\right|\tau}{(j\tau)^\alpha((N-j)\tau)^\alpha}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\tau}{((j-i)\tau)^{1-\alpha}}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\tau}{((j-i)\tau)^{1-\alpha}}$$

toplamı, integral için alt Darboux integral toplamından

$$\int_0^{j\tau} \frac{ds}{(j\tau - s)^{1-\alpha}}$$

dır.

$$\left\| J_2^{3,1} \right\|_H \le M(\delta) \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{\left|\rho(t_j)\right|\tau}{\alpha((N-j)\tau)^{\alpha}} \left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

elde edilir. İntegral için alt Darboux integral toplamından

$$\left\| J_2^{3,1} \right\|_H \le M(\delta) \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \left|\rho(t_j)\right| \tau \left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

ulaşılır. $J_2^{3.2}$ kestirimi için (3.1.3), (3.1.5) ve $C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)$ uzayında norm tanımından

$$\begin{aligned}
\left\| J_2^{3,2} \right\|_H &\le \left\|K_{\tau}\right\|_{H\to H} \left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H} \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left|\rho(t_j)\right|\tau \\
&\times \sum_{i=1}^{j-1} \left\|R^{j-i}\left(I-R^{2N-2j}\right)(I-R)\right\|_{H\to H} \left\|I-R^{2i}\right\|_{H\to H} \left\|(I+R)^{-1}\right\|_{H\to H} \left\|\varphi_i - \varphi_j\right\|_H \\
&\le M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left|\rho(t_j)\right|\tau \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\left(2\tau(N-j)\right)^{\alpha}}{((j-i)\tau)^{1-\alpha}((2N-j-i)\tau)^{\alpha}(j\tau)^{\alpha}((N-i)\tau)^{\alpha}} \left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)} \\
&\le M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \frac{\left|\rho(t_j)\right|\tau 2^{\alpha}((N-j)\tau)^{\alpha}}{((N-j)\tau)^{\alpha}(j\tau)^{\alpha}} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\tau}{((j-i)\tau)^{1-\alpha}((N-j-i+N)\tau)^{\alpha}} \left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\tau}{((j-i)\tau)^{1-\alpha}((N-j-i+N)\tau)^{\alpha}}$$

toplamı integral için alt Darboux integral toplamından

$$\int_{0}^{j\tau}\frac{ds}{(j\tau-s)^{1-\alpha}(1-j\tau-s+1)^{\alpha}}$$

dır.

$$\int_{0}^{j\tau}\frac{ds}{(j\tau-s)^{1-\alpha}(N\tau-j\tau-s+N\tau)}\leq\frac{1}{(1-j\tau)^{\alpha}}\int_{0}^{j\tau}\frac{ds}{(j\tau-s)^{1-\alpha}}\leq\frac{M}{\alpha(j\tau)^{\alpha}}$$

olduğundan

$$\left\|J_{2}^{3,2}\right\|_{H}\leq M(\delta)\sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N}\left|\rho(t_{j})\right|\tau\frac{2^{\alpha}}{(j\tau)^{\alpha}(N\tau-j\tau)^{\alpha}\alpha(j\tau)^{-\alpha}}\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

elde edilir. İntegral için alt Darboux integral toplamından,

$$\left\|J_{2}^{3,2}\right\|_{H}\leq\frac{M(\delta)2^{2\alpha-1}}{\alpha(1-\alpha)}\sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N}\left|\rho(t_{j})\right|\tau\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

bulunur. $J_{2}^{3,1}$ ve $J_{2}^{3,2}$ birleştirilerek

$$\left\|J_{2}^{3}\right\|_{H}\leq\frac{M_{3}(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{N}\left|\rho(t_{j})\right|\tau\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

elde edilir. (3.1.2) şartından

$$\left\|J_2^3\right\|_H \le \frac{M_4(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}$$

dir. Sıradaki, $J_2^{4,1}$ kestirimi için, (3.1.3), (3.1.5) ve $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)$ uzayında norm tanımı kullanarak

$$\begin{aligned}
\left\|J_2^{4,1}\right\|_H &\le \left\|K_\tau\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\rho(t_j)\right|\tau\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|I-R^{2j}\right\|_{H\to H} \\
&\times\sum_{i=j+1}^{N-1}\left\|R^{i-j}\left(I-R^{2N-2i}\right)(I-R)\right\|_{H\to H}\left\|(I+R)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_j\right\|_H \\
&\le M(\delta)\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\rho(t_j)\right|\tau\sum_{i=j+1}^{N-1}\frac{\tau 2^\alpha((i-j)\tau)^\alpha(N-i)^\alpha}{((i-j)\tau)((N-j)\tau)^\alpha(i\tau)^\alpha((2N-j-i)\tau)^\alpha}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)} \\
&\le M(\delta)\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{\left|\rho(t_j)\right|(N\tau-j\tau)^\alpha}{((N-j)\tau)^\alpha(j\tau)^\alpha}\sum_{i=j+1}^{N-1}\frac{\tau}{((i-j)\tau)^{1-\alpha}((N-j-i+N)\tau)^\alpha}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\sum\limits_{i=j+1}^{N-1}\frac{\tau}{((i-j)\tau)^{1-\alpha}}$ toplamı $\int\limits_{j\tau}^{1}\frac{ds}{(s-j\tau)^{1-\alpha}}$ integrali için alt Darboux integral toplamıdır.

$$\int_{j\tau}^{1}\frac{ds}{(s-j\tau)^{1-\alpha}(2N-j\tau-s)}\le\frac{1}{(N\tau-j\tau)^\alpha}\int_{j\tau}^{1}\frac{ds}{(s-j\tau)^{1-\alpha}}\le\frac{(N\tau-j\tau)^\alpha}{\alpha(N\tau-j\tau)^\alpha}$$

olduğundan

$$\left\|J_2^{4,1}\right\|_H \le M(\delta)\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{\left|\rho(t_j)\right|\tau}{(j\tau)^\alpha\alpha}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}$$

elde edilir. İntegral için alt Darboux integral toplamından,

$$\left\| J_2^{4,1} \right\|_H \leq \frac{M(\delta) 2^{2\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \left| \rho(t_j) \right| \tau \left\| \varphi^\tau \right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau, H)}$$

dir. Benzer şekilde $J_2^{4,2}$ için (3.1.3), (3.1.5) kestirimlerini ve $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau, H)$ uzayında norm tanımını uygulayarak

$$\begin{aligned}
\left\| J_2^{4,2} \right\|_H &\leq \left\| K_\tau \right\|_{H\to H} \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left| \rho(t_j) \right| \tau \left\| (I-R^{2N})^{-1} \right\|_{H\to H} \left\| I-R^{2j} \right\|_{H\to H} \\
&\quad \times \sum_{i=j+1}^{N-1} \left\| R^{i-j}\left(I-R^{2N-2i}\right)(I-R) \right\|_{H\to H} \left\| (I+R)^{-1} \right\|_{H\to H} \left\| \varphi_i - \varphi_j \right\|_H \\
&\leq M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left| \rho(t_j) \right| \tau \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\tau((i-j)\tau)^\alpha}{((i-j)\tau)((N-i)\tau)^\alpha (i\tau)^\alpha} \left\| \varphi^\tau \right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau, H)} \\
&\leq M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \frac{\left| \rho(t_j) \right| \tau}{((N-j)\tau)^\alpha (j\tau)^\alpha} \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\tau}{((i-j)\tau)^{1-\alpha}} \left\| \varphi^\tau \right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau, H)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\tau}{((i-j)\tau)^{1-\alpha}}$$

toplamı alt Darboux integral toplamından

$$\int_{j\tau}^{1} \frac{ds}{(s-j\tau)^{1-\alpha}}$$

dır. Böylece

$$\left\| J_2^{4,2} \right\|_H \leq M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \frac{\left|\rho\left(t_j\right)\right|\tau}{(j\tau)^{\alpha}\alpha} \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

gösterilir. Alt Darboux integral toplamından,

$$\left\| J_2^{4,2} \right\|_H \leq M(\delta) \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left|\rho\left(t_j\right)\right|\tau \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

dır. $J_2^{4,1}$ ve $J_2^{4,2}$ kestirimleri birleşiminden

$$\left\| J_2^{4} \right\|_H \leq M(\delta) \left(\frac{2^{\alpha-1}}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{2^{2\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \right) \sum_{j=1}^{N} \left|\rho\left(t_j\right)\right|\tau \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

elde edilir. (3.1.2) şartından

$$\left\| J_2^{4} \right\|_H \leq \frac{M_5(\delta)}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

dır. H uzayında J_2^{m}, $m = 2,\cdots,4$ için kestirimler birleştirilerek (3.1.22) kestirimi elde edilir. Böylece Teorem 3.1.4 ispatlanır.

Bu bölümde, Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4 için uygulamalar verilecektir. İlk olarak, (2.2.1) iki boyutlu eliptik denklem için lokal olmayan sınır değer problemi ele alınır. (2.2.1) probleminin ayrışımı (discretization) iki adımda incelenir. İlk adımda grid uzayı

$$[0,1]_h = \{x \ : \ x_n = nh, 0 \leq n \leq M, \ Mh = 1\}$$

tanımlanır. $[0,1]_h$, üzerinde tanımlı

$$\| \varphi^h \|_{L_{2h}} = (\sum_{x \in [0,1]_h} | \varphi^h(x) |^2 h)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x\in[0,1]_h} \left|(\varphi^h)\right|^2 h\right)^{1/2} + \left(\sum_{x\in[0,1]_h} \left|(\varphi^h(x))_{x_r,\,m_r}\right|^2 h\right)^{1/2}$$

normlarına sahip $\varphi^h\ (x) = \{\varphi_n\}_{n=1}^{M-1}$ grid (ağ) fonksiyonların oluşturduğu $L_{2h} = L_2([0,1]_h)$ uzayı $L_{2h} = L_2([0,1]_h)$ Hilbert uzayı tanıtılır. (2.2.1) problemi ile üretilmiş diferansiyel operatör A için $\varphi_0 = \varphi_M$, $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_M - \varphi_{M-1}$ şartlarını sağlayan $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_1^{M-1}$ uzay üzerindeki grid fonksiyon uzayında

$$A_h^x \varphi^h(x) = \{-(a(x)\varphi_{\bar{x}})_{x_n} + \delta\varphi_n\}_1^{M-1} \tag{3.1.23}$$

formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörüne atanır. L_{2h} uzayında A_h^x kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatör olarak bilinir. A_h^x operatörü yardımıyla sonsuz adi bir diferansiyel denklem sistemi için

$$\begin{cases} -\frac{d^2u^h(t,x)}{dt^2} + A_h^x u^h(t,x) = f^h(t,x),\ 0 < t < 1,\ x \in [0,1]_h, \\ u^h(0,x) = \varphi^h(x);\ u^h(1,x) = \int_0^1 \rho(t) u^h(t,x)dt + \psi^h(x),\ x \in [0,1]_h \end{cases} \tag{3.1.24}$$

lokal olmayan sınır değer problemi elde edilir.

İkinci adımda, (3.1.24) birinci mertebeden doğruluk şeması (3.1.1)'e yerleştirildiğinde (2.2.1).nümerik çözümü için aşağıdaki fark şeması.

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k, x),\ t_k = k\tau, 1 \le k \le N-1,\ N\tau = 1, x \in [0,1]_h, \\ u_0^h(x) = \varphi^h(x);\ u_N^h(x) = \sum_{j=1}^{N} \rho(t_j)\tau u_j^h(x) + \psi^h(x), x \in [0,1]_h \end{cases} \tag{3.1.25}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5 τ ve h yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu taktirde, (3.1.2) şartı altında (3.1.25) fark şemasının çözümü aşağıdaki kararlılık ve hemen hemen koersif kestirimlerini sağlar.

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}} \le M(\delta)\left[\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}} + \left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}} + \left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}\right]$$

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}} + \max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^2}$$
$$\le M(\delta)\left[\ln\frac{1}{\tau+|h|}\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}} + \left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}\right].$$

Teorem 3.1.5'in ispatı L_{2h} uzayında (3.1.23) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özellikleri yanı sıra Teorem 3.1.3'e ve

$$\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1 + \left|\ln\left\|B_h^x\right\|_{L_{2h}\to L_{2h}}\right|\right\} \le M\ln\frac{1}{\tau+|h|} \tag{3.1.26}$$

kestirime dayanır.

Teorem 3.1.6 τ ve h yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu takdirde, (3.1.2) şartı altında (3.1.25) fark şemasının çözümü koersif kestirimini

$$\left\|\left\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h\right)\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, L_{2h})} + \left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, W_{2h}^2)}$$
$$\le M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\left\{\varphi_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, L_{2h})}\right]$$

sağlar.

Teorem 3.1.6'nın ispatı L_{2h} uzayında (3.1.23) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özellikleri ve Teorem 3.1.4'e dayanır.

İkinci olarak Ω, $R^n\{x=(x_1,\cdots,x_n):\ 0<x_k<1,\ 1\le k\le n\}$'de S sınırı ile açık birim küp olsun, $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$'dir. $[0,1]\times\Omega$'da çok boyutlu eliptik denklem için (2.2.2) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipinde sınır değer problemi ele alınır. (2.2.2) problemi (3.1.2) şartı altında çalışılır. Burada, $a_r(x)$, $(x\in\Omega)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ $f(t,x)$ $(t\in(0,1),\ x\in\Omega)$ düzgün fonksiyonlar ve $a_r(x)\geq a>0$ 'dır. (2.2.2) probleminin ayrışımı (discretization) iki adımda gerçekleşir. İlk adımda, grid kümeleri

$$\overline{\Omega}_h=\{x=x_m=(h_1m_1,\cdots,h_mm_m),m=(m_1,\cdots,m_m),0\leq m_r\leq N_r,\\ h_rN_r=1,r=1,\cdots,m\},\ \Omega_h=\overline{\Omega}_h\cap\Omega,\ S_h=\overline{\Omega}_h\cap S.$$

olarak tanımlanır. $\overline{\Omega_h}$ üzerinde tanımlanan

$$\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}=(\sum_{x\in\overline{\Omega}_h}\left|\varphi^h(x)\right|^2h_1\cdots h_m)^{1/2},$$

$$\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}}=\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left(\sum_{x\in\overline{\Omega}_h}\sum_{r=1}^{m}\left|\left(\varphi^h(x)\right)_{x_r}\right|^2h_1\cdots h_m\right)^{1/2}+\left(\sum_{x\in\overline{\Omega}_h}\sum_{r=1}^{m}\left|\left(\varphi^h(x)\right)_{x_r,\bar{x}_r,m_r}\right|^2h_1\cdots h_m\right)^{1/2}$$

normlarına sahip $\varphi^h(x)=\{\varphi(h_1m_1,\cdots,h_mm_m)\}$ grid (ağ) fonksiyonların oluşturduğu $L_{2h}=L_{2h}\overline{(\Omega_h)}$ ve $W_{2h}=W_{2h}\overline{(\Omega_h)}$ Hilbert uzayları tanıtılır. A diferansiyel operatörü problem (2.2.2) tarafından üretilen $u^h(x)=0$ şartlarını sağlayan tüm $x\in S_h$ için $u^h(x)$, uzay üzerindeki grid fonksiyonları

$$A_h^xu^h(x)=-\sum_{r=1}^{m}(a_r(x)u^h_{\bar{x}_r})_{x_r,j_r} \tag{3.1.27}$$

formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörüne atanır. L_{2h} uzayında A_h^x kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatör olarak bilinir. A_h^x operatörünün yardımıyla

$$\begin{cases} -\frac{d^2u^h(t,x)}{dt^2}+A_h^x u^h(t,x)=f^h(t,x),\ 0<t<1,\ x\in\Omega_h, \\ u^h(0,x)=\varphi^h(x);\ u^h(1,x)=\int_0^1 \rho(t)u^h(t,x)dt+\psi^h(x),\ x\in\overline{\Omega}_h \end{cases} \tag{3.1.28}$$

sonsuz adi diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır değer problemi elde edilir. İkinci adımda, (3.1.28) problemi (3.1.1) fark şemasına yerleştirilerek (2.2.2) nümerik çözümleri için aşağıdaki fark şeması elde edilir.

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_k^h(x)=\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^h(t_k,x),\ t_k=k\tau, 1\le k\le N-1,\ N\tau=1, x\in\Omega_h, \\ u_0^h(x)=\varphi^h(x); x\in\overline{\Omega}_h \\ u_N^h(x)=\sum_{j=1}^{N}\rho(t_j)\tau u_j^h(x)+\psi^h(x), x\in\overline{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.1.29}$$

Teorem 3.1.7 τ ve $|h|=\sqrt{h_1^2+...+h_n^2}$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. (3.1.2) şartı altında (3.1.29) fark şemasının çözümü kararlılık kestirimini

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}}\le M(\delta)\left[\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}\right]$$

sağlar.

Teorem 3.1.7'nin ispatı L_{2h} uzayında (3.1.27) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve Teorem 3.1.2'ye dayanır.

Teorem 3.1.8 τ ve h yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu taktirde (3.1.2) kabulu altında (3.1.29) fark şemasının çözümü aşağıdaki koersif kestirimini hemen hemen sağlar.

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^2}$$
$$\le M(\delta)\left[\ln\frac{1}{\tau+|h|}\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}\right].$$

Teorem 3.1.8'in ispatı Teorem 3.1.3 ve (3.1.26) kestirimi, L_{2h} uzayında A_h^x (3.1.27) formülünde tanımlanan fark operatörünün simetri özelliklerine ve L_{2h} uzayında eliptik fark probleminin çözümü için koersif eşitsizliği üzerine verilmiş aşağıdaki teoreme dayanır.

Teorem 3.1.9

$$A_h^x u^h(x)=\omega^h(x), x\in\Omega_h,$$

$$u^h(x)=0, x\in S_h$$

eliptik fark probleminin çözümleri için aşağıdaki koersif eşitsizliği

$$\left\|u^h\right\|_{W_{2h}^2}\le M(\delta)\|\,\omega^h\,\|_{L_{2h}}$$

geçerlidir (Sobolevskii 1975).

Teorem 3.1.10 τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu taktirde (3.1.2) şartı altında (3.1.29) fark şemasının çözümü

$$\left\|\left\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,L_{2h})}+\left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,W_{2h}^2)}$$
$$\le M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\left\{\varphi_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,L_{2h})}\right]$$

koersif kararlılık kestirimini sağlar.

Teorem 3.1.10'nun ispatı L_{2h} uzayında (3.1.27) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve L_{2h} uzayında eliptik fark denkleminin çözümü için koersif eşitsizliği üzerine verilen Teorem 3.1.9 ve Teorem 3.1.4'e dayanır

Üçüncü olarak Ω, $R^m\left(x=(x_1,\cdots,x_m):\ 0<x_k<1,\ 1\le k\le m\right)$'de S sınırı ile açık birim küp olsun. $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$'dir. Şimdi, $[0,1]\times\Omega$'da (2.2.3) çok boyutlu eliptik denklem için lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipinde sınır değer problemi ele alınır. Burada, $a_r(x),\ (x\in\Omega),\ \psi(x),\ \varphi(x)\ (x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)$ $(t\in(0,1),\ x\in\Omega)$ verilmiş düzgün fonksiyonlar ve $a_r(x)\ge a>0$'dır. η pozitif bir sayı ve $\vec{n}$ Ω'da normal vektördür. (2.2.3) probleminin ayrışımı (discretization) iki adımda gerçekleşir. İlk adımda, grid kümeleri

$$\overline{\Omega}_h=\{x=x_m=\left(h_1m_1,\cdots,h_mm_m\right),m=\left(m_1,\cdots,m_m\right),\ 0\le m_r\le N_r,\ h_rN_r=1,\ r=1,\cdots,m\},$$

$$\Omega_h=\overline{\Omega}_h\cap\Omega,\ S_h^r=\overline{\Omega}_h\Omega S^r,\ r=1,2$$

olarak tanımlanır. $L_{2h}=L_2\left(\overline{\Omega_h}\right)$ ve $W_{2h}^2=W_2^2\left(\overline{\Omega_h}\right)$ uzaylarında $\overline{\Omega}_h$ üzerinde tanımlanan $\varphi^h(x)=\{\varphi(h_1m_1,\cdots,h_mm_m)\}$ grid fonksiyonlarıdır. Normları uygulama kısmındaki ilk örnekte verildiği gibidir. A diferansiyel operatörü problem (2.2.3) tarafından üretilen $u^h(x)=0$ şartlarını sağlayan tüm $x\in S_h^1$ ve $D_hu^h(x)=0$ tüm $x\in S_h^2$ için $u^h(x)$, uzay üzerindeki grid fonksiyonları

$$A_h^xu^h(x)=-\sum_{r=1}^{m}\left(a_r(x)u_{\bar{x}_r}^h\right)_{x_r,j_r}+\eta u^h(x) \tag{3.1.30}$$

formülüyle davranan A_h^x fark operatörüne atanır. Burada, $D_hu^h(x)$ $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$'nin bir yaklaşımıdır. $L_{2h}=L_2\left(\overline{\Omega_h}\right)$ uzayında A_h^x kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatördür A_h^x operatörünün yardımıyla

$$
\begin{cases}
-\frac{d^2u^h(t,x)}{dt^2}+A_h^x u^h(t,x)=f^h(t,x),\ 0<t<1,\ x\in\Omega_h,\\
u^h(0,x)=\varphi^h(x);\ u^h(1,x)=\sum_{j=1}^{J}\rho_j u^h(\lambda_j,x)+\psi^h(x),\ x\in\overline{\Omega}_h,\\
\sum_{j=1}^{J}\left|\rho_j\right|\le 1, 0<\lambda_1<\cdots<\lambda_J<1
\end{cases}
\tag{3.1.31}
$$

sonsuz adi diferansiyel denklemler için lokal olmayan problem elde edilir.

İkinci adımda, (3.1.31) problemi (3.1.1) birinci mertebeden doğruluk fark şemasından aşağıdaki fark şeması elde edilir.

$$
\begin{cases}
-\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_k^h(x)=\varphi_k^h(x),\\
\varphi_k^h(x)=f^h(t_k,x),\ t_k=k\tau, 1\le k\le N-1,\ N\tau=1, x\in\Omega_h,\\
u_0^h(x)=\varphi^h(x); x\in\overline{\Omega}_h\\
u_N^h(x)=\sum_{j=1}^{J}\rho_j\, u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}^h(x)+\psi^h(x), x\in\overline{\Omega}_h.
\end{cases}
\tag{3.1.32}
$$

Teorem 3.1.11 τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılardır. Bu taktirde (3.1.32) fark şemasının çözümü aşağıdaki kararlılık ve hemen hemen koersif kararlılık kestirimlerini sağlar.

$$
\left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C\left([0,1]_\tau,\ L_{2h}\right)}\le M_1(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{\varphi_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C\left([0,1]_\tau,\ L_{2h}\right)}\right],
$$

$$
\left\|\left\{\frac{u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h}{\tau^2}\right\}_1^{N-1}\right\|_{C\left([0,1]_\tau,\ L_{2h}\right)}+\left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C\left([0,1]_\tau,\ W_{2h}^2\right)}
$$
$$
\le M_2(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\ln\frac{1}{\tau+|h|}\left\|\left\{\varphi_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C\left([0,1]_\tau,\ L_{2h}\right)}\right].
$$

Burada, M_1 ve M_2, $1\le k\le N-1$'de $\tau,\ h,\ \psi^h(x)$, $\varphi^h(x)$ ve $\varphi_k^h(x)$'den bağımsızdır.

Teorem 3.1.12 τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu takdirde, (3.1.32) fark şemasının çözümü aşağıdaki koersif kararlılık kestirimini sağlar.

$$\left\| \left\{ \frac{u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h}{\tau^2} \right\}_1^{N-1} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,\, L_{2h})} + \left\| \left\{ u_k^h \right\}_1^{N-1} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,\, W_{2h}^2)}$$
$$\leq M_3(\delta,\lambda_1,\lambda_J)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \left\{ \varphi_k^h \right\}_1^{N-1} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,\, L_{2h})} \right].$$

M_3, τ, h, $\psi^h(x), \varphi^h(x)$ ve $1 \leq k \leq N-1$ için $\varphi_k^h(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 3.1.11 ve 3.1.12'nin ispatı (3.1.30) formülünde tanımlanan A_h^x operatörün simetri özelliklerine (3.1.32) birinci mertebeden doğruluk fark şemasına ve L_{2h} uzayında eliptik fark denkleminin çözümleri için koersif eşitsizliği üzerindeki aşağıdaki teoreme dayanır.

Teorem 3.1.13 Eliptik fark probleminin çözümü için

$$\begin{aligned} &A_h^x u^h(x) = \omega^h(x),\ x \in \widetilde{\Omega}_h, \\ &u^h(x) \mid_{x \in S_h^1} = 0, D_h u^h(x) \mid_{x \in S_h^2} = 0, S_h^1 \cup S_h^2 = S_h \end{aligned},$$

aşağıdaki koersif eşitsizliği sağlanır:

$$\sum_{r=1}^{m} \| (u^h)_{\bar{x}_r \bar{x}_r, j_r} \|_{W_{2h}^2} \leq M_4 \|\omega^h\|_{L_{2h}},$$

burada M_4, h ve $\omega^h(x)$ 'den bağımsızdır.

3.2. İkinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması

Bu bölümde, (2.1.1) lokal olmayan sınır değer problemi fark problemi ile ilişkilendirilmiştir. (2.1.1) diferansiyel problemi için ikinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\frac{1}{\tau^2}[u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}]+Au_k=\varphi_k, \\ \varphi_k=f(t_k),\ t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1,\ N\tau=1 \\ u_0=\varphi,\ u_N=\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\left(\frac{u_j+u_{j-1}}{2}\right)\tau+\psi \end{cases} \tag{3.2.1}$$

kurulmuştur. Tüm H uzayında $B=\frac{1}{2}(\tau A+\sqrt{4A+\tau^2A^2})$ kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatördür ve $R=(I+\tau B)^{-1}$ sınırlı operatördür. (3.2.1) problemi

$$\sum_{j=1}^{N}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\tau<1 \tag{3.2.2}$$

şartında çalışılacaktır. Burada, I birim operatördür. Aşağıda ilerleyen kısımlarda gerekli olacak lemma verilir.

.

Lemma 3.2.1

$$I-\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I-R^{2N})^{-1}(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1})$$

operatörünün

$$S_\tau=\left(I-\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I-R^{2N})^{-1}(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1})\right)^{-1}$$

tersine sahiptir ve aşağıdaki kestirim (3.2.2) kabulu altında

$$\left\| S_\tau \right\|_{H \to H} \le M(\delta)\tau \tag{3.2.3}$$

sağlanır, ve burada M sabiti τ ’dan bağımsızdır.

