

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK UZUVLU BİR MANİPULATÖRÜN DİNAMİK DAVRANIŞININ ANALİZİ

SEVDA TELLİ

95211

DOKTORA TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA - 2000

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ESNEK UZUVLU BİR MANİPULATÖRÜN
DİNAMİK DAVRANIŞININ ANALİZİ**

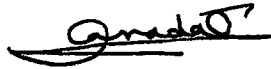
SEVDA TELLİ

DOKTORA TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI


Bu tez 04/07/2000 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.



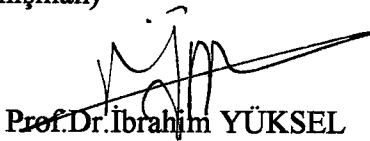
Doç.Dr. Osman KOPMAZ
(Danışman)



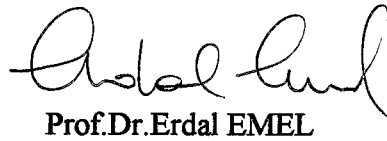
Prof.Dr. Vedat KARADAĞ



Prof.Dr. Ahmet KUZUCU



Prof.Dr. İbrahim YÜKSEL



Prof.Dr. Erdal EMEL

ÖZET

Bu çalışmada, esnek uzuvlu bir manipulatörün dinamik analizinin aşamaları verilmiş, modellemede göz önünde tutulması gereken hususlar temel kavram ve yaklaşımlar irdelenerek belirlenmiştir. Daha sonra tek serbestlik dereceli bir manipulatörün farklı yöntem ve yaklaşımlarla matematiksel modeli oluşturulmuş, hareket denklemleri çıkarılmıştır. Bu hareket denklemlerinde geometrik yumuşama ve katılık etkileri, enine ve boyuna elastik deplasmanlar, kesit dönme etkisi ve kesme kuvveti etkisi çeşitli şekillerde hesaba katılmıştır.

Sayısal çözümlerde kullanılmamakla birlikte ayrıca iki serbestlik dereceli düzlemsel bir manipulatörün hareket denklemleri de çıkarılmış ve sınır şartları verilmiştir.

Hareket denklemlerinin çıkartılmasında sistemin Lagrangianından yararlanılmıştır. Enerji ifadelerinde aksenal ve enine elastik deplasmanlar kullanılarak elastik harekete ait kısmi türevli diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Ayrıca yaklaşık yöntemler olarak “Kabul Edilmiş Modlar” ve “Sonlu Elemanlar” yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntemler için hareket denklemleri seçilen mod veya eleman sayısı ile orantılı sayıda adi diferansiyel denklem takımlarından ibarettir.

Elde edilen hareket denklemleri literatürde verilen bazı örneklere uygulanmış ve sonuçlar karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Hareket denklemlerinin çözümünde katı (stiff) diferansiyel denklemlere uyarlanmış Runge-Kutta metodu kullanılmıştır.

Hareket denklemlerinin çözümleri çok esnek sistemlerde nonlineer uzama oranlarının kullanılmasının gerekliliğini vurgulamaktadır. Ayrıca literatürde refere edilen bazı sonuçların dayandıkları teori itibariyle tutarsızlıkları ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Esnek Manipulatörler, Esnek Uzuv, Dönen Esnek Kiriş, Elastik Sistemlerin Titreşimi

ANALYSIS OF DYNAMIC BEHAVIOUR OF A MANIPULATOR WITH FLEXIBLE LINK

ABSTRACT

In this study, the stages of the dynamic analysis of a flexible manipulator are presented, and the matters to be considered in the modelling are determined by evaluating some basic concepts and approaches. Then, the mathematical model of a single-link flexible manipulator is established, and its equations of motion are derived using different methods and approximations. In these equations, the geometric softening and stiffening, the shear force and the rotary inertia effects are included completely and/or individually. Additionally, the equations of motion of a planar two-link manipulator are derived although they are not employed to obtain numerical results.

In the derivations of the equations of motion, the system Lagrangian is utilized. By expressing the energy integrals in terms of elastic displacements and their time derivatives, the equations of motions are obtained as partial differential equations. Additionally, two approximate methods, i.e. the assumed modes method and finite elements methods, are utilized. In this case, the equations of motion consist of a set of ordinary differential equations the number of which depends on the number of modes or elements used in those methods.

These equations of motion are applied to some examples given in the literature, and the results are plotted and interpreted comparatively. To solve these equations numerically, a Runge-Kutta algorithm modified for stiff systems has been used.

It is concluded from the numerical results that the non-linear relation between curvature and bending moment along with the inclusion of non-linear strains must be utilized at the first step. The equations should carefully be simplified considering the operating conditions of the system. Furthermore, it is shown that some results presented in the literature contradict with the theory formulated by those authors.

Key Words: Flexible Manipulators, Flexible Link, Rotating Flexible Beam, Vibration of Elastic Systems

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No:
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	5
2.1. Konunun Tanıtılması	5
2.2. Önceki Çalışmalar	8
2.2.1. Dinamik Modellemede Sonlu Eleman Metodunun Kullanıldığı Çalışmalar	9
2.2.2. Dinamik Modellemede Modal Açılım Modellerinin Kullanıldığı Çalışmalar	12
3. MANİPULATÖR KİNEMATİĞİ	17
3.1. Giriş	17
3.2. Uzayda Bir Cismin Konum ve Yönelimi	17
3.3. Koordinat Transformasyonları	18
3.4. Çok Uzunlu Esnek Bir Manipulatörün Kinematığı	20
3.5. Kinematik Analizde Elastik Dönmelere ilişkin Bazı Hususlar	27
3.6. Üç Serbestlik Dereceli Manipulatörde Uygulama	29
4. MANİPULATÖR DİNAMİĞİ	37
4.1. Giriş	37
4.2. Harekete Ait Lagrange-Euler Denklemlerinin Çıkarılması	38
4.3. Kinetik ve Potansiyel Enerjilerin Hesabı	41
4.4. Hareketin Newton Denklemleri	47
5. TEK SERBESTLİK DERECELİ ESNEK MANİPULATÖRÜN DİNAMİĞİ	51
5.1. Giriş	51
5.2. Tek Serbestlik Dereceli Esnek Bir Manipulatörün Hareket Denklemleri	51
5.2.1. Lagrange-Euler Formülasyonu İle Hareket Denklemlerinin Çıkarılması	52
5.2.2. Newton-Euler Formülasyonu İle Hareket Denklemlerinin Çıkarılması	56

5.3. Hareket Denklemlerinin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri	60
5.3.1. Kabul Edilmiş Modlar Yöntemi	60
5.3.2. Hareket Denklemlerinin Çıkarılmasında	
Sonlu Elemanlar Yöntemi	65
5.3.2.1. Kinetik Enerjinin Hesabı	68
5.3.2.2. Potansiyel Enerjinin Hesabı	72
5.3.3. Galerkin Yöntemi	75
6. İKİ SERBESTLİK DERECELİ MANİPULATÖRÜN	
HAREKET DENKLEMLERİ	78
6.1. Giriş	78
6.2. Kinematik Analiz	78
6.3. Sistem Lagrangianının Bulunması	82
7. NÜMERİK SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRME	88
7.1. Giriş	88
7.2. Nümerik Sonuçlar	90
7.3. Çalışmanın Katkı ve Sonuçları, Öneriler	100
8. KAYNAKLAR	102
9. EKLER	105
EK-1: s-v-N_M (SEM) Modeline Ait Denklemlerin Çözümünde	
Kullanılan Alt Program	105
EK-2: s-v-φ (KEM) Modeline Ait Denklemlerin Çözümünde	
Kullanılan Alt Program	108
EK-3: v- N_M (KEM) Modeline Ait Denklemlerin Çözümünde	
Kullanılan Alt Program	111
EK-4: u, s ve v Deplasmanlarının Hesaplanmasında Kullanılan	
Yardımcı Program	112
EK-5: Alt Programlarla Verilen ODE Dosyalarını Çalıştıran	
Ana Program	114
10. ÖZGEÇMİŞ	115

SİMGELER DİZİNİ

- \vec{a}** : İvme vektörü
 \vec{d} : Elastik deformasyon vektörü
e: Kesit ekseninden dik uzaklık
 f_u : İnterpolasyon fonksiyonu
 f_v : İnterpolasyon fonksiyonu
 f_φ : İnterpolasyon fonksiyonu
 \vec{i} : x eksenini doğrudanındaki birim vektör
 \vec{j} : y eksenini doğrudanındaki birim vektör
 \vec{k} : z eksenini doğrudanındaki birim vektör
k': Geometrik düzeltme faktörü
m: Kütle
 \vec{r} : Konum vektörü
 q_i : Genelleştirilmiş koordinatlar
s: Kesit eksenini doğrudanındaki elastik yer değiştirme miktarı
u: x eksenini doğrudanındaki elastik yer değiştirme miktarı
v: y eksenini doğrudanındaki elastik yer değiştirme miktarı
w: z eksenini doğrudanındaki elastik yer değiştirme miktarı
t: Zaman
A: Kesit alanı
E: Elastisite modülü
G: Kayma modülü
I: Kesit atalet momenti
L: Lagrangian
M: Moment
N: Normal kuvvet
 N_M : Merkezkaç kuvvet
Q: Kesme kuvveti
 Q_i : Genelleştirilmiş kuvvet
R: Transformasyon matrisi

- T**: Toplam kinetik enerji
T^Ö: Ötelenme kinetik enerjisi
T^D: Dönme kinetik enerjisi
Ū: Birim vektör
V: Toplam potansiyel enerji
V_M: Eğilme ve/veya burulma momentinin potansiyeli
V_N: Normal kuvvetin potansiyeli
V_T: Kesme kuvvetinin işi
W: Dış kuvvetlerin toplam potansiyeli
ᾱ: Açısal ivme vektörü
δ: Varyasyon operatörü
ε: Uzama oranı
γ: Kayma açısı
φ̄: Elastik dönme vektörü
θ: Rijit dönme açısı
ρ: Yoğunluk
ρ_e: Eğrilik yarıçapı
Ū: Hız vektörü
ω̄: Açısal hız vektörü
Φ: Öz fonksiyonlar
()': Konuma göre türev
()*: Zamana göre türev
()^T: Transpoze

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No:
Şekil 3.1. a) Cismin Uzaydaki Konum ve Yönelimi	18
Şekil 3.1. b) Koordinat Transformasyonları	18
Şekil 3.2. a) Manipulatörün Ardışık İki Uzunluk Vektörel Gösterimi	22
Şekil 3.2. b) i Uzvu Üzerindeki Herhangi Bir Noktanın Konumu	22
Şekil 3.3. Sonlu ve Çok Küçük Dönmeler Arasındaki İlişki	27
Şekil 3.4. Çok Küçük Dönmelere Ait $\bar{\phi}$ ile $[R(\bar{\phi})]$ Matrisi Arasındaki İlişki	28
Şekil 3.5. Üç Serbestlik Dereceli Manipulatör	30
Şekil 3.6. Kesit Dönmeleri ve Elastik Şahimler Arasındaki Bağlantı	31
Şekil 3.7. Üç Serbestlik Dereceli Manipulatörün Kinematik Analizinde Kullanılan Tel Modeli	32
Şekil 4.1. Herhangi Bir dx Elemanın t Anındaki Durumu	42
Şekil 4.2. u, s ve v ye İlişkin Özel Durumlar	47
Şekil 4.3. Kirişin Diferansiyel Parçasına Etkiyen Kuvvet ve Momentler	48
Şekil 4.4. Sonlu Kiriş Parçasının Dinamik Dengesi	49
Şekil 5.1. Esnek Kolun Konumunu Belirleyen Parametreler	51
Şekil 5.2. Manipulatörün j Uzunluk Sonlu Eleman Modeli	66
Şekil 6.1. İki Serbestlik Dereceli Düzlemsel Manipulatör	78
Şekil 7.1. Simo ve Vu-Quoc'un Çalışmasına Ait Sonuçlar	91
Şekil 7.2. u-v (KEM) Modelinin Sonuçları	91
Şekil 7.3. s-v (KEM) Modelinin Sonuçları	92
Şekil 7.4. s-v- ϕ (KEM) Modelinin Sonuçları	92
Şekil 7.5. v- N_M (KEM) Modelinin Sonuçları	93
Şekil 7.6. s-v- N_M (SEM) Modelinin Sonuçları	94
Şekil 7.7. v- N_M (SEM) Modelinin Sonuçları	94
Şekil 7.8. Choura ve Ark.'nın Çalışmasına Ait Sonuçlar	95
Şekil 7.9. s-v- ϕ (KEM) Modelinin Sonuçları (Hız=0.9396 rad/s)	96
Şekil 7.10. s-v- ϕ (KEM) Modelinin Sonuçları (Hız=8.329 rad/s)	97
Şekil 7.11. Enine (v) Deplasmanlar (Hız=0.9396 rad/s)	98
Şekil 7.12. Enine (v) Deplasmanlar (Hız=8.329 rad/s)	98
Şekil 7.13. v- N_M (SEM) Modelinin Sonuçları (Hız=0.9396 rad/s)	98
Şekil 7.14. v- N_M (SEM) Modelinin Sonuçları (Hız=8.329 rad/s)	98

1. GİRİŞ

Günümüzde sanayi kuruluşları, gerek üretim hızını arttırmak, gerekse üretim kalitesinde yüksek standartlar yakalamak ve gerekse sosyal içerikli diğer bazı nedenlerle tam otomasyona geçiş istikametinde çaba sarfetmekte olup, bu çerçevede robot ve benzeri mekanik sistemler geliştirmekte olan ülkelerde dahi işletmelerde yer almaya başlamıştır. Bu süreç, robot teknolojisinde hızlı bir gelişmeye yol açmış ve buna paralel olarak üniversitelerde de konuyla ilgili çalışmalar fevkalade artış göstermiştir. Hafiflik ve işletme hızlarının yükseltilmesi taleplerine paralel olarak akademik alandaki çalışmaların rijit uzuvlu manipulatörlerden esnek uzuvlu olanlara doğru kaydığı gözlenmektedir. Ülkemizde de 80 li yılların sonlarına doğru rijit uzuvlu robot kolların dinamik ve kontrolüne dair çalışmaların giderek arttığı tesbit olunmaktadır. 90 lı yıllarda ise çalışmalar dünyadaki temayüle uygun olarak esnek uzuvlu manipulatörler konusunda yoğunlaşmaktadır.

İmalat sektöründe robotik sistemlerden beklenen şey, uç efektörüne bağlı cismin veya takımın ön görülen bir yörüngeyi yeterince doğru bir biçimde izleyip planlanan görevi yine hassas biçimde tamamlaması olduğundan uzuvların maruz kaldıkları kuvvetler tesirinde esneme ve titreşim yapması arzu edilmez. Dolayısıyla uzuvlar hemen hemen rijit bir cisim gibi davranacak tarzda tasarlanırlar. Bunun neticesinde büyük kütleli bir mekanik yapı ortaya çıkar. Bu durum çalışma esnasında fazla enerji tüketimine ve yavaşlığa diğer bir ifadeyle çok küçük bir iş için çok fazla enerji harcayarak düşük verimlerle çalışmaya sebep olmaktadır. Buna mukabil hafif dolayısıyla narin ve esnek uzuvlar kullanıldığında yüksek işletme hızlarında ve büyük yüklerde mühim deformasyonlar ve titreşimler ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle robotik sistemlerde, hafif ve esnek elemanlar kullanarak ağır yüklerin taşınması ve bu arada sistemde ortaya çıkan elastik titreşimlerin minimize edilmesi veya çeşitli kontrol metotları kullanarak elastik sistemin istenilen işlevi hatasız bir şekilde yerine getirmesi hususu büyük önem arz etmektedir. Bu yüzden robotik alanında son 10-15 yılda yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu hafif ve esnek robot kollara (manipulatörlere) yöneliktir.

Esnek uzuvlu manipulatörlere ait çalışmalar 80'li yıllarda başlamış olup halen süregelmektedir. Bu çalışmalar iki ana grupta ele alınabilir:

-Sanki-statik ve dinamik analizler: Bu çalışmalarda elastik deformasyonların mertebesine

ve işletme hızları aralığına göre farklı hassasiyette matematik modeller kurulmuş ve hareket denklemleri çıkartılmıştır. Sanki-statik analizlerde elastik deformasyonlar düz ve ters kinematiğe deformasyon matrisleri şeklinde yansıtılmıştır.

-Kontrol amaçlı dinamik modellemeler: Bu çalışmalarda ise basitten zora muhtelif matematik modeller kullanılmakta olup, ağırlık kontrol algoritmalarına verilmektedir.

Esnek manipulatörlerin dinamik analizine ilişkin çalışmaları, incelenen manipulatörün serbestlik derecesi, uzuvların modellenmesinde kullanılan teori, göz önüne alınan elastik yerdeğiştirme türleri, hareket denklemlerinin çözümünde kullanılan analitik veya nümerik prosedürlere göre sınıflandırmak mümkündür. Pek çok çalışmada tek serbestlik dereceli (burada rijit hareket serbestlik derecesi kastedilmektedir) robot kol incelenmektedir. İki ve daha fazla serbestlik dereceli manipulatörlere ait çalışmaların bir kısmında sadece son uzvun esnek olduğu varsayılmaktadır. Bunlara ilaveten tüm uzuvları esnek çok serbestlik dereceli sistemlerin incelendiği sınırlı sayıda çalışma da mevcuttur.

Hareket denklemlerinin çözümünde kullanılan prosedürler denklemlerin analitik çözümlerinin genelde pek mümkün olmaması nedeniyle nümerik karakterdedirler. Az sayıda çalışmada perturbasyon serileri yardımıyla analitik çözümler geliştirilmiştir (Low ve Dubey 1986).

Esnek robot kolların modellenmesinde kollar genellikle belirli sınır şartlarına haiz kirişler olarak düşünülmekte ve hareket denklemleri yazılırken Euler-Bernoulli veya Timoshenko kiriş teorileri uygulanmaktadır. Bilindiği gibi, kirişlerin eğilme titreşimleri incelenirken, eğilme esnasında meydana gelen dönmeden dolayı ortaya çıkan atalet kuvvetlerinin ihmal edilmesi veya kısaca dönme ataletinin ihmal edilmesi ve kayma şekil değiştirmesinin ihmal edilmesi suretiyle yapılan teoriye "Basit Kiriş Teorisi" ve böyle kirişlere de Euler-Bernoulli Kirişi denir. Bu incelemelerde dönme ataleti ilk defa Rayleigh, kayma şekil değiştirmesi de Timoshenko tarafından göz önüne alındığından, her iki tesirin de ihmal edilmeden ifadelerde dikkate alındığı kirişlere "Rayleigh-Timoshenko Kirişi" veya kısaca "Timoshenko Kirişi" adı verilmektedir (Pasin 1994).

Bir kirişin herhangi bir noktasının lineer elastik deplasmanları üç bileşene ayrılabilir. Bunlardan ikisi kirişin şekil değiştirmemiş haldeki eksenine dik, üçüncüsü ise bu eksene paralel doğrultudadır. Açısal deplasmanlar ise herhangi bir kiriş kesitinin ilk konumuna göre yönelimi esas alınarak tanımlanır. Kesitin kendi düzlemine dik eksen etrafındaki

dönmesi burulmadan, buna dik diğer iki eksen etrafındaki dönmeleri ise eğilmeden kaynaklanır. Kayma şekil değiştirmeleri göz önüne alınmadığında eğilme dönmeleri ile enine sehimler arasında türevsel bir ilişki vardır.

Esnek manipulatörlerin dinamik modellenmesi yapılırken kolun sadece eksenine dik doğrultularda elastik yer değiştirmeye yani eğilmeye maruz kaldığı, eksenine paralel doğrultudaki boyuna yer değiştirmelerin diğerleri yanında ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu kabul edilmektedir. Bu kabul, kolun birinci doğal frekansının altında çalıştırılması halinde oldukça gerçekçi sonuçlar vermekle birlikte, çalışma hızı birinci doğal frekansın üzerinde olduğunda güvenilir olmayan hatta tamamen hatalı sonuçlara sevk etmekte yani kabulün geçerliliği ortadan kalkmaktadır.

Yüksek hızlarda atalet kuvvetlerinin büyümesi ve kolların hafif olmaları nedeniyle esnekliğin artması, koldaki elastik yer değiştirmelerin yani titreşimin artmasına neden olarak robotun hassasiyetini büyük ölçüde etkiler. Hareket aktarma mekanizmalarındaki sürtünme, boşluk, elastikiyet gibi hususlar ile statik ve dinamik yapısal deformasyona da sahip bugünün robotlarının kullanımı, yaklaşık 0.1 mm hata toleransı ile sınırlıdır. Halbuki gelişmiş üretim metotlarında, manipulatörün uç noktası için en çok 0.01 mm'lik bir konum hatasına izin veren özellikle küçük parçaların montajı gibi bir çok işlem vardır. Hata miktarının azaltılması için hızın düşürülmesi önerilse de, üretimin artırılıp, çalışma zamanının azaltılması yönündeki talepler hızla ilgili bir ayarlama gidilmesini engellediğinden ve uzay robotlarında hafif eleman kullanmanın çekiciliği nedeniyle çalışmalar, esnekliğin hassasiyete etkisi üzerine yoğunlaşmıştır. Ana problem kolun uç noktasının esnemeler nedeniyle hedeften kaçmasını engellemek veya en aza indirmektir (Yüksel 1995).

Esnek manipulatörlere yönelik çalışmaların temelinde yatan sebep, hafif ve yüksek hızlarda çalışan robot kolların kullanılmasını sağlamak hedefi olduğundan yüksek hızlarda da geçerli bir dinamik modellemenin yapılması gereği ortadadır. Bu nedenle, konuyla ilgili son zamanlarda yapılan çalışmaların çoğunluğu bu hususu dikkate almaktadır.

Yapılan bu çalışmada ise, genel olarak esnek uzuvlu açık kinematik zinciri haiz mekanizmaların kinetoelastikdinamik analizi için gerçekçi bir matematiksel modelin oluşturulmasında göz önüne alınması gereken hususların belirlenmesi ve özel olarak da tek serbestlik dereceli esnek bir manipulatör örneği için böyle bir modelin geliştirilmesi ve

literatürde kullanılagelen modellerle mukayesesi amaçlanmıştır.

Bu amaç doğrultusunda çalışmada öncelikle açık kinematik zinciri haiz esnek uzuvlu bir manipulatörün kinematik analizi yapılmış, analizde küçük dönmeler için elastik transformasyon matrisleri çıkarılarak sonlu dönme matrisleriyle ilişkileri gösterilmiştir. Manipulatörün dinamik analizinde ise, Euler-Lagrange ve Euler-Newton formülasyonları kullanılarak tek serbestlik dereceli manipulatör örneğinde matematik modele ait hareket denklemleri kabul edilmiş modlar ve sonlu elemanlar ayrıklaştırma yöntemleriyle çıkarılmıştır. Dinamik analizde geometrik yumuşama ve katılaşmanın dinamik davranışa etkileri, matematiksel eğrilik-moment bağıntısı yerine fiziksel eğrilik-moment bağıntısının kullanılması gerekliliği ve elastik deplasmanlar arasındaki geometrik ilişki ele alınmıştır. Sonuçta elde edilen denklemler MATLAB 5.2 paket programı kullanılarak Runge-Kutta nümerik çözüm metoduyla çözülmüş ve bulunan sonuçlar literatürdeki aynı manipulatör tipiyle ilgili bazı sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Nümerik çözüm aşamasında kullanılan ve MATLAB ortamında hazırlanan alt programlar Ekler bölümünde verilmiştir.

Ayrıca sayısal çözümleri yapılmamakla beraber iki serbestlik dereceli, düzlemsel bir manipulatörün hareket denklemleri de sınır şartlarıyla birlikte verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1.Konunun Tanıtılması

Robot, belirli insan etkinliklerini üstlenen makinelere verilen genel bir isimdir. Bunlar, insanların yaptığı çeşitli hareketleri, verilen programlar dahilinde yapabilen makinelerdir. Robot ismi "Zorunlu Emek" anlamına gelen Çekçe "Robota" sözcüğünden gelmektedir. İlk olarak 1920 yılında Çek yazarlarından K. Capeck'in bir tiyatro oyununda kullanılmıştır (Koivo 1989).

Sanayi robotları günümüzde birçok işte insanın yerini almıştır. Sağlık koşulları uygun olmayan, tehlikesi veya riski yüksek olan birçok işte robotlar çok yüksek oranda güvenle kullanılmaktadır. İlk sanayi robotu 1961 yılında Amerika Birleşik Devletleri'nde çalışmaya başlamıştır. George Devol, döküm parçaları kalıptan çıkartma işini yapan bir robotu o tarihlerde geliştirmiştir. Programlanabilir robotların ortaya çıkması bilgisayarların yaygınlaşmasından sonra gerçekleşmiştir. Daha sonra robotlara algılayıcılar ve elektronik kameralar yerleştirilerek kabiliyetleri ve hızları artırılmıştır (Rivin 1988).

Bir robotik sistem genel olarak;

- Manipulatör,
- Denetleyici ve
- Güç Kaynağı

olmak üzere üç temel öğeden oluşmaktadır. Bazı robotik sistemlerde bir dördüncü eleman olarak uç efektör (end effector) de bulunmaktadır.

Manipulatör, sistemden beklenen fiziksel işi yapan bileşen olup, mekanik kısım ve kol olarak tabir edilen birbirine eklenmiş uzuvlardan oluşur. Bu uzuvların bağlandığı kaide de yine manipulatöre ait bir kısımdır. Manipulatör kaidesi çoğunlukla çalışma alanının zeminine sabitlenmesine rağmen, bazen bu kaide hareketli de olabilmektedir. Böyle durumlarda manipulatörün bir konumdan diğerine hareketini sağlamak amacıyla kaide ray veya benzer bir sürgü sistemi üzerine monte edilir. Manipulatörün hareketi, motorlar veya sürücü sistemlerle sağlanır. Motor veya sürücü sistemler, manipulatörün dolayısıyla robotun çalışma alanı içerisinde farklı eksenlerde hareketine imkan verir.

Sürücü sistem, elektrik, hidrolik veya pnömatik güçle çalışır ve bunları mekanik güce dönüştürür. Sürücülerin denetlenmesi bir denetleyici tarafından yapılır.

Denetleyici, genellikle mikroişlemci tabanlı bir sistem olup, robotun beynidir.

Önceden programlanmış bilgileri zamanı geldiğinde kullanmak üzere saklamak, ilgili aygıtları denetlemek ve üretime yönelik değerleri içeren bilgisayarlarla bağlantıyı sağlamak denetleyicinin görevidir. Robot denetimi çok sayıda motorun bir arada ve uyumlu olarak çalışmasını gerektirdiğinden oldukça karmaşık bir olay olup, bu esnada robotun matematiksel modeline ihtiyaç duyulması nedeniyle modelleme, robottan beklenen işin gerçekleştirilebilmesi açısından hayli önemlidir. Robotun motorlarının konumundan robot kolunun uç kısmının (robot elinin) yere bağlı koordinatlardaki konumunu saptayan denklemler sistemine *kinematik* model, yere bağlı koordinatlarda tanımlanmış el konumundan eklem değişimlerini saptayan denklemlere ise *ters kinematik* model denir. Motorların uyguladığı kuvvetlerin neden olduğu robot kolun hız ve ivmelerini bulan denklemler sistemine *dinamik* model, istenen hız ve ivmeleri sağlayacak kuvvetleri bulan denklemlere ise *ters dinamik* model denir. Robot sistemlerde, modellemeye ilişkin hesaplamalar denetleyici veya onunla iletişim halinde olan bilgisayarlar tarafından yapılır.

Güç Kaynağı ise, robotun temel öğelerinden üçüncüsü olup, manipulatör ve denetleyicinin görevlerini yerine getirebilmeleri için ihtiyaç duydukları gücü sağlayan birimdir.

Bir robotik sistemin temel elemanlarından sonuncusu olan uç efektör, robot manipulatörünün ucuna bağlanan ve parçaları tutma, yerleştirme, kaynak, boyama gibi işlemlerde kullanılan elemanlardır (Malcolm 1988).

Sonuç olarak, endüstriyel bir robot, denetimi bir denetleyici tarafından gerçekleştirilen ve ihtiyaç duyduğu giriş enerjisi bir güç kaynağı tarafından sağlanan, prizmatik veya dönel mafsallarla bağlanmış çeşitli rijit elemanlardan oluşan, genel amaçlı bir manipulatördür. Bu mafsal zincirinin bir ucu serbest olup diğeri ise tabana bağlanmıştır. Serbest olan uca cisimleri taşıma veya montaj işlemini yerine getirmek için amaca uygun bir yardımcı eleman da bağlanabilmektedir.

Teknolojik gelişmelere paralel olarak günümüz robotlarının hafif, hızlı, hassas, hata toleranslı ve modüler olmaları istenmekte, daha doğrusu böyle olmaları gerekmektedir. Bu anlamda, hafif ve narin ancak yüksek çalışma hızlarında bile

dayanıklı olan robot manipulatörler oldukça önem kazandığından yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu bu hedefe yönelik gerçekleştirilmektedir. Günümüz robotlarında taşıma kapasitesinin insana kıyasla oldukça düşük olduğu dikkate alındığında bu yöndeki çalışmaların amacı daha iyi anlaşılmaktadır. Bugün sanayiide taşıyıcı olarak işlem yapan manipulatörlerde, robot elin taşıyabildiği faydalı yükün tüm robot ağırlığına oranı 1/10 civarında olup, güçlerinin büyük bir yüzdesi bizzat manipulatör kollarının hareket ettirilmesine harcanmaktadır. İnsanın kaldırabileceği yükün kendi ağırlığına oranı ise en az 1/2 civarındadır. Görülüyor ki, robotlardan daha yüksek verimle yararlanabilmek için, robotların mukavemet özelliklerinden fazla bir şey yitirmeden hafifleştirilmesi gerekmektedir. Hafiflik, mekanik bakımdan malzeme ya da boyut değişiklikleriyle sağlanmaktadır. Herhangi bir mekanizmada boyutlarına dokunmaksızın istenen mekanik özellikleri taşıyan ama yoğunluğu az bir malzeme, örneğin çelik yerine lif takviyeli kompozitler kullanılarak hafifletmek mümkündür. Diğer bir yöntem ise kesiti mukavemet sınırları dahilinde küçültmektir. Hafifliğin bu şekilde daha küçük kesitle sağlanması, uzvu elastik yani kuvvet ve moment etkisinde daha fazla deforme olarak harekete cevap veren, diğer bir ifadeyle titreşim yapmaya müsait hale getirir. Bu takdirde şekil değiştirmelerin bulunmasında kullanılan atalet kuvvetlerini rijit uzuv veya uzuvlar kabulü altında hesaplama yöntemi geçersiz olur, elastik şekil değiştirmelerin atalet kuvvetlerine etkisini göz önüne almak gerekir. Bu şartlarda yapılan analize kineto-elastodinamik analiz denir. Bu analiz şekli mekanizmanın performansının yüksek olması açısından yararlı hatta zorunludur. Kineto-elastodinamik analizde yapılacak ilk iş mekanizmaya ait hareket denklemlerinin çıkarılmasıdır ve elde edilen denklemler sonuçları direkt etkileyeceğinden analizin en önemli kısmı da budur.

Manipulatör dinamiğinde hareket denklemlerini elde etmek için genellikle iki yöntem uygulanmaktadır:

- Newton'un II. Kanunu
- Euler-Lagrange Formülasyonu

Newton'un II.Kanunu dinamik denklemleri, kuvvet ve momentum terimleri ile tanımlar. Denklemler, her bir mafsala etkiyen kuvvet ve momentleri, mafsallardaki bağlayıcı kuvvet ve momentler de dahil olmak üzere içermektedir. Ayrıca bu yöntemle elde edilen kuvvet içerisinde komşu bağlantı elemanlarına etkiyen sınırlayıcı kuvvetler de

vardır. Bu yüzden, sisteme uygulanan torklarla mafsalsal yer değiştirmeleri cinsinden bileşke hareket arasındaki bağlantıları elde edebilmek için fazladan yapılacak matematik işlemlerle bu terimlerin yok edilmesi gerekir.

Öte yandan, genelleştirilmiş Hamilton prensibinden yararlanılarak uygulanan Euler-Lagrange formülasyonunda ise sistemin dinamik davranışı genelleştirilmiş koordinatlar kullanılarak tanımlanmaktadır. Bu yöntemde sistemin toplam kinetik ve potansiyel enerjileri ile konservatif olmayan kuvvetlerin işleri bağımlı değişkenler cinsinden ifade edildiğinden iş yapmayan kuvvetler ve sınırlayıcı tüm kuvvetler kendiliğinden ifadelerden çıkarılmış olur. Nihai denklemler genelde sade olup, torklar ve yer değiştirmeler cinsinden kapalı bir ifade verir. Türetme işlemi ise Newton metodundan daha basit ve sistemattir. Bu sebeplerden dolayı çok uzuvlu manipulatörlerde bu yöntemi kullanmak her zaman için daha avantajlıdır ve bu sebeple de araştırmacılar tarafından çoğunlukla tercih edilmektedir.

2.2. Önceki Çalışmalar:

Esnek uzuvlu manipulatörlerle ilgili çalışmalar genelde iki ana doğrultuda gelişme göstermiştir. Bunların birincisi bu tür sistemlerin dinamik davranışının analizi, ikincisi ise bu davranışın çeşitli stratejilerle denetlenmesidir. Birinci grup çalışmalar, manipulatörün hareket denklemlerinin çıkarılmasıyla ayrıntılı bir şekilde uğraşmaktadır. İkinci gruptaki çalışmaların bir kısmında da modelleme ve hareket denklemlerinin çıkarılmasına yer verilmekle beraber, ekseriya basit ya da karmaşık hareket denklemleri aktarılıp denetleyici tasarımı üzerinde durulmaktadır. Bu çalışmayla ilgisi bakımından aşağıda genel olarak dinamik modellemeye yönelik çalışmalara değinilecektir.

Esnek bir manipulatör, biri hareketli diğeri sabit olmak üzere en az iki elemandan oluşan, çok uzuvlu bir mekanik sistemdir. Esnek sözcüğüyle manipulatör uzuvlarının deформasyonlarının büyük ölçekli yer değiştirmede istenen hassasiyet sınırlarını aşabileceği vurgulanmaktadır. (Bu manada uzuvları rijit kabul edilebilecek bir manipulatörün de "esnek" hale gelebileceği çalışma şartlarından da bahsedilebilir. Ancak burada hafif, narin ve küçük kesitli kiriş tipi uzuvları olan manipulatörlerin esnek olarak tanımlandığı hatırlanmalıdır). Esnek bir manipulatörün dinamiği yayılı parametrelili (sürekli) sistemi temsil eden kısmi türevli hareket denklemleri takımıyla

tarif edilebilir. Böyle bir sistemin serbestlik derecesi esasında sonsuzdur. Pratikte ise bu tür bir sisteme sonlu sayıda serbestlik derecesine sahip bir modelle yaklaşılır ve bu amaçla yaygın biçimde kullanılan iki temel yaklaşım vardır: sonlu eleman modelleri ve modal açılım modelleri. Bu çerçevede aşağıda sayılacak çalışmalar bu görüşe göre gruplanmıştır.

2.2.1. Dinamik Modellemede Sonlu Eleman Metodunun Kullanıldığı Çalışmalar:

Usoro ve arkadaşları (1986), hafif ve esnek manipulatörlerin matematik modellenmesinde Lagrangian ve sonlu eleman kombinasyonundan oluşan bir metot kullanmışlardır. Metodun uygulanışı iki kollu düzlemsel bir manipulatör örneği üzerinde gösterilmiştir. Her iki kol, elemanlara ayrılmış, düğümlere (nodlara) üçer serbestlik izafe edilmiştir. Bunlarda birisi aksenel (longitudinal), diğeri enine (transversal) yer değiştirmeler olup, üçüncüsü ise hareket düzlemine dik eksen etrafında dönmedir. Her bir uzvun kinetik ve potansiyel enerjileri bu nodal çizgisel ve açılal yerdeğıştirmeler cinsinden hesaplanarak, sistemin Lagrangian'ı bulunmuş, daha sonra genelleştirilmiş koordinatlar olan nodal deplasmanlara göre gerekli türevler alınarak sistemin Euler-Lagrange formunda hareket denklemleri elde edilmiştir. Neticede, iki çubuğun esnek hareketlerini ifade eden iki adet kısmi diferansiyel denklem yerine nodal deplasmanlar sayısınca adi, lineer olmayan, bağılı (coupled) denklemlerden oluşan bir takım elde edilmiş olmaktadır. Rijit harekete ait mafsall koordinatları da sistemin hareketini temsil eden nodal deplasmanlar vektörüne dahil edildiğinden sonuçta bulunan atalet matrisi, genelleştirilmiş atalet matrisi olarak adlandırılmaktadır. Enine deplasmanlarda şekil fonksiyonları olarak Hermit polinomları kullanılmıştır. Aksenel deplasmanların tarifinde de birinci dereceden (doğrusal) polinomlardan yararlanılmıştır. Usoro ve arkadaşları yaptıkları çalışmada, sayısal bir örnek de vermektedirler.

Kalra ve Sharan (1991), esnek bir manipulatörde herhangi bir uzvun Euler-Newton hareket denklemlerini çıkarmışlar, daha sonra Galerkin metodunu kullanarak nodal deplasmanlar cinsinden hareket denklemleri takımına ulaşmışlardır. Burada iki model oluşturulmuştur. Bunlardan birincisinde herhangi bir uzvun diferansiyel elemanına etkiyen kesit kuvvetlerinin gerçek doğrultuları göz önüne alınırken, ikinci modelde bu kuvvetlerin rijit uzva ait koordinat eksenlerine paralel olduğu

varsayılmıştır. Her iki modelden bulunan uç efektör sehiminin ve motor torkları değişiminin önemli ölçüde fark ettiği gösterilmiştir.

Gaultier ve Cleghorn (1992), çoğu çalışmada düzlemsel hal ile sınırlanan sonlu eleman modelini üç boyutlu hale uygulamışlardır. Nodal büyüklüklere ait denklemleri elde etmek için Hamilton prensibinden hareket etmektedirler. Yazarlar, eksenel yüklerin yatay titreşime etkisini, ağırlık kuvvetlerini, mafsallardaki motor kütlelerini, uç efektöre etkileyen kuvveti ve Rayleigh sönümünü modele dahil etmişlerdir. Yazarlar eksenel rijitliği de göz önüne alarak Euler-Bernoulli teorisine uygun bir eleman geliştirmiş ve bunu literatürdeki bazı örneklerle uygulayarak eleştirel mukayeseler yapmışlardır. Geliştirilen eleman tipinin stabil denklemlere sevk ettiği ve oldukça kolay uygulandığını göstermişlerdir.

Sharan ve Kalra (1994), sonlu elemanla modellenmiş manipulatörlerin dinamik analizini yapmışlardır. Yazarların bu çalışması esas itibariyle yukarıda bahsedilen Gaultier ve Cleghorn (1992) 'un devamı niteliğindedir. Şöyle ki, burada da Galerkin prosedürü uygulanarak sonlu eleman hareket denklemleri elde edilmekte, bu denklemlerdeki lineer olmayan terimler ihmal edilerek lineerleştirme yapılmakta, durum vektörü yardımıyla n serbestlik dereceli sistemden $2n$ serbestlik dereceli sisteme geçilmiştir. Bu sistemin katsayı matrisleri simetrik olmadığından transpoz matrisler yardımıyla öz değerler ve öz vektörler bulunmakta ve modal matrisle yapılan bir dönüşüm sonucu denklemler bağımsız hale getirilmektedir. Neticede, robot manipulatörlerin dinamik davranışının lineerleştirilmiş modellerle de incelenebileceği ve bu tür sistemlerin incelenmesinde modal analizin kullanılabilceği sonucuna varılmakta, ayrıca sayısal örneklerle de bu desteklenmektedir.

Du ve arkadaşları(1996), yaptıkları çalışmada üç boyutlu esnek manipulatörler için genel lineer olmayan bir model geliştirmişlerdir. Burada uzuvlar büyük ölçekli rijit cisim hareketi ile elastik şekil değişimine maruz kirişler olarak modellenmektedir. Kiriş, sonlu eleman metodu ile ayrıklaştırılmakta, kütleler nodlarda konsantre halde düşünülmektedir. Lineer olmayan uzama- yer değiştirme bağıntısını kullanan yazarlar, geometrik non-lineerliği etkileri lineerleştirilmiş modele de yansıtacak şekilde ele almaktadırlar. Non-lineer etkinin yansıtılmadığı modellerde ıraksamaya dikkat çekmektedirler. Çünkü bu takdirde merkezkaç kuvvetlerinin katılık artırıcı etkisi ihmal edilmiş olmaktadır.

Fallahi (1996), kinetostatik çözümlerin (yani şekil değiştirmemiş haldeki atalet kuvvetlerini esas alarak deformasyonların bulunmasının), belirli uzuv uzunlukları için dinamik çözümlere oldukça yakın olduğunu göstermiştir. Bu amaçla geometrik katılığı (yani non-lineerliği) içeren Timoshenko kiriş modeline dayalı bir sonlu eleman tekniği kullanılmış ve çeşitli sayısal örneklerle geometrik non-lineerlik, uç kütlesi ile normal ve teğetsel ivmelerin nodal yer değiştirmelere etkisi incelenmiştir.

Shigang ve arkadaşları (1997), hem uzuv hem de mafsalları esnek olan manipulatörlerin dinamik davranışını incelemek için yeni bir rotor kiriş elemanı geliştirmişlerdir. Enine deplasmanlarda beşinci dereceden (quintic), eksenelerde ise lineer polinomlar kullanılmıştır. Burada motor şaftlarının dönme açılarıyla uzuvların şaft eksenine etrafındaki dönme açıları mafsalsal elastikliğinden ötürü farklı olduğundan genelde nodal deplasmanlar ve mafsalsal koordinatlarına ilişkin iki denklem takımına bir üçüncü takım eklenmiştir. Sayısal örneklerle esneklikleri aynı olan manipulatörlerde özellikle artık (residual) titreşimlerde mafsalsal esnekliğinin baskın karakterde olduğu gösterilmiştir.

