ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLARIN BAZI ÖZEL ALT SINIFLARI

Hasan BAYRAM

T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLARIN BAZI ÖZEL ALT SINIFLARI

Hasan BAYRAM

Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2013

TEZ ONAYI

Hasan BAYRAM tarafından hazırlanan "Analitik Yalınkat Fonksiyonların Bazı Özel Alt Sınıfları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

Başkan **:** Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** Prof. Dr. İlhan TAPAN
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

…./…./**2013**

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı
-

beyan ederim.

…./…./2013

Hasan BAYRAM

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLARIN BAZI ÖZEL ALT SINIFLARI

Hasan BAYRAM

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; $\mathbb{D}$ açık birim dairesinde normalize edilmiş analitik ve yalınkat fonksiyonların oluşturduğu S sınıfının ve reel kısmı pozitif fonksiyonların oluşturduğu P sınıfının temel özellikleri verildi. Ayrıca S sınıfındaki fonksiyonlar için katsayı bağıntıları, alan teoremleri, büyüme, örtme ve distorsiyon sonuçları verildi.

Üçüncü bölümde, yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıflarının tanımı yapıldı ve bu sınıflara ait teoremlere yer verildi. Ayrıca bazı yalınkatlık kriterleri incelendi.

Tezin esas kısmını oluşturan son bölümde de analitik yalınkat fonksiyonların bazı özel alt sınıfları tanıtıldı. Ayrıca bu sınıflara ait teoremler incelendi.

Anahtar Kelimeler: Yalınkat Fonksiyonlar, Yıldızıl Fonksiyonlar, Konveks Fonksiyonlar

2013, vi+107 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

THE SOME SPECIAL SUBCLASSES OF ANALYTIC UNIVALENT FUNCTIONS

Hasan BAYRAM

Uludağ University

Graduade School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

This thesis constint of four chapters.

In the first chapter; some of definitions and theorems which will be used later are introduced.

In the second chapter; basic properties defined of the class analytic and univalent functions S and positive real part of the functions P on $\mathbb{D}$. Furthermore the coefficient equations, theorems of the growth, covering and distortion results for univalent functions were examined.

In the third chapter, the definition of classes of starlike and convex function is performed and theorems of these classes. In addition, some univalent criteria were examined.

Form part of the final chapter of the thesis is based on the analytic univalent functions introduced some special sub-classes. In addition theorems for these classes were examined.

Key Words: Univalent Functions, Starlike Functions, Convex Functions
2013, vi+107 pages

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca, hayatın her anlamında maddi manevi desteğini benden esirgemeyen, bilimsel desteğini büyük bir sabır içerisinde tüm imkanlarıyla sunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK'e, matematik öğrenimim ve eğitimimde katkısı olan tüm hocalarıma, yüksek lisans eğitimi sürecinde desteklerinden faydalandığım TÜBİTAK'a, bu günlere gelmemi sağlayan, sevgisini, anlayışını ve sabrını hiç esirgemeyen, bana yeni ufuklar açan anne ve babama, her zaman destekçim olan ve güvenimi tazeleyen ablamlara, bu zor süreçte anlayışı, desteği, hissettirdiği sevgi ile her problemin üstesinden gelmemi sağlayan çok sevdiğim eşim Havva BAYRAM'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu çalışma yakın bir zamanda doğacak olan kızım Zeynep Nur'a ithaf edilmiştir.

Hasan BAYRAM

…./…./2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
D_r	Orijin merkezli r yarıçaplı daire
$\mathbb{D}$	Birim daire
$\mathbb{D}^*$	Birim dairenin dışı
$D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık daire
$\overline{D}(z_0, r)$	D dairesinin kapanışı
$\partial D(z_0, r)$	D dairesinin sınırı
$f(D)$	D dairesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
S	Normalize edilmiş yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı
$f \circ g$	f ile g nin bileşkesi
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
Σ	$\mathbb{D}^*$ bölgesinde tanımlı analitik ve yalınkat foksiyonların sınıfı
Σ_0	Σ sınıfındaki $w_0 = 0$ değerini almayan fonksiyonların sınıfı
$A(\mathbb{D})$	Birim dairede analitik fonksiyonların sınıfı
$\operatorname{Re} f$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f$	f fonksiyonunun sanal kısmı
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna sabordine olması
$f << F$	f fonksiyonunun F ile domine edilmesi
S^*	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
K	Konveks fonksiyonların sınıfı
$S^{(k)}$	Yalınkat $k-$katlı simetrik fonksiyonların sınıfı
$S^{(2)}$	Tek yalınkat fonksiyonların sınıfı
$r^*(F)$	F sınıfının yıldızıllık yarıçapı
$r_K(F)$	F sınıfının konvekslik yarıçapı
$\{f; z\}$	f fonksiyonunun Schwarzian türevi
$S^*(\alpha)$	α mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$K(\alpha)$	α mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı
$\alpha - K$	$\alpha-$konveks fonksiyonların sınıfı
$SP(\alpha)$	$\alpha-$ spiral fonksiyonların sınıfı
$\gamma - S^*$	Gamma-yıldızıl fonksiyonların sınıfı
S^{**}	Simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$S^*(1-b)$	$(1-b)$. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$C(b)$	b. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
C	Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde kullanılacak temel tanım ve sonuçlar üzerinde kısa olarak durulacaktır. Bu sonuçlarla ilgili ayrıntılı bilgiler Palka (1991) ve Conway (1995) de bulunabilir.

1.1 Tanım. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{ z : |z - z_0| \leq r \},$$

$$\partial D(z_0, r) = \{ z : |z - z_0| = r \}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli r yarıçaplı *açık daire*, *kapalı daire* ve *çember* denir. Kısalık olsun diye $D(0,r)$ dairesi D_r ile ve D_1 birim dairesi de $\mathbb{D}$ ile gösterilecek. Ayrıca, birim dairenin dışı $\mathbb{D}^* = \{z : |z| > 1\}$ ile gösterilecek.

1.2 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_0, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, z_0 noktasına A kümesinin bir *iç noktası*, A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* denir. Eğer A kümesinin bütün noktaları iç nokta ise, A ya *açık küme* ve tümleyeni açık olan kümeye de *kapalı küme* adı verilir. Bir A kümesini bulunduran kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. Eğer $z \in \mathbb{C}$ için her $D(z,r)$ dairesi ile hem A hem de A'nın tümleyeninin arakesiti boş kümeden farklı ise, z noktasına A kümesinin bir *sınır noktası* denir.

1.3 Tanım. (z_n) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün n doğal sayıları için $z_n \in D(z_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa, (z_n) dizisine z_0 noktasına *yakınsaktır* denir ve bu durum $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ veya $z_n \to z_0$ biçiminde gösterilir.

1.4 Teorem. $z_0 \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ olacak şekilde A da bir (z_n) dizisinin mevcut olmasıdır (Conway 1995 s: 18).

1.5 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$f[A \cap D(z_0, \delta)] \subset D(f(z_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında *süreklidir* denir. Eğer her $z \in A$ noktası için

$$f[A \cap D(z, \delta)] \subset D(f(z), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna A kümesinde *düzgün süreklidir* denir. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ özelliğinde her bir (z_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$ ise, f fonksiyonuna z_0 noktasında *dizisel süreklidir* denir. $\mathbb{C}$ de dizisel süreklilik ile süreklilik bir birini gerektirir.

1.6 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $z \in A$ için $|z| \leq M < \infty$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa A kümesine *sınırlıdır* denir. A kümesinde alınan her dizinin yığılma noktası yine A kümesine ait ise, A kümesine *dizisel kompakt* veya *kompakt* denir.

1.7 Teorem. $A \subset \mathbb{C}$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır (Palka 1991).

1.8 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme, U ve V $\mathbb{C}$ de ayrık açık iki küme olsun. Eğer $A \cap U \neq \phi$, $A \cap V \neq \phi$ ve $A \subset U \cup V$ ise A kümesine *bağlantısızdır* denir. Bağlantısız olmayan kümeye *bağlantılıdır* denir. Açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* adı verilir.

1.9 Tanım. $[a, b]$ kapalı aralığının $z = \varphi(t)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine $\mathbb{C}$ de bir *yol* veya *eğri* denir. Her $t \in [a,b]$ için $\varphi'(t)$ mevcut ve $\varphi'(t) \neq 0$ ise eğriye *düzgün eğri*, $[a,b]$ aralığının sonlu sayıda alt aralıklarında düzgün olan eğriye *parçalı düzgün eğri* adı verilir. Kendi kendini kesmeyen eğriye *basit eğri,* uç noktaları bitişik bir eğriye *kapalı eğri* ve sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. Jordan eğrisinin sınırladığı bölgeye *Jordan bölgesi* adı verilir. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde her basit kapalı eğrinin sınırladığı küme sadece B kümesinin noktalarından oluşmuş ise, B bölgesine *basit bağlantılı bölge* denir.

1.10 Tanım. f bir B bölgesinde kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in B$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise, f fonksiyonuna z_0 noktasında *differansiyellenebilir* veya *türevlenebilir*, limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* denir ve bu türev $f'(z_0)$ biçiminde gösterilir. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitiktir* denir.

1.11 Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f : D \to \mathbb{C}$ ve $f = u + iv$ fonksiyonu D de birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. $z_0 \in D$ olmak üzere

$$J_f(z_0) = \begin{vmatrix} u_x(z_0) & v_x(z_0) \\ u_y(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} = u_x(z_0)\, v_y(z_0) - u_y(z_0)\, v_x(z_0) \tag{1.1}$$

sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *Jakobiyeni* denir. Eğer her $z \in D$ için $J_f(z) \neq 0$ ise, f fonksiyonuna D de bir *diffeomorfizm*, $J_f(z) > 0$ ise f fonksiyonuna D de *yön koruyan* ve $J_f(z) < 0$ ise f ye D de *yönü ters çeviren* adı verilir.

