GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSLERİ

Fikriye ERSOY

T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSLERİ

Fikriye ERSOY

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2013

TEZ ONAYI

Fikriye ERSOY tarafından hazırlanan "Grafların Komşuluk Matrisleri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL   İmza

Üye: Prof. Dr. İlhan TAPAN   İmza

Üye: Yrd. Doç. Dr. Musa DEMİRCİ   İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

…/…/2013

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../2013

Fikriye ERSOY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSLERİ

Fikriye ERSOY

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

Bu çalışmada graflar ve grafların komşuluk matrisleri ele alınmıştır.

Birinci bölümde, graflarla ilgili temel tanımlar, grafların kullanım alanları, graf türleri ve grafların matrislerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde, graf türlerinin komşuluk matrisleri verilmiş ve bunların genel formları elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, numaralandırılmış graf türlerinin komşuluk matrislerinin sayısı teorem ile verilmiş ve örneklendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: graf, numaralandırılmış graflar, graf türleri, komşuluk matrisi

2013, viii+39 sayfa

ABSTRACT

Master Thesis

NEIGHBOURHOOD MATRICES OF GRAPHS

Fikriye ERSOY

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

In this thesis, graphs and neighborhood matrices of graphs are studied.

In the first chapter, fundamental notions on graphs, usage areas of graphs, graph types and graph matrices are recalled.

In the second chapter, neighbourhood matrices of several well-known graph types are obtained and general forms of those are given.

In the third chapter, the number of neighbourhood matrices of several numbered graph types is obtained and explained with examples.

Key Words: graph, numbered graph, graph types, neighbourhood matrix

2013, viii+39 pages

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım esnasında oldukça yoğun programına rağmen bana her zaman vakit ayıran, birikimleri ile ufkumu açan, anlayışlı ve çok değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci Cangül'e teşekkürlerimi ve sonsuz minnetimi sunuyorum. Ayrıca aileme (özellikle biricik yeğenim Rüzgar'a) yanımda bulundukları ve bana her zaman destek verdikleri için çok teşekkür ediyorum.

Fikriye ERSOY

…/…/2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
deg(v)	Derece
N_n	Sıfır Graf
P_n	Yol Graf
C_n	Devir Graf
K_n	Tam Graf
S_n	Yıldız Graf
$K_{r,s}$	İki Parçalı Graf
A(G)	Komşuluk Matrisi
B(G)	Bitişiklik Matrisi
D(G)	Köşegen Matris
L(G)	Laplace Matrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

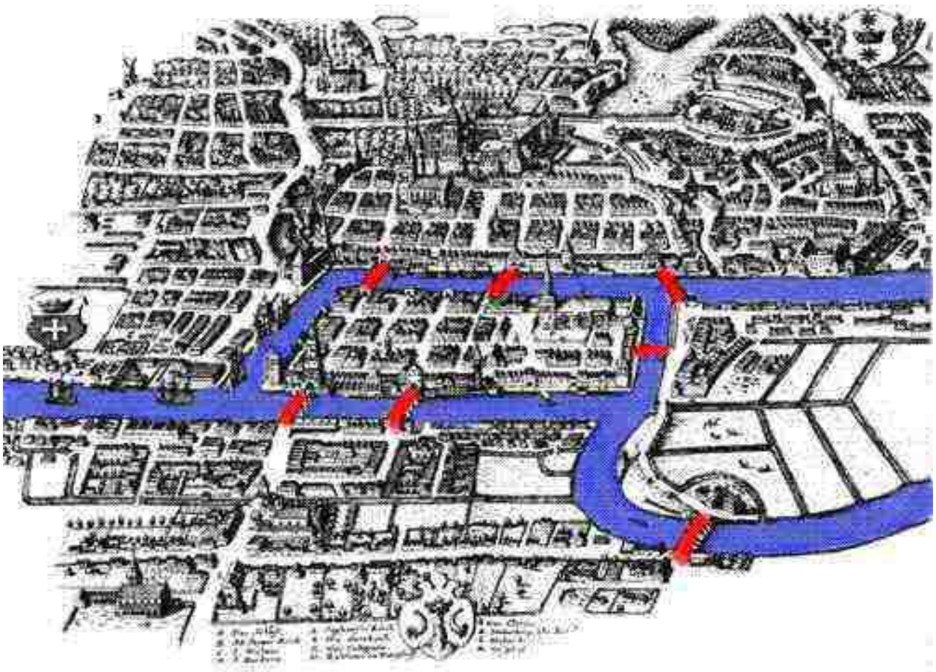
TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

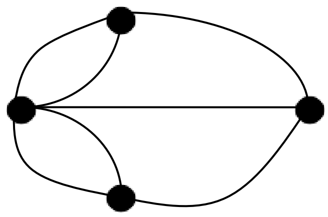
1.1. Grafların Tarihçesi

Graf teori, 1736 yılında İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından Königsberg kasabasının "Yedi Köprü" problemi baz alınarak kaleme alınmış makalesinin yayımlanması ile ortaya çıkmıştır.



Şekil 1.1. Königsberg ve 7 köprüsü

Königsberg Kasabası'ndaki Pregel nehri, Kneigh isimli adacığın etrafından akarak şekilde görüldüğü gibi iki kola ayrılmaktaydı. Şekildeki 7 köprü kentin 4 parçasını birbirine bağlıyordu. Hikayeye göre kasaba halkı eğlence olsun diye kentin farklı noktalarından hareket ederek 7 köprüyü birer kez geçip başladıkları noktaya dönmeyi deniyorlarmış. Hiçbiri bu geziyi başaramamış. Kentin ortak merakı haline gelen bu problem o zamanın ünlü matematikçisi Leonhard Euler'in ilgisini çekmiş ve Euler, problemi üzerinde daha rahat oynayabilecek bir şekille temsil ederek işe başlamış (Biggs ve Lloyd ve Wilson 1986).



Şekil 1.2. Königsberg'in grafla gösterimi

Euler, kara parçalarının her birini bir noktayla, köprüleri de kenar denilen çizgilerle temsil etmiştir. Problem, graf teorisi terimleri ile şu hale gelmiştir:

Herhangi bir noktadan harekete başlayıp, bütün kenarlardan bir ve yalnız bir defa geçerek, bütün noktaları ziyaret ettikten sonra başlangıç noktasına varabilir miyiz?

Euler, çalışmalarının sonucunda bunun mümkün olabilmesi için tüm noktaların çift dereceli olması gerektiğini ispatlamıştır. Yukarıdaki grafta da tüm noktaların dereceleri tek olduğundan Königsberg probleminin çözümünün mümkün olmadığı görülür.

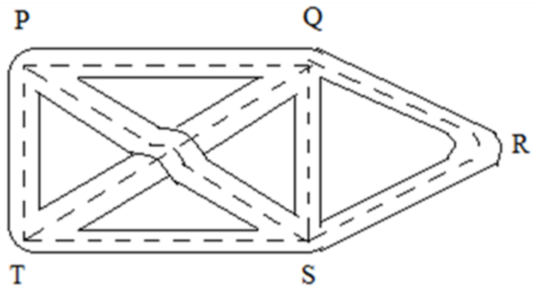
Burada Euler, noktaların tümünün derecelerinin çift olması gerektiğini şu şekilde elde etmişti: Bu tür bir probleme bir noktadan başlanıldığında ve herhangi bir noktaya gelindiğinde bu noktada bir tane gelen bir tane de giden kenar olmalı ve böylece bu noktanın derecesi çift olmalıdır. Bu bütün noktalar için doğru olmalıdır, fakat biri çizime başladığımız diğeri de çizimi bitirdiğimiz nokta olmak üzere iki noktanın derecesi tek olabilir. Ancak Könisberg köprüleri probleminde, başlanılan noktaya geri dönülmesi amaçlandığından bu iki noktanın da mertebesi çift olmalıdır ve böylece ilgili grafiğin çizilebilir olması için gerek ve yeter koşul tüm noktaların derecelerinin çift olmasıdır.

Bu problem, graf teorisinin başlangıç problemi olarak bilinir. Bunun sonrasında da bu tez içinde zaman zaman atıfta bulunacağımız çok sayıda tarihsel problem, graf teorisinin gelişimine katkıda bulunmuştur.

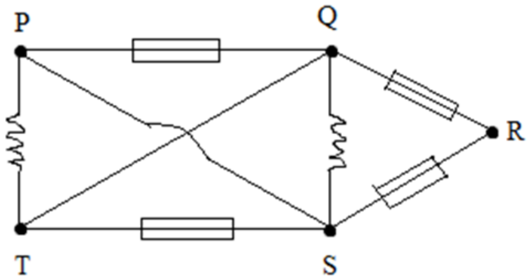
1.2. Graflarla İlgili Temel Kavramlar

1.2.1. Giriş

Şekil 1.3 ve Şekil 1.4 sırasıyla bir yol haritasının parçasını ve bir elektrik devresinin parçasını göstermektedir.

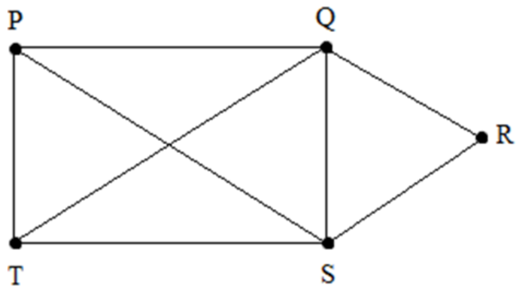


Şekil 1.3. Yol haritası



Şekil 1.4. Elektrik devresi

Bu durumlardan her biri Şekil 1.5’teki gibi çizgiler ve noktalar aracılığıyla bir diyagram olarak temsil edilebilir. P, Q, R, S ve T noktalarına köşeler (vertices), çizgilere kenarlar (edges) bütün diyagrama da graf (graph) adı verilir. Örneğin, Şekil 1.5’teki grafta 5 köşe, 8 kenar vardır.