Shigang (1998), mafsalsal ve uzuvları esnek olan manipulatörlerde redundantlık (fazla serbestlik derecesine sahip olmaklık) özelliğinden yararlanarak uç efektöründe minimum deformasyona yol açacak tarzda hareket planlamasını ele almıştır. Buradaki düşünce tarzı; fazla serbestlik dereceli manipulatörlerde uç efektörünün yer koordinatlarını sabit bırakan farklı mafsalsal koordinatları kombinasyonları olmasıdır. Şöyle ki; öyle mafsalsal hareketleri seçilebilir ki, uç noktanın rijit hale karşılık gelen yörüngesi değişmemekle beraber, yörüngenin herhangi bir noktasındaki sehim minimum olsun. Bu bir tür optimizasyon problemi olup, teorik şeması verildikten sonra sayısal bir örnekle de desteklenmiştir. Ne var ki, optimize edilen ivme eğrilerinde impulslar vardır, ancak bunlar titreşimi azalttıklarından avantaj sağlamaktadırlar. Neticede esnek serbestlik derecesi üzerinde bir kısıtlama konulmaksızın, bu yöntemin fazla serbestlik derecesi 1(bir) olan esnek manipulatörlerde kullanılabileceği ifade edilmiştir.

Shigang (1998), bir önceki çalışmanın devamı kapsamında, artık titreşimlerin manipulatörün redundantlığından istifade ederek azaltılmasını ele almıştır. Burada, nominal hareket bittikten sonra uç efektörün devam eden titreşimlerinin genliğinin zayıflatılması (pratik olarak sınırlanması) amacıyla optimal mafsalsal hareketlerinin

tayinine yönelik önceki çalışmada verdiği algoritmayı kullanmış ve artık titreşimlerin bu suretle sınırlandırılabilceğini sayısal bir örnekle de göstermiştir.

Bu bölümün başlangıcında değinildiği gibi, sonlu eleman metoduna dayalı modellemelerle uğraşan çalışmalar genelde ya düzlemsel ve hacimsel elemanların tanımlanması, geometrik non-lineerlik, Coriolis ve benzeri etkilerin göz önüne alınması, elemanın tanımlanmasında Euler-Bernoulli veya Timoshenko kiriş teorilerinin kullanılması, sadece uzuv esnekliğini veya hem uzuv hem mafsalsal esnekliğini göz önüne alan kiriş elemanlarının tanımlanması ya da sonlu eleman metoduna dayanarak deformasyonları minimize etmeye yönelik algoritmaların kurulması gibi konuları ele almakta, bu hususlarda birbirlerinden az veya çok farklılık göstermektedirler.

2.2.2. Dinamik Modellemede Modal Açılım Modellerinin Kullanıldığı Çalışmalar:

Low ve Dubey (1986), çok uzuvlu elastik bir robotun dinamik modelini Hamilton prensibinden hareketle elde etmişler ve pertürbasyon tekniğiyle lineer olmayan etkileşimli denklemleri çözmüşlerdir. Aynı zamanda kısmi türevli diferansiyel denklemleri modların toplanması metoduyla ve modal analiz tekniğini kullanarak çözmüşlerdir. Bu aşamada, üç uzuvlu bir robot için önce kinematik denklemler yazılmış daha sonra uç noktanın konum vektörü oluşturulmuş ve bu vektörün zamana göre türevi alınarak hız vektörü elde edilmiştir. Potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri yazılmış ve Hamilton denklemlerinde yerine konulmuştur. Buradan bağlantı denklemleri, elastik hareket denklemleri ve sınır şartları elde edilmiştir. Daha sonra bu denklemleri rijit mafsalsal kabulü altında küçük elastik deformasyon teorileri kullanılarak modal analiz metoduyla çözmüşlerdir.

Low (1987), açık zincir mekanizmalı esnek robot manipulatörlerin ters dinamik problemlerinin çözümü için bir metod sunmuştur. Matematiksel model, Hamilton Prensibi kullanılarak sistematik bir şekilde türetilmiştir. Sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri, mafsalsal koordinatlarını ve elastik deplasmanları içeren genelleştirilmiş koordinatlara göre ifade edilmiştir. Kiriş tipi uzuv halinde kütle dağılımı ve elastikiyet göz önüne alınmıştır. Elastik çözümler seriye açma teoremi yardımıyla yapılmıştır. Ters kinematik problemler bölümde kinematik denklemleri basitleştirmek için rijit-mafsalsal kabulü kullanılmıştır. Bu, bize ters dinamik problemi de aynı şekilde ele alma imkanı

verir. Önerilen metodu açıklamak üzere bir uzvu rijit bir uzvu elastik olan iki uzuvlu bir manipulatör analiz edilmiştir.

Esnek manipulatörlerin dinamik modellenmesinde güncel hesaplama algoritmalarının hemen hepsi Lagrange denklemleri ve 4×4 boyutundaki transformasyon matrisleri kullanılarak türetilmiştir. Matrislerin özel yapılarından yararlanmak için özel amaçlı matris çarpım usulleri ve tekrarlı hesaplama prosedürleri kullanılsa bile, sonuçta elde edilen denklemler hesapsal olarak yeterli değildirler. King, Gourishankar ve Rink (1987), yaptıkları çalışmada uzuv kinematığının ifade edilmesinde, açısal hızları ve 3×3 dönme matrislerini kullanan daha etkili bir yaklaşım sunmuşlardır. Uzuv sapmalarının modellenmesi için kısaltılmış (kesilmiş) modal açılım kullanılmıştır. Rijit manipulatörler için Newton-Euler dinamiği formülasyonuna benzer, tekrarlı bir hesaplama prosedürü sunulmuştur. Lineer olmayan ters dinamik denklemlerin tamamı, keyfi sayıda esnek uzuvlu manipulatörler için tekrarlı formda hesaplanmıştır. Kinematik değerler kökten uca doğru yinelenerek hesaplanmış ve torklar, geri dönerken tekrardan hesaplanmıştır. Bu formülasyona dayalı, hızlı ve doğru bir simulasyon algoritması da sunulmuştur. Bu metodun, sayısal doğruluğu azaltmadan hesaplama hızında önemli miktarda iyileşme sağladığı gösterilmiştir. Bazı pratik uygulama problemleri ve metodun modelleme doğruluğu da tartışılmıştır.

Özellikle dönen uzuvlara sahip sistemlerde, merkezkaç normal kuvvetlerin eğilme rijitliğine etkisinin incelenmesi için geometrik non-lineer (en azından ikinci mertebeden) teorisinin kullanılması gerekmektedir. Simo ve Vu-Quoc (1987), tarafından yapılan çalışmada esnek uzuvlu sistemlerin dinamik geçici rejim analizinde non-lineer teorilerin rolünü incelenmektedir. Bu çalışmada, bir düzlemde dönen kiriş için tüm atalet kuvvetlerini ve enine-boyuna deformasyonlar arasında bağıllığı içeren hareket denklemleri çıkarılmakta ve bu denklemler sayısal bir örnek üzerinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmektedir. Burada sunulan muhtelif düzeydeki lineer olmayan formülasyonlar ayrıca plaklara da tatbik edilmektedir. Çalışmada, lineer (1.mertebe), 2.mertebe ve tam lineer olmayan teorilere ilişkin potansiyel enerji ifadeleri çıkarılmaktadır. Zira, bunların Hamilton veya Lagrange denklemlerinde yerine konmasıyla hareket denklemlerine geçilmektedir. Kinetik enerji ifadesi ise her üç hal için de aynı alınmaktadır.

Kane ve arkadaşları (1987) de hareketli bir gövdeye bağlı ankastre bir kirişin

dinamiğini incelemektedirler. Burada, kesiti keyfi ve malzeme özellikleri de noktadan noktaya değişen bir kirişin, boyuna, enlemesine (iki adet), burulma (üniform veya üniform olmayan), kayma deformasyonları ile kesit çarpılmasını göz önüne alacak şekilde hareket denklemleri çıkartılmaktadır. Bu çalışmada da kirişin merkezkaç kuvvetler tesiri altında dönmesini yansıtan bir formülasyonun gerekliliğine dikkat çekilmektedir. Bu durum göz önüne alınmadığı takdirde belirli şartlar altında yapılan dinamik analizlerin gerçeği yansıtmayacak tarzda iraksadığı belirtilmektedir.

Chang ve Hamilton (1991), elastik uzuvlu manipulatörlerin kinematik analizi için Eşdeğer Rijit Uzuv Sistemi adıyla bir metot (ERUS-ERLS) geliştirmişlerdir. ERUS'un manası, rijit cisim dinamiği ve yapısal dinamiği ayırmaktır. Esnek uzuv sisteminin global hareketi, geniş bir hareket ile onun üzerine oturtulmuş küçük bir harekete bölünmüştür. Geniş hareket ERUS ile temsil edilmekte olup küçük hareket ise ERUS'a göre sapmalardan ileri gelmektedir. Manipulatör hareketinin tamamı homojen transformasyonlar vasıtasıyla tanımlanmıştır. Chang ve Hamilton (1991), yaptıkları diğer bir çalışmada, geliştirdikleri bu kavrama dayalı olarak sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerini hesaplamakta, modal açılım yerine sonlu eleman yöntemini kullanarak Lagrange denklemlerini çıkarmaktadırlar. Kinematik analizle bulunan konum, hız ve ivme gibi mafsalsal büyüklükleri sehimlerin ve ardından da mafsalsal koordinatlarının değişiminin hesaplanmasında kullanılmaktadır.

Choura, Jayasuriya ve Medick (1991), dönen esnek bir kirişin düzlemsel hareketi için diferansiyel denklem takımı elde etmişlerdir. Kirişin lineer elastik olduğu ve motor tarafından sürülen rijit bir gövdeye bağlı olduğu kabul edilmiştir. İşlemlere, enine ve boyuna yerdeğiştirmelerin her ikisi de katılmıştır. Böyle bir sistemin kontrolü ile ilgili çalışmalarda eğilme ve uzamadan kaynaklanan bağ durumu genellikle ihmal edilmektedir. Kontrol çalışmaları için modellerin oluşturulmasında çoğunlukla kabul edilmiş mod yaklaşımı kullanılmaktadır. Burada, ankastre-serbest veya mafsalsal-serbest sınır şartları ile eğilme titreşimleri için Euler-Bernoulli kiriş denklemlerinin çözülmesiyle mod şekilleri belirlenir. Bu çalışmada geliştirilen denklemler, kontrol çalışmalarındaki modellerin bir kritik dönme hızına kadar uygun sonuçlar verdiğini ispatlamak için kullanılmışlardır. Bu denklemler özel olarak, sadece basit eğilme hali için oluşturulursa, düşük açısal hızlarda geçerli bir geribesleme kontrol stratejisi elde edilebilir. Bu, sonlu bir kritik zaman içerisinde, önceden belirlenmiş bir titreşim

modunun genel hareketten tamamen ayıklanmasına imkan veren bir açık-döngü kontrol stratejisidir.

Williams ve Turcic (1991), açık kinematik zincirler için iteratif bir ters kinematik prosedürü geliştirmişlerdir. Prosedür, öngörülen kontrol noktalarının konum, hız ve ivmelerini sağlayacak olan mafsal parametrelerini iteratif bir yöntemle bulmaya dayanmaktadır. Bu yöntemin iteratif pozisyon algoritması, denetim noktaları sayısına karşı hassastır. Mekanizmanın pozisyonunu belirlemek için gerekli olandan daha az sayıda kontrol noktası kullanılırsa çözüm tek olmayabilir. Gerekli sayıda veya gereğinden fazla sayıda nokta kullanıldığında algoritma, en küçük karelerle bulunacak çözüme yakınsamaktadır. Williams ve Turcic, ayrıca elastisite matrislerini tanımlayarak esnekliği algoritmaya dahil etmişlerdir. Burada ise, sanki-statik dinamik yüklerle sehim ve eğimler bulunarak buradan ters kinematik analiz yapılmakta ve düzeltilen mafsal parametreleri ile yeniden sehim ve eğimler hesaplanarak mafsal parametrelerine geçilmektedir. Bu işlem belirli bir hata limitinin altına düşünceye kadar tekrarlanmaktadır.

Xi ve Fenton (1994), bir önceki çalışmaya benzer iki adımlı bir yöntem geliştirmişlerdir. Prosedürün birinci aşamasında mafsal deplasmanlarındaki değişimler, konfigürasyon değişimine rağmen sehimler sabit tutularak hesaplanmakta, daha sonra sehimler yeni mafsal parametrelerinden hareketle hesaplanmaktadır. Bu şekilde güncelleştirilen mafsal deplasmanlarındaki değişimler belli bir hata sınırının altına indiğinde iterasyon sona erdirilmektedir. Bu çalışmanın Williams ve Turcic (1991)'den farkı, iteratif yöntemde kullanılacak deplasman denklemlerini çıkarırken sonlu dönmeler cebrinden yararlanmasıdır.

Woerkom (1995), esnek uzay manipülatörlerinin manevra davranışının incelenmesinde kullanılacak dinamik modelleri ele alan bir çalışma yapmıştır. Burada, esnek bir kirişin dönme davranışına ilişkin denklemler çıkartılırken enine hareketlerin boyuna etkilerinin göz önüne alınmasının gerekliliği vurgulanmakta ve kiriş tarafsız ekseninin gerçek uzamasında, enine deplasmanların tesiri de hesaba katılmaktadır. Çalışmada, sürekli ortam modelinden D'Alembert prensibi ve Lagrange yöntemiyle hareket denklemlerinin çıkartılması biçimsel olarak verilmekte ve ayrıca pertürbe edilmiş dinamik modelleme, hayali mafsal modellemesi ve rijit mafsal modellemesi de ele alınarak her bir modelleme ile bulunan sonuçlar dönen bir kiriş örneği üzerinde

gösterilmektedir.

Yu ve Elbestawi (1995), iki uzuvlu düzlemsel elastik bir manipulatörün geniş mafsallı hareketlerinin dinamik karakteristiklerini incelemişlerdir. Manipulatörün uzuv ve mafsallarının her ikisi de esnek olarak ele alınmıştır. Lagrangian formülasyonu ve kabul edilmiş modlar yaklaşımıyla, manipulatör için etraflı bir dinamik model çıkarılmışlar, uzuvların iç yapısal sönümlenmeleri, mafsallardaki kuru sürtünme ve tahrik dişlileri arasındaki boşlukları da hesaba katmışlardır. Çıkarılan dinamik denklemler, deneylerle doğrulanmış, nümerik simulasyonlar vasıtasıyla parametrik çalışmalar yapılarak parametrelerin sistem dinamiği üzerine etkileri incelenmiştir. Ancak bu çalışmada uzuvların aksel deplasmanları dikkate alınmamıştır.

Xi (1995), üç boyutlu esnek uzuvlu bir manipulatörde yörünge izleme problemini ele almış ve hesaplanmış torkların manipulatörün uç noktasının verilen bir yörüngeyi izlemesi için kullanılabileceği bir ters dinamik metot önermiştir. Bu metot, hareket denklemlerinin adım adım çözümüne dayanmakta olup deplasman, hız ve ivme gibi verilen mafsallı büyüklüklerinin başlangıç değerleri kullanılarak çok yakın bir konumdaki sehimler bulunmakta, daha sonra bu sehimlerden hareketle ilgili adımdaki mafsallı koordinatları hesaplanmakta ve nihayet bu hareketi sağlamak için gerekli torklar bulunmaktadır. Denklemlerin çözümünde Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır.

Esnek robotların etkili kinematik ve dinamik modellerinin teşkili için, Surdilovic ve Vukobratovic (1996), elastik robotik sistemlerin mekanik konfigürasyonlar ve kineto-elastodinamik etkilerle ilgili modelleme problemlerine daha genel bir yaklaşım sağlayan bir metot önermişlerdir. Bu model daha önceden mevcut prosedürlerle karşılaştırıldığında, hesaplama yeterliliğinde önemli ölçüde iyileşme sağladığı görülmüştür. Hem nümerik hesaplamalar için uygun tekrarlı bağlantılar, hem de sembolik model oluşumu için zemin sağlayan kompakt sembolik ifadeler türetilmiştir.

Geniş kullanım robotlarının yörünge planlamasında, elastik deformasyonların dinamik özelliği oldukça karmaşık bir probleme sebep olmaktadır. Kinematik şartların ötesinde, elemansal kinematik işlerin çözümleri sistem deformasyonlarını içeren karmaşık dinamik denklemlere de uygunluk göstermelidir. Surdilovic ve Vukobratovic (1996), yaptıkları çalışmada, esnek robotların yörünge sentezi için manipulatör uzuv esnekliğinden kaynaklanan pozisyon sapmalarının sanki-statik telafisi için uygun, komple bir algoritma sunmuşlardır. Bu yaklaşım, ikinci dereceden deformasyon terimlerini içeren lineer olmayan bir kinematik model üzerine kurulmuştur.

3. MANİPULATÖR KİNEMATİĞİ

3.1. Giriş

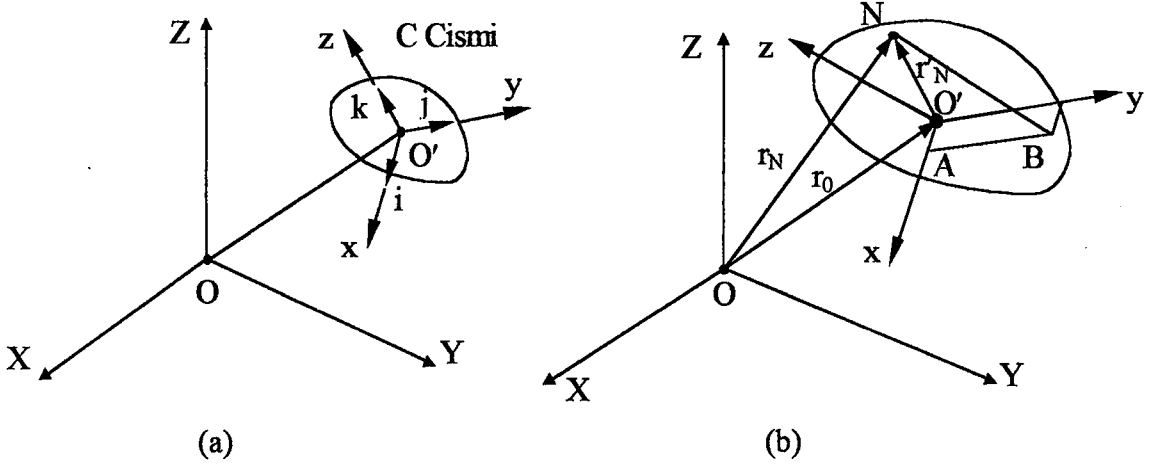
Robot manipulatörler açık kinematik zincire haiz mekanizmalardır. Kinematik zincir, mafsallarla birbirine bağlanmış “uzuv” adı verilen bir dizi rijit veya esnek cisimlerden meydana gelmektedir. Bir kinematik zincirde muayyen uzuvlar sadece bir adet başka uzva bağlanmış ise kinematik zincirin açık olduğu söylenir ve hangi uzvunun sabit tutulacağı belirlenmiş bir açık kinematik zincire veya mekanizmaya da manipulatör denir. Pratikte bir manipulatörde prizmatik (kayar) ve döner (revolüt) mafsallar kullanılır. Bu mafsallar bir serbestlik dereceli olduğundan manipulatördeki her bir mafsal sisteme bir serbestlik derecesi kazandırır. Neticede n mafsal ve n adet hareketli uzvu (veya biri sabit n+1 uzvu) olan bir manipulatörün serbestlik derecesi n dir. Mafsal ve uzuvlar sabit uzuvdan başlayarak numaralandırılırlar. Ekseriya sabit uzva 0, bundan en uzak uzva ise n sayısı izafe edilir. (i-1) nolu ve i nolu uzuvları birleştiren mafsal i nolu mafsal olur.

Manipulatör kinematigi, genel olarak manipulatörün hareketlerini ele alır. Pratikte her bir uzuv bir önceki uzva bağlı motorla tahrik edildiğinden uzuvların sıralı biçimde birbirlerine göre konum ve yönelimlerinin tanımlanması gerekir. Bu ise matematiksel olarak her bir uzva bir eksen takımı yerleştirilerek bu takımların birbirlerine göre konum ve yönelimlerinin tespiti demektir. Uzuvların birbirlerine göre vaziyetleri transformasyon matrisleri ile tarif edilebilir. Bundan sonraki alt bölümlerde sırasıyla bir cismin uzaydaki konum ve yönelimi, uzuvların birbirlerine göre durumunun tanımlanması ve transformasyon matrisleri kavramlarına değinilecektir.

3.2. Uzayda Bir Cismin Konum ve Yönelimi

Uzayda bulunan herhangi bir cismin konumu, cismin keyfi ama cisme göre sabit bir noktasının iş uzayına veya yere bağlı bir O-XYZ takımında ölçülen koordinatlarının verilmesiyle belli olur.

Şekil 3.1(a)'da verildiği gibi O-XYZ yere bağlı sabit koordinat sistemi, O' ise C cismi üzerindeki herhangi bir nokta olsun. Bu durumda, O' nün dolayısıyla da C cisminin O-XYZ koordinat sistemine göre konumu $\overline{OO'} = \vec{r}_0$ vektörüyle veya matris notasyonunda



Şekil 3.1. a) Cismin Uzaydaki Konum ve Yönelimi
b) Koordinat Transformasyonları

$$\{r_0\} = \{x_0 \ y_0 \ z_0\}^T \quad (3.1)$$

şeklinde \vec{r}_0 sütun vektörüyle tarif edilmiş olur. C cisminin yönelimini tanımlamak için O' noktasını orijin kabul eden ve cisme sabit bağlı bir O' -xyz koordinat eksenini ve bu eksenlere ait sırasıyla $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birim vektörlerini göz önüne almak gerekir. Her bir birim vektörün bileşenleri, aslında ait oldukları eksenin O-XYZ sabit takımına göre doğrultman kosinüsleridir. Sütunlarını bu üç birim vektörün bileşenlerinin oluşturduğu

$$[R] = [\{\vec{i}\} \{\vec{j}\} \{\vec{k}\}] \quad (3.2)$$

formundaki R matrisi cismin yönelimini tamamen ifade eder. \vec{i}, \vec{j} ve \vec{k} vektörleri birbirlerine dik ve ortogonal, aynı zamanda birim uzunlukta oldukları zaman ortonormal bir baz teşkil ederler ve bunların bileşenleriyle (3.2) deki gibi tanımlanan R matrisi de ortonormal bir matristir. Ortogonal matrislerin önemli bir özelliği

$$[R]^{-1} = [R]^T \quad (3.3)$$

olmasıdır. R yönelim matrisinin diğer bir tarzda ifadesi takip eden alt bölümde verilecektir.

3.3. Koordinat Transformasyonları

Bir manipulatörün dinamik analizi yapılacağı zaman tüm uzuv noktalarının yer, hız ve ivme vektörlerinin yere bağlı (temel=base) koordinat takımına izafe edilmesi lazımdır. Şu halde her uzvun bir önceki uzva göre yerleşimini (yerleşim=location, bu

sözcükle uzvun konum ve yönelimi kastedilmektedir) tarif eden transformasyon matrisleri oluşturulacak ve bunlar üzerinde gerçekleştirilecek cebrik işlemlerle her uzva ait noktaların sabit takıma göre yerleşimi saptanacaktır. Bir cismin bir referans takımına göre (bir başka cisme göre) konumu onun bir noktasının koordinatlarının verilmesi ve ayrıca bu cisme sabit bağlı üç eksenin yöneliminin tanımlanmasıyla belirlenebilmektedir. Kolaylık için cisme bağlı eksen takımının orijini olarak konumu tanımlamada kullanılan nokta seçilir. Bu durumda matematiksel manada uzuv noktalarının sabit uzva göre yer, hız ve ivme vektörlerinin belirlenmesi, bu uzuvlara bağlı koordinat takımlarında ölçülen bu büyüklüklerin koordinat transformasyonlarına tabi tutulması demektir.

Uzayda herhangi bir C cismine ait N noktasının koordinatları Şekil 3.1.(b)'de görüldüğü gibi sabit O-XYZ takımına göre,

$$\{r_N\} = \{X_N \ Y_N \ Z_N\}^T \quad (3.4)$$

sütun vektörüyle verilebileceği gibi, bizzat C cismine bağlı O-xyz koordinat takımına göre de,

$$\{r'_N\} = \{x_n \ y_n \ z_n\}^T \quad (3.5)$$

şeklinde ifade olunabilir. Bu iki farklı koordinatlar grubu arasındaki ilişki, Şekil 3.1.(b)'den de görülebileceği gibi

$$\vec{ON} = \vec{OO'} + \vec{O'A} + \vec{AB} + \vec{BN} \quad (3.6)$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned} \vec{OO'} &= \vec{r}_0 & \vec{ON} &= \vec{r}_N \\ \vec{OA} &= x_n \vec{i} & \vec{AB} &= y_n \vec{j} & \vec{BN} &= z_n \vec{k} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olduğuna dikkat edilirse,

$$\vec{r}_N = \vec{r}_0 + x_n \vec{i} + y_n \vec{j} + z_n \vec{k} \quad (3.8)$$

yahut matris çarpım kuralı kullanılarak, matris notasyonunda,

$$\{r_N\} = \{r_0\} + [\{i\} \{j\} \{k\}] [x_n \ y_n \ z_n]^T \quad (3.9)$$

veya

$$\{r_N\} = \{r_0\} + [R] \{r'_N\}^T \quad (3.10)$$

şeklinde bulunur. (3.10) bağıntısı koordinat transformasyonu ile bir cismin konum ve yönelimi arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Şimdi,

$$\{ \bar{r}_N \} = \{ X_n Y_n Z_n 1 \}^T \quad (3.11)$$

ve

$$\{ \bar{r}'_N \} = \{ x_n y_n z_n 1 \}^T \quad (3.12)$$

genişletilmiş sütun vektörleri tanımlanırsa (3.10) ifadesi,

$$\{ \bar{r}_N \} = \begin{bmatrix} R & r_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{ \bar{r}'_N \} \quad (3.13)$$

şeklinde homojen formda yazılabilir. Burada,

$$[A] = \begin{bmatrix} R & r_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ile verilen matris genişletilmiş transformasyon matrisi olup, cismin konum ve yönelimine ait bilgiyi bünyesinde toplamaktadır (Asada ve Slotine 1986).

Bir manipulatörde uzuvlara koordinat takımlarını standart bir tarzda yerleştirmek için Denavit ve Hartenberg'in geliştirdiği bir metot da mevcuttur. Bu tarzda seçilen koordinat takımlarının transformasyon matrislerine de Denavit-Hartenberg transformasyon matrisleri denmektedir. Bu metotta mafsalların hareket eksenleri (döner mafsalda dönme eksenini, kayar mafsalda öteleme doğrultusu) daima z eksenini olarak adlandırılmaktadır. Konuyla ilgili ayrıntılı bilgileri Asada veya Wolovich gibi yazarlara ait çeşitli robotik kitaplarında bulmak mümkündür.

3.4. Çok Uzuvlu Esnek Bir Manipulatörün Kinematiki

n serbestlik dereceli bir manipulatörde herhangi bir uzuv noktasının hız ve ivmesinin bulunabilmesi için uzuvların geometrik ölçüleri ve konum parametrelerine ilaveten aktuatörlerin sağladıkları açısal hız (n tane) ve açısal ivmelerinin de (n tane) bilinmesi gerekir. Tabiiyle bu şartlar düz (direkt) kinematik analizde geçerlidir.

Bu alt bölümde manipulatörün herhangi ardışık iki uzvu ele alınarak herhangi bir noktasının yer, hız ve ivme vektörleri bulunacaktır. Elde olunan sonuçlar uç efektöründen başlayıp sabit uzva doğru gidilerek genelleştirilebilir.

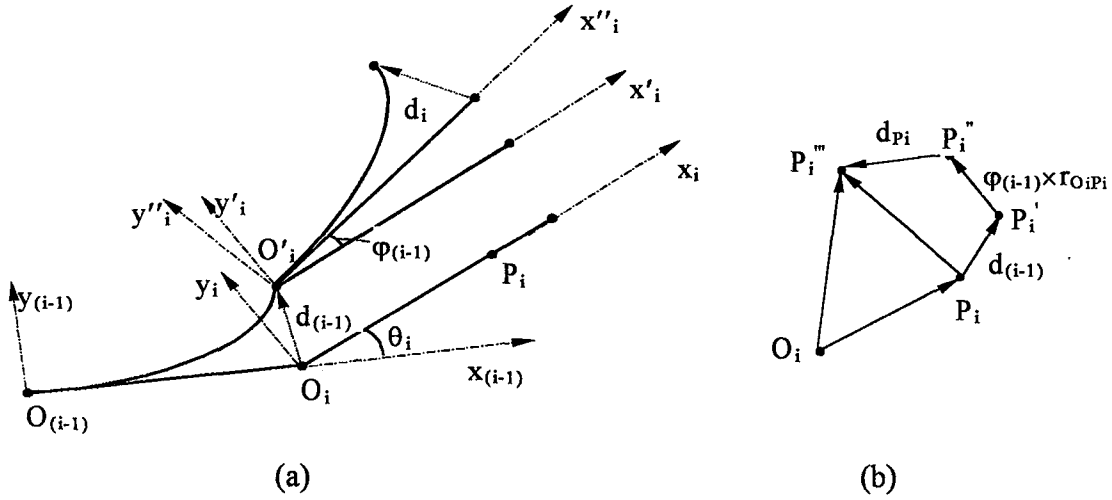
Hızların bulunuşunda iki farklı yol takip etmek mümkündür. Bunların birincisinde bir sürekli ortam olarak uzvun herhangi bir noktası göz önüne alınır ve bunun hız vektörü bulunur. Diğer bir yol, uzva bir giriş olarak bakmak ve girişlere ilişkin teorileri uygulamaktır. Bu durumda elastik eğri üzerindeki bir noktanın hızı

bulunur. Bu nokta elemanın ya ağırlık merkezi ya da kayma merkezidir. Kirişin diferansiyel kalınlıklı elemanının ağırlık merkezinin hızıyla ötelendiği ve bu merkez etrafında döndüğü kabul edilerek herhangi bir noktanın hızına geçilir. Bu iki farklı muhakeme uzvun kinetik enerjisi hesaplanırken de sürdürülebilir. Uzvun herhangi bir noktasının hızından hareket edilirse kinetik enerji öteleme kinetik enerjisi formunda hesaplanır. Kiriş sonsuz sayıda diferansiyel levhacıklar toplamı şeklinde düşünülürse bu kez kinetik enerji ötelenme ve dönme bileşenleri şeklinde hesaplanır.

Birinci yol izlenirse uzvun her noktasına ait elastik yer değiştirmelerin noktanın uzva bağlı koordinat takımındaki şekil değiştirmemiş haldeki koordinatlarının fonksiyonu olacağına dikkat edilmelidir. Terimlerine kolayca fiziki manalar atfedilecek hareket denklemlerine geçiş için ikinci yol daha pratiktir. Uzuvarın üniform kesitli doğrusal kirişler olduğu varsayılırsa gerek kesit ağırlık merkezlerini birleştiren eksen, gerekse kayma merkezlerini birleştiren eksenler doğrusal olduğundan bu koordinat takımının bir eksenine çakıştırılabilen ve bu durumda elastik yer değiştirmeler sadece bir konum koordinatıyla zamanın fonksiyonu olarak ifade olunabilmektedir.

Kiriş olarak göz önüne alınan uzuvlarda kesit dönmelerinin ifadesinde de iki farklı yol izlemek mümkündür. Birinci yaklaşım olarak, kesitin koordinat eksenleri etrafında sıralı sonlu dönmeler neticesinde bu yönelime ulaştığı göz önüne alınabilir. Bu durumda Euler açıları veya eşdeğeri açılar kullanılmaktadır. Ne var ki, bu dönmeler komutatif değildirler. Diğer bir yaklaşım dönmelerin çok küçük olduğudur. Bu durumda dönmeyi temsil eden matris antisimetrik bir matris haline gelir, bu ise sonsuz küçük dönmelerin vektör olması sonucundan başka bir şey değildir. Literatürde her iki yaklaşım da kullanılmaktadır. Burada da uzuvlara kirişlerle ilgili teori uygulanarak ikili bir uzuv grubunda yer, hız ve ivme vektörleri iki farklı tarzda elde edilecektir.

Şekil 3.2(a) daki gibi $(i-1)$ ve i numaralı ikili uzuv grubunu ele alalım. $O_{i-1}-x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ ve $O_i-x_i y_i z_i$ eksen takımları sırasıyla her iki uzva bağlanmıştır. Burada i uzvunun elastik eğrisi üzerinde bir P_i (generic) noktasının yer değişimi bulunacaktır. P_i nin toplam hareketi kısmi hareketlerin süperpozisyonu olarak ele alınabilir. Burada kesit dönmelerinin fevkalade küçük olduğu kabul edildiğinde dönme bir vektörel çarpımla (veya buna tekabül eden bir matris çarpımıyla) sağlanacaktır. P_i nin toplam hareketi şu unsurlardan oluşur (Low ve Dubey, 1986):



Şekil 3.2. a) Manipulatörün Ardışık İki Uzunluğunun Vektörel Gösterimi
b) i uzvu Üzerindeki Herhangi Bir Noktanın Konumu

- i uzvunun (i-1) uzvuna göre θ_i açısı kadar dönmelerinden kaynaklanan rijit cisim hareketi $(\vec{r}_{o_i p_i} = \overline{O_i P_i})$
- (i-1) inci uzvun uç noktası O_i nin elastik yer değiştirmesinden kaynaklanan ötelenme $(\overline{O_i O'_i} = \vec{d}_{o_i})$
- (i-1) inci uzvun uç kesitinin elastik dönmesinden kaynaklanan yer değiştirme $(\vec{\Phi}_{(i-1)} \times \vec{r}_{o_i p_i})$
- i inci uzvun elastik deformasyonundan kaynaklanan yer değiştirme (\vec{d}_{p_i})

Burada ilk üç yer değiştirme (i-1) uzvunun elastikiyetinin sonucudur. i uzvu rijit bile olsa bunların neticesinde uzayda yeni bir konum alır. \vec{d}_{p_i} ise bu yeni konuma göre ölçülmektedir. Şekil 3.2(b) de bu deplasmanlar gösterilmiştir. Şekil 3.2(a) dan

$$\vec{r}_{o_i p_i} = x_{o_i p_i} \vec{i}_i + y_{o_i p_i} \vec{j}_i + z_{o_i p_i} \vec{k}_i = \{r\}_{o_i p_i}^T \{e\}_i \quad (3.15)$$

yazılabilir. Burada,

$$\{r\}_{o_i p_i}^T = \{x_{o_i p_i} \ y_{o_i p_i} \ z_{o_i p_i}\} \quad (3.16)$$

ve

$$\{e\}_i = \begin{Bmatrix} i_i \\ j_i \\ k_i \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

olarak tanımlanmıştır. \vec{d}_{o_i} elastik yer değiştirmesinden sonra gelinen P_i' noktasının yer vektörü,

$$\vec{r}_{o_i P_i'} = \vec{d}_{o_i} + \vec{r}_{o_i P_i'} \quad (3.18)$$

olur. \vec{d}_{o_i} , $O_{i-1}-x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ takımındaki bileşenler cinsinden, u, v ve w ilgili noktanın ait olduğu uzva bağlı koordinat takımında, sırasıyla x, y, z doğrultularındaki elastik yer değiştirmelerini göstermek üzere,

$$\vec{d}_{o_i} = u_{o_i} \vec{i}_{(i-1)} + v_{o_i} \vec{j}_{(i-1)} + w_{o_i} \vec{k}_{(i-1)} = \{d\}_{o_i}^T \{e\}_{(i-1)} \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\{e\}_{i-1}$ (3.17)'dekine benzer manayı taşımaktadır. $\{d\}_{o_i}^T$ ise,

$$\{d\}_{o_i}^T = \{u_{o_i} \ v_{o_i} \ w_{o_i}\} \quad (3.20)$$

den ibarettir. $\vec{r}_{o_i P_i'}$ ise $\vec{r}_{o_i P_i}$ ile aynı formda kalır, zira $O'_i-x'_i y'_i z'_i$ takımı $O_i-x_i y_i z_i$ takımının ötelenmiş halidir ve birim vektörler aynı kalır. Bu husus göz önüne alınırsa (3.18) matris formunda,

$$\vec{r}_{o_i P_i'} = \{d\}_{o_i}^T \{e\}_{(i-1)} + \{r\}_{o_i P_i}^T \{e\}_i \quad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir.

Öte yandan yine (i-1). uzvun uç kesitindeki elastik küçük dönmelerden ötürü P_i' noktası P_i'' konumuna kayacaktır. Küçük dönmeler $\vec{\varphi}_{(i-1)}$ ile gösterilirse,

$$\vec{r}_{o_i P_i''} = \vec{r}_{o_i P_i'} + \vec{\varphi}_{(i-1)} \times \vec{r}_{o_i P_i'} \quad (3.22)$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{o_i P_i''} &= \vec{r}_{o_i O_i} + \vec{r}_{o_i P_i'} \\ &= \vec{d}_{o_i} + \vec{r}_{o_i P_i} + \vec{\varphi}_{(i-1)} \times \vec{r}_{o_i P_i} \end{aligned} \quad (3.23)$$

olacaktır. Burada,

$$\vec{\varphi}_{(i-1)} = \varphi_{x(i-1)} \vec{i}_i + \varphi_{y(i-1)} \vec{j}_i + \varphi_{z(i-1)} \vec{k}_i \quad (3.24)$$

olup, $O'_i-x'_i y'_i z'_i$ ile $O_i-x_i y_i z_i$ nin birim vektörleri öteleme nedeniyle benzer olduğundan

$$\vec{\varphi}_{(i-1)} = \varphi_{x(i-1)} \vec{i}_i + \varphi_{y(i-1)} \vec{j}_i + \varphi_{z(i-1)} \vec{k}_i = \{\varphi\}_{(i-1)}^T \{e\}_i \quad (3.25)$$

yazılabilir. Burada

$$\{\varphi\}_{i-1}^T = \{\varphi_{x(i-1)} \ \varphi_{y(i-1)} \ \varphi_{z(i-1)}\} \quad (3.26)$$

dir. $O''_i-x''_i y''_i z''_i$ ($O''_i=O'$) takımı $O'_i-x'_i y'_i z'_i$ takımının $\bar{\varphi}_{(i-1)}$ vektörü kadar küçük miktarda döndürülmesiyle elde edildiğinden $\{e\}_i''$ ve $\{e\}_i'$ bazları arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur:

$$\{e\}_i'' = [R(\bar{\varphi})]_{(i-1)} \{e\}_i'. \quad (3.27)$$

Burada $[R(\bar{\varphi})]_{(i-1)}$, $\bar{\varphi}_{(i-1)}$ dönmesini temsil eden matristir ve açık ifadesi

$$[R(\bar{\varphi})]_{i-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_{z(i-1)} & \varphi_{y(i-1)} \\ \varphi_{z(i-1)} & 1 & -\varphi_{x(i-1)} \\ -\varphi_{y(i-1)} & \varphi_{x(i-1)} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

şeklindedir. Bu matris genel kartezyen sonlu dönme matrisinden küçük açılar kabulüyle elde olunmuştur.

Son olarak P_i'' noktası bizzat i uzvunun elastik deformasyonu nedeniyle P_i''' ne gelir. P_i''' noktasının $O'_i-x''_i y''_i z''_i$ takımında yer vektörü,

$$\begin{aligned} \bar{r}_{o_i p_i}'' &= \bar{r}_{o_i p_i}' + \bar{r}_{p_i p_i}'' \\ &= \bar{r}_{o_i p_i}' + \bar{\varphi}_{(i-1)} \times \bar{r}_{o_i p_i}' + \bar{d}_{p_i} \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur. \bar{d}_{p_i} deplasmanı i uzvun deforme olmamış halinde bu uzva bağlı $O''_i-x''_i y''_i z''_i$ takımında tarif edildiğinden,

$$\begin{aligned} \bar{d}_{p_i} &= u_{p_i} \bar{i}_i' + v_{p_i} \bar{j}_i' + w_{p_i} \bar{k}_i' \\ &= \{d\}_{p_i}^T \{e\}_i'' = \{d\}_{p_i}^T [R(\bar{\varphi})]^{-1}_{(i-1)} \{e\}_i' \\ &= \{d\}_{p_i}^T [R(\bar{\varphi})]^{-1}_{(i-1)} \{e\}_i \end{aligned} \quad (3.30)$$

yazılabilir. Buna göre P_i''' noktasının O_i noktasına göre konum vektörü,

$$\begin{aligned} \bar{r}_{o_i p_i}''' &= \bar{r}_{o_i o_i}' + \bar{r}_{o_i p_i}'' \\ &= \bar{d}_{o_i} + \bar{r}_{o_i p_i}' + \bar{\varphi}_{(i-1)} \times \bar{r}_{o_i p_i}' + \bar{d}_{p_i} \end{aligned} \quad (3.31)$$

olmaktadır. Buradaki $\bar{\varphi}_{(i-1)} \times \bar{r}_{o_i p_i}'$ vektörel çarpımı,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{(i-1)} \times \bar{r}_{o_i p_i}' &= \begin{vmatrix} \bar{i}_i & \bar{j}_i & \bar{k}_i \\ \varphi_{x(i-1)} & \varphi_{y(i-1)} & \varphi_{z(i-1)} \\ x_{o_i p_i} & y_{o_i p_i} & z_{o_i p_i} \end{vmatrix} \\ &= \{r\}_{o_i p_i}^T \{[R(\bar{\varphi})] - I\}_{(i-1)}^T \{e\}_i \end{aligned} \quad (3.32)$$

olarak yazılabileceğinden (3.31) bağıntısı matris formunda,

$$\begin{aligned}
\{r\}_{o_i P_i}^T \{e\}_{(i-1)} &= \{d\}_{o_i}^T \{e\}_{(i-1)} + \{r\}_{o_i P_i}^T \{e\}_i \\
&+ \{r\}_{o_i P_i}^T \{[R(\bar{\varphi})] - I\}_{(i-1)}^T \{e\}_i \\
&+ \{d\}_{P_i}^T [R(\bar{\varphi})]^{-1}_{(i-1)} \{e\}_i
\end{aligned} \quad (3.33)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu aşamada deforme olmamış uzuvlara bağlı koordinat takımlarının bazıları arasında $[R(\theta)]_{(i-1)i}$ i. uzuvdan (i-1). uzva koordinat transformasyonu matrisini göstermek üzere,

$$\{e\}_{(i-1)} = [R(\theta)]_{(i-1)i} \{e\}_i \quad (3.34)$$

bağıntısı ithal edilirse (3.33) eşitliği,

$$\begin{aligned}
\{r\}_{o_i P_i}^T \{e\}_{(i-1)} &= \{d\}_{o_i}^T \{e\}_{(i-1)} \\
&+ \{r\}_{o_i P_i}^T [R(\bar{\varphi})]^T_{(i-1)} [R(\theta)]^{-1}_{(i-1)i} \{e\}_{(i-1)} \\
&+ \{d\}_{P_i}^T [R(\bar{\varphi})]^{-1}_{(i-1)} [R(\theta)]^{-1}_{(i-1)i} \{e\}_{(i-1)}
\end{aligned} \quad (3.35)$$

halini alır. Burada, $[R(\theta)]$ ve $[R(\varphi)]$ matrisleri, sütunları ortonormal ve dolayısıyla kendileri de ortonormal matrisler olduğundan (3.3) eşitliği gereğince

$$\begin{aligned}
[R(\theta)]^T &= [R(\theta)]^{-1} \quad \text{ve} \\
[R(\bar{\varphi})]^T &= [R(\bar{\varphi})]^{-1}
\end{aligned} \quad (3.36)$$

olup, (3.35) in her iki tarafında yer alan $\{e\}_{(i-1)}$ bazlarının katsayılarının eşitliği düşünülüp transpozları alınırsa,

$$\begin{aligned}
\{r\}_{o_i P_i}^T &= \{d\}_{o_i}^T + [R(\theta)]_{(i-1)i} [R(\bar{\varphi})]_{(i-1)} \{r\}_{o_i P_i} \\
&+ [R(\theta)]_{(i-1)i} [R(\bar{\varphi})]_{(i-1)} \{d\}_{P_i}
\end{aligned} \quad (3.37)$$

şeklinde skaler bileşenler arasındaki ilişki elde edilir. Böylece i uzvuna ait P_i noktasının son konumu, deforme olmamış (i-1) uzvunun uç noktasına göre ve bu uzva bağlı koordinat takımında tarif edilmektedir.