(1.1) eşitliği ve f fonksiyonunun kısmi türevlerinden $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$ ve f fonksiyonu analitik ise $J_f(z) = |f'(z)|^2$ olduğu görülür.

1.12 Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : D \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in D$ olsun. z_0 noktasında kesişen D de yönlendirilmiş her C_1 ve C_2 düzgün eğri çiftinin z_0

noktasında aralarındaki açı, $f(C_1)$ ve $f(C_2)$ görüntü eğrilerinin $f(z_0)$ noktasında aralarındaki açıya büyüklük olarak eşit, yön olarak aynı ise, f fonksiyonuna z_0 *noktasında konform* denir (Zill 2003 s:353).

1.13 Teorem. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve $z_0 \in D$ olsun. Eğer $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu z_0 noktasında konformdur (Zill 2003 s:354).

1.14 Teorem. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve $z_0 \in D$ olsun. $n > 1$ doğal sayısı $f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ ve $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ olacak biçimde bir sayı ise, z_0 da kesişen herhangi iki düzgün eğri arasındaki açıyı, $w = f(z)$ fonksiyonu n çarpanı kadar büyütülür. Bu durumda, $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 da konform değildir (Zill 2003 s:355).

1.15 Teorem. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : B \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun B de konform olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun B de analitik ve yalınkat olmasıdır (Palka 1991).

Yalınkat fonksiyon teorisinin en önemli sonuçlarından biri de Riemann dönüşüm teoremidir.

1.16 Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). D, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin basit bağlantılı bir öz alt bölgesi olsun. D bölgesini $\mathbb{D}$ birim dairesi üzerine bire bir ve analitik (konform) olarak resmeden $z_0 \in D$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde bir tek f fonksiyonu vardır (Palka 1991).

Riemann dönüşüm teoremi gereği basit bağlantılı bir bölgede yalınkatlıkla ilgili bir çok problemi çözmek için bu bölge yerine $\mathbb{D}$ birim dairesini almak uygundur. O halde bundan böyle çalışmalarımızı birim daire üzerinde yoğunlaştıracağız.

Eğer D bir Jordan bölgesi ise, Riemann dönüşüm teoremi sürekli olarak D bölgesinin sınırına genişletilebilir ve genişletilmiş fonksiyon sınır eğrisini bire bir olarak birim çember üzerine dönüştürür. Caratheodary'ye ait olan bu sonuç aşağıda ifade edilmiştir.

1.17 Teorem (Caratheodary Genişleme Teoremi)**.** D bir γ Jordan eğrisi ile sınırlanmış bir bölge ve f D bölgesini $\mathbb{D}$ birim dairesi üzerine konform olarak dönüştürsün. Bu takdirde, f fonksiyonu $\overline{D}$ bölgesinden $\overline{\mathbb{D}}$ üzerine bir homomorfizme genişletilebilir (Palka 1991).

1.18 Teorem. f fonksiyonu $\overline{\mathbb{D}}$ de analitik ve $\partial\mathbb{D}$ de yalınkat olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır ve $\mathbb{D}$ dairesini $f(\partial\mathbb{D})$ Jordan eğrisinin sınırladığı bölge üzerine konform olarak resmeder (Pommerenke 1975 s:13).

Bu teoremin daha genel hali aşağıda verilmiştir.

1.19 Teorem. f bir D Jordan bölgesinde analitik, ∂D üzerinde sürekli ve bire bir olsun. Bu takdirde, f fonksiyonu D bölgesini $f(\partial D)$ Jordan eğrisinin sınırladığı bölge üzerine konform olarak resmeder (Pommerenke 1975 s:282).

1.20 Tanım. Bir D bölgesinde tanımlı $u = u(x, y)$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve D de $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ise u fonksiyonuna D bölgesinde *harmonik* denir.

1.21 Teorem (Harmonik Fonksiyonlar için Maksimum ve Minimum Prensibi). Sabit olmayan reel değerli bir $u(x, y)$ fonksiyonu, sınırlı bir D bölgesinde harmonik olsun. $u(x, y)$ maksimum veya minimum değerini D bölgesinin sınırında alır.

1.22 Teorem (Schwarz Lemma). f fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim dairesinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\mathbb{D}$ dairesinde $|f'(0)| \le 1$ ve $|f(z)| \le |z|$ dir. Eşitlik $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.23 Teorem (Schwarz-Pick Lemma). $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve her $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| < 1$ olsun. Bu takdirde

$$|f'(z)| \le \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

dir (Gamelin 2001 s:264).

1.24 Teorem (Helly Seçme Teoremi)**.** (μ_n), $[a,b]$ aralığında $\mu_n(a)=0$ ve $\mu_n(b)=1$ özelliğinde azalmayan bir fonksiyon dizisi olsun. Bu takdirde $[a,b]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonuna yakınsayan (μ_n) dizisinin bir (μ_{n_k}) alt dizisi vardır. Üstelik $[a,b]$ aralığında sürekli her φ fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b \varphi(t)\,d\mu_{n_k}(t)=\int_a^b \varphi(t)\,d\mu(t)$$

dir (Duren 1983).

1.25 Teorem (Hurwitz Teoremi). D bölgesinde sıfırı olmayan analitik fonksiyonların bir (f_n) dizisi, D bölgesinin kompakt alt kümelerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Bu takdirde, f fonksiyonunun D bölgesinde ya hiç sıfırı yoktur ya da f özdeş olarak sıfırdır (Duren 1983).

1.26 Teorem. D bölgesinde analitik ve yalınkat fonksiyonların bir (f_n) dizisi, D bölgesinin kompakt alt kümelerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Bu takdirde f fonksiyonu D bölgesinde ya yalınkattır ya da sabittir (Palka 1991).

1.27 Tanım. Bir X vektör uzayında $L[f,g]=\{h=tf+(1-t)g : 0\le t\le 1\}$ kümesine, f ve g noktalarını birleştiren *doğru parçası* denir. f ve g noktalarına $L[f,g]$ doğru parçasının *uç noktaları*, $0<t<1$ için h noktasına da $L[f,g]$ doğru parçasının *iç noktası* adı verilir. Bir $C\subset X$ alt kümesi verildiğinde her $f,g\in C$ için $L[f,g]\subset C$ oluyorsa C ye *konveks küme* denir. Eğer C konveks kümesindeki bir f noktası herhangi bir $L[f,g]\subset C$ doğru parçasının bir iç noktası değil ise, f noktasına C kümesinin *ekstrem noktası* denir. C kümesinin ekstrem noktalarının kümesi $E(C)$ ile gösterilir (Goodman 1983).

2. YALINKAT ANALİTİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde birim dairede yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı ile reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı üzerinde durulacak. Bu sınıflara ait fonksiyonların kat sayı, distorsiyon ve büyüme özellikleri incelenecektir. Ayrıca, Alan teoremleri verilecektir.

2.1 Yalınkat Analitik Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri

Bu kısımda birim dairede analitik bire bir ve normalize edilmiş fonksiyonların S sınıfı tanımlanıp, bu sınıfa ait fonksiyonların özellikleri incelenecektir.

2.1.1 Tanım. D kompleks düzlemde bir bölge olsun. $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bire bir ise f fonksiyonuna D de *yalınkat* veya *univalent fonksiyon* denir. Başka bir deyişle $z_1, z_2 \in D$ için $z_1 = z_2$ olması $f(z_1) = f(z_2)$ olmasını gerektiriyorsa, f fonksiyonu D de yalınkattır. Geometrik anlamı; düzlemde $f(D)$ görüntü bölgesinin katlı bölge olmaması demektir.

Eğer f fonksiyonu bir $z_0 \in D$ noktasının belli bir komşuluğunda yalınkat ise, f fonksiyonuna z_0 noktasında *yerel* (*lokal*) *yalınkat* denir. Analitik bir f fonksiyonunun yerel olarak yalınkat olması için $f'(z_0) \neq 0$ olması yeterlidir (Palka 1991). Ayrıca, D bölgesinde yalınkat bir fonksiyon, D bölgesinin bütün alt bölgelerinde de yalınkattır. Bundan başka, bir D bölgesinde f fonksiyonunun yalınkat olması ile $1/f$ fonksiyonunun yalınkat olması birbirini gerektirir. Bundan böyle çalışmamızda yalınkat fonksiyon denildiğinde yalınkat analitik fonksiyon anlaşılacaktır.

Bu çalışmada, en az iki sınır noktasına sahip basit bağlantılı düzlemsel bir D bölgesi yerine, Rieamann Dönüşüm Teoremi gereği, ona konform olarak denk olan $\mathbb{D}$ açık birim dairesi alınacak. Bundan başka, $\mathbb{D}$ de tanımlı analitik fonksiyonlar için adına normalleştirme denilen ve işlemleri kolaylaştıran bazı kabuller yapılacak. Bu kabullerden biri; $\mathbb{D}$ de $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ biçiminde Taylor açılımına sahip bir g analitik yalınkat fonksiyonu için, $f(z) = [g(z) - b_0]/b_1 = z + a_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu da $\mathbb{D}$ de analitik ve yalınkat olur. Böylece, $\mathbb{D}$ de g fonksiyonu f biçimine getirilerek analitiklik ve yalınkatlık bozulmadan normalleştirilmiş olur.