Şekil 1.5. Yol haritası ve elektrik devresi grafı

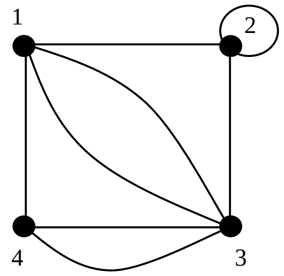
Not. PS ve QT çizgilerinin kesişimi bir nokta değildir.

1.2.2 Tanım. Kenar denilen doğru parçaları ile birleştirilmiş köşe denilen noktalardan oluşan bir diyagrama graf denir.

Graf kavramı daha detaylı olarak şu şekilde de tanımlanabilir:

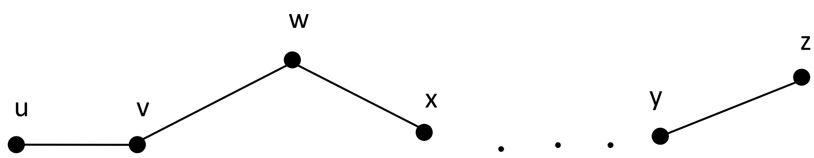
V ile gösterilen ve köşeler kümesi adı verilen elemanlar kümesi ile VxV kartezyen çarpım kümesindeki sıralı ikililer ile tanımlanmış kenarların oluşturduğu E kümesinin birlikte meydana getirdiği şemaya (diyagrama) graf denir. Graf G = (V,E) ile gösterilir.

1.2.3 Tanım. İki köşeyi birleştiren birden fazla kenar varsa bunlara çoklu kenar, bir köşeyi kendine birleştiren bir kenara da döngü denir. Bu iki tür kenarı olmayan grafa basit graf denir.



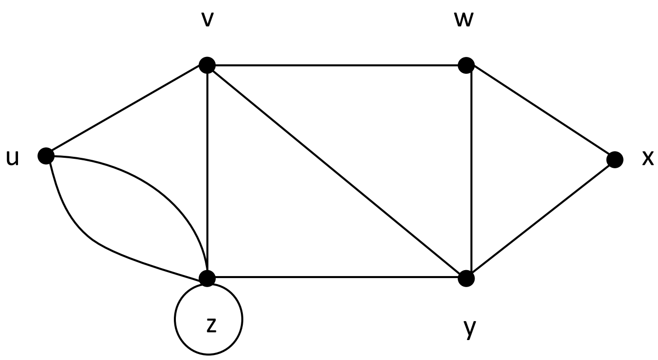
Şekil 1.6. Çoklu kenar ve döngüye sahip graf

1.2.4 Tanım. Bir G grafında G'nin k tane kenarının uv, vw, wx, …, yz şeklindeki sıralanışına k uzunluklu bir yol denir (Rouvray ve Balaban 1979).



Şekil 1.7. k uzunluklu bir yol

Böyle bir yol uvwx…yz ile gösterilir ve u ve z veya z ve u arasındaki yol olarak anılır.



Şekil 1.8. Yol örneği

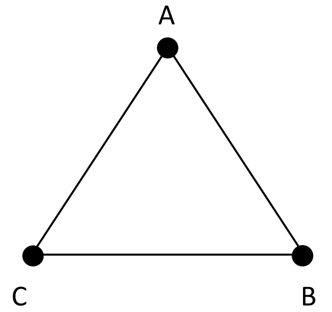
Şekil 1.8'deki uvwxywvzzy 9 uzunluğunda bir yoldur ve vw kenarını iki kez bulundurur.

1.2.5 Tanım. Bir yolun tüm kenarları farklıysa böyle bir yola iz denir. Buna ek olarak tüm köşeler de farklıysa yola patika denir.

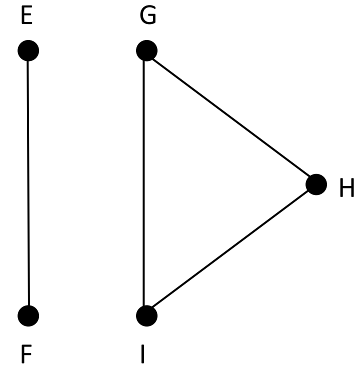
Şekil 1.8'deki vzzywxy bir izdir. Çünkü y ve z köşeleri ikişer kez yer almıştır. Bununla birlikte vwxyz bir patikadır.

1.2.6 Tanım. Bir G grafında G'nin kenarlarının uv, vw, wx,…, yz, zu şeklindeki bir sıralanışına kapalı yol denir. Kenarların hepsi farklı ise yola kapalı iz denir. Buna ek olarak tüm köşeler de farklı ise bu ize devir denir. Şekil 1.8'deki grafta uvwyvzu kapalı bir izdir. zz, vwxyv, vwxyzv her biri birer devirdir.

1.2.7 Tanım. İki grafın birleşimi olarak yazılamayan bir grafa bağlantılı, aksi halde bağlantısız graf denir (Gross ve Yellen 1999).

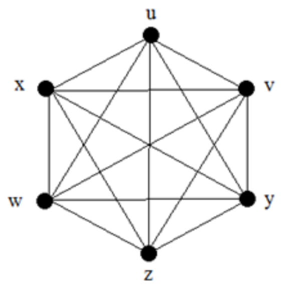


Şekil 1.9. Bağlantılı graf



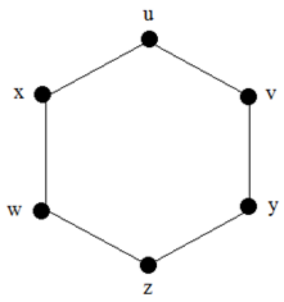
Şekil 1.10. Bağlantısız graf

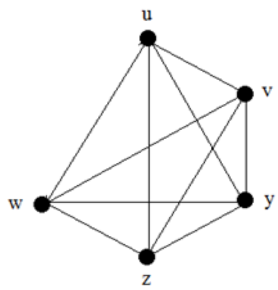
1.2.8 Tanım. G, V(G) köşeler kümesi ve E(G) kenarlar kümesine sahip bir graf olsun. G'nin bir alt grafı köşeleri V(G)'ye kenarları E(G)'ye ait başka bir graftır. Örneğin;



Şekil 1.11. Graf

grafının bazı alt grafları aşağıdaki gibidir:

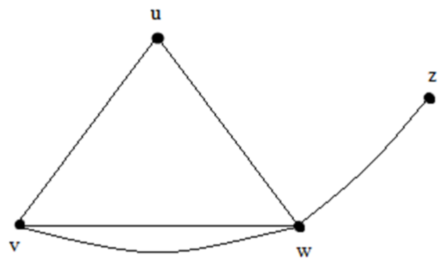




Şekil 1.12. Alt graf örneği

Şekil 1.13. Alt graf örneği

1.2.9 Tanım. G bir döngüsüz graf ve v∈V(G) olsun. v'de buluşan kenarların sayısına

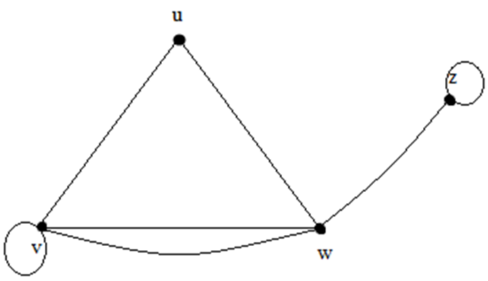


Şekil 1.14. Döngüsüz graf

v'nin derecesi (katlılığı) denir ve deg(v) ile gösterilir.

deg(u)=2, deg(v)=3, deg(w)=4, deg(z)=1

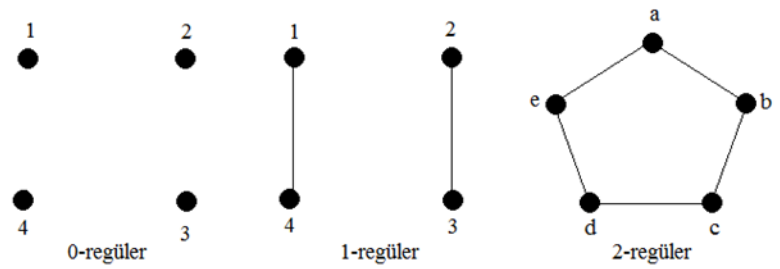
Yukarıdaki tanım döngüye sahip graflar için de verilebilir. Her döngü için derece iki arttırılmalıdır. Örneğin,



Şekil 1.15. Döngüye sahip graf

deg(u)=2, deg(v)=5, deg(w)=4, deg(z)=3

1.2.10 Tanım. Bir G grafında tüm köşe dereceleri birbirine eşitse G'ye regüler denir. Her köşenin derecesi r ise G'ye r-regüler denir (Douglas 2001).



Şekil 1.16. Regüler graflar

1.2.11 Tanım. Regüler bir G grafında,

$$\text{Toplam köşe derecesi} = \text{köşe sayısı} \times r$$

dir.

1.2.12 Lemma (El sıkma lemması). Bir G grafında köşe derecelerinin toplamı, kenar sayısının iki katına eşittir.

İspat. Her kenarın iki köşeye birleştiğini düşünürsek ispat açıktır.

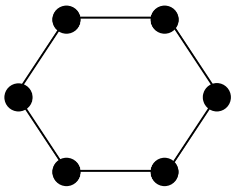
1.2.13 Sonuç.

1) Toplam köşe derecesi çifttir.

2) Tek dereceli köşe sayısı çifttir.

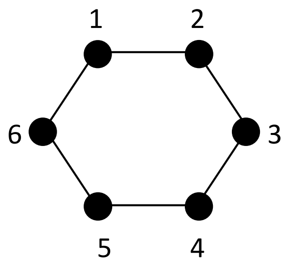
3) G, n köşeye sahip r- regüler bir graf ise G'nin kenar sayısı $\frac{r.n}{2}$'dir.