İspat. (3.2.3) kestiriminin ispatı

$$\left\langle (I-L)u, u \right\rangle \ge \left(1 - \sum_{j=1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2} \right)\tau \right) \left\langle u, u \right\rangle \tag{3.2.4}$$

kestirimine dayanır. Burada,

$$L = \sum_{j=1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \frac{\tau}{2} \left(I - R^{2N} \right)^{-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} + R^{N-j+1} - R^{N+j-1} \right)$$

dır. B spektral temsilini ve Cauchy eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left| \left\langle \left(I - R^{2N} \right)^{-1} \frac{1}{2} \left(R^{N-j} - R^{N+j} + R^{N-j+1} - R^{N+j-1} \right) u, u \right\rangle \right| \\
&\quad \le \left\| \left(I - R^{2N} \right)^{-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} + R^{N-j+1} - R^{N+j-1} \right) u \right\|_H \left\| u \right\|_H \\
&\quad \le \left\| \left(I - R^{2N} \right)^{-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} + R^{N-j+1} - R^{N+j-1} \right) u \right\|_{H \to H} \left\| u \right\|_H \\
&\quad \le \Bigg\| \left(I - \left(I + \frac{\tau}{2}\left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2} \right) \right)^{-2N} \right)^{-1} \frac{1}{2} \Bigg(\left(I + \frac{\tau}{2}\left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2} \right) \right)^{-(N-j)} \\
&\qquad - \left(I + \frac{\tau}{2}\left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2} \right) \right)^{-(N+j)} + \left(I + \frac{\tau}{2}\left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2} \right) \right)^{-(N-j+1)} \\
&\qquad - \left(I + \frac{\tau}{2}\left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2} \right) \right)^{-(N+j-1)} \Bigg) \Bigg\|_{H \to H} \left\| u \right\|_H \left\| u \right\|_H
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \sup_{\delta^{\frac{1}{2}} \leq \mu < \infty} \left| \left(1 - \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\mu + \sqrt{4\mu + \tau^2\mu^2}\right)\right)^{-2N} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \times \left(\left(\left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\mu + \sqrt{4\mu + \tau^2\mu^2}\right)\right)^{-(N-j)} - \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\mu + \sqrt{4\mu + \tau^2\mu^2}\right)\right)^{-(N+j)} \right) \right| \\
&\quad + \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\mu + \sqrt{4\mu + \tau^2\mu^2}\right)\right)^{-(N-j+1)} - \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\mu + \sqrt{4\mu + \tau^2\mu^2}\right)\right)^{-(N+j-1)} \Bigg) \|u\|_H^2 \\
&\leq \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\delta^{\frac{1}{2}} + \sqrt{4\delta^{\frac{1}{2}} + \tau^2\delta}\right)\right)^{-(N-j)} \frac{1}{2} \sup_{\delta^{\frac{1}{2}} \leq \mu < \infty} \left\| \left(1 - \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\mu + \sqrt{4\mu + \tau^2\mu^2}\right)\right)^{-2N} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \times \left(1 - \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\mu + \sqrt{4\mu + \tau^2\mu^2}\right)\right)^{-2j} \right. \\
&\quad + \left. \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\mu + \sqrt{4\mu + \tau^2\mu^2}\right)\right)^{-1} - \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\mu + \sqrt{4\mu + \tau^2\mu^2}\right)\right)^{-2j-1} \right) \Bigg\| \langle u,u\rangle \\
&\leq \left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\tau\delta^{\frac{1}{2}} + \sqrt{4\delta^{\frac{1}{2}} + \tau^2\delta}\right)\right)^{-(N-j)} \langle u,u\rangle \leq \langle u,u\rangle
\end{aligned} \tag{3.2.5}
$$

elde edilir. Bu takdirde, (3.2.5) kestirimi ve üçgen eşitsizliği kullanılmasıyla,

$$
\begin{aligned}
\langle (I-L)u,u\rangle &\geq \langle u,u\rangle - \left|\langle Lu,u\rangle\right| \geq \langle u,u\rangle - \sum_{j=1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\tau\langle u,u\rangle \\
&= \left(1 - \sum_{j=1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\tau \right)\langle u,u\rangle
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece (3.2.3) kestirimi sağlandığından Lemma 3.2.1 ispatlanır.

Teorem 3.2.1 Her φ_k, $1 \leq k \leq N-1$ için (3.2.1) probleminin çözümü vardır ve aşağıdaki formül sağlanır. $k = 0,\cdots,N-1$, için

$$
\begin{aligned}
u_k &= (I - R^{2N})^{-1}\Big\{ \left(R^k - R^{2N-k}\right)\varphi + \left(R^{N-k} - R^{N+k}\right)u_N \\
&\quad - \left(R^{N-k} - R^{N+k}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i} - R^{N-1+i}\right)\varphi_i\tau \Big\} \\
&\quad + (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{|k-i|-1} - R^{k+i-1}\right)\varphi_i\tau
\end{aligned}
$$

k = N için

$$\begin{aligned}u_N &= S_\tau\left(\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}\left[\left\{(I-R^{2N})^{-1}\left(R^{j}-R^{2N-j}+R^{j-1}-R^{2N-j+1}\right)\varphi\right.\right.\right.\\
&\quad-\left(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\\
&\quad\left.\times\sum_{i=1}^{N-1}B^{-1}\left(R^{N-1-i}-R^{N-1+i}\right)\varphi_i\tau\right\}+(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\\
&\quad\left.\left.\times\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{|j-i|-1}-R^{j+i-1}+R^{|j-1-i|-1}-R^{j+i-2}\right)\varphi_i\tau\right]+\psi\right)\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

dır.

İspat. (3.1.9) ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının (3.1.10) çözümü vardır. (3.1.10) formülü ve

$$u_N=\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\left(\frac{u_j+u_{j-1}}{2}\right)\tau+\psi$$

lokal olmayan sınır şartından

$$\begin{aligned}u_N &= \left(I-\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1}\right)\right)^{-1}\\
&\quad\times\left(\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}\left[\left\{(I-R^{2N})^{-1}\left\{\left(R^{j}-R^{2N-j}+R^{j-1}-R^{2N-j+1}\right)\varphi\right.\right.\right.\right.\\
&\quad\left.-\left(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i}-R^{N-1+i}\right)\varphi_i\tau\right\}\\
&\quad\left.\left.+(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{|j-i|-1}-R^{j+i-1}+R^{|j-1-i|-1}-R^{j+i-2}\right)\varphi_i\tau\right]+\psi\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$I-\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I-R^{2N})^{-1}(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1})$$

operatörünün S_τ, bir tersine sahip olduğundan

$$u_N = S_\tau\left(\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}\left[\left\{(I-R^{2N})^{-1}\left\{\left(R^j-R^{2N-j}+R^{j-1}-R^{2N-j+1}\right)\varphi\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.-\left(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i}-R^{N-1+i}\right)\varphi_i\tau\right\}$$

$$\left.\left.+\left(I+\tau B\right)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{|j-i|-1}-R^{j+i-1}+R^{|j-1-i|-1}-R^{j+i-2}\right)\varphi_i\tau\right]+\psi\right)$$

formülünden Teorem 3.2.1 ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.2 (3.2.1) fark şemasının çözümü (3.2.2) şartı altında,

$$\|u^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)} \le M(\delta)\left[\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|\varphi\|_H+\|\psi\|_H\right] \tag{3.2.7}$$

kararlılık kestirimini sağlar.

İspat.

$$\|u^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)} \le M(\delta)\left[\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|\varphi\|_H+\|u_N\|_H\right] \tag{3.2.8}$$

kararlılık kestirimi (3.1.9) fark şeması çözümü için ispatlanmıştır (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004). Bu taktirde, (3.2.7) in ispatı (3.2.8) ve

$$\|u_N\|_H \le M(\delta)\left[\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|\varphi\|_H+\|\psi\|_H\right]$$

kestirimine dayanır. (3.2.6) formülü ve (3.1.3), (3.2.3) kestirimleri kullanarak

$$
\begin{aligned}
\|u_N\|_H &\le \|S_\tau\|_{H\to H}\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\frac{\tau}{2}\left[\|(I-R^{2N})^{-1}\|_{H\to H}\left\{\left(\|R^j\|_{H\to H}\right.\right.\right.\\
&+\|R^{2N-j}\|_{H\to H}+\|R^{j-1}\|_{H\to H}+\left.\|R^{2N-j+1}\|_{H\to H}\right)\|\varphi\|_H+\left(\|R^{N-j}\|_{H\to H}\right.\\
&+\|R^{N+j}\|_{H\to H}+\|R^{N-j+1}\|_{H\to H}+\left.\|R^{N+j-1}\|_{H\to H}\right)\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\|_{H\to H}\|B^{-1}\|_{H\to H}\\
&\times\sum_{i=1}^{N-1}\tau\left(\|R^{N-i-1}\|_{H\to H}+\|R^{N+i-1}\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H\Big\}+\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\|_{H\to H}\|B^{-1}\|_{H\to H}\\
&\times\left(\sum_{i=1}^{j-1}\tau\|R^{j-i-1}\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H+\sum_{i=1}^{j-1}\tau\|R^{j-i-2}\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H+\sum_{i=j}^{N-1}\tau\|R^{i-j-2}\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H\right.\\
&+\left.\left.\left.\sum_{i=j}^{N-1}\tau\|R^{i-j-1}\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H+\sum_{i=1}^{N-1}\tau\|R^{j+i-1}\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H+\sum_{i=1}^{N-1}\tau\|R^{j+i-2}\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H\right)\right]+\|\psi\|_H\right)\\
&\le M_1(\delta)\left[\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|\varphi\|_H+\|\psi\|_H\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, Teorem 3.2.2 ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.3 $C([0,1]_\tau,H)$ uzayında (3.2.2) şartı altında (3.2.1) fark probleminin çözümü

$$
\begin{aligned}
&\left\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\left\|\{Au_k\}_1^N\right\|_{C([0,1]_\tau,H)}\\
&\qquad\le M(\delta)\left[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H\right]
\end{aligned}
$$

hemen hemen koersif eşitsizliğini sağlar.

İspat.

(3.1.9) sınır değer probleminin çözümleri için aşağıdaki eşitsizliğin geçerliliği

$$
\begin{aligned}
&\left\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\left\|\{Au_k\}_1^N\right\|_{C([0,1]_\tau,H)}\\
&\qquad\le M(\delta)\left[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}+\|A\varphi\|_H+\|Au_N\|_H\right]
\end{aligned}
$$

ispatlanmıştır (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004). (3.2.3), (3.1.3) kestirimleri ve (3.1.6) formülü kullanarak (3.2.1) fark şemasının çözümü için,

$$\|Au_N\|_H \le M(\delta)\left(\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau, H)} + \|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H \right) \tag{3.2.9}$$

elde edilmeli. (3.2.6) formülü ve $A = B^2R$, eşitliğinden

$$Au_N = J_1 + J_2$$

dır. Burada,

$$J_1 = S_\tau\left(\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I - R^{2N})^{-1}\left(R^j - R^{2N-j} + R^{j-1} - R^{2N-j+1}\right)A\varphi + A\psi\right). \tag{3.2.10}$$

$$\begin{aligned} J_2 = S_\tau (&\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}\Big[(I - R^{2N})^{-1}\Big\{-\left(R^{N-j} - R^{N+j} + R^{N-j+1} - R^{N+j-1}\right) \\ &\times (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}B\left(R^{N-i} - R^{N+i}\right)\varphi_i\tau\Big\} + (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \\ &\times \sum_{i=1}^{j-1}B(I + R)\left(R^{j-i} - R^{j+i-1}\right)\varphi_i\tau \\ &+ (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}\left(\sum_{i=j}^{N-1}B\left(R^{i-j} - R^{j+i} + R^{i-j-1} - R^{j+i-1}\right)\varphi_i\tau\right)\Big]\Big) \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

dir. İspatın tamamlanabilmesi için

$$\|J_1\|_H \le M(\delta)[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H] \tag{3.2.12}$$

ve

$$\|J_2\|_H \le M(\delta)\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau, H)} \tag{3.2.13}$$

gösterilmelidir. (3.2.12) kestirimi, (3.2.10) formülü ve (3.1.3), (3.2.3) kestirimlerinden elde edilir. (3.2.11) formülü, (3.1.3), (3.1.4), (3.2.3) kestirimlerini ve (3.2.2) şartını kullanarak,

$$
\begin{aligned}
\|J_2\|_H \le \|S_\tau\|_{H\to H} & \left(\sum_{j=1}^{N}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\frac{\tau}{2}\left[\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\left\{\left(\left\|R^{N-j}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+j}\right\|_{H\to H}\right.\right.\right.\right.\\
& +\left\|R^{N-j+1}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+j-1}\right\|_{H\to H}\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\\
& \times\sum_{i=1}^{N-1}\left(\left\|(I-R)R^{N-i-1}\right\|_{H\to H}+\left\|(I-R)R^{N+i-1}\right\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H\right\}+\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\\
& \times\left(\sum_{i=1}^{j-1}\left\|(I-R)R^{j-i-1}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H+\sum_{i=j}^{N-1}\left\|(I-R)R^{i+j-1}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H\right.\\
& +\sum_{i=1}^{j-1}\left\|(I-R)R^{j-i-2}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H+\sum_{i=j}^{N-1}\left\|(I-R)R^{i+j-2}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H+\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\\
& \times\left(\sum_{i=j+1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{i-j-1}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H+\sum_{i=j+1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{i+j-1}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H\right.\\
& \left.\left.\left.+\sum_{i=j+1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{i-j-2}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H+\sum_{i=j+1}^{N-1}\left\|(I-R)R^{i+j-2}\right\|_{H\to H}\|\varphi_i\|_H\right)\right]\right)\\
& \le M(\delta)\,\mathbf{min}\left\{\mathbf{ln}\frac{1}{\tau},1+\left|\mathbf{ln}\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.2.9) kestirimi, (3.2.12) ve (3.2.13) kestirimlerinden sağlanır. Böylece Teorem 3.2.3 ispatlanır.

.

Teorem 3.2.4 (3.2.1) fark problemi $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)$ Hölder uzayında (3.2.2) şartı altında iyi konumlanmıştır ve aşağıdaki koersif eşitsizliğini sağlar;

$$
\begin{aligned}
&\left\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+\left\|\{Au_k\}_1^{N}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\\
&\qquad\le M(\delta)\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|\varphi^\tau\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+\|A\varphi\|_H+\|A\psi\|_H\right].
\end{aligned}
\tag{3.2.14}
$$

İspat.

$$
\begin{aligned}
&\left\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+\left\|\{Au_k\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\\
&\qquad\le M(\delta)\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|\varphi^\tau\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+M(\delta)[\|A\varphi\|_H+\|Au_N\|_H]
\end{aligned}
\tag{3.2.15}
$$

eşitsizliği (3.1.9) fark şemasının çözümü için ispatlanmıştır (Ashyralyev ve Sobolevskii 2004). Bu taktirde , (3.2.14)'nün ispatı (3.2.15)'e ve

$$\|Au_N\|_H \leq M(\delta)\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|\varphi^\tau\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)} + M(\delta)[\| A\varphi\|_H + \| A\psi\|_H]$$

kestirimine bağlıdır. (3.2.10), (3.2.11) formüllerini ve üçgen eşitsizliğinin uygulanmasıyla ve (3.2.12) kestiriminden

$$\|Au_N\|_H \leq \|J_1\|_H + \|J_2\|_H \leq \|J_2\|_H + M(\delta)[\| A\varphi\|_H + \| A\psi\|_H]$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için

$$\|J_2\|_H \leq M(\delta)\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|\varphi^\tau\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)} \tag{3.2.16}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (3.2.11) formülünü uygulayarak,

$$\begin{aligned}
J_2 = S_\tau(\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}\Big\{(I-R^{2N})^{-1}\Big\{-\left(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1}\right)\tau^{-2}(I-R)^2\\
\times\sum_{i=1}^{j-1}\tau^2\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\left(f_i-f_j\right)+\left(-\left(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1}\right)\right)\\
\times\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=j+1}^{N-1}\tau^2\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\\
+(I-R^{2N})\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=1}^{j-1}\tau^2\left(R^{j-i}-R^{j+i}+R^{j-i-1}-R^{j+i-1}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\\
+(I-R^{2N})\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=j+1}^{N-1}\tau^2\left(R^{i-j}-R^{j+i}+R^{j-i-1}-R^{j+i-1}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\\
-\left(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1}\right)\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=1}^{j-1}\tau^2\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\varphi_j\\
-\left(R^{N-j}-R^{N+j}+R^{N-j+1}-R^{N+j-1}\right)\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=j+1}^{N-1}\tau^2\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\varphi_j\\
+(I-R^{2N})\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=1}^{j-1}\tau^2\left(R^{j-i}-R^{j+i}+R^{j-i-1}-R^{j+i-1}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\varphi_j\\
+(I-R^{2N})\tau^{-2}(I-R)^2\sum_{i=j+1}^{N-1}\tau^2\left(R^{i-j}-R^{j+i}+R^{j-i-1}-R^{j+i-1}\right)\left(I-R^2\right)^{-1}\varphi_j\Big\} = \sum_{z=2}^{4}J_2^z
\end{aligned}$$

dır. Burada

$$J_2^2 = K_\tau \sum_{j=1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I - R^{2N})^{-1}(I - R)(I + R)^{-1}$$
$$\times\left((I + R)\left(R^{2N-j-1} + R^{2N+j-1} - R^{2N+j} - R^{2N-j} + R^{j} - R^{j-2}\right) - 2R^{2N+j-2}\right)\varphi_j$$

$$J_2^3 = K_\tau \sum_{j=1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I - R^{2N})^{-1}(I - R)(I + R)R^{-1}\left(I - R^{2N-2j+1}\right)$$
$$\times\sum_{i=1}^{j-1} R^{j-i}\left(I - R^{2i}\right)(I + R)^{-1}\left(\varphi_i - \varphi_j\right) = J_2^{3,1} + J_2^{3,2},$$

$$J_2^{3,1} = K_\tau \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I - R^{2N})^{-1}(I - R)(I + R)R^{-1}\left(I - R^{2N-2j+1}\right)$$
$$\times\sum_{i=1}^{j-1} R^{j-i}\left(I - R^{2i}\right)(I + R)^{-1}\left(\varphi_i - \varphi_j\right),$$

$$J_2^{3,2} = K_\tau \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I - R^{2N})^{-1}(I - R)(I + R)R^{-1}\left(I - R^{2N-2j+1}\right)$$
$$\times\sum_{i=1}^{j-1} R^{j-i}\left(I - R^{2i}\right)(I + R)^{-1}\left(\varphi_i - \varphi_j\right).$$

$$J_2^4 = K_\tau \sum_{j=1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I - R^{2N})^{-1}(I - R)(I + R)\left(I - R^{2j-1}\right)\sum_{i=j+1}^{N-1} R^{i-j}\left(I - R^{2N-2i}\right)$$
$$\times(I + R)^{-1}\left(\varphi_i - \varphi_j\right) = J_2^{4,1} + J_2^{4,2},$$

$$J_2^{4,1} = K_\tau \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I - R^{2N})^{-1}(I - R)(I + R)\left(I - R^{2j-1}\right)$$
$$\times\sum_{i=j+1}^{N-1} R^{i-j}\left(I - R^{2N-2i}\right)(I + R)^{-1}\left(\varphi_i - \varphi_j\right)$$

$$J_2^{4,2} = K_\tau \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\frac{\tau}{2}(I - R^{2N})^{-1}(I - R)(I + R)\left(I - R^{2j-1}\right)$$
$$\times\sum_{i=j+1}^{N-1} R^{i-j}\left(I - R^{2N-2i}\right)(I + R)^{-1}\left(\varphi_i - \varphi_j\right)$$

yazılır. Her bir J_2^m, $m=2,\cdots,4$ için ayrı ayrı kestirimler hesaplanır. Sırasıyla J_2^2 ile başlanırsa (3.1.3) ve (3.2.3) kestirimlerinden

$$\begin{aligned}\left\|J_2^2\right\|_H &\le \left\|K_\tau\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{N}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\frac{\tau}{2}\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|I-R\right\|_{H\to H}\left\|(I+R)^{-1}\right\|_{H\to H}\\ &\times\left(\left\|I+R\right\|_{H\to H}\left(\left\|R^{2N-j-1}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{2N+j-1}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{2N+j}\right\|_{H\to H}\right.\right.\\ &\left.\left.+\left\|R^{2N-j}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{j}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{j-2}\right\|_{H\to H}\right)+\left\|R^{2N+j-2}\right\|_{H\to H}\right)\left\|\varphi_j\right\|_H\\ &\le M_1(\delta)\sum_{j=1}^{N}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\frac{\tau}{2}\max_{1\le j\le N}\left\|\varphi_j\right\|_H\le M_1(\delta)\sum_{j=1}^{N}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\frac{\tau}{2}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.2) şartından

$$\left\|J_2^2\right\|_H\le M_6(\delta)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}$$

dır. Şimdi, $J_2^{3,1}$ kestirimi hesaplanır. (3.1.3), (3.2.3) ve $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)$ uzayında norm tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}\left\|J_2^{3,1}\right\|_H &\le \left\|K_\tau\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\frac{\tau}{2}\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\\ &\times\sum_{i=1}^{j-1}\left\|R^{j-i}\left(I-R^{2N-2j+1}\right)(I-R)\right\|_{H\to H}\left\|I-R^{2i}\right\|_{H\to H}\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_j\right\|_H\\ &\le M(\delta)\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\tau((j-i)\tau)^{\alpha}}{(j-i)\tau((N-i)\tau)^{\alpha}(j\tau)^{\alpha}}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\\ &\le M(\delta)\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\tau}{2(j\tau)^{\alpha}((N-j)\tau)^{\alpha}}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\tau}{((j-i)\tau)^{1-\alpha}}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\tau}{((j-i)\tau)^{1-\alpha}}$$

toplamı, alt Darboux integral toplamından

$$\int_0^{j\tau} \frac{ds}{(j\tau - s)^{1-\alpha}}$$

olduğundan

$$\left\| J_2^{3,1} \right\|_H \le M(\delta) \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{\left|\rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\right| \tau}{\alpha((N-j)\tau)^{\alpha}} \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau}, H)}$$

elde edilir. Alt Darboux integral toplamından

$$\left\| J_2^{3,1} \right\|_H \le M(\delta) \frac{2^{\alpha-2}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \right| \tau \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau}, H)}$$

dır. $J_2^{3,2}$ kestirimi için (3.1.3), (3.2.3) ve $C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau}, H)$ uzayında norm tanımından

$$\begin{aligned}
\left\| J_2^{3,2} \right\|_H &\le \left\| K_{\tau} \right\|_{H \to H} \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \right| \frac{\tau}{2} \left\| (I - R^{2N})^{-1} \right\|_{H \to H} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{j-1} \left\| R^{j-i} \left(I - R^{2N-2j+1} \right)(I - R) \right\|_{H \to H} \left\| I - R^{2i} \right\|_{H \to H} \left\| R^{-1} \right\|_{H \to H} \left\| \varphi_i - \varphi_j \right\|_H \\
&\le M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \right| \frac{\tau}{2} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\left(2\tau(N-j+1)\right)^{\alpha}}{((j-i)\tau)^{1-\alpha} ((2N-j-i+1)\tau)^{\alpha} (j\tau)^{\alpha} ((N-i)\tau)^{\alpha}} \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau}, H)} \\
&\le M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \frac{\left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right) \right| \tau 2^{\alpha} ((N-j+1)\tau)^{\alpha}}{((N-j)\tau)^{\alpha} (j\tau)^{\alpha}} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\tau}{((j-i)\tau)^{1-\alpha} ((N-j-i+N+1)\tau)^{\alpha}} \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau}, H)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\tau}{((j-i)\tau)^{1-\alpha}((N-j-i+N+1)\tau)^{\alpha}}$$

toplamı integral için alt Darboux integral toplamından

$$\int_{0}^{j\tau} \frac{ds}{(j\tau-s)^{1-\alpha}(N\tau-j\tau-s+\tau+N\tau)^{\alpha}}$$

dır.

$$\int_{0}^{j\tau} \frac{ds}{(j\tau-s)^{1-\alpha}(N\tau-j\tau-s+N\tau+\tau)} \leq \frac{1}{(N\tau-j\tau+\tau)^{\alpha}} \int_{0}^{j\tau} \frac{ds}{(j\tau-s)^{1-\alpha}} \leq \frac{M}{\alpha(j\tau)^{\alpha}}$$

olduğundan

$$\left\| J_2^{3,2} \right\|_H \leq M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right) \right| \tau \frac{2^{\alpha}}{(j\tau)^{\alpha}(N\tau-j\tau+\tau)^{\alpha}\alpha(j\tau)^{-\alpha}} \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

elde edilir. İntegraller için alt Darboux integral toplamı,

$$\left\| J_2^{3,2} \right\|_H \leq \frac{M(\delta)2^{2\alpha-2}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right) \right| \tau \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

verir. $J_2^{3,1}$ ve $J_2^{3,2}$ birleştirilerek

$$\left\| J_2^{3} \right\|_H \leq \frac{M_7(\delta)}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{N} \left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right) \right| \tau \left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

elde edilir. (3.2.2) şartından

$$\left\|J_2^3\right\|_H \le \frac{M_4(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}$$

bulunur. Benzer şekilde $J_2^{4,1}$ kestirimi için, (3.1.3), (3.2.3) ve $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)$ uzayında norm tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}
\left\|J_2^{4,1}\right\|_H &\le \left\|K_\tau\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\frac{\tau}{2}\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|I-R^{2j-1}\right\|_{H\to H}\\
&\quad\times\sum_{i=j+1}^{N-1}\left\|R^{i-j}\left(I-R^{2N-2i}\right)(I-R)\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_j\right\|_H\\
&\le M(\delta)\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\frac{\tau}{2}\\
&\quad\times\sum_{i=j+1}^{N-1}\frac{2^\alpha\left((i-j)\tau\right)^\alpha\left(N\tau-i\tau\right)^\alpha}{((i-j)\tau)\left((N-j)\tau\right)^\alpha\left(i\tau\right)^\alpha\left((2N-j-i)\tau\right)^\alpha}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}
\end{aligned}$$

dır. Toplam

$$\sum_{i=j+1}^{N-1}\frac{\tau}{((i-j)\tau)^{1-\alpha}}$$

integral için $\int\limits_{j\tau}^{1}\frac{ds}{(s-j\tau)^{1-\alpha}}$ alt Darboux integral toplamıdır.

$$\int\limits_{j\tau}^{1}\frac{ds}{(s-j\tau)^{1-\alpha}s^\alpha(2N-j\tau-s)}\le\frac{1}{(N\tau-j\tau)^\alpha(j\tau)^\alpha}\int\limits_{j\tau}^{1}\frac{ds}{(s-j\tau)^{1-\alpha}}$$

olduğundan

$$\left\|J_2^{4,1}\right\|_H \le M(\delta)\sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{\left|\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\right|\tau 2^\alpha}{(j\tau)^\alpha\alpha}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}$$

elde edilir. İntegral için alt Darboux integral toplamından,

$$\left\| J_2^{4,1} \right\|_H \le \frac{M(\delta)2^{2\alpha-1}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \right| \tau \left\| \varphi^\tau \right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau, H)}$$

dır. Son olarak, $J_2^{4,2}$ için (3.1.3), (3.2.3) ve $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau, H)$ uzayında norm tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left\| J_2^{4,2} \right\|_H &\le \left\| K_\tau \right\|_{H \to H} \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \right| \frac{\tau}{2} \left\| (I - R^{2N})^{-1} \right\|_{H \to H} \left\| I - R^{2j-1} \right\|_{H \to H} \\
&\quad \times \sum_{i=j+1}^{N-1} \left\| R^{i-j} \left(I - R^{2N-2i} \right) (I - R) \right\|_{H \to H} \left\| \varphi_i - \varphi_j \right\|_H \\
&\le M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \right| \frac{1}{2} \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\tau((i-j)\tau)^\alpha}{((i-j)\tau)((N-i)\tau)^\alpha (i\tau)^\alpha} \left\| \varphi^\tau \right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau, H)} \\
&\le M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \frac{\left| \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \right|}{2((N-j)\tau)^\alpha (j\tau)^\alpha} \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\tau}{((i-j)\tau)^{1-\alpha}} \left\| \varphi^\tau \right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau, H)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\tau}{((i-j)\tau)^{1-\alpha}}$$

toplamı alt Darboux integral toplamından

$$\int_{j\tau}^{1} \frac{ds}{(s - j\tau)^{1-\alpha}}$$

dır. Böylece

$$\left\|J_2^{4,2}\right\|_H \leq M(\delta) \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \frac{\left|\rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\right| \tau}{(j\tau)^{\alpha}\alpha} \left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

bulunur. İntegral için alt Darboux integral toplamından,

$$\left\|J_2^{4,2}\right\|_H \leq M(\delta) \frac{2^{\alpha-2}}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{j=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N} \left|\rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\right| \tau \left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

elde edilir. $J_2^{4,1}$ ve $J_2^{4,2}$ kestirimleri birleşiminden

$$\left\|J_2^{4}\right\|_H \leq M(\delta) \left(\frac{2^{\alpha-2}}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{2^{2\alpha-1}}{\alpha(1-\alpha)} \right) \sum_{j=1}^{N} \left|\rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\right| \tau \left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

dır. (3.2.2) şartından

$$\left\|J_2^{4}\right\|_H \leq \frac{M_5(\delta)}{\alpha(1-\alpha)} \left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_{\tau},H)}$$

bulunur. H uzayında J_2^{m}, $m = 2,\cdots,4$ için kestirimler birleştirilerek (3.2.16) kestirimi elde edilir. Böylece Teorem 3.2.4 ispatlanır.