2.1.2 Tanım. $\mathbb{D}$ de analitik, yalınkat ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ bağıntısını sağlayan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

biçimindeki fonksiyona *normalize edilmiş yalınkat analitik fonksiyon* denir. $\mathbb{D}$ de normalize edilmiş bütün yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem, S sınıfının bazı elemanter dönüşümler altında değişmez kaldığını gösterir.

2.1.3 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ ve $f \in S$ ise, aşağıda tanımlanan g fonksiyonu da S sınıfına aittir.

(i) $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \overline{a}_3 z^3 + \cdots$ eşlenik dönüşümü.

(ii) $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ rotasyonu.

(iii) $0 < r < 1$ için, $g(z) = \dfrac{1}{r} f(rz)$ genleşmesi.

(iv) $|\alpha| < 1$ ve $\varphi(z) = \dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$ olmak üzere, $g(z) = \dfrac{f(\varphi(z)) - f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2) f'(\alpha)}$ disk otomorfizmi.

(v) $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z\left(\dfrac{f(z^n)}{z^n}\right)^{1/n}$ n. kök dönüşümü.

(vi) $f(z) \neq w$ olmak üzere, $g(z) = \dfrac{w f(z)}{w - f(z)}$ atlanmış değer dönüşümü.

(vii) φ , f fonksiyonunun değer kümesi üzerinde yalınkat ve analitik bir fonksiyon olmak üzere $g(z) = (\varphi \circ f)(z)$ bileşke dönüşümü.

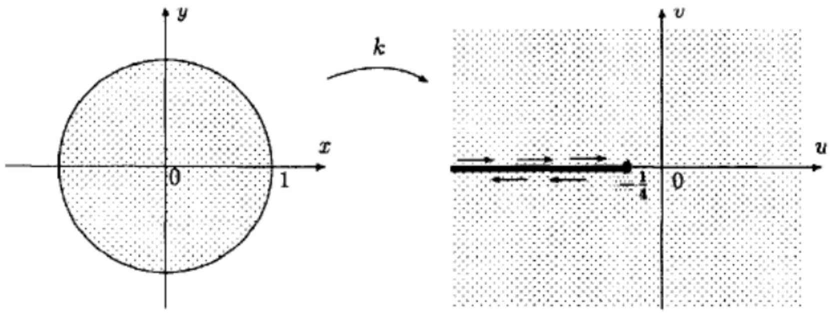
İspat. Bir fikir vermesi açısından teoremin (iv), (v) ve (vi) özellikleri ispat edilecektir. Diğerlerinin ispatı benzerdir.

(iv) $\varphi(z)=\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}\,z}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesini kendi üzerine konform olarak dönüştürür. $c=1/[(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)]$ denirse, $g(z)=c[f(\varphi(z))-f(\alpha)]$ biçiminde yazılabilir. Önce g fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterelim. $g(z_1)=g(z_2)$ ise $f(\varphi(z_1))-f(\alpha)=f(\varphi(z_2))-f(\alpha)$ olur. f fonksiyonu yalınkat olduğundan, $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$ ve φ yalınkat olduğundan, $z_1=z_2$ bulunur. Bu ise, g fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterir. Ayrıca, $g'(0)=[f'(\alpha)\varphi'(0)]/[f'(\alpha)\varphi'(0)]=1$ ve $g(0)=0$ olduğundan, $g\in S$ elde edilir.

(v) $f\in S$ olduğundan, g iyi tanımlı ve $\mathbb{D}$ de analitiktir. β, 1 in n. köklerinden biri ise, $z\in\mathbb{D}$ için $g(\beta z)=\beta g(z)$ dir. g fonksiyonunun yalınkat olduğunu gösterelim. $z_1,\, z_2\in\mathbb{D}$ için $g(z_1)=g(z_2)$ olsun. Buradan, $g^n(z_1)=g^n(z_2)$ ve $f(z_1^n)=f(z_2^n)$ olur. f, $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğundan, $z_2=\beta z_1$ olacak biçimde $\beta^n=1$ özelliğinde bir $\beta\in\mathbb{C}$ sayısı vardır. $g(\beta z)=\beta g(z)$ olduğundan, $g(z_2)=g(\beta z_1)=\beta g(z_1)=\beta g(z_2)$ olur. Bu durumda, ya $\beta=1$ veya $g(z_2)=0$ dır. Eğer $\beta=1$ ise, $z_1=z_2$ dir. Eğer $g(z_2)=0$ ise, $z_1=z_2=0$ olur. Böylece her iki durumda da g fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır. Ayrıca $g(0)=0$ ve $g'(0)=1$ olduğundan $g\in S$ elde edilir.

(vi) $w\notin f(\mathbb{D})$ olduğundan, g fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitiktir. Üstelik, f fonksiyonunun normalizasyonları sağlaması ve yalınkat olması, g fonksiyonunun da normalizasyonları sağlamasını ve yalınkat olmasını gerektirir. ■

S sınıfına ait en önemli fonksiyonlardan biri; $z\in\mathbb{D}$ için $k(z)=z/(1-z)^2$ biçimindeki *Koebe fonksiyonu*dur. Koebe fonksiyonu birim daireyi $\mathbb{C}-\{w:-\infty<w\le -1/4\}$ bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürür (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 $k(\mathbb{D})$ görüntü bölgesi

Koebe fonksiyonunun rotasyonu, $k_\theta(z) = z/(1-e^{i\theta}z)^2$ fonksiyonu S sınıfına ait olup, açık birim daireyi orijinden çıkan ışının $-e^{-i\theta/4}$ den ∞'a uzanan parçası hariç bütün kompleks düzlem üzerine bire bir olarak resmeder.

Bundan başka, $z \in \mathbb{D}$ ve $\alpha \in (0,2]$ için $f(z) = \dfrac{1}{2\alpha}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right]$ fonksiyonuna *genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu* denir ve bu fonksiyonun da S sınıfına ait olduğunu görmek zor değildir.

Ayrıca, $f(z) = \sqrt{k(z^2)} = z/(1-z^2)$ biçiminde Koebe fonksiyonunun karekök fonksiyonu S sınıfına ait olup, birim daireyi $\mathbb{C} - \{iy : y \geq 1/2 \text{ veya } y \leq -1/2\}$ bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürür.

$f(z) = z/(1-z)^3$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitik fakat yalınkat değildir. Çünkü $f'(-1/2) = 0$ dır. Bununla birlikte bu fonksiyon $D_{1/2}$ dairesinde yalınkattır.

Bazen birim daire yerine birim dairenin dışını almak kullanışlı olabilir. O halde $\mathbb{D}^* = \{w : 1 < |w| < \infty\}$ bölgesi üzerinde

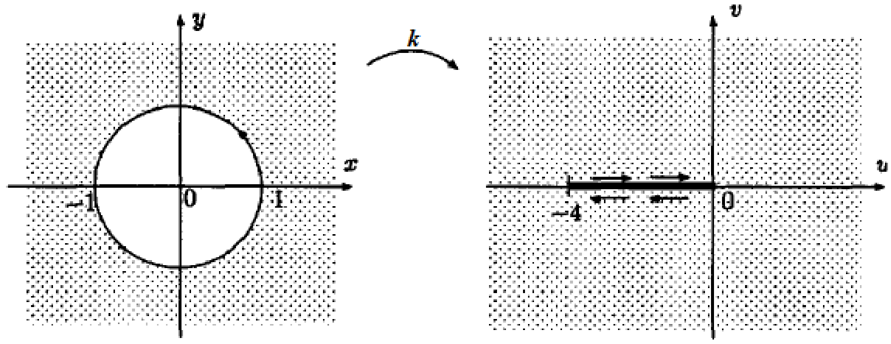
$$g(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \frac{b_2}{w^2} + \cdots = w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{w^n} \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlı yalınkat fonksiyonların sınıfını Σ ile, bu sınıfa ait olup $w_0 = 0$ değerini almayan fonksiyonların sınıfını ise Σ_0 ile gösterelim. Buna göre $\Sigma_0 \subset \Sigma$ ve Σ sınıfına ait her bir fonksiyonun $\mathbb{D}^*$ bölgesini kompakt ve bağlantılı bir bölgenin tümleyeni üzerine dönüştürdüğü açıktır.

Ayrıca, S sınıfı ile Σ_0 sınıfı arasında yakın bir ilişki mevcuttur. Gerçekten, $f \in S$ ise, $g(z) = 1/f(1/z) = z - a_2 + (a_2^2 - a_3)/z + \cdots$ fonksiyonu Σ_0 sınıfına aittir. Tersine, $g \in \Sigma_0$ ise $f(z) = 1/g(1/z) = z - c_0 z^2 + (c_0^2 - c_1)z^3 + \cdots$ fonksiyonu da S sınıfına aittir. Eğer $k \in S$ Koebe fonksiyonu göz önüne alınırsa,

$$g(z) = \frac{1}{k(1/z)} = z - 2 + \frac{1}{z}$$

olup, g fonksiyonu $\mathbb{D}^*$ bölgesini $\mathbb{C} - [-4,0]$ bölgesi üzerine konform olarak dönüştürür (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 $k(\mathbb{D}^*)$ görüntü bölgesi

2.2 Alan Teoremi

Bu kısımda amacımız adına alan teoremi denilen, Σ sınıfına ait fonksiyonların Laurent açılımının katsayılarıyla ilgili bir teoremi vermek. Gronwall (1916) tarafından gösterilen bu teorem, Σ ve S sınıflarının elemanter özellikleriyle ilgili çalışmalarda önemli bir rol oynar.

Önce S sınıfına ait fonksiyonlar altında kompakt dairelerin görüntü bölgesinin alanını vererek başlayalım.