1.2.14 Tanım. Bir grafın her bir köşesini bir sembolle (sayı veya harf) ifade edersek grafa numaralandırılmış (numaralandırılmış) graf, aksi halde grafa numaralandırılmamış (numaralandırılmamış) graf denir. Şekil 1.17 numaralandırılmış grafa, Şekil 1.18 numaralandırılmamış grafa örnektir (Harary ve Palmer 1973).



Şekil 1.17.

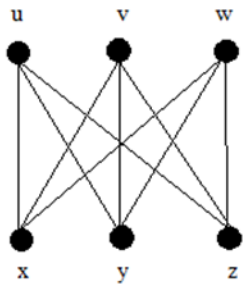
Numaralandırılmamış graf

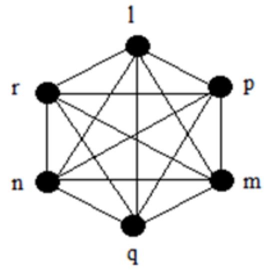


Şekil 1.18.

Numaralandırılmış graf

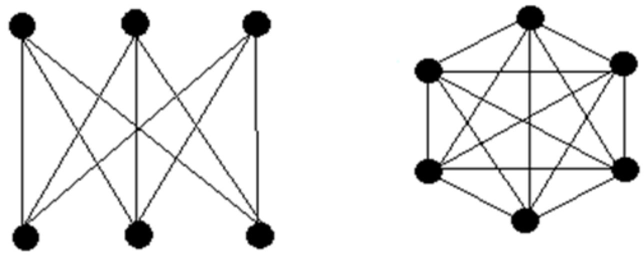
1.2.15 Tanım. G_1 ve G_2 iki graf olsun. G_1’in herhangi iki köşesini birleştiren kenarların sayısı G_2’nin karşılık gelen köşelerini birleştiren kenarların sayısına eşit olsun. O halde G_1 ve G_2’nin köşeleri arasında birebir bir eşleme varsa G_1 ve G_2’ye izomorftur denir. Böylece aşağıdaki iki graf u $\leftrightarrow$ l, v $\leftrightarrow$ m, w $\leftrightarrow$ n, x $\leftrightarrow$ p, y $\leftrightarrow$ q, z $\leftrightarrow$ r eşlemesi altında izomorftur (Wilson 1996).





Şekil 1.19. numaralandırılmış izomorf graflar

Yukarıdaki iki grafın ne zaman izomorf olduğunu gördük. Bunun sonucunda, numaralandırılmamış iki grafın işaretlerini belirleyebiliyorsak bu iki grafın izomorf olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin Şekil 1.20’deki numaralandırılmamış graflar, köşelerini Şekil 1.19’daki gibi işaretleyebildiğimiz için izomorftur.

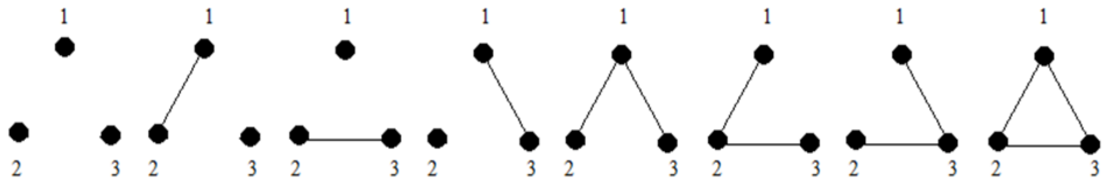


Şekil 1.20. İşaretsiz izomorf graflar

İşaretli ve numaralandırılmamış graflar arasındaki farklılık, onları saymaya çalıştığımızda daha belli olur.

1.2.16 Grafları Sayma

Grafları sayarken izomorfik olanları aynı kabul edip, izomorf olmayanları sayacağız. Ayrıca numaralandırılmış ve numaralandırılmamış graflar arasında da ayrım yapılacaktır. İlk olarak numaralandırılmış grafları sayalım (Bondy ve Murty 1976). Örneğin, 3 köşeye sahip numaralandırılmış grafların sayısı sekizdir.



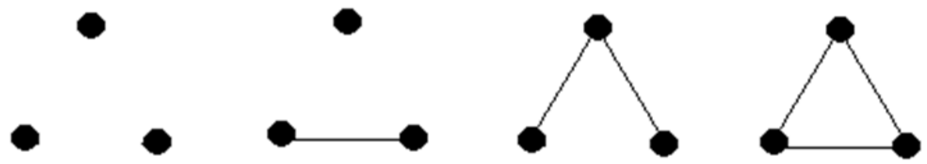
Şekil 1.21. Numaralandırılmış grafları sayma

n köşeye sahip numaralandırılmış grafların sayısını bulmak zor değildir. El sıkma lemmasının 3. sonucu gereği mümkün olan tüm kenarların sayısı $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$'dir. İkinci olarak her bir kenar ya vardır ya yoktur. Dolayısıyla iki ihtimal vardır. Aranan sayı $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ olur. Aşağıdaki listede $n \leq 8$ için n köşeye sahip numaralandırılmış grafların sayısı verilmiştir.

Tablo 1.1 n köşeli numaralandırılmış grafların sayısı

n	1	2	3	4	5	6	7	8
İşaretli graf sayısı	1	2	8	64	1024	32768	2097152	268435456

Şimdi de 3 köşeli numaralandırılmamış grafları sayacak olursak,



Şekil 1.22. Numaralandırılmamış grafları sayma

buluruz. Küçük köşe sayıları için bu şekilde hesap yapmak kolaydır. Ancak köşe sayısı büyüdükçe onları saymanın başka bir yöntemi gereklidir. 1935'de George Polya bir formül vermiştir. Bu formül daha sonra graflarla ilgili birçok sayma problemlerini çözmede de kullanılmıştır.

Tablo 1.2 n köşeli grafların, bağlantılı ve regüler grafların sayısı

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Graflar	1	2	4	11	34	156	1044	12346
Bağlantılı	1	1	2	6	21	112	853	11117
Regüler	1	2	2	4	3	8	6	20

Görüldüğü gibi numaralandırılmış graflar için sayma problemi numaralandırılmamışlar için olandan daha kolaydır.

1.3. Grafların Kullanım Alanları

Günlük hayatta karşılaştığımız birçok durum, bir noktalar kümesi ve bu noktaları birleştiren doğruların oluşturduğu graf denilen şemalarla gösterilebilir. Örneğin;

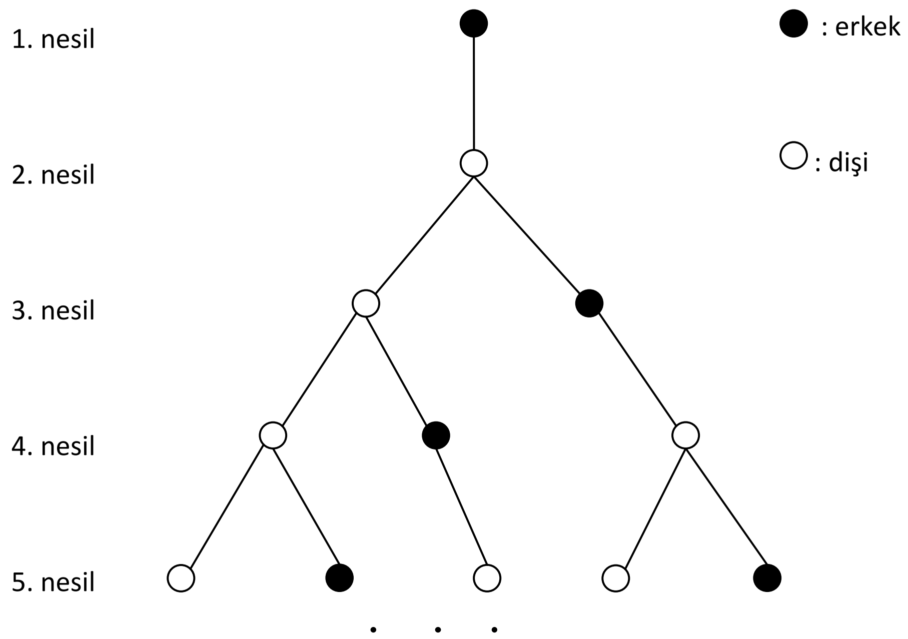
1) İstanbul'dan Samsun'a kaç farklı kara yolu ile gidilebilir? En kısa yolu bulunuz.

2) Gezgin Satıcı Problemi: Gezgin Satıcı Problemi'nde (GSP) amaç, bir satıcının, bulunduğu şehirden başlayıp, her şehre sadece bir kez uğradıktan sonra başladığı şehre geri dönen en kısa turunu bulmaktır. Bu problemde herhangi iki şehir arasında bir yol olduğunu ve o yolun uzunluğunu bildiğimizi varsayıyoruz. GSP, graf kuramı dilinde, şehirlerin noktalarla, şehirlerarası yolların kenarlarla temsil edildiği (yalın) bir graf üzerinde en kısa Hamilton turunun bulunmasıdır. Bir Hamilton turu, bir graf üzerindeki her noktadan sadece bir kez geçen (dolayısıyla aynı yoldan da sadece bir kez geçen) ve başladığı noktada biten, 19. Yüzyılda yaşamış matematikçi William Hamilton'ın adıyla anılan turdur (Matematik Dünyası 2003).