Bu bölümde, Teorem3.2.2, Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4 için uygulamalar verilecektir. İlk olarak, (2.2.1) iki boyutlu eliptik denklem için lokal olmayan sınır değer problemi ele alınır. (2.2.1) probleminin ayrışımı iki adımda incelenir. İlk adım, 3.1.'in uygulamalar kısmındaki birinci adımla aynıdır. Böylece, ikinci adımda (3.1.24) lokal olmayan sınır değer problemi (3.2.1) doğruluk fark şemasına yerleştirerek, (2.2.1)'nin nümerik çözümleri için fark şeması

$$
\begin{cases}
-\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_k^h(x)=\varphi_k^h(x), \\
\varphi_k^h(x)=f^h(t_k,x),\ t_k=k\tau, 1\le k\le N-1,\ N\tau=1, x\in[0,1]_h, \\
u_0^h(x)=\varphi^h(x);\ u_N^h(x)=\sum_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\tau\left(\frac{u_j^h(x)+u_{j-1}^h(x)}{2}\right)+\psi^h(x), x\in[0,1]_h
\end{cases}
\tag{3.2.17}
$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5 τ ve h yeterince küçük pozitif sayılar olsun. (3.2.2) şartı altında (3.2.17) fark şemasının çözümü aşağıdaki kararlılık

$$
\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}}\le M(\delta)\left[\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}\right]
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|\left(u_k^h\right)\right\|_{W_{2h}^2} \\
&\qquad\le M(\delta)\left[\ln\frac{1}{\tau+|h|}\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}\right]
\end{aligned}
$$

hemen hemen koersif kestirimlerini sağlar.

Teorem 3.2.5'in ispatı L_{2h} uzayında (3.1.23) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerinin yanı sıra Teorem 3.2.3'e ve kestirim (3.1.26)'ya dayanır.

Teorem 3.2.6 τ ve h yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu taktirde, (3.2.2) şartı altında (3.2.17) fark şemasının çözümü koersif kestirimini

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, L_{2h})}+\left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, W_{2h}^2)} \\
&\qquad\le M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\left\{\varphi_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, L_{2h})}\right]
\end{aligned}
$$

sağlar.

Teorem 3.2.6'nın ispatı L_{2h} uzayında (3.1.23) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve Teorem 3.2.4'e bağlıdır.

İkinci olarak Ω, $R^n\{x=(x_1,\cdots,x_n): 0<x_k<1, 1\le k\le n\}$'de S sınırı ile açık birim küp olsun, $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$'dır. $[0,1]\times\Omega$'da çok boyutlu eliptik denklem için (2.2.2) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipinde sınır değer problemini (3.2.2) şartı altında ele alınır. Burada, $a_r(x),(x\in\Omega)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)$ $(t\in(0,1),\ x\in\Omega)$ düzgün fonksiyonlar ve $a_r(x)\ge a>0$'dır. (2.2.2) probleminin ayrışımı iki adımda gerçekleşir. İlk adım, 3.1.'in uygulamalar kısmındaki (3.1.28) probleminin birinci adımıyla aynıdır. Böylece, ikinci adımda (3.1.28) lokal olmayan sınır değer problemi (3.2.1) doğruluk fark şemasına yerleştirerek, (2.2.2) nümerik çözümleri için fark şeması

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_k^h(x)=\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^h(t_k,x),\ t_k=k\tau, 1\le k\le N-1,\ N\tau=1, x\in\Omega_h, \\ u_0^h(x)=\varphi^h(x); x\in\overline{\Omega}_h \\ u_N^h(x)=\sum\limits_{j=1}^{N}\rho\left(t_j-\frac{\tau}{2}\right)\left(\frac{u_j^h(x)+u_{j-1}^h(x)}{2}\right)+\psi^h(x), x\in\overline{\Omega}_h \end{cases} \tag{3.2.18}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.7 τ ve $|h|=\sqrt{h_1^2+...+h_n^2}$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. (3.2.18) fark şeması çözümü (3.2.2) şartı altında

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}}\le M(\delta)\left[\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}\right]$$

kararlılık kestirimini sağlar.

Teorem 3.2.7'nin ispatı L_{2h} uzayında (3.1.27) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özellikleri ve Teorem 3.2.2 kullanılarak yapılır.

Teorem 3.2.8 τ ve h yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu taktirde (3.2.18) fark şemasının çözümü (3.2.2) şartı altında

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^2}$$
$$\le M(\delta)\left[\ln\frac{1}{\tau+|h|}\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}\right]$$

hemen hemen koersif kestirimini sağlar.

Teorem 3.2.8'in ispatı Teorem 3.2.3, kestirim (3.1.26), L_{2h} uzayında (3.1.27) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve L_{2h} uzayında eliptik fark probleminin çözümü için koersif eşitsizliği üzerine verilmiş Teorem 3.1.9'a dayanır.

Teorem 3.2.9 τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu taktirde, (3.2.18) fark şemasının çözümü (3.2.2) şartı altında

$$\left\|\left\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,L_{2h})}+\left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,W_{2h}^2)}$$
$$\le M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\left\{\varphi_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau L_{2h})}\right]$$

koersif kararlılık kestirimini sağlar.

Teorem 3.2.9'un ispatı L_{2h} uzayında (3.1.27) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine, L_{2h} uzayında eliptik fark probleminin çözümü için koersif eşitsizliği üzerine olan Teorem 3.1.9 teoremine ve Teorem 3.2.4'e bağlıdır.

Üçüncü olarak, $[0,1]\times\Omega$'da çok boyutlu eliptik denklem için (2.2.3) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipinde sınır değer problemi ele alınır. Burada, $a_r(x)$, $(x\in\Omega)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)$ $(t\in(0,1),\ x\in\Omega)$ düzgün fonksiyonlar ve $a_r(x)\ge a>0$ dir. η pozitif bir sayı ve $\vec{\mathbf{n}}$ Ω'da normal vektördür. (2.2.2) probleminin ayrışımı (discretization) iki adımda gerçekleştirilir. İlk adım, birinci mertebeden doğruluk fark şemasının uygulamalarındaki üçüncü örnek gibidir. İkinci adımda, (3.1.31) lokal olmayan sınır değer problemi ikinci mertebeden doğruluk fark şemasına yerleştirilir. Aşağıdaki fark şeması elde edilir.

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_k^h(x)=\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^h(t_k,x),\ t_k=k\tau, 1\le k\le N-1,\ N\tau=1, x\in\Omega_h, \\ u_0^h(x)=\varphi^h(x); x\in\overline{\Omega}_h, \\ u_N^h(x)=\sum\limits_{j=1}^{N}\rho_j\left(u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}^h(x)+\left(u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]+1}^h(x)-u_{\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]}^h(x)\right)\left(\frac{\lambda_j}{\tau}-\left[\frac{\lambda_j}{\tau}\right]\right)\right) \\ +\psi^h(x), x\in\overline{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.2.19}$$

Teorem 3.2.10 τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu takdirde, (3.2.19) fark şemasının çözümü

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,\,L_{2h})}\le M_1(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{f_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,\,L_{2h})}\right],$$

.

kararlılık ve

$$\left\|\left\{\frac{u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h}{\tau^2}\right\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,\,L_{2h})}+\left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,\,W_{2h}^2)}$$
$$\le M_2(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\ln\frac{1}{\tau+|h|}\left\|\left\{\varphi_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_\tau,\,L_{2h})}\right]$$

hemen hemen koersif kararlılık kestirimlerini sağlar. Burada M_1 ve M_2, τ, h, $\psi^h(x)$, $\varphi^h(x)$ ve $\varphi_k^h(x)$, $1\le k\le N-1$'den bağımsızdır.

Teorem 3.2.11 τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu takdirde, (3.2.19) fark şemasının çözümü

$$\left\| \left\{ \frac{u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h}{\tau^2} \right\}_1^{N-1} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,\, L_{2h})} + \left\| \left\{ u_k^h \right\}_1^{N-1} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,\, W_{2h}^2)}$$

$$\leq M_3(\delta, \lambda_1, \lambda_J) \left[\left\| \varphi^h \right\|_{W_{2h}^2} + \left\| \psi^h \right\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \left\{ \varphi_k^h \right\}_1^{N-1} \right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,\, L_{2h})} \right]$$

koersif kararlılık kestirimini sağlar. M_3, τ, h, $\psi^h(x)$, $\varphi^h(x)$ ve $1 \leq k \leq N-1$. için $\varphi_k^h(x)$ 'den bağımsızdır.

Teorem 3.2.10-3.2.11'in ispatı (3.1.30) formülü ile tanımlanan A_h^x operatörünün simetri özelliklerine ve (3.1.13) teoremine dayanır.

3.3. Dördüncü Mertebeden Doğruluk Fark Şeması

Bu kısımda, (2.1.1) lokal olmayan sınır değer problemine uyan aşağıda dördüncü mertebeden doğruluk fark şeması ile ilişkilendirilmiştir.

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+Au_k+\frac{\tau^2}{12}A^2u_k=\varphi_k, \\ \varphi_k=f(t_k)+\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{f(t_{k+1})-2f(t_k)+f(t_{k-1})}{\tau^2}+Af(t_k)\right), \quad t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1, \\ u_0=\varphi,\ u_N=\frac{\tau}{3}\left(\rho(t_0)u_0+\rho(t_N)u_N\right) \\ +\frac{\tau}{3}\left(4\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})u_{2k-1}+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})u_{2k}\right)+\psi. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

A pozitif tanımlı kendisine eşlenik bir operatör olduğundan, $C=\frac{A}{2}+\frac{A^2}{12}$ olan operatörde kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatördür. $B=\frac{\tau C}{2}+\sqrt{\frac{\tau^2C^2}{4}+C}$ için $R=(I+\tau B)^{-1}$ vardır ve tüm H uzayında tanımlanan sınırlı bir operatördür. Burada, I birim operatördür. Bu kısımda, (3.3.1) problemi

$$\left(\frac{\tau}{3}|\rho(t_0)|+\frac{\tau}{3}|\rho(t_N)|+\frac{8\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}|\rho(t_{2k-1})|+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}|\rho(t_{2k})|\right)\le\frac{\delta}{(I+\tau\delta)^N} \quad (3.3.2)$$

kabulü altında çalışılacaktır.

Şimdi, aşağıda gerekli olacak bir lemma verilecektir.

Lemma 3.3.1

$$I-\frac{\tau}{3}\rho(t_N)-\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-2k+1}-R^{N+2k-1}\right)$$
$$-\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-2k}-R^{N+2k}\right)$$

operatörü

$$G_\tau = \left(I - \frac{\tau}{3}\rho(t_N) - \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-2k+1} - R^{N+2k-1}\right) \right.$$
$$\left. - \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})\left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-2k} - R^{N+2k}\right) \right)^{-1}$$

tersine sahiptir ve aşağıdaki kestirim (3.3.2) kabulü altında

$$\left\|G_\tau\right\|_{H\to H} \le M(\delta)\tau \tag{3.3.3}$$

sağlanır. Burada M sabiti τ 'dan bağımsızdır.

Teorem 3.3.1 Her φ_k, $1 \le k \le N-1$ için (3.3.1) probleminin çözümü vardır ve aşağıdaki formüller sağlanır:

k $= 0,\cdots, N-1$ için

$$\begin{aligned} u_k &= (I - R^{2N})^{-1}\Big\{\left(R^k - R^{2N-k}\right)\varphi + \left(R^{N-k} - R^{N+k}\right)u_N \\ &- \left(R^{N-k} - R^{N+k}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i} - R^{N-1+i}\right)\varphi_i \tau\Big\} \\ &+ (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{|k-i|-1} - R^{k+i-1}\right)\varphi_i \tau \end{aligned}$$

k=N için

$$
\begin{aligned}
u_N = G_\tau \Bigg(\Bigg(\Bigg(& \frac{\tau}{3}\rho(t_0) + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k-1} - R^{2N-2k+1}\right) \\
& + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})\left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k} - R^{2N-2k}\right) \Bigg) \varphi + \left(I - R^{2N}\right)^{-1} \\
& \times \Bigg(-\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(R^{N-2k-1} - R^{N+2k-1}\right) \\
& \times (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i} - R^{N-1+i}\right)\varphi_i \tau \Bigg) \Bigg) \\
& + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{2k-1}\left(R^{2k-2-i} - R^{2k-2+i}\right)\varphi_i \tau \\
& + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=2k}^{N-1}\left(R^{i-2k} - R^{2k-2+i}\right)\varphi_i \tau \\
& + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{2k}\left(R^{2k-1-i} - R^{2k-1+i}\right)\varphi_i \tau \\
& + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=2k+1}^{N-1}\left(R^{i-2k-1} - R^{2k-1+i}\right)\varphi_i \tau + \psi \Bigg)
\end{aligned}
$$

dır. Burada,

$$
\begin{aligned}
G_\tau = \Bigg(& I - \frac{\tau}{3}\rho(t_N) - \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-2k+1} - R^{N+2k-1}\right) \\
& - \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})\left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-2k} - R^{N+2k}\right) \Bigg)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.3.4}
$$

dır.

İspat. (3.1.9) ikinci mertebeden doğruluk fark şeması (3.1.10)’a benzer bir çözümü vardır. Dördüncü mertebeden doğruluk fark şeması,

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+Cu_k=\varphi_k, \\ \varphi_k=f(t_k)+\frac{\tau^2}{12}(\frac{f(t_{k+1})-2f(t_k)+f(t_{k-1})}{\tau^2}+Af(t_k)), \quad t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1, \\ u_0=\varphi,\ u_N=\frac{\tau}{3}\left(\rho(t_0)u_0+\rho(t_N)u_N\right) \\ +\frac{\tau}{3}\left(4\sum\limits_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})u_{2k-1}+2\sum\limits_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})u_{2k}\right)+\psi \end{cases} .$$

olarak yazılabilir. (3.1.10) formülünden ve lokal olmayan sınır koşullarından

$$\begin{aligned} u_N=&\frac{\tau}{3}\left(\rho(t_0)u_0+\rho(t_N)u_N\right)+\frac{\tau}{3}\left(4\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})\right. \\ &\times\Big[(I-R^{2N})^{-1}\Big\{\left(R^{2k-1}-R^{2N-2k+1}\right)\varphi+\left(R^{N-2k+1}-R^{N+2k-1}\right)u_N \\ &-\left(R^{N-2k-1}-R^{N+2k-1}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i}-R^{N-1+i}\right)\varphi_i\tau\Big\} \\ &+(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{|2k-1-i|-1}-R^{2k+i-2}\right)\varphi_i\tau\Big] \\ &+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})\Big[(I-R^{2N})^{-1}\Big\{\left(R^{2k}-R^{2N-2k}\right)\varphi+\left(R^{N-2k}-R^{N+2k}\right)u_N \\ &-\left(R^{N-2k}-R^{N+2k}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i}-R^{N-1+i}\right)\varphi_i\tau\Big\} \\ &\left.+(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}B^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{|2k-i|-1}-R^{2k+i-1}\right)\varphi_i\tau\Big]\right)+\psi \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} &I-\frac{\tau}{3}\rho(t_N)-\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-2k+1}-R^{N+2k-1}\right) \\ &-\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{N-2k}-R^{N+2k}\right) \end{aligned}$$

operatörünün G_τ, tersi vardır ve

$$
\begin{aligned}
u_N = G_\tau \Bigg(\Bigg(\Bigg(& \frac{\tau}{3}\rho(t_0) + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k-1} - R^{2N-2k+1}\right) \\
& + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})\left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k} - R^{2N-2k}\right) \Bigg)\varphi + \left(I - R^{2N}\right)^{-1} \\
& \times \Bigg(-\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(R^{N-2k-1} - R^{N+2k-1}\right) \\
& \times (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i} - R^{N-1+i}\right)\varphi_i \tau \Bigg) \\
& - \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})\left(R^{N-2k} - R^{N+2k}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{N-1}\left(R^{N-1-i} - R^{N-1+i}\right)\varphi_i \tau \Bigg) \\
& + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{2k-1}\left(R^{2k-2-i} - R^{2k-2+i}\right)\varphi_i \tau \\
& + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=2k}^{N-1}\left(R^{i-2k} - R^{2k-2+i}\right)\varphi_i \tau \\
& + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=1}^{2k}\left(R^{2k-1-i} - R^{2k-1+i}\right)\varphi_i \tau \\
& + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{i=2k+1}^{N-1}\left(R^{i-2k-1} - R^{2k-1+i}\right)\varphi_i \tau + \psi \Bigg)
\end{aligned}
$$

dır. Böylece, Teorem 3.3.1 ispatı tamamlanır.

Teorem 3.3.2 (3.3.1) fark şemasının çözümü,

$$
\left\| u^\tau \right\|_{C([0,1]\tau,H)} \le M(\delta)\left[\left\| \varphi^\tau \right\|_{C([0,1]\tau,H)} + \left\| \psi \right\|_H + \left\| \varphi \right\|_H \right] \tag{3.3.5}
$$

kararlılık kestirimini sağlar. Burada M, φ^τ, φ, ψ ve τ ’dan bağımsızdır.

İspat. (3.1.9) fark şemasının çözümü için

$$\left\| u^{\tau} \right\|_{C([0,1]\tau,H)} \le M(\delta)\left[\left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C([0,1]\tau,H)} + \left\| \psi \right\|_{H} + \left\| u_{N} \right\|_{H} \right] \tag{3.3.6}$$

gösterilmişti. Şimdi, (3.3.5)'ün ispatı (3.3.6) ve

$$\left\| u_{N} \right\|_{H} \le M(\delta)\left[\left\| \varphi^{\tau} \right\|_{C([0,1]\tau,H)} + \left\| \psi \right\|_{H} + \left\| u_{N} \right\|_{H} \right]$$

kestirimine bağlıdır. (3.3.4) formülü, (3.1.3), (3.3.3) kestirimleri ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\left\| u_{N} \right\|_{H} \le{}& \left\| G_{\tau} \right\|_{H\to H} \left\| \left(I - R^{2N} \right)^{-1} \right\|_{H\to H} \Bigg[\Bigg(\left\| I - R^{2N} \right\|_{H\to H} \frac{\tau}{3} \left| \rho(t_0) \right| \\
&+ \frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left| \rho(t_{2k-1}) \right| \left(\left\| R^{2k-1} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{2N-2k+1} \right\|_{H\to H} \right) \\
&+ \frac{2\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left| \rho(t_{2k}) \right| \left(\left\| R^{2k} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{2N-2k} \right\|_{H\to H} \right) \Bigg) \left\| \varphi \right\|_{H} \\
&+ \frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left| \rho(t_{2k-1}) \right| \left(\left\| R^{N-2k-1} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{N+2k-1} \right\|_{H\to H} \right) \left\| B^{-1} \right\|_{H\to H} \\
&\times \left\| (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \right\|_{H\to H} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\left\| R^{N-i-1} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{N+i-1} \right\|_{H\to H} \right) \left\| \varphi_i \right\|_{H} \tau \\
&+ \frac{2\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left| \rho(t_{2k}) \right| \left(\left\| R^{N-2k} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{N+2k} \right\|_{H\to H} \right) \left\| B^{-1} \right\|_{H\to H} \\
&\times \left\| (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \right\|_{H\to H} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\left\| R^{N-i-1} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{N+i-1} \right\|_{H\to H} \right) \left\| \varphi_i \right\|_{H} \tau \\
&+ \left\| I - R^{2N} \right\|_{H\to H} \Bigg(\frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left| \rho(t_{2k-1}) \right| \left\| (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \right\|_{H\to H} \left\| B^{-1} \right\|_{H\to H} \\
&\times \sum_{i=1}^{2k-1} \left(\left\| R^{2k-2-i} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{2k-2+i} \right\|_{H\to H} \right) \left\| \varphi_i \right\|_{H} \tau \\
&+ \frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left| \rho(t_{2k-1}) \right| \left\| (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \right\|_{H\to H} \left\| B^{-1} \right\|_{H\to H} \\
&\times \sum_{i=2k}^{N-1} \left(\left\| R^{i-2k} \right\|_{H\to H} + \left\| R^{2k-2+i} \right\|_{H\to H} \right) \left\| \varphi_i \right\|_{H} \tau
\end{aligned}$$

$$+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}|\rho(t_{2k})|\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H}$$
$$\times\sum_{i=1}^{2k}\left(\left\|R^{2k-i-1}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{2k+i-1}\right\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H\tau$$
$$+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}|\rho(t_{2k})|\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H}$$
$$\left.\left.\times\sum_{i=2k+1}^{N-1}\left(\left\|R^{i-2k-1}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{2k+i-1}\right\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H\tau+\|\psi\|_H\right)\right]$$

elde edilir. (3.3.2) kabulünden

$$\|u_N\|_H\leq M_2(\delta)\left[\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C([0,1]_{\tau},H)}+\|\varphi\|_H+\|\psi\|_H\right]$$

dır. Böylece, Teorem 3.3.2'nin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.3.3 (3.3.2) kabulü altında $C([0,1]_{\tau},H)$ uzayında (3.3.1) fark probleminin çözümü

$$\left\|\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_{\tau},H)}+\left\|\left\{A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)u_k\right\}_1^{N-1}\right\|_{C([0,1]_{\tau},H)}$$
$$\leq M(\delta)\left[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau},1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C([0,1]_{\tau},H)}+\left\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi\right\|_H+\left\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi\right\|_H\right]$$

hemen hemen koersif eşitsizliğini sağlar. Burada, M sabiti $1\leq k\leq N-1$ için τ, ψ, φ ve φ_k'den bağımsızdır.