2.2.1 Teorem. $f \in S$ ve $\overline{D}_r = \{z : |z| \le r < 1\}$ olsun. Bu durumda $f(\overline{D}_r)$ sınırlı bölgesinin alanı

$$A(r) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 r^{2n} \tag{2.3}$$

dir.

İspat. $z = x + iy \in \overline{D}_r$ ve $w = f(z) = u(z) + i\,v(z)$ olsun. $f(\overline{D}_r)$ bölgesinin alanı

$$A(r) = \iint_{f(\overline{D}_r)} du\ dv = \iint_{\overline{D}_r} \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| dx\,dy$$

eşitliği ile verilir. $f = u + i\,v$ fonksiyonu analitik olduğundan,

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|$$

ve $z = \rho e^{i\theta}$ için

$$A(r) = \iint_{\overline{D}_r} |f'(z)|^2\ dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} |f'(\rho e^{i\theta})|^2\ \rho\, d\rho\, d\theta \tag{2.4}$$

olur. (2.1) bağıntısı gereği $f'(\rho e^{i\theta}) = a_1 + 2a_2 \rho e^{i\theta} + \cdots + n a_n \rho^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \cdots$ olduğundan,

$$|f'(\rho e^{i\theta})|^2 = f'(\rho e^{i\theta})\ \overline{f'(\rho e^{i\theta})} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\,|a_n|^2\ \rho^{2n-2} + \sum_{k \ne 0} c_k e^{ik\theta}$$

elde edilir. Burada c_k katsayıları a_n ve ρ ya bağlıdır. Bu ifade (2.3) de yerine yazılıp terim terime integrallenir ve $k \ne 0$ için $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0$ olduğu göz önüne alınırsa (2.3) eşitliği elde edilir. ■

2.2.2 Açıklama. (i) Eğer $0 < r < 1$ için $A(r) \leq M < \infty$ ise $N \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$S_N(r) = \pi \sum_{n=1}^{N} n\,|\,a_n\,|^2 r^{2n} < M$$

dir. $(S_N(r))$ monoton artan ve sınırlı bir dizi olduğundan, $r \to 1^-$ iken limiti mevcuttur. O halde,

$$S_N = S_N(1) = \pi \sum_{n=1}^{N} n\,|\,a_n\,|^2 \leq M$$

elde edilir. (S_N) kısmi toplamlar dizisi sınırlı ve $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\,a_n\,|^2$ serisi yakınsak olduğundan $N \to \infty$ için

$$A = \lim_{r \to 1^-} A(r) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|\,a_n\,|^2 \tag{2.5}$$

elde edilir.

(ii) $A = \pi(1 + 2\,|\,a_2\,|^2 + \cdots) \geq \pi$ olduğundan $f(z) = z$ fonksiyonu için $A = \pi$ olup, diğer bütün $f \in S$ fonksiyonlar için $A \geq \pi$ dir.

(iii) Eğer $A(r)$, $r \to 1^-$ iken sınırlı değil ise (2.5) deki seri ıraksak ve $A = \infty$ olur.

Alan teoremi olarak bilinen aşağıdaki teorem, Σ sınıfına ait fonksiyonların Laurent açılımının katsayılarıyla ilgilidir.

2.2.3 Teorem (Alan Teoremi). $\varphi \in \Sigma$ fonksiyonu (2.2) bağıntısıyla verilmiş ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\,b_n\,|^2 \leq 1 \tag{2.6}$$

dir.

İspat. $E = E(\varphi) = \mathbb{C} - \varphi(\mathbb{D}^*)$ diyelim. Belli bir $\rho > 1$ değeri için $C_\rho = \partial D_\rho$ ve $f(C_\rho) = \Gamma_\rho$ olsun. φ fonksiyonu $\mathbb{D}^*$ da yalınkat olduğundan, Γ_ρ eğrisi

$$w = \varphi(\rho e^{i\theta}) = w(\theta) = u(\theta) + iv(\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi ,$$

biçiminde pozitif olarak yönlendirilmiş bir Jordan eğrisidir. E_ρ, Γ_ρ tarafından çevrelenen bölge olsun (Şekil 2.3). Bu durumda, $E_\rho \supset E$ ve Green Teoremi gereği, E_ρ bölgesinin $A(\rho)$ alanı,

$$A(\rho) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\rho}(udv - vdu) = \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_\rho}\overline{w}\,dw = \frac{1}{2i}\int_{\partial D_r}\overline{\varphi(\zeta)}\;\varphi'(\zeta)\,d\zeta$$

eşitliği ile verilir. φ fonksiyonunun $\mathbb{D}^*$ bölgesindeki Laurent açılımı, $k \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ için $\int_{|\zeta|=\rho}\zeta^k d\zeta = 0$ ve $k = -1$ için $\int_{|\zeta|=\rho}\zeta^k d\zeta = 2\pi i$ olduğu dikkate alınırsa, düzgün yakınsaklıktan

$$A(\rho) = \frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=\rho}\left\{\overline{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{b}_n}{\overline{\zeta}_n}\right\}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb_n}{\zeta^{n+1}}\right\}d\zeta$$

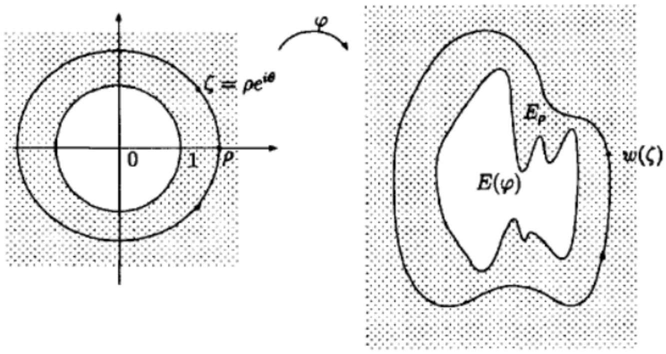
$$= \frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=\rho}\left\{\frac{\rho^2}{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{b}_n\zeta^n}{\rho^{2n}}\right\}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb_n}{\zeta^{n+1}}\right\}d\zeta$$

$$= \pi\left(\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,|\,b_n\,|^2}{\rho^{2n}}\right)$$

olarak bulunur. $A(\rho) \ge 0$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,|\,b_n\,|^2}{\rho^{2n}} \le \rho^2$$

olur. Buradan $\rho \to 1$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\,b_n\,|^2$ yakınsak olduğundan, (2.6) bağıntısı elde edilir. ■



Şekil 2.3 E_ρ görüntü bölgesinin tümleyeni

2.2.4 Açıklama. Yukarıdaki ispatta geçen E_ρ bölgesinin alanı

$$A(\rho) = \pi\left(\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|\,b_n\,|^2}{\rho^{2n}}\right)$$

olup, $\rho \to 1$ iken E_ρ daralır ve $E = \bigcap_{\rho>1} E_\rho$ olur. Böylece, E bölgesinin alanı (Lebesgue ölçümü) A ise,

$$A = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n\,|\,b_n\,|^2\right)$$

olur. $A \geq 0$ olduğundan, 2.2.3 Teoremi elde edilir. Eğer $A = 0$ ise, (2.6) bağıntısı eşitlik olarak sağlanır.

Aşağıdaki sonuç, Σ sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı sınırlarının alan teoreminden elde edilebileceğini gösterir.

2.2.5 Sonuç. $\varphi \in \Sigma$ fonksiyonu (2.2) tipinde verilmiş olsun. Bu takdirde $|\,b_1\,| \leq 1$ dir. Eşitlik $\varphi(\zeta) = \zeta + b_0 + e^{i\theta}\zeta^{-1}$, $\theta \in \mathbb{R}$, fonksiyonu için geçerlidir. Üstelik, $|\,\zeta\,| > 1$ için $\varphi(\zeta) \neq 0$ ise, $|\,b_0\,| \leq 2$ dir. Eşitlik, $\varphi(\zeta) = \zeta + 2e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}\zeta^{-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (2.6) bağıntısından $|\,b_1\,| \leq 1$ olduğu hemen görülür. Ayrıca $|\,b_1\,| = 1$ ise, (2.6) bağıntısından $k \geq 2$ için $b_k = 0$ dır.

Şimdi, $|\zeta|>1$ için $\varphi(\zeta)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $|z|<1$ için $f(z)=1/\varphi(1/z)$ fonksiyonu S sınıfına ait olup, 2.1.3 Teoremi gereği, $g(z)=\sqrt{f(z^2)}$ fonksiyonu da S sınıfına aittir. Buradan

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{g(1/\zeta)}=\zeta\left(\frac{\varphi(\zeta^2)}{\zeta^2}\right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlanan ψ fonksiyonu Σ sınıfına ait ve $|\zeta|>1$ için $[\psi(\zeta)]^2=\varphi(\zeta^2)$ dir. $|\zeta|>1$ için ψ fonksiyonunun Laurent açılımının

$$\psi(\zeta)=\zeta+\beta_0+\frac{\beta_1}{\zeta}+\cdots$$

biçiminde olduğunu kabul edelim. O halde,

$$[\psi(\zeta)]^2=\zeta^2+2\beta_0\zeta+(\beta_0^2+2\beta_1)+\cdots$$

$$=\varphi(\zeta^2)=\zeta^2+b_0+\frac{b_1}{\zeta^2}+\cdots$$

olur. Katsayıların eşitliğinden, $\beta_0=0$ ve $b_0=2\beta_1$ olduğu görülür. $\psi\in\Sigma$ olduğundan, $|b_0/2|\leq 1$ ve dolayısıyla $|b_0|\leq 2$ elde edilir.