3) Çinli Postacı Problemi: Bir posta taşıyıcısı postaneden çıkıp, bölgesindeki her bir bloğa postaları dağıtıp ofisine geri dönmektedir. Eğer, yolu üzerindeki caddelerin kesiştiği her bir noktayı bir köşe ve iki köşe arasındaki yolu da bir kenar olarak alırsak, bu problemin modeli olan bir graf elde ederiz. Eğer graf bir Euler grafı ise postacı her bir caddeyi bir kere geçmelidir. Eğer Euler grafı değil ise, postacı bazı caddeleri tekrar

geçmek durumunda kalacaktır. Burada, bağlantılı bir grafta, grafın her bir kenarını bulunduran kapalı bir yol bulunabiliyorsa bu grafa bir Euler grafı denir.

4) Bir dişi arı döllenmiş yumurtadan, erkek arı döllenmemiş yumurtadan çıkar. Yani dişi arının hem annesi hem babası, erkek arının yalnız annesi vardır. Bir erkek arının 1. nesil olduğunu kabul edersek 10 nesil geriden kaç arıdan gen aldığını ağaç diyagramına benzer bir graf ile bulabiliriz.



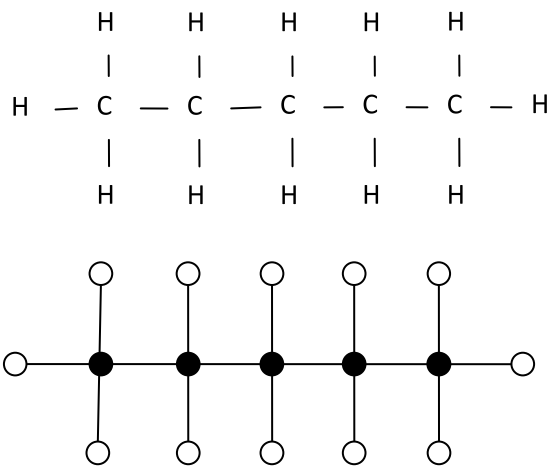
Şekil 1.23. Grafların kullanım alanları örneği

Çözüm için diyagramın daha fazla çizilmesine gerek olmadan gen veren arı sayısının 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 134, … şeklindeki Fibonacci dizisiyle bulunabileceği görülür.

5) Türkiye haritasındaki illeri komşu iller aynı renk olmayacak şekilde boyamaya kalkarsak 4 renk yeterlidir. Bu problem Dört Renk Problemi olarak bilinen, her haritanın, komşu iki ülke aynı renkte olmayacak biçimde sadece dört renkle boyanıp boyanamayacağı probleminden yola çıkılarak oluşturulmuştur. Çözümünde graflardan yararlanılır(Matematik Dünyası 2004).

Şekil 1.24. Dört renk problemi ile Türkiye haritası

6) C_5H_{12} formülüne sahip kimyasal molekülleri graflarla gösterebiliriz. Şekilde karbon atomlarını siyah noktalarla, hidrojenleri de beyaz noktalarla gösterirsek aşağıdaki grafı elde etmiş oluruz. C_5H_{12} kimyasal molekülünün izomerlerini de benzer şekilde gösterebiliriz.



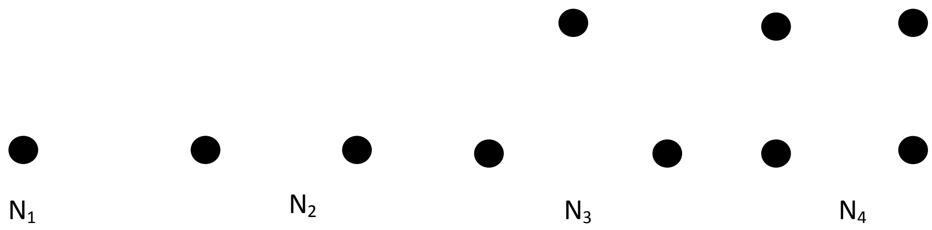
Şekil 1.25. Kimyasal moleküllerin graf ile gösterimi

Bu problemler birbirleriyle ilişkisiz görünse de aslında hepsi çeşitli nesnelerin sınıflandırılıp aralarındaki ilişkilerin kurulması problemidir. Bilim ve teknolojideki bir çok problem modelleme yoluyla işlemsel araştırma ve network analizini kullanan problemlere dönüştürülerek zaman ve para tasarrufu sağlanmaktadır.

1.4. Graf Türleri

1.4.1. Sıfır (null) Graflar

Kenarı bulunmayan graflardır. N_n ile gösterilir.

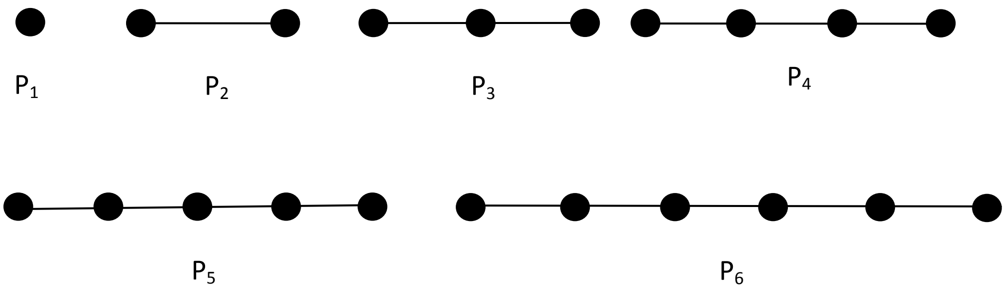


Şekil 1.26. Sıfır graflar

N_n, 0-ıncı dereceden regülerdir.

1.4.2. Yol (path) Grafları

Köşelerinden iki tanesinin derecesi 1, diğer tüm köşelerinin dereceleri ise 2 olan graflara yol graf denir. n köşeli bir yol graf P_n ile gösterilir.

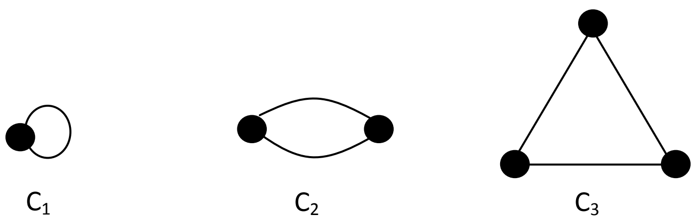


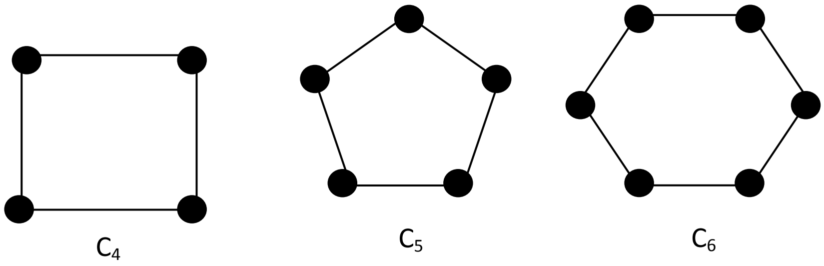
Şekil 1.27. Yol graflar

P_n'in n-1 kenarı vardır ve C_n'den bir tek kenar çıkarılarak elde edilir.

1.4.3. Devir (cycle) Grafları

Tek bir devirden oluşan graflardır. n köşeli bir devirli graf C_n ile gösterilir.



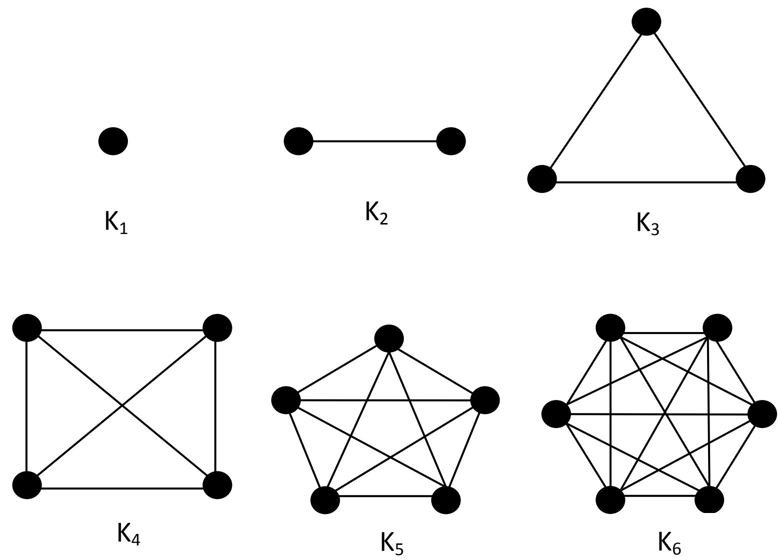


Şekil 1.28. Devir graflar

C_n'in n kenarı vardır ve ikinci mertebeden regülerdir.

1.4.4. Tam (complete) Graflar

Her köşe çiftinin tam bir kenarla birleştirildiği graflara denir. n köşe sayısı olmak üzere K_n ile gösterilir.

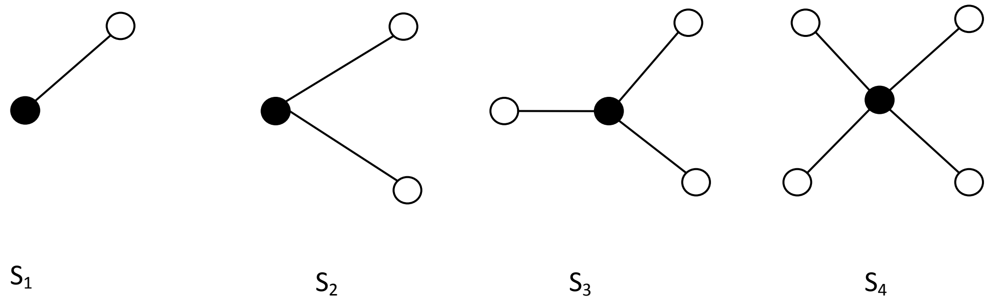


Şekil 1.29. Tam graflar

K_4'ün biri hariç tüm K_n'lerin bir düzgün n-genin içine tüm köşegenleri çizilerek elde edildiği görülür. Ayrıca K_n, n-1'inci mertebeden regülerdir. Dolayısıyla $\frac{n(n-1)}{2}$ kenarı vardır.