İspat. Bu teoremin ispatı (3.3.1) sınır değer probleminin çözümleri için (3.1.14) kestirimine ve

$$\left\| A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)u_N\right\|_H \le M(\delta)\left(\mathbf{min}\left\{ \mathbf{ln}\frac{1}{\tau}\mathbf{,}1+\left|\mathbf{ln}\|B\|_{H\to H}\right|\right\} \|\varphi^\tau\|_{C([0,1]\tau,H)} + \left\| A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi\right\|_H + \| A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi \|_H \right) \tag{3.3.7}$$

eşitsizliğine bağlıdır. (3.3.4) formülünü kullanarak,

$$A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)u_N = J_1 + J_2$$

elde edilir. Burada

$$J_1 = G_\tau \left(\left(\frac{\tau}{3}\rho(t_0) + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k-1}-R^{2N-2k+1}\right) + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k}-R^{2N-2k}\right)\right) A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi + A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi \right) \tag{3.3.8}$$

$$\begin{aligned} J_2 = G_\tau\left(I-R^{2N}\right)^{-1} & \left(-\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})\left(R^{N-2k-1}-R^{N+2k-1}\right) \right. \\ & \times (I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}B\left(R^{N+1-i}-R^{N+1+i}\right)\varphi_i\tau \\ & \left. -\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})\left(R^{N-2k}-R^{N+2k}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}B\left(R^{N+1-i}-R^{N+1+i}\right)\varphi_i\tau \right) \\ & + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{2k-1}B\left(R^{2k-i}-R^{2k+i}\right)\varphi_i\tau \\ & + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=2k}^{N-1}B\left(R^{i-2k+2}-R^{2k+i}\right)\varphi_i\tau \\ & + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{2k}B\left(R^{2k+1-i}-R^{2k+1+i}\right)\varphi_i\tau \\ & \left. + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=2k+1}^{N-1}B\left(R^{i-2k+1}-R^{2k+1+i}\right)\varphi_i\tau \right) \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

dır. İspatın tamamlanabilmesi için

$$\|J_1\|_H \leq M(\delta)\left(\left\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi\right\|_H + \| A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi \|_H\right) \tag{3.3.10}$$

ve

$$\|J_2\|_H \leq M(\delta)\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1+\left|\ln\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]\tau, H).} \tag{3.3.11}$$

gösterilmelidir. (3.3.10) kestirimi (3.3.2) kabulü altında (3.3.8) formülü, (3.1.3), (3.1.4) ve (3.3.3) kestirimlerinden elde edilir. (3.3.2) kabulü altında (3.3.9) formülü ve (3.1.3), (3.3.3) kestirimlerinden

$$
\begin{aligned}
\|J_2\|_H &\le \|G_\tau\|_{H\to H}\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\Bigg[\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}|\rho(t_{2k-1})|\left(\|R^{N-2k-1}\|_{H\to H}+\|R^{N+2k-1}\|_{H\to H}\right)\\
&\times\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\|_{H\to H}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\|(I-R)R^{N-i}\|_{H\to H}+\|(I-R)R^{N+i}\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H\\
&+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}|\rho(t_{2k})|\left(\|R^{N-2k}\|_{H\to H}+\|R^{N+2k}\|_{H\to H}\right)\\
&\times\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\|_{H\to H}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\|(I-R)R^{N-i}\|_{H\to H}+\|(I-R)R^{N+i}\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H\\
&+\|I-R^{2N}\|_{H\to H}\Bigg(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}|\rho(t_{2k-1})|\,\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\|_{H\to H}\\
&\times\sum_{i=1}^{2k-1}\left(\|(I-R)R^{2k-1-i}\|_{H\to H}+\|(I-R)R^{2k-1+i}\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}|\rho(t_{2k-1})|\\
&\times\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\|_{H\to H}\sum_{i=2k}^{N-1}\left(\|(I-R)R^{i-2k+1}\|_{H\to H}+\|(I-R)R^{2k-1+i}\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H\\
&+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}|\rho(t_{2k})|\,\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\|_{H\to H}\\
&\times\sum_{i=1}^{2k}\left(\|(I-R)R^{2k-i}\|_{H\to H}+\|(I-R)R^{2k+i}\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}|\rho(t_{2k})|\\
&\times\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\|_{H\to H}\sum_{i=2k+1}^{N-1}\left(\|(I-R)R^{i-2k}\|_{H\to H}+\|(I-R)R^{2k+i}\|_{H\to H}\right)\|\varphi_i\|_H\Bigg)\Bigg]\\
&\le M_1\,\mathbf{min}\left\{\mathbf{ln}\frac{1}{\tau},1+\left|\mathbf{ln}\|B\|_{H\to H}\right|\right\}\|\varphi^\tau\|_{C([0,1]_\tau,H)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son kestirim ve (3.3.10) kestiriminden (3.3.7) kestirimi sağlanır. Bu Teorem 3.3.3'ü ispatlar.

Teorem 3.3.4 (3.3.1) fark problemi (3.3.2) kabulü altında $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)$ Hölder uzayında iyi konumlanmıştır ve koersif eşitsizliğini sağlar:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left\{\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+\left\|\left\{A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)u_k\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\\
&\qquad\le\frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left[\|\varphi^\tau\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}+\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi\|_H+\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi\|_H\right].
\end{aligned}
$$

İspat. Benzer şekilde Teorem 3.1.4 deki gibi bu teoremin ispatı, (3.1.21) kestirimine ve

$$
\begin{aligned}
&\left\| A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right) u_N \right\|_H \\
&\qquad \le \frac{M(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left[\left\|\varphi^\tau\right\|_{C([0,1]_\tau,H)} + \left\| A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi \right\|_H + \left\| A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi \right\|_H \right]
\end{aligned}
\tag{3.3.12}
$$

kestirimine bağlıdır. Böylece, (3.3.1) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için (3.3.12) ispatlanmalıdır. (3.3.4) formülünü ve $B^2R = A$ uygulayarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$
\begin{aligned}
A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right) u_N = G_\tau &\left(\left(\left(\frac{\tau}{3}\rho(t_0) + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k-1}-R^{2N-2k+1}\right) \right.\right.\right. \\
&\left. + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k}-R^{2N-2k}\right) \right) A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi + A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi \\
&+ \left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(-\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(R^{N-2k-1}-R^{N+2k-1}\right) \right. \\
&\times (I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1} BR^{N+1-i}(\varphi_i-\varphi_{N-1})\tau - \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k}) \\
&\times \left(R^{N-2k}-R^{N+2k}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1} BR^{N+1-i}(\varphi_i-\varphi_{N-1})\tau \\
&+ \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(R^{N-2k-1}-R^{N+2k-1}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1} BR^{N+1+i}(\varphi_i-\varphi_1)\tau \\
&\left. + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho(t_{2k})\left(R^{N-2k}-R^{N+2k}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1} BR^{N+1+i}(\varphi_i-\varphi_1)\tau \right) \\
&+ \left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(-\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho(t_{2k-1})\left(R^{N-2k-1}-R^{N+2k-1}\right) \right. \\
&\times (I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1} BR^{N+1-i}\varphi_{N-1}\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})\left(R^{N-2k}-R^{N+2k}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}BR^{N+1-i}\varphi_{N-1}\tau\\
&+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})\left(R^{N-2k-1}-R^{N+2k-1}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}BR^{N+1+i}\varphi_1\tau\\
&\left.+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})\left(R^{N-2k}-R^{N+2k}\right)(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}BR^{N+1+i}\varphi_1\tau\right)\\
&+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{2k-1}B\left(R^{2k-i}-R^{2k+i}\right)(\varphi_i-\varphi_{2k})\tau\\
&+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=2k+1}^{N-1}B\left(R^{i-2k+2}-R^{2k+i}\right)(\varphi_i-\varphi_{2k})\tau\\
&+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{2k-1}B\left(R^{2k+1-i}-R^{2k+1+i}\right)(\varphi_i-\varphi_{2k})\tau\\
&\left.+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=2k+1}^{N-1}B\left(R^{i-2k+1}-R^{2k+1+i}\right)(\varphi_i-\varphi_{2k})\tau\right)\\
&+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{2k-1}B\left(R^{2k-i}-R^{2k+i}\right)\varphi_{2k}\tau\\
&+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=2k+1}^{N-1}B\left(R^{i-2k+2}-R^{2k+i}\right)\varphi_{2k}\tau\\
&+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=1}^{2k-1}B\left(R^{2k+1-i}-R^{2k+1+i}\right)\varphi_{2k}\tau\\
&\left.+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\sum_{i=2k+1}^{N-1}B\left(R^{i-2k+1}-R^{2k+1+i}\right)\varphi_{2k}\tau\right)\\
&=\sum_{m=1}^{9}J_k^m,
\end{aligned}
$$

burada

$$
\begin{aligned}
J_k^1 = G_\tau\Bigg(\Bigg(&\frac{\tau}{3}\rho(t_0)+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k-1}-R^{2N-2k+1}\right)\\
&+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\left(R^{2k}-R^{2N-2k}\right)\Bigg)A\varphi+A\psi\Bigg),
\end{aligned}
$$

$$J_k^{2,1} = G_\tau \left(I - R^{2N}\right)^{-1} \left(-\frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)\left(R^{N-2k-1} - R^{N+2k-1}\right) \right.$$

$$\times \left(I + \tau B\right)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} BR^{N+1-i}\left(\varphi_i - \varphi_{N-1}\right)\tau$$

$$\left. -\frac{2\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)\left(R^{N-2k} - R^{N+2k}\right)\left(I + \tau B\right)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} BR^{N+1-i}\left(\varphi_i - \varphi_{N-1}\right)\tau \right),$$

$$J_k^{2,2} = G_\tau \left(I - R^{2N}\right)^{-1} \left(-\frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)\left(R^{N-2k-1} - R^{N+2k-1}\right) \right.$$

$$\times \left(I + \tau B\right)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-2} BR^{N+1-i}\left(\varphi_i - \varphi_{N-1}\right)\tau$$

$$\left. -\frac{2\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)\left(R^{N-2k} - R^{N+2k}\right)\left(I + \tau B\right)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-2} BR^{N+1-i}\left(\varphi_i - \varphi_{N-1}\right)\tau \right),$$

$$J_k^{3,1} = G_\tau \left(I - R^{2N}\right)^{-1} \left(\frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)\left(R^{N-2k-1} - R^{N+2k-1}\right) \right.$$

$$\times \left(I + \tau B\right)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]} BR^{N+1+i}\left(\varphi_i - \varphi_1\right)\tau$$

$$\left. +\frac{2\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)\left(R^{N-2k} - R^{N+2k}\right)\left(I + \tau B\right)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]} BR^{N+1+i}\left(\varphi_i - \varphi_1\right)\tau \right),$$

$$J_k^{3,2} = G_\tau \left(I - R^{2N}\right)^{-1} \left(\frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)\left(R^{N-2k-1} - R^{N+2k-1}\right) \right.$$

$$\times \left(I + \tau B\right)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-1} BR^{N+1+i}\left(\varphi_i - \varphi_1\right)\tau$$

$$\left. +\frac{2\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)\left(R^{N-2k} - R^{N+2k}\right)\left(I + \tau B\right)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-1} BR^{N+1+i}\left(\varphi_i - \varphi_1\right)\tau \right),$$

$$J_k^4 = G_\tau \left(I - R^{2N}\right)^{-1} \left(-\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)\left(R^{N-2k-1} - R^{N+2k-1}\right) \right.$$

$$\times (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=1}^{N-2} BR^{N+1-i} \varphi_{N-1}\tau$$

$$- \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)\left(R^{N-2k} - R^{N+2k}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=1}^{N-2} BR^{N+1-i} \varphi_{N-1}\tau$$

$$+ \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)\left(R^{N-2k-1} - R^{N+2k-1}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=2}^{N-1} BR^{N+1+i} \varphi_1\tau$$

$$\left. + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)\left(R^{N-2k} - R^{N+2k}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=2}^{N-1} BR^{N+1+i} \varphi_1\tau \right),$$

$$J_k^5 = G_\tau \left(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=1}^{2k-1} B\left(R^{2k-i} - R^{2k+i}\right)\varphi_{2k}\tau \right.$$

$$+ \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=2k+1}^{N-1} B\left(R^{i-2k+2} - R^{2k+i}\right)\varphi_{2k}\tau$$

$$+ \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=1}^{2k-1} B\left(R^{2k+1-i} - R^{2k+1+i}\right)\varphi_{2k}\tau$$

$$\left. + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=2k+1}^{N-1} B\left(R^{i-2k+1} - R^{2k+1+i}\right)\varphi_{2k}\tau \right),$$

$$J_k^6 = G_\tau \left(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=1}^{2k-1} B\left(R^{2k-i} - R^{2k+i}\right)\left(\varphi_i - \varphi_{2k}\right)\tau \right),$$

$$J_k^7 = G_\tau \left(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \rho\left(t_{2k-1}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=2k+1}^{N-1} B\left(R^{i-2k+2} - R^{2k+i}\right)\left(\varphi_i - \varphi_{2k}\right)\tau \right),$$

$$J_k^8 = G_\tau \left(\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=1}^{2k-1} B\left(R^{2k+1-i} - R^{2k+1+i}\right)\left(\varphi_i - \varphi_{2k}\right)\tau \right),$$

$$J_k^9 = G_\tau \left(\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \rho\left(t_{2k}\right)(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=2k+1}^{N-1} B\left(R^{i-2k+1} - R^{2k+1+i}\right)\left(\varphi_i - \varphi_{2k}\right)\tau \right)$$

dır. İkinci olarak, her $J_m^\tau = \{J_k^m\}_{k=1}^{N-1}$ $m = 1,2,3\cdots 9$ için ayrı ayrı kestirimleri hesaplanır. J_k^1 ile başlanırsa (3.1.3) ve (3.3.3) kestirimlerini kullanarak,

$$
\begin{aligned}
\left\|J_k^1\right\|_H \le \left\|G_\tau\right\|_{H\to H} & \left(\left(\frac{\tau}{3}|\rho(t_0)| + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}|\rho(t_{2k-1})|\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\right.\right.\\
& \times\left(\left\|R^{2k-1}\right\|_{H\to H} + \left\|R^{2N-2k+1}\right\|_{H\to H}\right) + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}|\rho(t_{2k})|\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H}\\
& \left.\left.\times\left(\left\|R^{2k}\right\|_{H\to H} + \left\|R^{2N-2k}\right\|_{H\to H}\right)\right)\left\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi\right\|_H + \left\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi\right\|_H\right).\\
\le M(\delta) & \left[\left(\frac{\tau}{3}|\rho(t_0)| + \frac{8\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}|\rho(t_{2k-1})| + \frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}|\rho(t_{2k})|\right)\right.\\
& \left.\times\left\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi\right\|_H + \left\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi\right\|_H\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.3.2) kabulünden

$$
\left\|J_k^1\right\|_H \le M_1(\delta)\left(\left\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\psi\right\|_H + \left\|A\left(I+\frac{A\tau^2}{12}\right)\varphi\right\|_H\right)
$$

dır. Şimdi, $J_k^{2,1}$ kestirimi alınır.

$$
\begin{aligned}
\left\|J_k^{2,1}\right\|_H \le \left\|G_\tau\right\|_{H\to H}\left\|(I-R^{2N})^{-1}\right\|_{H\to H} & \left(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}|\rho(t_{2k-1})|\left(\left\|R^{N-2k-1}\right\|_{H\to H} + \left\|R^{N+2k-1}\right\|_{H\to H}\right)\right.\\
& \times\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left\|BR^{N+1-i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_{N-1}\right\|_H\tau\\
& + \frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}|\rho(t_{2k})|\left(\left\|R^{N-2k}\right\|_{H\to H} + \left\|R^{N+2k}\right\|_{H\to H}\right)\\
& \left.\times\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left\|BR^{N+1-i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_{N-1}\right\|_H\tau\right).
\end{aligned}
$$

(3.1.3), (3.3.3) kestirimlerini kullanarak ve $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$ uzayında norm tanımından

$$\begin{aligned}
\left\|J_k^{2,1}\right\|_H &\le M(\delta)\left(\frac{8\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\left|\alpha(t_{2k-1})\right|\sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{((N+1-i)\tau)^{\alpha}}{((N+1-i)\tau)((N+1)\tau)^{\alpha}((N-i)\tau)^{\alpha}}\right.\\
&\quad\left.+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left|\alpha(t_{2k})\right|\sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{((N+1-i)\tau)^{\alpha}}{((N+1-i)\tau)((N+1)\tau)^{\alpha}((N-i)\tau)^{\alpha}}\right)\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}\\
&\le M(\delta)\left(\frac{8\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{\left|\alpha(t_{2k-1})\right|}{((N+1)\tau)^{\alpha}\left(\frac{N\tau}{2}\right)^{\alpha}}+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\left|\alpha(t_{2k})\right|}{((N+1)\tau)^{\alpha}\left(\frac{N\tau}{2}\right)^{\alpha}}\right)\\
&\quad\times\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\tau\frac{((N+1-i)\tau)^{\alpha}}{((N+1-i)\tau)}\right)\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\tau\frac{((N+1-i)\tau)^{\alpha}}{((N+1-i)\tau)}$$

toplamı

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{ds}{(1-s)^{1-\alpha}}$$

integral için alt Darboux integral toplamıdır. (3.3.2) kabulünden

$$\left\|J_k^{2,1}\right\|_H \le \frac{M_2(\delta)}{\alpha}\left\|\varphi^{\tau}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,H)}$$

dır. $J_k^{2,2}$ için (3.1.3) ve (3.3.3) kestirimlerini uygulayarak, $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$ uzayında norm tanımından

$$
\begin{aligned}
\left\|J_k^{2,2}\right\|_H &\le \left\|G_\tau\right\|_{H\to H}\left\|\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\frac{4\tau}{3}\left|\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho\left(t_{2k-1}\right)\right|\left(\left\|R^{N-2k-1}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+2k-1}\right\|_{H\to H}\right)\right.\\
&\times\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\sum_{i=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-2}\tau\left\|BR^{N+1-i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_{N-1}\right\|\\
&+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left|\rho\left(t_{2k}\right)\right|\left(\left\|R^{N-2k}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+2k}\right\|_{H\to H}\right)\\
&\left.\times\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\sum_{i=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-2}\left\|BR^{N+1-i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_{N-1}\right\|_H\tau\right)\\
&\le M(\delta)\left(\frac{8\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{\left|\rho\left(t_{2k-1}\right)\right|}{\left((N+1)\tau\right)^\alpha\left(\frac{N\tau}{2}\right)^\alpha}+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\left|\rho\left(t_{2k}\right)\right|}{\left((N+1)\tau\right)^\alpha\left(\frac{N\tau}{2}\right)^\alpha}\right)\\
&\times\sum_{i=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-2}\frac{\left((N+1-i)\tau\right)^\alpha}{\left((N+1-i)\tau\right)}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]\tau,H)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. İntegral için alt Darboux integral toplamından

$$
\sum_{i=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-2}\frac{\left((N+1-i)\tau\right)^\alpha}{\left((N+1-i)\tau\right)}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{ds}{(1-s)^{1-\alpha}}=\frac{2^\lambda}{2\alpha}
$$

dır. Böylece (3.3.2) kabulünden

$$
\left\|J_k^{2,2}\right\|_H\le\frac{M_2(\delta)}{\alpha}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}
$$

bulunur. Şimdi, $J_k^{3,1}$ kestirim alınır. (3.1.3) ve (3.3.3) kullanarak $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)$ uzayında norm tanımı

$$
\begin{aligned}
\left\|J_k^{3,1}\right\|_H &\le \left\|G_\tau\right\|_{H\to H}\left\|\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\Bigg(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\left|\rho(t_{2k-1})\right|\left(\left\|R^{N-2k-1}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+2k-1}\right\|_{H\to H}\right)\\
&\quad\times\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\sum_{i=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left\|BR^{N+1+i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_1\right\|_H\tau+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left|\rho(t_{2k})\right|\\
&\quad\times\left(\left\|R^{N-2k}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+2k}\right\|_{H\to H}\right)\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\\
&\quad\times\sum_{i=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left\|BR^{N+1+i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_i-\varphi_1\right\|_H\tau\Bigg)\\
&\le M(\delta)\left(\frac{8\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{\left|\rho(t_{2k-1})\right|}{((N-1)\tau)^\alpha}+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\left|\rho(t_{2k})\right|}{((N-1)\tau)^\alpha}\right)\sum_{i=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{\tau}{((N+1-i)\tau)}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]\tau,H)}
\end{aligned}
$$

verir. İntegral için alt Darboux integral toplamından ve (3.3.2) kabulü altında

$$\left\|J_k^{3,1}\right\|_H \le M_3(\delta)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1.3), (3.3.3) kestirimlerini kullanarak ve $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)$ uzayında norm tanımından

$$\left\|J_k^{3,2}\right\|_H \le M_4(\delta)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}$$

bulunur. Sırada, J_k^4 kestirimi alınır. (3.1.3), (3.3.3) ve $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)$, uzayında norm tanımından

$$
\begin{aligned}
\left\|J_k^4\right\|_H &\le \left\|G_\tau\right\|_{H\to H}\left\|\left(I-R^{2N}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\left|\rho\left(t_{2k-1}\right)\right|\left(\left\|R^{N-2k-1}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+2k-1}\right\|_{H\to H}\right)\right. \\
&\times\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\sum_{i=1}^{N-2}\left\|BR^{N+1-i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_{N-1}\right\|_H\tau+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left|\rho\left(t_{2k}\right)\right| \\
&\times\left(\left\|R^{N-2k}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+2k}\right\|_{H\to H}\right)\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\sum_{i=1}^{N-2}\left\|BR^{N+1-i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_{N-1}\right\|_H\tau \\
&+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\left|\rho\left(t_{2k-1}\right)\right|\left(\left\|R^{N-2k-1}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+2k-1}\right\|_{H\to H}\right)\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H} \\
&\times\sum_{i=2}^{N-1}\left\|BR^{N+1+i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_1\right\|_H\tau+\frac{2\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left|\rho\left(t_{2k}\right)\right|\left(\left\|R^{N-2k}\right\|_{H\to H}+\left\|R^{N+2k}\right\|_{H\to H}\right) \\
&\left.\times\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\sum_{i=2}^{N-1}\left\|BR^{N+1+i}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi_1\right\|_H\tau\right) \\
&\le M_3(\delta)\left(\frac{8\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\left|\rho\left(t_{2k-1}\right)\right|\sum_{i=1}^{N-2}\frac{\tau}{((N+1-i)\tau)}+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left|\rho\left(t_{2k}\right)\right|\right. \\
&\times\sum_{i=1}^{N-2}\frac{\tau}{((N+1-i)\tau)}+\frac{8\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\left|\rho\left(t_{2k-1}\right)\right|\sum_{i=2}^{N-1}\frac{\tau}{((N+1+i)\tau)} \\
&\left.+\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left|\rho\left(t_{2k}\right)\right|\sum_{i=2}^{N-1}\frac{\tau}{((N+1+i)\tau)}\right)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. İntegral için alt Darboux integral toplamından ve (3.3.2) kabulü altında

$$\left\|J_k^4\right\|_H \le M_5(\delta)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}$$

dır. Benzer şekilde (3.1.3), (3.3.3) kestirimlerini kullanarak ve $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)$ uzayında norm tanımından

$$\left\|J_k^5\right\|_H \le M_6(\delta)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}$$

elde edilir. Bundan sonra, J_k^6 kestirim alınır. (3.1.3), (3.3.3) kestirimlerini kullanarak ve $C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)$, uzayında norm tanımından

$$
\begin{aligned}
\left\|J_k^6\right\|_H &\le \left\|G_\tau\right\|_{H\to H}\Big(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\left|\rho\left(t_{2k-1}\right)\right|\left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H}\\
&\quad\times\sum_{i=1}^{2k-1}\left\|BR^{2k-i}\left(I-R^{2i}\right)\right\|_{H\to H}(\varphi_i-\varphi_{2k})\tau\Big)\\
&\le M(\delta)\left(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\left|\rho\left(t_{2k-1}\right)\right|\sum_{i=1}^{2k-1}\frac{\left((2k-i)\tau\right)^\alpha}{(2k\tau)^\alpha\left((N-i)\tau\right)^\alpha(2k-i)\tau}\right)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}\\
&\le M(\delta)\left(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{\left|\rho\left(t_{2k-1}\right)\right|}{(2k\tau)^\alpha\left((N-2k)\tau\right)^\alpha}\sum_{i=1}^{2k-1}\frac{\left((2k-i)\tau\right)^\alpha}{(2k-i)\tau}\right)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}
\end{aligned}
$$

ulaşılır. İntegral için alt Darboux integral toplamından

$$
\int_0^{2k\tau}\frac{ds}{(2k\tau-s)^{1-\alpha}}
$$

dır.

$$
\int_0^{2k\tau}\frac{ds}{(2k\tau-s)^{1-\alpha}}=\frac{(2k\tau)^\alpha}{\alpha}
$$

olduğundan böylece

$$
\left\|J_k^6\right\|_H \le M(\delta)\left(\frac{4\tau}{3}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{\left|\alpha\left(t_{2k-1}\right)\right|}{\left((N-2k)\tau\right)^\alpha\alpha}\right)\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}
$$

elde edilir. (3.3.2) kabulü altında

$$
\left\|J_k^6\right\|_H \le \frac{M_7(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^\alpha([0,1]_\tau,H)}
$$

dır. Ayrıca, (3.1.3), (3.3.3) kestirimlerini kullanarak ve $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$ uzayında norm tanımından

$$
\begin{aligned}
\left\|J_k^7\right\|_H &\le \left\|G_\tau\right\|_{H\to H} \Bigg(\frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left|\rho(t_{2k-1})\right| \left\|(I+\tau B)(2I+\tau B)^{-1}\right\|_{H\to H} \\
&\quad \times \sum_{i=2k+1}^{N-1} \left\|BR^{i-2k+2}\left(I-R^{4k-2}\right)\right\|_{H\to H} \left\|\varphi_i - \varphi_{2k}\right\|_{H\to H} \tau \Bigg) \\
&\le M(\delta) \left(\frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left|\rho(t_{2k-1})\right| \sum_{i=2k+1}^{N-1} \frac{((i-2k)\tau)^\alpha}{(i\tau)^\alpha ((N-2k)\tau)^\alpha (i-2k+2)\tau} \right) \left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)} \\
&\le M(\delta) \left(\frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\left|\rho(t_{2k-1})\right|}{(2k\tau)^\alpha ((N-2k)\tau)^\alpha} \sum_{i=2k+1}^{N-1} \frac{((i-2k)\tau)^\alpha}{(i-2k+2)\tau} \right) \left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)}
\end{aligned}
$$

bulunur. İntegral için alt Darboux integral toplamı

$$
\sum_{i=2k+1}^{N-1} \frac{((i-2k)\tau)^\alpha}{(i-2k+2)\tau} = \int_{2k\tau}^{1} \frac{ds}{(s-2k\tau)^{1-\alpha}}
$$

dır. İntegrali hesapladıktan sonra,

$$
\left\|J_k^7\right\|_H \le M(\delta) \left(\frac{4\tau}{3} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\left|\alpha(t_{2k-1})\right| (1-2k\tau)^\alpha}{\alpha (2k\tau)^\alpha ((N-2k)\tau)^\alpha} \right) \left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)}
$$

elde edilir. İntegral için alt Darboux integral toplamından ve (3.3.2) kabulü altında

$$
\left\|J_k^7\right\|_H \le \frac{M_8(\delta)}{\alpha(1-\alpha)} \left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)}
$$

dır. Son olarak, J_k^8 ve J_k^9 kestirimleri alınır. (3.1.3) ve (3.3.3) kestirimlerini kullanarak ve $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$ uzayında norm tanımından

$$\left\|J_k^8\right\|_H \le \frac{M_9(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)},$$

$$\left\|J_k^9\right\|_H \le \frac{M_{10}(\delta)}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)}$$

elde edilir. m= $1,2,\cdots 9$ için $C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau, H)$ uzayında J_k^m için kestirimleri birleşiminden Teorem 3.3.4'ün ispatı tamamlanır.