$|b_0|=2$ ve $|\beta_1|=1$ eşitliklerinin sağlanması için gerek ve yeter şart, $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\psi(\zeta)=\zeta+e^{i\alpha}\zeta^{-1}$ olmasıdır. Bu durumda, $\varphi(\zeta^2)=[\psi(\zeta)]^2=\zeta^2+e^{2i\alpha}\zeta^{-2}+2e^{i\alpha}$ eşitliğinden $\varphi(\zeta)=\zeta+e^{2i\alpha}\zeta^{-1}+2e^{i\alpha}$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Şimdi elde edilen bu sonuçların S sınıfına yansıması üzerinde duralım. Önce, 2.2.5 Sonucunun S sınıfındaki fonksiyonların Taylor açılımındaki ikinci katsayı için bir sınır verdiğini gösterelim. Bieberbach (1916)'a ait bu sonuç aşağıda verilmiştir.

2.2.6 Teorem. $f\in S$ fonksiyonu $z\in\mathbb{D}$ için $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ biçiminde verilmiş ise, $|a_2|\leq 2$ dir. Eşitlik $f(z)=k_\theta(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $f \in S$ ise, $|\zeta|>1$ için $\varphi(\zeta)=1/f(1/\zeta) \in \Sigma$ dir. Üstelik, $|\zeta|>1$ için $\varphi(\zeta) \neq 0$ dır. φ fonksiyonunun Laurent açılımı

$$\varphi(\zeta)=\zeta-a_2+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k}{\zeta^k}$$

biçiminde olup, 2.2.5 Sonucundan $|a_2| \leq 2$ elde edilir. ■

S sınıfına ait (2.1) tipindeki fonksiyonların a_n katsayıları için $|a_n| \leq n$ $(n=2,3,...)$ eşitsizliği *Bieberbach tahmini* olarak bilinir. Bieberbach (1916) tarafından ortaya atılan bu tahmin üzerinde bir çok matematikçi çalışmış ve binlerce yeni sonuç ve problemin ortaya çıkmasına vesile olmuştur. Ancak esas problem 1985 yılında Le Branges (1985) tarafından ispatlanabilmiştir.

2.2.7 Teorem (Bieberbach Tahmini)**.** $f \in S$ fonksiyonu $z \in \mathbb{D}$ için $f(z)= z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde verilmiş ise, her $n \geq 1$ için, $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik $f(z)=k_\theta(z)$ biçimindeki Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir (Le Branges 1985).

2.3 S Sınıfında Büyüme, Örtme ve Distorsiyon Sonuçları

$|a_2| \leq 2$ eşitsizliği, S sınıfına ait fonksiyonlarla ilgili bazı sonuçların elde edilmesinde önemli rol oynar. Bu sonuçlar yalınkat fonksiyonlar teorisinin temel teoremleri olarak bilinir. Bunlardan birincisi, Koebe $1/4$-teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki teorem, S sınıfına ait fonksiyonların görüntü bölgesinin daima $1/4$ yarıçaplı merkezi açık bir daireyi örttüğünü ifade eder.

2.3.1 Teorem. $f \in S$ ise, $f(\mathbb{D}) \supset D_{1/4}$ dür. Bu sonuç $f(z)=k_\theta(z)$ Koebe fonksiyonu için kesindir. Üstelik, $\bigcap_{f\in S} f(\mathbb{D})=D_{1/4}$ dür.

İspat. $w_0 \notin f(\mathbb{D})$ özelliğindeki $w_0 \in \mathbb{C}$ noktası için $|w_0| \geq 1/4$ olduğunu göstermek yetecektir. $z \in \mathbb{D}$ için

$$g(z)=\frac{w_0 f(z)}{w_0-f(z)}=z+\left(a_2+\frac{1}{w_0}\right)z^2+\cdots$$

biçiminde $g:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. 2.1.3 Teoremi gereği, $g\in S$ ve $|a_2|\le 2$ olduğundan, $|a_2+(1/w_0)|\le 2$ ve

$$\left|\frac{1}{w_0}\right|\le\left|a_2+\frac{1}{w_0}\right|+|a_2|\le 4$$

bulunur. Böylece, $|w_0|\ge 1/4$ elde edilir.

Öte yandan, $|w_0|=1/4$ olması için gerek ve yeter şart, $|a_2|=2$ ve $|a_2+(1/w_0)|=2$ olmasıdır. Bu ise, f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir.

Şimdi, $\bigcap_{f\in S} f(\mathbb{D})=D_{1/4}$ olduğunu göstermek için $k_\theta(z)$, $\theta\in\mathbb{R}$, fonksiyonunu göz önüne alalım. $\partial D_{1/4}$ çemberi üzerindeki her bir nokta $k_\theta(\mathbb{D})$ bölgelerinden birinin sınır noktasıdır ve $\bigcap_{\theta\in\mathbb{R}} k_\theta(\mathbb{D})=D_{1/4}$ dir. Böylece, $\bigcap_{f\in S} f(\mathbb{D})=D_{1/4}$ elde edilir. ■

S sınıfına ait fonksiyonlar için a_2 katsayısına bağlı önemli sonuçlardan biri de Koebe distorsiyon teoremidir. Bu teoreme geçmeden önce, teoremin ispatına yardımcı olacak aşağıdaki sonuçları verelim.

2.3.2 Yardımcı Teorem. $f\in S$ ise herhangi $\zeta\in\mathbb{D}$ için,

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2)-2\overline{\zeta}\right|\le 2 \tag{2.7}$$

dir.

İspat. Keyfi fakat sabit bir $\lambda\in\mathbb{D}$ ve $f\in S$ için, 2.1.3 Teoremi gereği,

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+\lambda}{1+z}\right)-f(\lambda)}{f'(\lambda)(1-|\lambda|^2)}=z+b_2z^2+\cdots \tag{2.8}$$

fonksiyonu S sınıfına aittir. 2.2.6 Teoreminden,

$$\left|g''(0)\right| = |b_2| = \left| \frac{f''(\lambda)(1-|\lambda|^2)}{2f'(\lambda)} - \overline{\lambda} \right| \leq 2 \tag{2.9}$$

olur. $\lambda \in \mathbb{D}$ keyfi olduğundan, λ yerine ζ almakta (2.7) elde edilir. ■

2.3.3 Yardımcı Teorem. $f(z)$ fonksiyonu $\zeta = \rho e^{i\theta}$ noktasında analitik ve $f'(\zeta) \neq 0$ ise,

$$\rho \frac{d}{d\rho} \log|f'(\zeta)| = \operatorname{Re} \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \tag{2.10}$$

ve

$$\rho \frac{d}{d\rho} \arg f'(\zeta) = \operatorname{Im} \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \tag{2.11}$$

dir.

İspat. $\rho \dfrac{\partial}{\partial \rho} \log f'(\zeta) = \rho \dfrac{\partial}{\partial \rho} [\log|f'(\zeta)| + i \arg f'(\zeta)]$

eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log f'(\zeta) = \rho \frac{d}{d\zeta} \{\log f'(\zeta)\} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = \rho \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} e^{i\theta} = \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}$$

yazılabilir. Bu iki bağıntının eşitliğinden,

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log f'(\zeta) + i \arg f'(\zeta) = \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}$$

elde edilir. Reel ve imajiner kısımlarının eşitliğinden (2.10) ve (2.11) bağıntıları elde edilir. ■

2.3.4 Teorem (Distorsiyon Teoremi)**.** $f \in S$ ise bu takdirde her bir $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{2.12}$$

dir. Eşitlik $f(z)=k_\theta(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (2.7) ifadesi $2|\zeta/(1-|\zeta|^2)|$ ile çarpılırsa,

$$\left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\right|\le\frac{4|\zeta|}{1-|\zeta|^2}$$

olur. Buradan, $|\zeta|=\rho$ için

$$\frac{-4\rho}{1-\rho^2}\le\operatorname{Re}\left(\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\frac{2\rho^2}{1-\rho^2}\right)\le\frac{4\rho}{1-\rho^2} \tag{2.13}$$

ve

$$\frac{-4\rho}{1-\rho^2}\le\operatorname{Im}\left(\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\frac{2\rho^2}{1-\rho^2}\right)\le\frac{4\rho}{1-\rho^2} \tag{2.14}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (2.10) ve (2.11) eşitlikleri (2.13) ve (2.14) de kullanılırsa,

$$\frac{2\rho^2-4\rho}{1-\rho^2}\le\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\log|f'(\zeta)|\le\frac{2\rho^2+4\rho}{1-\rho^2} \tag{2.15}$$

ve

$$\frac{-4\rho}{1-\rho^2}\le\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\arg f'(\zeta)\le\frac{4\rho}{1-\rho^2} \tag{2.16}$$

bulunur. (2.15) eşitsizliği, $\rho\neq 0$ ile bölünür ve 0 ile $z=re^{i\theta}$ noktasını birleştiren doğru parçası boyunca, ρ ya göre integrali alınırsa,

$$\log\frac{1-r}{(1+r)^3}\le\log|f'(z)|\le\log\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

olur. Bu ise, (2.12) bağıntısına denktir.