1.4.5. Yıldız (star) Graflar

$K_{1,n}$ şeklindeki graflara yıldız graf denir. S_n ile gösterilir.

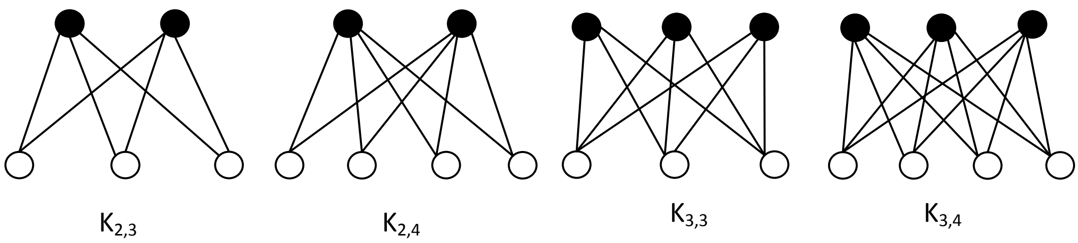


Şekil 1.30. Yıldız graflar

S_n'in n tane kenarı vardır.

1.4.6. İki Parçalı (bipartite) Graflar

Köşeleri siyah köşeler ve beyaz köşeler olarak iki parçaya ayrılabilen ve her bir kenarı bir siyah köşeyi bir beyaz köşeye birleştiren graflardır. Siyah köşelerin sayısı r, beyaz köşelerin sayısı s olmak üzere $K_{r,s}$ ile gösterilir.

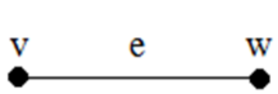


Şekil 1.31. İki parçalı graflar

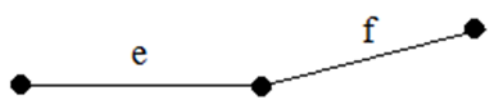
$K_{r,s}$'nin r×s tane kenarı vardır.

1.5. Grafların Matrisleri

1.5.1 Tanım. v ve w bir grafın iki köşesi olsun. Eğer v ve w, bir e kenarı ile birleştirilmişse v ve w'ya komşu köşeler denir. Ayrıca v ve w'ya e'ye bitişiktir de denilir. Benzer şekilde, farklı iki e ve f kenarı ortak bir köşeleri varsa komşudur.



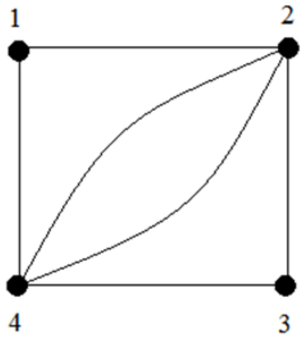
Şekil 1.32. Komşu köşeler



Şekil 1.33. Komşu kenarlar

1.5.2 Tanım (Komşuluk matrisi). G, köşe kümesi $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olan döngüsüz bir graf olsun. G'nin komşuluk matrisi; a_{ij}, v_i ve v_j'yi bağlayan farklı kenarların sayısı olmak üzere n×n boyutlu A = A(G) matrisidir.

1.5.3 Örnek.

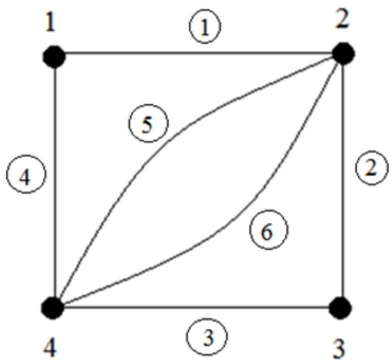


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Şekil 1.34. Graf örneği ve komşuluk matrisi

1.5.4 Tanım (Bitişiklik matrisi). V = {1,2,…,n} ve E = {e_1, e_2, …, e_m} olmak üzere G = (V,E) grafı verilsin. G grafının bitişiklik matrisi n×m boyutlu olan ve her bir satırın bir köşeye ve her bir sütunun bir kenara karşılık geldiği bir B = B(G) = (b_{ik}) matrisidir. Burada e_k, i ve j. köşeler arasındaki bir kenar ise k. sütunun elemanlarından b_{ik}=b_{jk}=1, diğerleri sıfırdır.

1.5.5 Örnek.

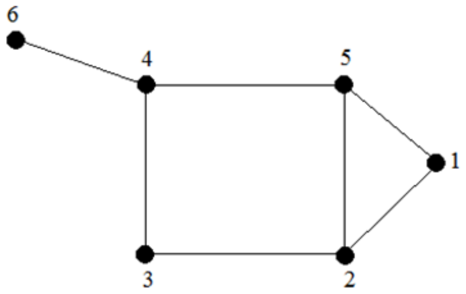


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Şekil 1.35. Graf örneği ve bitişiklik matrisi

1.5.6 Tanım (Laplace matrisi). A(G), G grafının komşuluk matrisi; D(G), köşegen elemanları G grafının noktalarının derecelerinden oluşan bir köşegen matris olmak üzere L(G) = D(G)−A(G) şeklinde tanımlanan matris G grafının Laplace matrisi olarak adlandırılır.

1.5.7 Örnek. Şekil 1.36’da verilen grafın Laplace matrisini hesaplayalım.



Şekil 1.36. Laplace matrisi hesaplanacak graf

İlk olarak

$$D(G)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yazabiliriz. Buradan tanım gereği

$$L(G)=D(G)-A(G)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

2. GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSLERİ

2.1. Giriş

Bu bölümde sırasıyla sıfır grafların, yol grafların, devirli grafların, tam grafların, yıldız grafların ve iki parçalı grafların komşuluk matrisleri çalışılacaktır.

2.2. Sıfır Grafların Komşuluk Matrisleri

En basit graflar olan N_n sıfır graflarında köşeler bir kenarla birleşmediğinden matrisin bütün girdileri 0 olacaktır. Aşağıda ilk birkaç N_n grafı ve bunların komşuluk matrisleri verilmiştir.

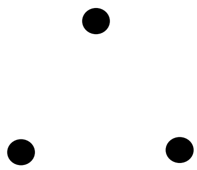
N_1

$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

N_2

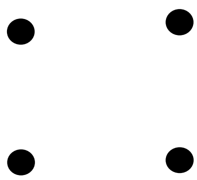
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N_3



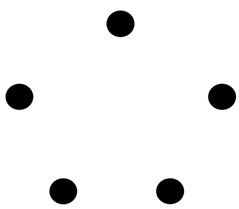
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N_4



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N_5

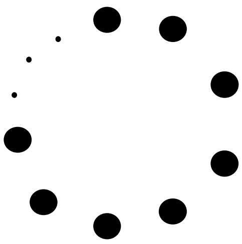


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

.

.

N_n 

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & 0 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

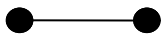
Şekil 2.1. Sıfır graflar ve komşuluk matrisleri

2.3. Yol Grafların Komşuluk Matrisleri

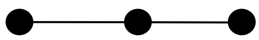
Bir P_n yol grafında her bir köşe komşu olduğu köşelerle tek bir yol oluşturacak şekilde birleşir. Dolayısıyla komşuluk matrisinin ilk ve son satırlarında birer tane, diğer satırlarda ikişer tane 1 olup, diğer tüm girdiler 0 olacaktır. Aşağıda ilk birkaç P_n grafı ve karşılık gelen komşuluk matrisleri verilmiştir.

P_1 

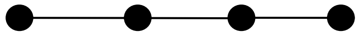
$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

P_2 

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P_3 

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P_4 

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P_5 

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

.

.

P_n 

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & & & & . \\ . & & . & . & . & & & . \\ . & & & . & . & . & & . \\ . & & & & . & . & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Şekil 2.2. Yol graflar ve komşuluk matrisleri

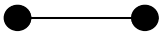
2.4. Devirli Grafların Komşuluk Matrisleri

Tanımdan biliyoruz ki bir C_n devirli grafında, her bir köşe yanındaki komşu iki köşeye bir kenarla birleştirilirken, diğer köşelerle bir kenarla birleştirilmemektedir. Dolayısıyla $n \geq 3$ için C_n devirli grafında her bir köşeye karşılık gelen satırda iki tane 1 olup diğer tüm girdiler 0 olacaktır. Aşağıda $n = 1$ ve $n = 2$ özel tanımlı durumları dahil ilk birkaç devirli C_n grafı ve bunlara karşılık gelen komşuluk matrisleri verilmiştir.

C_1 

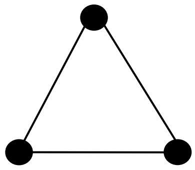
$$(0)$$

C$_2$



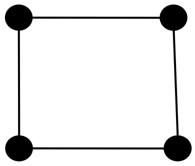
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C$_3$



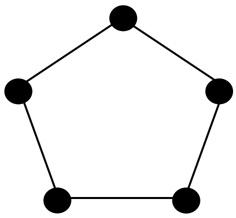
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C$_4$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C$_5$



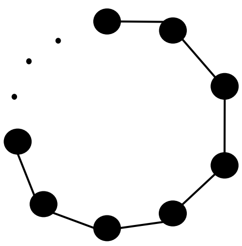
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

.

.

C$_n$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & & & & . \\ . & & . & . & . & & & . \\ . & & & . & . & . & & . \\ . & & & & . & . & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Şekil 2.3. Devirli graflar ve komşuluk matrisleri

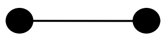
2.5. Tam Grafların Komşuluk Matrisleri

Bir K_n tam grafında her köşe kendisi hariç diğer bütün köşelerle bir kenarla birleşir. Dolayısıyla matrisin köşegeni üzerindeki tüm girdiler 0, diğerleri ise 1 olacaktır. Aşağıda ilk birkaç K_n tam grafı ve karşılık gelen komşuluk matrisleri verilmiştir.