Bu bölümde, Teorem 3.3.2, Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.4 için uygulamalar verilecektir. İki boyutlu eliptik denklem için (2.2.1) problemi ele alınır. İlk olarak, gird uzayı ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının uygulamalar kısmındaki gibi tanımlanır. A_h^x operatörünün yardımıyla (3.1.24) lokal olmayan sınır değer problemine ulaşılır. İkinci olarak, (3.1.24) lokal olmayan sınır değer problemi (3.3.1) doğruluk fark şemasına yerleştirilir, dördüncü mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_k^h(x) + \frac{\tau^2}{12}\left(A_h^x\right)^2 u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k, x) + \frac{\tau^2}{12}\left(\frac{f^h(t_{k+1},x)-2f^h(t_k,x)+f^h(t_{k-1},x)}{\tau^2} + A_h^x f^h(t_k, x)\right), \\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N-1, N\tau = 1,\ x \in [0,1]_h, \\ u_0^h(x) = \varphi^h(x);\ u_N^h(x) = \frac{\tau}{3}\left(\rho(t_0)u_0^h(x) + \rho(t_N)u_N^h(x)\right) \\ +\frac{\tau}{3}\left(4\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})u_{2k-1}^h(x) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})u_{2k}^h(x)\right) + \psi^h(x),\ x \in [0,1]_h \end{cases} \tag{3.3.13}$$

(2.2.1) probleminin nümerik çözümleri için elde edilir.

Teorem 3.3.5 τ ve h yeterince küçük pozitif sayılar olsun. (3.3.2) şartı altında (3.3.13) fark şemasının çözümü

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}} \le M(\delta)\left[\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}} + \left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}} + \left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}\right]$$

kararlılık ve

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^2}$$
$$\le M_2(\delta)\left[\ln\frac{1}{\tau+|h|}\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}\right]$$

hemen hemen koersif kestirimini sağlar. Burada M_1 ve M_2, τ, h, $\psi^h(x)$, $\varphi^h(x)$ ve $1\le k\le N-1$. için $\varphi_k^h(x)$'den bağımsızdır.

Teorem 3.3.5'in ispatı L_{2h} uzayında (3.1.23) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerin yanı sıra Teorem 3.3.2, Teorem 3.3.3 ve (3.1.26) kestirimine bağlıdır.

Teorem 3.3.6 τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu taktirde, (3.3.2) şartı altında (3.3.13) fark şemasının çözümü

$$\left\|\left\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,L_{2h})}+\left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,W_{2h}^2)}$$
$$\le M_3(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\left\{\varphi_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,L_{2h})}\right]$$

koersif kestirimini sağlar. Burada M_3, τ, $\psi^h(x)$, $\varphi^h(x)$ ve $1\le k\le N-1$. için $\varphi_k^h(x)$'den bağımsızdır.

Teorem 3.3.6'nin ispatı, L_{2h} uzayında (3.1.23) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özellikleri ve Teorem 3.3.4'e dayanır.

İkinci olarak Ω, $R^n\{x=(x_1,\cdots,x_n):\ 0<x_k<1,\ 1\le k\le n\}$'de S sınırı ile açık birim küp olsun, $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$'dir. $[0,1]\times\Omega$ da çok boyutlu eliptik denklem için (2.2.2) lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipinde sınır değer problemi (3.3.2) şartı altında ele alınır. Burada, $a_r(x)$, $(x\in\Omega)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)$ $(t\in(0,1),\ x\in\Omega)$ düzgün fonksiyonlar ve $a_r(x)\ge a>0$'dır. (2.2.2) probleminin ayrışımı iki adımda gerçekleşir. İlk adım, 3.1'in. uygulamalar kısmındaki (3.1.28) probleminin birinci adımıyla aynıdır.

Birinci adımın sonunda, (3.1.28) sonsuz adi diferansiyel denklem sistemi için bir lokal olmayan sınır değer problemine ulaşılır. İkinci adımda, (3.1.28) lokal olmayan sınır değer problemi (3.3.1) doğruluk fark şemasına yerleştirilerek, dördüncü mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_k^h(x)+\frac{\tau^2}{12}\left(A_h^x\right)^2 u_k^h(x)=\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^h(t_k,x)+\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{f^h(t_{k+1},x)-2f^h(t_k,x)+f^h(t_{k-1},x)}{\tau^2}+A_h^x f^h(t_k,x)\right), \\ t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1, N\tau=1, x\in\Omega_h, \\ u_0^h(x)=\varphi^h(x);\ u_N^h(x)=\frac{\tau}{3}\left(\rho(t_0)u_0^h(x)+\rho(t_N)u_N^h(x)\right) \\ +\frac{\tau}{3}\left(4\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})u_{2k-1}^h(x)+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})u_{2k}^h(x)\right)+\psi^h(x),\ x\in\overline{\Omega_h} \end{cases} \tag{3.3.14}$$

(2.2.2) probleminin nümerik çözümleri için elde edilir.

Teorem 3.3.7 τ ve $|h|=\sqrt{h_1^2+...+h_n^2}$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. (3.3.14) fark şeması çözümü (3.3.2) şartı altında

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}}\le M_4(\delta)\left[\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}\right]$$

kararlılık kestirimini sağlar. Burada M_4, τ, h, $\psi^h(x)$, $\varphi^h(x)$ ve $1\le k\le N-1$.için $\varphi_k^h(x)$'den bağımsızdır.

Teorem 3.3.7'nin ispatı, L_{2h} uzayında (3.1.27) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerinden ve Teorem 3.3.2 kullanılarak elde edilir.

Teorem 3.3.8 τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu taktirde (3.3.14) fark şemasının çözümü (3.3.2) şartı altında

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^2}$$
$$\le M_5(\delta)\left[\ln\frac{1}{\tau+|h|}\max_{1\le k\le N-1}\left\|\varphi_k^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}\right]$$

hemen hemen koersif kestirimini sağlar. Burada M_5, τ, h, $\psi^h(x)$, $\varphi^h(x)$ ve $1\le k\le N-1$.için $\varphi_k^h(x)$'den bağımsızdır.

Teorem 3.3.8'in ispatı; Teorem 3.3.3, (3.1.26) kestirimine, L_{2h} uzayında (3.1.27) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve L_{2h} uzayında eliptik fark probleminin çözümü için koersif eşitsizliği üzerine verilmiş Teorem (3.1.9)'a dayanır.

Teorem 3.3.9 τ ve $|h|$ yeterince küçük pozitif sayılar olsun. Bu taktirde, (3.3.14) fark şemasının çözümü (3.3.2) şartı altında

$$\left\|\left\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,L_{2h})}+\left\|\left\{u_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,W_{2h}^2)}$$
$$\le M_6(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\left\{\varphi_k^h\right\}_1^{N-1}\right\|_{C_{01}^{\alpha}([0,1]_\tau,L_{2h})}\right]$$

koersif kararlılık kestirimini sağlar. Burada M_6, τ, $\psi^h(x)$, $\varphi^h(x)$ ve $1\le k\le N-1$.için $\varphi_k^h(x)$'den bağımsızdır.

Teorem 3.3.9'un ispatını; L_{2h} uzayında (3.1.27) formülünde tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve L_{2h} uzayında eliptik fark probleminin çözümü için koersif eşitsizliği üzerine verilmiş Teorem 3.1.9 ve Teorem 3.3.4'e dayanır.

4. SAYISAL SONUÇLAR

İntegral şartlı eliptik denklemler için lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer problemi

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u = \pi^2 \exp(-t)\sin(\pi x), \ 0 < t < 1, \ 0 < x < 1, \\ u(0,x) = \sin(\pi x), \ 0 < x < 1, \\ u(1,x) = \int_0^1 e^{-\lambda} u(\lambda, x) d\lambda + (\exp(-1) + 2\exp(-2) - 2)\sin(\pi x), \ 0 < x < 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \ 0 < t < 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

ele alınır. Problemin tam çözümü

$$u(t,x) = \mathbf{exp}(-t)\,\mathbf{sin}(\pi x)$$

dır. Şimdi bu kısımda lokal olmayan Bitsadze-Samarskii probleminin yaklaşık çözümleri için ilk başta

$$[0,1]_\tau \times [0,1]_h = \{(t_k, x_n):\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N-1,\ N\tau = 1,\ x_n = nh, \\ 1 \le n \le M-1,\ Mh = 1\}$$

şeklinde tanımlanan τ ve h küçük parametrelerine bağlı grid noktalar ailesi $[0,1]_\tau \times [0,1]_h$ kümesi ele alınır. Yukarıdaki problemin yaklaşık çözümleri için $\tau = \frac{1}{N}, h = \frac{1}{M}$ grid aralıklarıyla birinci, ikinci ve dördüncü mertebeden doğruluk fark şemaları kullanılır. İkinci mertebeden n'ye bağlı matris katsayılı fark denklemlere sahip olunur. Bu fark denklemlerin çözümü için n'ye bağlı matris katsayılı fark denklemleri için uyarlanmış Gauss Eliminasyon metodundaki işleyiş uygulanır Sayısal deneylerin sonuçları dördüncü mertebeden doğruluk fark şeması birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarından daha iyi sonuçlar verdiğini gösterir.

4.1. Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması

Yaklaşım formülü,

$$\frac{u(x_{n+1})-2u(x_n)+u(x_{n-1})}{h^2}-u''(x_n)=O(h^2)$$

ve (3.1.1) fark şeması kullanarak, (4.1) probleminin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}-\frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{h^2}+u_n^k=f(t_k,x_n), \\ 1\le k\le N-1, 1\le n\le M-1, \\ u_n^0=\varphi(x_n),\ 0\le n\le M, \\ u_n^N-\sum_{k=1}^N \tau\exp(-k\tau)u_n^k=\psi(x_n), \\ \psi(x_n)=(\exp(-1)+(1/2)\exp(-2)-(1/2))\sin(\pi x_n),\ 0\le n\le M, \\ u_0^k=u_M^k=0,\ 0\le k\le N, \\ f(t_k,x)=\pi^2\exp(-t_k)\sin(\pi x_n), \\ \varphi(x_n)=\sin(\pi x_n) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

elde edilir. Problem (4.1.1), $(N+1)\times(M+1)$ lineer denklem sistemidir ki düzenlenirse

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{h^2}\right)u_{n+1}^k + \left(-\frac{2}{\tau^2} - \frac{2}{h^2} - 1\right)u_n^k + \left(\frac{1}{h^2}\right)u_{n-1}^k \\ + \left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k-1} + \left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k+1} = f(t_k, x_n), \\ 1 \le k \le N-1, \ 1 \le n \le M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n), \ 0 \le n \le M, \\ u_n^N - \sum_{k=1}^{N} \tau \exp(-k\tau) u_n^k = \psi(x_n), \\ \psi(x_n) = (\exp(-1) + (1/2)\exp(-2) - (1/2))\sin(\pi x_n), \ 0 \le n \le M, \\ u_0^k = u_M^k = 0, \ 0 \le k \le N, \\ \varphi(x_n) = \sin(\pi x_n) \end{cases} \tag{4.1.2}$$

elde edilir. Bu taktirde (4.1.2) lineer denklem sistemi

$$\begin{cases} A\,U_{n+1} + B\,U_n + C\,U_{n-1} = D\varphi_n, \ 1 \le n \le M-1, \\ U_0 = U_M = \tilde{0} \end{cases} \tag{4.1.3}$$

matris formunda yazılır. Burada

$$a = \frac{1}{h^2}, \ \ b = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2}{h^2} - 1, \ \ c = \frac{1}{\tau^2},$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}, \varphi_n^k = \begin{cases} \sin(\pi x_n), \ k = 0, \\ f(t_k, x_n), \ 1 \le k \le N-1, \\ (\exp(-1) + (1/2)\exp(-2) - (1/2))\sin(\pi x_n), \ k = N, \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdot&0&0&0\\0&a&0&\cdot&0&0&0\\0&0&a&\cdot&0&0&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&a&0&0\\0&0&0&\cdot&0&a&0\\0&0&0&\cdot&0&0&0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \qquad ,C=A,$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdot&0&0&0\\c&b&c&\cdot&0&0&0\\0&c&b&\cdot&0&0&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&b&c&0\\0&0&0&\cdot&c&b&c\\0&-e^{-\tau}\tau&-e^{-2\tau}\tau&\cdot&-e^{-(N-2)\tau}\tau&-e^{-(N-1)\tau}\tau&1-e^{-N\tau}\tau\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \qquad ,$$

ve D (N + 1) (N + 1) birim matris,

$$U_s=\begin{bmatrix}u_s^0\\u_s^1\\\cdot\\u_s^N\end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} \qquad ,s=n-1,\, n,n+1$$

dir.

Böylece, n'ye göre matris katsayılı ikinci mertebeden fark denklemi elde edilir. Bu fark denklemini çözmek için n'ye bağlı matris katsayılı fark denklemi için uyarlanmış Gauss Eliminasyon yöntemine başvurulur. Yani, matris denklemlerin bir çözümü için aşağıdaki şekilde

$$U_n=\alpha_{n+1}U_{n+1}+\beta_{n+1}, \quad n=M-1,\cdots,2,1 \tag{4.1.4}$$

çözüm aranır. Burada, α_n $(n=1,\cdots,M)$ kare matrisler ve β_n $(n=1,\cdots,M)$ $(N+1)\times 1$ sütun matrislerdir.

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= -(B + C\alpha_n)^{-1} A, \\
\beta_{n+1} &= (B + C\alpha_n)^{-1}(D\varphi_n - C\beta_n), \ n = 1, 2, \cdots, M-1
\end{aligned} \tag{4.1.5}
$$

(4.1.5)'deki formüller (4.1.3) ve (4.1.4) kullanılarak elde edilir. Fark denklemlerinin çözümü için, α_1 ve β_1 bulunmalıdır. $U_0 = \tilde{0} = \alpha_1 U_1 + \beta_1$ sınır değer koşulundan bulunur. Böylece,

$$
\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}, \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1},
$$

dır. Birinci adımda, (4.1.5) formülleri kullanarak, tüm α_{n+1} ve β_{n+1}, $1 \le n \le M-1$ için hesaplanır. Böylece, (4.1.4) ve $U_M = \tilde{0}$, kullanılarak tüm U_n, $M-1 \le n \le 1$ hesaplanır. Sonuç olarak, hesaplama süreci aşağıdaki algoritmayla özetlenebilir.

Algoritma

- Giriş zaman aralığını $\tau = \frac{1}{N}$ ve uzay aralığını $h = \frac{1}{M}$ şeklinde ayarla.
- Birinci mertebeden doğruluk fark şemasını kullan ve aşağıdaki gibi matris formunda yaz.

$$
A\,U_{n+1} + B\,U_n + C\,U_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \le n \le M-1.
$$

- A, B, C ve D matrislerinin girdilerini belirle.
- Sınır değer şartından ve (4.1.4) formülünden α_1, β_1'i bul.
- (4.1.5) formülünden. α_{n+1}, $\beta_{n+1}, 2 \le n \le M-1$ için hesapla.
- (4.1.4) formülünden U_n, $n = M-1, \cdots, 1$ için hesapla.

4.2. İkinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması

Yaklaşım formülü,

$$\frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1})}{h^2} - u''(x_n) = O(h^2)$$

ve (3.2.1) fark şemasını kullanarak (4.1) probleminin yaklaşık çözümü için ikinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k = f(t_k, x_n), \; 1 \le k \le N-1, 1 \le n \le M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n), \; 0 \le n \le M, \\ u_n^N - \sum_{k=1}^N \frac{\tau}{2}\left(\exp(-(k-1)\tau)u_n^{k-1} + \exp(-k\tau)u_n^k\right) = \psi(x_n), \\ \psi(x_n) = (\exp(-1) + \frac{1}{2}\exp(-2) - \frac{1}{2})\sin(\pi x_n), \; 0 \le n \le M, \\ u_0^k = u_M^k = 0, \; 0 \le k \le N, \\ f(t_k, x_n) = \pi^2 \exp(-t_k)\sin(\pi x_n) \\ \varphi(x_n) = \sin(\pi x_n) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

elde edilir. Problem (4.2.1), $(N+1)\times(M+1)$ lineer denklem sistemidir. Bu lineer denklem sistemi matris formunda yazılabilir. Yeniden bu sistem aşağıdaki formda

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{h^2}\right)u_{n+1}^k + \left(-\frac{2}{\tau^2} - \frac{2}{h^2} - 1\right)u_n^k + \left(\frac{1}{h^2}\right)u_{n-1}^k \\ + \left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k-1} + \left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k+1} = f(t_k, x_n), \\ 1 \le k \le N-1,\ 1 \le n \le M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n),\ 0 \le n \le M, \\ u_n^N - \sum_{k=1}^N \frac{\tau}{2}\left(\mathbf{exp}(-(k-1)\tau)u_n^{k-1} + \mathbf{exp}(-k\tau)u_n^k\right) = \psi(x_n), \\ \psi(x_n) = (\mathbf{exp}(-1) + \frac{1}{2}\mathbf{exp}(-2) - \frac{1}{2})\mathbf{sin}(\pi x_n),\ 0 \le n \le M, \\ u_0^k = u_M^k = 0,\ 0 \le k \le N, \\ \varphi(x_n) = \mathbf{sin}(\pi x_n) \end{cases} \tag{4.2.2}$$

yazılabilir. Bu taktirde (4.2.2) lineer denklem sistemi

$$\begin{cases} A\,U_{n+1} + B\,U_n + C\,U_{n-1} = D\varphi_n,\ 1 \le n \le M-1, \\ U_0 = U_M = \tilde{0} \end{cases} \tag{4.1.3}$$

matris formunda yazılır. Burada,

$$a = \frac{1}{h^2},\ b = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2}{h^2} - 1,\ c = \frac{1}{\tau^2},$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1},\ \varphi_n^k = \begin{cases} \sin(\pi x_n),\ k = 0, \\ f(t_k, x_n),\ 1 \le k \le N-1, \\ (\exp(-1) + \frac{1}{2}\exp(-2) - \frac{1}{2})\sin(\pi x_n),\ k = N, \end{cases}$$

$$U_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ \cdot \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1},\ s = n-1,\ n, n+1$$

dır.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \qquad ,C=A,$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ c & b & c & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & c & b & c \\ -\frac{\tau}{2} & -\frac{\tau}{2}e^{-\tau} & -\frac{\tau}{2}2e^{-2\tau} & \bullet & -\frac{\tau}{2}2e^{-(N-2)\tau} & -\frac{\tau}{2}e^{-(N-1)\tau} & 1-\frac{\tau}{2}e^{-N\tau} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \qquad ,$$

ve D (N + 1) (N + 1) birim matristir.

Bu fark denklemini çözmek için, n'ye bağlı matris katsayılar için uyarlanmış Gauss Eliminasyon yöntemine başvurularak, matris denklemlerin çözümü için (4.14)'deki gibi çözüm aranır. Burada, α_n $(n=1,\cdots,M)$ kare matrisler ve β_n $(n=1,\cdots,M)$ $(N+1)\times 1$ sütun matrisleri (4.1.5) ile benzerdir. Fark denklemlerinin çözümü için, α_1 ve β_1 ihtiyaç vardır. Bunlar $U_0=\tilde{0}=\alpha_1 U_1+\beta_1$'den bulunur. Böylece, $\alpha_1=[0]_{(N+1)\times(N+1)}$, $\beta_1=[0]_{(N+1)\times 1}$'dir. (4.2.5)'deki formülleri kullanarak, tüm α_{n+1} ve β_{n+1}, $1\le n\le M-1$ için hesaplanır. Böylece, (4.2.4) ve $U_M=\tilde{0}$ şartını kullanarak U_n $M-1\le n\le 1$ için bulunur. Sonuç olarak, hesaplama sürecinin algoritması birinci mertebeden yaklaşık doğruluk fark şemasındaki gibidir.

4.3. Dördüncü Mertebeden Doğruluk Fark Şeması

Yaklaşım formülü,

$$\frac{u(t_{k+1})-2u(t_k)+u(t_{k-1})}{\tau^2}-u''(t_k)-\frac{\tau^2}{12}u^{IV}(t_k)=O(\tau^4)$$

ve (3.3.1) fark şemasının uygulanmasıyla, (4.1) probleminin yaklaşık çözümü için dördüncü mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases}
-\frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}+\left(-\frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{h^2}+u_n^k\right)+\frac{\tau^2}{12} \\
\times\Big[\frac{-1}{h^2}\left(-\frac{u_{n+2}^k-2u_{n+1}^k+u_n^k}{h^2}+u_{n+1}^k\right)+\frac{2}{h^2}\left(-\frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{h^2}+u_n^k\right) \\
-\frac{1}{h^2}\left(-\frac{u_n^k-2u_{n-1}^k+u_{n-2}^k}{h^2}+u_{n-1}^k\right)-\frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{h^2} \\
+u_n^k\Big]=f(t_k,x_n), 1\le k\le N-1, 2\le n\le M-2, \\
u_n^0=\varphi(x_n),\ 0\le n\le M, \\
u_n^N-\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{\tau}{3}\left(\mathbf{exp}(-(2k-2)\tau)u_n^{2k-2}+4\,\mathbf{exp}(-(2k-1)\tau)u_n^{2k-1}+\mathbf{exp}(-(2k)\tau)u_n^{2k}\right)=\psi(x_n), \\
\psi(x_n)=(\mathbf{exp}(-1)+(1/2)\,\mathbf{exp}(-2)-(1/2))\,\mathbf{sin}(\pi x_n),\ 0\le n\le M, \\
u_0^k=u_M^k=0,\ 0\le k\le N, \\
u_1^k=\frac{4}{5}u_2^k-\frac{1}{5}u_3^k,\ 0\le k\le N, \\
u_{M-1}^k=\frac{4}{5}u_{M-2}^k-\frac{1}{5}u_{M-3}^k,\ 0\le k\le N, \\
f(t_k,x_n)=\pi^2\,\mathbf{exp}(-t_k)\,\mathbf{sin}(\pi x_n), \\
\varphi(x_n)=\mathbf{sin}(\pi x_n)
\end{cases} \tag{4.3.1}$$

elde edilir. Problem (4.3.1), $(N+1)\times(M+1)$ lineer denklem sistemine sahiptir. Bu lineer denklem sistemi matris formunda yazılacaktır. Yeniden bu sistem şu şekilde

$$\begin{cases}
\left(-\frac{\tau^2}{12h^4}\right)u_{n+2}^{k}+\left(\frac{-12h^2-4\tau^2-2h^2\tau^2}{12h^4}\right)u_{n+1}^{k} \\
+\left(\frac{12h^4+4h^2\tau^2+6\tau^2\,24h^2+\tau^2h^4-2\tau^2h^2}{12h^4}+\frac{2}{\tau^2}\right)u_{n}^{k} \\
+\left(-\frac{1}{\tau^2}\right)u_{n}^{k+1}+\left(-\frac{1}{\tau^2}\right)u_{n}^{k-1}+\left(-\frac{1}{12h^2}\right)u_{n+1}^{k-1} \\
+\left(\frac{-12h^2-4\tau^2-2\tau^2h^2}{12h^4}\right)u_{n-1}^{k}+\left(-\frac{\tau^2}{12h^4}\right)u_{n-2}^{k}=f(t_k,x_n), \\
1\le k\le N-1,\ 2\le n\le M-2, \\
u_n^N-\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\frac{\tau}{3}\left(\mathbf{exp}(-(2k-2)\tau)u_n^{2k-2}+4\,\mathbf{exp}(-(2k-1)\tau)u_n^{2k-1}+\mathbf{exp}(-(2k)\tau)u_n^{2k}\right)=\psi(x_n), \\
\psi(x_n)=(\mathbf{exp}(-1)+(1/2)\,\mathbf{exp}(-2)-(1/2))\,\mathbf{sin}(\pi x_n),\ 0\le n\le M, \\
u_n^0=\mathbf{sin}(\pi x_n),\ 0\le n\le M, \\
u_0^k=u_M^k=0,\ 0\le k\le N, \\
u_1^k=\frac{4}{5}u_2^k-\frac{1}{5}u_3^k,\ 0\le k\le N, \\
u_{M-1}^k=\frac{4}{5}u_{M-2}^k-\frac{1}{5}u_{M-3}^k,\ 0\le k\le N, \\
f(t_k,x_n)=\pi^2\,\mathbf{exp}(-t_k)\,\mathbf{sin}(\pi x_n)
\end{cases} \tag{4.3.2}$$

yazılabilir. (4.3.2) lineer denklem sistemi

$$\begin{cases}
A\,U_{n+2}+B\,U_{n+1}+C\,U_n+DU_{n-1}+EU_{n-2}=R\varphi_n, \\
2\le n\le M-2,\ U_0=U_M=\tilde{0}, \\
U_1=\frac{4}{5}U_2-\frac{1}{5}U_3,0\le k\le N, \\
U_{M-1}=\frac{4}{5}U_{M-2}-\frac{1}{5}U_{M-3},\ 0\le k\le N
\end{cases} \tag{4.3.3}$$

matris formunda yazılır. Burada,

$$\varphi_n=\begin{bmatrix}\varphi_n^0\\ \varphi_n^1\\ \cdot\\ \varphi_n^N\end{bmatrix}_{(N+1)\times 1},\varphi_n^k=\begin{cases}\mathbf{sin}(\pi x_n),\ k=0,\\ f(t_k,x_n),\ 1\le k\le N-1,\\ (\mathbf{exp}(-1)+(1/2)\mathbf{exp}(-2)-(1/2))\mathbf{sin}(\pi x_n),\ k=N,\end{cases}$$

$$a=-\frac{\tau^2}{12h^4},\quad b=\frac{-12h^2-4\tau^2-2h^2\tau^2}{12h^4},$$
$$c=\frac{12h^4+4h^2\tau^2+6\tau^2 24h^2+\tau^2h^4-2\tau^2h^2}{12h^4}+\frac{2}{\tau^2},$$
$$d=-\frac{1}{\tau^2},e=\frac{-12h^2-4\tau^2-2\tau^2h^2}{12h^4}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdot&0&0&0\\0&a&0&\cdot&0&0&0\\0&0&a&\cdot&0&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&a&0&0\\0&0&0&\cdot&0&a&0\\0&0&0&\cdot&0&0&0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},B=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdot&0&0&0\\0&b&0&\cdot&0&0&0\\0&0&b&\cdot&0&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&b&0&0\\0&0&0&\cdot&0&b&0\\0&0&0&\cdot&0&0&0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdot&0&0&0\\d&c&d&\cdot&0&0&0\\0&d&c&\cdot&0&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&c&d&0\\0&0&0&\cdot&d&c&d\\-\frac{\tau}{3}&\frac{-e^{-\tau}\tau}{3}&\frac{-e^{-2\tau}\tau}{3}&\cdot&\frac{-e^{-(N-2)\tau}\tau}{3}&\frac{-e^{-(N-1)\tau}\tau}{3}&1-\frac{e^{-N\tau}\tau}{3}\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$D=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdot&0&0&0\\0&e&0&\cdot&0&0&0\\0&0&e&\cdot&0&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&e&0&0\\0&0&0&\cdot&0&e&0\\0&0&0&\cdot&0&0&0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},E=A,$$

ve R $(N+1)\times(N+1)$ birim matris,

$$U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ \bullet \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}_{N+1)\times 1}, \quad s = n-2, n-1, n, n+1, n+2$$

dır. Bu fark denklemini çözmek için, n'ye bağlı matris katsayılar için uyarlamış Gauss Eliminasyon yöntemine başvurularak, matris denklemlerin çözümü için

$$\begin{aligned}
&U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}U_{n+2} + \gamma_{n+1}, \quad n = M-2,\cdots,2,1, \\
&U_M = \tilde{0}, \\
&U_{M-1} = \left[(\beta_{M-2} + 5I) - (4I - \alpha_{M-2})\alpha_{M-1}\right]^{-1}\left[(4I - \alpha_{M-2})\gamma_{M-1} - \gamma_{M-2}\right] \\
&U_{M-2} = \left[(\beta_{M-2} + 5I)U_{M-1} + \gamma_{M-2}\right]\left[(4I - \alpha_{M-2})\right]^{-1}
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

şeklinde çözüm aranır. Burada, α_n, β_n $(n = 1,\cdots,M)$ $(N+1)\times(N+1)$ kare matrisler ve γ_n $(n = 1,\cdots,M)$ $(N+1)\times 1$ sütun matrislerdir.

$$\begin{aligned}
&\alpha_{n+1} = -(C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(B + D\beta_n + E\alpha_{n-1}\beta_n), \\
&\beta_{n+1} = -(C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(A), \\
&\gamma_{n+1} = (C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(R\varphi_n - D\gamma_n - E\alpha_{n-1}\gamma_n - E\alpha_{n-1}\gamma_n - E\gamma_{n-1}),
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

formülleri, (4.3.3) ve (4.3.4) kullanılarak elde edilir. Fark denklemlerinin çözümü için, α_1, β_1, γ_1 ve α_2, β_2, γ_2'ye ihtiyaç vardır. $U_0 = \tilde{0}$, $U_1 = \frac{4}{5}U_2 - \frac{1}{5}U_3$ sınır değer koşulundan α_1, β_1, γ_1 ve α_2, β_2, γ_2 bulunur. Böylece,

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}, \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1},$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \frac{4}{5} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}, \beta_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}$$

dır. Diğer adım, (4.3.5) formüllerini kullanarak, tüm α_{n+1}, β_{n+1} ve γ_{n+1} $2 \le n \le M-1$ için hesaplanır. Sonra, (4.3.4)'ü kullanarak tüm U_n, $M-3 \le n \le 1$ için bulunur. Sonuç olarak, hesaplama sürecini aşağıdaki algoritma şeklinde özetlenebilir.