(3.37) çıkarılırken sadece i ve (i-1) uzuvlarının elastik deformasyonları göz önüne alınmıştır. Halbuki (i-1) uzvundan önceki uzuvlar da P_i noktasının deplasmanına katkıda bulunduğundan (3.31) ve (3.37) eşitliklerini aşağıdaki gibi genelleştirmek gerekmektedir:

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{o_i P_i} &= \bar{r}_{o_i P_i} + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{d}_{o_j} + \bar{d}_{P_i} \\
&+ \sum_{j=1}^{i-2} \bar{\varphi}_j \times \bar{r}_{o_{j+1} o_{j+2}} + \bar{\varphi}_{(i-1)} \times \bar{r}_{o_i P_i}
\end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
\{r\}_{O_i P_i}^T \{e\}_{(i-1)} &= \{r\}_{O_i P_i}^T \{e\}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \{d\}_{O_j}^T [R(\bar{\varphi})]_{(j-1)}^{-1} \{e\}_j \\
&+ \{d\}_{P_i} [R(\bar{\varphi})]_{(i-1)}^{-1} \{e\}_i \\
&+ \sum_{j=1}^{i-2} \{r\}_{O_{j+1} O_{j+2}} \{ [R(\bar{\varphi})] - I \}_j^T \{e\}_{j+1} \\
&+ \{r\}_{O_i P_i}^T \{ [R(\bar{\varphi})] - I \}_{(i-1)}^T \{e\}_i
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Kinetik enerji hesabında mutlak hız kullanıldığından P_i noktasının son konumunu gösteren vektörün mutlak (sabit) koordinat takımında tarif edilmesi gerekir. (3.39) ifadesinde uygun koordinat dönüşümleri yapıldığında P'''_i noktasının sabit koordinat takımının O_0 orijinine göre yer vektörü için,

$$\begin{aligned}
\{r\}_{O_0 P_i} &= \sum_{j=1}^{i-1} [R(\theta)]_{O_j} [R(\bar{\varphi})]_{j-1} \left(\{r\}_{O_j O_{j+1}} + \{d\}_j \right) \\
&+ [R(\theta)]_{O_i} [R(\varphi)]_{i-1} \left(\{r\}_{O_i P_i} + \{d\}_{P_i} \right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

bağıntısı elde olunur. Burada $[R(\theta)]_{O_i}$ ile i . uzvun sabit uzva göre toplam transformasyon matrisi gösterilmektedir. (3.40) bağıntısını daha sade formda yazmak için,

$$[R]_i = [R(\theta)]_{O_i} [R(\bar{\varphi})]_{i-1} \tag{3.41}$$

ve

$$\begin{aligned}
\{r\}_{O_i} &= \{r\}_{O_i O_{i+1}} + \{d\}_i \\
\{r\}_{P_i} &= \{r\}_{O_i P_i} + \{d\}_{P_i}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

olarak tanımlanırsa $\bar{r}_{O_0 P_i}'''$ yer vektörü,

$$\{r\}_{O_0 P_i}''' = \sum_{j=1}^{i-1} [R]_j \{r\}_{O_j} + [R]_i \{r\}_{P_i} \tag{3.43}$$

şeklinde yazılabilir. P''' yer vektörünü zamana göre bir ve iki kez türeterek ilgili noktanın hız ve ivme vektörlerinin bileşenleri matris formunda aşağıdaki gibi bulunurlar:

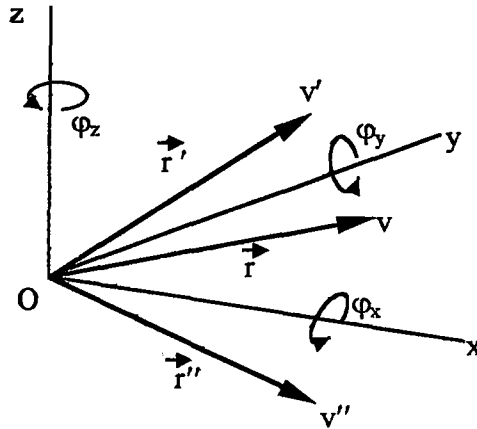
$$\begin{aligned}
\{v\}_{P_i} &= \sum_{j=1}^{i-1} [\dot{R}]_j \{r\}_{O_j} + \sum_{j=1}^{i-1} [R]_j \{\dot{r}\}_{O_j} \\
&+ [\dot{R}]_i \{r\}_{P_i} + [R]_i \{\dot{r}\}_{P_i}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
\{a\}_{p_i} &= \sum_{j=1}^{i-1} [\ddot{R}]_j \{f\}_{o_j} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} [\dot{R}]_j \{f\}_{o_j} \\
&+ \sum_{j=1}^{i-1} [R]_j \{f\}_{o_j} + [\ddot{R}]_i \{f\}_{p_i} \\
&+ 2 [\dot{R}]_i \{f\}_{p_i} + [R]_i \{f\}_{p_i}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

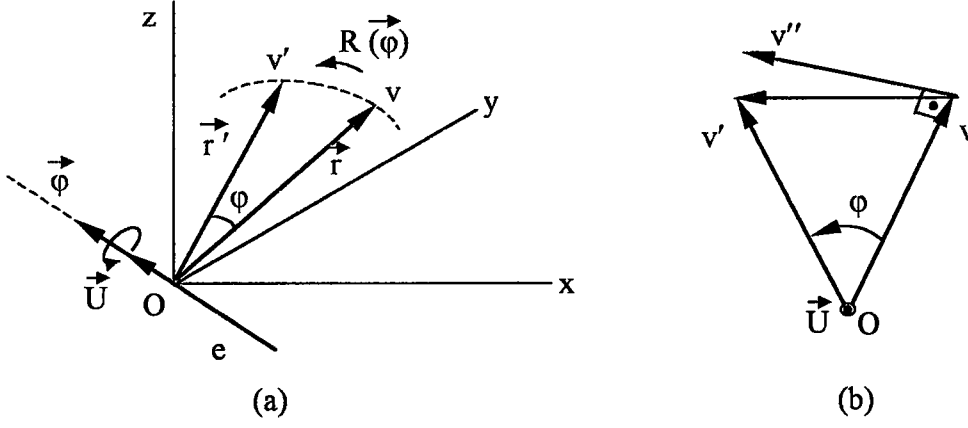
3.5. Kinematik Analizde Elastik Dönmelere İlişkin Bazı Hususlar

Önceki alt bölümde herhangi iki elastik uzuvdan gövdeye uzak olanın herhangi noktasının yer vektörünü tanımlarken önceki uzvun uç kesitinin dönmesi bir vektörle temsil edilmişti. Bilindiği gibi sonlu dönmeler vektör tabiatında olmayıp, komutatif değildirler. Dolayısıyla bir cismin farklı uç eksen etrafında belirli miktarlarda döndürülmesi sonucu alacağı son durum (yönelim), bu dönmelerin sırasına bağlıdır. Ancak sonsuz küçük dönmelerde sıranın önemi yoktur ve dolayısıyla bir vektörle temsil edilebilirler. Keza döndürme sıraları değiştirilerek elde olunan üç farklı dönme matrisi dönme açılarının çok küçük alınması yani $\cos \theta_i \cong 1$, $\sin \theta_i \cong \theta_i$ kabulü altında birbirlerinin aynı olurlar. Tabii teorik olarak θ_i ler yerine $d\theta_i$ alındığında tam manasıyla sonsuz küçük dönmeler temsil edilmiş olur.

Şekil 3.3. de x, y ve z eksenleri etrafında sırasıyla φ_x , φ_y ve φ_z dönmeleri yapılarak bir \vec{r} vektörü \vec{r}' pozisyonuna gelmiştir. Bu dönme R_{zyx} matrisi ile tanımlansın. Şayet sıra değiştirilseydi $\overline{Ov} = \vec{r}$ vektörü $\overline{Ov''} = \vec{r}''$ konumuna gelecekti.



Şekil 3.3. Sonlu ve Çok Küçük Dönmeler Arasındaki İlişki



Şekil 3.4. Çok Küçük Dönmelere Ait $\vec{\varphi}$ Vektörü ile $[R(\vec{\varphi})]$ Matrisi Arasındaki İlişki

Dönme miktarları sonsuz küçük (pratikte ise yukarıda bahsedilen yaklaşımlar geçerli olacak şekilde küçük) olduğunda \vec{r} vektörü her halükarda aynı \vec{r}' vektörüne dönüşecektir.

Şekil 3.4 (a) da sırasıyla herhangi φ_x , φ_y ve φ_z açılarıyla döndürülen bir cismin herhangi \vec{r} vektörünün aldığı yeni konum \vec{r}' ile gösterilmiştir. \vec{Ov} den \vec{Ov}' ne geçişi $[R(\vec{\varphi})]$ matrisi temsil etmektedir. Halbuki bu genel dönme, uzayda \vec{U} birim vektörüyle tanımlanan bir e eksenini etrafında $\vec{\varphi}$ kadarlık bir dönme şeklinde de tanımlanabilir. Şimdi,

$$\vec{\varphi} = \varphi \vec{U} = \varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k} \quad (3.46)$$

vektörü

$$\varphi = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} \quad (3.47)$$

ve

$$\vec{U} = \frac{\varphi_x}{\varphi} \vec{i} + \frac{\varphi_y}{\varphi} \vec{j} + \frac{\varphi_z}{\varphi} \vec{k} \quad (3.48)$$

olmak üzere tanımlansın. Şekil 3.4. (b)'de e ekseninden bakıldığında $\vec{\varphi} \times \vec{Ov}$ vektörel çarpımının sonucu olan \vec{vv}'' vektörü hem $\vec{\varphi}$ hem de şekildeki gibi \vec{Ov} ye dik olacaktır. Bu durumda

$$\vec{Ov}' \neq \vec{Ov} + \vec{vv}'' \quad (3.49)$$

olduğu aşikardır. Ancak φ_x , φ_y ve φ_z açıları çok küçükse $\overline{vv'} \cong \overline{vv''} = \overline{\varphi} \times \overline{Ov}$ olur.

Buna göre \overline{Ov} nin yeni konumu,

$$\overline{Ov'} = \overline{Ov} + \overline{\varphi} \times \overline{Ov} \quad (3.50)$$

ile bulunabilir. Halbuki matris formunda

$$\{\mathbf{r}\}_{Ov'} = [\mathbf{R}(\overline{\varphi})]\{\mathbf{r}\}_{Ov} \quad (3.51)$$

bağıntısı mevcuttur. Öte yandan herhangi bir vektör gibi $\overline{\varphi}$ de

$$\overline{\varphi} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} = [\varphi] \quad (3.52)$$

şeklinde bir antisimetrik matrisle temsil edilerek

$$\{\mathbf{r}\}_{Ov'} \cong \{\mathbf{r}\}_{Ov''} = [\varphi]\{\mathbf{r}\}_{Ov} \quad (3.53)$$

yazmak mümkündür. Ayrıca

$$\{\mathbf{r}\}_{Ov} = [\mathbf{I}]\{\mathbf{r}\}_{Ov} \quad (3.54)$$

olduğu hatırlanırsa

$$\{\mathbf{r}\}_{Ov'} = [\mathbf{R}(\overline{\varphi})]\{\mathbf{r}\}_{Ov} \cong [\mathbf{I}]\{\mathbf{r}\}_{Ov} + [\varphi]\{\mathbf{r}\}_{Ov} \quad (3.55)$$

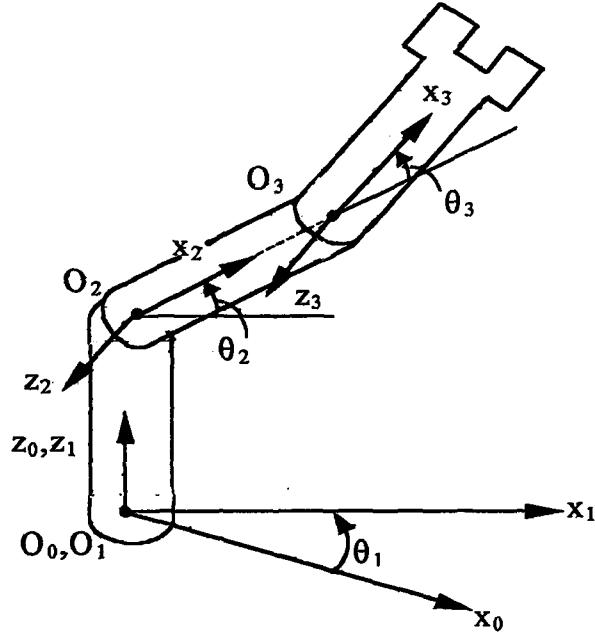
yazılabilir ve neticede

$$[\mathbf{R}(\overline{\varphi})] = [\mathbf{I}] + [\varphi] \quad (3.56)$$

olduğu bulunur. Bu suretle küçük dönme açıları halinde $\mathbf{R}(\overline{\varphi})$ dönme matrisinin birim matrisle $\overline{\varphi}$ küçük dönme vektörünü temsil eden matrisi toplayarak elde edileceği görülmektedir. $\mathbf{R}(\overline{\varphi})$ matrisinin genel dönme matrisinden, küçük açılar ve ikinci mertebeden küçük terimlerin ihmal ile de elde olunabileceği belirtilmişti. Ancak (3.56) daki gibi oluşturulan $\mathbf{R}(\overline{\varphi})$ matrisinde ortonormallik şartlarının yaklaşık olarak sağlanabileceği hatırlanmalıdır.

3.6. Üç Serbestlik Dereceli Manipulatörde Uygulama

Daha önce açıklanan yöntemle üç serbestlik dereceli bir manipulatörün herhangi uzuv noktasına ait yer, hız ve ivme vektörlerinin nasıl çıkarılabileceği burada verilecektir.



Şekil 3.5. Üç Serbestlik Dereceli Manipulatör

Şekil 3.5. de göz önüne alınan manipulatörün basit bir şeması, mafsallara Denavit-Hartenberg tarzında yerleştirilmiş koordinat takımlarıyla birlikte gösterilmiştir. Burada $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$ sabit ve 0 indisli uzva, $O_1 - X_1 Y_1 Z_1$ 1 numaralı uzva ve $O_2 - X_2 Y_2 Z_2$ ile $O_3 - X_3 Y_3 Z_3$ ise sırasıyla 2 ve 3 numaralı uzvulara bağlanmış koordinat takımlarıdır. Ayrıca i . uzvu ($i-1$). uzva bağlayan mafsal i . mafsaldır ve $O_i - X_i Y_i Z_i$ takımı i . mafsalda yer almaktadır. (Literatürde $O_i - X_i Y_i Z_i$ takımı kimi yazarlar (Asada gibi) tarafından ($i+1$). mafsala yerleştirilmektedir). Z_0 ve Z_1 eksenleri çakışmıştır. Z_1 ve Z_2 , O_2 de kesiştiğinden Denavit-Hartenberg usulüne göre X_2 ekseninin tanımlanması keyfidir. X_2 nin şekildeki gibi seçimi tekrar aynı notasyona uyumu sağlamaktadır. $\sin\theta_i = s_i$ ve $\cos\theta_i = c_i$ lerle gösterilmek üzere rijit manipulatöre ait dönme matrisleri sırasıyla

$$[R]_{1,0} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$[R]_{2,1} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \quad (3.57)$$

$$[R]_{3,2} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

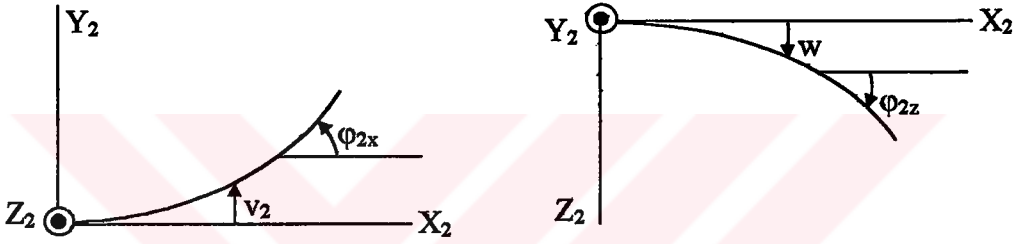
olmaktadır. Bu manipulatörde sadece 2 ve 3 uzuvlarının esnek olduğu farz edilirse 2 uzvunun O_3 deki kesitinin elastik dönmesinin – bunların küçük olduğu kabulüyle ve Şekil 3.6. göz önünde tutularak – $O_2 - X_2 Y_2 Z_2$ takımındaki bileşenleri

$$\varphi_{2x} = \varphi_2 \Big|_{x_2=L_2} = \phi_2(L_2, t) \quad (a)$$

$$\varphi_{2y} = \varphi_2 \Big|_{x_2=L_2} = -\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(L_2, t) \quad (b) \quad (3.58)$$

$$\varphi_{2z} = \varphi_2 \Big|_{x_2=L_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(L_2, t) \quad (c)$$

olur.



Şekil 3.6. Kesit Dönmeleri ve Elastik Şahimler Arasındaki Bağını

Burada ϕ_2 , v_2 ve w_2 ile 2 uzvunun sırasıyla burulma açısı ve Y_2 ile Z_2 doğrultusundaki şahimleri gösterilmektedir. Bu bileşenlerle $\vec{\varphi}_2(L_2, t)$ vektörü

$$\vec{\varphi}_2 = \phi_2(L_2, t) \vec{i}_2 + \left(-\frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right)_{x_2=L_2} \vec{j}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)_{x_2=L_2} \vec{k}_2 \quad (3.59)$$

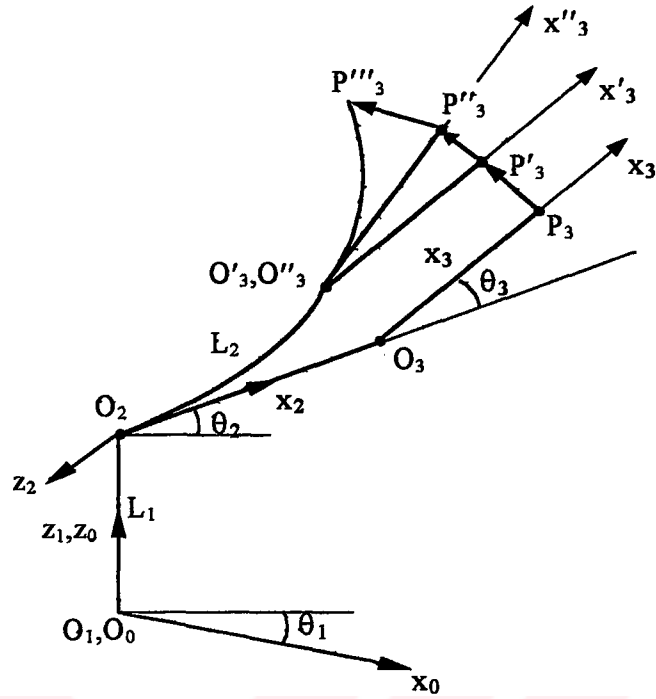
şeklinde ifade olunabilir. Ancak 3.4. alt bölümünde tanımlanan $\vec{\varphi}_2$ vektörüne geçmek

için (3.59) un $\{ \vec{i}_3 \ \vec{j}_3 \ \vec{k}_3 \}^T = \{ \mathbf{e} \}_3$ bazında ifadesi gerekir. Bu yapılırsa

$$\{ \varphi_2 \}_3 = [R(\theta)]_{3,2}^T \{ \varphi_2 \}_2 \quad (3.60)$$

şeklinde $\vec{\varphi}_2$ nin $\{ \mathbf{e} \}_3$ takımındaki bileşenlerini $\{ \mathbf{e} \}_2$ takımındaki bileşenlere bağlayan ifade elde edilmiş olur.

Şimdi de Şekil 3.7. deki basit tel model yardımıyla 3 uzvundaki herhangi bir noktanın $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$ takımına göre yer vektörü bulunacaktır.



Şekil 3.7. Üç Serbestlik Dereceli Manipulatörün Kinematik Analizde Kullanılan Tel Modeli

Şekilden,

$$\vec{O}_0\vec{P}_3''' = \vec{O}_0\vec{O}_1 + \vec{O}_1\vec{O}_2 + \vec{O}_2\vec{O}_3 + \vec{O}_3\vec{O}'_3 + \vec{O}'_3\vec{P}'_3 + \vec{P}'_3\vec{P}_3'' + \vec{P}_3''\vec{P}_3''' \quad (3.61)$$

yazılabilir. Burada,

$$\vec{O}_0\vec{O}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{O}_1\vec{O}_2 = L_1 \vec{k}_1 \quad (\Delta \{r\}_{O_1O_2})$$

$$\vec{O}_2\vec{O}_3 = L_2 \vec{k}_2 \quad (\Delta \{r\}_{O_2O_3})$$

$$\vec{O}_3\vec{O}'_3 = u_2(L_2, t) \vec{i}_2 + v_2(L_2, t) \vec{j}_2 + w_2(L_2, t) \vec{k}_2 \quad (\Delta \{d\}_2) \quad (3.62)$$

$$\vec{O}'_3\vec{P}'_3 = x_3 \vec{i}'_3 \quad (\Delta \{r\}_{P_3})$$

$$\vec{P}'_3\vec{P}_3'' = \vec{\omega}_2 \times x_3 \vec{i}'_3 \quad (\Delta \{[R(\vec{\omega})]_{B_2} - I\} \{r\}_{O_3P_3}^T)$$

$$\vec{P}_3''\vec{P}_3''' = u_3(x_3, t) \vec{i}_3'' + v_3(x_3, t) \vec{j}_3'' + w_3(x_3, t) \vec{k}_3'' \quad (\Delta \{d\}_{P_3})$$

Halbuki (3.27) gereğince

$$\begin{aligned}\{e\}_3' &= \{e\}_3 \\ \{e\}_3' &= [R(\bar{\varphi})]_{3,2} \{e\}_3''\end{aligned}\quad (3.63)$$

bağıntıları mevcut olduğundan vektörler sütun ve satır matrislerin çarpımları tarzında ifade olunmak üzere (3.61) bağıntısı tekrar yazılacak olursa

$$\begin{aligned}\{r\}_{O_0P_0}^T \{e\}_0 &= \{r\}_{O_1O_2}^T \{e\}_1 + \{r\}_{O_2O_3}^T \{e\}_2 \\ &+ \{d\}_2^T \{e\}_2 + \{r\}_{O_3P_3}^T \{e\}_3' \\ &+ \{\varphi_2\}^T \{e\}_3' \times \{r\}_{O_3P_3}^T \{e\}_3' + \{d\}_{P_3}^T \{e\}_3''\end{aligned}\quad (3.64)$$

ifadesi elde olunur. Burada vektörel çarpım matris formunda ifade edilerek dönüşüm matrisleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\{r\}_{O_0P_0}^T \{e\}_0 &= \{r\}_{O_1O_2}^T [R]_{1,0}^T \{e\}_0 + \{r\}_{O_2O_3}^T [R]_{2,0}^T \{e\}_0 \\ &+ \{d\}_2^T [R]_{2,0}^T \{e\}_0 + \{r\}_{O_3P_3}^T [R]_{3,0}^T \{e\}_0 \\ &+ \left\{ [R(\bar{\varphi})]_{3,2} - I \right\} \{r\}_{O_3P_3}^T [R]_{3,0}^T \{e\}_0 \\ &+ \{d\}_{P_3}^T [R(\bar{\varphi})]_{3,2}^T [R]_{3,0}^T \{e\}_0\end{aligned}\quad (3.65)$$

bulunur. Burada (3.41) gereğince

$$\begin{aligned}[R]_{2,0} &= [R]_{1,0} [R]_{2,1} \\ [R]_{3,0} &= [R]_{1,0} [R]_{2,1} [R]_{3,2}\end{aligned}\quad (3.66)$$

eşitlikleri ve (3.34) den ötürü mevcut

$$\{e\}_i = [R]_{j,i} \{e\}_j \quad (3.67)$$

bağıntılarından yararlanılmıştır. (3.65) in tüm terimleri $\{e\}_0$ bazında ifade olduğundan $\{e\}_0$ terimleri sadeleştirilir ve elde olunan yeni bağıntının transpozu alınır

$$\begin{aligned}\{r\}_{O_3P_3} &= [R]_{1,0} \{r\}_{O_1O_2} + [R]_{2,0} \{r\}_{O_2O_3} + [R]_{2,0} \{d\}_2 \\ &+ [R]_{3,0} [R(\bar{\varphi})]_{3,2} \{r\}_{O_3P_3} + [R]_{3,0} [R(\bar{\varphi})]_{3,2} \{d\}_3\end{aligned}\quad (3.68)$$

veya

$$\begin{aligned} \{r\}_{O_3P_3} &= [R]_{1,0} \{r\}_{O_1O_2} + [R]_{2,0} (\{r\}_{O_2O_3} + \{d\}_2) \\ &+ [R]_{3,0} [R(\bar{\varphi})]_{3,2} (\{r\}_{O_3P_3} + \{d\}_3) \end{aligned} \quad (3.69)$$

bağıntısı elde edilir. Bu ifadeye geçen $R_{2,0}$ ve $R_{3,0}$ matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$[R]_{2,0} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

(3.70)

$$[R]_{3,0} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 & s_1 \\ s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & -c_1 \\ s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (b)$$

(3.69) bağıntısında ayrıca $[R]_{3,0} [R(\bar{\varphi})]_{3,2}$ terimi dikkat çekmektedir. $[R(\bar{\varphi})]_{3,2}$ nin açık formu (3.28) de verilmişti. $[R]_{3,0}$ bu matrisle sağdan çarpılır ve çarpım matrisi \tilde{R} ile gösterilirse bunun \tilde{R}_{11} ve \tilde{R}_{12} elemanları

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{11} &= (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - \varphi_z (c_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 c_3) - \varphi_y s_1 \\ \tilde{R}_{12} &= -\varphi_z (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - (c_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 c_3) + \varphi_x s_1 \end{aligned} \quad (3.71)$$

şeklinde dir. Burada \tilde{R}_{11} in sağ tarafındaki ilk parantez $c_{\varphi_z} = \cos \varphi_z (\cong 1)$ ve ikinci parantez φ_z yerine $s_{\varphi_z} = \sin \varphi_z (\cong \varphi_z)$ çarpılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\tilde{R}_{11} = c_1 c_{(2+3+\varphi_z)} - \varphi_y s_1 \quad (3.72)$$

benzer tarzda \tilde{R}_{12} nin ilk parantezi φ_z yerine $\sin \varphi_z$ ve ikincisi $\cos \varphi_z$ ile çarpılır ve işlemler yapılırsa

$$\tilde{R}_{12} = -c_1 s_{(2+3+\varphi_z)} + \varphi_x s_1 \quad (3.73)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} c_{(2+3+\varphi_z)} &= \cos(\theta_2 + \theta_3 + \varphi_z) \\ s_{(2+3+\varphi_z)} &= \sin(\theta_2 + \theta_3 + \varphi_z) \end{aligned} \quad (3.74)$$

anlamına gelmektedir. Bu suretle \tilde{R} matrisinin formu basitleştirilmektedir. Ancak bu tarzda bir basitleştirme $\bar{\varphi}_z$ vektörü bileşenlerinin çok küçük olması halinde geçerlidir.

Büyük dönmeler için sonlu dönme matrislerinin kullanılması ve dönme sıralarının önceden tanımlanması gerektiği unutulmamalıdır.

Daha önce (3.44) ile verilen hız bağıntısında matrislerin türevleri yer almaktaydı. Burada bu türevlerin anlamlarına da kısaca değinilecektir.

Ele alınan örnek manipulatörde $[R]_{1,0}$ matrisinin zamana göre türevi

$$\begin{aligned} [\dot{R}]_{1,0} &= \begin{bmatrix} -s_1 \dot{\theta}_1 & -c_1 \dot{\theta}_1 & 0 \\ c_1 \dot{\theta}_1 & s_1 \dot{\theta}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [R]_{1,0} [\dot{\theta}_1] \end{aligned} \quad (3.75)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin en sağındaki matrisin $O_1-X_1Y_1Z_1$ takımında $\dot{\theta}_1$ açılal hızının vektörel ifadesini temsil ettiği görülmektedir. Bu durumda $[\dot{R}]_{1,0}$ matrisi 1 uzvuna ait herhangi bir $\vec{r}_1 = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1$ yer vektörünü temsilen $\{r\}_1$ sütun vektörüyle çarpıldığında

$$[\dot{R}]_{1,0} \{r\}_1 = [R]_{1,0} [\theta]_1 \{r\}_1 \quad (3.76)$$

bağıntısı gereğince $O_1-X_1Y_1Z_1$ takımında yapılan $\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$ ($\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{k}_1$) vektörel çarpımıyla bulunan hız vektörünün $O_0-X_0Y_0Z_0$ sabit takımındaki bileşenlerini vermektedir. $[\dot{R}]_{2,0}$ için

$$\begin{aligned} [\dot{R}]_{2,0} &= \{[R]_{1,0} [R]_{2,1}\} = \{[\dot{R}]_{1,0} [R]_{2,1} + [R]_{1,0} [\dot{R}]_{2,1}\} \\ &= [R]_{1,0} [\theta]_1 [R]_{2,1} + [R]_{1,0} [R]_{2,1} [\theta]_2 \end{aligned} \quad (3.77)$$

bulunur. $O_2-X_2Y_2Z_2$ takımında tanımlanan $\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$ vektörünün yine sabit takımdaki bileşenleri bu bağıntıyla hesaplanmaktadır. Benzer tarzda

$$\begin{aligned} [\dot{R}]_{3,0} &= [R]_{1,0} [R]_{2,1} [R]_{3,2} \\ &= \{[\dot{R}]_{1,0} [R]_{2,1} [R]_{3,2} + [R]_{1,0} [\dot{R}]_{2,1} [R]_{3,2} + [R]_{1,0} [R]_{2,1} [\dot{R}]_{3,2}\} \\ &= \{[R]_{1,0} [\theta]_1 [R]_{2,1} [R]_{3,2} + [R]_{1,0} [R]_{2,1} [\theta]_2 [R]_{3,2} + [R]_{1,0} [R]_{2,1} [R]_{3,2} [\theta]_3\} \end{aligned} \quad (3.78)$$

olacağı görülmektedir. Burada da son terim $O_3-X_3Y_3Z_3$ takımında verilen $\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3$ vektörünün sabit takımdaki bileşenlerini vermektedir.

Şimdi $[R]$ matrislerinin ikinci türevleri incelenecek olursa, örneğin $[R]_{1,0}$ matrisinin ikinci türevi

$$\begin{aligned}
[\ddot{\mathbf{R}}]_{1,0} &= [[\dot{\mathbf{R}}]_{1,0}]^* = [[\mathbf{R}]_{1,0}[\dot{\theta}]_1]^* = [\dot{\mathbf{R}}]_{1,0}[\dot{\theta}]_1 + [\mathbf{R}]_{1,0}[\ddot{\theta}]_1 \\
&= [\mathbf{R}]_{1,0}[\dot{\theta}]_1[\dot{\theta}]_1 + [\mathbf{R}]_{1,0}[\ddot{\theta}]_1
\end{aligned} \tag{3.79}$$

olarak bulunur. Buradan $[\ddot{\mathbf{R}}]$ matrislerinin her bir uzvun kendi koordinat takımında verilmiş olan bir önceki uzva göre izafi hareketine (ki bunlar dönme hareketleridir) ait açısal ivme ve merkezil ivme büyüklüklerini bünyesinde topladığı anlaşılmaktadır. Buna göre 1 nolu uzvun herhangi bir noktasına ait vektörü (sütun matris anlamında) $[\ddot{\mathbf{R}}]_{1,0}$ ile çarpmak $\dot{\theta}_1 \bar{\mathbf{k}}_1 = \bar{\omega}_1$ hızı ve $\ddot{\theta}_1 \bar{\mathbf{k}}_1 = \bar{\alpha}_1$ açısal ivmesi ile dönen 1 uzvunun o noktasının bu dönmeden kaynaklanan ivme bileşenlerini sabit koordinatlarda ifade etmek demektir. Diğer bir deyişle $[\mathbf{R}]_{1,0}[\dot{\theta}]_1[\dot{\theta}]_1 \{:\}$ çarpımı $\bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times (\dots))$ işlemine $[\mathbf{R}]_{1,0}[\ddot{\theta}]_1 \{:\}$ çarpımı ise $\bar{\alpha}_1 \times (\dots)$ işlemine tekabül etmektedir.

4. MANİPULATÖR DİNAMIĞI

4.1. Giriş

Bir manipulatörün dinamik analiz ve kontrolü için atılacak ilk adım dinamik modelin çıkarılmasıdır. Dinamik modelin çıkarılmasından kastedilen husus, manipulatörü oluşturan uzuvlar ve diğer unsurlar (mafsallar, motorlar, aktarma organları vs) için işletme şartları altında geçerliliğini muhafaza edecek makul kabullerle ikameler yapmak (örneğin uzuvları kiriş gibi, motorları duruma göre konsantre tekil kütleler gibi düşünmek) suretiyle yaklaşık bir fiziksel yapı oluşturmak ve bunun hareket denklemlerini yani sistemin matematiksel modelini kurmaktır. Dolayısıyla herhangi bir dinamik –veya matematiksel– modelin hangi kabuller altında kurulduğu büyük önem arz eder.

Herhangi bir tarzda eşdeğer fiziksel model oluşturulduktan sonra bununla ilgili hareket denklemlerinin çıkarılmasında da mekanikteki çeşitli ilke ve kanunlardan ve bunlara dayalı çıkarım yöntemlerinden yararlanılabilir. Manipulatör modellemesinde kullanılan yöntemin başarısı aşağıdaki talepleri ne oranda karşıladığına bağlıdır. Bu talepler fiziksel model, hareket denklemlerinin yapısı ve kapsamı, nümerik veya analitik çözüm algoritmalarının tipiyle alakalı olup, şöyle sıralanabilir:

- Hareket denklemlerinin çıkarılışında kullanılan yöntem pek karmaşık olmayıp, kolay formüle edilmelidir.
- Fiziksel eşdeğer modelden çıkarılan hareket denklemlerinin çözümleri gerçek sistem davranışını yansıtmalıdır.
- Sistem denklemlerinin yapısı bilgisayar kullanım süresini ve dolayısıyla maliyetini azaltacak, simulasyon hızını artıracak tarzda hızlı çözülebilir bir algoritmaya müsait olmalıdır.
- Hareket denklemleri düz (direct) ve ters (inverse) problemler için kullanılabilmelidir; yani hareketler verildiğinde motor momentleri ve motor momentleri verildiğinde hareketler tayin edilebilmelidir.
- Model mümkün mertebe genel olmalıdır. Giriş olarak sadece sistem parametrelerinin verilmesi yeterli olmalıdır.

- Model, sistemin tüm kısıtlarını göz önüne almalıdır.

Bir manipulatörün hareket denklemlerinin çıkarılmasında Lagrange-Euler, Newton, D'Alembert, Hamilton ilkelerine dayanan yöntemler daha sık kullanılmaktadır. Az sayıda da olsa Kane ve Gibbs-Appel denklemlerinin kullanıldığı çalışmalar da vardır. Hamilton ilkesi hareket denklemlerini olası sınır şartlarıyla birlikte verdiği için daha etkin görünmektedir. Ancak konuya ilişkin çalışmaların ekseriyetinde Lagrange-Euler ve Newton formülasyonları kullanılmaktadır. Bununla birlikte anılan yöntemler kendi içlerinde iki ana gruba toplanabilir: Bunlardan Newton ve D'Alembert'in dinamik denge prensibine dayalı formülasyonlar kuvvet, hareket miktarı vb. vektörel büyüklükleri kullanmakta, Lagrange-Euler, Lagrange anlamında D'Alembert, Rekürsif Lagrange, Hamilton ilkelerine dayalı formülasyonlarla Kane ve Gibbs-Appel denklemleri, iş ve enerji gibi skaler büyüklüklere dayanmaktadır. Burada da Lagrange-Euler ve Newton formülasyonları ele alınacak ve formülasyon sırasında göz önünde tutulması gerekli hususlar irdelenerek hareket denklemleri çıkarılacaktır.

4.2. Harekete Ait Lagrange-Euler Denklemlerinin Çıkarılması

Klasik ve analitik mekanikle ilgili başvuru eserlerinde ayrıntılı bilgi edinmek mümkün olmakla birlikte burada mekaniğin varyasyonel ilkelerinden olan Hamilton ilkesiyle Lagrange-Euler denklemleri arasındaki ilişkiye kısaca değinilecektir. Bilindiği gibi genelleştirilmiş Hamilton ilkesi matematiksel olarak,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = 0 \quad (a)$$

veya

(4.1)

$$\int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt : \text{extremum} \quad (b)$$

şeklinde ifade olunmaktadır. Bu, herhangi bir cismin (veya cisimler topluluğunun) kendine etkiyen kuvvetler tesirinde (4.1.b) integralini ekstremum (özel olarak minimum) yapacak tarzda veya (4.1.b) integralinin varyasyonunu sıfır kılacak tarzda bir yörünge

izlediğini söylemekle eşdeğerdir. Burada T kinetik enerjiyi, W ise sisteme etkiyen korunumlu olsun, olmasın tüm dış kuvvet ve momentlerin sistem üzerindeki işini gösterir (Bazen $-W$ ye dış kuvvetlerin potansiyeli de denir.). δT ve δW ise kinetik enerji ve işin varyasyonu adını almakta olup, cismin mevcut yörünge yerine bunun sonsuz yakın komşuluğunda bir yörüngeye zaman değişmeksizin sıçraması halinde – ki buna virtuel deplasman denir – kinetik enerjideki değişimi ve dış kuvvetlerin yaptığı virtuel işi temsil etmektedirler. Dış kuvvetler korunumlu ve korunumsuz olarak ikiye ayrılırsa bunların yapmış olduğu virtuel işler de sırasıyla δW_k ve δW_{kz} gösterildiğinde

$$\delta W = \delta W_k + \delta W_{kz} \quad (4.2)$$

olacağı açıktır. Halbuki korunumlu kuvvetlerin virtuel işi ile sistemin potansiyel fonksiyonu V arasında,

$$\delta W_k = -\delta V \quad (4.3)$$

ilişkisi olduğundan (4.1.a) bağıntısı,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{kz}) dt = 0 \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Şayet korunumsuz kuvvetler yoksa daima $\delta W_{kz}=0$ olduğundan (4.4) bağıntısı,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (4.5)$$

şekline girer ki bu korunumlu sistemler için Hamilton ilkesidir. Burada L sistemin Lagrangianı olup,

$$L = T - V \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Gerek bir varyasyon problemi olarak Hamilton prensibinden varyasyon hesabının kuralları kullanılarak ulaşılan Lagrange-Euler denklemleri, gerekse Lagrange anlamında D'Alembert prensibiyle çıkarılan Lagrange denklemleri (ki bu denklemler özdeştir) koordinat takımlarından bağımsız denklem formlarına sahiptirler. Dolayısıyla incelenen mekanik sistemin konum koordinatlarının kartezyen, silindirik veya küresel koordinat

takımları haricinde tanımlanmış olmasının mahzuru yoktur. Bu nedenle Lagrange mekaniğinde genelleştirilmiş koordinatlar kavramı kullanılır ve geleneksel olarak q_1, q_2, \dots sembolleriyle gösterilirler. Genelleştirilmiş koordinatlar bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olabilirler. Elastik uzuvlu sistemlerin analizinde bu bağımsız değişkenler zaman ve incelenen noktanın örneğin deformasyondan önceki konum koordinatlarıdır. Netice itibariyle herhangi bir mekanik sistemin Lagrangianı N_q adet q_i bağımlı değişkenleriyle (genelleştirilmiş koordinatlar) N_p adet p_j bağımsız değişkenin fonksiyonuysa bir varyasyon problemi olması sebebiyle (4.4) ile tanımlanan probleme ait diferansiyel denklemler takımı aşağıdaki gibi elde olunur:

$$\sum_{j=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{n_l} \sum_{m=1}^{n_m} (-1)^{l+m} \frac{\partial^{l+m}}{\partial p_j^l \partial p_k^m} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^{l+m} q_i}{\partial p_j^l \partial p_k^m} \right)} \right] = Q_i \quad i = 1, \dots, N_q \quad (4.7)$$

Burada Q_i , i . genelleştirilmiş koordinata ait genelleştirilmiş kuvvettir.

Esnek uzuvlu manipulatörlerin Lagrange-Euler hareket denklemlerini çıkartırken tasavvuru kolay olduğundan uzva bağlı koordinat takımında tanımlanmış elastik deplasmanların genelleştirilmiş koordinatlar olarak kullanılması yaygındır. Bağımsız koordinatlar olarak uzvun herhangi bir andaki hali, şekil değiştirmemiş hale referans edilecekse, bu ilk halde uzuv noktalarının konum koordinatları ve ayrıca zaman söz konusudur. Hareketin gözlemlendiği koordinat takımları aynı seçilirse Lagrange denklemleri ile Newton denklemleri aynı formda çıkar. Tabii her iki çıkarım yönteminde aynı kabuller yapılmış olmalıdır.