K_1

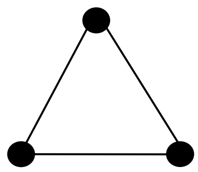
$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

K_2



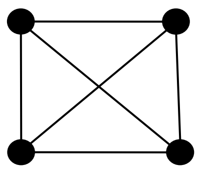
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

K_3



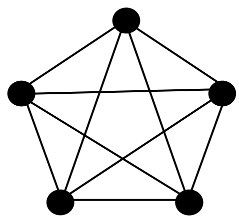
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

K_4



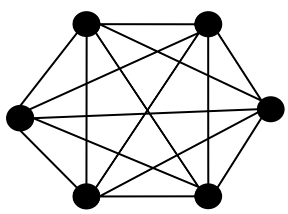
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

K_5



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

K_6

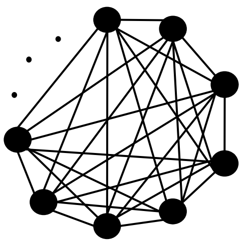


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

.

.

K_n 

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & . & & & & . \\ . & & . & . & . & & & . \\ . & & & . & . & . & & . \\ . & & & & . & . & 1 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

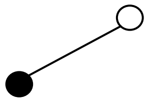
Şekil 2.4. Tam graflar ve komşuluk matrisleri

2.6. Yıldız Grafların Komşuluk Matrisleri

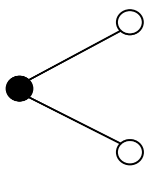
Bir S_n yıldız grafında siyah olan köşe tüm beyaz köşelerle birer kenarla birleşmektedir. Bu yüzden matrisin birinci satırında ilk girdi 0 diğer tüm girdiler 1, diğer satırlarda ilk girdi 1, diğerleri 0 olacaktır. Aşağıda ilk birkaç S_n grafı ve karşılık gelen komşuluk matrisleri verilmiştir.

S_0 

$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

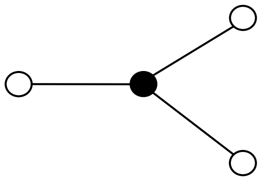
S_1 

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

S_2 

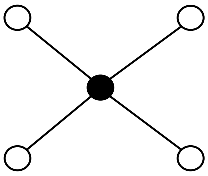
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S_3



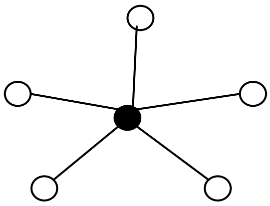
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S_4



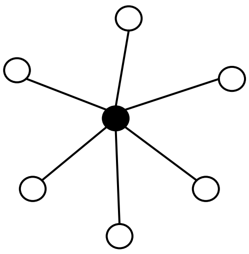
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S_5



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

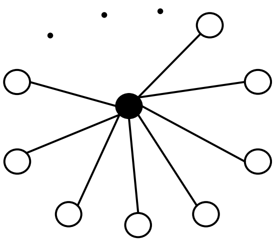
S_6



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

S_n



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Şekil 2.5. Yıldız graflar ve komşuluk matrisleri

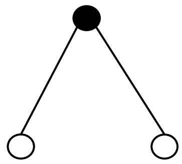
2.7. İki Parçalı Grafların Komşuluk Matrisleri

Bir $K_{r,s}$ iki parçalı grafında siyah köşeler beyaz köşelerle birleşir. Dolayısıyla ilk r satırda s tane, diğer s satırda r tane 1 vardır, diğer girdiler 0 dır. Aşağıda $K_{r,s}$ grafına örnekler verilmiştir.

$K_{1,1}$

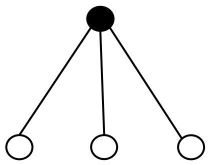
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_{1,2}$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_{1,3}$



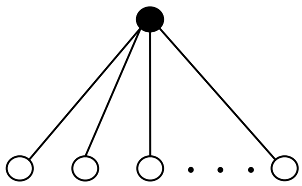
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

.

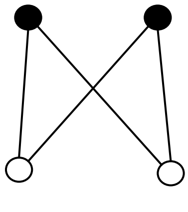
.

$K_{1,S}$



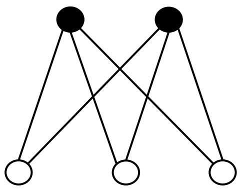
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & & & & 0 \\ . & . & & . & & & . \\ . & . & & & . & & . \\ . & . & & & & 0 & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

$K_{2,2}$



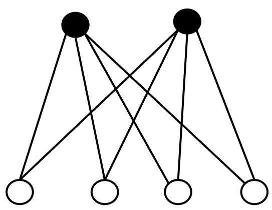
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_{2,3}$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_{2,4}$



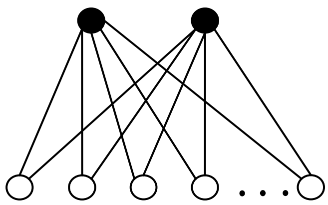
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

.

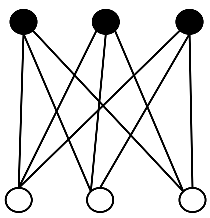
.

$K_{2,S}$



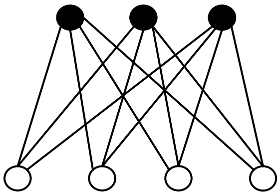
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & & \\ . & . & . & & . & & \\ . & . & . & & & . & \\ 1 & 1 & 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$K_{3,3}$



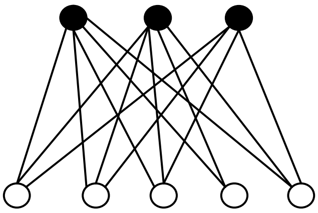
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_{3,4}$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_{3,5}$



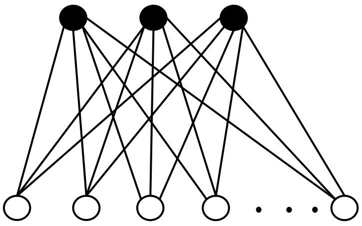
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

.

.

$K_{3,S}$



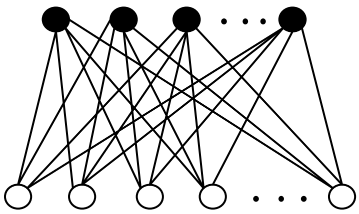
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & . & & \\ . & . & . & . & & & . & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

.

.

.

$K_{r,s}$



$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{0 \quad . \quad . \quad . \quad 0}}^{r\text{-tane}} \quad \overbrace{\hphantom{1 \quad . \quad . \quad . \quad 1}}^{s\text{-tane}} \\
\begin{pmatrix}
0 & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\
. & . & & & & . & . & & & \\
. & & . & & & . & & . & & \\
. & & & . & & . & & & . & \\
0 & & & & 0 & 1 & & & & 1 \\
1 & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
. & . & & & & . & . & & & \\
. & & . & & & . & & . & & \\
. & & & . & & . & & & . & \\
1 & & & & 1 & 0 & & & & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Şekil 2.6. İki parçalı graflar ve komşuluk matrisleri

3. NUMARALANDIRILMIŞ GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSLERİNİN SAYISI

3.1. Giriş

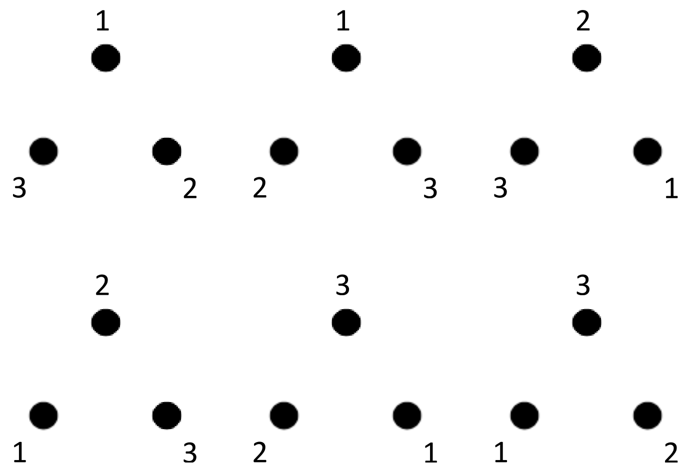
Bu kısımda incelemekte olduğumuz belli graf türlerinin komşuluk matrislerinin sayılarını hesaplayacağız. Sırasıyla sıfır graflar, yol grafları, devirli graflar, tam graflar, yıldız grafları ve iki parçalı grafları ele alacağız.

3.2. Numaralandırılmış Sıfır Grafların Komşuluk Matrislerinin Sayısı

3.2.1 Teorem. N_n'in farklı numaralandırılmalarına karşılık toplam 1 tane komşuluk matrisi vardır.

İspat. N_n'e karşılık gelen matrisin tüm elemanları sıfırdır. Dolayısıyla köşelerin numaralandırılması nasıl yapılırsa yapılsın komşuluk matrisi değişmez.

3.2.2 Örnek. N_3 matrisini ele alalım.



Şekil 3.1. Numaralandırılmış sıfır grafların sayısı

graflarına karşılık gelen matris $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Görüldüğü gibi numaralandırmayı değiştirdiğimizde matris de değişmez ve bu durum diğer n değerleri için de geçerlidir.