Eğer benzer işlemler (2.16) için yapılırsa,

$$|\arg f'(z)| \leq 2\log\frac{1+r}{1-r}$$

bulunur. Ancak, bu eşitsizlik $f \in S$ iken kesin değildir. $|\arg f'(z)|$ için kesin üst sınır

$$|\arg f'(z)| \leq \begin{cases} 4\arcsin r & ; \; r \leq \sqrt{2}/2 \\ \pi + \log\dfrac{r^2}{1-r^2} & ; \; \sqrt{2}/2 < r < 1 \end{cases}$$

biçiminde olup, Goluzin (1936) tarafından elde edilmiştir. ■

2.3.5 Sonuç. $f \in S$ ise, her $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ için,

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{2r^2+4}{1-r^2}, \quad |f''(z)| \leq \frac{2(2+r)}{(1-r)^4},$$

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f(z)} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

dir. Her üç bağıntıda eşitlik $f(z) = k_\theta(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (2.11) ve (2.12) eşitsizliklerinde $\rho = r$ alınırsa istenilen eşitsizlikler elde edilir. ■

2.3.6 Teorem. $f \in S$ ve $0 \leq r < 1$ olsun. Ayrıca, $m'(r)$ ve $M'(r)$ reel değerli fonksiyonları için $m'(r) \leq |f'(z)| \leq M'(r)$ ise,

$$\int_0^r m'(t)\,dt \leq |f(z)| \leq \int_0^r M'(t)\,dt \tag{2.17}$$

dir.

İspat. Önce, (2.17) bağıntısında ikinci eşitsizliğin sağlandığını gösterelim. Bunun için, 0 noktasını $\zeta = t\,e^{i\alpha} \in \mathbb{D}$ noktasına birleştiren doğru parçası boyunca integral alınırsa,

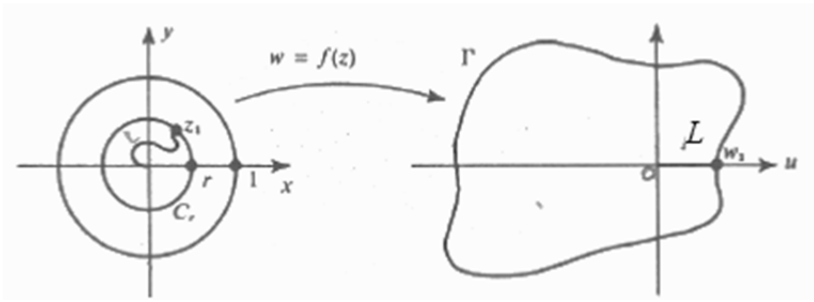
$$|f(re^{i\theta})| = \left| \int_0^z f'(\zeta)\,d\zeta \right| = \left| \int_0^r f'(te^{i\alpha})\,e^{i\alpha}\,dt \right| \leq \int_0^r |f(te^{i\alpha})|\,dt \leq \int_0^r M'(t)\,dt$$

bulunur.

Şimdi, birinci eşitsizliğin doğruluğunu gösterelim. $C_r = \{z : |z| = r < 1\}$ olmak üzere, $f(C_r) = \Gamma$ ve $w_1 \in \Gamma$ noktası orijine en yakın nokta olsun. S sınıfı rotasyonlar altında değişmez kaldığından, $w_1 > 0$ alınabilir (Şekil 2.4). $L = \{w : 0 \le w \le w_1\}$ olsun. z_1 noktasının ve γ eğrisinin $f(z)$ altındaki görüntüleri sırasıyla, w_1 ve L olsun. $\zeta \in \gamma$ olmak üzere, $f'(\zeta)d\zeta = dw > 0$ olur. Buradan, $|d\zeta| \ge d|\zeta|$ gerçeği kullanılarak,

$$w_1 = \int_0^{w_1} dw = \int_0^{z_1} f'(\zeta)d\zeta = \int_0^{z_1} |f'(\zeta)||d\zeta| \ge \int_0^r |f'(te^{i\theta})|\,dt \ge \int_0^r m'(t)\,dt$$

elde edilir. ■



Şekil 2.4 $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$

Aşağıdaki teorem büyüme teoremi olarak bilinir.

2.3.7 Teorem. $f \in S$ ise bu takdirde $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2} \tag{2.18}$$

$$\frac{1-r}{1+r} \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+r}{1-r} \tag{2.19}$$

dir. Eşitlik Koebe fonksiyonu için geçerlidir (Bieberbach 1916).

İspat. (2.12) ifadesinde $m'(r) = (1-r)/(1+r)^3$ ve $M'(r) = (1+r)/(1-r)^3$ olarak alınır ve 2.3.6 Teoremi uygulanırsa, ilk eşitsizlik elde edilir. Ayrıca, (2.7) bağıntısında verilen $g(z)$ fonksiyonunda $z = -\lambda$ alınır ve 2.3.6 Teoremi uygulanırsa,

$$\frac{|\lambda|}{(1+|\lambda|^2)} \le |g(-\lambda)| = \left|\frac{-f(\lambda)}{f'(\lambda)(1-|\lambda|^2)}\right| \le \frac{|\lambda|}{(1-|\lambda|)^2}$$

elde edilir. $\lambda \in \mathbb{D}$ keyfi olduğundan, ikinci eşitsizlik elde edilmiş olur. ■

2.3.8 Sonuç. S sınıfı $A(\mathbb{D})$ analitik fonksiyonların kompakt bir altkümesidir.

İspat. (2.18) bağıntısından S, lokal düzgün sınırlı bir aile olup, normal aile oluşturur. S sınıfının kompaktlığı için geriye, kapalı olduğunu göstermek kalır. Bunun için $\mathbb{D}$ de lokal olarak düzgün $f_n \to f$ özelliğinde S sınıfına ait bir (f_n) dizisini göz önüne alalım. $f \in S$ olduğunu göstermek yeterlidir. 1.25 Hurwitz Teoremi gereği, f limit fonksiyonu ya yalınkattır yada sabittir. $f(0)=0$ ve $f'(0)=\lim_{n\to\infty} f_n'(0)=1$ olduğundan, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkat olmak zorundadır. ■

Aşağıdaki teorem, S sınıfına ait herhangi bir fonksiyonun maksimum modülünün büyümesini belirleyen, Hayman (1994)'e ait bir sonuçtur. *Hayman Düzgünlük Teoremi* olarak da bilinen bu teorem, yeterince büyük *k* değerleri için, Bieberbach Tahmininin doğru olduğunu gösterir.

2.3.9 Teorem. $f \in S$ ve $0 < r < 1$ için $M_\infty(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ olsun. Eğer f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu değilse, $\varphi(r) = \frac{1}{r}(1-r)^2 M_\infty(r,f)$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında kesin olarak azalandır. Üstelik, $\alpha = \lim_{r\to 1^-} \varphi(r) = \alpha(f) \in [0,1)$ dir.

İspat. $|z| = r \in (0,1)$ için (2.18) den,

$$\frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\theta})| = \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial r}\log f(re^{i\theta})\right] \le \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| \le \frac{1+r}{r(1-r)}$$

olur. f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu değil ise, 2.3.6 Teoreminden, yukarıdaki kesin eşitsizlik sağlanır. $0 < r_1 < r_2 < 1$ için, bu eşitsizliğin r_1 den r_2 ye integrali alınırsa,

$$\log\left|\frac{f(r_2e^{i\theta})}{f(r_1e^{i\theta})}\right| < \int_{r_1}^{r_2}\frac{1+r}{r(1-r)}dr = \log\left[\frac{(1-r_1)^2 r_2}{(1-r_2)^2 r_1}\right]$$

olur. Buradan, $0 < r_1 < r_2 < 1$ ve her $\theta \in \mathbb{R}$ için,

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}\,|\,f(r_2e^{i\theta})\,| < \frac{(1-r_1)^2}{r_1}\,|\,f(r_1e^{i\theta})\,|$$

bulunur. Eğer $\theta \in \mathbb{R}$ sayısı, $|\,f(r_2e^{i\theta})\,| = M_\infty(r_2, f)$ olacak biçimde seçilirse, üstteki eşitsizlik

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}M_\infty(r_2, f) < \frac{(1-r_1)^2}{r_1}\,|\,f(r_1e^{i\theta})\,| \le \frac{(1-r_1)^2}{r_1}M_\infty(r_1, f)$$

halini alır. Böylece, $f = k_\theta$ olmadıkça, $r \in (0,1)$ için $\varphi(r)$ fonksiyonu kesin olarak azalandır. (2.18) bağıntısındaki üst sınır kullanılarak

$$\alpha = \lim_{r\to 1^-}\frac{(1-r)^2}{r}M_\infty(r, f) < 1$$

sonucu elde edilir. Elbette, f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise, $\alpha = 1$ olacağı açıktır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Aşağıdaki teorem, Hayman'in düzgünlük teoreminin Krzyz (1955) tarafından genişletilmiş olup, S sınıfına ait bir fonksiyonun türevinin büyümesiyle ilgilidir.

2.3.10 Teorem. f, S sınıfına ait ve Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmayan herhangi bir fonksiyon olmak üzere $M_\infty(r, f')(1-r)^3/(1+r)$ fonksiyonu $r \in (0,1)$ için monoton azalandır. Ayrıca $\lim_{r\to 1^-} M_\infty(r, f')(1-r)^3 = \beta(f)$ ve $\beta(f) \in [0,2]$ dir. Eşitlik $\beta(f) = 2$ eşitliği f nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması durumunda sağlanır.

İspat. $|\,z\,| = r \in (0,1)$ için (2.9) bağıntısından,

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{2r+4}{1-r^2} = \frac{d}{dr}\log\left[\frac{1+r}{(1-r)^3}\right]$$

olur. Eşitlik, f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir. Eğer f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu değil ise, $r \in (0,1)$ için $M_\infty(r, f')(1-r)^3/(1+r)$ ve $|f'(re^{i\theta})|(1-r)^3/(1+r)$ fonksiyonlarının kesin olarak azalan olduğu görülür.

$$\lim_{r\to 0} M_\infty(r, f')(1-r)^3/(1+r) = 1$$

olduğundan,

$$\lim_{r\to 1} M_\infty(r, f')\frac{(1-r)^3}{1+r} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 1} M_\infty(r, f')(1-r)^3 = \frac{1}{2}\beta(f) \leq 1$$

elde edilir. $\beta(f) = 2$ eşitliği f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması durumunda sağlandığı açıktır. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Dinghas (1959)'da S sınıfına ait f fonksiyonunun $m(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$, $0 < r < 1$, değeri için

$$m(r, f)\frac{(1+r)^2}{r} \quad \text{ve} \quad m(r, f')\frac{(1+r)^3}{1-r}$$

fonksiyonlarının $[0,1)$ aralığında r'nin azalmayan fonksiyonları olduğunu göstermiştir.