Hareket denklemleri, lineer veya nonlineer bağı denklemler şeklinde ortaya çıkmaktadır. Bu durum incelenen sistemde oluşan deformasyonların mertebesiyle ilgilidir. Büyük sehimler ve kesit dönmeleri mevcutsa yer değiştirmelerle uzama oranları ilişkisi nonlineerdir. Keza bu durumda kesit dönmeleri Bölüm 3 de verilen yöntemle tasvir edilemez ve sonlu dönme matrislerine gerek vardır. Hareket denklemlerinin çıkarılmasındaki yaklaşımlar,

- a) Büyük deformasyon ve büyük dönme açıları
- b) Küçük deformasyonlar ve büyük dönme açıları

- c) Küçük deformasyonlar ve orta düzeyde dönmeler
- d) Klasik lineer teori

şeklinde sıralanabilir (Sawy ve ark. 1993).

Dikkat edilecek diğer hususlardan biri aksel deformasyonlar büyüdükçe matematiksel eğrilik bağıntısının fiziksel eğrilikten sapmasıdır (Hodges 1984). Ayrıca bir kirişin O-xyz takımında x eksenini doğrultusundaki yer değiştirmelerinin y ve z eksenleri doğrultusundaki enine yer değiştirmelerle ilişkili olduğu unutulmamalıdır. Bu husus göz önüne alınmadığında modal serilerle nümerik çözümler yanlış sonuçlara sevk etmektedir.

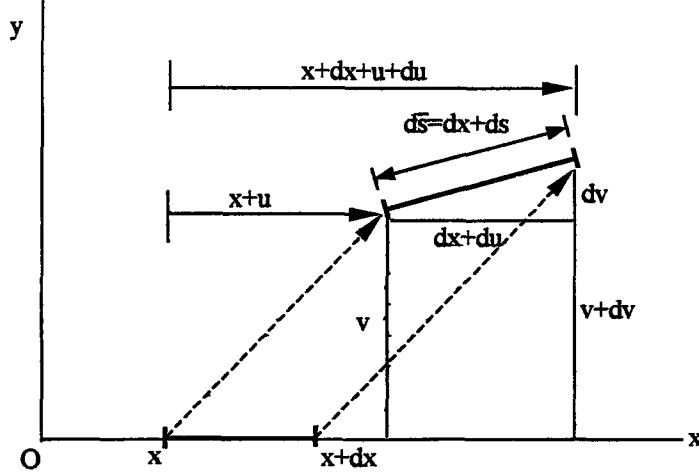
4.3. Kinetik ve Potansiyel Enerjilerin Hesabı

Lagrange yönteminde kinetik ve potansiyel enerjilerin ifadesi önem arz eder. Bir manipulatörde herhangi i uzvunun kinetik enerjisi

$$T_i = \iiint_{(i \text{ uzvu})} \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \, dm \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir. Euler-Bernoulli kiriş hipotezi kullanıldığında bu integrali ötelenme ve dönme kinetik enerjisi bileşenlerine ayırarak yazmak da mümkündür. i. uzvun sistemin potansiyel enerjisine katkısı ise ağırlık ve iç kuvvetlerin işleri üzerinden olacaktır. Ağırlık doğrultusuna dik düzlemde çalışan bir manipulatörde ağırlığın potansiyeli ihmal edilecek düzeyde olmaktadır. i. uzva bağlı motor ve diğer mekanik birimlerin kinetik enerjisi de (4.8) bağıntısına dahil edilebilecek olmasına karşın bu parçaların kinetik enerjilerinin ayrıca hesaplanması özel durum incelemelerinde kolaylık sağlamaktadır.

Mukavemetteki Euler-Bernoulli kiriş hipotezinin kullanılmasında da iki yol izlenebilir. Bunlardan birisi kirişin herhangi bir noktasının yer vektörünü yazıp çarpılmayı ihmal ederek bunun zamana göre türevini almak suretiyle hızı bulmak, daha sonra bu hız ifadesini (4.8) kinetik enerji ifadesinde yerine koyarak integralleri icra etmektir (Choura ve ark. 1991). Diğer bir yol ise kirişin kesit ağırlık merkezleri veya genel halde kesme (kayma) merkezlerini birleştiren elastik eğrinin her noktasının hareketiyle ötelenen ve bu nokta etrafında dönen sonsuz küçük kalınlıkta ince rijit levhalardan oluştuğunu varsayıp (4.8) ifadesini iki parçaya bölerek hesaplamaktır (Kane 1987).



Şekil 4.1. Herhangi Bir dx Elemanının t Anındaki Durumu

Şekil 4.1 de kiriş üzerindeki herhangi bir dx elemanının bir t anındaki durumu gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, x kesitinin (daha doğru bir ifadeyle göz önüne alınan kesitin ağırlık merkezi veya kayma merkezinin) herhangi bir t anında cisme bağlı O-xyz koordinat takımının x eksenini doğrultusundaki deplasmanı u ve y eksenini doğrultusundaki deplasmanı v olsun. Burada, v yi enine veya transversal deplasman olarak adlandırmak uygun olduğu halde, u yu boyuna veya longitudinal deplasman diye adlandırmak genelde doğru olmaz. Çünkü, kesitin x eksenini doğrultusundaki yer değişimi u ile kesit eksenini doğrultusundaki yer değişimi s nin her zaman için birbirlerine eşit olduğu söylenemez. Kiriş eksenini doğrultusunda herhangi bir şekil değiştirme olmasa bile sadece enine deplasmanların varlığı bile u deplasmanına yol açabilmektedir. Bu nedenle, herhangi bir kesitin aksenal s ve enine v deplasmanlarıyla u deplasmanı arasındaki ilişkinin incelenmesi gerekmektedir.

Şekil yardımıyla

$$d\bar{s}^2 = (dx + ds)^2 = (dx + du)^2 + dv^2 \quad (4.9)$$

veya

$$d\bar{s} = dx + ds = (dx + du) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v / \partial x}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \right)^2} \quad (4.10)$$

yazılabilir. İncelenen eleman eğilmeye göre tarafsız eksen olsun. Bu ekseninde x civarındaki

uzama oranı için

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{d\bar{s} - dx}{dx} \Big|_{t:sbt} = \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} - 1 = \frac{\partial s}{\partial x} \\ &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v/\partial x}{1 + \partial u/\partial x}\right)^2} - 1\end{aligned}\quad (4.11)$$

yazılabilir. Burada köklü ifade binom serisine açılır ve ilk iki terim alınırsa

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{ds}{dx} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v/\partial x}{1 + \partial u/\partial x}\right)^2 + \dots\right] - 1 \\ &\cong 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\end{aligned}\quad (4.12)$$

elde. (4.12) ifadesinde $\partial u/\partial x$ in yalnız bırakılması halinde ise

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \quad (4.13)$$

yazmak mümkündür. Her iki taraf integre edilir ve $u(0, t) = 0$; $\bar{s}(0, t) = 0$ sınır şartları kullanılırsa

$$u(x, t) = s(x, t) - \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \quad (4.14)$$

bağıntısı bulunur. Kinetik enerji ifadesinde u yerine (4.14) deki karşılığı kullanılırsa hem u hem de v ye ait hareket denklemlerinde \ddot{s} ve \ddot{v} li terimler ortaya çıkmaktadır. (4.14) bağıntısı ataletçe bağlılığa yol açmakta, buna mukabil potansiyel enerjide normal kuvvetle ilgili kısmın hesabında bu bağıntı kullanılması halinde ilgili terim basit bir forma gelmektedir. (4.12) in her iki tarafı EA uzama rijitliğiyle çarpılırsa x kesitine t anında etkiyen normal kuvvet hem s , hem de u ve v nin türevleri cinsinden bulunmuş olur.

$$N(x, t) = EA \frac{\partial s}{\partial x} = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right) \quad (4.15)$$

(4.14) bağıntısı diğer önemli bir noktaya işaret etmektedir ki bu da, kirişte herhangi bir aksenal deformasyon olmasa bile sırf eğilmeden dolayı kiriş noktalarının u deplasmanları yapacağıdır. $s=0$ alınırsa

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.16)$$

olduğu açıktır. (4.16) ile verilen ilişki özellikle kabul edilmiş modlar veya Galerkin yöntemiyle hareket denklemleri çözülmek istendiğinde göz ardı edilmemelidir.

Elastik iç kuvvetlerin işi manipulatör Lagrangianında potansiyel enerji terimi içinde yer alır. İç kuvvetler eğilme momentleri, burulma momenti, kesme kuvvetleri ve normal kuvvettir. Eğilme momentleri ve burulma momentinin işleri genel olarak üniform bir kiris için

$$V_{M_j} = \frac{1}{2} \int_{(i \text{ uzvu})} M_j d\phi_j \quad j = x, y, z \quad (4.17)$$

şeklinde verilebilir. Burada, ϕ_j , moment vektörü eksenindeki dönmeyi tasvir etmektedir. Mukavemetten bilindiği gibi

$$\frac{M_j}{EI} = \frac{1}{\rho_j} \quad (4.18)$$

bağıntısı mevcuttur. Düzlemsel halde $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \theta}{\partial s}$ ile verildiğinden

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial (x+u)^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial (x+u)} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (4.19)$$

ifadesine geçmek mümkündür (Hodges 1984). Bu bağıntı ile (4.16) birlikte düşünülürse elemanter teoride kullanılan $\frac{1}{\rho} \cong \frac{\partial \theta}{\partial x}$ yaklaşımının ancak u nun çok çok küçük olması ve $\partial v / \partial x \ll 1$ şartıyla yapılabileceği görülmektedir. Küçük deformasyonlar ve orta düzeyde dönmeler kabulü altında elastik eğrinin eğrilik yarıçapları ve burulmasına ilişkin ifadeler ise,

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \theta \quad (a)$$

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \theta \quad (b) \quad (4.20)$$

$$\tau = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (c)$$

şeklinde olmaktadır (Sawy ve ark. 1993). Burada θ burulma açısı ve τ ise elastik eğrinin burulmasını temsil etmektedir.

Bu çalışmada ele alınan uygulama örneklerinde elemanter teoriye ait moment-eğrilik bağıntısı kullanılmış olmasına rağmen sonuçlar değerlendirilerek lineer yaklaşımın geçerliliği kontrol edilmiştir.

Yukarıdaki açıklama göz önünde tutulmak kaydıyla eğilme momentinin işi, $d\varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dx$ ve $M_j = EI \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$ eşitlikleri (4.17) da yerine konulmak şartıyla

$$V_{M_j} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.21)$$

şeklinde bulunur. Nonlineer eğrilik bağıntısı kullanılırsa

$$V_{M_j} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{\partial^2 v / \partial x^2}{\left[1 + \left(\partial v / \partial x \right)^2 \right]^{3/2}} \right]^2 dx \quad (4.22)$$

yazılmalıdır. Nonlineer ifade paydadaki ifadeyi paya taşımak ve seriye açmak suretiyle kesirsiz bir forma getirilebilir. $x+u$ yerine x kullanıldığında mevcut hatayı kompanze için

Hodges (1984) $\frac{1}{\rho} = \left(\partial^2 v / \partial x^2 \right) / \sqrt{1 - \left(\partial v / \partial x \right)^2}$ bağıntısının kullanılması gerektiğini ifade

etmektedir. Bununla birlikte, manipulatörler zaten çok büyük deformasyonlara maruz kalmayacak tarzda boyutlandırıldığından (4.22) ifadesi nonlineer bir analiz için ilk adımda kabul edilebilir niteliktedir.

Eğer kesme kuvvetinin elastik deplasmanlara katkısı da dahil edilecekse örneğin düzlemsel halde

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi + \gamma \quad (4.23)$$

olmak üzere (Meirovitch 1967) kesme kuvvetinin işi,

$$V_T = \frac{1}{2} \int_0^L k' GA \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \phi \right)^2 dx \quad (4.24)$$

şeklinde ifade olunur. Burada γ kesitteki kesme kuvvetinden kaynaklanan kayma açısıdır. Bu takdirde eğilme momenti işinin (4.21) bağıntısıyla hesaplanması gerekir. k' geometrik faktör, GA kayma rijitliğidir.

Normal kuvvetin işi ise (4.12) ve (4.15) gereğince,

$$V_N = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right)^2 dx \quad (4.25)$$

ile bulunabilir. Bu potansiyel yine (4.15) e göre,

$$V_N = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.26)$$

şeklinde de hesaplanabilir. (4.25) bağıntısı kullanılırsa u ve v ye ait hareket denklemlerinde katılık (stiffness) terimleri üzerinden nonlineer bağıllık ortaya çıkmaktadır. (4.25) bağıntısı için,

$$\begin{aligned} V_N &= \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \\ &- \frac{1}{8} \int_0^L EA \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

yazılarak son terim ihmal edilirse, normal kuvvetin potansiyeli,

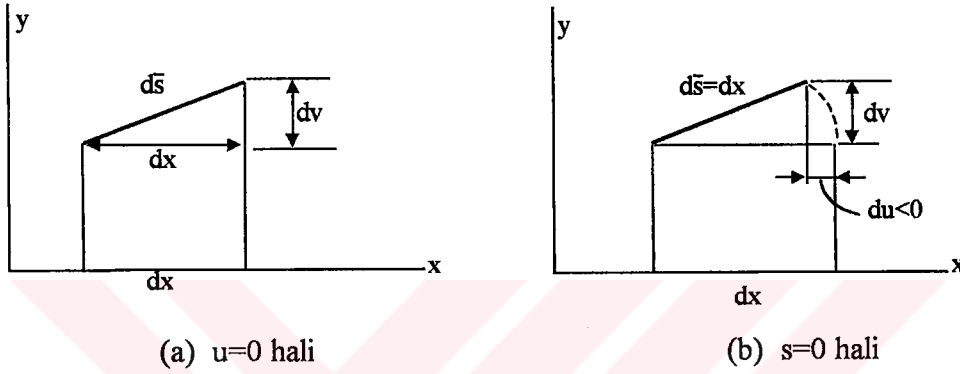
$$V_N \cong \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.28)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda,

$$V_N \cong \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L N \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.29)$$

yazmak mümkündür. Literatürde çoğu kere ikinci integraldeki N kuvveti yerine $N_M = \rho A \dot{\theta}^2 (L^2 - x^2)/2$ merkezkaç kuvveti konarak u ve v ye ilişkin denklemlerde (4.25) ün yol açtığı nonlineer bağıllık ortadan kaldırılmaktadır.

Son olarak u ve v arasındaki ilişkiye başka bir açıdan değinmekte yarar var. Şekil 4.1 ve 4.2 birlikte incelenirse $u=0$ olması halinde $d\bar{s} = \sqrt{1 + (\partial v/\partial x)^2} dx$ bulunur. Bu ise ancak bir normal kuvvetin varlığı halinde mümkündür. Şayet $d\bar{s} = dx$ ise normal kuvvet yok, ancak v deplasmanlarının yol açtığı bir u yer değişimi var demektir.



Şekil 4.2. u , s ve v ye İlişkin Özel Durumlar

$dv=0$ ve $d\bar{s} \neq dx$ ise $ds = d\bar{s} - dx = du$ bağıntısı ortaya çıkar. Bu ise kirişin boyuna deformasyonuna karşılık gelmektedir.

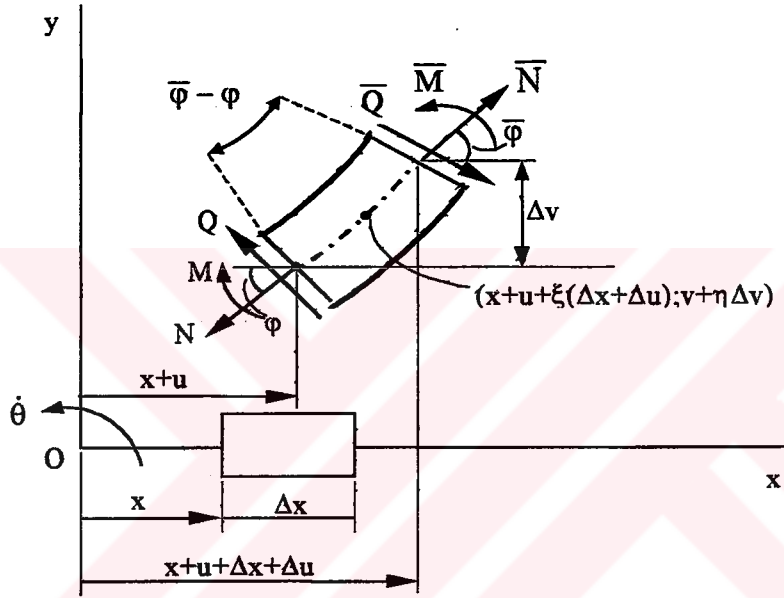
4.4. Hareketin Newton Denklemleri

Esnek uzuvlu bir manipulatörde Newton hareket kanununun tatbikiyle de hareket denklemlerini elde etmek mümkündür. Şayet uzuvlar rijit olsaydı, her uzuv için altı skaler denklem yazılır ve mafsalları kuvvetleri bu denklemlerde görünürlerdi. Halbuki Lagrange denklemlerinde bu kuvvetler, iç kuvvetler hükmünde olduğundan sürtünmeler olmamak veya ihmal edilmek kaydıyla denklemlerde yer almamaktadırlar.

Gerek Lagrange ve gerekse Newton tarzında hareket denklemlerinin çıkarılışının başlangıç aşamasını uygun seçilmiş koordinat takımları kullanarak yapılan vektörel bir kinematik analiz oluşturur. Elastik deformasyonların, Newton yönteminde de şekil değiştirmemiş cisme bağlı koordinat takımlarına göre tarifi, olayın tasviri ve anlaşılması

açısından fayda sağlamaktadır. Hareket kanununun tatbiki iki şekilde yapılabilir: Ya uzvun diferansiyel bir parçası alınır ve hareket kanunu uygulanır; ya da uzvun sonlu bir parçası alınır, bunun üzerinde iç kuvvetler hesaplanır ve iç kuvvetlerle deformasyonlar arasındaki ilişkilerden yararlanılarak bir takım türev işlemlerinden sonra hareket denklemlerine geçilir. Her iki yaklaşımın da kendine göre üstünlük ve mahzurları vardır.

Burada düzlemsel hal için diferansiyel bir parçaya hareket kanunu uygulayarak ve ayrıca sonlu uzuv parçasının dinamik dengesinden yola çıkarak hareket denklemlerinin nasıl elde edildiği gösterilecektir.



Şekil 4.3. Kirişin Diferansiyel Parçasına Etkiyen Kuvvet ve Momentler

Şekil 4.3 de O merkezi etrafında $\dot{\theta}$ açısal hızı ile dönen esnek bir çubuğa bağlı O-xy koordinat takımında bu dönme hareketinden ötürü bir P noktası civarındaki sonlu fakat çok küçük bir çubuk parçasının herhangi bir t anındaki konumu görülmektedir. Burada söz konusu parçacığın x ve y doğrultusundaki hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} (\bar{N} \cos \bar{\varphi} - N \cos \varphi) + (\bar{Q} \sin \bar{\varphi} - Q \sin \varphi) &= \Delta m a_{P''x} \\ (\bar{N} \sin \bar{\varphi} - N \sin \varphi) - (\bar{Q} \cos \bar{\varphi} - Q \cos \varphi) &= \Delta m a_{P''y} \end{aligned} \quad (4.30)$$

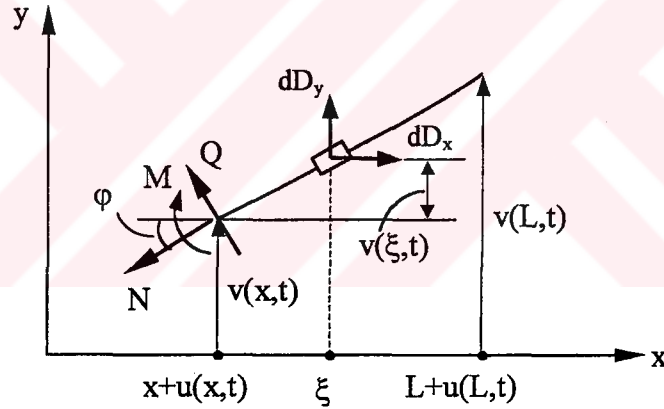
Burada P'' noktası o anda parçacığın kütle merkezini temsil etmektedir ve $0 < \xi < 1$, ve $0 < \eta < 1$ olmak üzere koordinatları $(x+u+\xi(\Delta x+\Delta u); v+\eta \Delta v)$ olan noktadır. $a_{P''x}$ ve $a_{P''y}$

ile bu noktanın x ve y doğrultusundaki mutlak ivme bileşenleri gösterilmiştir. Δm parçacığın kütlesi olup $\rho A \Delta x$ e eşit alınabilir. Burada, A çubuğun kesiti, ρ yoğunluğu ve Δx elemanın ilk boyudur. (4.30) denklemlerinde $\Delta x \rightarrow 0$ olarak limite geçilirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(N \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(Q \sin \varphi) &= \rho A a_x \\ \frac{\partial}{\partial x}(N \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial x}(Q \cos \varphi) &= \rho A a_y \end{aligned} \quad (4.31)$$

denklemleri elde olunur. Bu denklemlere istenirse Şekil 4.3. deki parçacığın momentler dengesine ait denklem de ilave edilebilir. Buradan kesit dönmelerinin ve kesme kuvvetlerinin etkilerini içeren denklemlere geçmek mümkündür.

Newton (veya Euler-Newton) tarzında hareket denklemleri bazen cismin sonlu bir parçasından hareketle de çıkarılmaktadır. Mesela dönen bir kirişin özellikle enine elastik deplasmanlarına ilişkin denklem bu şekilde elde olunabilir (Sandor ve Zhuang 1986). Şekil 4.4. de dönen kirişin sonlu bir parçası gösterilmiştir.



Şekil 4.4. Sonlu Kiriş Parçasının Dinamik Dengesi

dD_x ve dD_y diferansiyel parçalara tekabül eden atalet kuvvetlerini göstermek üzere x ve y doğrultusundaki dinamik denge,

$$\begin{aligned} -N \cos \varphi - Q \sin \varphi + \int_{x+u(x,t)}^{L+u(L,t)} dD_x &= 0 \\ -N \sin \varphi + Q \cos \varphi + \int_{x+u(x,t)}^{L+u(L,t)} dD_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

denklemleriyle ifade olunur. Burada,

$$\begin{aligned}dD_x &= -a_x dm \\dD_y &= -a_y dm\end{aligned}\tag{4.33}$$

dir. Gerek (4.31) ve gerekse (4.32) denklemlerinde incelenen özel probleme ilişkin ivme bileşenleri yerleştirildiğinde Newton tarzında hareket denklemleri bulunmuş olur.

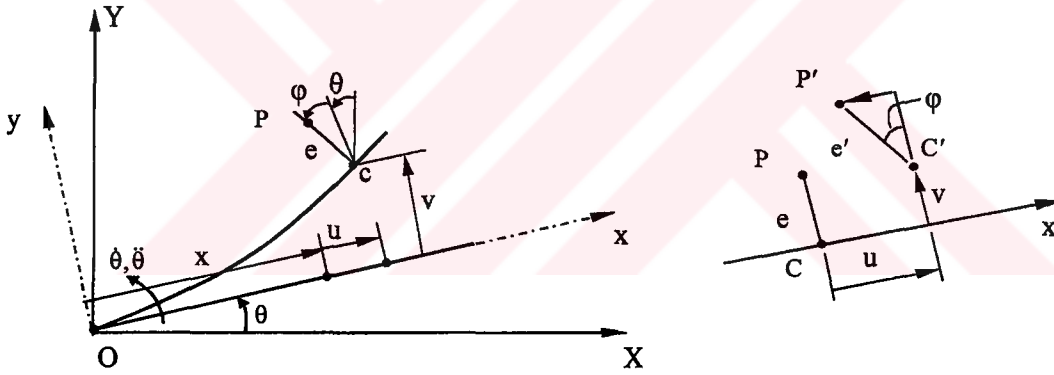


5. TEK SERBESTLİK DERECELİ ESNEK MANİPULATÖRÜN DİNAMİĞİ

5.1. Giriş

Daha önceki bölümde belirtildiği gibi bir manipulatörün hareket denklemlerinin çıkarılmasında en yaygın olarak kullanılan yöntemler Lagrange-Euler ve Newton formülasyonlarıdır. Ancak bu metotlardan hangisi kullanılırsa kullanılsın sonuçta elde edilen hareket denklemleri kısmi türevli, yüksek mertebeden ve bağlı (coupled) denklemler olup, bu denklemler için analitik bir çözüm bulmak çok zor hatta imkansız olduğundan denklemler çeşitli yaklaşık yöntemlerle çözülebilmektedir. Çözüm için kullanılan metoda bağlı olarak hareket denklemlerinin çıkarılış tarzı da farklılık arz etmektedir. Bu husus, bu bölümde örnek olarak ele alınan tek serbestlik dereceli düzlemsel bir manipulatör üzerinde ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

5.2. Tek Serbestlik Dereceli Esnek Bir Manipulatörün Hareket Denklemleri



Şekil 5.1. Esnek Kolun Konumunu Belirleyen Parametreler

Uzvu elastik eğrisi üzerinde ve O noktasından x kadar mesafede olan C noktası ile C'den e kadar uzaklıkta bulunan P noktasını ele alalım. P noktasının yer vektörü uzva bağlı O-xyz dönen takımında

$$\vec{r} = (x + u - e' \sin \varphi)\vec{i} + (v + e' \cos \varphi)\vec{j} \quad (5.1)$$

şeklindedir. Burada φ herhangi kesitin dönmesini temsil etmekte, e ise P noktasının kesit ekseninden dik mesafesini göstermektedir. Küçük deformasyonlar için $e' \cong e$ almak mümkündür. Bu durumda,

$$\vec{r} = (x + u - e \sin \varphi)\vec{i} + (v + e \cos \varphi)\vec{j} \quad (5.2)$$

olur. Yer vektörünün zamana göre bir kez türetilmesiyle P noktasının hızı, ikinci kez türetilmesiyle de ivmesi bulunur:

$$\vec{v} = \left[\dot{u} - v\dot{\theta} - e(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos \varphi \right] \vec{i} + \left[\dot{v} + (x+u)\dot{\theta} - e(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin \varphi \right] \vec{j} \quad (5.3)$$

$$\vec{a} = \left[\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - v\ddot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - (\ddot{\theta} + \ddot{\phi})e \cos \varphi + 2\dot{\theta}\dot{\phi}e \sin \varphi + (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)e \sin \varphi \right] \vec{i} + \left[\ddot{v} + (x+u)\ddot{\theta} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 - (\ddot{\theta} + \ddot{\phi})e \sin \varphi - 2\dot{\theta}\dot{\phi}e \cos \varphi - (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)e \cos \varphi \right] \vec{j} \quad (5.4)$$

5.2.1. Lagrange-Euler Formülasyonu İle Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Uzvuun kesitinin üniform olduğu kabulü altında (5.3) bağıntısı (4.8) de yerine konursa

$$\begin{aligned} T &= \iiint_{\text{uzuv}} \frac{1}{2} \left\{ \left[\dot{u} - v\dot{\theta} - e(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos \varphi \right]^2 + \left[\dot{v} + (x+u)\dot{\theta} - e(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin \varphi \right]^2 \right\} \rho dA dx \\ &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{u}^2 dx + \frac{1}{2} \rho A \dot{\theta}^2 \int_0^L v^2 dx - \rho A \dot{\theta} \int_0^L \dot{u} v dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \rho A \dot{\theta}^2 \int_0^L (x+u)^2 dx \\ &\quad + \rho A \dot{\theta} \int_0^L x \dot{v} dx + \rho A \dot{\theta} \int_0^L u \dot{v} dx + \frac{1}{2} \rho I_{xx} \int_0^L (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 dx \end{aligned} \quad (5.5)$$

bulunur. Burada

$$\iint e dA = 0 \quad \iint e^2 dA = I_{xx} \quad \iint dA = A \quad (5.6)$$

bağıntılarından yararlanılmıştır.

(5.5) bağıntısına farklı bir muhakeme ile de ulaşılabilir. Sonsuz küçük kalınlıkta farazi levhaların kesit ağırlık merkezinin hızıyla ötelendiği ve ayrıca bunun etrafında döndüğü düşünülürse kirişin ötelenme kinetik enerjisi

$$T^{\dot{0}} = \frac{1}{2} \int_0^L \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C \rho A dx \quad (5.7)$$

ve dönme kinetik enerjisi ise

$$T^D = \frac{1}{2} \int_0^L (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \rho I_{xx} dx \quad (5.8)$$

şeklinde ifade olunabilir. Burada \vec{v}_C , yer vektörü

$$\vec{r}_C = (x + u)\vec{i} + v\vec{j} \quad (5.9)$$

olan herhangi bir kesit ağırlık merkezinin hız vektörü olup

$$\vec{v}_C = [\dot{u} - v\dot{\theta}]\vec{i} + [\dot{v} + (x + u)\dot{\theta}]\vec{j} \quad (5.10)$$

şeklinde dir. Toplam kinetik enerji T ise

$$T = T^O + T^D \quad (5.11)$$

olup, (5.7) ve (5.8) açık yazıldığında (5.11) ifadesinin (5.5) ile bulunana özdeş olduğu görülür.

Kolun toplam potansiyel enerjisi ise Bölüm 4. de verildiği gibi V_M , V_N , ve V_T terimleri sırasıyla eğilme momenti, normal kuvvet ve kesme kuvvetinin yaptıkları işleri göstermek üzere

$$\begin{aligned} V &= V_M + V_N + V_T \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k'GA \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \phi \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k'GA \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \phi \right)^2 dx \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde yazılabilir.

Uzva ait enerji ifadeleri böylece elde edildikten sonra sistem Lagrangianı tanımlanmış olur ve (4.7) eşitliği ile hareketin Lagrange denklemleri elde edilir. Lagrange denklemleri yazılırken sisteme ait bağımlı ve bağımsız değişkenlerin belirlenmesi gerekmektedir. Ele alınan tek serbestlik dereceli düzlemsel manipulatör örneği için, kol eksenini üzerindeki herhangi bir kesitin deformasyondan önceki yerini belirleyen ve kola bağlı koordinat takımında ölçülen x parametresi ile t zaman parametresi bağımsız değişkenler olurken kesitin aksenal yer değiştirme miktarı $s(x,t)$ veya bunun kol eksenini üzerindeki izdüşümü $u(x,t)$ ile enine yer değiştirme miktarı $v(x,t)$, kesit dönme miktarı $\phi(x,t)$ ve kolun dönme açısı $\theta(t)$ ise bağımlı değişkenler olmaktadır. Burada dikkat edilirse bağımlı değişkenlerden s, u ve v arasında, aynı

bağımsız değişkenlere bağlı olmanın dışında bir geometrik ilişki de söz konusudur. Bu nedenle her üç değişken aynı anda genelleştirilmiş koordinat olarak kullanılamaz, bunlardan sadece ikisi genelleştirilmiş koordinat olarak seçilebilir. Bu durumda örneğin u, v, φ ve θ nın genelleştirilmiş koordinat olarak alınması durumunda manipulatörün esnek hareketine ait hareket denklemleri için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} \ddot{u} - u\dot{\theta}^2 - 2\dot{v}\dot{\theta} - v\ddot{\theta} - \frac{E}{\rho} \left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)' &= x\dot{\theta}^2 \\ \ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + u\ddot{\theta} - k' \frac{G}{\rho} (v'' - \varphi') - \frac{E}{\rho} \left[\left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) v' \right]' &= -x\ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} - \frac{E}{\rho} \varphi'' - k' \frac{GA}{\rho I} (v' - \varphi) &= -\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (5.13)$$

(5.13) ifadesinden görüldüğü gibi esnek manipulatöre ait hareket denklemleri nonlineer olup, nonlineerlik potansiyel enerji teriminden kaynaklanmaktadır. Bu nonlineerlikten kurtulmanın bir yolu normal kuvvetin işi için (4.15) bağıntısı yerine (4.29) nin kullanılmasıdır ki, bu yol gerek içerdiği terimlerin basitliği gerekse çözüm aşamasında sağladığı kolaylıklar nedeniyle oldukça tercih edilmektedir. Normal kuvvetin işi için yapılan bu değişiklik neticesinde (5.13) ile verilen hareket denklemleri,

$$\begin{aligned} \ddot{u} - u\dot{\theta}^2 - 2\dot{v}\dot{\theta} - v\ddot{\theta} - \frac{E}{\rho} u'' &= x\dot{\theta}^2 \\ \ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + u\ddot{\theta} - k' \frac{G}{\rho} (v'' - \varphi') - (N v')' &= -x\ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} - \frac{E}{\rho} \varphi'' + k' \frac{GA}{\rho I} (v' - \varphi) &= -\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (5.14)$$

halini alır.

Gerek (5.13) gerekse (5.14) ile verilen hareket denklemleri tek serbestlik dereceli düzlemsel bir manipulatör için, uzuv üzerindeki herhangi bir noktanın enine, boyuna deformasyonları, kesitin kayma deformasyonu ve dönme atalet etkisi göz önünde tutularak çıkarıldıklarından hareketi oldukça genel halde temsil etmektedirler. Halbuki; Timoshenko, uzvun kesit boyutlarının boyuna oranla küçük olması halinde kayma deformasyonunun ve hatta dönme atalet etkisinin ihmal edilebileceğini göstermiştir. Kayma deformasyonu ihmal edilirse (4.23) eşitliğinden $v' \cong \varphi$ yazılabilir ve böylece kesme kuvvetinin yaptığı iş de sifıra eşit olur. Bu kabuller altında (5.13) deki hareket denklemleri,

$$\begin{aligned} \ddot{u} - u\dot{\theta}^2 - 2\dot{v}\dot{\theta} - v\ddot{\theta} - \frac{E}{\rho} \left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)' &= x\dot{\theta}^2 \\ \ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + u\ddot{\theta} + \frac{EI}{\rho A} v'''' - \frac{I}{A} \ddot{v}'' - \frac{E}{\rho} \left[\left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) v' \right]' &= -x\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (5.15)$$

ve (5.14) denklemleri de,

$$\begin{aligned} \ddot{u} - u\dot{\theta}^2 - 2\dot{v}\dot{\theta} - v\ddot{\theta} - \frac{E}{\rho} u'' &= x\dot{\theta}^2 \\ \ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + u\ddot{\theta} + \frac{EI}{\rho A} v'''' - \frac{I}{A} \ddot{v}'' - (N v')' &= -x\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (5.16)$$

şeklini alırlar. Enine deformasyonlara ait denklemlerde $I/A \ddot{v}''$ terimi ihmal edilirse kesit dönme ataleti dikkate alınmamış olur.

Literatürde u deplasmanı ve türevlerinin oldukça küçük olduğundan hareketle sadece enine deplasmanlara ait hareket denklemlerinin ele alındığı çalışmalar da mevcuttur (Yiğit ve ark. 1988). Burada ele alınan örnek için sadece enine deplasmanlara ait hareket denklemi, (5.16) denklemlerinin ikincisinde u ve u'nun türevlerini içeren terimlerin atılması ile,

$$\ddot{v} - v\dot{\theta}^2 + \frac{EI}{\rho A} v'''' - \frac{I}{A} \ddot{v}'' - (N v')' = -x\ddot{\theta} \quad (5.17)$$

şeklinde elde edilir.

Potansiyel enerji teriminden kaynaklanan nonlineerliğin ortadan kaldırılmasının bir diğer yolu da genelleştirilmiş koordinat seçiminde u yerine s değişkeninin alınmasıdır. Ancak bu durumda kinetik enerji ifadesinin (4.14) bağıntısına göre yeniden düzenlenmesi ve Lagrange denklemlerinin buna göre oluşturulması gerekir ki bu durumda hareket denklemleri kinetik enerji terimleri üzerinden de nonlineer bağlı hale gelmektedirler. (5.5) ile verilen kinetik enerji ifadesi (4.14) e göre yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \left\{ A \int_0^L \left[\dot{s}^2 - 2\dot{s} \int_0^x v' \dot{v}' dx + \left(\int_0^x v' \dot{v}' dx \right)^2 \right] dx + \frac{1}{3} AL^3 \dot{\theta}^2 \right. \\ &+ A \dot{\theta}^2 \int_0^L \left[s^2 - s \int_0^x v'^2 dx + \frac{1}{4} \left(\int_0^x v'^2 dx \right)^2 \right] dx \\ &\left. + 2A \dot{\theta}^2 \int_0^L \left(s - \frac{1}{2} \int_0^x v'^2 dx \right) x dx + A \int_0^L \dot{v}^2 dx + A \dot{\theta}^2 \int_0^L v^2 dx \right. \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$-2A\dot{\theta}\int_0^L\left(\dot{s}-\int_0^x v'\dot{v}'dx\right)v dx+2A\dot{\theta}\int_0^L x\dot{v} dx \\ +2A\dot{\theta}\int_0^L\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)\dot{v} dx+\frac{1}{2}\rho I_{xx}\int_0^L(\dot{\theta}+\dot{\phi})^2 dx \Big\}$$

elde edilir. Potansiyel enerji için de (5.12) bağıntısının ikinci satırındaki karşılığı kullanılır ve s , v , ϕ değişkenleri, genelleştirilmiş koordinatlar alınarak Lagrange formülasyonu uygulanırsa hareket denklemleri,

$$\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)''-\dot{\theta}^2\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)-2\dot{\theta}\dot{v}-\ddot{\theta}v-\frac{E}{\rho}s''=\dot{\theta}^2x \\ \ddot{v}+2\dot{\theta}\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)'-v\dot{\theta}^2+\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)\ddot{\theta}-k'\frac{G}{\rho}(v''-\phi') \\ -\left[\left(\dot{\theta}^2\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)+\dot{\theta}^2x+2\dot{\theta}\dot{v}-\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)''+\ddot{\theta}v\right)v\right]'=-x\ddot{\theta} \quad (5.19) \\ \ddot{\phi}-\frac{E}{\rho}\phi''-k'\frac{GA}{\rho I}(v'-\phi)=-\ddot{\theta}$$

şeklinde elde olunur. $v'\equiv\phi$ alınması halinde ise,

$$\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)''-\dot{\theta}^2\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)-2\dot{\theta}\dot{v}-\ddot{\theta}v-\frac{E}{\rho}s''=\dot{\theta}^2x \\ \ddot{v}+2\dot{\theta}\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)'-v\dot{\theta}^2+\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)\ddot{\theta}+\frac{EI}{\rho A}v''''-\frac{I}{A}\ddot{v}'' \\ -\left[\left(\dot{\theta}^2\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)+\dot{\theta}^2x+2\dot{\theta}\dot{v}-\left(s-\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 dx\right)''+\ddot{\theta}v\right)v\right]'=-x\ddot{\theta} \quad (5.20)$$

denklemlerine ulaşılır.

5.2.2. Newton-Euler Formülasyonu İle Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Bölüm 4. de sonlu çubuk parçasının dinamik denge denklemleri yazılarak Newton tarzında hareket denklemlerinin eldesi için bu denklemlerde, incelenen probleme ilişkin ivme bileşenlerinin yerleştirilmesi gerektiği belirtilmişti. Burada ele alınan tek uzuvlu

manipulatörün elastik eğri üzerinde bulunan herhangi bir noktasının dönen Oxy takımındaki hız ve ivmesi için (5.3) ve (5.4) bağıntılarında $e=0$ konarak sırasıyla

$$\vec{v} = (\ddot{u} - v\dot{\theta})\vec{i} + (\dot{v} + (x+u)\dot{\theta})\vec{j} \quad (5.21)$$

$$\vec{a} = (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta})\vec{i} + (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta})\vec{j} \quad (5.22)$$

yazılabilir. Bu durumda (4.33) ile verilen atalet kuvvetleri,

$$\begin{aligned} dD_x &= -a_x dm = -a_x \rho A dx = -\rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) dx \\ dD_y &= -a_y dm = -a_y \rho A dx = -\rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) dx \end{aligned} \quad (5.23)$$

olmaktadır. Burada, a_x ve a_y daha önce de tanımlandığı gibi diferansiyel elemanın kütle merkezinin ivmesinin x ve y bileşenleridir. (4.32) denklemlerinde u değişimlerinin küçük olduğu kabulüyle integral sınırları x den L ye alınır ve integraller yalnız bırakılırsa,

$$\begin{aligned} -N \cos \varphi - Q \sin \varphi &= \int_x^L \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) dx \\ -N \sin \varphi + Q \cos \varphi &= \int_x^L \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) dx \end{aligned} \quad (5.24)$$

elde edilir. Her iki tarafın x e göre türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} (N \cos \varphi)' + (Q \sin \varphi)' &= \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) \\ (N \sin \varphi)' - (Q \cos \varphi)' &= \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

bulunur. Burada $(\dots)' = \frac{\partial}{\partial x}(\dots)$ anlamındadır. Dikkat edilirse (5.25) denklemleri daha önceden çıkarılmış olan (4.31) denklemleriyle özdeştir. (5.24) denklemlerinden N normal kuvveti,

$$\begin{aligned} N &= -\cos \varphi \int_x^L \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) dx \\ &\quad - \sin \varphi \int_x^L \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) dx \end{aligned} \quad (5.26)$$

ve Q kesme kuvveti,

$$\begin{aligned}
Q = & -\sin \varphi \int_x^L \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) dx \\
& + \cos \varphi \int_x^L \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) dx
\end{aligned} \tag{5.27}$$

olarak bulunur. (5.26) bağıntısında ilk integraldeki $(x+u)\dot{\theta}^2$ teriminden $x\dot{\theta}^2$ ayrılırsa,

$$\begin{aligned}
N = & -\cos \varphi \int_x^L \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) dx + \cos \varphi \int_x^L \rho A x \dot{\theta}^2 dx \\
& - \sin \varphi \int_x^L \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) dx
\end{aligned} \tag{5.28}$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$N_M = \int_x^L \rho A x \dot{\theta}^2 dx = \frac{1}{2} \rho A \dot{\theta}^2 (L^2 - x^2) \tag{5.29}$$

rijit halde merkezkaç kuvvetlerden dolayı kesitte oluşan normal kuvvet olup, bu kuvvet bir çok çalışmada enine elastik deplasmanlara ait hareket denkleminde N normal kuvveti yerine kullanılmaktadır (Yiğit ve ark. 1988, Simo ve Vu-Quoc 1987). Buna göre (5.28) i,

$$\begin{aligned}
N = & -\cos \varphi \int_x^L \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) dx + N_M \cos \varphi \\
& - \sin \varphi \int_x^L \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) dx
\end{aligned} \tag{5.30}$$

şeklinde yazmak da mümkündür. N normal kuvveti, daha önce tanımlandığı gibi $\partial s / \partial x$ aksenal uzama oranıyla ilişkili olup,

$$N = EA \frac{\partial s}{\partial x}$$

bağıntısı mevcuttur. Şimdi küçük eğimler kabulü altında x ve y doğrultularında hareket denklemlerinin nasıl çıkarılabileceği gösterilecektir. $u' \ll 1$ için $\tan \varphi = v' / (1+u')$ den $\tan \varphi \cong v'$ ve ayrıca küçük φ açıları için $\sin \varphi \cong \tan \varphi = v'$ alınabilir. Bu durumda $\cos \varphi \cong 1$ dir. Ayrıca kesit dönme ataleti ihmal edilirse $Q \cong \partial M / \partial x \cong EI v'''$ ve $\partial Q / \partial x \cong EI v''''$ bağıntıları mevcuttur. Bu kabuller altında (5.27) bağıntısı,

$$Q = -v' \int_x^L \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) dx + v' N_M + \int_x^L \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) dx \quad (5.31)$$

şeklini alır. Burada (5.27) nin sağ tarafındaki integral (5.29) dan yararlanarak parçalanmıştır. (5.31) nin her iki tarafı x e göre türetilip yukarıda verilen $Q \cong EI v'''$ bağıntısı da kullanılırsa,

$$EI v''' + \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + u\ddot{\theta}) - \left\{ \left[N_M - \int_x^L \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - u\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) dx \right] v' \right\}' = -\rho A x \ddot{\theta} \quad (5.32)$$

denklemini elde olunur. Bazı yazarların yaptığı gibi integral terimi ihmal edilecek olursa,

$$EI v''' + \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + u\ddot{\theta}) - (N_M v')' = -\rho A x \ddot{\theta} \quad (5.33)$$

denkleminde ulaşılmaktadır. Bu durumda (5.32) denklemindeki integral teriminin ihmalıyla normal kuvvet yerine rijit haldeki merkezkaç kuvveti alınmış olmaktadır.

x doğrultusundaki hareket denklemini için de (5.26) eşitliği (5.31) ye benzer tarzda,

$$N = - \int_x^L \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - (x+u)\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) dx - v' \int_x^L \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) dx \quad (5.34)$$

şeklinde yazılıp $N=EA s''$ bağıntısı göz önüne alınarak denklemin her iki tarafı x e göre türetilir ve düzenlenirse,

$$EA s'' - \rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - u\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) + \left\{ \left[\int_x^L \rho A (\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + (x+u)\ddot{\theta}) dx \right] v' \right\}' = -\rho A x \ddot{\theta}^2 \quad (5.35)$$

elde edilir. (5.34) de v' nin küçük olduğundan hareketle ikinci integral ihmal edilirse (5.35) yerine,

$$\rho A (\ddot{u} - 2\dot{v}\dot{\theta} - u\dot{\theta}^2 - v\ddot{\theta}) - EA s'' = \rho A x \ddot{\theta}^2 \quad (5.36)$$

bulunur ki bu denklem daha önce (5.13) de verilen boyuna deplasmanlara ait hareket

denklemiyle özdeşdir. Tek fark (5.13) de s'' nin $\left(u' + \frac{1}{2}v'^2\right)'$ şeklinde alınmasıdır.