Algoritma

- Giriş zaman aralığını $\tau = \frac{1}{N}$ ve uzay aralığını $h = \frac{1}{M}$ şeklinde ayarla.
- Dördüncü mertebeden doğruluk fark şeması kullan ve matris formunda aşağıdaki gibi yaz.

$$A\,U_{n+2} + B\,U_{n+1} + C\,U_n + DU_{n-1} + EU_{n-2} = R\varphi_n, \quad 2 \le n \le M-2.$$

- A, B, C, D, E matrislerinin girdilerini belirle.
- Sınır değer şartlarından ve (4.3.4) formülünden α_1, β_1, γ_1 ve α_2, β_2, γ_2 bul.
- Tüm α_{n+1}, β_{n+1}, γ_{n+1}, $(2 \le n \le M-2)$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= -(C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(B + D\beta_n + E\alpha_{n-1}\beta_n), \\
\beta_{n+1} &= -(C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(A), \\
\gamma_{n+1} &= (C + D\alpha_n + E\beta_{n-1} + E\alpha_{n-1}\alpha_n)^{-1}(R\varphi_n - D\gamma_n - E\alpha_{n-1}\gamma_n - E\alpha_{n-1}\gamma_n - E\gamma_{n-1}),
\end{aligned}$$

formüllerinden hesapla.

-

$$\begin{aligned}
U_M &= 0 \\
U_{M-1} &= [(\beta_{M-2} + 5I) - (4I - \alpha_{M-2})\alpha_{M-1}]^{-1}[(4I - \alpha_{M-2})\gamma_{M-1} - \gamma_{M-2}], \\
U_{M-2} &= [(\beta_{M-2} + 5I)U_{M-1} + \gamma_{M-2}][(4I - \alpha_{M-2})]^{-1},
\end{aligned}$$

hesapla.

- En son, tüm U_n ‘leri,

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1} U_{n+2} + \gamma_{n+1}, (n = M - 3,.., 2,1),$$

formülünü kullanarak hesapla.

Şimdi sayısal analizin sonuçları verilecektir. Birinci, ikinci ve dördüncü mertebeden doğruluk fark şemalarının yaklaşık çözümleri için Matlab programı kullanılmıştır. Nümerik sonuçların hata kıyaslaması farklı M ve N değerleri için

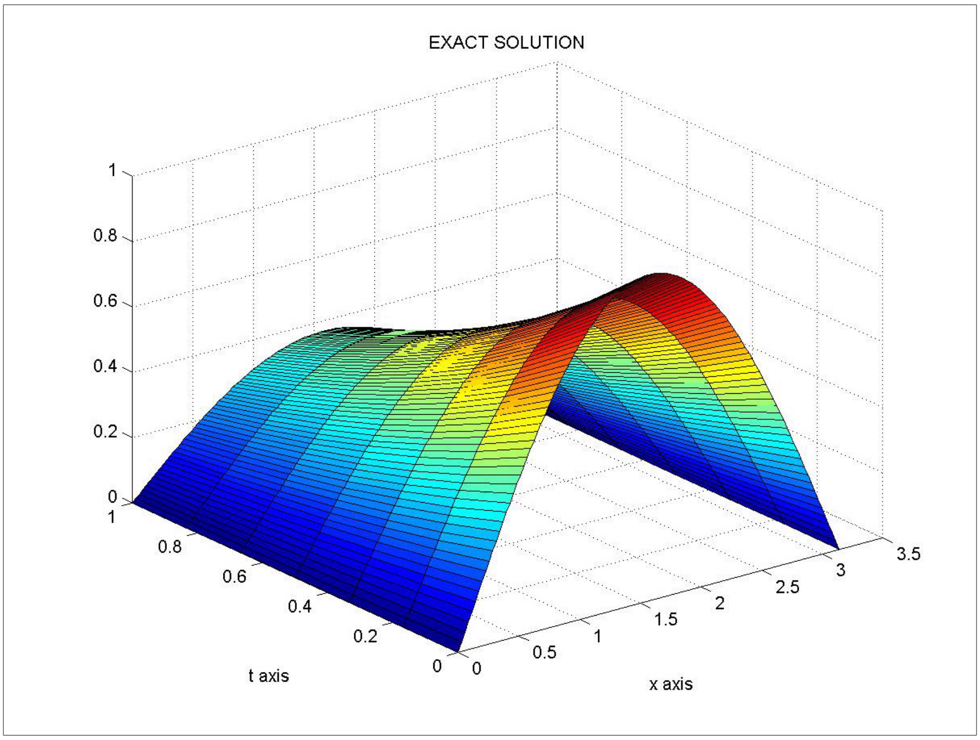
$$E_M^N = \max_{1 \le k \le N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} \left| u(t_k, x_n) - u_n^k \right|^2 h \right)^{\frac{1}{2}},$$

formülünden hesaplanır. Burada, $u(t_k, x_n)$ tam çözümü ve $u_n^k\ (t_k, x_n)$’deki sayısal çözümü gösterir. Çizelge 4.1. N=M=10, 20, 40 ve 80 için fark şemalarının çözümleri ve tam çözümleri arasındaki hatayı gösterir.

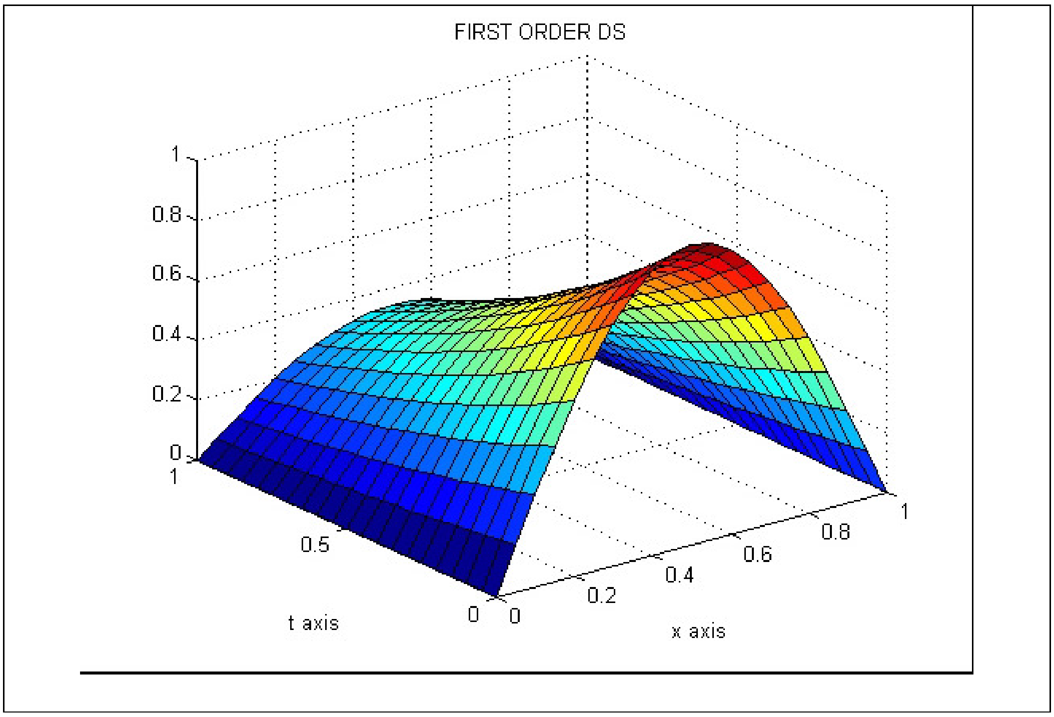
Çizelge 4.1. Farklı fark şemaların hataların karşılaştırılması

Fark Şemaları	N=10, M=10	N=20, M=20	N=40, M=40	N=80, M=80
1. mertebeden fark şeması (4.1.1)	0.0339	0.0173	0.0087	0.0044
2. mertebeden fark şeması (4.2.1)	0.0025	6.245e-004	1.562e-004	3,906e-005
4. mertebeden fark şeması (4.3.1)	0.0011	1.326e-004	2.906e-005	7.158e-006

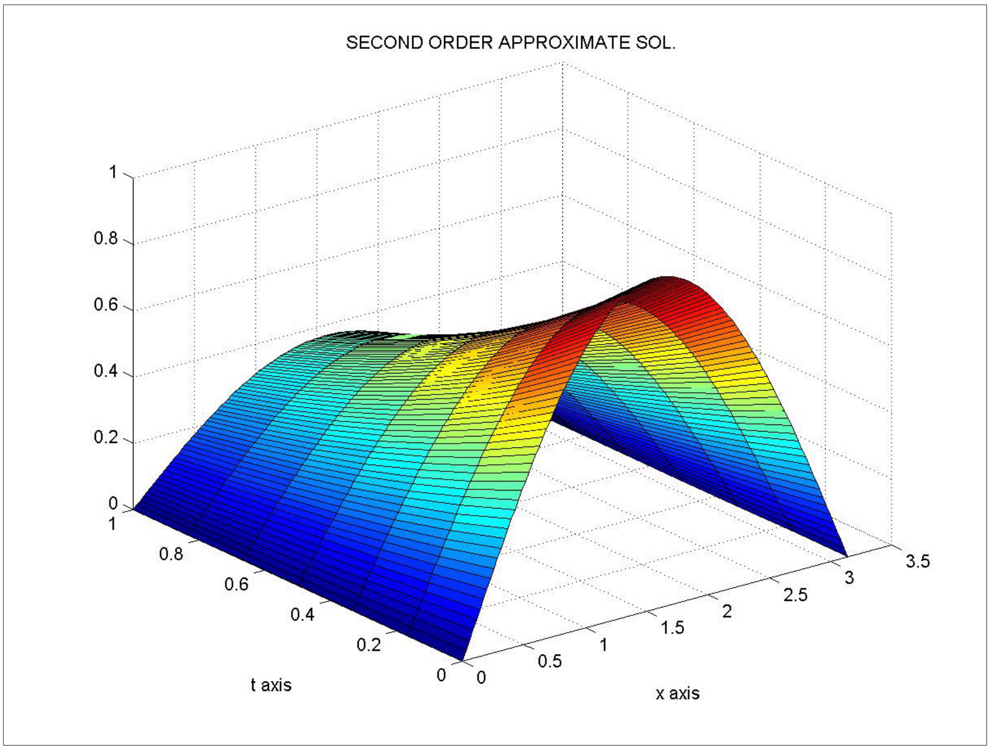
Böylece dördüncü mertebeden doğruluk fark şemalarının yaklaşık çözümleri ile tam çözüm arasındaki hata, birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarının yaklaşık çözümleri elde edilen hataya göre daha küçüktür. Sonuç olarak, dördüncü mertebeden doğruluk fark şeması, birinci, ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarına göre çok daha iyi sonuç vermektedir. Aşağıda birinci şekil, tam çözüm grafiğini, ikinci şekil, ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini, üçüncü şekil, dördüncü mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini gösterir.



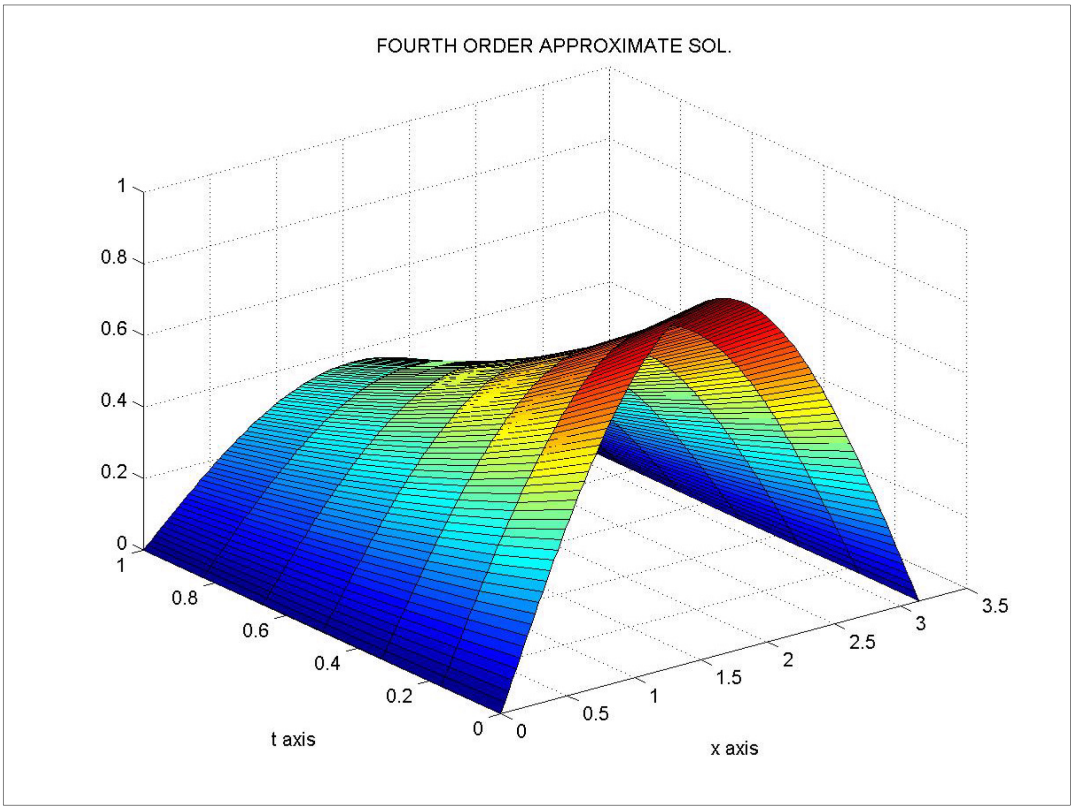
Şekil 4.1. (4.1) probleminin tam çözüm grafiği



Şekil 4.2. (4.1) probleminin birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.3. (4.1) probleminin ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.4. (4.1) probleminin dördüncü mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiği

İkinci olarak, eliptik denklem için lokal olmayan sınır değer problemi sayısal sonuçlar için

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u = 2\exp(-t)(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{t}{2} - 1),\ 0 < t < 1,\ 0 < x < 1, \\ u(0,x) = x^2 - 2x,\ 0 \le x \le 1, \\ u(1,x) = u(\frac{1}{2},x) + (\frac{x^2}{2} - x)\exp(-1) - (\frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{2})\exp(-\frac{1}{2}),\ 0 \le x \le 1, \\ u(t,0) = u_x(t,1) = 0,\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{4.3.6}$$

ele alınır. (4.3.6) probleminin tam çözümü

$$u(t,x) = (tx - \frac{tx^2}{2} + x^2 - 2x)\exp(-t)$$

dir. (4.3.6) Bitsadze-Samarskii lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için, $[0,1]_\tau \times [0,1]_h$ kümesi grid noktalarının bir ailesi τ ve h küçük parametrelerine bağlı olarak

$$\begin{aligned}[0,1]_\tau \times [0,1]_h = \{(t_k, x_n):\ t_k = k\tau,\ \ 1 \le k \le N-1,\ \ N\tau = 1, \\ x_n = nh,\ \ 1 \le n \le M-1, Mh = 1\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. İlk önce, (4.3.6) probleminin yaklaşık çözümleri için (3.1.1.3)'e başvurarak aşağıdaki birinci mertebeden fark şeması

$$\begin{cases} -\frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}-\frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{h^2}+u_n^k=f(t_k,x_n),\ 1\le k\le N-1, 1\le n\le M-1, \\ u_n^0=\varphi(x_n),\ u_n^N=u_n^{\left[\frac{N}{2}\right]}+\left(\frac{x_n^2}{2}-x_n\right)\exp(-1) \\ -\left(\frac{3x_n^2}{4}-\frac{3x_n}{2}\right)\exp(-\frac{1}{2}),\ 0\le n\le M, \\ u_0^k=\frac{u_M^k-u_{M-1}^k}{h}=0,\ 0\le k\le N, \\ f(t_k,x_n)=2\exp(-t_k)\left(x_n-\frac{x_n^2}{2}+\frac{t_k}{2}-1\right), \\ \varphi(x_n)=x_n^2-2x_n \end{cases} \tag{4.3.7}$$

elde edilir. $(N+1)\times(M+1)$ lineer denklem sistemidir ve bu lineer denklem sistemi matris formunda ifade edilebilir. Bu taktirde, (4.3.7) matris formunda

$$\begin{cases} A\,U_{n+1}+B\,U_n+C\,U_{n-1}=D\varphi_n,\ 1\le n\le M-1, \\ U_0=U_M-U_{M-1}=\tilde{0} \end{cases} \tag{4.3.8}$$

yazılır. Burada

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ c & b & c & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & c & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

ve $C=A,\ D\ (N+1)\times(N+1)$ birim matris ve

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \varphi_n^{N-1} \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}, \varphi_n^k = \begin{cases} x_n^2 - 2x_n,\ k = 0, \\ f(t_k, x_n),\ 1 \le k \le N-1, \\ (\frac{x_n^2}{2} - x_n)\mathbf{exp}(-1) - (\frac{3x_n^2}{4} - \frac{3x_n}{2})\mathbf{exp}(-\frac{1}{2}),\ k = N \end{cases}$$

$$U_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ \cdot \\ u_s^{N-1} \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}, \qquad \text{için } s = n-1,\ n,\ n+1$$

dır. *A, B* ve *C* matrislerinin elemanları

$$a = -\frac{1}{h^2},\ b = \frac{2}{\tau^2} + \frac{2}{h^2} + 1,\ c = -\frac{1}{\tau^2}$$

dır. Böylece, n'ye bağlı matris katsayılı ikinci mertebeden fark denklemi vardır. n'ye bağlı matris katsayılı fark denklemini çözmek için uyarlanmış Gauss Eliminasyon metoduna başvurulur. Aşağıdaki formda matris denklemin bir çözümü

$$U_j = \alpha_{j+1} U_{j+1} + \beta_{j+1},\quad j = M-1, \cdots, 1,$$
$$U_M = (I - \alpha_M)^{-1} \beta_M, \tag{4.3.9}$$

aranır. Burada, α_j $(j = 1, \cdots, M)$ $(N+1)\times(N+1)$ kare matrisler ve β_j $(j = 1, \cdots, M)$ $(N+1)\times 1$ sütun matrislerdir.

$$\alpha_{j+1} = -(B + C\alpha_j)^{-1} A, \tag{4.3.10}$$

$$\beta_{j+1} = (B + C\alpha_j)^{-1}(D\varphi_j - C\beta_j),\ j = 1, \cdots, M-1 \tag{4.3.11}$$

dır. Sınır şartlarından α_1 $(N+1)\times(N+1)$ sıfır matrisidir ve β_j $(N+1)\times 1$ sıfır matrisidir. (4.3.10) ve (4.3.11) formüllerini kullanarak tüm α_{j+1} ve β_{j+1} hesaplanır. (4.3.8) formülünden tüm U_j, $j = M-1,\cdots,1$ için bulunur. İkinci olarak, (3.2.1.3) fark şemasını uygulayarak (4.3.6) probleminin yaklaşık çözümleri için aşağıdaki ikinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2} - \frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k = f(t_k, x_n),\ 1 \le k \le N-1,\ 1 \le n \le M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n),\ u_n^N = u_n^{\left[\frac{N}{2}\right]} + \left(u_n^{\left[\frac{N}{2}\right]+1} - u_n^{\left[\frac{N}{2}\right]}\right)\left(\frac{N}{2} - \left[\frac{N}{2}\right]\right) \\ + \left(\frac{x_n^2}{2} - x_n\right)\exp(-1) - \left(\frac{3x_n^2}{4} - \frac{3x_n}{2}\right)\exp(-\frac{1}{2}), 0 \le n \le M, \\ u_0^k = 0, u_{M-2}^k - 4u_{M-1}^k + 3u_M^k = 0,\ 0 \le k \le N, \\ f(t_k, x_n) = 2\exp(-t_k)\left(x_n - \frac{x_n^2}{2} + \frac{t_k}{2} - 1\right), \\ \varphi(x_n) = x_n^2 - 2x_n \end{cases} \tag{4.3.12}$$

elde edilir. Yeniden $(N+1)\times(M+1)$ lineer denklem sistemidir ve bu lineer denklem sistemi matris formunda ifade edilebilir. Bu taktirde, (4.312) matris formunda

$$\begin{cases} A\,U_{n+1} + B\,U_n + C\,U_{n-1} = R\varphi_n,\ 1 \le n \le M-1, \\ U_0 = \tilde{0}, U_{M-2} - 4U_{M-1} + 3U_M = \tilde{0} \end{cases} \tag{4.3.13}$$

yazılır. Burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ c & b & c & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & c & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & d & e & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

ve

$$C=A, R=D,$$

$$\varphi_n=\begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \varphi_n^{N-1} \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}, \varphi_n^k=\begin{cases} x_n^2-2x_n, \; k=0, \\ f(t_k,x_n), \; 1\le k\le N-1, \\ (\frac{x_n^2}{2}-x_n)\exp(-1)-(\frac{3x_n^2}{4}-\frac{3x_n}{2})\exp(-\frac{1}{2}), \; k=N, \end{cases}$$

$$U_s=\begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ \cdot \\ u_s^{N-1} \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} \quad \text{için } s=n-1,\ n,\ n+1$$

dır. *A, B* ve *C* matrislerinin elemanları için

$$a=-\frac{1}{h^2},\; b=\frac{2}{h^2}+\frac{2}{\tau^2}+1,\; c=-\frac{1}{\tau^2},\; d=\left[\frac{N}{2}\right]-\frac{N}{2}, e=-1-d,$$

dır. Böylece, n'ye bağlı matris katsayılı ikinci mertebeden fark denklemi vardır. n'ye bağlı matris katsayılı fark denklemini çözmek için aynı uyarlanmış Gauss Eliminasyon metoduna, (4.3.10), (4.3.11) ve (4.3.13) formüllerine ve

$$U_M=(3I+\alpha_M\alpha_{M-1}-4\alpha_M)^{-1}(-\beta_M\alpha_{M-1}-\beta_{M-1}+4\beta_M)$$

başvurulur. Şimdi, sayısal analizin sonuçları verilir. Farklı M ve N değerleri için sayısal çözümlerin hatası

$$E_M^N = \max_{1\le k\le N-1}\left(\sum_{n=1}^{M-1}\left|u(t_k,x_n)-u_n^k\right|^2 h\right)^{\frac{1}{2}}$$

formülünden hesaplanır. Burada, $u(t_k,x_n)$ tam çözümü ve u_n^k sayısal çözümü (t_k,x_n)'de gösterir. Çizelge 4.2. N=M=20, 40 ve 60 için fark şemalarının çözümleri ve tam çözümleri arasındaki hatayı gösterir.

Çizelge 4.2. Hata analizleri

Fark Şemaları	$N = M = 20$	$N = M = 40$	$N = M = 60$
Fark şeması (4.3.7)	0.0049	0.0025	0.0012
Fark şeması (4.3.12)	3.7155e - 005	9.4107e - 006	2.3679e - 006

5. YARI-LİNEER ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİNDE LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ

5.1. Yarı-Lineer Eliptik Denklemler için Bitsadze-Samarskii Tipinde Lokal Olmayan Sınır Değer Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde, Hilbert uzayında yarı-lineer eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipi lokal olmayan sınır değer probleminin tek çözülebilirliği incelenmiştir ve yarı-lineer eliptik denkleme bu sonuçların uygulanabilirliği araştırılmıştır.