Aşağıdaki teorem (2.1) biçiminde verilen fonksiyonlar için, bir yalınkatlık testi vermektedir.

2.3.11 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Eğer $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ ise, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır.

İspat. $z, w \in \mathbb{D}$ ve $z \neq w$ için

$$
\begin{aligned}
|f(z)-f(w)| &= \left| z-w+\sum_{k=2}^{\infty} a_k (z^k - w^k) \right| \\
&\geq |z-w| \left(1-\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| (|z|^{k-1} + \cdots + |w|^{k-1}) \right) \\
&\geq |z-w| \left(1-\sum_{k=2}^{\infty} k\,|a_k| \right) > 0
\end{aligned}
$$

olur. Yani $f(z) \neq f(w)$ dır. Dolayısıyla, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır. ■

2.4 P Sınıfı ve Temel Özellikleri

Bu kısımda, $\mathbb{D}$ de analitik ve reel kısmı pozitif fonksiyonların sınıfı tanımlanacak, bu sınıfın temel özellikleri ve bu sınıfa ait fonksiyonların integral temsili verilecek. Ayrıca, kompleks düzlemde sabordinasyon prensibi ve domine edilmiş seri kavramları üzerinde durulacak.

2.4.1 Tanım. $\mathbb{D}$ de analitik, $f(0)=1$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}\{f(z)\} > 0$ olan

$$
f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \tag{2.20}
$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlara *reel kısmı pozitif analitik fonksiyon* denir. $\mathbb{D}$ de reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir.

P sınıfına ait önemli bir fonksiyon örneği $z \in \mathbb{D}$ için,

$$
p(z) = \frac{1+z}{1-z} \tag{2.21}
$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon $\mathbb{D}$ birim dairesini $H^+ = \{w : \mathrm{Re}\, w > 0\}$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder. Bir anlamda Koebe fonksiyonunun S sınıfında oynadığı temel rolü, p fonksiyonu P sınıfında oynar.

P sınıfına ait bir fonksiyonun yalınkat olması gerekli değildir. Örneğin, $n \geq 2$ tamsayısı için, $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait fakat, $\mathbb{D}$ de yalınkat değildir. Bununla birlikte, P sınıfı konveks ve kompakttır. Gerçekten, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $f_1, f_2 \in P$

için $f = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 \in P$ dir. P sınıfının kompaktlığı, S sınıfının kompaktlığına benzer biçimde gösterilebilir: $\mathbb{D}$ de lokal düzgün olarak $f_n \to f$ özelliğindeki P sınıfına ait her (f_n) dizisi için, $f \in P$ olduğunu göstermek yeterlidir. Hurwitz teoremi gereği, f limit fonksiyonunun ya $\mathbb{D}$ de sıfırı yoktur, yada özdeş olarak sıfırdır. $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$ olduğundan, $f \in P$ dir.

Aşağıdaki teorem, P sınıfına ait fonksiyonların belli işlemler altında değişmez kaldığını gösterir. İspatı 2.4.1 Tanımından açıktır.

2.4.2 Teorem. f , f_1 ve f_2, fonksiyonları P sınıfına ait ise, aşağıda verilen g fonksiyonu da P sınıfına aittir.

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ için $g(z) = f(e^{i\alpha} z)$.

(ii) $-1 \le t \le 1$ için $g(z) = [f(z)]^t$ veya $g(z) = f(tz)$.

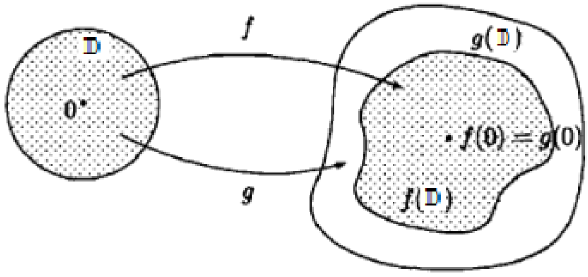
(iii) $g(z) = 1/f(z)$.

(iv) $t_1, t_2 > 0$ ve $t_1 + t_2 \le 1$ için $g(z) = [f_1(z)]^{t_1} [f_2(z)]^{t_2}$.

(v) $\lambda \in \mathbb{D}$ ve $f(\lambda) = a + ib$ ise $g(z) = \dfrac{1}{a}\left[f\left(\dfrac{z+\lambda}{1-\bar{\lambda} z} \right) - bi \right]$.

(vi) $b \in \mathbb{R}$ için $g(z) = \dfrac{f(z) + ib}{1 + ib f(z)}$.

2.4.3 Tanım. $f, g \in A(\mathbb{D})$ olsun. Her $z \in \mathbb{D}$ için, $f(z) = g(w(z))$ eşitliğini sağlayan $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ özelliğinde $w \in A(\mathbb{D})$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna *sabordinedir* denir ve bu durum $f \prec g$ biçiminde gösterilir (Şekil 2.5).



Şekil 2.5 $f \prec g$

Dikkat edilirse 2.4.3 Tanımında geçen $w(z)$, Schwarz lemmasının şartlarını sağlayan bir fonksiyondur.

Aşağıdaki teorem sabordinenin geometrik yorumunu vermektedir.

2.4.4 Teorem. $f \in A(\mathbb{D})$ ve g fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik ve yalınkat olsun. $f \prec g$ olması için gerek ve yeter şart, $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ olmasıdır.

İspat. $w = g(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitik ve yalınkat olduğundan, $g^{-1}(w)$ fonksiyonu da $g(\mathbb{D})$ de analitiktir. Eğer $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ ise, $z = g^{-1}(w)$ fonksiyonu $f(\mathbb{D})$ bölgesinde, dolayısıyla $g^{-1} \circ f$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitiktir. $\varphi = g^{-1} \circ f$ denirse, $z \in \mathbb{D}$ için $|\varphi(z)| < 1$ ve $f(z) = g(\varphi(z))$ olur. $f(0) = g(0)$ olduğundan, $\varphi(0) = g^{-1}(f(0)) = 0$ bulunur. Böylece, $f \prec g$ elde edilir.

Tersine, $f \prec g$ ise, $f(z) = g(w(z))$ olacak biçimde Schwarz lemmasının şartlarını sağlayan bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. $|\varphi(z)| \leq |z|$ olduğundan, $D_r = \{z : |z| < r < 1\}$ olmak üzere, $z_1 \in \varphi(D_r)$ noktası için, $\varphi(z) = z_1$ olacak şekilde bir $z \in D_r$ noktası vardır. Böylece, $|z_1| = |\varphi(z)| \leq |z| \leq r$ yani, $\varphi(D_r) \subset D_r$ olur. g fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğundan, $g(\varphi(D_r)) \subset g(D_r)$ dir. Buradan, $f(0) = g(\varphi(0)) = g(0)$, $f(D_r) \subset g(D_r)$ ve $r \to 1$ için $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ elde edilir. Bu ise, teoremin ispatını tamamlar. ■

Aşağdaki teorem, P sınıfına ait fonksiyonların (2.21) bağıntısıyla verilen p fonksiyonuna sabordine olduğunu gösterir.

2.4.5 Teorem. $f \in P$ olması için gerek ve yeter şart, $f \prec p$ olmasıdır.

İspat. $f \prec p$ ise, $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = p(w(z))$ olacak şekilde, Schwarz lemmasının şartlarını sağlayan bir w fonksiyonu vardır. O halde, $f \in A(\mathbb{D})$, $f(0) = 1$ ve (2.21) bağıntısı gereği

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{\operatorname{Re}[(1+w(z))(1-\overline{w(z)})]}{|1-w(z)|^2} = \frac{1-|w(z)|^2}{|1-w(z)|^2} > 0$$

olduğundan, $f \in P$ dir.

Tersine, $f \in P$ olsun. $f(0) = p(0) = 1$ ve $f(\mathbb{D}) \subset H^+ = p(\mathbb{D})$ ve f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik ve yalınkat olduğundan, $f \prec p$ dir. ■

Sabordine fonksiyonlar arasına güzel bir eşitsizlik, gelen teoremde verilmiştir.

2.4.6 Teorem. $\mathbb{D}$ de $f \prec g$ ise, $r \in (0,1)$ için

$$\max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|f'(z)| \le \max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|g'(z)|$$

dir.

İspat. $f \prec g$ olsun. $r \in (0,1)$ için $\max\limits_{|z|\le r}|f(z)| \le \max\limits_{|z|\le r}|g(z)|$ olur. Schwarz-Pick Lemması gereği istenen eşitsizlik elde edilir. ■

P sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini elde etmede Herlogz(1911)'un temsil teoreminden faydalanılacak. Bu teorem, ilerde incelenecek olan, S sınıfının alt sınıfları için de integral temsil elde edilmesinde yardımcı olacak. Bu fonksiyon integral temsilleri Lobesgue integrali yardımıyla elde edilebileceği gibi, Poisson çekirdeği yardımıyla da elde edilebilir. Aşağıdaki teorem ikincisi ile ilgilidir.