5.3. Hareket Denklemlerinin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

Bölüm 5.2. de formüle edilen hareket denklemleri genellikle nonlinear kısmi diferansiyel denklemler olup bunların kapalı çözümlerini bulmak oldukça zor hatta bazen imkansızdır. Bu nedenle çeşitli yaklaşık çözüm yöntemleri geliştirilmiş olup, burada bu çalışmada yararlanılan üç yöntem kısaca açıklanacak ve bu yöntemler kullanılarak çıkarılan hareket denklemleri verilecektir. Bu üç yöntem sırasıyla Kabul Edilmiş Modlar, Sonlu Elemanlar ve Galerkin yöntemleridir. Her üç yöntemin ortak özelliği kısmi diferansiyel denklemleri ayrıklaştırarak, adi diferansiyel denklem takımlarına dönüştürmeleridir. Bunlar arasında Kabul Edilmiş Modlar yöntemi doğrudan enerji terimlerinden işe başladığından hareket denklemleri de doğrudan ayrık adi diferansiyel denklemler olarak elde olunurlar. Öte yandan Galerkin yöntemi Euler-Newton veya Euler-Lagrange formülasyonlarından birisiyle bulunan kısmi türevli hareket denklemlerine tatbik olunarak onları ayrıklaştırmaya yarar. Sonlu Elemanlar yöntemi ise bizzat kendisi bir ayrıklaştırma prosedürü olmakla beraber, bu ayrıklaştırma Kabul Edilmiş Modlar'da olduğu gibi enerji terimlerinden veya Galerkin'de olduğu gibi mevcut bir hareket denkleminde yola çıkarak tatbik edilebilen bir yöntemdir.

5.3.1. Kabul Edilmiş Modlar Yöntemi

Kabul Edilmiş Modlar yöntemi, problemin çözümü için

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(x) q_j(t) \quad (5.37)$$

şeklinde bir seri kabulü yapmaktadır. Burada q_j 'ler zamanın fonksiyonu olan genelleştirilmiş koordinatlar, Φ_j 'ler ise konuma bağlı fonksiyonlardır. Çoğunlukla Φ_j ler yerine incelenen sistemi en yakın temsil edebilecek bir sistemin modal fonksiyonları alındığından bu metoda Kabul Edilmiş Modlar metodu adı verilmektedir

Burada incelenen manipulator örneğinde, çözümü aranan, kolun boyuna yer değiştirme fonksiyonu $s(x,t)$ ile enine yer değiştirme fonksiyonu $v(x,t)$ nin biri sadece

konuma diğeri ise sadece zamana bağılı iki fonksiyonun çarpımlarından oluşan serilere açılabilirdiği, yani

$$\begin{aligned} s(x, t) &= \sum_{j=1}^n \Phi_j^s(x) q_j^s(t) \\ v(x, t) &= \sum_{j=1}^n \Phi_j^v(x) q_j^v(t) \end{aligned} \quad (5.38)$$

olduğu kabul edilir. Burada $\Phi_j^s(x)$ ve $\Phi_j^v(x)$ ler kolun boyuna ve enine titreşimlerine ait öz fonksiyonları veya tabii modları, $q_j^s(t)$ ve $q_j^v(t)$ ler de bu fonksiyonlara karşı gelen genelleştirilmiş koordinatları göstermektedir.

Manipulatör kollarının dönme hareketi kök noktasına yerleştirilmiş tahrik elemanları ile sağlandığından dinamik model oluşturulurken tahrik elemanı ile kol arasındaki bağlantının rijit olduğu kabulü ile manipulatör kolu, bir ucu ankastre diğeri ucu serbest, modellenen kolun bir ara uzuv olması halinde de, serbest ucunda ardışık kolun tahrikini sağlayan elemanı temsil eden bir kütle bulunan çubuk olarak ele alınmaktadır. Bu nedenle $\Phi_j^s(x)$ ve $\Phi_j^v(x)$ fonksiyonları için, bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuğun enine ve boyuna titreşimlerine ait,

$$\Phi_j^s(x) = \sin(2r-1) \frac{\pi x}{2L} \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

$$\Phi_j^v(x) = (\cos \lambda_j x - \cosh \lambda_j x) - k_j (\sin \lambda_j x - \sinh \lambda_j x)$$

şeklindeki öz fonksiyonları alınmıştır. Burada,

$$k_j = \frac{(\cos \lambda_j L + \cosh \lambda_j L)}{(\sin \lambda_j L + \sinh \lambda_j L)} \quad (5.40)$$

dir (Gürgöze 1984). Kabul edilmiş modlar metoduna göre (5.38) eşitlikleri ile verilen çözüm serileri ve ilgili türevleri kolun toplam potansiyel ve kinetik enerji ifadelerinde yerlerine konduğunda,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} EA \sum_i \sum_j \psi_{ij}^s q_i^s q_j^s + \frac{1}{2} EI \sum_i \sum_j \sigma_{ij}^\phi q_i^\phi q_j^\phi \\ &+ \frac{1}{2} k' GA \sum_i \sum_j v_{ij}^v q_i^v q_j^v - k' GA \sum_i \sum_j \Omega_{ij} q_i^v q_j^\phi \\ &+ \frac{1}{2} k' GA \sum_i \sum_j \lambda_{ij} q_i^\phi q_j^\phi \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \rho \left\{ A \left[\sum_i \sum_j \alpha^{s,ij} \dot{q}_i^s \dot{q}_j^s - 2 \sum_i \sum_j \sum_k \beta_{i,jk} \dot{q}_i^s \dot{q}_j^v \dot{q}_k^v + \right. \right. \\
& \left. \left. \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \xi_{ijkl} q_i^v \dot{q}_j^v q_k^v \dot{q}_l^v \right] + A_1 \frac{L_1^3}{3} \dot{\theta}_1^2 \right. \\
& + A \dot{\theta}^2 \left[\sum_i \sum_j \alpha^{s,ij} q_i^s q_j^s - \sum_i \sum_j \sum_k \beta_{i,jk} q_i^s q_j^v q_k^v + \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{4} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \xi_{ijkl} q_i^v q_j^v q_k^v q_l^v \right] \right. \\
& + 2A \dot{\theta}^2 \left[\sum_i \Delta^s q_i^s - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \rho_{ij} q_i^v q_j^v \right] \\
& + A \sum_i \sum_j \mu_{ij} \dot{q}_i^v \dot{q}_j^v + A \dot{\theta}^2 \sum_i \sum_j \mu_{ij} q_i^v q_j^v \\
& - 2A \dot{\theta} \left[\sum_i \sum_j \gamma^{s,ij} \dot{q}_i^s q_j^v - \sum_i \sum_j \sum_k \zeta_{ij,k} q_i^v \dot{q}_j^v q_k^v \right] \\
& + I \dot{\theta}^2 L + 2I \dot{\theta} \sum_i \kappa_i \dot{q}_i^\varphi + I \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \dot{q}_i^\varphi \dot{q}_j^\varphi + 2A \dot{\theta} \sum_i \eta_i \dot{q}_i^v \\
& \left. + 2A \dot{\theta} \left[\sum_i \sum_j \gamma^{s,ij} q_i^s \dot{q}_j^v - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \zeta_{ij,k} q_i^v q_j^v \dot{q}_k^v \right] \right\} \quad (5.42)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\alpha^{s,ij} &= \int_0^L \phi_i^s \phi_j^s dx & \mu_{ij} &= \int_0^L \phi_i^v \phi_j^v dx & \kappa_i &= \int_0^L \phi_i^\varphi dx \\
\Phi^{v,ij} &= \int_0^x \phi_i^v \phi_j^v dx & \gamma^{s,ij} &= \int_0^L \phi_i^s \phi_j^v dx & \lambda_{ij} &= \int_0^L \phi_i^\varphi \phi_j^\varphi dx \\
\beta_{i,jk} &= \int_0^L \phi_i^s \Phi^{v,jk} dx & \zeta_{ij,k} &= \int_0^L \Phi^{v,ij} \phi_k^v dx & \nu_{ij} &= \int_0^L \phi_i^v \phi_j^v dx \\
\xi_{ij,kl} &= \int_0^L \Phi^{v,ij} \Phi^{v,kl} dx & \eta_i &= \int_0^L \phi_i^v x dx, & \Omega_{ij} &= \int_0^L \phi_i^v \phi_j^\varphi dx \\
\Delta^s_i &= \int_0^L \phi_i^s x dx, & \psi^{s,ij} &= \int_0^L \phi_i^s \phi_j^s dx, & \sigma_{ij} &= \int_0^L \phi_i^\varphi \phi_j^\varphi dx \\
\rho_{ij} &= \int_0^L \Phi^{v,ij} x dx & \tau_{ij} &= \int_0^L \phi_i^{v\prime} \phi_j^{v\prime} dx & \nu_i &= \int_0^L \phi_i^v dx
\end{aligned} \quad (5.43)$$

olarak tanımlanmıştır. q_i^s , q_i^v ve q_i^φ genelleştirilmiş koordinatlar olarak alınıp Lagrange denklemleri yazıldığında, n_s , n_v ve n_φ her bir hareket değişkeni için göz önüne alınan mod sayılarını göstermek üzere uzvun hareket denklemleri,

$$\begin{aligned} & \sum_j \alpha_{ij}^s \ddot{q}_j^s - \sum_j \sum_k \beta_{i,jk} q_j^v \ddot{q}_k^v - \sum_j \sum_k \beta_{i,jk} \dot{q}_j^v \dot{q}_k^v \\ & - 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ij}^s \dot{q}_j^v + \frac{1}{2} \dot{\theta} \sum_j \sum_k \beta_{i,jk} q_j^v q_k^v \quad i=1,2,\dots, n_s \quad (5.44) \\ & - \dot{\theta} \sum_j \gamma_{ij}^s q_j^v + \sum_j \left(\frac{E}{\rho} \psi_{ij}^s - \dot{\theta}^2 \alpha_{ij}^s \right) q_j^s - \dot{\theta}^2 \Delta^s_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_j \mu_{ij} \ddot{q}_j^v - \sum_j \sum_k \beta_{j,ki} \ddot{q}_j^s q_k^v \\ & + \sum_j \sum_k \sum_l \xi_{ijkl} q_j^v q_k^v \dot{q}_l^v + 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^s \dot{q}_j^s \\ & + \sum_j \sum_k \sum_l \xi_{ijkl} q_j^v \dot{q}_k^v \dot{q}_l^v + 2\dot{\theta} \sum_j \sum_k (\zeta_{ij,k} - \zeta_{jk,i}) q_j^v \dot{q}_k^v \\ & + \dot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^s q_j^s + \dot{\theta}^2 \sum_j \sum_k \beta_{j,ki} q_j^s q_k^v \\ & - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_j \sum_k \sum_l \xi_{ijkl} q_j^v q_k^v q_l^v + \dot{\theta} \eta_i \\ & + \dot{\theta} \sum_j \sum_k \left(\zeta_{ij,k} - \frac{1}{2} \zeta_{jk,i} \right) q_j^v q_k^v \\ & + \sum_j \left(\dot{\theta}^2 \rho_{ij} - \dot{\theta}^2 \mu_{ij} + k' \frac{G}{\rho} \nu_{ij} \right) q_j^v \\ & - k' \frac{G}{\rho} \sum_j \Omega_{ij} q_j^\varphi = 0 \quad i=1,2,\dots, n_v \quad (5.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_j \lambda_{ij} \ddot{q}_j^\varphi + k' \frac{GA}{\rho I} \sum_j \lambda_{ij} q_j^\varphi - k' \frac{GA}{\rho I} \sum_j \Omega_{ij} q_j^v \\ & + \dot{\theta} \kappa_i + \frac{E}{\rho} \sum_j \sigma_{ij} q_j^\varphi = 0 \quad i=1,2,\dots, n_\varphi \quad (5.46) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\varphi = \partial v / \partial x$ alınması halinde kesit dönmesi φ artık bağımsız bir değişken olmadığından (5.46) denkleminde gerek kalmamaktadır. Bu durumda (5.44) eşitliği aynen geçerli olmakta ancak (5.45) ise aşağıdaki hale dönüşmektedir.

$$\begin{aligned}
& \sum_j \left(\mu_{ij} + \frac{I}{A} v_{ij} \right) \ddot{q}_j^v - \sum_j \sum_k \beta_{j,ki} \ddot{q}_j^s q_k^v + \sum_j \sum_k \sum_l \xi_{ijkl} q_j^v q_k^v \ddot{q}_l^v \\
& + \sum_j \sum_k \sum_l \xi_{ijkl} q_j^v \dot{q}_k^v \dot{q}_l^v + 2\dot{\theta} \sum_j \sum_k (\zeta_{ij,k} - \zeta_{jk,i}) q_j^v \dot{q}_k^v \\
& + 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^s \dot{q}_j^s + \dot{\theta}^2 \sum_j \sum_k \beta_{j,ki} q_j^s q_k^v \\
& - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_j \sum_k \sum_l \xi_{ijkl} q_j^v q_k^v q_l^v + \ddot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^s q_j^s \\
& + \ddot{\theta} \sum_j \sum_k \left(\zeta_{ij,k} - \frac{1}{2} \zeta_{jk,i} \right) q_j^v q_k^v + \ddot{\theta} \left(\eta_i + \frac{I}{A} v_i \right) \\
& + \sum_j \left(\frac{EI}{\rho A} \tau_{ij} + \dot{\theta}^2 \rho_{ij} - \dot{\theta}^2 \mu_{ij} \right) q_j^v = 0
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Kinetik ve potansiyel enerji terimlerinin u, v ve φ ve bunların türevleri cinsinden ifade olunması halinde φ ye ilişkin denklemlerin yapısı değişmemekte, buna mukabil u ve v ile ilgili denklemler aşağıdaki gibi elde olunmaktadır:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \alpha_{ij}^u \ddot{q}_j^u - 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ij}^u \dot{q}_j^v - \ddot{\theta} \sum_j \gamma_{ij}^u q_j^v + \frac{1}{2} \frac{E}{\rho} \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} q_j^v q_k^v \\
& + \sum_j \left(\frac{E}{\rho} \psi_{ij}^u - \dot{\theta}^2 \alpha_{ij}^u \right) q_j^u - \dot{\theta}^2 \Delta^u_i = 0
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j \mu_{ij} \ddot{q}_j^v + 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^u \dot{q}_j^u + \ddot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^u q_j^u + \ddot{\theta} \eta_i \\
& + \frac{1}{2} \frac{E}{\rho} \sum_j \sum_k \sum_l \zeta_{ijkl} q_j^v q_k^v q_l^v + \frac{E}{\rho} \sum_j \sum_l \varepsilon_{jik} q_j^u q_k^v \\
& + \sum_j \left(k' \frac{G}{\rho} v_{ij} - \dot{\theta}^2 \mu_{ij} \right) q_j^v - k' \frac{G}{\rho} \sum_j \Omega_{ij} q_j^\varphi = 0
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$\varphi = \partial v / \partial x$ ise, v denklemini

$$\begin{aligned}
& \sum_j \mu_{ij} \ddot{q}_j^v + 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^u \dot{q}_j^u + \ddot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^u q_j^u + \ddot{\theta} \eta_i + \frac{I}{A} \ddot{\theta} v_i + \sum_j \left(\frac{EI}{\rho A} \tau_{ij} - \dot{\theta}^2 \mu_{ij} \right) q_j^v \\
& + \frac{1}{2} \frac{E}{\rho} \sum_j \sum_k \sum_l \zeta_{ijkl} q_j^v q_k^v q_l^v + \frac{E}{\rho} \sum_j \sum_k \varepsilon_{jik} q_j^u q_k^v = 0
\end{aligned} \tag{5.50}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij}^u &= \int_0^L \phi_i^u \phi_j^u dx & \gamma_{ij}^u &= \int_0^L \phi_i^u \phi_j^v dx & \epsilon_{ijk} &= \int_0^L \phi_i'^u \phi_j'^v \phi_k'^v dx, \\
\Delta^u_i &= \int_0^L \phi_i^u x dx, & \psi_{ij}^u &= \int_0^L \phi_i'^u \phi_j'^u dx, & \varsigma_{ijkl} &= \int_0^L \phi_i'^v \phi_j'^v \phi_k'^v \phi_l'^v dx,
\end{aligned} \tag{5.51}$$

şeklinde tarif edilmiştir.

(4.29) bağıntısında normal kuvvet yerine merkezkaç kuvvetin alınması halinde,

$$\begin{aligned}
\sum_j \alpha_{ij}^u \ddot{q}_j^u - 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ij}^u \dot{q}_j^v - \ddot{\theta} \sum_j \gamma_{ij}^u q_j^v \\
+ \sum_j \left(\frac{E}{\rho} \psi_{ij}^u - \dot{\theta}^2 \alpha_{ij}^u \right) q_j^u - \dot{\theta}^2 \Delta^u_i = 0
\end{aligned} \tag{5.52}$$

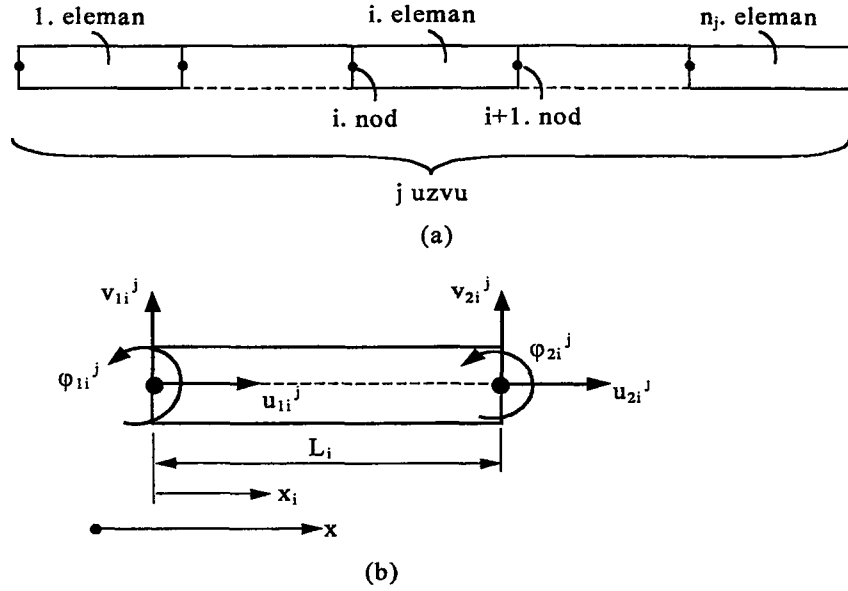
$$\begin{aligned}
\sum_j \mu_{ij} \ddot{q}_j^v + 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^u \dot{q}_j^u + \ddot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^u q_j^u + \ddot{\theta} \left(\eta_i + \frac{I}{A} v_i \right) \\
+ \sum_j \left(\frac{EI}{\rho A} \tau_{ij} - \dot{\theta}^2 \mu_{ij} \right) q_j^v + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 L^2 \left(\sum_j (v_{ij} - \chi_{ij}) q_j^v \right) = 0
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Burada $\chi_{ij} = \int_0^L \phi_i'^v \phi_j'^v x^2 dx$ dir.

Böylece, kabul edilmiş modlar metodu ile sistemin yüksek mertebeden ve kısmi türevli hareket denklemleri, sayısal olarak çözümünü mümkün olan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı haline dönüştürülmüş olmaktadır.

5.3.2. Hareket Denklemlerinin Çıkarılmasında Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi de aslında bir ayrıklaştırma prosesidir. Yöntemin ana fikri mevcut sistemi daha küçük elemanlara ayrılmış gibi düşünüp, herbir elemanda incelenen olaya ilişkin büyüklüklerin değişimini ifade etmek ve daha sonra elemanların birbirleriyle bağlantı noktalarında süreklilik şartlarını göz önünde tutarak “nodal büyüklükler” cinsinden sağlanacak olan denklemler elde etmektir. Her elemanın komşu elemanlara bağlandığı noktalara elemanın uçları, bir elemanın diğer bir elemanla bağlandığı noktalara ise düğüm denir. Bazen hassasiyet amacıyla eleman da alt elemanlara bölünebilir. Bu durumda elemanın sınırları içinde de düğümlerden bahsedilebilir.



Şekil 5.2. Manipulatörün j Uzunluğunun Sonlu Eleman Modeli

Bir manipulatörün dinamik analizinde de sonlu elemanlar yöntemi sıkça kullanılan yöntemlerden biridir. Sonlu eleman formülasyonlarında da farklı çıkış noktaları mevcuttur. Çıkarılmış bir hareket denkleminin her elemenda geçerli olduğu düşüncesine dayanan Galerkin yöntemiyle, enerji terimlerinden hareket eden Lagrange yöntemi başlıca iki yaklaşımdır. Burada Lagrange tipi sonlu eleman formülasyonu ele alınacaktır.

Manipulatörün herhangi uzunluğunun sonlu eleman yöntemiyle analizinde ilk adım kolun elemanlara bölünmesi ve eleman uçlarına ait değişkenlerin belirlenmesidir. Rijit manipulatöre ait hareket programı biliniyorsa, böyle bir dinamik analizde nodal büyüklüklerin yer değiştirme ve dönmeler olarak seçilmesi anlamlı olur. Şekil 5.2 de manipulatörün j. uzunluğunun sonlu eleman modeli verilmiştir. Şekil 5.2.(b) de j. uzvun i. elemanı nodları ve nodal büyüklükleriyle gösterilmiştir. Burada u_{1i}^j , u_{2i}^j sırasıyla boylamasına, v_{1i}^j , v_{2i}^j enlemesine ve nihayet ϕ_{1i}^j , ϕ_{2i}^j ise açısal deplasmanları göstermektedir. 1 indisli büyüklükler elemanın sol ucunun, 2 indisli liler ise sağ ucunun elastik deplasmanlarıdır. Bu deplasmanlar j. uzva bağlı dönen koordinat takımında tanımlanmaktadır. Dolayısıyla sabit takımdaki elastik deformasyonlara geçmek için (global elastik deformasyonlar) bir koordinat transformasyonu yapılması gerektiği açıktır.

Burada çubuk elemanları sadece bir boyutlu (x boyutu) düşünülmüştür. Dolayısıyla herhangi bir x kesitinin her noktasına u ve v ler aynı değerde

varsayılmaktadır. Elemanın herhangi bir noktasındaki u , v ve φ değerlerinin nodal değerlerin bir kombinasyonu olduğu ön görülmektedir. Bu nedenle burada Galerkin veya kabul edilmiş modlar metodunda olduğu gibi bağımlı değişkenin zaman ve konum koordinatları cinsinden ayrıştırılması söz konusudur. Burada kabul edilebilir veya mukayese fonksiyonlarının yerine interpolasyon fonksiyonları alınmaktadır. İnterpolasyon fonksiyonları genelde elemana ait koordinat takımında tanımlanır, zira bu ifade basitliği sağlar. Buna göre j uzvunun i elemanının herhangi bir x_i mesafesindeki ($0 \leq x_i \leq L_i^j$) u ve v büyüklükleri,

$$\begin{aligned} u_i^j(x_i^j, t) &= f_{u1}(x_i^j) u_{1i}^j(t) + f_{u2}(x_i^j) u_{2i}^j(t) \\ v_i^j(x_i^j, t) &= f_{v1}(x_i^j) v_{1i}^j(t) + f_{v2}(x_i^j) v_{2i}^j(t) \\ &+ f_{\varphi 1}(x_i^j) \varphi_{1i}^j(t) + f_{\varphi 2}(x_i^j) \varphi_{2i}^j(t) \end{aligned} \quad (5.54)$$

şeklinde yazılabilir. Burada kesme tesirinin göz önüne alınmadığı varsayıldığından φ ayrıca tarif edilmemiştir. Bu durumda $\varphi_i^j = \partial v_i^j / \partial x_i$ bağıntısı sağlanmaktadır. Dikkat edilirse j uzvuna bağlı takımın x^j koordinatı ile x_i^j eleman koordinatı arasında

$$x^j = \sum_{k=1}^{i-1} L_m^j + x_i^j \quad (a)$$

ve dolayısıyla (5.55)

$$dx^j = dx_i^j \quad (b)$$

bağıntısı vardır.

f_{uj} , f_{vj} ve $f_{\varphi j}$ fonksiyonları olarak Hermit polinomlarının seçimi literatürde basitliği nedeniyle yaygındır. Bu durumda sadelik için j indisleri atılmış halde,

$$\begin{aligned} f_{u1} &= 1 - \frac{x_i}{L_i} & f_{u2} &= \frac{x_i}{L_i} \\ f_{v1} &= 1 - 3\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^2 + 2\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^3 & f_{v2} &= 3\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^2 - 2\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^3 \\ f_{\varphi 1} &= \left[\left(\frac{x_i}{L_i}\right) - 2\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^2 + \left(\frac{x_i}{L_i}\right)^3 \right] L_i & f_{\varphi 2} &= \left[-\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^2 + \left(\frac{x_i}{L_i}\right)^3 \right] L_i \end{aligned} \quad (5.56)$$

alınmıştır. İnterpolasyon fonksiyonlarının bu tarzda seçilmiş olması, eleman içinde $\partial u_i / \partial x_i$ uzama oranı ile $\partial^3 v_i / \partial x_i^3$ ile verilen kesme kuvvetinin sabit olduğunu kabul etmek demektir. Gerçekten de (5.54) ve (5.56) yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{u_{2i} - u_{1i}}{L_i} = sbt \\ \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_i^3} &= \frac{12}{L_i^3} (v_{1i} - v_{2i}) + \frac{6}{L_i^3} (\varphi_{1i} + \varphi_{2i}) = sbt\end{aligned}\quad (5.57)$$

olduğu görülmektedir. Şu halde eleman sayısı bu kabullerle gerçek sistemin yükleme durumu arasında uyumluluğu sağlayacak düzeyde olmalıdır.

5.3.2.1. Kinetik Enerjinin Hesabı

Bu çalışmada sonlu elemanların Lagrange formülasyonu kullanıldığından herhangi bir eleman noktasının hız vektörünün nodal büyüklükler ve bunların zamana göre değişimlerini hesaplayarak işe başlamak gerekmektedir. Hız vektörü için (5.3) bağıntısında $e=0$ koymak yeterli olmakla beraber, yer vektörü sabit takıma göre tanımlanarak hız vektörüne geçilecektir. Sonlu eleman formülasyonu tek serbestlik dereceli manipulatör için çıkarılacağından çubuğun θ dönmesinin ölçüldüğü takım sabit alınmaktadır. Aksi halde, θ nın ölçüldüğü takımın bir önceki uzva bağlı hareketli bir takım olacağı unutulmamalıdır. Şekil 5.1 deki O-XY sabit takımına göre elastik eğri üzerinde bir noktanın yer vektörü matris formunda

$$\{X\} = [T] \left(\{x\} + \{U\}^i \right) \quad (5.58)$$

şeklinde yazılabilir. Burada X, sabit takımda ölçülen yer vektörü, T hareketli O-xy takımından sabit O-XY takımına transformasyon matrisi, x hareketli takımda deforme olmamış cisimde noktanın yer vektörü, U^i ise i. elemanın sınırları içinde elastik deformasyonlar vektörü olup, açık yazılışları

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (a)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c) \quad (5.59)$$

$$\{U\}^i = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^i \quad (d)$$

şeklindedir. (5.58) de iki tarafın zamana göre türevleri alınırsa mutlak hız vektörü

$$\{V\} = \{\dot{X}\} = [\dot{T}]\left(\{x\} + \{U\}^i\right) + [T]\left(\{0\} + \{\dot{U}\}^i\right) \quad (5.60)$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} [\dot{T}] &= \begin{bmatrix} -\sin \theta \dot{\theta} & -\cos \theta \dot{\theta} \\ \cos \theta \dot{\theta} & -\sin \theta \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} = [T] [\dot{\theta}] \end{aligned} \quad (5.61)$$

olmaktadır. $\{\dot{U}\}^i$ ise

$$\{\dot{U}\}^i = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix}^i \quad (5.62)$$

ile verilmektedir. Bu noktada U^i vektörüyle

$$\{q\}^i = \{u_1 \quad v_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2\}^{iT} \quad (5.63)$$

nodal büyüklükler vektörü arasında

$$[H] = \begin{bmatrix} f_{u1} & 0 & 0 & f_{u2} & 0 & 0 \\ 0 & f_{v1} & f_{\varphi1} & 0 & f_{v2} & f_{\varphi2} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

şeklinde $[H]$ biçim fonksiyonları matrisi tanımlanırsa, (5.54) uyarınca

$$\{U\}^i = [H] \{q\}^i \quad (5.65)$$

olacaktır. Buradan $\{\dot{U}\}^i$

$$\{\dot{U}\}^i = [H] \{\dot{q}\}^i \quad (5.66)$$

şeklinde bulunur. $[H]$ matrisi sadece x_i nin fonksiyonu olduğundan $[\dot{H}] = [0]$ olduğuna dikkat edilmelidir. i elemanının öteleme kinetik enerjisi

$$T_O^i = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \rho_i A_i \{V\}^T \{V\} dx_i \quad (5.67)$$

ile tanımlandığından $\{V\}^T \{V\}$ nin hesaplanması gerekir. Bu çarpım açık yazılırsa

$$\begin{aligned} \{V\}^T \{V\} &= \left\{ [T][\dot{\theta}] \left(\{x\} + \{U\}^i \right) + [T] \{\dot{U}\}^i \right\}^T \left\{ [T][\dot{\theta}] \left(\{x\} + \{U\}^i \right) + [T] \{\dot{U}\}^i \right\} \\ &= \left(\{x\} + \{U\}^i \right)^T [\dot{\theta}]^T [T]^T [T] [\dot{\theta}] \left(\{x\} + \{U\}^i \right) \\ &\quad + \left(\{x\} + \{U\}^i \right)^T [\dot{\theta}]^T [T]^T [T] \{\dot{U}\}^i \\ &\quad + \{\dot{U}\}^{iT} [T]^T [T] [\dot{\theta}] \left(\{x\} + \{U\}^i \right) + \{\dot{U}\}^{iT} [T]^T [T] \{\dot{U}\}^i \end{aligned} \quad (5.68)$$

$[T]$ matrisinin ortogonal ve bu nedenle

$$[T]^T [T] = [T]^{-1} [T] = [I] \quad (5.69)$$

olduğu hatırlanır ve

$$\left(\{x\} + \{U\}^i \right)^T [\theta]^T [T]^T [T] \{\dot{U}\}^i = \{\dot{U}\}^{iT} [T]^T [T] [\theta] \left(\{x\} + \{U\}^i \right)$$

yazılabileceğine dikkat edilirse (5.68) ifadesi

$$\begin{aligned} \{V\}^T \{V\} &= \left(\{x\} + \{U\}^i \right)^T [\theta]^T [\theta] \left(\{x\} + \{U\}^i \right) \\ &+ 2 \{\dot{U}\}^{iT} [\theta] \left(\{x\} + \{U\}^i \right) + \{\dot{U}\}^{iT} \{\dot{U}\}^i \end{aligned} \quad (5.70)$$

şeklinde yazılabilir. i elemanının nodal büyüklükler vektörü ile j . uzvun tüm nodal büyüklükler vektörü arasında

$$\{q\}^i = [S]^i \{q\} \quad (5.71)$$

ilişkisi mevcuttur. Burada j . uzvun eleman sayısı n_j ve her noddaki büyüklüklerin sayısı 3 olmak üzere $\{q\}$ vektörünün $(3n_j+3) \times 1$ lik bir sütun matris olduğu, bu durumda $[S]^i$ nin de elemanları 1 ve 0 lardan oluşan $6 \times (3n_j+3)$ lük bir matris olacağını kaydedelim. (5.65), (5.66) ve (5.71) ile birlikte düşünülüp, (5.70) de yerine konur ve daha açık formda yazılırsa

$$\begin{aligned} \{V\}^T \{V\} &= \{x\}^T [\theta]^T [\theta] \{x\} + 2 \{x\}^T [\theta]^T [\theta] [H] [S]^i \{q\} \\ &+ \{q\}^T [S]^{iT} [H]^T [\theta]^T [\theta] [H] [S]^i \{q\} + 2 \{x\}^T [\theta]^T [\theta] [H] [S]^i \{q\} \\ &+ 2 \{q\}^T [S]^{iT} [H]^T [\theta]^T [H] [S]^i \{q\} + \{q\}^T [S]^{iT} [H]^T [H] [S]^i \{q\} \\ &= \dot{\theta}^2 \{x\}^T \{x\} + 2 \dot{\theta}^2 \{x\}^T [H] [S]^i \{q\} + \dot{\theta}^2 \{q\}^T [S]^{iT} [H]^T [H] [S]^i \{q\} \\ &+ 2 \{x\}^T [\theta]^T [H] [S]^i \{q\} + 2 \{q\}^T [S]^{iT} [H]^T [\theta]^T [H] [S]^i \{q\} \\ &+ \{q\}^T [S]^{iT} [H]^T [H] [S]^i \{q\} \end{aligned} \quad (5.72)$$

elde edilir. Ayrıca

$$T_{\dot{\theta}}^{i,0} = \frac{1}{2} \rho_i A_i \dot{\theta}^2 \int_0^{L_i} \{x\}^T \{x\} dx_i \quad (5.73)$$

teriminin hesaplanması gerekmektedir. Burada x dönen takımında ölçülen mesafe olup (5.55.a) ile x_i ye bağlanmaktadır.

$$\{x\}^T \{x\} = x^2 = \left(\sum_{k=1}^{i-1} L_m + x_i \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{i-1} L_m \right)^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^{i-1} L_m \right) x_i + x_i^2 \quad (5.74)$$

olduğundan yukarıdaki integral

$$T_{\dot{\theta}}^{i,0} = \frac{1}{2} \rho_i A_i \dot{\theta}^2 \left[\left(\sum_{k=1}^{i-1} L_m \right)^2 L_i + \left(\sum_{k=1}^{i-1} L_m \right) L_i^2 + \frac{L_i^3}{3} \right] \quad (5.75)$$

şekline gelir. Basitlik sağlamak amacıyla

$$\begin{aligned} [\bar{M}_{11}]^i &= \rho_i A_i \int_0^{L_i} [H]^T [H] dx_i, & [M_{11}]^i &= [S]^T [\bar{M}_{11}] [S]^i \\ [\bar{M}_{22}]^i &= \rho_i A_i \int_0^{L_i} [H]^T [\dot{\theta}]^T [\dot{\theta}] [H] dx_i, & [M_{22}]^i &= [S]^T [\bar{M}_{22}] [S]^i \\ [\bar{M}_{12}]^i &= \rho_i A_i \int_0^{L_i} [H]^T [\dot{\theta}]^T [H] dx_i, & [M_{12}]^i &= [S]^T [\bar{M}_{12}] [S]^i \\ \{\bar{M}_{x1}\}^{iT} &= \rho_i A_i \int_0^{L_i} \{x\}^T [\dot{\theta}]^T [H] dx_i, & \{M_{x1}\}^{iT} &= \{\bar{M}_{x1}\}^{iT} [S]^i \\ \{\bar{M}_{x2}\}^{iT} &= \rho_i A_i \int_0^{L_i} \{x\}^T [\dot{\theta}]^T [\dot{\theta}] [H] dx_i, & \{M_{x2}\}^{iT} &= \{\bar{M}_{x2}\}^{iT} [S]^i \end{aligned} \quad (5.76)$$

olarak tanımlandığında i elemanın kinetik enerjisi

$$\begin{aligned} T_{\dot{\theta}}^i &= T_{\dot{\theta}}^{i,0} + \{M_{x2}\}^{iT} \{q\} + \frac{1}{2} \{q\}^T [M_{11}]^i \{q\} + \{M_{x1}\}^{iT} \{\dot{q}\} \\ &\quad + \{q\}^T [M_{12}]^i \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M_{22}]^i \{\dot{q}\} \end{aligned} \quad (5.77)$$

şeklinde ifade olunabilir. Elemanın dönme kinetik enerjisi ise

$$T_D^i = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \rho_i I_i (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 dx_i \quad (5.78)$$

idi. Burada $\dot{\phi}$ elastik dönmesi $\{U\}^i$ cinsinden bulunmalıdır. $\dot{\phi} = \partial v / \partial x$ kabulüyle (kesme kuvvetinin etkisi ihmal ediliyor)

$$\dot{\phi} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \end{Bmatrix} \{\dot{U}\}^i = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \end{Bmatrix} [H'] \{\dot{q}\}^i \quad (5.79)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \end{Bmatrix} [H'] [S]^i \{\dot{q}\} = \{\Phi\}^T [H'] [S]^i \{\dot{q}\}$$

yazılabilir. Burada $\{\Phi\}$ ile

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.80)$$

vektörü gösterilmiştir. Buna göre

$$\begin{aligned} T_D^{i,0} &= \frac{1}{2} \rho_i I_i L_i \dot{\theta}^2 \\ \{\bar{J}\}^{iT} &= \dot{\theta} \rho_i I_i \int_0^{L_i} \{\Phi\}^T [H'] dx_i, & \{J\}^{iT} &= \{\bar{J}\}^{iT} [S]^i \\ [\bar{J}_{11}]^{iT} &= \rho_i I_i \int_0^{L_i} [H']^T \{\Phi\}^T \{\Phi\} [H'] dx_i, & [J_{11}]^{iT} &= [S]^{iT} [\bar{J}_{11}]^{iT} [S]^i \end{aligned} \quad (5.81)$$

tanımlanırsa

$$T_D^i = T_D^{i,0} + \{J\}^{iT} \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [J_{11}]^i \{\dot{q}\} \quad (5.82)$$

olmaktadır. Neticede i. elemanın toplam kinetik enerjisi

$$T^i = T_O^i + T_D^i \quad (5.83)$$

ve uzvun toplam kinetik enerjisi

$$T = \sum_{i=1}^{n_i} T^i \quad (5.84)$$

şeklinde bulunur.