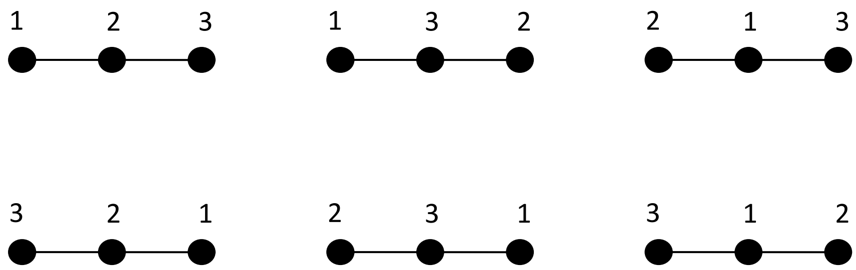
3.3. Numaralandırılmış Yol Grafların Komşuluk Matrislerinin Sayısı

3.3.1 Teorem. P_n'in farklı numaralandırılmalarına karşılık gelen $n!/_2$ tane komşuluk matrisi vardır.

İspat. n tane noktayı $n!$ farklı şekilde sıralayabiliriz. Soldan sağa ve sağdan sola aynı olan iki dizilişin aynı grafa karşılık geleceği düşünüldüğünde toplam matris sayısının $n!/_2$ olduğu görülür.

3.3.2 Örnek.

P_3'ün 3 köşesini 6 farklı şekilde numaralandırabiliriz. Bunlar



Şekil 3.2. Numaralandırılmış yol grafların sayısı

şeklindedir. Dikkat edilirse alt alta görülen iki yol grafı aynı komşuluk matrisine karşılık gelmektedir. En soldaki iki grafa karşılık $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi, ortadaki iki grafa karşılık $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ve en sağdaki iki grafa karşılık olarak da $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi karşılık gelecektir. Dolayısıyla P_3'ün değişik numaralandırılmalarına karşılık $6!/_2 = 3$ tane komşuluk matrisi bulunabilir.

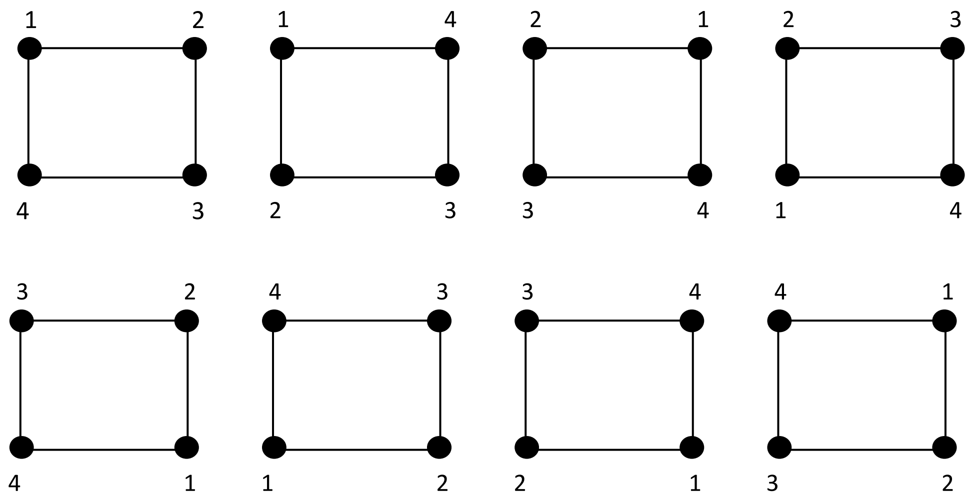
3.4. Numaralandırılmış Devirli Grafların Komşuluk Matrislerinin Sayısı

3.4.1 Teorem. C_n'in farklı numaralandırılmalarına karşılık gelen toplam $(n-1)!/_2$ tane komşuluk matrisi vardır.

İspat. Bir C_n devirli grafı üzerinde bir köşeyi seçtiğimizde diğer kalan köşeler bir yol grafı oluşturur. Döngüsel permütasyon mantığıyla $1, 2, \dots, n$ sayılarını C_n'in köşelerine $(n-1)!$ farklı şekilde yerleştirebiliriz. Ancak bu dizilişlerin de soldan sağa ve sağdan sola ikişer ikişer aynı olanlarını özdeş kabul edersek toplam sayının $(n-1)!/_2$ olduğu görülür.

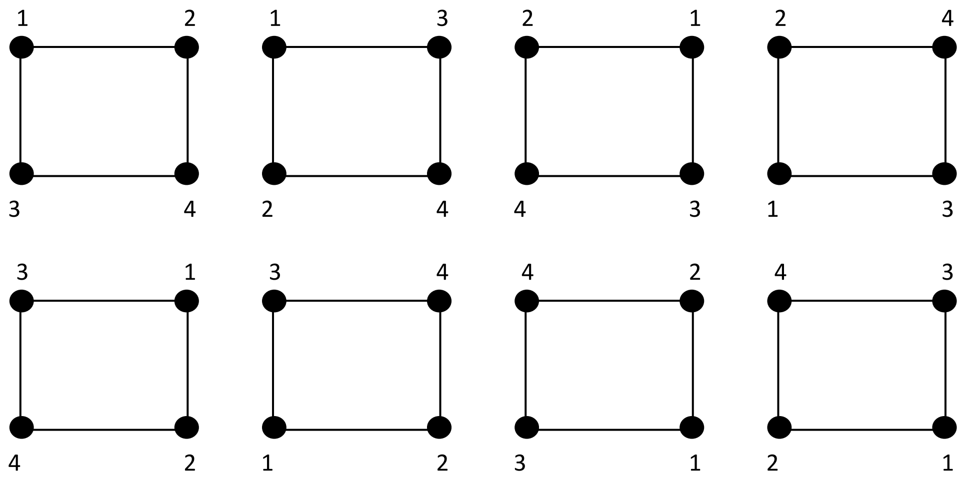
3.4.2 Örnek.

C_4'ün farklı numaralandırılmalarının sayısı 4! tanedir. Bunlara karşılık gelen numaralandırılmış matrisleri $(4-1)!/_2 = 3$ tanedir.



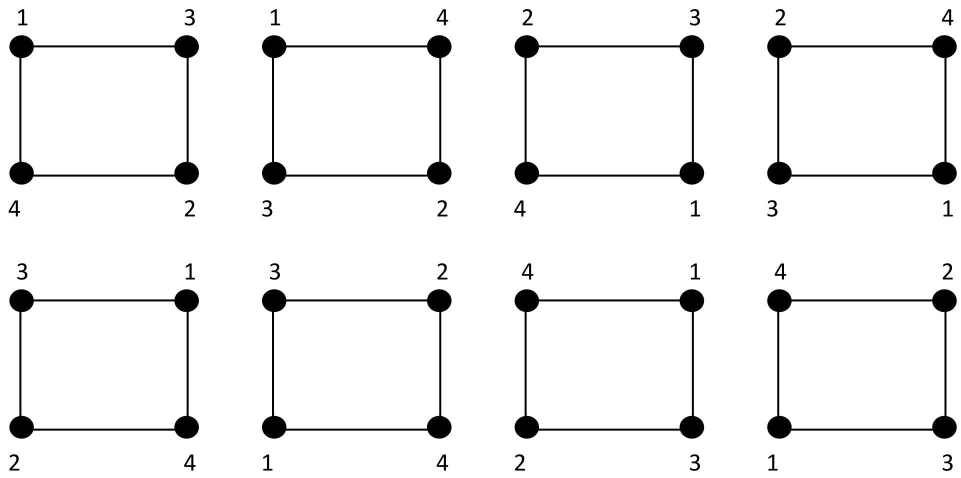
Şekil 3.3. Numaralandırılmış devirli grafların sayısı

Yukarıdaki 8 grafa karşılık gelen komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$'dir.



Şekil 3.4. Numaralandırılmış devirli grafların sayısı

Yukarıdaki 8 grafa karşılık gelen komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$'dir.



Şekil 3.5. Numaralandırılmış devirli grafların sayısı

Yukarıdaki 8 grafa karşılık gelen komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$'dir.

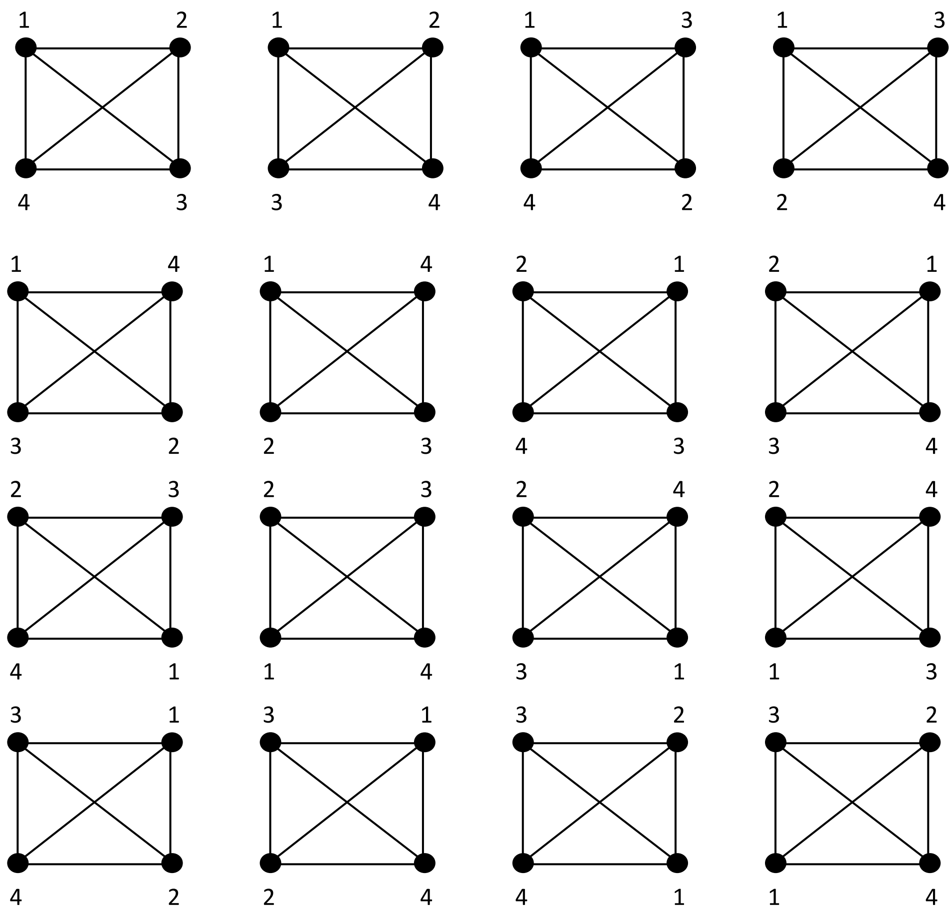
3.5. Numaralandırılmış Tam Grafların Komşuluk Matrislerinin Sayısı