Giriş kısmında değinildiği gibi literatürde lokal olmayan problemlerin önemi ilk kez A. V. Bitsadze A.A Samarskii Gürcü matematikçilerin çalışmalarından sonra görülmüştür. Çalışmalarındaki problem direk olarak sınır değer problemlerini genelleştirmesini teşkil eder. Bilimde, lineer olmayan olayların çeşitli şekilde modellenmesinde lineer olmayan eliptik kısmi diferansiyel denklemler genişçe kullanılır. Bu kısımda, yarı-lineer eliptik denklemler için Hilbert uzayında H Bitsadze-Samarskii tipinde lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t, u(t)), \ 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi, \ u(1) = \sum_{j=1}^{J} \rho_j u(\lambda_j) + \psi, \ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_J < 1 \end{cases} \tag{5.1.1}$$

ele alınacaktır. Eliptik diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri elde edilir.

$$\sum_{j=1}^{J} \left|\rho_j\right| \leq 1 \tag{5.1.2}$$

varsayımı altında (5.1.1) problemi ele alınır. A kendisine eşlenik pozitif tanımlı operatördür ve $A \geq \delta^2 I$, $\delta > \delta_0 > 0$'dır. (5.1.2) varsayımı altında,

$$I - e^{-2B} - \sum_{j=1}^{J} \rho_j (e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B})$$

operatörünün

$$Y = \left(I - e^{-2B} - \sum_{j=1}^{J} \rho_j (e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B}) \right)^{-1}$$

ters operatörü vardır. Aşağıdaki kestirim sağlanır:

$$\|Y\|_{H \to H} \leq M(\delta). \tag{5.1.3}$$

Burada, $B = A^{\frac{1}{2}}$'dır. Ayrıca,

$$\left\| \left(I - e^{-2B} \right)^{-1} \right\|_{H \to H} \leq \frac{1}{1 - e^{-2\delta}} \tag{5.1.4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Eğer $u(t)$ aşağıdaki şartları sağlarsa, (5.1.1) probleminin bir çözümü olarak adlandırılır.

- u(t), [0,1] aralığında ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir. [0,1] aralığının başlangıç ve bitim noktalarında türev, uygun tek yönlü türev olarak anlaşılır.
- u(t) fonksiyonun elemanları tüm t ∈ [0,1] için D(A) aittir ve Au(t) fonksiyonu [0,1] aralığında süreklidir.
- u(t) fonksiyonu denklemi ve (5.1.1) probleminin lokal olmayan sınır şartlarını sağlar.

(5.1.1) probleminin çözümü C([0,1],H) Hilbert uzayında [0,1] aralığında $\varphi(t)$ tüm sürekli fonksiyonların normu

$$\| \varphi \|_{C([0,1],H)} = \max_{0 \leq t \leq 1} \| \varphi(t) \|_H$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Teorem 5.1.1 Kabul edelim ki $f \in C([0,1],H)$ ve $\frac{12LM(\delta)}{(I-e^{-2\delta})} < 1$ olsun tüm $t \in [0,1]$, u, $v \in H$ için $L > 0$ vardır ve f Lipschitz şartını

$$\|f(t,u) - f(t,v)\|_H \leq L\|u-v\|_H \tag{5.1.5}$$

sağlar. Bu taktirde, yarı-lineer eliptik denklemler için (5.1.1) Bitsadze-Samarskii tipinde lokal olmayan sınır değer probleminin $C([0,1],H)$ uzayında tek çözüme sahiptir.

İspat. Bu teoremin ispatı sabit nokta teoremine dayanır. Kolayca görülebilir ki

$$\begin{aligned}
Fu(t) = {}& \left(I - e^{-2B}\right)^{-1} \Big\{ \left(e^{-tB} - e^{-(2-t)B}\right)\varphi + \left(e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B}\right)u(1) \\
& - \left(e^{-(1-t)B} - e^{-(1+t)B}\right)(2B)^{-1} \int_0^1 \left(e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B}\right) f(s,u(s))ds \Big\} \\
& + (2B)^{-1} \int_0^1 \left(e^{-|t-s|B} - e^{-(t+s)B}\right) f(s,u(s))ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(1) = {}& \left(I - e^{-2B} - \sum_{j=1}^{J} \rho_j \left(e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B}\right)\right)^{-1} \\
& \times \Bigg[\left(I - e^{-2B}\right)\psi + \sum_{j=1}^{J} \rho_j \Big\{ \left(e^{-\lambda_j B} - e^{-(2-\lambda_j)B}\right)\varphi - (e^{-(1-\lambda_j)B} - e^{-(1+\lambda_j)B}) \\
& \times \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^1 (e^{-(1-s)B} - e^{-(1+s)B}) f(s,u(s))ds + \left(I - e^{-2B}\right)\frac{1}{2}B^{-1} \\
& \times \left(\int_0^{\lambda_j} e^{-(\lambda_j - s)B} f(s,u(s))ds + \int_{\lambda_j}^1 e^{-(s-\lambda_j)B} f(s,u(s))ds - \int_0^1 e^{-(\lambda_j+s)B} f(s,u(s))ds \right) \Big\} \Bigg]
\end{aligned}$$

operatörü $C([0,1],H)$ uzayını $C([0,1],H)$ uzayının içine dönüştürür. $C([0,1],H)$ uzayında F kısalma operatörü (contracting operator) olduğu ispatlanabilir. (5.1.3), (5.1.4) eşitsizlikleri ve Lipschitz (5.1.5) şartıyla her $t \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
\left\|Fu(t)-Fv(t)\right\|_H \leq & \left\|\left(I-e^{-2B}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|Y\right\|_{H\to H}\left\|e^{-(1-t)B}\left(I-e^{-2tB}\right)\right\|_{H\to H} \\
& \times\left(\sum_{j=1}^{J}\left|\rho_j\right|\left\|e^{-(1-\lambda_j)B}\left(I-e^{-2\lambda_j B}\right)\right\|_{H\to H}\right. \\
& \times\frac{1}{2}\int_0^1\left\|B^{-1}\left(e^{-(1-s)B}-e^{-(1+s)B}\right)\right\|_{H\to H}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|_H ds \\
& +\frac{1}{2}\left\|B^{-1}\left(I-e^{-2B}\right)\right\|_{H\to H}\left\|\left(I-e^{-2B}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|Y\right\|_{H\to H} \\
& \times\left\|e^{-(1-t)B}\left(I-e^{-2tB}\right)\right\|_{H\to H}\left(\int_0^{\lambda_j}\left\|e^{-(\lambda_j-s)B}\right\|_{H\to H}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|_H ds\right. \\
& +\int_{\lambda_j}^{1}\left\|e^{-(s-\lambda_j)B}\right\|_{H\to H}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|_H ds \\
& \left.+\int_0^{1}\left\|e^{-(\lambda_j+s)B}\right\|_{H\to H}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|_H ds\right) \\
& +\left\|\left(I-e^{-2B}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|Y^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|e^{-(1-t)B}\left(I-e^{-2tB}\right)\right\|_{H\to H}\frac{1}{2} \\
& \times\int_0^1\left\|B^{-1}\left(e^{-(1-s)B}-e^{-(1+s)B}\right)\right\|_{H\to H}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|_H ds \\
& +\frac{1}{2}\left\|Y^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|B^{-1}\left(I-e^{-2B}\right)\right\|_{H\to H}\left\|\left(I-e^{-2B}\right)^{-1}\right\|_{H\to H} \\
& \times\left(\int_0^t\left\|e^{-(t-s)B}\right\|_{H\to H}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|_H ds\right. \\
& +\int_t^1\left\|e^{-(s-t)B}\right\|_{H\to H}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|_H ds \\
& \left.+\int_0^1\left\|e^{-(t+s)B}\right\|_{H\to H}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|_H ds\right)
\end{aligned}
$$

geçerlidir. Böylece,

$$
\left\|Fu(t)-Fv(t)\right\|_{C([0,1],H)} \leq \varpi_\mu \left\|u-v\right\|_{C([0,1],H)}
$$

dır. Burada $\varpi_\mu = \frac{12LM(\delta)}{\left(I-e^{-2\delta}\right)}$'dir. O halde sabit nokta teoreminden F, (5.1.1) probleminin tek bir çözümü olan tek bir sabit noktayı sağlar.

Bu kısımda Teorem 5.1.1'in uygulamaları incelenecektir. İlk olarak, yarı-lineer eliptik denklem için lokal olmayan sınır değer problemi

$$
\begin{cases}
-u_{tt}-(a(x)u_x)_x+\delta u=f(t,x;u),\ 0<t<1,\ 0<x<1, \\
u(t,0)=u(t,1),\ u_x(t,1)=u_x(t,0),\ 0\le t\le 1, \\
u(0,x)=\varphi(x), u(1,x)=\sum_{j=1}^{J}\rho_j u(\lambda_j,x)+\psi(x),\ 0\le x\le 1, \\
0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_J<1
\end{cases}
\tag{5.1.6}
$$

ele alınır. Burada $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ yeterince düzgün fonksiyon olarak verilmiştir ve $f(t,x;u)$ Caratheodory fonksiyondur. $a(x)\ge a>0$, $\delta = sabit > 0$ 'dır.

Teorem 5.1.2 Kabul edelim ki $f\in C([0,1],L_2[0,1])$ ve $L>0$ vardır öyle ki, her $t\in[0,1]$, $u,v\in L_2[0,1]$, için $\frac{12LM(\delta)}{(l-e^{-2\delta})}<1$ varsayımı ile f Lipschitz şartını

$$
\|f(t,u)-f(t,v)\|_{L_2[0,1]}\le L\|u-v\|_{L_2[0,1]}
$$

sağlasın. Bu takdirde $C([0,1],L_2[0,1])$ uzayında (5.1.6) yarı-lineer lokal olmayan sınır değer probleminin tek çözümü vardır.

İkinci olarak, Ω, $R^n\ (x=(x_1,\cdots,x_n):\ 0<x_k<1, 1\le k\le n)$ içinde S sınırı ile açık birim küp olsun. $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$ 'dir. $[0,1]\times\Omega$ içinde, çok boyutlu yarı-lineer eliptik denklem için başlangıç ve Bitsadze-Samarskii tipinde karışık sınır değer problemi

$$
\begin{cases}
-u_{tt}-\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r})_{x_r}+\delta u=f(t,x;u),\ 0<t<1,\ x\in\Omega, \\
u(0,x)=\varphi(x),\ u(1,x)=\sum_{j=1}^{J}\rho_j u(\lambda_j,x)+\psi(x),\ x\in\overline{\Omega}, \\
0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_J<1,\ u(t,x)=0,\ x\in S,\ 0<t<1
\end{cases}
\tag{5.1.7}
$$

incelenir. Problemin $\varphi(x)$, $\psi(x)$ düzgün fonksiyonları için ve $\alpha_r(x)\ge a>0$ $(x\in\Omega)$ için $u(t,x)$ düzgün tek çözümleri vardır. Burada, $\delta = sabit > 0$ ve $f(t,x;u)$

Caratheodory fonksiyondur. Yani, sabit u için x ölçülebilir ve sabit x için u içinde sürekli ve artmayandır.

Teorem 5.1.3 Kabul edelim ki $f \in C\left([0,1], L_2(\overline{\Omega})\right)$ olsun ve $L>0$ vardır öyle ki her $t \in [0,1]$, $u, v \in L_2(\overline{\Omega})$ için $\frac{12LM(\delta)}{\left(1-e^{-2\delta}\right)}<1$ kabulü ile f Lipschitz şartını

$$\left\| f(t,u) - f(t,v) \right\|_{L_2(\overline{\Omega})} \leq L \left\| u-v \right\|_{L_2(\overline{\Omega})}$$

sağlasın. Bu taktirde, $C\left([0,1], L_2(\overline{\Omega})\right)$ uzayında çok boyutlu yarı-lineer eliptik denklemler için (5.1.7) başlangıç Bitsadze-Samarskii tipinde karışık sınır değer probleminin tek çözümü vardır.

Üçüncü olarak, Ω ¸ $\mathbb{R}^n (x=(x_1,\cdots,x_n):\ 0<x_k<1,\ 1\leq k \leq n)$ içinde S sınırı ile açık birim küp olsun. $\overline{\Omega}=\Omega \cup S$'dir. $[0,1]\times\Omega$'da çok boyutlu yarı-lineer eliptik denklem için karışık tipten Neumann-Bitsadze-Samarskii sınır değer problemi

$$\begin{cases} -u_{tt} - \sum\limits_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} = f(t,x;u), 0<t<1,\ x=(x_1,\ldots,x_n) \in \Omega, \\ u(0,x)=\varphi(x),\ u(1,x)=\sum\limits_{j=1}^{J} \alpha_j u(\lambda_j,x)+\psi(x),\ x \in \overline{\Omega}, \\ 0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_J<1,\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial \overline{n}}=0, x \in S,\ 0<t<1 \end{cases} \tag{5.1.8}$$

ele alınacaktır. Problem $\alpha_r(x) \geq a > 0\ (x \in \Omega)$, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ düzgün fonksiyonları için tek bir $u(t,x)$ düzgün çözüme sahiptir. Burada, $f(t,x;u)$ Caratheodory fonksiyondur. Yani, sabit u için x ölçülebilir ve sabit x için u içinde sürekli ve artmayandır.

Teorem 5.1.4 Kabul edelim ki $f \in C\left([0,1], L_2(\overline{\Omega})\right)$ ve $L>0$ sayısı mevcuttur, öyle ki her $t \in [0,1]$, $u, v \in L_2(\overline{\Omega})$, $\frac{12LM(\delta)}{\left(1-e^{-2\delta}\right)}<1$ kabulu ile f Lipschitz şartını

$$\left\| f\left(t,u\right)-f\left(t,v\right)\right\|_{L_2(\overline{\Omega})} \leq L\left\| u-v\right\|_{L_2(\overline{\Omega})}$$

sağlasın. Bu takdirde, $C\left([0,1],L_2(\overline{\Omega})\right)$ uzayında çok boyutlu yarı-lineer eliptik denklem için (5.1.8) Neumann-Bitsadze-Samarskii tipinde karışık sınır değer problemi tek çözüme sahiptir.

5.2. Sayısal Sonuçlar

Yarı-lineer eliptik denklem için (5.1.1) Bitsadze-Samarskii lokal olmayan sınır değer probleminin nümerik çözümleri için sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})+Au_k=f(t_k,u_k), \\ t_k=k\tau,\ 1\leq k\leq N-1,\ N\tau=1,u_0=\varphi, \\ u_N=\sum\limits_{j=1}^{J}\rho_j u_{\left[\frac{\lambda_r}{\tau}\right]}+\psi, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})+Au_k=f(t_k,u_k), \\ t_k=k\tau,\ 1\leq k\leq N-1,\ N\tau=1,u_0=\varphi, \\ u_N=\sum\limits_{j=1}^{J}\rho_j\left(u_{\left[\frac{\lambda_r}{\tau}\right]}+\left(u_{\left[\frac{\lambda_r}{\tau}\right]}-u_{\left[\frac{\lambda_r}{\tau}\right]-1}\right)\left(\frac{\lambda_r}{\tau}-\left[\frac{\lambda_r}{\tau}\right]\right)\right)+\psi \end{cases} \tag{5.2.2}$$

kurulur.

İlk örnek olarak, yarı-lineer eliptik denklem için, birinci mertebeden (5.2.1) ve ikinci mertebeden (5.2.2) doğruluk fark şemalarını kullanarak

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t,\ x)}{dt^2} - \left((2-\cos(\pi x))u_x\right)_x = g(t,x) + \frac{1}{10}\sin(u(t,x)), \\ 0 < t, x < 1, \\ u(0,x) = 1-\cos(\pi x), 0 \le x \le 1, \\ u(1,x) = u\left(\frac{1}{2},x\right) + (1-\cos(\pi x))\left(\exp(-1)-\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right), 0 \le x \le 1, \\ u(t,0) = u_x(t,1) = 0,\ 0 \le t \le 1, \\ g(t,x) = -\left(\pi^2(2-\cos(\pi x))\cos(\pi x) + 1 - \cos(\pi x) + \pi^2\sin^2(\pi x)\right)\exp(-t) \\ -\frac{1}{10}\sin((1-\cos(\pi x))\exp(-t)) \end{cases} \tag{5.2.3}$$

lokal olmayan Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminin sayısal çözümleri araştırılır. Bu problemin tam çözümü

$$u(t,x) = (1-\cos\pi x)\exp(-t)$$

dır. Dikkat edilirse, $f(t,x) = g(t,x) + \frac{1}{10}\sin u(t,x)$ fonksiyonu $L = \frac{1}{10}$ için Lipschitz şartını sağlar.

Problem (5.2.3)'ün yaklaşık çözümleri için, $[0,1]_\tau \times [0,1]_h$ kümesinin grid noktalarının bir ailesi τ ve h yeterince küçük parametrelerine bağlı olarak

$$[0,1]_\tau \times [0,1]_h = \{(t_k, x_n):\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N-1,\ N\tau = 1,\ x_n = nh, \\ 1 \le n \le M-1,\ Mh = 1\},$$

şeklinde tanımlanır.

İlk önce, problem (5.2.3)'ün yaklaşık çözümleri için (5.2.1) birinci mertebeden fark şemasını kullanarak aşağıdaki birinci mertebeden fark şeması elde edilir.

$$
\begin{cases}
-\frac{u_n^{k+1,m}-2u_n^{k,m}+u_n^{k-1,m}}{\tau^2}-(2-\mathbf{cos}(\pi x_n))\left(\frac{u_{n+1}^{k,m}-2u_n^{k,m}+u_{n-1}^{k,m}}{h^2}\right)-\pi\,\mathbf{sin}(\pi x_n)\frac{u_n^{k,m}-u_{n-1}^{k,m}}{h} \\
= g(t_k, x_n)+\frac{1}{10}\mathbf{sin}\left(u_n^{k,m-1}\right),\ 1\le k\le N-1,\ 1\le n\le M-1,\ m=1,.., \\
u_n^{0,m}=\varphi(x_n),\ 1\le n\le M-1,\ m=1,..., \\
u_n^{N,m}=u_n^{\frac{N}{2},m}+(1-\mathbf{cos}(\pi x_n))(\mathbf{exp}(-1)-\mathbf{exp}(-\frac{1}{2})), 1\le n\le M-1,\ m=1,..., \\
u_0^{k,m}=0,\ \frac{u_M^{k,m}-u_{M-1}^{k,m}}{h}=0,\ 0\le k\le N,\ m=1,..., \\
u_n^{k,0}=1,\quad 1\le k\le N-1,\ 1\le n\le M-1, \\
\varphi(x_n)=1-\mathbf{cos}(\pi x_n), \\
g(t_k, x_n)=-\left(\pi^2(2-\mathbf{cos}(\pi x_n))\mathbf{cos}(\pi x_n)+1-\mathbf{cos}(\pi x_n)+\pi^2\,\mathbf{sin}^2(\pi x_n)\right. \\
\left.-\frac{1}{10}\mathbf{sin}(1-\mathbf{cos}(\pi x_n))\right)\mathbf{exp}(-t_k).
\end{cases}
\tag{5.2.4}
$$

Böylece, (5.2.4) fark şeması $(N+1)\times(M+1)$ lineer denklem sistemidir. Bu taktirde (5.2.4) matris formunda

$$
\begin{cases}
A_m U_{n+1}^m + B_m U_n^m + C_m U_{n-1}^m = D_m \varphi_n^m,\ 1\le n\le M-1, \\
U_0^m = U_0 = \tilde{0}, U_M^m - U_{M-1}^m = U_M - U_{M-1} = \tilde{0}
\end{cases}
\tag{5.2.5}
$$

yazılabilir. Burada,

$$
A_m = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_m & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_m & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & a_m & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_m & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},
$$

$$
B_m = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
b & c_m & b & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & c_m & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & c_m & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & b & c_m & b \\
0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & \cdot & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},
$$

$$
C_m = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & d_m & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & d_m & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & d_m & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & d_m & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}
$$

dır. A, B ve C matrislerinin elemanları için,

$$
\begin{gathered}
a_m = -\frac{(2-\mathbf{cos}(\pi mh))}{h^2}, \quad b = -\frac{1}{\tau^2}, \\
c_m = \frac{2}{\tau^2} + \frac{2(2-\mathbf{cos}(\pi mh))}{h^2} - \frac{\pi\,\mathbf{sin}(\pi mh)}{h} + 1, \\
d = -\frac{(2-\mathbf{cos}(\pi mh))}{h^2} + \frac{\pi\,\mathbf{sin}(\pi mh)}{h},
\end{gathered}
$$

$$
\varphi_n^m = \begin{bmatrix} \varphi_n^{0,m} \\ \varphi_n^{1,m} \\ \cdot \\ \varphi_n^{N-1,m} \\ \varphi_n^{N,m} \end{bmatrix}, \quad
\varphi_n^{k,m} = \begin{cases}
1-\mathbf{cos}(\pi x_n), \ k = 0, \\
f(t_k, x_n), \ 1 \le k \le N-1, \\
(1-\mathbf{cos}(\pi x_n))(\mathbf{exp}(-1) - \mathbf{exp}(-\tfrac{1}{2})), \ k = N,
\end{cases}
$$

$$
U_s^m = \begin{bmatrix} u_s^{0,m} \\ u_s^{1,m} \\ \bullet \\ u_s^{N-1,m} \\ u_s^{N,m} \end{bmatrix}, \quad s = n-1,\ n,\ n+1
$$

dır. Böylece n'ye göre matris katsayılı ikinci mertebeden fark denklemi elde edilir. n'ye göre matris katsayılı fark denklemi için uyarlanmış Gauss Eliminasyon metodu uygulanırsa matris denkleminin bir çözümü

$$
\begin{aligned}
&U_n^m = \alpha_{n+1}^m U_{n+1}^m + \beta_{n+1}^m, \quad n = M-1,..,2,1, \\
&U_M^m = (I - \alpha_M^m)^{-1} \beta_M^m,
\end{aligned}
\tag{5.2.6}
$$

şeklinde aranır. Burada,

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n+1}^m &= -\left(B_m + C_m \alpha_n^m\right)^{-1} A_m, n = 1,2,\cdots, M-1, \\
\beta_{n+1}^m &= \left(B_m + C_m \alpha_n^m\right)^{-1} \left(D_m \varphi_n^m - C_m \beta_n^m\right), n = 1,2,\cdots, M-1
\end{aligned}
$$

dır. α_n $(n = 1,\cdots,M)$ $(N+1)\times(N+1)$ kare matrisler ve β_n $(n = 1,\cdots,M)$ $(N+1)\times 1$ sütun matrisleridir.

$$
\alpha_1^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}, \quad \beta_1^m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}
$$

şeklindedir.

İkinci olarak, ikinci mertebeden (5.2.2) fark şeması uygulamasıyla, (5.2.3) probleminin yaklaşık çözümleri için aşağıdaki ikinci mertebeden doğruluk fark şeması elde edilir.

$$
\begin{cases}
-\dfrac{u_n^{k+1,m}-2u_n^{k,m}+u_n^{k-1,m}}{\tau^2}-\left(2-\cos(\pi x_n)\right)\left(\dfrac{u_{n+1}^{k,m}-2u_n^{k,m}+u_{n-1}^{k,m}}{h^2}\right) \\
-\pi\sin(\pi x_n)\dfrac{u_{n+1}^{k,m}-u_{n-1}^{k,m}}{2h}=g\left(t_k,x_n\right)+\frac{1}{10}\sin\left(u_n^{k,m-1}\right), \\
1\le k\le N-1,\ 1\le n\le M-1,\ m=1,.., \\
u_n^{0,m}=\varphi(x_n),\ u_n^{N,m}=u_n^{\left[\frac{N}{2}\right],m}+\left(u_n^{\left[\frac{N}{2}\right]+1,m}-u_n^{\left[\frac{N}{2}\right],m}\right)\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right) \\
+\left(1-\cos(\pi x_n)\right)\left(\exp(-1)-\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right), 1\le n\le M-1,\ m=1,..., \\
u_0^{k,m}=0,\ u_{M-2}^{k,m}-4u_{M-1}^{k,m}+3u_M^{k,m}=0,\ 0\le k\le N,\ m=1,..., \\
u_n^{k,0}=1,\quad 1\le k\le N-1,\ 1\le n\le M-1, \\
\varphi(x_n)=1-\cos(\pi x_n), \\
g\left(t_k,x_n\right)=\left(-\pi^2\left(2-\cos(\pi x_n)\right)\cos(\pi x_n)+1-\cos(\pi x_n)\right. \\
\left.+\pi^2\sin^2(\pi x_n)\right)\exp\left(-t_k\right)-\frac{1}{10}\sin\left(\left(1-\cos\left(\pi x_n\right)\right)\exp\left(-t_k\right)\right).
\end{cases}
\quad (5.2.7)
$$

Böylece, n'ye bağlı matris katsayılı ikinci mertebeden fark denklemi elde edilir. Bu fark denklemini çözmek için (5.2.6) ve

$$
U_M=(3I+\alpha_M\alpha_{M-1}-4\alpha_M)^{-1}(-\beta_M\alpha_{M-1}-\beta_{M-1}+4\beta_M)
$$

formüllerini kullanarak n'ye göre matris katsayılı fark denklemi için benzer şekilde uyarlanmış Gauss Eliminasyon yöntemi ve iterasyon metodu uygulanır. (5.1.1) probleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için, Matlab programı kullanılır. Bu örnek için, grid fonksiyon fark şemalarında iterasyonu $u^{\tau,m}=1$ başlatılır. Ardışık iterasyonlar arasındaki hatalar 10^{-4}'den küçük oluncaya kadar işlem devam ettirilir.

İlk olarak, ardışık iterasyonlar arasındaki hata

$$E_N^M(m, m-1) = \max_{1\le k\le N}\left(\sum_{n=1}^{M}\left|u_n^{k,m} - u_n^{k,m-1}\right|^2 h\right)^{\frac{1}{2}}$$

ile hesaplanır. Burada, $u_n^{k,m}$ m'inci iterasyon adımındaki (t_k, x_n)'de bu fark şemalarının sayısal çözümlerini gösterir. İkinci olarak, tam çözüm $u(t_k, x_n)$ ve bu fark şemalarının sayısal çözümleri $u_n^{k,m}$ arasındaki hataları karşılaştırmak için

$$E_N^M(m) = \max_{1\le k\le N}\left(\sum_{n=1}^{M}\left|u_n^{k,m} - u(t_k, x_n)\right|^2 h\right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü kullanılır.