5.3.2.2. Potansiyel Enerjinin Hesabı

Bölüm 4 de bahsedildiği üzere elastik potansiyel enerjinin normal kuvvetten kaynaklanan kısmı yaklaşık olarak,

$$V_N \cong \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L N \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.29)$$

ile verilmekteydi. Sonlu eleman formülasyonunda da bu yol takip edildiğinden burada önce (4.29) ile verilen bağıntıya i. elemanın katkısı hesaplanacak, sonra tüm uzuv için V_N potansiyeli elemanların katkıları toplanarak bulunacaktır. Bu nedenle $\partial u / \partial x$ ve $\partial v / \partial x$ in $\partial U^i / \partial x_i$ cinsinden ifade edilmesi gerekmektedir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \{1 \quad 0\} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}^i = \{1 \quad 0\} [H'] \{q\}^i = \{1 \quad 0\} [H'] [S]^i \{q\} \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \{0 \quad 1\} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}^i = \{0 \quad 1\} [H'] \{q\}^i = \{0 \quad 1\} [H'] [S]^i \{q\}$$

$$\text{olup } \{Q\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.86)$$

olarak tanımlanırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \{Q\}^T [H'] [S]^i \{q\} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \{\Phi\}^T [H'] [S]^i \{q\} \quad (5.87)$$

bulunur. N normal kuvvetine

$$N \cong \frac{1}{2} \rho A (L^2 - x^2) \dot{\theta}^2 \quad (5.88)$$

şeklinde merkezkaç kuvvetle yaklaşırsa (4.29) bağıntısı yardımıyla i. elemanın V_N potansiyeline katkısı olan V_N^i

$$\begin{aligned} V_N^i &= \frac{1}{2} E_i A_i \int_0^{L_i} \{q\}^T [S]^i T [H']^T \{Q\} \{Q\}^T [H'] [S]^i \{q\} dx_i \\ &+ \frac{1}{2} \rho_i A_i L^2 \dot{\theta}^2 \int_0^{L_i} \{q\}^T [S]^i T [H']^T \{\Phi\} \{\Phi\}^T [H'] [S]^i \{q\} dx_i \\ &- \frac{1}{2} \rho_i A_i \dot{\theta}^2 \int_0^{L_i} \{q\}^T [S]^i T [H']^T \{\Phi\} \{x\} \{x\}^T \{\Phi\}^T [H'] [S]^i \{q\} dx_i \end{aligned} \quad (5.89)$$

olur. Basitlik sağlaması açısından,

$$\begin{aligned} [\bar{K}_u]^i &= E_i A_i \int_0^{L_i} [H']^T \{Q\} \{Q\}^T [H'] dx_i \\ [\bar{K}_{N,L}]^i &= \frac{1}{2} \rho_i A_i \dot{\theta}^2 L^2 \int_0^{L_i} [H']^T \{\Phi\} \{\Phi\}^T [H'] dx_i \\ [\bar{K}_{N,x}]^i &= \frac{1}{2} \rho_i A_i \dot{\theta}^2 \int_0^{L_i} [H']^T \{\Phi\} \{x\} \{x\}^T \{\Phi\}^T [H'] dx_i \\ [K_u]^i &= [S]^i T [\bar{K}_u]^i [S]^i \\ [K_N]^i &= [S]^i T \left[[\bar{K}_{N,L}]^i - [\bar{K}_{N,x}]^i \right] [S]^i \end{aligned} \quad (5.90)$$

matrisleri tanımlanırsa V_N^i ifadesi

$$V_N^i = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_u]^i \{q\} + \{q\}^T [K_N]^i \{q\} \quad (5.91)$$

halini alır. Eğilme momentinin işi ise lineer teoriden

$$V_M = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (5.92)$$

olup,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \{\Phi\}^T [H^r] [S]^i \{q\} \quad (5.93)$$

yazılabildiğinden i. elemanın eğilme momentinin potansiyeline katkısı V_M^i

$$V_M^i = \frac{1}{2} E_i I_i \int_0^{L_i} \{q\}^T [S]^i T [H^r]^T \{\Phi\} \{\Phi\}^T [H^r] [S]^i \{q\} dx_i \quad (5.94)$$

olacaktır. Burada yine,

$$[\bar{K}_M]^i = E_i I_i \int_0^{L_i} [H^r]^T \{\Phi\} \{\Phi\}^T [H^r] dx_i \quad (5.95)$$

$$[K_M]^i = [S]^i T [\bar{K}_M]^i [S]^i$$

tanımlanırsa

$$V_M^i = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_M]^i \{q\} \quad (5.96)$$

şeklinde ifade olunabilir. Bu durumda uzvun toplam elastik potansiyel enerjisi ise

$$V = \sum_{i=1}^{n_j} (V_N^i + V_M^i) \quad (5.97)$$

olur. Bu bölümde ele alınan yatay düzlemde hareket eden tek serbestlik dereceli sistem için ağırlık potansiyeli sıfır alınabilir. Kolun Lagrangianı (4.6) uyarınca

$$L = T - V$$

olup, burada q_i ve \dot{q}_i lere göre gerekli türevler alınırsa hareket denklemleri matris formunda

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} \quad (5.98)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$[M] = [M_{11}] + [J_{11}]$$

$$\begin{aligned}
[C] &= 2 [M_{12}]^T \\
[K] &= [-[M_{11}] + [K_u] + [K_N] + [K_M]] \\
\{F\} &= -\{\dot{M}_{x1}\} - \{\dot{J}\} + \{M_{x2}\}
\end{aligned} \tag{5.99}$$

olmaktadır. Eşitliklerin sağ tarafındaki büyüklükler tüm uzva ait matrisler olup, örneğin

$$\begin{aligned}
[M_{11}] &= \sum_{i=1}^{n_j} [M_{11}]^i, \quad [J_{11}] = \sum_{i=1}^{n_j} [J_{11}]^i \\
&\quad \vdots \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{5.100}$$

bağıntıları mevcuttur. Ancak $\{F\}$ vektörünü oluşturan $\{\dot{M}_{x1}\}$, $\{\dot{J}\}$ ve $\{M_{x2}\}$ vektörleri ise $\{M_{x1}\}^i$, $\{J\}^i$ ve $\{M_{x2}\}^i$ vektörlerinden biraz daha farklı bir prosedür izlenerek hesaplanmaktadır.

5.3.3. Galerkin Yöntemi

(5.13), (5.14) veya diğerleri gibi kısmi türevli diferansiyel denklemler şeklinde elde olunan hareket denklemlerinin çözümü için uygulanacak yöntemlerden biri de Galerkin prosedürüdür. Burada (5.15) denklem takımında kesit dönme ataleti ihmal edilmek koşuluyla Galerkin prosedürünün uygulanışı bir örnek olarak ele alınacaktır. Bu amaçla denklemlerin tüm terimleri bir tarafta toplanarak aşağıdaki forma getirilebilirler:

$$\begin{aligned}
\ddot{u} - u\dot{\theta}^2 - 2\dot{v}\dot{\theta} - v\ddot{\theta} - \frac{E}{\rho} \left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)' - x\dot{\theta}^2 &= 0 \\
\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{\theta} - v\dot{\theta}^2 + u\ddot{\theta} + \frac{EI}{\rho A} v''' - \frac{E}{\rho} \left[\left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) v' \right]' + x\ddot{\theta} &= 0
\end{aligned} \tag{5.101}$$

Bu denklemlerde u ve v bağımlı değişkenleri yerine aynen kabul edilmiş modlar yönteminde olduğu gibi,

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x,t) &= \sum_{j=1}^{n_u} \phi_j^u(x) q_j^u(t) \\
\bar{v}(x,t) &= \sum_{j=1}^{n_v} \phi_j^v(x) q_j^v(t)
\end{aligned} \tag{5.102}$$

şeklinde sonlu serilerden ibaret \bar{u} ve \bar{v} yaklaşık çözümleri yerleştirilirse (5.101) denklemleri,

$$\begin{aligned}
& \sum_i \phi_i^u \ddot{q}_i^u - \dot{\theta}^2 \sum_i \phi_i^u q_i^u - 2\dot{\theta} \sum_i \phi_i^v \dot{q}_i^v - \ddot{\theta} \sum_i \phi_i^v q_i^v \\
& - \frac{E}{\rho} \left(\sum_i \phi_i^{uu} q_i^u + \sum_i \sum_j \phi_i^v \phi_j^{vv} q_i^v q_j^v \right) - x \dot{\theta}^2 = \varepsilon_u(x, t) \\
& \sum_i \phi_i^v \ddot{q}_i^v - \dot{\theta}^2 \sum_i \phi_i^v q_i^v + 2\dot{\theta} \sum_i \phi_i^u \dot{q}_i^u + \ddot{\theta} \sum_i \phi_i^u q_i^u + \frac{EI}{\rho A} \sum_i \phi_i^{vvv} q_i^v \\
& - \frac{E}{\rho} \left[\sum_i \sum_j \phi_i^{uv} \phi_j^{vu} q_i^u q_j^v + \sum_i \sum_j \phi_i^u \phi_j^{vv} q_i^u q_j^v \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \phi_i^v \phi_j^v \phi_k^{vv} q_i^v q_j^v q_k^v \right] + x \ddot{\theta} = \varepsilon_v(x, t)
\end{aligned} \tag{5.103}$$

halini alır. Burada $\varepsilon_u(x, t)$ ve $\varepsilon_v(x, t)$ denklemlerde kesin çözümler yerine yaklaşık çözümlerin kullanılmasından ortaya çıkan hatayı temsil eden fonksiyonlardır. Galerkin prosedürü (5.102) yaklaşık çözümlerinde x e bağlı fonksiyonların katsayılarının, bu ε_u ve ε_v hata fonksiyonlarını çözüm domeni üzerinde minimize edecek tarzda seçmeye dayanır, şöyle ki ϕ_i^u ve ϕ_j^v ler,

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \phi_i^u \varepsilon_u(x, t) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N_u \\
& \int_0^L \phi_j^v \varepsilon_v(x, t) dx = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N_v
\end{aligned} \tag{5.104}$$

şartını sağlamalıdır. Bu işlem ise sırasıyla ε_u ve ε_v ile ilgili denklemlerin tüm terimlerini ϕ_i^u ve ϕ_j^v ile çarpıp, konum koordinat(lar)ının çözüm domeni üzerinde integrali demektir. Sonuçta x bağımsız değişkeni denklemlerde ortadan kalkar ve (5.101) denklem takımından toplam $N_u + N_v$ adet bağlı, adi diferansiyel denklemden oluşan bir takıma geçilmiş olur, artık yegane bağımsız koordinat t zamanıdır. (5.104) prosedürünün uygulanmasından sonra elde olunan denklemler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \alpha_{ij}^u \ddot{q}_j^u - 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ij}^u \dot{q}_j^v - \ddot{\theta} \sum_j \gamma_{ij}^u q_j^v \\
& - \sum_j \left(\frac{E}{\rho} \delta_{ij}^u + \dot{\theta}^2 \alpha_{ij}^u \right) q_j^u - \frac{E}{\rho} \sum_j \sum_k \mathfrak{R}_{ijk}^u q_j^v q_k^v = \dot{\theta}^2 \Delta^u_i
\end{aligned} \tag{5.105}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j \mu_{ij} \ddot{q}_j^u + 2\dot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^u \dot{q}_j^u + \ddot{\theta} \sum_j \gamma_{ji}^u q_j^u \\
& + \sum_j \left(\frac{EI}{\rho A} \tau_{ij} - \dot{\theta}^2 \mu_{ij} \right) q_j^v - \frac{E}{\rho} \sum_j \sum_k \left(\hat{h}_{ijk}^u + \hat{\lambda}_{ijk}^u \right) q_j^v q_k^u \\
& - \frac{3}{2} \frac{E}{\rho} \sum_j \sum_k \sum_l \ell_{ijkl} q_j^v q_k^v q_l^v = -\ddot{\theta} \eta_i
\end{aligned} \tag{5.106}$$

Burada (5.43) ve (5.51) e ilave olarak,

$$\begin{aligned}
\delta_{ij}^u &= \int_0^L \phi_i^u \phi_j^{u''} dx, & \mathfrak{R}_{ijk}^u &= \int_0^L \phi_i^u \phi_j^{v'} \phi_k^{v''} dx, & \hat{h}_{ijk}^u &= \int_0^L \phi_i^v \phi_j^{v'} \phi_k^{u''} dx, \\
\hat{\lambda}_{ijk}^u &= \int_0^L \phi_i^v \phi_j^{v''} \phi_k^{u'} dx, & \ell_{ijkl} &= \int_0^L \phi_i^v \phi_j^{v'} \phi_k^{v''} \phi_l^{v''} dx
\end{aligned} \tag{5.107}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Galerkin yönteminin kabul edilmiş modlar yönteminden farkı, bu prosedürün yukarıda görüldüğü gibi herhangi bir suretle elde edilmiş nihai formdaki hareket denklemlerini ayrıklaştırmada kullanılmasıdır. Kabul edilmiş modlar yönteminde ise enerji terimlerinden yola çıkıldığından elde olunan denklemler doğrudan q_j^u ve q_j^v ler cinsinden olmaktadır.

Sonuçların sunulduğu ve irdelendiği bölümde de değinilecek olmakla birlikte burada kayda değer bir hususu belirtmekte fayda vardır. (5.101) nonlineer denklemlerine Galerkin prosedürü uygulanırken bu bölümün başında sunulan tek serbestlik dereceli kol örneğinde hemen anlaşılacağı üzere u ve v arasında bir ilişkinin mevcut olduğu göz ardı edilmemelidir. Bu nedenle ϕ_j^u fonksiyonları olarak bir ucu sabit bir ucu serbest çubuğun boyuna titreşimine ait modal fonksiyonlar seçilirse sistem matematiksel olarak katılaştırılmakta, bu nedenle hayli küçük ve farklı sehimler bulunmaktadır.

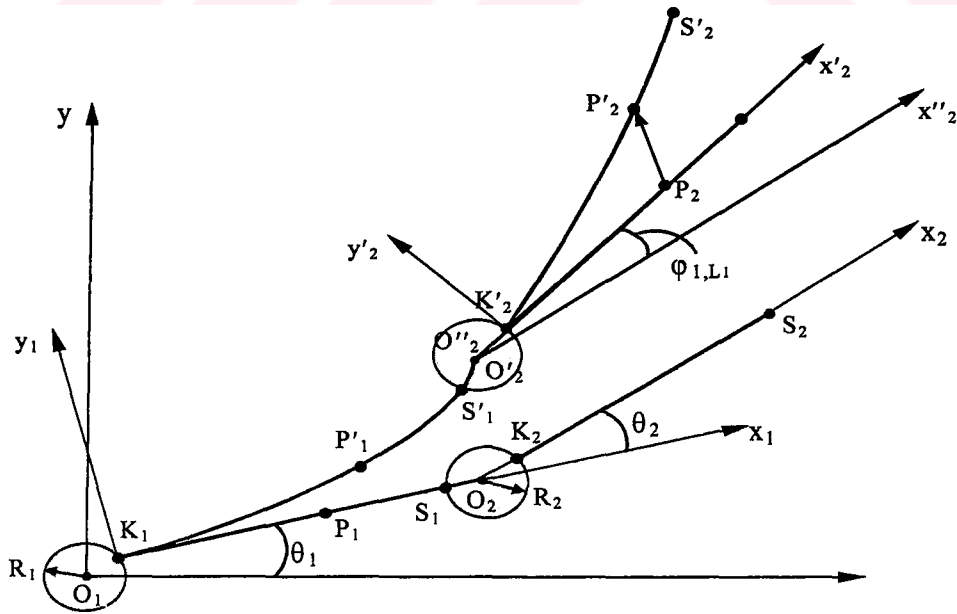
6. İKİ SERBESTLİK DERECELİ MANİPULATÖRÜN HAREKET DENKLEMLERİ

6.1. Giriş

Bu bölümde nümerik çözümleri yapılmamakla birlikte iki serbestlik dereceli düzlemsel bir manipulatörün hareket denklemleri ve sınır şartları verilecektir. Uzunların elastik hareketlerine ait denklemleri sistemin Lagrangianından elde edilmekle birlikte sınır şartları için Hamilton ilkesinin uygulanması gerekir. Sınır şartları dikkatli bir mülahazayla da çıkarılabilir, ancak teoremin hassasiyet mertebesi önceden iyice belirlenmiş olmalıdır.

6.2. Kinematik Analiz

Burada her ne kadar Bölüm 3. deki genel kinematik analiz prosedürü kullanılabilirse de ele alınan manipulatörün düzlem olması nedeniyle transformasyon matrislerini doğrudan kullanmaksızın kinematik bağıntılar çıkarılacaktır. Zaten ilk uzvun kinematiği Bölüm 5. deki bağıntılarla rotor yarıçapı farkıyla aynı olmaktadır. Kinematik ilişkilerin tespiti için Şekil 6.1. deki manipulatörün geometrisi esas alınacaktır. Bu mekanizmada rotor yarıçapları ihmal edilmeyeceğinden daha sonra



Şekil 6.1. İki Serbestlik Dereceli Düzlemsel Manipulatör

bulunacak hareket denklemlerinde geometrik sınır şartlarını elde etmek için uzuvlara bağlı koordinat takımları orijinleri rotor merkezlerinde değil, uzuvların rotora bağlandığı kök noktalarında olacak tarzda seçilmiştir. Rotor yarıçapları sırasıyla R_1 ve R_2 , uzuv uzunlukları $K_1S_1=L_1$, $K_2S_2=L_2$ olsun. 1 nolu uzvun bir P_1 noktasının O_1 merkezine göre deformasyondan sonraki yer vektörü,

$$\vec{r}_{O_1P_1} = \vec{r}_{O_1K_1} + \vec{r}_{K_1P_1} \quad (6.1)$$

olup, buradaki vektörlerin açık yazılışı sırasıyla şöyledir:

$$\vec{r}_{O_1K_1} = R_1 \cos \theta_1 \vec{i} + R_1 \sin \theta_1 \vec{j} \quad (6.2)$$

$$\vec{r}_{K_1P_1} = (x_1 + u_1) \vec{i}_1 + v_1 \vec{j}_1 \quad (6.3)$$

$x_1K_1y_1$ takımının birim vektörleri $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, xO_1y sabit takımının birim vektörleri cinsinden,

$$\vec{i}_1 = \cos \theta_1 \vec{i} + \sin \theta_1 \vec{j} \quad (6.4)$$

$$\vec{j}_1 = -\sin \theta_1 \vec{i} + \cos \theta_1 \vec{j}$$

şeklinde ifade olunabilir. (6.4) eşitlikleri (6.3) de yerleştirilip (6.1) yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{O_1P_1} = \{ [R_1 + (x_1 + u_1)] \cos \theta_1 - v_1 \sin \theta_1 \} \vec{i} \\ + \{ [R_1 + (x_1 + u_1)] \sin \theta_1 + v_1 \cos \theta_1 \} \vec{j} \end{aligned} \quad (6.5)$$

elde edilir. (6.5) in zamana göre türevi P_1 noktasının hızını verir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_{O_1P_1}}{\partial t} = \vec{v}_1 = \{ (\dot{u}_1 \cos \theta_1 - \dot{v}_1 \sin \theta_1) - \\ [(R_1 + (x_1 + u_1)) \sin \theta_1 + v_1 \cos \theta_1] \dot{\theta}_1 \} \vec{i} \\ + \{ (\dot{u}_1 \sin \theta_1 + \dot{v}_1 \cos \theta_1) + \\ [(R_1 + (x_1 + u_1)) \cos \theta_1 - v_1 \sin \theta_1] \dot{\theta}_1 \} \vec{j} \end{aligned} \quad (6.6)$$

P_1 noktası elastik eğriye ait olduğundan (6.6) ile verilen hızla bulunacak kinetik enerji uzvun öteleme hareketine ait kinetik enerjiyi temsil eder. 1 uzvunun rijit ve elastik dönmelerden kaynaklanan kinetik enerjisini hesaplamak için herhangi diferansiyel levhanın dönme hızını da belirlemek gerekir. Bu ise rijit dönme hızıyla elastik dönme hızları toplanarak bulunur:

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{k} + \dot{\phi}_1 \vec{k} \quad (6.7)$$

Kesme kuvveti etkisi göz önüne alınmadığı takdirde $\dot{\phi}_1$,

$$\dot{\phi}_1(x_1, t) = \frac{\partial^2 v_1(x_1, t)}{\partial x \partial t} \quad (6.8)$$

bağıntısı ile bulunur.

2 nolu uzvun elastik eğrisine ait bir P'_2 noktasının O_1 e göre yer vektörü ise Şekil 6.1. yardımıyla,

$$\vec{r}_{O_1P'_2} = \vec{r}_{O_1S'_1} + \vec{r}_{S'_1O'_2} + \vec{r}_{O'_2K'_2} + \vec{r}_{K'_2P'_2} \quad (6.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{O_1S'_1} = & \left\{ [R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})] \cos \theta_1 - v_{1,L_1} \sin \theta_1 \right\} \vec{i} \\ & + \left\{ [R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})] \sin \theta_1 + v_{1,L_1} \cos \theta_1 \right\} \vec{j} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\vec{r}_{S'_1O'_2} = R_2 \cos(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) \vec{i} + R_2 \sin(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) \vec{j} \quad (6.11)$$

$$\vec{r}_{O'_2K'_2} = R_2 \cos(\theta_1 + \varphi_{1,L_1} + \theta_2) \vec{i} + R_2 \sin(\theta_1 + \varphi_{1,L_1} + \theta_2) \vec{j} \quad (6.12)$$

olup, L_1 indisi u_1 , v_1 ve φ_1 değişkenlerinin $x_1=L_1$ deki değerlerine tekabül etmektedir.

Ayrıca,

$$\vec{r}_{K'_2P'_2} = (x_2 + u_2) \vec{i}_2 + v_2 \vec{j}_2 \quad (6.13)$$

olup, burada \vec{i}_2 , \vec{j}_2 , \vec{k}_2 vektörlerinin \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} vektörleri cinsinden,

$$\begin{aligned} \vec{i}_2 &= \cos \bar{\theta}_2 \vec{i} + \sin \bar{\theta}_2 \vec{j} \\ \vec{j}_2 &= -\sin \bar{\theta}_2 \vec{i} + \cos \bar{\theta}_2 \vec{j} \end{aligned} \quad (6.14)$$

şeklindeki karşılıkları (6.13) de yerine konduğunda,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{K'_2P'_2} = & [(x_2 + u_2) \cos \bar{\theta}_2 - v_2 \sin \bar{\theta}_2] \vec{i} \\ & + [(x_2 + u_2) \sin \bar{\theta}_2 + v_2 \cos \bar{\theta}_2] \vec{j} \end{aligned} \quad (6.15)$$

bulunur. Burada $\bar{\theta}_2$ açısı,

$$\bar{\theta}_2 = \theta_1 + \varphi_{1,L_1} + \theta_2 \quad (6.16)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (6.10), (6.11), (6.12) ve (6.15) eşitlikleri (6.9) ifadesinde yerleştirilir ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{O_1P'_2} = & \left\{ [R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})] \cos \theta_1 - v_{1,L_1} \sin \theta_1 + \right. \\ & \left. R_2 \cos(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) + [R_2 + (x_2 + u_2)] \cos \bar{\theta}_2 - v_2 \sin \bar{\theta}_2 \right\} \vec{i} \\ & + \left\{ [R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})] \sin \theta_1 + v_{1,L_1} \cos \theta_1 + \right. \\ & \left. R_2 \sin(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) + [R_2 + (x_2 + u_2)] \sin \bar{\theta}_2 + v_2 \cos \bar{\theta}_2 \right\} \vec{j} \end{aligned} \quad (6.17)$$

elde edilir. (6.17) nin zamana göre türevi P'_2 noktasının çizgisel hızını verir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_{O_1 P'_2}}{\partial t} = \vec{v}_2 = & \left\{ (\dot{u}_{1,L_1} \cos \theta_1 - \dot{v}_{1,L_1} \sin \theta_1) - \right. \\ & \left[(R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})) \sin \theta_1 + v_{1,L_1} \cos \theta_1 \right] \dot{\theta}_1 - \\ & R_2 \sin(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_{1,L_1}) + (\dot{u}_2 \cos \bar{\theta}_2 - \dot{v}_2 \sin \bar{\theta}_2) - \\ & \left. [(R_2 + (x_2 + u_2)) \sin \bar{\theta}_2 + v_2 \cos \bar{\theta}_2] \dot{\bar{\theta}}_2 \right\} \vec{i} \\ & + \left\{ (\dot{u}_{1,L_1} \sin \theta_1 + \dot{v}_{1,L_1} \cos \theta_1) + \right. \\ & \left[(R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})) \cos \theta_1 - v_{1,L_1} \sin \theta_1 \right] \dot{\theta}_1 + \\ & R_2 \cos(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_{1,L_1}) + (\dot{u}_2 \sin \bar{\theta}_2 + \dot{v}_2 \cos \bar{\theta}_2) + \\ & \left. [(R_2 + (x_2 + u_2)) \cos \bar{\theta}_2 - v_2 \sin \bar{\theta}_2] \dot{\bar{\theta}}_2 \right\} \vec{j} \end{aligned} \quad (6.18)$$

2 nolu uzvun kesit dönmelerinin açısal hızı $\bar{\omega}_2$ ise,

$$\bar{\omega}_2 = \dot{\theta}_1 \vec{k} + \dot{\varphi}_{1,L_1} \vec{k} + \dot{\theta}_2 \vec{k} \quad (6.19)$$

olduğu açıktır. 2 nolu tahrik motorunun kinetik enerjisi de hesaba katılacağından $\vec{r}_{O_1 O'_2}$ vektörünün ve dolayısıyla $\vec{v}_{O'_2}$ hızının da belirlenmesi gerekmektedir. Bu vektör,

$$\vec{r}_{O_1 O'_2} = \vec{r}_{O_1 S_1} + \vec{r}_{S_1 O'_2} \quad (6.20)$$

olup, açık yazılışı,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{O_1 O'_2} = & \left\{ [R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})] \cos \theta_1 - v_{1,L_1} \sin \theta_1 + R_2 \cos(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) \right\} \vec{i} \\ & + \left\{ [R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})] \sin \theta_1 + v_{1,L_1} \cos \theta_1 + R_2 \sin(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) \right\} \vec{j} \end{aligned} \quad (6.21)$$

şeklindedir. Bu ifadenin zamana göre türevi $\vec{v}_{O'_2}$ mutlak hızını vermektedir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_{O_1 O'_2}}{\partial t} = \vec{v}_{O'_2} = & \left\{ (\dot{u}_{1,L_1} \cos \theta_1 - \dot{v}_{1,L_1} \sin \theta_1) - \right. \\ & \left[(R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})) \sin \theta_1 + v_{1,L_1} \cos \theta_1 \right] \dot{\theta}_1 - \\ & R_2 \sin(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_{1,L_1}) \right\} \vec{i} \\ & + \left\{ (\dot{u}_{1,L_1} \sin \theta_1 + \dot{v}_{1,L_1} \cos \theta_1) + \right. \\ & \left[(R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})) \cos \theta_1 - v_{1,L_1} \sin \theta_1 \right] \dot{\theta}_1 + \\ & R_2 \cos(\theta_1 + \varphi_{1,L_1}) (\dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_{1,L_1}) \right\} \vec{j} \end{aligned} \quad (6.22)$$

2 nolu motorun statorunun açısal hızı,

$$\bar{\omega}_{M_2S} = \dot{\theta}_1 \bar{k} + \dot{\phi}_{1,L_1} \bar{k} \quad (6.23)$$

ve rotorununki ise $\bar{\omega}_2$ olmaktadır. 1 nolu motorun rotoru ise $\bar{\omega}_1$ açısal hızıyla dönmektedir.

Uzuvların aksenal uzama oranlarına yine Bölüm 4' de açıklandığı üzere,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u'_1 + \frac{1}{2} v_1'^2 \\ \varepsilon_2 &= u'_2 + \frac{1}{2} v_2'^2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

bağıntılarıyla yaklaşmaktadır. Ayrıca lineer eğrilik-moment bağıntısının geçerliliği kabul edilmektedir. Bu hazırlıklardan sonra sistemin Lagrangianı hesaplanabilir.

6.3. Sistem Lagrangianının Bulunması

Sistem Lagrangianının bulunması için öncelikle, sistemi oluşturan iki motor ve iki uzuvdan ibaret elemanların kinetik ve potansiyel enerjilerinin ayrı ayrı tanımlanması ve bilahare toplanarak sistemin toplam kinetik ve potansiyel enerjilerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu elemanların kinetik enerjileri sırasıyla şöyledir:

1. uzvun ötelenme kinetik enerjisi,

$$T_1^{\dot{O}} = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \bar{v}_1^2 dx_1 \quad (6.25)$$

1. uzvun dönme kinetik enerjisi,

$$T_1^D = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \rho_1 I_1 \bar{\omega}_1^2 dx_1 \quad (6.26)$$

2. uzvun ötelenme kinetik enerjisi,

$$T_2^{\dot{O}} = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho_2 A_2 \bar{v}_2^2 dx_2 \quad (6.27)$$

2. uzvun dönme kinetik enerjisi,

$$T_2^D = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho_2 I_2 \bar{\omega}_2^2 dx_2 \quad (6.28)$$

1 nolu motorun kinetik enerjisi (sadece dönme),

$$T_{M_1} = \frac{1}{2} I_{M_1} \bar{\omega}_1^2 \quad (6.29)$$

2 nolu motorun dönme kinetik enerjisi,

$$T_{M_2}^D = \frac{1}{2} \bar{I}_{M_2} \bar{\omega}_2^2 + \frac{1}{2} \bar{\bar{I}}_{M_2} \bar{\omega}_{M_2S}^2 \quad (6.30)$$

Burada \bar{I}_{M_2} ve $\bar{\bar{I}}_{M_2}$ sırasıyla 2 nolu motorun rotor ve statorunun kütleli atalet momentlerini göstermektedir.

2 nolu motorun ötelenme kinetik enerjisi ise

$$T_{M_2}^{\bar{O}} = \frac{1}{2} M_2 \bar{v}_{O_2'}^2 \quad (6.31)$$

olmaktadır.

Düzlemsel manipulatörün ağırlık doğrultusuna dik düzlemde olması nedeniyle potansiyel enerjinin sadece elastik bileşeni mevcuttur. Bu durumda iki uzvun elastik potansiyelleri aşağıdaki gibi ifade olunabilir:

1 uzvunun eğilme potansiyeli,

$$V_{1,M} = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} E_1 I_1 (v_1')^2 dx_1 \quad (6.32)$$

1 uzvunun normal kuvvet potansiyeli,

$$V_{1,N} = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} E_1 A_1 \left(u_1' + \frac{1}{2} v_1'^2 \right)^2 dx_1 \quad (6.33)$$

2 uzvunun eğilme potansiyeli,

$$V_{2,M} = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} E_2 I_2 (v_2'')^2 dx_2 \quad (6.34)$$

2 uzvunun normal kuvvet potansiyeli,

$$V_{2,N} = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} E_2 A_2 \left(u_2' + \frac{1}{2} v_2''^2 \right)^2 dx_2 \quad (6.35)$$

Neticede sistemin Lagrangianı kinetik enerjiler toplamından potansiyel enerjiler toplamı çıkarılarak bulunabilir:

$$L = T - V = \left(T_{M_1} + T_1^{\bar{O}} + T_1^D + T_{M_2}^{\bar{O}} + T_{M_2}^D + T_2^{\bar{O}} + T_2^D \right) - \left(V_{1,M} + V_{1,N} + V_{2,M} + V_{2,N} \right) \quad (6.36)$$

Lagrangianın $L = L(x_1, x_2, t, u_1, u_1', \dot{u}_1, v_1, v_1', v_1'', \dot{v}_1, \dot{v}_1', u_2, u_2', \dot{u}_2, v_2, v_2', v_2'', \dot{v}_2, \dot{v}_2', \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ şeklinde olduğu görülmektedir.

Uzuvlara ait sınır şartları ise, ya genelleştirilmiş Hamilton ilkesinden yararlanılarak ya da dikkatli mülahazalarla dinamik denge kavramları yazılarak elde edilebilirler.

(6.36) Lagrangianına Bölüm 4'de bahsedilen prosedür uygulanırsa iki uzva ait hareket denklemleri aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

1 uzvunun aksel elastik hareketi için:

$$\ddot{u}_1 - 2\dot{v}_1\dot{\theta}_1 - v_1\ddot{\theta}_1 - u_1\dot{\theta}_1^2 - \frac{E_1}{\rho_1} \left(u_1' + \frac{1}{2} v_1'^2 \right)' = (R_1 + x_1)\dot{\theta}_1^2 \quad (6.37)$$

1 uzvunun enine elastik hareketi için:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 + 2\dot{u}_1\dot{\theta}_1 - v_1\dot{\theta}_1^2 + u_1\ddot{\theta}_1 - \frac{I_1}{A_1} \ddot{v}_1'' - \frac{E_1}{\rho_1} \left[\left(u_1' + \frac{1}{2} v_1'^2 \right) v_1' \right]' \\ + \frac{E_1 I_1}{\rho_1 A_1} v_1'''' = -(R_1 + x_1)\ddot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (6.38)$$

2 uzvunun aksel elastik hareketi için:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 - 2\dot{v}_2\dot{\theta}_2 - v_2\ddot{\theta}_2 - (x_2 + u_2)\dot{\theta}_2^2 \\ - \frac{E_2}{\rho_2} \left(u_2' + \frac{1}{2} v_2'^2 \right)' = -a_{K_2x} \cos \psi - a_{K_2y} \sin \psi \end{aligned} \quad (6.39)$$

2 uzvunun enine elastik hareketi için:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_2 + 2\dot{u}_2\dot{\theta}_2 - v_2\dot{\theta}_2^2 + (x_2 + u_2)\ddot{\theta}_2 - \frac{I_2}{A_2} \ddot{v}_2'' \\ - \frac{E_2}{\rho_2} \left[\left(u_2' + \frac{1}{2} v_2'^2 \right) v_2' \right]' + \frac{E_2 I_2}{\rho_2 A_2} v_2'''' = a_{K_2x} \sin \psi - a_{K_2y} \cos \psi \end{aligned} \quad (6.40)$$

Burada $\psi = \phi_{1,L_1} + \theta_2$ şeklinde tanımlanmıştır. a_{K_2x} ve a_{K_2y} ise, 2 uzvunun kök noktasının $i_1 O_1 j_1$ takımındaki x_1 ve y_1 komponentlerini temsil etmekte olup,

$$\begin{aligned} a_{K_2x} = \ddot{u}_{1,L_1} - 2\dot{v}_{1,L_1}\dot{\theta}_1 - v_1\ddot{\theta}_1 - \left[R_1 + (L_1 + u_{1,L_1}) \right] \dot{\theta}_1^2 \\ - R_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\phi}_{1,L_1}) \sin \phi_{1,L_1} - R_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\phi}_{1,L_1})^2 \cos \phi_{1,L_1} \\ - R_2 \ddot{\theta}_2 \sin \psi - R_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \psi \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned}
a_{K_2Y} = & \ddot{v}_{1,L_1} + 2\dot{u}_{1,L_1}\dot{\theta}_1 + [R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})]\ddot{\theta}_1 - v_1\dot{\theta}_1^2 \\
& + R_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\phi}_{1,L_1})\cos\phi_{1,L_1} - R_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\phi}_{1,L_1})^2\sin\phi_{1,L_1} \\
& + R_2\ddot{\theta}_2\cos\psi - R_2\dot{\theta}_2^2\sin\psi
\end{aligned} \tag{6.42}$$

ifadeleriyle verilmektedirler. (6.37)-(6.40) hareket denklemlerine ait sınır şartlarını geometrik ve doğal sınır şartları olmak üzere ikiye ayırmak mümkündür. Ele alınan iki serbestlik dereceli esnek manipulatör için, konum koordinatlarına göre, iki adet ((6.38) ve (6.40)) dördüncü mertebeden ve iki adet ((6.37) ve (6.39)) de ikinci mertebeden diferansiyel denklem söz konusu olduğundan toplam 12 adet sınır şartının belirlenmesi gerekmektedir. Bunların 6 adedi geometrik karakterde olup aşağıdaki gibidirler:

$$\begin{aligned}
u_1 \Big|_{\substack{x_1=0 \\ t=t}} &= u_1(0,t) = 0 & u_2 \Big|_{\substack{x_2=0 \\ t=t}} &= u_2(0,t) = 0 \\
v_1 \Big|_{\substack{x_1=0 \\ t=t}} &= v_1(0,t) = 0 & v_2 \Big|_{\substack{x_2=0 \\ t=t}} &= v_2(0,t) = 0 \\
v_1' \Big|_{\substack{x_1=0 \\ t=t}} &= v_1'(0,t) = 0 & v_2' \Big|_{\substack{x_2=0 \\ t=t}} &= v_2'(0,t) = 0
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Doğal sınır şartlarının 3 adedi ise

$$\begin{aligned}
E_2 A_2 \left(u_2' + \frac{1}{2} v_2' \right) \Big|_{\substack{x_2=L_2 \\ t=t}} &= 0 \\
E_2 I_2 v_2'' - E_2 A_2 \left(u_2' + \frac{1}{2} v_2' \right) v_2' \Big|_{\substack{x_2=L_2 \\ t=t}} &= 0 \\
E_2 I_2 v_2'' \Big|_{\substack{x_2=L_2 \\ t=t}} &= 0
\end{aligned} \tag{6.44}$$

şeklindedir. Ayrıca 1 uzvunun 2 motoruyla birleştiği S_1 kesitinde x_1 ve y_1 doğrultusundaki kuvvetlerin dinamik dengesi ile moment ifadesinin yazılması suretiyle de 3 adet daha doğal sınır şartı elde etmek mümkündür. Bunlar;

$$\begin{aligned}
& M_2 \left\{ \ddot{u}_{1,L_1} - 2\dot{v}_{1,L_1} \dot{\theta}_1 - v_{1,L_1} \ddot{\theta}_1 - [R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})] \dot{\theta}_1^2 - \right. \\
& \quad \left. R_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\phi}_{1,L_1}) \sin \varphi_{1,L_1} - R_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\phi}_{1,L_1})^2 \cos \varphi_{1,L_1} \right\} \\
& + \rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \left\{ [\ddot{u}_2 - 2\dot{v}_2 \dot{\theta}_2 - v_2 \ddot{\theta}_2 - (x_2 + u_2) \dot{\theta}_2^2] \cos \psi - \right. \\
& \quad \left. [\dot{v}_2 + 2\dot{u}_2 \dot{\theta}_2 - v_2 \dot{\theta}_2^2 + (x_2 + u_2) \ddot{\theta}_2] \sin \psi + a_{K_2X} \right\} dx_2 \\
& - E_1 A_1 \left(u_1' + \frac{1}{2} v_1'^2 \right) \Big|_{\substack{x_1=L_1 \\ t=t}} = 0
\end{aligned} \tag{6.45}$$

$$\begin{aligned}
& M_2 \left\{ \dot{v}_{1,L_1} + 2\dot{u}_{1,L_1} \dot{\theta}_1 - v_{1,L_1} \dot{\theta}_1^2 + [R_1 + (L_1 + u_{1,L_1})] \ddot{\theta}_1 + \right. \\
& \quad \left. R_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\phi}_{1,L_1}) \cos \varphi_{1,L_1} - R_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\phi}_{1,L_1})^2 \sin \varphi_{1,L_1} \right\} \\
& + \rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \left\{ [\ddot{u}_2 - 2\dot{v}_2 \dot{\theta}_2 - v_2 \ddot{\theta}_2 - (x_2 + u_2) \dot{\theta}_2^2] \sin \psi + \right. \\
& \quad \left. [\dot{v}_2 + 2\dot{u}_2 \dot{\theta}_2 - v_2 \dot{\theta}_2^2 + (x_2 + u_2) \ddot{\theta}_2] \cos \psi + a_{K_2Y} \right\} dx_2 \\
& + \rho_1 I_1 \dot{v}_1' \Big|_{\substack{x_1=L_1 \\ t=t}} + E_1 A_1 \left(u_1' + \frac{1}{2} v_1'^2 \right) v_1' \Big|_{\substack{x_1=L_1 \\ t=t}} + E_1 I_1 v_1'' \Big|_{\substack{x_1=L_1 \\ t=t}} = 0
\end{aligned} \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{I}_{M_2} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\phi}_{1,L_1}) + \bar{I}_{M_2} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\phi}_{1,L_1} + \ddot{\theta}_2) \\
& + \rho_2 A_2 \int_0^{L_2} \left\{ -v_2 [\ddot{u}_2 - 2\dot{v}_2 \dot{\theta}_2 - v_2 \ddot{\theta}_2 - (x_2 + u_2) \dot{\theta}_2^2 + \right. \\
& \quad \left. a_{K_2X} \cos \psi + a_{K_2Y} \sin \psi] - \right. \\
& \quad \left. (x_2 + u_2) [\dot{v}_2 + 2\dot{u}_2 \dot{\theta}_2 - v_2 \dot{\theta}_2^2 + (x_2 + u_2) \ddot{\theta}_2 - \right. \\
& \quad \left. a_{K_2X} \sin \psi + a_{K_2Y} \cos \psi] \right\} dx_2 \\
& + \rho_2 I_2 \int_0^{L_2} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\phi}_2) dx_2 - E_1 I_1 v_1'' \Big|_{\substack{x_1=L_1 \\ t=t}} = 0
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Böylece 12 adet sınır şartı tamamlanmış olmaktadır. (6.37) - (6.40) hareket denklemlerinin Galerkin prosedürüyle çözülmesi durumunda enine titreşimler için ankastre-serbest sınır şartlarını haiz kirişin özfonksiyonlarının kullanılması pek uygun olmamakta veya kullanılması halinde ise çok sayıda terimin yaklaşık çözümü temsil eden seriye katılması gerekmektedir.



7. NÜMERİK SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

7.1. Giriş

Bu bölümde çalışmanın amacı doğrultusunda çıkarılan hareket denklemlerinin nümerik çözümlerinden bulunan sonuçlar aktarılacak ve irdelenecektir. Öncelikle, Bölüm 5’de teorik temelleri ve çıkarım yöntemleri ayrıntılı biçimde verilmiş olan hareket denklemlerini ele almak yararlı olacaktır.

a- Uzva bağlı takımda ölçülen u ve v elastik deplasmanlarına ilişkin hareket denklemleri: Bu denklemlerde hem atalet hem de elastik bağıllık vardır. Elastik bağıllık kesit normal kuvvetinden kaynaklanmaktadır ve nonlineer tabiattadır. Bu denklem takımı Lagrange formülasyonu ile çıkarılmış ve Galerkin prosedürüyle çözülmüştür. Burada u ve v ler için (5.102) kabulleri yapılmıştır. u lara ait konumsal fonksiyonlar olarak bir ucu sabit bir ucu serbest çubuğun eksenel titreşim modal fonksiyonları kullanılmıştır. u sehimlerine bu tarz bir yaklaşımın, yine Bölüm 4’de (4.14) bağıntısıyla verilen u ve v ilişkisiyle uyumlu olmadığı açıktır. Bunun neticesinde sistem fiziksel gerçeğe bağdaşmayan bir “matematiksel katılık (stiffness)” kazanmakta ve dolayısıyla u ve v ler için küçük sehim değerleri elde olunmaktadır. Hatırlanacağı üzere Rayleigh-Ritz metodunda da sonlu modal serilerle özdeğer hesabına teşebbüs edildiğinde olması gerekenden yüksek frekanslar elde edilmektedir.

u ve v denklemlerinin diğer bir özelliği de “stiff” diferansiyel denklemler olmalarıdır. Zira manipulatörlerde eksenel titreşim frekansları enine titreşim frekanslarından 100 ila 1000 misli fazla olabilmektedirler. Dolayısıyla Runge-Kutta ve benzeri bir denklem çözücüyeye uygun formata getirilen hareket denklemlerinin homojen çözümleri çok hızlı büyüyen üstel fonksiyonlar tarzındadır. Yeterince küçük çözüm adımı seçilmediği takdirde yuvarlama veya kesme hatalarından ötürü katsayısı sıfır olması gereken bu üstel terimler artmaya başlar ve çözümün kısa sürede iraksamasına yol açarlar. Bu nedenle çalışmanın kapsadığı tüm denklemlerin çözümünde stiff denklemler için düzenlenmiş 4. Mertebe Runge-Kutta metodu kullanılmıştır.

Yukarıda bahsedilen u ve v etkileşiminin özellikle kinetik stabiliteye ilişkin çalışmalarda göz ardı edildiği, ancak bazı eserlerde v sehimlerinden oluşan u deplasmanlarının hesaba katıldığı görülmektedir.