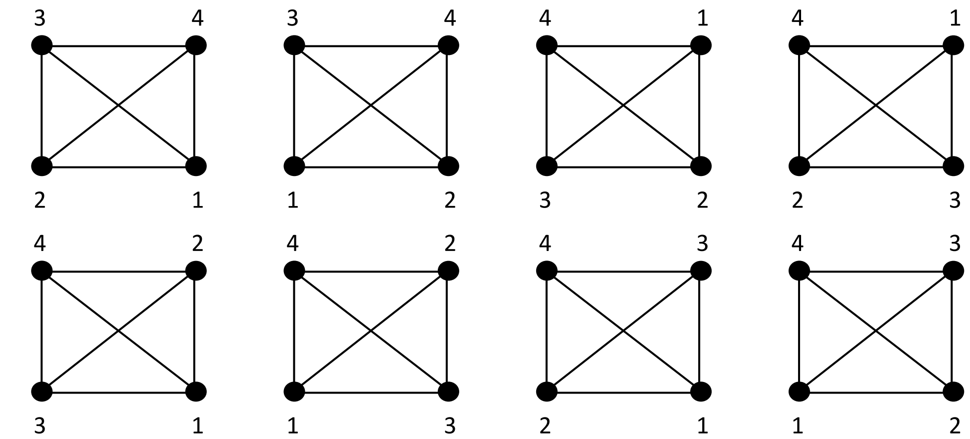
3.5.1 Teorem. K_n'in farklı numaralandırılmalarına karşılık gelen toplam 1 tane komşuluk matrisi vardır.

İspat. Tüm köşeler tüm köşelere birleştirildiğinden aşikârdır.

3.5.2 Örnek.

K_4'ün numaralandırılmış matrisleri 1 tanedir. Numaraların yerlerini değiştirsek bile bir şey fark etmez.





Şekil 3.6. Numaralandırılmış tam grafların sayısı

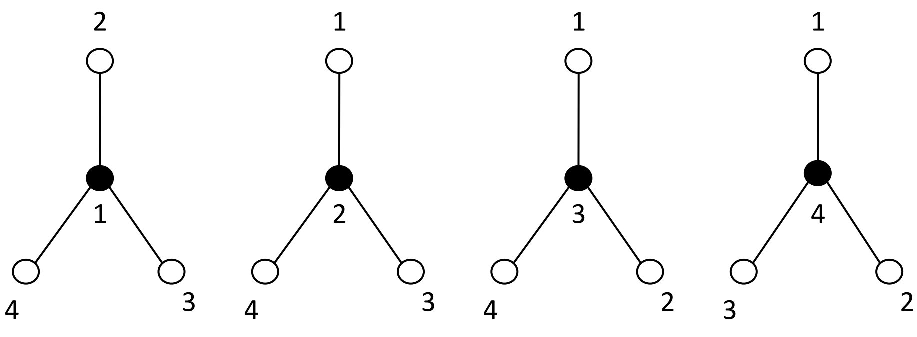
graflarının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$’dir.

3.6. Numaralandırılmış Yıldız Grafların Komşuluk Matrislerinin Sayısı

3.6.1 Teorem. S_n’in farklı numaralandırılmalarına karşılık gelen toplam $n+1$ tane komşuluk matrisi vardır.

İspat. Bir S_n grafı üzerinde merkez köşe dışında tüm köşeler birbiriyle aynı konumda olduğundan merkez köşenin her bir seçimi farklı bir isimlendirmeye yol açacaktır. Dolayısıyla $n+1$ tane farklı matris oluşur.

3.6.2 Örnek. S_3 grafında 4 tane numaralandırılmış komşuluk matris vardır.



Şekil 3.7. Numaralandırılmış yıldız grafların sayısı

graflarının komşuluk matrisleri sırasıyla

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{'dir.}$$

3.7. Numaralandırılmış İki Parçalı Grafların Komşuluk Matrislerinin Sayısı

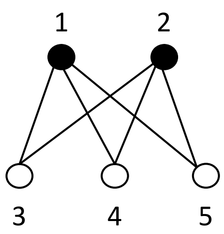
3.7.1 Teorem. $r \leq s$ olmak üzere $K_{r,s}$ iki parçalı grafında k tane uç değişirse toplam $C(s,k).C(r,k)$ tane komşuluk matrisi oluşur.

İspat. s tane beyaz noktadan k taneyi sıralı olarak $P(s,k)$ şekilde seçebiliriz. Her bir seçime karşılık r tane siyah noktadan k tanesini $C(r,k)$ şekilde belirleriz. Yani k tane ucu $P(s,k).C(r,k)$ farklı şekilde yer değiştirebiliriz. Ancak graf iki parçalı olduğundan k tane siyah uç kendi aralarında $k!$ şekilde sıralanabileceğinden bu sıralanışların her biri aynı matrisi vermektedir ve elde edilebilecek farklı matris sayısı

$$\frac{\mathrm{P(s,k).C(r,k)}}{k!} = C(s,k).C(r,k)$$

olur.

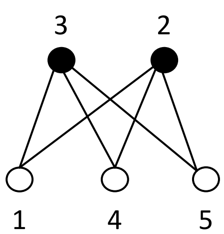
3.7.2. Örnek.



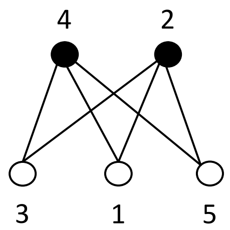
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_{2,3}$ iki parçalı grafında;

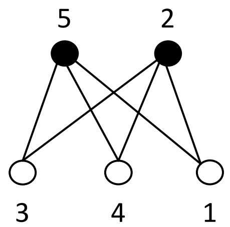
2 siyah noktadan birini değiştirirsek



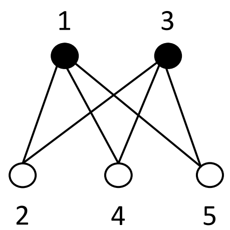
grafının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$'dir.



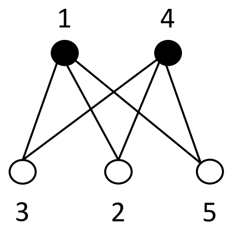
grafının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$'dir.



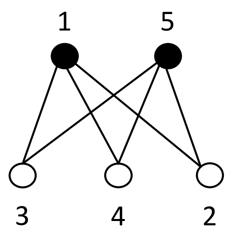
grafının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$'dir.



grafının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$'dir.

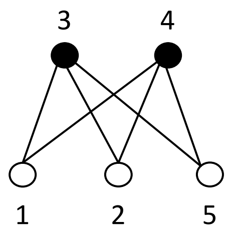


grafının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$'dir.

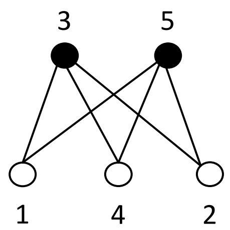


grafının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$'dir.

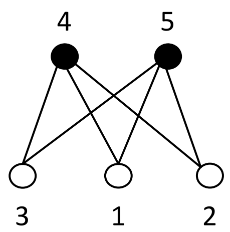
2 siyah noktadan ikisini değiştirirsek



grafının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$'dir.



grafının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$'dir.



grafının komşuluk matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$'dir.

Görüldüğü gibi $K_{2,3}$ iki parçalı grafında 2 siyah noktadan birini değiştirirsek

$$C(3,1).C(2,1) = 6$$

tane komşuluk matrisi elde edilir. 2 siyah noktadan ikisini değiştirirsek

$$C(3,2).C(2,2) = 3$$

tane komşuluk matrisi elde edilir.

KAYNAKLAR

Biggs, N. L. G., Lloyd, E. K., Wilson, R. J. 1986. Graph Theory, Oxford

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 1976. Graph Theory with Applications, MacMillan, New York

Douglas, B. W. 2001. Introduction to Graph Theory, second ed., Prentice Hall

Gross, J., Yellen, J. 1999. Graph Theory and Its Applications, CRS Press

Harary, F., Palmer, E. M. 1973. Enumeration of Graphs, Academic Press, New York

Matematik Dünyası, 2003. Gezgin Satıcı Problemi, sf 37 – 40

Matematik Dünyası, 2004. Dört Renk Problemi ve Teoremi, sf 86 – 89

Rouvray, D. H., Balaban, A. T. 1979. Applications of Graph Theory, Academic, New York

Wilson, R. J. 1996. Introduction to Graph Theory, Prentice Hall

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fikriye ERSOY
Doğum Yeri ve Tarihi : İzmir - 28/08/1989
Yabancı Dili : İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Bergama Akif Ersezgin Anadolu Lisesi
Lisans : Çanakkale On Sekiz Mart Üniversitesi
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi
Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :
İletişim (e-posta) : fikriyersoy@hotmail.com
Yayınları* :