Çizelge 5.1., birinci mertebeden doğruluk fark şeması için $N = M = 10, 20$ olduğunda, ikinci ve üçüncü iterasyon adımdaki hata karşılaştırmalarını verir.

Çizelge 5.1. Birinci mertebeden fark şeması için hatalar

	$E_N^M(2,)$	$E_N^M(2,)$	$E_N^M(3,)$	$E_N^M(3,)$
N = M = 10	4.323e - 004	0.029	3.827e - 006	0.029
N = M = 20	1.915e - 004	0.013	1.759e - 006	0.013

Çizelge 5.2., ikinci mertebeden doğruluk fark şeması için $N = M = 10,\ 20$ olduğunda, ikinci ve üçüncü iterasyon adımdaki hata karşılaştırmalarını verir.

Çizelge 5.2. İkinci mertebeden fark şeması için hatalar

	$E_N^M(2,)$	$E_N^M(2,)$	$E_N^M(3,)$	$E_N^M(3,)$
N=M=10	4.041e-004	0.0270	3.565e-006	0.0270
N=M=20	1.846e-004	0.0125	1.684e-006	0.0125

Böylece, sonuçlar birinci mertebeden doğruluk fark şeması (5.2.4) ile ikinci mertebeden doğruluk fark şeması (5.2.7) karşılaştırıldığında ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının daha iyi sonuçlar verdiğini gösterir.

6. SONUÇLAR

Bu tez eliptik diferansiyel ve fark denklemleri için integral şartlı Bitsadze-Samarskii lokal olmayan sınır değer probleminin iyi konumlanmışlığını incelemeye adanmıştır. Çalışma sonucunda çıkan orijinal sonuçlar maddeler halinde verilmektedir.

- İlk olarak, $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayında integral şartlı lokal olmayan

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t), \ 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi, \ u(1) = \int\limits_0^1 \rho(\lambda)u(\lambda)d\lambda + \psi \end{cases} \tag{6.1}$$

Bitsadze-Samarskii sınır değer probleminin iyi konumlanmışlığı ispatlanmıştır.

- $C_{01}^{\alpha}([0,1],H)$ uzayında (6.1) probleminin yaklaşık çözümü için,

$$\begin{cases} -\frac{1}{\tau^2}[u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}] + Au_k = \varphi_k, \\ \varphi_k = f(t_k), \ t_k = k\tau, \ 1 \le k \le N-1, \ N\tau = 1 \\ u_0 = \varphi, \ u_N = \sum\limits_{j=1}^{N} \rho(t_j)u_j\tau + \psi \end{cases}$$

birinci mertebeden

$$\begin{cases} -\frac{1}{\tau^2}[u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}] + Au_k = \varphi_k, \\ \varphi_k = f(t_k), \ t_k = k\tau, \ 1 \le k \le N-1, \ N\tau = 1 \\ u_0 = \varphi, \ u_N = \sum\limits_{j=1}^{N} \rho\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right)\left(\frac{u_j + u_{j-1}}{2}\right)\tau + \psi, \end{cases}$$

ikinci mertebeden

$$
\begin{cases}
-\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+Au_k+\frac{\tau^2}{12}A^2u_k=\varphi_k, \\
\varphi_k=f(t_k)+\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{f(t_{k+1})-2f(t_k)+f(t_{k-1})}{\tau^2}+Af(t_k)\right), \quad t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1, \\
u_0=\varphi,\ u_N=\frac{\tau}{3}\left(\rho(t_0)u_0+\rho(t_N)u_N\right) \\
+\frac{\tau}{3}\left(4\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\rho(t_{2k-1})u_{2k-1}+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\rho(t_{2k})u_{2k}\right)+\psi
\end{cases}
.
$$

ve dördüncü mertebeden kararlı fark şemalarının iyi konumlanmışlığı ispatlanmıştır.

- Bu fark şemalarının hemen hemen koersif kararlılık eşitsizliklerini ve koersif kararlılık eşitsizliklerini sağladığı gösterilmiştir.
- Fark şemalarının çözümü için verilen teorik ifadeler sayısal örneklerin sonuçları ile desteklenmiştir.
- İkinci olarak, yarı-lineer eliptik denklemler için Bitsadze-Samarskii tipinde

$$
\begin{cases}
-\frac{d^2u(t)}{dt^2}+Au(t)=f(t,u(t)),\ 0<t<1, \\
u(0)=\varphi,\ u(1)=\sum_{j=1}^{J}\rho_j u(\lambda_j)+\psi,\ 0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_J<1
\end{cases}
\tag{6.2}
$$

lokal olmayan sınır değer probleminin $C([0,1],H)$. uzayında çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır.

- (6.2) probleminin yaklaşık çözümleri için birinci ve ikinci mertebeden kararlı fark şemaları kurulmuştur.
- Fark şemalarının çözümü için verilen teorik ifadeler sayısal örneklerin sonuçları ile desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

Akhmedov, F.S. 1985. Optimization of hyperbolic systems with nonlocal boundary-conditions of Bitsadze-Samarskii type. *Doklady Akademii Nauk*, 283: 87-791.

Agmon, S. 1965. Lectures on elliptic boundary value problems. D. Van Nostrand, Princeton:New Jersey, USA, 291 pp.

Ashyralyev, A. 1992. Method of positive operators of investigations of the high order of accuracy difference schemes for parabolic and elliptic equations. *Ph.D. Thesis, Institute of Methematics, Academy Sciences,* Kiev-Ukraine.

Ashyralyev, A., Sobolevskii, P.E. 1994. Well-posedness of parabolic difference equations. Operator Theory Advances and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel.

Ashyralyev, A. 1995. Well-posed solvability of the boundary value problem for difference equations of elliptic type. *Nonlinear Analysis-Theory, Methods and Applications*, 24(2): 251-256.

Ashyralyev, A. 2003. On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 24(1-2): 1-15.

Ashyralyev, A., Sobolevskii, P.E. 2004. New difference schemes for partial differential equations. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 396 pp.

Ashyralyev, A., Altay N. 2006. A note on the well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic difference equations. *Applied Mathematics and Computation*, 175(1): 49-60.

Ashyralyev, A., Sobolevskii, P.E. 2006. Well-posedness of the difference schemes of the high order of accuracy for elliptic equations**.** *Discrete Dynamics in Nature and Society,* 2006: 1-12.

Ashyralyev, A. 2008. A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 344(1): 557-573.

Ashyralyev, A., Cuevas, C., Piskarev S. 2008. On well-posedness of difference schemes for absract elliptic problems in Lp([0; T] ;E) spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29(1-2): 43-65.

Ashyralyev, A. 2009. Well-posedness of the difference schemes for elliptic equations in spaces**.** *Applied Mathematics Letters,* 22(3): 390-399.

Ashyralyev, A. 2010. Nonlocal boundary-value problems for abstract elliptic equations: well-posedness in Bochner spaces. *AIP Conference Proceedings, ICMS International Conference on Mathematical Science*, 1309: 66-85.

Ashyralyev, A. 2011. Well-posedness of the Basset problem in spaces of smooth functions**.** *Applied Mathematics Letters,* 24(7): 1176-1180.

Ashyralyev, A., Tetikoğlu, F.S. 2011. On numerical solutions of nonclassical problems for elliptic equations. *AIP*,1389: 585-588.

Ashyralyev, A., Ozturk, E. 2012. On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for semi-linear elliptic equations**.** *AIP*, 1470(1): 114-117.

Ashyralyev, A., Ozturk, E. 2012. On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for elliptic differential and difference equations: Well-Posedness. *Apply Mathematics and Compupation*, 219(3): 1093-1107.

Ashyralyev, A., Tetikoğlu, F.S. 2012 A third-order of accuracy difference scheme for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem. *AIP,* 1470: 61-64.

Ashyralyev, A., Tetikoğlu, F.S. 2012 FDM for elliptic equations with Bitsadze-Samarskii-dirichlet conditions**.** *Abstract and Applied Analysis,* 2012(454831): 1-22.

Bazarov, D. 1989. Analog of the Bitsadze-Samarskii problem for a 3rd-order parabolic-hyperbolic equation. *Diff. Eqn.*, 25: 15-19.
Berdyshev, A.S. 2005. The Volterra property of some problems with the Bitsadze-Samarskii-type conditions for a mixed parabolic-hyperbolic equation. *Siberian Mathematical Journal*, .46: 386-395.
Berikelashvili, G. 2003. On a nonlocal boundary value problem for a two-dimensional elliptic equation. *Comput. Methods Appl. Math.*, 3(1): 35-44.
Berikelashvili, G.K. 2003. On the convergence rate of the finite-difference solution of a nonlocal boundary value problem for a second-order elliptic equation. *Differential Equations,* 39(7): 945-953.
Bitsadze, A.V., Samarskii A.A. 1969. On some simplest generalizations of linear elliptic problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 185.
Chabrowski, J. 1992. Multiple solutions for a class of non-local problems for semilinear elliptic equations*, RIMS. Kyoto Uni.,* 28: 1-11.
Cherepova, M.F. 1986. A problem of Bitsadze-Samarsky for the parabolic equation. *Vestnik Moskovskogo Universiteta Seriya 1 Matematika Mekhanika*, 4: 74-76.
Grisvard, P. 1985. Elliptic problems in nonsmooth domains. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, MA, 410 pp.
Gorbachuk, V.L., Gorbachuk M.L. 1991. Boundary value problems for differential-operator equations. Springer-Verlag GmbH, Germany, 364 pp.
Gordeziani, D.G. 1970. On a method of resolution of Bitsadze-Samarskii boundary value problem. *Abstracts of reports of Inst. Appl. Math. Tbilisi State Univ.*, 2: 38-40.
Gurbanov, I.A., Dosiev A.A. 1984. On the numerical solution of nonlocal boundary problems for quasilinear elliptic equations. *Approximate methods for operator equations, Azerb. Gos. Univ.,* Baku, 64-74.
Il'in, V.A., Moiseev, E.I. 1990. Two-dimensional nonlocal boundary value problems for Poisson's operator in differential and difference variants. *Mat. Mod.*, 2: 139-159
Kapanadze, D.V. 1987. On the Bitsadze-Samarskii nonlocal boundary value problem. *Dif. Equat.*, 23: 543-545.
Kozhanov, A.I. 2010. Solvability of boundary value problems with the nonlocal Bitsadze-Samarskii condition for linear hyperbolic equations. *Doklady Math.*, 81: 467-470.
Kilbas, A.A., Repin, O.A. 2003. An analog of the Bitsadze-Samarskii problem for a mixed type equation with a fractional derivative. *Differential Equations*,39(5): 674-680.
Krein, S.G. 1971. Linear differential equations in banach space. American Mathematical Soc., USA, 390 pp.
Makarov, V.L., Lazurchak, I.I., Bandyrskii, B.I. 2003. Bitsadze Nonclassical Asymptotic formulas and approximation with an arbitrary order of accuracy of eigenvalues of the Sturm-Liouville problem with Bitsadze-Samarskii conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*, 39(6): 604-614.
Nitsche, J.A., Nitsche, J.C.C. 1960. Error estimates for the numerical solution of elliptic differential equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* 5: 488-494.
Rukavisnikov, V.A. 1982. On the convergence of coercive difference schemes approximating the second boundary value problem. *Dal'nevostochn. Nauchn. Tsentr Akad. Nauk SSSR*, Vladivostok, (Russian).
Ozturk, E. 2011. Numerical solution of nonlocal boundary value problem for elliptic differential equations. Lambert Academic Publishing, Germany, 112 pp.

Ozturk, E., Ashyralyev, A. 2012. On the numerical solution of Bitsadze Samarskii type elliptic equations with nonlocal boundary and Dirichlet -Neumann conditions**,** *Abstract Applied Analysis*, 2012 (730804):13 pp.
Ozturk, E., Ashyralyev, A. 2013. On a difference scheme of fourth-order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(8): 936-955.
Salakhitdinov, M.S., Mirsaburov, M. 1999. On analogy of Bitsadze-Samarskii problem for the one class of hyperbolic type equations. *Doklady Akademii Nauk,* 336: 10-12.
Salakhitdinov, M.S., Mirsaburov, M. 2002. The Bitsadze-Samarskii problem for a class of degenarate hyperbolic equations. *Differ Equ*., 38: 288-293.
Samarskii, A.A., Nikolaev, E.S. 1989. Numerical methods for grid equations. Iterative Methods, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 744 pp.
Sapagovas, M., Ivanauskas, F., Meskauskas, T. 2009. Stability of difference schemes for two-dimensional parabolic equations with non-local boundary conditions. *Applied Mathematics and Computation,* 215: 2716-2732.
Sapagovas, M.P. 2008. Difference method of increased order of accuracy for the poisson equation with nonlocal conditions. *Differential Equations*, 44(7): 1018-1028.
Sapagovas, M., Stikonien, O. 2011. Alternating-direction method for a mildly nonlinear elliptic equation with nonlocal integral conditions. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control,* 16(2): 220-230.
Shakhmurov, V.B. 2004. Coercive boundary value problems for regular degenerate differential-operator equations. *J. Math. Anal. Appl.,* 292(2): 605-620.
Skubachevskii, A.L. 1997. Elliptic functional differential equations and applications (Operator theory-advances and applications). Basel, Boston, Berlin, 291 pp.
Sobolevskii, P.E. 1969. On elliptic equations in a Banach space. *Differential'nye Uravneninya*, 4 (7):1346-1348, (Russian).
Sobolevskii, P.E., Tiunchik, M.F. 1970. On a difference method for approximate solution of quasilinear elliptic and parabolic equations. *Voronezh. Gos. Univ.*, 2: 82-106, (Russian).
Sobolevskii, P.E. 1975. On difference method for approximate solution of differential equations. *IZLAND.Voronezh Gosud. Univ.* Voronezh.
Sobolevskii, P.E. 1997. Well-posedness of difference elliptic equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 1: 219-231.
Soldatov, A.P. 2006. Problem of Bitsadze- Samarskii type for second order elliptic systems on the plane. *Russian in Doklady Akademii Nauk*, 410(5): 607-611.
Stikonas, A., Stikoniene, O. 2009. Characteristic functions for Sturm-Liouville problems with nonlocal boundary conditions. *Mathematical Modelling and Analysis*, 14: 229-246.
Tetikoğlu, F.S. 2012. High Order of Accuracy Difference Schemes for Bitsadze-Samarskii Problems. *Ph.D. Thesis*, Fatih University, Türkiye.
Tsankov, T.Y. 2010. Explicit solutions of nonlocal boundary value problems containing Bitsadze-Samarskii constraints. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 13(4): 1-12.

EKLER

EK1:Eliptik tip Bitsadze-Samarskii probleminin birinci mertebeden nümerik çözümü için Matlab Programı kodu

```
function doktorasecond(N,M)
close all;
if nargin<1;   N=10; M=10; end;
tau=1/N; h=1/M;
a=-1/(h^2);a
e=(2/(h^2))+(2/(tau^2)+1);e
d=-1/(tau^2);d
for k=2:N;
A(k,k)=a; A(1,1)=0;A(N+1,N+1)=0; A;
end;
A
for k=2:N;
B(k,k)=e; B(k,k-1)=d; B(k,k+1)=d;
B(N+1,k)=-(exp(-(k-1)*tau)*tau); B(N+1,N+1)=1-(exp(-(N*tau))*tau); B(1,1)=1;
end;B
C=A;C
for i=1:N+1; D(i,i)=1; end; D;D
for j=1:M-1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau; x=(j)*h;
fii(k,j:j)=(pi)*(pi)*exp(-t)*sin((pi)*x);
end;
end;
fii
for j=1:M-1;
x=(j)*h;
fii(1,j:j)=sin((pi)*x); fii(N+1,j:j)=(exp(-1)+(1/2)*exp(-2)-(1/2))*sin((pi)*x);
```

```
end;
fii
I=eye(N+1,N+1);
alpha{1}=zeros(N+1,N+1);
betha{1}=zeros(N+1,1);
for j=1:M-1;
alpha{j+1}=inv(B+C*alpha{j})*(-A);
betha{j+1}=inv(B+C*alpha{j})*(D*fii(:,j:j)-C*betha{j});
end;
alpha{j+1}
betha{j+1}
U{M}=zeros(N+1,1);
for Z=M-1:-1:1;
U{Z}=alpha{Z+1}*U{Z+1}+betha{Z+1};
end;
U{Z}
for Z=1:M;
p(:,Z+1)=U{Z};
end;
p(:, 1)=zeros(N+1, 1);
 p
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(k,j:j)=exp(-t)*sin((pi)*x);
end;
end;
es
abs(es-p);
abs(es-p)
maxes=max(max(es)) ;
```

```
maxapp=max(max(p)) ;
maxerror=max(max(abs(es-p)));
relativeerror=maxerror/maxapp;
cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]
fmat1=abs(abs(es-p));
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2, 2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror=max(fmat4)
p;
es;
[xler,tler]=meshgrid(0:h:1, 0:tau:1);
table=[es;p]; table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;
q=min(min(table));
w=max(max(table));
figure;
surf(xler,tler,es);
title('EXACT SOLUTION'); set(gca,'ZLim',[q w]);
rotate3d;
XLabel('x axis'); YLabel('t axis');
figure; surf(xler,tler,p);
title('FIRST ORDER DS'); set(gca,'ZLim',[q w]);
rotate3d ;
XLabel('x axis'); YLabel('t axis');
```

EK2: Eliptik tip Bitsadze-Samarskii probleminin ikinci mertebeden nümerik çözümü için Matlab Programı kodu

```
function doktorasecond(N,M)
close all;
if nargin<1; N=10; M=10; end;
tau=1/N; h=1/M;
a=-1/(h^2);a
e=(2/(h^2))+(2/(tau^2)+1);e
d=-1/(tau^2);d
for k=2:N;
A(k,k)=a; A(1,1)=0;A(N+1,N+1)=0; A;
end;
A
for k=2:N;
B(k,k)=e; B(k,k-1)=d; B(k,k+1)=d;
B(N+1,k)=(-(tau/2)*(2*(exp(-(k-1)*tau))));
B(N+1,1)=(-(tau/2)); B(N+1,N+1)=(1-((tau/2)*(exp(-(N*tau))))); B(1,1)=1;
end;B
C=A;C
for i=1:N+1; D(i,i)=1; end; D;D
for j=1:M-1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau; x=(j)*h;
fii(k,j:j)=(pi)*(pi)*exp(-t)*sin((pi)*x);
end;
end;
fii
for j=1:M-1; x=(j)*h;
fii(1,j:j)=sin((pi)*x); fii(N+1,j:j)=(exp(-1)+(1/2)*exp(-2)-(1/2))*sin((pi)*x);
end;
fii
```

```
I=eye(N+1,N+1);
alpha{1}=zeros(N+1,N+1);
betha{1}=zeros(N+1,1);
for j=1:M-1;
alpha{j+1}=inv(B+C*alpha{j})*(-A);
betha{j+1}=inv(B+C*alpha{j})*(D*fii(:,j:j)-C*betha{j});
end;
alpha{j+1}
 betha{j+1}
U{M}=zeros(N+1,1);
for Z=M-1:-1:1;
U{Z}=alpha{Z+1}*U{Z+1}+betha{Z+1};
end;
U{Z}
for Z=1:M;
p(:,Z+1)=U{Z};
end;
% p(:, 1)=zeros(N+1, 1);
p
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(k,j:j)=exp(-t)*sin((pi)*x);
end;
end;
es
abs(es-p);
abs(es-p)
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(p)) ;
maxerror=max(max(abs(es-p)));
```

```
relativeerror=maxerror/maxapp;
cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]
fmat1=abs(abs(es-p));
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2, 2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror=max(fmat4)
p;
es;
[xler,tler]=meshgrid(0:h:1, 0:tau:1);
table=[es;p]; table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;
q=min(min(table));
w=max(max(table));
figure;
surf(xler,tler,es);
title('EXACT SOLUTION'); set(gca,'ZLim',[q w]);
rotate3d;
XLabel('x axis'); YLabel('t axis');
figure; surf(xler,tler,p);
title('SECOND ORDER DS'); set(gca,'ZLim',[q w]);
rotate3d ;
XLabel('x axis'); YLabel('t axis');
```

EK 3: Eliptik tip Bitsadze-Samarskii probleminin dördüncü mertebeden nümerik çözümü için Matlab Programı kodu

```
function fourhtord(N,M)
close all;
if nargin<1;   N=6; M=110; end;
tau=1/N; h=(pi)/M;
c=((12*(h^4)+4*(h^2)*(tau^2)+6*(tau^2)+(tau^2)*(h^4)+24*(h^2))/(12*(h^4))+2/(tau^
2));c
a=(tau^2)/(12*(h^4));a
b=(-12*(h^2)-4*(tau^2)-2*(tau^2)*(h^2))/(12*(h^4));b
d=(-1/(tau^2));
A=zeros(N+1,N+1);
for k=2:N;     A(k,k)=a ; end;A
B=zeros(N+1,N+1);
for k=2:N;    B(k,k)=b; end; B
C=zeros(N+1,N+1);
for k=2:N;
C(k,k)=c; C(k,k-1)=d ;C(k,k+1)=d;
C(N+1,k)=-(exp(-(k-1)*tau)*tau); C(N+1,N+1)=1-(exp(-(N*tau))*tau); C(1,1)=1;
end;C
D=zeros(N+1,N+1);
for k=2:N;
D(k,k)=b;
end;D
E=A;E
I=eye(N+1,N+1);
R=I;
size(A)
size(B)
size(C)
alpha(1:N+1,1:N+1,1)=0*eye(N+1);
```

```
betha(1:N+1,1:N+1,1)=0*eye(N+1);
gamma(N+1,1)=0;
alpha(1:N+1,1:N+1,2)=(4/5)*eye(N+1);
betha(1:N+1,1:N+1,2)=(-1/5)*eye(N+1);
gamma(N+1,2)=0;
for j=1:M;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j)*h;
fii(k,j)=(1+((tau^2)/4))*exp(-t)*sin(x);
end;
end;
for j=1:M;
x=(j)*h;
fii(1,j)=sin(x);
fii(N+1,j)=((exp(-1)+(1/2)*exp(-2)-(1/2))*(1+((tau^2)/4)))*sin(x);
end;
for n=2:M-2;
matematik=C+D*alpha(:,:,n)+E*betha(:,:,n-1)+E*alpha(:,:,n-1)*alpha(:,:,n);
betha(:,:,n+1)=-inv(matematik)*(A);
alpha(:,:,n+1)=-inv(matematik)*(B+D*betha(:,:,n)+E*alpha(:,:,n-1)*betha(:,:,n));
gamma(:, n+1)=inv(matematik)*(R*fii(:,n)-D*gamma(:,n)-E*alpha(:,:,n-
1)*gamma(:,n)-E*gamma(:,n-1));
end;
%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE'%
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(k,j)=exp(-t)*sin(x);
end;
end;es;
```

```
% END EXACT SOLUTION%
U(1:N+1,1:M)=nan;
U(:,M:M)=0;
U(:,M-1)=inv((betha(:,:,M-2)+5*eye(N+1))-(4*eye(N+1)-alpha(:,:,M-2) )*alpha(:,:,M-1) )*((4*eye(N+1)-alpha(:,:,M-2:M-2))*gamma(:,M-1:M-1)-gamma(:,M-2));
U(:,M-2)=inv(4*eye(N+1)-alpha(:,:,M-2))*((betha(:,:,M-2)+5*eye(N+1))*U(:,M-1)+gamma(:,M-2));
for Z=M-3:-1:1;
U(:,Z:Z)=alpha(:,:,Z+1)*U(:,Z+1)+betha(:,:,Z+1)*U(:,Z+2)+gamma(:,Z+1);
end;
U(:,Z);
for Z=1:M;
p(:,Z+1)=U(:,Z);
end;
%ERROR ANALYSIS OF GENERAL SOL OF THE DIFF SCHEME%
abs(es-p) ; %%% error ...
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(p)) ;
maxerror=max(max(abs(es-p)));
relativeerror=maxerror/maxes;
cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]
fmat1=abs(es-p);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2, 2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror=max(fmat4)
%GRAPH OF THE SOLUTION%
[xler,tler]=meshgrid(0:h:pi,0:tau:1);
table=[es;p];table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=p;
q=min(min(table));
w=max(max(table));
figure;
```

```
surf(xler,tler,es); title('EXACT SOLUTION');
set(gca,'ZLim',[q w]);rotate3d;XLabel('x axis');YLabel('t axis');
figure; surf(xler,tler,p);
title('FOURTH ORDER APP. SOL.BY FIVE POINTS'); rotate3d ;
set(gca,'ZLim',[q w]); XLabel('x axis');YLabel('t axis');
% END GRAPH %
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Elif ÖZTÜRK
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 08/06/1984
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Bursa Erkek Lisesi, 1998-2002
Lisans	: Yıldız Teknik Üniversitesi, 2002-2006
Yüksek Lisans	: Fatih Üniversitesi, 2006-2008, Sakarya Üniversitesi, 2010-2011

Çalıştığı Kurum ve Yıl	:Fatih Üniversitesi 2006 – 2008 Çeşitli kurumlarda öğretmenlik 2009-2010 Uludağ Üniversitesi 2010-2011 Çeşitli kurumlarda öğretmenlik 2011-2013

İletişim (e–posta) :elifozturk16@hotmail.com

Yayınları:

1. **ASHYRALYEV, A., OZTURK, E. 2009.** Numerical Solutions of Bitsadze-Samarskii Nonlocal Boundary Problem for Elliptic Equation**,** *Further progress in analysis: Proceedings of the 6th International ISAAC Congress Ankara, Turkey 13 - 18 August 2007, World Scientific*:698-707.
2. **ASHYRALYEV, A., OZTURK, E. 2011.** On the Fourth Order of Accuracy Difference Scheme for the Bitsadze Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem, *AIP***,** 1389:577-580.
3. **ASHYRALYEV, A., OZTURK, E. 2012.** On Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problems for Elliptic Differential and Difference Equations: Well-Posedness, *Apply Mathematics and Compupati*on, 219(3): 1093-1107.
4. **ASHYRALYEV, A., OZTURK, E. 2012.** On the numerical solution of Bitsadze Samarskii type elliptic equations with nonlocal boundary and Dirichlet -Neumann conditions**,** *Abstract Applied Analysis*, 2012 (730804):13 sayfa.
5. **ASHYRALYEV, A., OZTURK, E. 2012.** On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for semi-linear elliptic equations**,** *AIP.* 1470(1) :114-117.
6. **ASHYRALYEV, A., OZTURK, E. 2013.** On a difference scheme of fourth-order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(8): 936-955.