Choura ve arkadaşları (1991) yaptıkları çalışmada u ve v bağlı denklemlerini iki

farklı yaklaşımla çıkarmış olmalarına rağmen bu denklemlerde (4.25) deki nonlinear normal kuvvet terimi yer almamaktadır. Bu nedenle denklemler ataletçe ve elastik açıdan lineer bağlıdır. Bu konuya grafiklerin açıklanması esnasında tekrar dönecektir. Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında bu hareket denklemlerine dayanan model, **u-v modeli** olarak anılacaktır.

b- u yerine (4.14) ile verilen s-v transformasyonu kullanılarak kabul edilmiş modlar (kısaca KEM) yöntemi ile elde olunan hareket denklemleri: Bu denklemlerde s değişkenine yine (5.38) ile verilen sonlu seriyle yaklaşmış olup, burada x'e bağlı fonksiyonlar olarak yukarıdaki gibi bir ucu sabit bir ucu serbest çubuğun boyuna titreşim modları alınmıştır. v değişkeninin x'e bağlı fonksiyonları için de bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuğun modal fonksiyonlarından yararlanılmıştır. İleride bu denklemlere **s-v (KEM) modeli** olarak atıfta bulunulacaktır. Burada (4.14) ile verilen transformasyonun da bir yaklaşıklık içerdiği göz ardı edilmemelidir. Bu bağıntıya dikkat edilirse bu dönüşüm iki farklı hareketin süperpozisyonu gibi yorumlanabilir. Burada x doğrultusunda s kadarlık bir ötelemeye enine hareketten oluşan yer değiştirmenin projeksiyonu eklenmektedir. Bazı yazarlar hareket denklemlerinde karmaşıklığı azaltmak için $u \cong s$ kabulünü yapmakta, fakat atalet terimlerinde (4.14) ilişkisini göz önüne almakta (Kane ve ark. 1987) veya normal kuvvet yerine merkezkaç kuvvet içeren bir terimi v denklemlerine sokarak atalet terimlerindeki ihmalin etkisini kompanze etmektedirler (Simo ve Vu-Quoc 1987). Hatta Simo ve Vu-Quoc (1987) bu bağlamda birinci mertebe teorisiyle bulunduğu denklemlerin Kane ve arkadaşları (1987) nın bulduklarıyla bir-iki terim farkla aynı olduğunu göstermektedirler (Burada s ile yay uzunluğu değil herhangi bir kesitin boyuna deplasmanı gösterilmektedir. Şekil 4.1. e bkz.).

s ve v denklemlerinde \ddot{q}_s ve \ddot{q}_v terimleri üzerinden de ataletçe bağlılık ortaya çıkmaktadır.

c- Kesme kuvveti etkisini göz önüne alan ve bu suretle v sehimlerini kesit dönmesi ϕ den bağımsız hesaplayan s, v ve ϕ ye ait bağlı hareket denklemleri: Burada kesme tesiri Timoshenko kayma hipotezine dayanarak hesaba katılmıştır. Bu denklemleri içeren modele kısaca **s-v- ϕ (KEM) modeli** denilecektir.

d- Sadece v sehimlerinin hesabına yönelik olup, geometrik katılşmayı merkezkaç kuvvet (kısaca N_M ile gösterilecektir) etkisiyle hesaba katan hareket denklemleri:

Burada önce Lagrange metoduyla v ye ilişkin hareket denklemleri çıkarılmış, daha sonra KEM yöntemi ile çözülmüştür. Nihai denklemler kesit dönme ataleti etkisini içerebilmektedir. Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında bu hareket denklemlerine dayanan model, v - N_M (KEM) modeli olarak adlandırılacaktır. Bu model çok küçük s deplasmanları için denklem sayısı da azaldığından tercih edilmektedir.

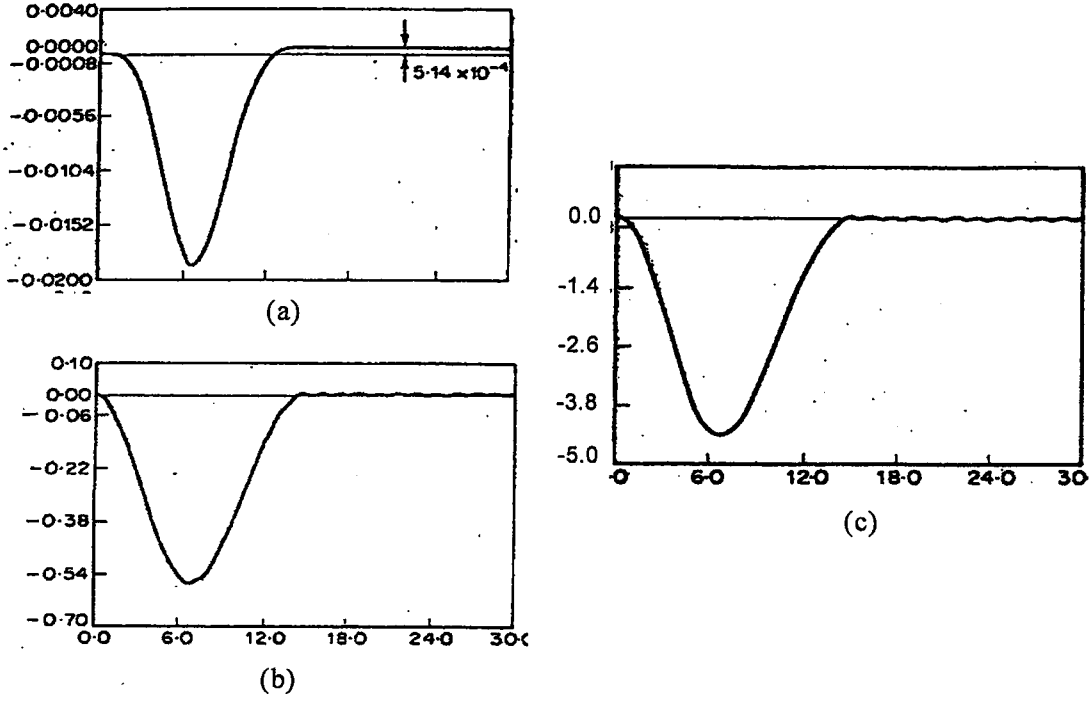
e- Sonlu elemanlar metoduyla (kısaca SEM) bulunan, merkezkaç kuvvetin ithaliyle elastik nonlinear bağlılığın ortadan kaldırıldığı denklemler: Sonlu elemanlar modelinde u nodal büyüklüklerinin v ile olan ilişkisi göz önüne alındığında, u ile tanımlanan nodal deplasmanların s boyuna deplasmanları olarak düşünülmesinin daha gerçekçi olduğu anlaşılmaktadır. Nitekim merkezkaç kuvvetle geometrik katılma etkisinin yansıtıldığı bu denklemler çözüldüğünde u olarak adlandırılan nodal büyüklüklerin s - v ye ilişkin sürekli ortam modelinde s ye ait değerlerin aynısını verdikleri görülmektedir. İleride bu model kısaca s - v - N_M (SEM) olarak adlandırılacaktır. Ayrıca s deplasmanları göz önüne alınmaksızın v nodal büyüklüklerinin hesaplanması da mümkündür. $s=0$ için elde olunan bu modele de v - N_M (SEM) ile atıfta bulunulacaktır.

7.2. Nümerik Sonuçlar

Bu alt bölümde yukarıda değinilen modellerin literatürden alınan bazı değerler için verdiği sonuçlar yine başvuru literatürdeki sonuçlarla mukayeseli olarak verilecektir. Burada düzlemsel tek serbestlik dereceli manipulatörle ilgili olmaları nedeniyle Simo ve Vu-Quoc (1987) ve Choura ve arkadaşları (1991) nın yaptıkları çalışmalara müracaat edilmiştir.

Şekil 7.1’de Simo ve Vu-Quoc’un çalışmasına ait sonuçlar görülmektedir. Burada dönen kola ait veriler şöyledir: $EA=2.8 \times 10^7$, $EI=1.4 \times 10^4$, $\rho A=1.2$, $GA=1 \times 10^7$, $L=10$ (sayısal değerlerin birimleri yazarlar tarafından verilmemiştir. Ancak birimler arasında uyumluluk olması gerektiği açıktır). Simo’nun kullandığı hareket kanunu ise açısal hız için şöyledir:

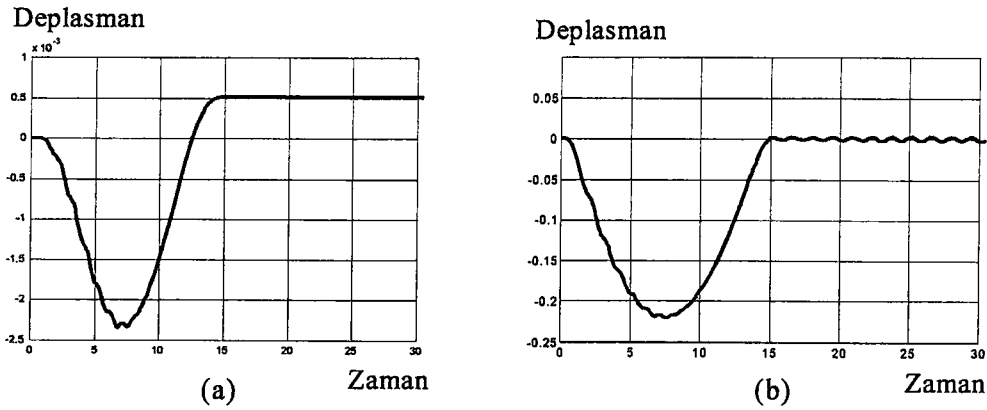
$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{6}{15} \left(t - \frac{15}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{15} \right) & 0 < t \leq 15 \\ \dot{\theta} &= 6 & t > 15 \end{aligned} \quad (7.1)$$



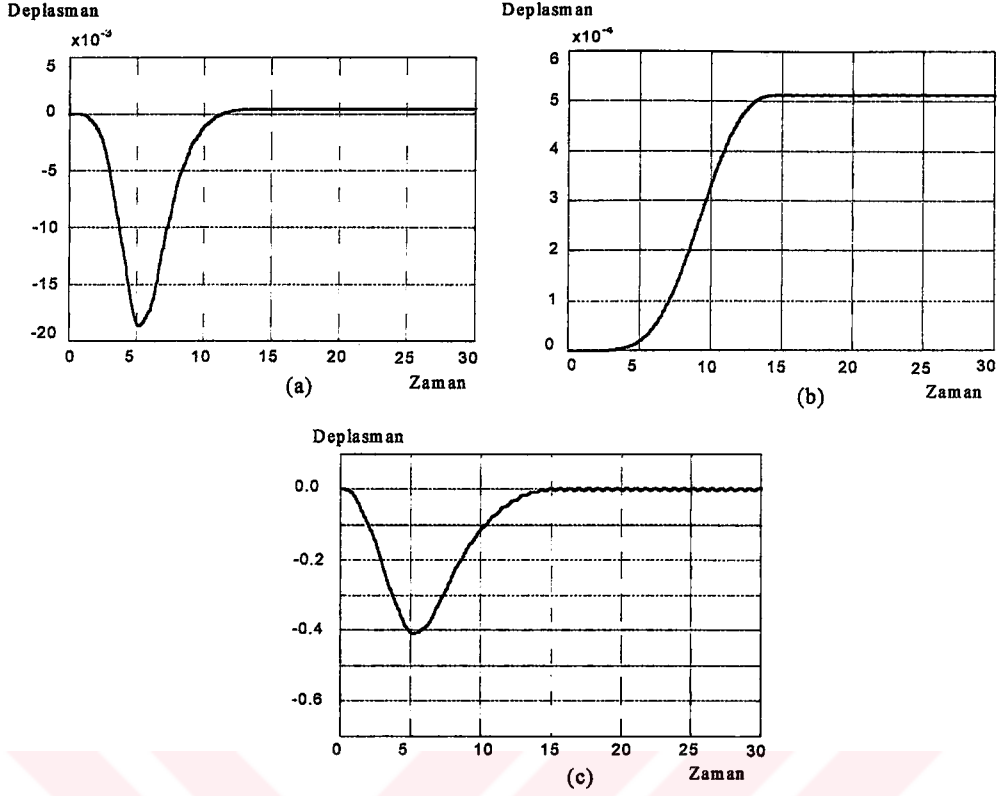
Şekil 7.1. Simo ve Vu-Quoc'un Çalışmasına Ait Sonuçlar
a) Boyuna Deplasmanlar b) Enine Deplasmanlar c) Dönme Açısı

Şekil 7.2'de u ve v 'lere ait (5.15) denklemlerinin kabul edilmiş modlar metodu ile çözümünden elde edilen sonuçlar görülmektedir. Sehimlerin sayısal değerleri anılan nedenlerden hayli küçük çıkmaktadır.

Şekil 7.3. de Simo'nun verileri için u , v ve s deplasmanları görülmektedir. Burada s deplasmanının θ^2 den (5.29) formülüyle hesaplanan merkezkaç kuvvetle tamamen aynı formda değiştiği gözlenmektedir. u 'lar ise s ve v 'den (4.14) bağıntısı yardımı ile hesaplanmıştır. v sehimleri Simo'nun değerlerinden küçüktür.

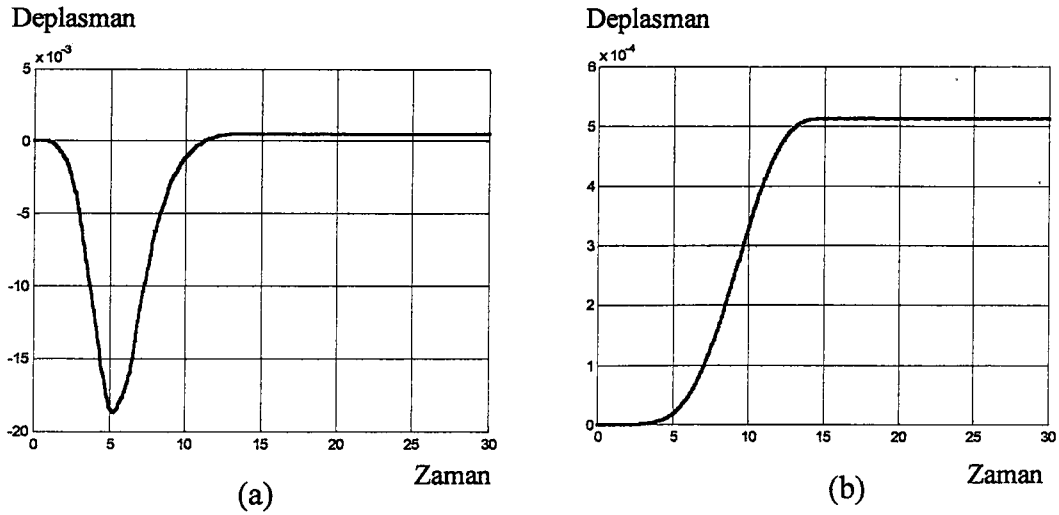


Şekil 7.2. u - v (KEM) Modelinin Sonuçları
a) Boyuna Deplasmanlar b) Enine Deplasmanlar

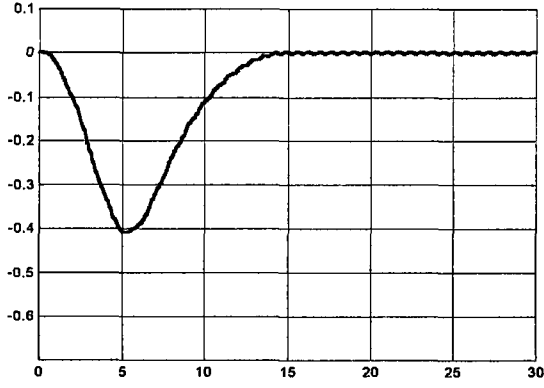


Şekil 7.3. s-v (KEM) Modelinin Sonuçları
 a) Boyuna (u) Deplasmanlar b) Eksenel (s) Deplasmanlar
 c) Enine (v) Deplasmanlar

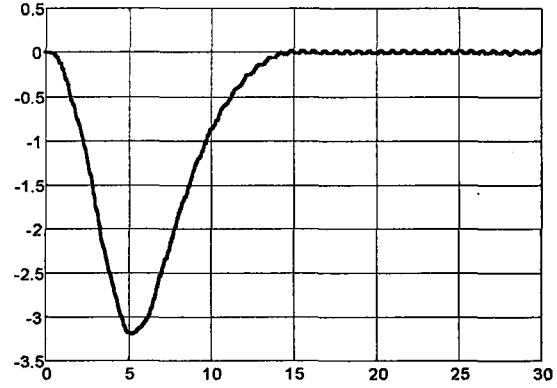
Şekil 7.4. de s-v- ϕ (KEM) modelinden bulunan sonuçlar görülmektedir. Kesme kuvveti tesirinin hissedilmediği görülmektedir. Bu sayısal verilerle uyumludur. Zira kirişin L boyu çok uzundur. Dolayısıyla bu durum elemanter mukavemetten bilinen kesme kuvveti etkisinin kısa açıklıklı kirişlerde etkin olduğu sonucuyla intibak etmektedir. ϕ dönme açıları da v'ye bağlı olarak küçüktür.



Deplasman



(c)

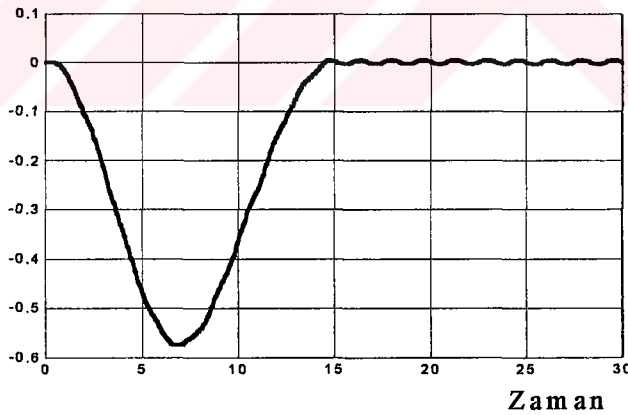
Dönme
AÇISI

(d)

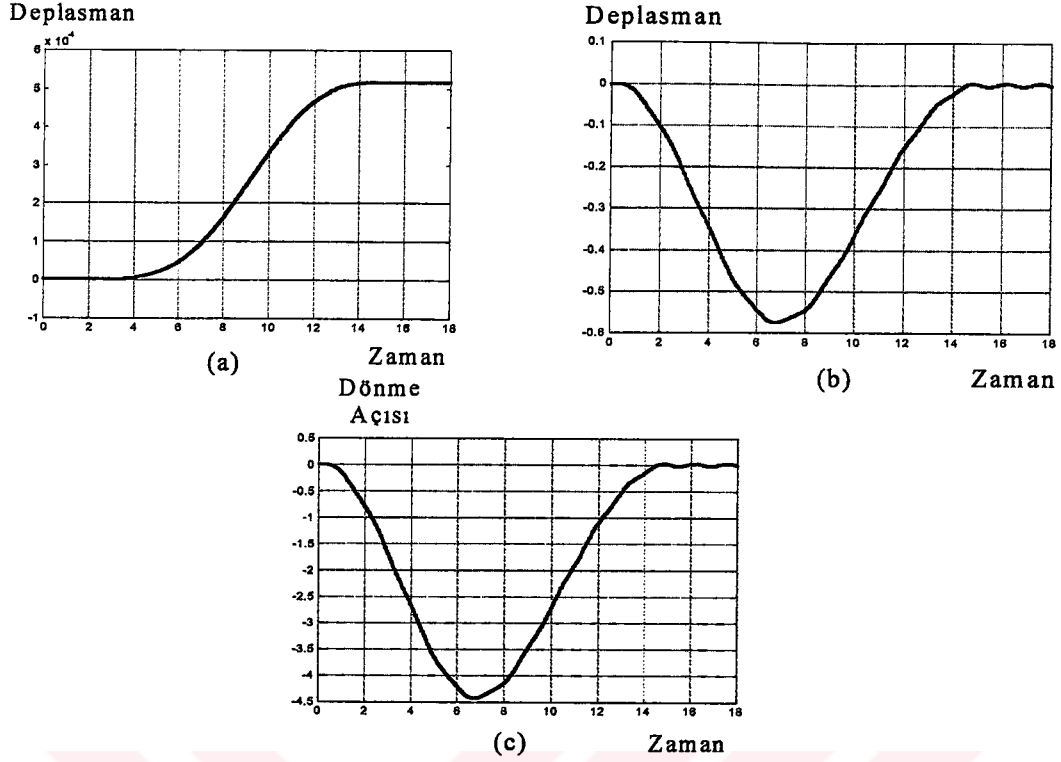
Şekil 7.4. s-v- ϕ (KEM) Modelinin Sonuçları
a) Boyuna (u) Deplasmanlar b) Eksenel (s) Deplasmanlar
c) Enine (v) Deplasmanlar d) Dönme Miktarı (ϕ)

Sadece v sehimlerinin bulunduğu ve merkezkaç kuvvetin göz önüne alındığı denklemlerden bulunan sonuç Şekil 7.5'de gösterilmiştir. v'nin değişimi Simo'yla uyumludur. Simo'nun sonuçlarının, üç diferansiyel denklemin sonlu elemanlarda Galerkin prosedürüyle simultane çözümüne dayandığı hatırlanırsa, merkezkaç kuvvetle geometrik katlaşmayı içeren modelin bir hayli etkin olduğu görülmektedir.

Deplasman

Şekil 7.5. v- N_M (KEM) Modelinin Sonucu

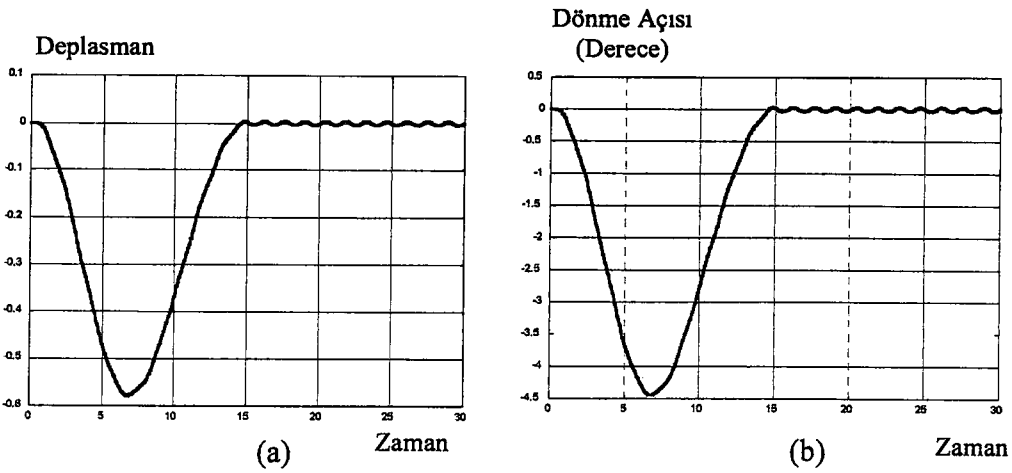
s ve v nodal büyüklükleriyle merkezkaç kuvveti içeren sonlu eleman denklemlerinin aynı verilere karşılık gelen sonuçları Şekil 7.6'daki grafiklerde gösterilmiştir. Burada bulunan sonuçlar Simo'nun sonuçlarıyla tamamen uyumludur. Burada her ne kadar kesme kuvveti tesiri göz önüne alınmamakta ise de s-v- ϕ denklemlerinden bu etkinin ihmal edilebileceği anlaşıldığından sonuçların uyumlu



Şekil 7.6. s-v-N_M (SEM) Modelinin Sonuçları

a) Eksenel (s) Deplasmanlar b) Enine (v) Deplasmanlar
c) Dönme Miktarı (φ)

olması beklenirdi. Bu sonuçlar, aynı prosedür kullanılmamakla birlikte esas itibariyle sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilmiş olması nedeniyle de sağlıklı bir karşılaştırmaya imkan vermektedirler. Bu sonuçların eleman sayısı 3 ve 10 alındığında değişmediği saptanmıştır. Sonlu eleman denklemlerinde s'lerle ilgili terimler ihmal edilerek sadece v nodal büyüklükleri ve merkezkaç kuvveti içeren denklemlerin verdiği sonuçlar ise Şekil

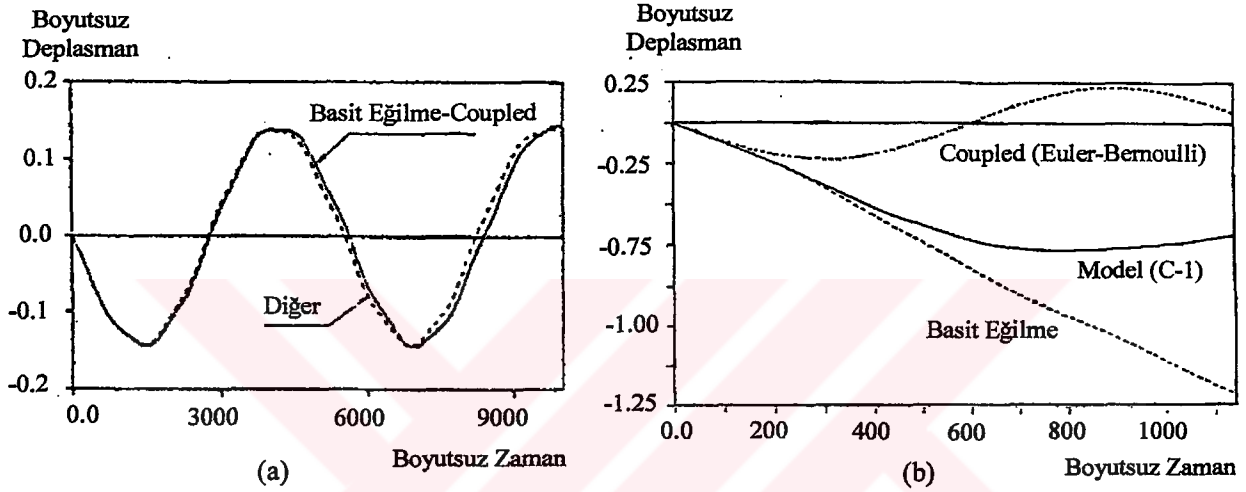


Şekil 7.7. v-N_M (SEM) Modelinin Sonuçları

a) Enine (v) Deplasmanlar b) Dönme Miktarı

7.7'de gösterilmiştir. Uç noktanın v sehimiyile bundan türetme yoluyla bulunan ϕ dönme açıları daha genel denklemlerden elde edilenlerle hemen hemen aynıdır.

Şekil 7.8'de Choura ve Ark.'nın sonuçları görülmektedir. Burada da tek serbestlik dereceli bir kol ele alınmış olup sisteme ait sayısal veriler şöyledir: $EA=1.145 \times 10^6$ N, $EI=6.84 \times 10^{-2}$ Nm², $L=0.762$ m, $\rho A=4.37 \times 10^{-2}$ kg/m. Kullanılan açısal hız hareket kanunu iki birim basamak fonksiyonunun toplamı şeklindedir. Ancak bu dikdörtgensel pulsu andıran açısal hız girişinin başlangıç ve bitiş kısımlarına (çıkış rampası ve iniş rampası kısımları) yarım basit harmonik kanunları uygulanmıştır.



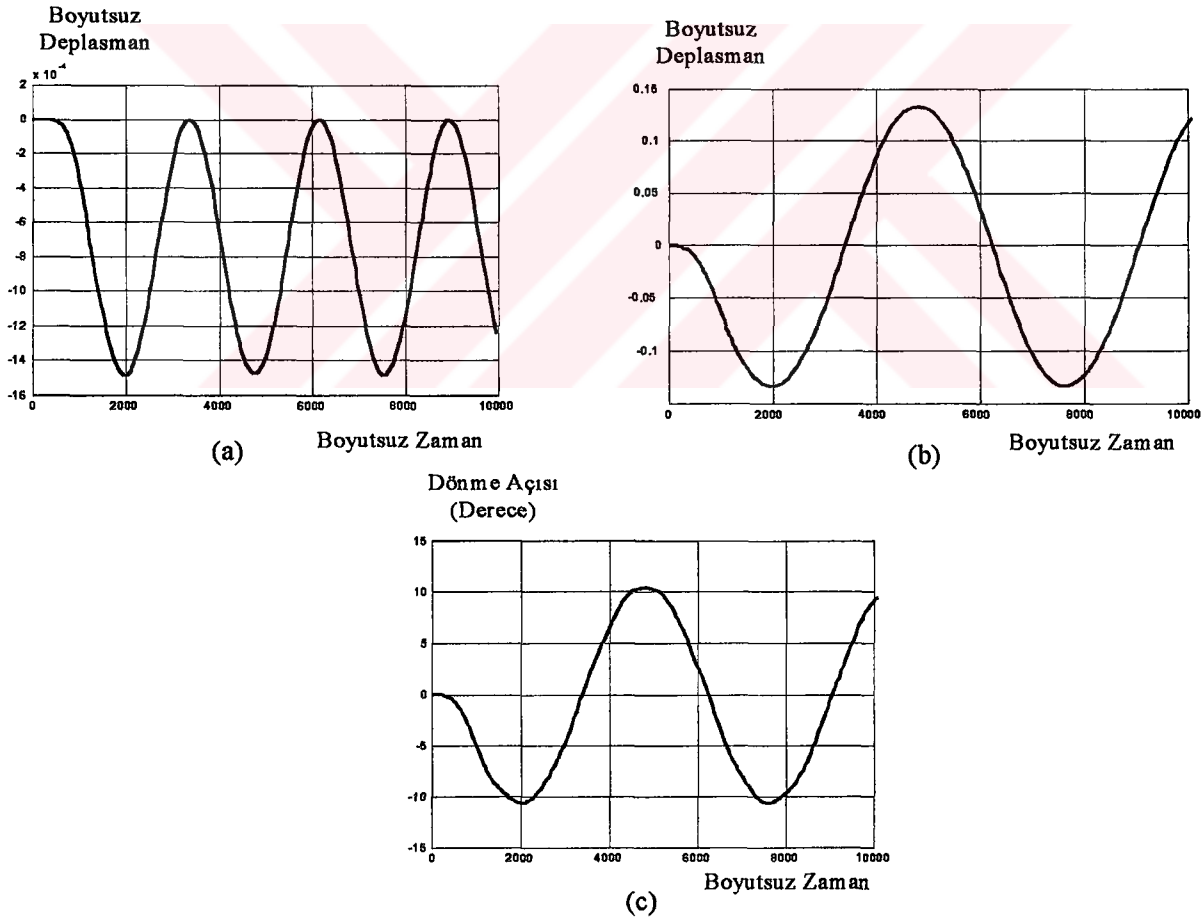
Şekil 7.8. Choura ve Ark.'nın Çalışmasına Ait Sonuçlar (Uç Noktanın Enine Depl.)

a) Hız=0.9396 rad/s b) Hız=8.329=1.1 ω_1 rad/sn

Adı geçen makalede bu üç farklı model (basit eğilme, bağlı Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş modelleri) geliştirilmiş olup düşük hızlarda (burada ankastre çubuğun birinci doğal frekansından düşük açısal hızlar kastedilmektedir) bu üç modelin aynı sonuca sevk ettiği belirtilmektedir. Birinci frekansın üzerindeki hızlarda basit eğilme modelinde $-\dot{\theta}^2 v$ teriminden kaynaklanan bir zahiri iraksamaya dikkat çekilmekte Euler-Bernoulli modelinde ise böyle bir durumun ortaya çıkmadığı vurgulanmaktadır. Yazarlar Euler-Bernoulli denklemlerini sonlu elemanlar yöntemiyle çözdüklerini ve fiziksel olarak uyumlu sonuçlar aldıklarını ifade etmektedirler. Şekil 7.8.b' de birinci doğal frekansın %10 üzerinde olan bir sabit devir sayısında kirişin serbest ucunun sehimleri verilmiştir. Burada basit eğilme modelinin iraksadığı buna mukabil Euler-Bernoulli modelinin çok küçük sehimler verdiği görülmektedir. Model C-1 ile bu çalışmada $v-N_M$ modeline benzer bir modelden bulunan sonuç aktarılmıştır.

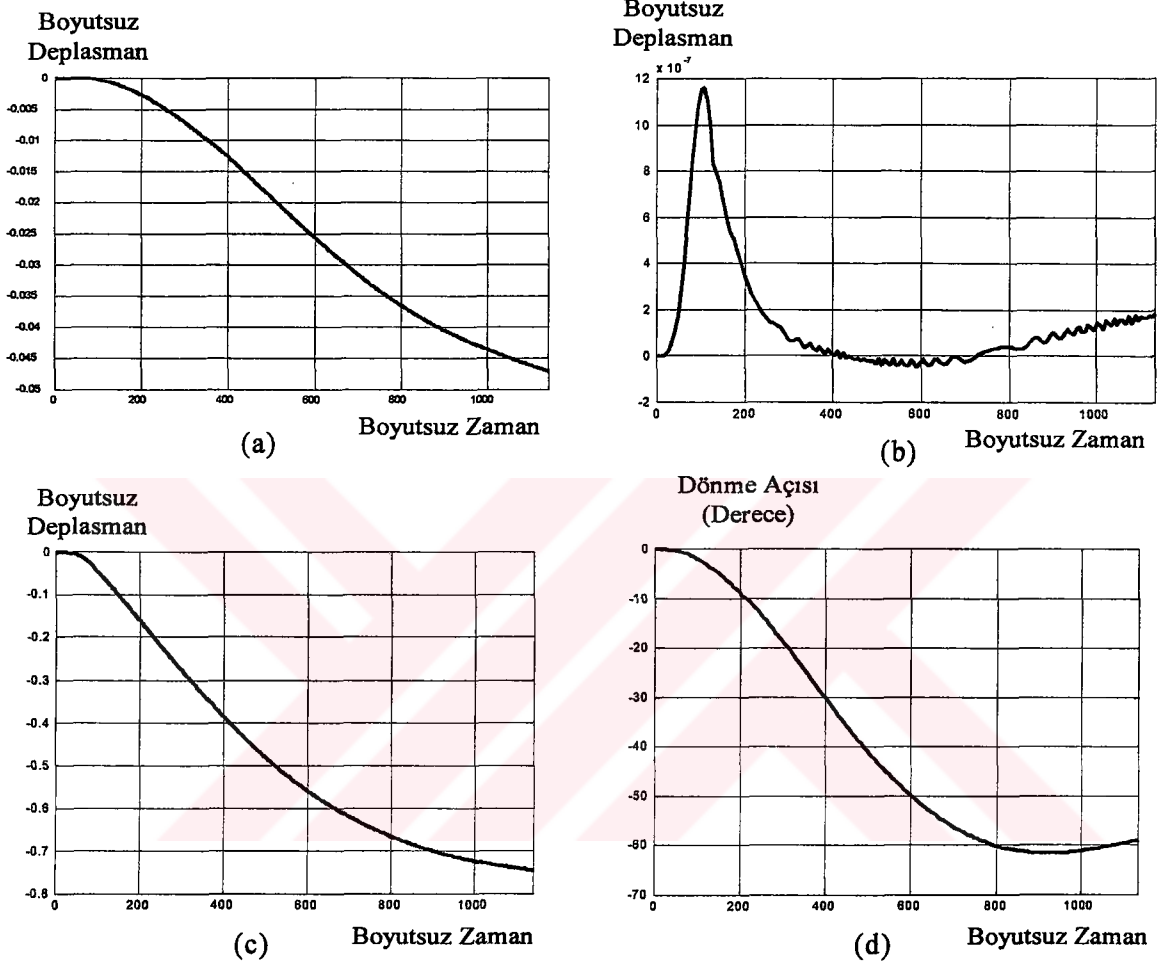
Bahsi geçen çalışmadaki sonuçların sınanması için u ve v nodal büyüklüklerine dayalı lineer bir sonlu eleman programı geliştirildi ve orada geçen birinci frekansın (bir bakıma kritik hızın) altında ve üstünde olan iki farklı hız için çözümler alındı. Kritik altı devir sayısı için bulunan sonuçların -burada verilmemekle beraber- makaledeki sonuçlarla tamamen uyumlu olduğu, buna mukabil kritik üstü devir sayıları için kesinlikle ıraksadığı görülmüştür. Kaldı ki makalede verilen denklemler incelendiğinde hangi yöntem kullanılırsa kullanılsın normal kuvvetin v deplasmanları doğrultusunda tesiri göz önüne alınmadığından geometrik yumuşama ortaya çıkacak ve bu çözüm ıraksamaya yol açacaktır.

Bu çalışmada geliştirilen s ve v deplasmanlarıyla ϕ kesit dönmelerine dayanan modelin kritik altı devir sayısında bulunan uç noktanın v ve u deplasmanları ve ϕ dönme açıları Şekil 7.9'da gösterilmiştir.



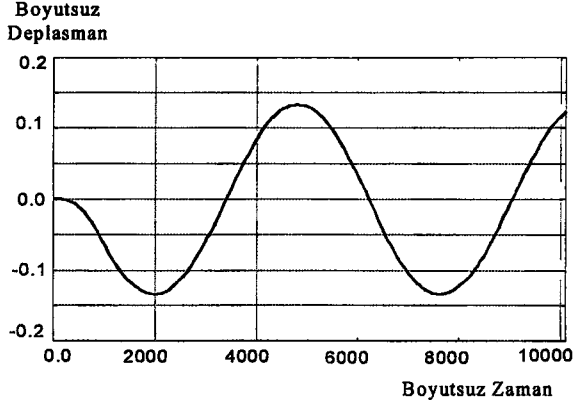
Şekil 7.9. s-v- ϕ (KEM) Modelinin Sonuçları (Hız=0.9396 rad/s)
a) Boyuna (u) Deplasmanlar b) Enine (v) Deplasmanlar
c) Dönme Miktarı (ϕ)

s-v- φ (KEM) modelinin yine bu makaledeki kritik üstü hız ($\dot{\theta}=8.329 \text{ rad/s}=1.1\omega_1$, ω_1 : İlk doğal frekans) için verdiği değerler Şekil 7.10' da gösterilmiştir. v sehimi ve φ eğimleri hayli büyük çıkmaktadır. φ eğimleri incelendiğinde lineer moment-eğrilik bağıntısı kabulüyle çeliştiği görülmektedir.

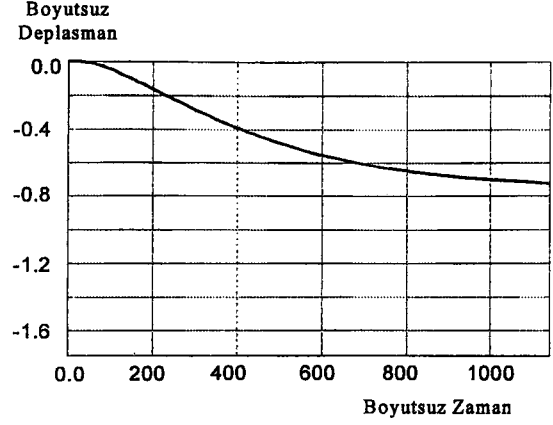


Şekil 7.10. s-v- φ (KEM) Modelinin Sonuçları (Hız=8.329 rad/s)
a) Boyuna (u) Deplasmanlar b) Eksenel (s) Deplasmanlar
c) Enine (v) Deplasmanlar d) Dönme Miktarı (φ)

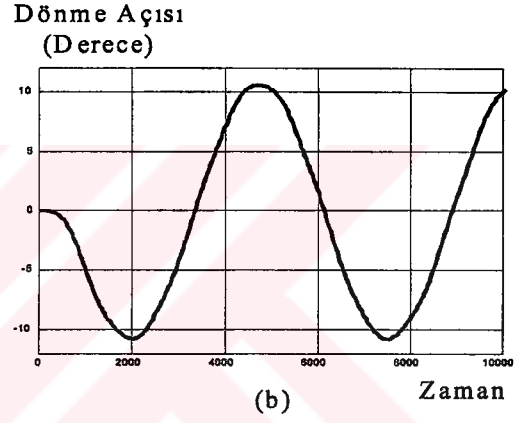
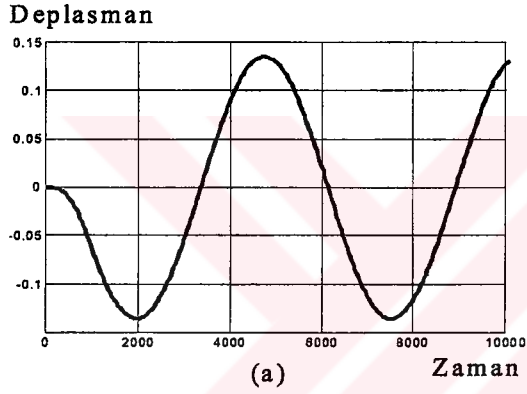
Kesme etkisinin göz önüne alınmadığı modelin (burada $\varphi = \partial v / \partial x$ bağıntısının var olduğu kabul edilmiştir) yine aynı çalışmanın kritik altı ve üstü işletme hızları için öngördüğü dinamik cevaplar sırasıyla Şekil 7.11 ve Şekil 7.12' de gösterilmiştir. Bu modelin ilgili makalede atıfta bulunulan C-1 modeline yakın sonuçlar verdiği dikkat çekmektedir.



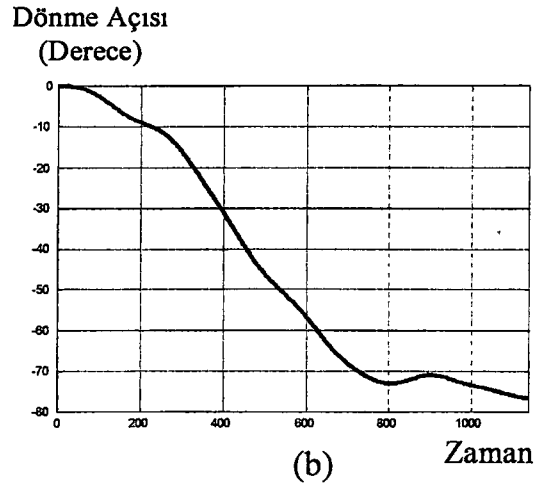
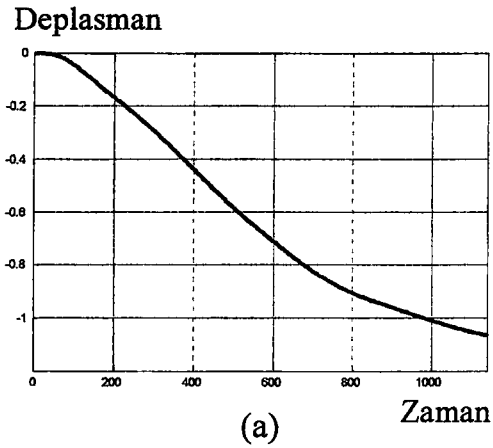
Şekil 7.11. Enine (v) Deplasmanlar
(Hız=0.9396 rad/s)



Şekil 7.12. Enine (v) Deplasmanlar
(Hız=8.329 rad/s)



Şekil 7.13. $v-N_M$ (SEM) Modelinin Sonuçları (Hız=0.9396 rad/s)
a) Enine (v) Deplasmanlar b) Dönme Miktarı (φ)



Şekil 7.14. $v-N_M$ (SEM) Modelinin Sonuçları (Hız=8.329 rad/s)
a) Enine (v) Deplasmanlar b) Dönme Miktarı (φ)

Sadece v nodal deplasmanlarını ve merkezkaç kuvvet etkisini kapsayan sonlu eleman modeline ait hareket denklemlerinin söz konusu kritik altı ve üstü işletme hızları için verdiği sonuçlar sırasıyla Şekil 7.13 ve Şekil 7.14' de gösterilmiştir. Kritik altı hızdaki dinamik cevap anılan çalışmadaki sonuçlarla uyumludur. Buna mukabil kritik üstü hıza ait sonuçlar yine lineer eğrilik-moment bağıntısıyla çelişmektedir.

Bu sonuçlar sonlu eleman modelinde 10 eleman için elde edilmiş, keza u - v , s - v - ϕ , s - v ve v - N_M modellerinde u , s ve v lere ikişer modla yaklaşmıştır. Bu sayının yeterliliği zamana bağlı fonksiyonların mertebeleri mukayese edilerek ve hesaplarda kullanılan işletme hızlarının düzeyi göz önüne alınarak sınanmış ve doğrulanmıştır.

Burada değinilenler haricinde lineer eğrilik-moment bağıntısına dayalı, merkezkaç kuvvetin katılaştırıcı etkisini hesaba katan ve aynı zamanda kesit dönme etkisini de (rotatory inertia) göz önüne alan sadece v enine deplasmanlarını hesaplayan bir model kurulmuş ve bununla Simo'nun verileri için sonuçlar elde edilmiştir. Kesit dönme etkisinin bu veriler için üstelik kritik üstü hızda bile ihmal edilebileceği görülmüştür.

Bu çalışmada mukayese amacıyla ele alınan örneklerin pratikteki sanayi manipulatörlerinin fiziksel verileriyle örtüşmediği görülmektedir. Bu veriler daha ziyade uydu antenleri, uzay manipulatörleri veya hard disk okuyucu sistemleri gibi hayli esnek sistemleri temsil etmektedir. Mamafih bu uygulamalar son yirmi yılda esnek mekanik sistemler ve özellikle manipulatörlerin bu açıdan yoğun biçimde incelenmesine yol açmıştır.

Burada dönen kolun birinci doğal frekansı veya bu anlamda kritik hızdan bahsedilmekle birlikte gerçekte kolun tüm doğal frekanslarının merkezkaç kuvvet nedeniyle yükseleceği unutulmamalıdır. Geometrik katılık göz önüne alınmadığında kabul edilmiş modlar veya Galerkin prosedürüyle çözümde genelleştirilmiş koordinatların önünde $(\omega_1^2 - \dot{\theta}^2)$, $(\omega_2^2 - \dot{\theta}^2)$... gibi çarpanlar yer alır. Bu durumda sadece $\dot{\theta} > \omega_1$ halinde bile denklem takımı üstel çözüme sahip olur ve iraksar. Buradaki ω_1 , ω_2 , ... frekansları ankastre-serbest çubuğun frekanslarıdır. Geometrik katılık $\dot{\theta}^2$ ile orantılı merkezkaç kuvvet vasıtasıyla hesaba katıldığında mesela v - N_M modelinde ilk üç moda dayalı yaklaşımda $q_1(t)$, $q_2(t)$ ve $q_3(t)$ koordinatlarının katsayılarının $(\omega_1^2 - \dot{\theta}^2)$ yerine $(\omega_1^2 + 0.1934\dot{\theta}^2)$, $(\omega_2^2 + 5.4783\dot{\theta}^2)$ ve $(\omega_3^2 + 17.8614\dot{\theta}^2)$ şeklinde değiştiği görülmüştür. Dolayısıyla kritik üstü hızda diğer modlar için bir sorun çıkmamaktadır.

7.3. Çalışmanın Katkı ve Sonuçları, Öneriler

- Bu çalışmada sadece döner mafsallara sahip, esnek uzuvlu, herhangi serbestlik dereceli bir manipulatörün kinematik bağıntıları fiziksel yorumlarıyla çıkarılmış ve bir örnekle desteklenmiştir. Bu suretle çabuk kavranan bir kinematik analiz şeması geliştirilmiştir.

- u , s , v deplasmanları arasındaki geometrik ilişki ayrıntılı biçimde incelenmiş, tek serbestlik dereceli manipulatöre ait hareket denklemleri hem u , v hem de s , v bağımlı değişkenler cinsinden çıkartılmıştır. Hareket denklemlerinin çıkartılmasında farklı yaklaşımlar ve yöntemler kullanılmış olup, bunların gerek fiziksel tasvir ve gerekse nümerik çözümler açısından tahlili yapılmıştır.

- Geometrik katılaştırmanın göz önüne alınmaması halinde sistem cevabında zahiri bir kararsızlığın ortaya çıkacağı hususu hem matematiksel açıdan hem de farklı yöntemlerle (KEM, SEM) çıkarılan hareket denklemleri kullanılarak doğrulanmıştır. Bu çerçevede literatürdeki bazı makalelerde (örneğin Choura ve ark. 1991) verilen sonuçların, o çalışmalardaki teorik modellerle elde edilemeyeceği saptanmıştır. Ayrıca yaygın biçimde referans gösterilen bir çalışmada (Kane ve ark. 1987) genelleştirilmiş koordinatların hatalı tanımlandığı görülmektedir. Literatürde nonlineer uzama oranlarının kullanıldığı çalışmalar da olmakla beraber, genellikle sonuçta merkezkaç kuvvetin işe katılmasıyla sadeleştirmelere gidilmektedir (Du ve ark. 1996). Esnek uzuvlu manipulatörlere ilişkin çalışmaların çoğunda kritik altı işletme hızlarındaki örnekler verilmektedir.

- İki serbestlik dereceli, esnek uzuvlu bir düzlemsel manipulatörün hareket denklemleri motor yarıçaplarını da göz önüne alarak tüm sınır şartlarıyla çıkarılmıştır.

- u , v modelinde KEM yöntemi uygulandığında u yerine ankastre-serbest çubuğun boyuna titreşim modları cinsinden seri açılım kullanıldığı takdirde sistem matematiksel açıdan katılaştığından küçük sehimler elde olunmaktadır.

- Sonlu Elemanlar Modelinde u , s , v değişkenleri arasındaki bağımlılıktan ötürü nodal büyüklüklerin u , v yerine s , v cinsinden tanımlanmasının uygun olduğu gösterilmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda eğrilik-moment bağıntısının (4.19) da verilen formuyla göz önüne alınıp, işletme koşullarına göre lineerleştirme veya basitleştirmeye gidilmesi uygun olacaktır. Ayrıca değişken kesitli ve/veya açık kesitli (kesit ağırlık merkeziyle kayma merkezinin farklı olduğu) uzuvlara sahip hacimsel manipölatörler için de benzer analizlerin yapılması, ayrıca elastik hareket denklemlerinin mafsallık denklemleriyle birlikte çözümü bundan sonraki çalışmalarda ele alınacak konular arasındadır.



8. KAYNAKLAR

- ANKARALI, A. 1997. Elastik Şaft ve Kola Sahip Bir Manipulatörün Dinamik Modeli. Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- ASADA, H., J.E.SLOTINE. 1986. Robot Analysis and Control. John Wiley and Sons Inc., Canada. p. 1-131.
- BOLOTIN, V.V. 1964. The Dynamic Stability of Elastic Systems. Holdan-Day, Inc., San Francisco. p. 24-87
- CHANG, L., J.F.HAMILTON. 1991. The Kinematics of Robotic Manipulators With Flexible Links Using an Equivalent Rigid Link System (ERLS) Model. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, 113:48-53.
- CHANG, L., J.F.HAMILTON. 1991. Dynamics of Robotic Manipulators With Flexible Links. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, 113:54-59.
- CHOURA, S., S.JAYASURIYA, M.A.MEDICK. 1991. On the Modeling, and Open-Loop Control of a Rotating Thin Flexible Beam. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, 113:26-33.
- DU, H., M.K.LIM, K.M.LIEW. 1996. A Nonlinear Finite Element Model For Dynamics of Flexible Manipulators. Mechanism and Machine Theory, 31(8):1109-1119.
- DYM, C.L., I.H.SHAMES. 1973. Solid Mechanics: A Variational Approach. McGraw-Hill Book Company, New York. p.65-133.
- EL-SAWY, M.M, , K.D. WILLMERT, M. SATHYAMOORTHY. 1993. Nonlinear Vibrations in Three-Dimensional Linkages. Mechanism and Machine Theory, 28(4):481-493.
- FALLAHI, B. 1996. A Nonlinear Finite Element Approach to Kineto-Static Analysis of Elastic Beams. Mechanism and Machine Theory, 31(3):353-364
- GAULTIER, P.E., W.E.CLEGHORN. 1992. A Spatially Translating and Rotating Beam Finite Element For Modeling Flexible Manipulators. Mechanism and Machine Theory, 27(4):415-433.
- GÖKHAN, G. 1978. Varyasyonlar Hesabı. İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları Sayı:150. Kutulmuş Matbaası, İstanbul. s. 21-72.
- GÜRGÖZE, M. 1984. Analitik Metotlarla Titreşimlerin Etüdü. İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yayın No:1. İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Fakültesi Ofset Baskı Atölyesi, İstanbul. 215 s.

HODGES, D.H. 1984. Proper Definition of Curvature in Nonlinear Beam Kinematics. *AIAA Journal*, 22(12):1825-1827.

KALRA, P., A.M.SHARAN. 1991. Accurate Modeling of Flexible Manipulators Using Finite Element Analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 26(3):229-313.

KANE, T.R., R.R. RYAN. 1987. Dynamics of a Cantilever Beam Attached to a Moving Base. *Journal of Guidance*, 10(2):139-151.

KING, J.O., V.G.GOURISHANKAR, R.E.RINK. 1987. Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulators Using Angular Velocities Instead of Transformation Matrices. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 17(11):1059-1068.

KOIVO, A.J. 1989. *Fundamentals For Control of Robotic Manipulators*. John Wiley and Sons Inc, Canada. p. 1-30.

LOW, K.K. 1987. Inverse Dynamic Analysis of Flexible Manipulator Systems via Rigid-Joint Assumption. *IASTED Int. Conf. Applied Simulation and Modeling*. Santa Barbara.

LOW, K.H., R.N.DUBEY. 1986. Dynamic Modeling of Flexible Manipulators. *IASTED Int. Conf. Applied Simulation and Modeling*. Vancouver.

MALCOLM, D.R. 1988. *Robotics: An Introduction*. Delmar Publishers Inc., New York. p. 1-22.

MEIROVITCH, L. 1967. *Analytical Methods in Vibrations*. Macmillan Publishing Co. Inc., New York. p. 436-463.

PASİN, F.1994. *Mekanik Sistemler Dinamiği*. İstanbul Teknik Üniversitesi Rektörlüğü Sayı:1540. Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul. 234 s.

RIVIN, E.I. 1988. *Mechanical Design of Robots*. McGraw-Hill Book Company, New York. p. 1-50.

SHARAN, A.M., P.KALRA. 1994. Dynamic Response of Robotic Manipulators Using Modal Analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 29(8):1233-1249.

SHIGANG, Y., Y.YUEQING, B.SHIXIAN. 1997. Flexible Rotor Beam Element For The Manipulators With Joint and Link Flexibility. *Mechanism and Machine Theory*, 32(2):209-219.

SHIGANG, Y. 1998. Redundant Robot Manipulators With Joint and Link Flexibility – I. Dynamic Motion Planning For Minimum End Effector Deformation. *Mechanism and Machine Theory*, 33(1/2):103-113.

SHIGANG, Y. 1998. Redundant Robot Manipulators With Joint and Link Flexibility – II. Residual Vibration Decreasing. *Mechanism and Machine Theory*, 33(1/2):115-122.

SIMO, J.C., L.VU-QUOC. 1987. The Role of Non-linear Theories In Transient Dynamic Analysis of Flexible Structures. *Journal of Sound and Vibration*, 119(3):487-508.

SURDILOVIC, D., M.VUKOBRATOVIC. 1996. One Method for Efficient Dynamic Modeling of Flexible Manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 31(3):297-315.

SURDILOVIC, D., M.VUKOBRATOVIC. 1996. Deflection Compensation for Large Flexible Manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 31(3):317-329.

USORO, P.B., R.NADIRA, S.S.MAHIL. 1986. A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 108:198-205.

YİĞİT, A., R.A.SCOTT, A.G.ULSOY. 1988. Flexural Motion of a Radially Rotating Beam Attached to a Rigid Body. *Journal of Sound and Vibration*, 121(2):201-210.

YU, S., M.A.ELBESTAWI. 1995. Modeling and Dynamic Analysis of a Two-Link Manipulator With Both Joint and Link Flexibilities. *Journal of Sound and Vibration*, 179(5):839-854.

YÜKSEL, Ş. 1995. Prizmatik Mafsal İçinden Kayan Elastik Çubukların Dinamiği. Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.

WILLIAMS, D.W., D.A.TURCIC. 1992. An Inverse Kinematic Analysis Procedure for Flexible Open-Loop Mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 27(6):701-714.

WOLOVICH, W.A. 1986. *Basic Analysis and Design*. CBS College Publishing, Newyork. p.128-265.

WOERKOM, P.T.H.L.M. 1995. Modified Dynamics Modelling for Maneuvering Flexible Space Manipulators. *Journal of Sound and Vibration*, 179(5):777-792.

XI, F. 1995. Trajectory Tracking of a Spatial Flexible Link Manipulator Using an Inverse Dynamics Method. *Mechanism and Machine Theory*, 30(8):1113-1126.

XI, F., R.G.FENTON. 1994. Determination of Nominal Joint Displacements of a Flexible Link Manipulator by Inverse Kinematic Analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 29(3):393-405.

9. EKLER

EK-1: s-v-N_M (SEM) Modeline Ait Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Alt Program

```
%%%          Bu Alt Program s-v-NM (SEM) Modeline Ait          %%%
%%%          Denklemlerin Çözümünü Sağlar                      %%%
```

```
function dq=femmk(t,q)
```

```
%%%          KOLA AİT FİZİKSEL DEĞERLER          %%%
```

```
tboy=10;          %Toplam Boy
EA=2.8e7;         %Uzama Rijitliği
EI=1.4e4;         %Eğilme Rijitliği
rA=1.2;          %Yoğunluk*Kesit Alanı
rI=6e-4;         %Yoğunluk*Kesit Atalet Momenti
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%          HAREKET KANUNU          %%%
```

```
ahm=6;           %Maksimum Hız
tf=15;           %Hareketin Toplam Süresi
    if t<=tf
        as=ahm/tf*(t-tf/(2*pi)*sin(2*pi*t/tf));          % Açısal Hız
        aa=ahm/tf*(1-cos(2*pi*t/tf));                    % Açısal İvme
    else
        as=6; aa=0;
    end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
es=3;           %Eleman Sayısı
eboy=tboy/es;   %Eleman Boyu
```

```
%%%          KATSAYI MATRİSLERİ          %%%
```

```
HM11=[1/3 0 0 1/6 0 0;0 13/35 11*eboy/210 0 9/70 -13*eboy/420;...
    0 11*eboy/210 eboy^2/105 0 13*eboy/420 -eboy^2/140;1/6 0 0 1/3 0 0;...
    0 9/70 13*eboy/420 0 13/35 -11*eboy/210;...
    0 -13*eboy/420 -eboy^2/140 0 -11*eboy/210 eboy^2/105];
M11__=rA*eboy*HM11;
```

```
HM12=[0 7/20 eboy/20 0 3/20 -eboy/30;-7/20 0 0 -3/20 0 0;-eboy/20 0 0 -eboy/30 0 0;...
    0 3/20 eboy/30 0 7/20 -eboy/20;-3/20 0 0 -7/20 0 0;eboy/30 0 0 eboy/20 0 0];
```

```
M12__=rA*eboy*as*HM12; M12t__=rA*eboy*aa*HM12;
```

```
M22__=as^2*M11__;
```

```
J__=rI*as*[0 -1 0 0 1 0]; Jt__=rI*aa*[0 -1 0 0 1 0];
```

```
Hf1=[0 0 0 0 0 0;0 6/(5*eboy) 1/10 0 -6/(5*eboy) 1/10;...
    0 1/10 2*eboy/15 0 -1/10 -eboy/30;0 0 0 0 0 0;...
    0 -6/(5*eboy) -1/10 0 6/(5*eboy) -1/10;0 1/10 -eboy/30 0 -1/10 2*eboy/15];
```

J11__=rI*Hfi1;

Hfi2= [0 0 0 0 0;0 3/5 eboy/10 0 -3/5 0;0 eboy/10 eboy^2/30 0 -eboy/10 -eboy^2/60;...
0 0 0 0 0; 0 -3/5 -eboy/10 0 3/5 0;0 0 -eboy^2/60 0 0 eboy^2/10];

Hfi3= [0 0 0 0 0;0 12*eboy/35 eboy^2/14 0 -12*eboy/35 -eboy^2/35;...
0 eboy^2/14 11*eboy^3/105 0 -eboy^2/14 -eboy^3/70;...
0 0 0 0 0; 0 -12*eboy/35 -eboy^2/14 0 12*eboy/35 eboy^2/35;...
0 -eboy^2/35 -eboy^3/70 0 eboy^2/35 3*eboy^3/35];

HP=[1 0 0 -1 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0; -1 0 0 1 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0];
KAL__=EA/eboy*HP;

HQ= [0 0 0 0 0 0;0 6/eboy^2 3/eboy 0 -6/eboy^2 3/eboy;0 3/eboy 2 0 -3/eboy 1;...
0 0 0 0 0 0;0 -6/eboy^2 -3/eboy 0 6/eboy^2 -3/eboy;0 3/eboy 1 0 -3/eboy 2];
KT__=(2*EI/eboy)*HQ;

omega=[0;0;as]; omegat=[0;0;aa];

ger_q(1,1)=0; ger_q(2,1)=0; ger_q(3,1)=0;
for j=4:3*(es+1),
 ger_q(j,1)=q(j,1);
end;

qn(1,1)=0; qn(2,1)=0; qn(3,1)=0;
for j=4:3*(es+1),
 k=3*(es+1)+j; qn(j,1)=q(k,1);
end;

%%% KATSAYI MATRİSLERİNİN %%
%%% ELEMEN BAZINDA YÜKLENMESİ %%

for i=1:es,
s(:,i)=[zeros(6,3*(i-1)) eye(6,6) zeros(6,3*(es-i))];
M11(:,i)=s(:,i)*M11__*s(:,i);
M12(:,i)=s(:,i)*M12__*s(:,i);
M12t(:,i)=s(:,i)*M12t__*s(:,i);
XM1=[0 (3/10+(i-1)) (eboy/15+(i-1)*eboy/6) 0 (7/10+(i-1)) (-eboy/10-(i-1)*eboy/6)];
MX1__=0.5*as*rA*eboy^2*XM1; MX1t__=0.5*aa*rA*eboy^2*XM1;
MX1(:,i)=MX1__*s(:,i); MX1t(:,i)=MX1t__*s(:,i);
XM2=[1/6+(i-1)/2 0 0 1/3+(i-1)/2 0 0];
MX2__=as^2*rA*eboy^2*XM2;
MX2(:,i)=MX2__*s(:,i);
M22(:,i)=s(:,i)*M22__*s(:,i);
J(:,i)=J__*s(:,i); Jt(:,i)=Jt__*s(:,i);
J11(:,i)=s(:,i)*J11__*s(:,i);
M(:,i)=M11(:,i)+J11(:,i);
KAL(:,i)=s(:,i)*KAL__*s(:,i);
KT(:,i)=s(:,i)*KT__*s(:,i);
KF1=(tboy^2-eboy^2*(i-1)^2)*Hfi1;
KF2=eboy*(i-1)*Hfi2; KF3=Hfi3;

```

KF_ =rA*as^2*(KF1-2*KF2-KF3);
KF(:,i)=s(:,i)*KF_*s(:,i);
end;
%%%           ELEMANLARA AİT           %%%
%%%   KATSAYI MATRİSLERİNİN TOPLANMASI   %%%
topM_ =0; topM12=0; topM12t=0;
topMX1=0; topMX1t=0; topMX2=0;
topM22=0; topJ=0; topJt=0;
topKAL=0; topKT=0; topKF=0;

for i=1:es,
    topM_ =topM_+M(:,i);
    topM12=topM12+M12(:,i);    topM12t=topM12t+M12t(:,i);
    topMX1=topMX1+MX1(:,i);    topMX1t=topMX1t+MX1t(:,i);
    topMX2=topMX2+MX2(:,i);
    topM22=topM22+M22(:,i);
    topJ=topJ+J(:,i);          topJt=topJt+Jt(:,i);
    topKAL=topKAL+KAL(:,i);
    topKT=topKT+KT(:,i);
    topKF=topKF+KF(:,i);
end;
topH=topM12'-topM12;          % Hız Matrisi
topY=topM12t'-topM22+topKAL+topKT;    % Yerdeğiştirme Matrisi
sagt=(topMX2t'-topMX1t')-topJt';    % Sağ Taraf Sütun Matrisi

sagt(1,1)=0;    sagt(2,1)=0;    sagt(3,1)=0;

for i=1:3*es,
    for j=1:3*es,
        tM_(i,j)=topM_(3+i,3+j);
        topH_(i,j)=topH(3+i,3+j);
        topY_(i,j)=topY(3+i,3+j);
    end;
end;
tM=inv(tM_);
topM=[zeros(3,3*(es+1)); zeros(3*es,3) tM];
hiz=[zeros(3,3*(es+1)); zeros(3*es,3) topH_];
yerd=[zeros(3,3*(es+1)); zeros(3*es,3) topY_];

topKF(1,1)=0; topKF(2,1)=0; topKF(3,1)=0;

qnn=topM*(-hiz*qn-yerd*ger_q+sagt-0.5*topKF*ger_q);

dq= [qn
     qnn];

```

EK-2: s-v-φ (KEM) Modeline Ait Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Alt Program

```

%% Bu Alt Program s-v-φ (KEM) Modeline Ait
%% Denklemlerin Çözümünü Sağlar
%%

```

```
function dq=svfi(t,q)
```

```

%% KOLA AIT FİZİKSEL DEĞERLER
%%
lb=10; %Toplam Boy
EA=2.8e7; %Uzama Rijitliği
EI=1.4e4; %Eğilme Rijitliği
rA=1.2; %Yoğunluk*Kesit Alanı
rI=6e-4; %Yoğunluk*Kesit Atalet Momenti
%%

```

```

%% HAREKET KANUNU
%%
ahm=6; %Maksimum Hız
tf=15; %Hareketin Toplam Süresi
if t<=tf
    as=ahm/tf*(t-tf/(2*pi)*sin(2*pi*t/tf)); % Açısız Hız
    aa=ahm/tf*(1-cos(2*pi*t/tf)); % Açısız İvme
else
    as=6;
    aa=0;
end
%%

```

```

%% MODAL FONKSİYONLARLA İLGİLİ
%% İNTEGRAL DEĞERLERİ
%%

```

```
a11=0.5*lb; a12=0; a21=0; a22=0.5*lb;
```

```
b111=3.6398; b112=0.7668; b121=b112; b122=14.1513;
b211=-0.1372; b212=1.8654; b221=b212; b222=-1.5407;
```

```
d1=0.4053*lb^2; d2=-0.0450*lb^2;
```

```
eta1=-0.5688*lb^2; eta2=-0.0908*lb^2;
```

```
g11=-0.6779*lb; g12=-0.1936*lb; g21=0.1961*lb; g22=-0.6119*lb;
```

```
ks1111=27.4864/lb; ks1112=4.9495/lb; ks1121=ks1112; ks1122=108.4623/lb;
ks1211=ks1112; ks1212=9.2054/lb; ks1221=ks1212; ks1222=12.3249/lb;
ks2111=ks1112; ks2112=ks1212; ks2121=ks2112; ks2122=ks1222;
ks2211=ks1122; ks2212=ks1222; ks2221=ks1222; ks2222=440.8191/lb;
```

```
mu11=lb; mu12=0; mu21=0; mu22=lb;
```

```
p11=1.2337/lb; p12=0; p21=0; p22=11.1033/lb;
```

$$r11=2.9782*lb; r12=0.4290*lb; r21=r12; r22=11.7583*lb;$$

$$t11=12.3624/lb^3; t12=0; t21=0; t22=485.5188/lb^3;$$

$$z111=-5.0130; z112=-0.9434; z121=-0.2498; z122=-2.9117;
z211=-0.2498; z212=-2.9117; z221=-20.0904; z222=-1.2082;$$

$$nu11=4.6478/lb; nu12=-7.3799/lb; nu21=nu12; nu22=32.4174/lb;$$

$$omega11=nu11; omega12=nu12; omega21=nu21; omega22=nu22;$$

$$sigma11=t11; sigma12=t12; sigma21=t21; sigma22=t22;$$

$$lam11=nu11; lam12=nu12; lam21=nu21; lam22=nu22;$$

$$kappal=-2; kappa2=2;$$

%%% u DENKLEMLERİNİN %%%
 %%% ç Lİ TERİMLER DIŞINDA KALAN KISIMLARI %%%

$$f(1)= b111*q(9)^2+2*b112*q(9)*q(10)+b122*q(10)^2+2*as*g11*q(9)+2*as*g12*q(10)-... \\ 0.5*as*b111*q(3)^2-as*b112*q(3)*q(4)-0.5*as*b122*q(4)^2+aa*g11*q(3)+... \\ aa*g12*q(4)+as^2*d1-(emyog*p11-as^2*a11)*q(1)-(emyog*p12-as^2*a12)*q(2);$$

$$f(2)= b211*q(9)^2+2*b212*q(9)*q(10)+b222*q(10)^2+2*as*g21*q(9)+2*as*g22*q(10)-... \\ 0.5*as*b211*q(3)^2-as*b212*q(3)*q(4)-0.5*as*b222*q(4)^2+aa*g21*q(3)+... \\ aa*g22*q(4)+as^2*d2-(emyog*p21-as^2*a21)*q(1)-(emyog*p22-as^2*a22)*q(2);$$

%%% v DENKLEMLERİNİN %%%
 %%% ç Lİ TERİMLER DIŞINDA KALAN KISIMLARI %%%

$$f(3)= -(ks1111*q(3)+ks1211*q(4))*q(9)^2-2*(ks1112*q(3)+ks1212*q(4))*q(9)*q(10)-... \\ (ks1122*q(3)+ks1222*q(4))*q(10)^2-2*as*g11*q(7)-2*as*g21*q(8)-0.5*aa*z111*q(3)^2-... \\ aa*(z112-0.5*z121)*q(3)*q(4)-aa*(z121-0.5*z221)*q(3)*q(4)-aa*(z122-0.5*z221)*q(4)^2-... \\ as^2*(b111*q(3)+b112*q(4))*q(1)-as^2*(b211*q(3)+b212*q(4))*q(2)-aa*g11*q(1)-... \\ aa*g21*q(2)+0.5*as^2*(ks1111*q(3)^3+3*ks1112*q(3)^2*q(4)+2*ks1212*q(3)*q(4)^2+... \\ ks1122*q(3)*q(4)^2+ks1222*q(4)^3)-2*as*((z112-z211)*q(10)*q(3)+... \\ (z122-z221)*q(4)*q(10))-aa*eta1-(fak*GA*nu11/rA+as^2*r11-as^2*mu11)*q(3)-... \\ (fak*GA*nu12/rA+as^2*r12-as^2*mu12)*q(4)+... \\ fak*GA*(omega11*q(5)+omega12*q(6))/rA;$$

$$f(4)= -(ks2111*q(3)+ks2211*q(4))*q(9)^2-2*(ks2112*q(3)+ks2212*q(4))*q(9)*q(10)-... \\ (ks2122*q(3)+ks2222*q(4))*q(10)^2-2*as*g12*q(7)-2*as*g22*q(8)-... \\ aa*(z211-0.5*z112)*q(3)^2-aa*(z212-0.5*z122)*q(3)*q(4)-... \\ aa*(z221-0.5*z212)*q(3)*q(4)-0.5*aa*z222*q(4)^2-as^2*(b121*q(3)+... \\ b122*q(4))*q(1)-as^2*(b221*q(3)+b222*q(4))*q(2)-aa*g12*q(1)-aa*g22*q(2)+... \\ 0.5*as^2*(ks2111*q(3)^3+2*ks2112*q(3)^2*q(4)+3*ks2122*q(3)*q(4)^2+... \\ ks2211*q(3)^2*q(4)+ks2222*q(4)^3)-2*as*((z211-z112)*q(3)*q(9)+... \\ (z221-z122)*q(9)*q(4))-aa*eta2-(fak*GA*nu21/rA+as^2*r21)-...$$

$$as^2 \mu_{21} q(3) - (fak * GA * nu_{22} / rA + as^2 * r_{22} - as^2 \mu_{22}) q(4) + \dots$$

$$fak * GA * (\omega_{21} q(5) + \omega_{22} q(6)) / rA;$$

%%% φ DENKLEMLERİNİN %%%

%%% \ddot{q} Lİ TERİMLER DIŞINDA KALAN KISIMLARI %%%

$$f(5) = fak * GA * (\omega_{11} q(3) + \omega_{21} q(4) - \lambda_{11} q(5) - \lambda_{12} q(6)) / rI - \dots$$

$$aa * \kappa_{11} - EA * (\sigma_{11} q(5) + \sigma_{12} q(6)) / rA;$$

$$f(6) = fak * GA * (\omega_{12} q(3) + \omega_{22} q(4) - \lambda_{21} q(5) - \lambda_{22} q(6)) / rI - \dots$$

$$aa * \kappa_{22} - EA * (\sigma_{21} q(5) + \sigma_{22} q(6)) / rA;$$

%%% \ddot{q} Lİ TERİMLERE AİT %%%

%%% KATSAYI MATRİSİNİN OLUŞTURULMASI %%%

$$m(1,1) = a_{11}; m(1,2) = a_{12};$$

$$m(1,3) = -(b_{111} q(3) + b_{121} q(4));$$

$$m(1,4) = -(b_{112} q(3) + b_{122} q(4));$$

$$m(1,5) = 0; m(1,6) = 0;$$

$$m(2,1) = a_{21}; m(2,2) = a_{22};$$

$$m(2,3) = -(b_{211} q(3) + b_{221} q(4));$$

$$m(2,4) = -(b_{212} q(3) + b_{222} q(4));$$

$$m(2,5) = 0; m(2,6) = 0;$$

$$m(3,1) = m(1,3); m(3,2) = m(2,3);$$

$$m(3,3) = \mu_{11} + ks_{1111} q(3)^2 + 2 * ks_{1121} q(3) * q(4) + ks_{1221} q(4)^2;$$

$$m(3,4) = \mu_{12} + ks_{1112} q(3)^2 + (ks_{1122} + ks_{1212}) q(3) * q(4) + ks_{1222} q(4)^2;$$

$$m(3,5) = 0; m(3,6) = 0;$$

$$m(4,1) = m(1,4); m(4,2) = m(2,4);$$

$$m(4,3) = m(3,4);$$

$$m(4,4) = \mu_{22} + ks_{2112} q(3)^2 + 2 * ks_{2122} q(3) * q(4) + ks_{2222} q(4)^2;$$

$$m(4,5) = 0; m(4,6) = 0;$$

$$m(5,1) = 0; m(5,2) = 0; m(5,3) = 0; m(5,4) = 0;$$

$$m(5,5) = \lambda_{11}; m(5,6) = \lambda_{12};$$

$$m(6,1) = 0; m(6,2) = 0; m(6,3) = 0; m(6,4) = 0;$$

$$m(6,5) = \lambda_{21}; m(6,6) = \lambda_{22};$$

$$qn = \text{inv}(m) * f;$$

$$i = 1:6; j = 6 + i;$$

$$\text{ger}_q(i) = q(j);$$

$$dq = [\text{ger}_q'$$

$$qn];$$

EK-3: v- N_M (KEM) Modeline Ait Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Alt Program

```

%% Bu Alt Program v-NM (KEM) Modeline Ait
%% Denklemlerin Çözümünü Sağlar

```

```
function dy=norkuv(t,y)
```

```
%% KOLA AİT FİZİKSEL DEĞERLER %%
```

```
lb=10; %Toplam Boy
EI=1.4e4; %Eğilme Rijitliği
rA=1.2; %Yoğunluk*Kesit Alanı
atm=EI/EA;
%%
```

```
%% HAREKET KANUNU %%
```

```
ahm=6; %Maksimum Hız
tf=15; %Hareketin Toplam Süresi
if t<=tf
    as=ahm/tf*(t-tf/(2*pi)*sin(2*pi*t/tf)); % Açısal Hız
    aa=ahm/tf*(1-cos(2*pi*t/tf)); % Açısal İvme
else
    as=6; aa=0;
end
```

```
%%
```

```
%% MODAL FONKSİYONLARLA İLGİLİ %%
%% İNTEGRAL DEĞERLERİ %%
```

```
eta1=-0.5688*lb^2; eta2=-0.0908*lb^2;
ka11=2.2611*lb; ka12=-6.0082*lb; ka21=ka12; ka22=19.4609*lb;
mu11=lb; mu22=lb;
nu11=4.6478/lb; nu12=-7.3799/lb; nu21=nu12; nu22=32.4174/lb;
nu1=-2; nu2=2;
t11=12.3624/lb^3; t22=485.5188/lb^3;
```

```
%% KATSAYI MATRİSLERİNİN OLUŞTURULMASI %%
```

```
M=[mu11+atm*nu11 atm*nu12;atm*nu21 mu22+atm*nu22];
K=[EI*t11/rA-(mu11-0.5*(lb^2*nu11-ka11))*as^2 0.5*(lb^2*nu12-ka12)*as^2;...
0.5*(lb^2*nu21-ka21)*as^2 EI*t22/rA-(mu22-0.5*(lb^2*nu22-ka22))*as^2];
F=[-(eta1+atm*nu1)*aa; -(eta2+atm*nu2)*aa];
```

```
Mt=inv(M);
yy=[y(:,1);y(:,2)]; % Yer Değiştirme Vektörü
yn=[y(:,3);y(:,4)]; % Hız Vektörü
```

```
ynn=-Mt*(K*yy)+Mt*F; %Denklem Takımı
dy= [yn
ynn];
```


EK-4: u, s ve v Deplasmanlarının Hesaplanmasında Kullanılan Yardımcı Program (svdep2.m)

```

%% Bu Program KEM Modeline Ait Alt Programlarla Bulunan
%% qi Değerlerini Modal Fonksiyonlarla Çarparak
%% Kolun Her x Noktasının Her t Anındaki
%% u, s ve v Deplasmanlarını Hesaplar

```

```

n=50;
ara=1/(n-1);
for i=1:n
x(i)=1*(i-1)*ara;
end;

```

```
lam1=1.8751037; lam2=4.694;
```

```

k1=(cos(lam1)+cosh(lam1))/(sin(lam1)+sinh(lam1));
k2=(cos(lam2)+cosh(lam2))/(sin(lam2)+sinh(lam2));

```

```

fv1=(cos(x'*lam1)-cosh(x'*lam1))-(sin(x'*lam1)-sinh(x'*lam1))*k1;
fv2=(cos(x'*lam2)-cosh(x'*lam2))-(sin(x'*lam2)-sinh(x'*lam2))*k2;
fv=[fv1 fv2];

```

```

fv1i=(x'*lam1^2*k1^2+lam1/4*sin(2*x'*lam1)*(k1^2-1)+lam1/4*sinh(2*x'*lam1)*(k1^2+1)-...
lam1*cos(x'*lam1).sinh(x'*lam1)*(k1^2+1)-lam1*sin(x'*lam1).cosh(x'*lam1)*(k1^2-1)-...
lam1*sin(x'*lam1).sinh(x'*lam1)*(k1-1)+2*k1*lam1*cos(x'*lam1).cosh(x'*lam1)+...
k1*lam1*(sin(x'*lam1).^2-sinh(x'*lam1).^2))/lb;

```

```

sls2=(lam1*sin(x'*lam2).cos(x'*lam1)-lam2*sin(x'*lam1).cos(x'*lam2))/(lam2^2-lam1^2);
slsh2=(lam2*sin(x'*lam1).cosh(x'*lam2)-lam1*cos(x'*lam1).sinh(x'*lam2))/(lam2^2+lam1^2);
slc2=(lam1*cos(x'*lam1).cos(x'*lam2)+lam2*sin(x'*lam1).sin(x'*lam2))/(lam2^2-lam1^2);
slch2=(-lam1*cos(x'*lam1).cosh(x'*lam2)+lam2*sin(x'*lam1).sinh(x'*lam2))/(lam2^2+lam1^2);
shls2=(lam1*sin(x'*lam2).cosh(x'*lam1)-lam2*cos(x'*lam2).sinh(x'*lam1))/(lam1^2+lam2^2);
shlsh2=(-lam1*sinh(x'*lam2).cosh(x'*lam1)+lam2*sinh(x'*lam1).cosh(x'*lam2))/(lam2^2-...
lam1^2);

```

```

shlc2=(lam1*cosh(x'*lam1).cos(x'*lam2)+lam2*sinh(x'*lam1).sin(x'*lam2))/(lam2^2+lam1^2);
shlch2=(-lam1*cosh(x'*lam1).cosh(x'*lam2)+lam2*sinh(x'*lam1).sinh(x'*lam2))/(lam2^2-...
lam1^2);

```

```

s2c1=(lam2*cos(x'*lam2).cos(x'*lam1)+lam1*sin(x'*lam2).sin(x'*lam1))/(lam1^2-lam2^2);
s2ch1=(-lam2*cos(x'*lam2).cosh(x'*lam1)+lam1*sin(x'*lam2).sinh(x'*lam1))/(lam2^2+lam1^2);
sh2c1=(lam2*cosh(x'*lam2).cos(x'*lam1)+lam1*sinh(x'*lam2).sin(x'*lam1))/(lam2^2+lam1^2);
sh2ch1=(-lam2*cosh(x'*lam2).cosh(x'*lam1)+lam1*sinh(x'*lam2).sinh(x'*lam1))/(lam1^2-...
lam2^2);

```

```

c1c2=(-lam1*sin(x'*lam1).cos(x'*lam2)+lam2*cos(x'*lam1).sin(x'*lam2))/(lam2^2-lam1^2);
c1ch2=(lam1*sin(x'*lam1).cosh(x'*lam2)+lam2*cos(x'*lam1).sinh(x'*lam2))/(lam2^2+lam1^2);
ch1c2=(lam2*sin(x'*lam2).cosh(x'*lam1)+lam1*cos(x'*lam2).sinh(x'*lam1))/(lam2^2+lam1^2);
ch1ch2=(-lam1*sinh(x'*lam1).cosh(x'*lam2)+lam2*cosh(x'*lam1).sinh(x'*lam2))/(lam2^2-...
lam1^2);

```

```
fvt12=(lam1*lam2*(s1s2+s1sh2+k2*s1c2-k2*s1ch2+sh1s2+sh1sh2+k2*sh1c2-k2*sh1ch2+...
      k1*s2c1-k1*s2ch1+k1*sh2c1-k1*sh2ch1+k1*k2*c1c2-k1*k2*c1ch2-...
      k1*k2*ch1c2+k1*k2*ch1ch2))/lb;
```

```
fvt22=(x'*lam2^2*k^2+lam2/4*sin(2*x'*lam2)*(k^2-1)+lam2/4*sinh(2*x'*lam2)*(k^2+1)-...
      lam2*cos(x'*lam2).*sinh(x'*lam2)*(k^2+1)-lam2*sin(x'*lam2).*cosh(x'*lam2)*(k^2-1)-...
      lam2*sin(x'*lam2).*sinh(x'*lam2)*(k-1)+2*k2*lam2*cos(x'*lam2).*cosh(x'*lam2)+...
      k2*lam2*(sin(x'*lam2).^2-sinh(x'*lam2).^2))/lb;
```

```
fs1=sin(pi*x'*(2*1-1)/2);
fs2=sin(pi*x'*(2*2-1)/2);
fs=[fs1 fs2];
```

```
qs=[q(:,1) q(:,2)];
qv=[q(:,3) q(:,4)];
```

```
s=fs*qs';
v=fv*qv';
vt=0.5*(q(:,3).^2*fvt11'+2*q(:,3).*q(:,4)*fvt12'+q(:,4).^2*fvt22');
u=s-vt';
```



EK-5: Alt Programlarla Verilen Ode Dosyalarını Çalıştıran Ana Program

```
%%% Bu Program EK-1, EK-2, EK-3 de Verilen ve Alt Program   %%%
%%% Halindeki ODE Dosyalarını Çalıştırır                 %%%
```

```
[t,q]=çözücü ('ode_dosyasının_adi',çözüm_süresi,başlangıç_değerleri);
```

```
%% çözücü; MATLAB 5.2 programında mevcut ODE45,ODE23, ODE23s, ODE23t, ODE23tb,
%% ODE113, ODE15s fonksiyonlarından çözümü yapılacak denklemler için uygun olanı seçilir.
%% Bu çalışmada, stiff diferansiyel denklemler için hazırlanmış ve
%% çözüm metodu derecesi değişken olan ODE15s fonksiyonu kullanılmıştır.
```

```
%% 'ode_dosyasının_adi'; çözümü yapılacak denklemler için tanımlandığı alt programın adıdır.
%% 'femmk' , 'svfi', 'norkuv' gibi.
```

```
%% çözüm_süresi; çözüm yapılacak zaman aralığının başlangıç ve bitiş değerleri vektör tarzında
%% verilir.
```

```
%% başlangıç_değerleri; çözüm değişkenlerinin başlangıç değerleri vektör tarzında verilir.
```

```
svdep2; %% KEM modeline ait denklemlerin çözümünden bulunan
%% zamana bağlı q değişkenleri modal fonksiyonlarla çarpılarak kolun
%% her x noktasına ait u ,s ve v deplasmanları hesaplanır.
```

```
plot(t,v(50,:)) %% kolun uç noktasının enine deplasmanlarının zamana göre değişimini
%% ekrana çizer
```

```
figure %% yeni bir çizim penceresi açar
```

```
plot(t,s(50,:)) %% kolun uç noktasının boyuna deplasmanlarının zamana göre değişimini
%% ekrana çizer
```

ÖZGEÇMİŞ

1969 yılında Erzurum iline bağlı Horasan ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise tahsilini orada tamamladıktan sonra 1986 yılında girdiği U.Ü. Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü'nden 1990 yılında derece ile mezun oldu. Aynı yıl U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans eğitimini 1992 yılında tamamlayarak aynı Anabilim Dalında doktora başladı. Halen, 1991 yılında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladığı U.Ü. Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makine Bölümü'nde bu görevine devam etmektedir.