2.4.7 Teorem. $f \in A(\mathbb{D})$ olsun. Bu takdirde, $\mathbb{D}$ de $\operatorname{Re} f(z) \ge 0$ olması için gerek ve yeter şart,

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+z\,e^{-it}}{1-z\,e^{-it}}\,d\mu(t)+i\,\mathrm{Im}\,f(0) \tag{2.22}$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ üzerinde tanımlı $\mu(2\pi)-\mu(0)=\mathrm{Re}\,f(0)$ özelliğinde azalmayan bir μ fonksiyonu vardır.

İspat. f fonksiyonu (2.22) bağıntısını sağlasın. μ, $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan ve $\mu(2\pi)-\mu(0)=\mathrm{Re}\,f(0)$ özelliğinde bir fonksiyon olsun. İntegrali alınan fonksiyonun reel kısmı pozitif olduğundan

$$\mathrm{Re}\,f(z)=\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,\frac{1+z\,e^{-it}}{1-z\,e^{-it}}\,d\mu(t)\geq 0$$

elde edilir.

Tersine, $\mathbb{D}$ üzerinde $\mathrm{Re}\,f(z)\geq 0$ olsun. $\mathrm{Re}\,f(z)>0$ almak genelliği bozmayacaktır. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ ve $n=0,1,...$ için $b_n=\mathrm{Re}\,a_n$, $c_n=\mathrm{Im}\,a_n$ olsun. $0<r<1$ ve $0\leq t\leq 2\pi$ olmak üzere, $\mu(r,t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^t \mathrm{Re}\,f(re^{i\theta})d\theta$ biçiminde tanımlanırsa, $\mu(r,.)$ fonksiyonu $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan ve $\mu(r,2\pi)=b_0$ özelliğinde bir fonksiyondur. Üstelik, basit bir hesaplamayla

$$\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{int}}d\mu(r,t)=\begin{cases} a_n\dfrac{r^n}{2}, & n=1,2,... \\ b_0\;, & n=0\end{cases}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$f(z)=\int_0^{2\pi}d\mu(r,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{r^n}\left(\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{int}}d\mu(r,t)\right)z^n+ic_0$$

olur. Son integrant, t'nin düzgün yakınsak bir fonksiyonu olduğundan, $|z|<r$ için

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-it}z}{r}\right)^n\right]d\mu(r,t)+i\,c_0$$

olarak yazabilir. Serinin toplamından,

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\,d\mu(r,t)+i\,c_0 \tag{2.23}$$

olur.

Şimdi, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=1$ özelliğinde $(0,1)$ aralığında artan bir (ρ_n) dizisini göz önüne alalım. Üstelik, $t\in[0,\ 2\pi]$ için $\mu_n(t)=\mu(\rho_n,t)$ olsun. Bu durumda (μ_n), $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon dizisidir. 1.24 Teoremi gereği $k\to\infty$ iken $\mu_{n_k}\to\mu$ olacak biçimde (μ_n) dizisinin bir (μ_{n_k}) alt dizisi ve $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonunu bulunabilir. Ayrıca, $[0,2\pi]$ aralığında her bir sürekli h fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}h(t)d\mu_{n_k}(t)=\int_0^{2\pi}h(t)d\mu(t)$$

dir. O halde, sabit z değeri ve $k\to\infty$ için

$$\frac{\rho_{n_k}e^{it}+z}{\rho_{n_k}e^{it}-z}\to\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$$

yakınsaması t ye göre düzgündür. Buradan

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_{n_k}e^{it}+z}{\rho_{n_k}e^{it}-z}d\mu_{n_k}(t)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)$$

bulunur. Bu eşitlik ve (2.23) den (2.22) bağıntısı elde edilir. ■

P sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini veren ve Herglotz temsil teoremi olarak bilinen aşağıdaki sonuç, 2.4.7 Teoreminin doğrudan bir sonucudur.

2.4.8 Sonuç (Herglotz temsil teoremi). $f\in A(\mathbb{D})$ ve $f(0)=1$ olsun. Bu takdirde $f\in P$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{D}$ de

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}d\mu(t) \tag{2.24}$$

olacak biçimde ve $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında tanımlı azalmayan bir μ fonksiyonu vardır.

Herglotz temsil teoremi, P sınıfına ait fonksiyonların büyüklük ve distorsiyon sonuçlarının elde edilmesinde oldukça kullanışlıdır.

2.4.9 Teorem. $f \in P$ ise, $z = re^{i\theta}$ için

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{1-r} \tag{2.25}$$

dir. Eşitlik, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $p(e^{i\alpha}z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $f \in P$ ise, $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) \prec p(z)$ ve $f(z)=(1+w(z))/(1-w(z))$ olacak şekilde Schwarz lemmasının şartlarını sağlayan bir w fonksiyonu vardır. $|w(z)| \leq |z|$ olduğundan,

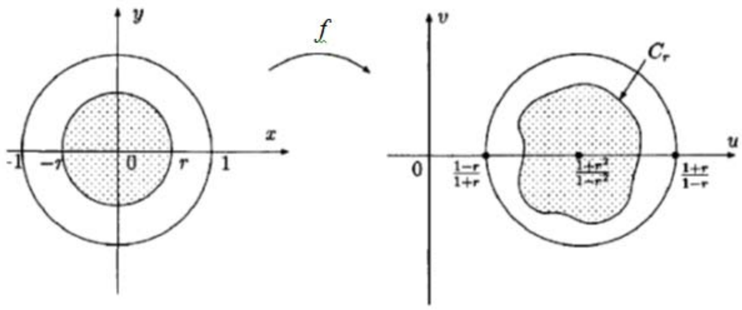
$$|f(z)| = \left|\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right| \leq \frac{1+|w(z)|}{1-|w(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} = \frac{1+r}{1-r}$$

elde edilir. 2.4.2 Teoremi gereği, bu son eşitsizlik $1/f \in P$ fonksiyonu için de geçerli olduğundan, $\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)|$ bulunur. Böylece (2.25) eşitsizliği elde edilmiş olur. ■

2.4.10 Açıklama. (2.25) eşitsizliğinin her tarafından $(1+r^2)/(1-r^2)$ çıkarılırsa, $f \in P$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ için,

$$\left|f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{2r}{1-r^2} \tag{2.26}$$

bulunur. Bu, $f(z)$ değerler kümesinin merkezi $(1+r^2)/(1-r^2)$ ve yarıçapı $2r/(1-r^2)$ olan kapalı daire içinde bulunması anlamına gelir (Şekil 2.6).



Şekil 2.6 C_r, ∂D_r nin görüntüsü

P ve S sınıfına ait bazı temel eşitsizlikleri göstermede birkaç yol vardır. Bunlardan biri aşağıda verilecek olan domine edilmiş seriler tekniğidir.

2.4.11 Tanım. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ serileri, $D_r=\{z:|z|<r\}$ diskinde yakınsak olsunlar. Bu takdirde, her $n\geq 0$ tamsayısı için $|a_n|\leq A_n$ ise, f fonksiyonuna F ile *domine edilmiştir* denir ve bu durum, $f \ll F$ biçiminde gösterilir.

2.4.11 Tanımından hareketle aşağıdaki sonucun doğruluğunu görmek zor değildir.

2.4.12 Teorem. $f(z) \ll F(z)$ ise, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $n=0,1,2,...$ için $A_n \geq 0$ dir.

(ii) $0\leq |z|=r<R$ için $|f(z)|\leq F(r)$ dir.

(iii) $f'(z) \ll F'(z)$ dir.

(iv) $\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\zeta \ll \int_0^{2\pi} F(\zeta)\,d\zeta$ dır.

Aşağıdaki sonuçlar domine edilmiş serilerin tekniğin kullanılarak elde edilebilir.

2.4.13 Teorem. $f\in P$ ise, bu takdirde $n\geq 0$ için

$$\left|f^n(z)\right| \leq \frac{2(n!)}{(1-r)^{n+1}}$$

dir. Eşitlik $f(z) = p(e^{i\alpha}z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $f \in P$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) << p(z)$ dir. 2.4.12 Teoremi gereği, $n = 1,2,...$ için $f^{(n)}(z) << p^{(n)}(z)$ olur. $|z| = r < 1$ için

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq p^{(n)}(r) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\Bigg|_{z=r} = \frac{2(n!)}{(1-r)^{n+1}}$$

elde edilir. ■

2.4.14 Teorem. $f \in S$ ise, $n = 1, 2, ...$ için

$$\left|f^n(z)\right| \leq n!\frac{n+r}{(1-r)^{n+1}}$$

dir.

İspat. $f \in S$ ise, $f(z) << k(z)$ olduğundan, 2.4.13 Teoremindeki yol izlenerek istenilen sonuç elde edilir. ■

2.4.15 Teorem. $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in P$ ise, $|p_n| \leq 2$ dir. Eşitlik $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(z) = p(e^{i\alpha}z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. 2.4.14 Teoreminde $z = 0$ alınırsa, her $n \geq 1$ için $|f^n(0)| = n!|p_n| \leq 2(n!)$ olur. Buradan, $|p_n| \leq 2$ elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem konveks bölgeler için bir yalınkatlık testini vermektedir.

2.4.16 Teorem. D konveks bir bölge olsun. Belli bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı ve $z \in D$ için,

$$\text{Re}[e^{i\alpha} f'(z)] > 0$$

ise, f fonksiyonu D de yalınkattır.

İspat. z_1 ve z_2, D de farklı iki nokta olsun. f fonksiyonunun

$$\Gamma = \{z : z = z_1 + t(z_2 - z_1), 0 \le t \le 1\} \subset D$$

doğrusu boyunca integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \int_\Gamma f'(z)\,dz = \int_0^1 f'(z(t))(z_2 - z_1)\,dt \\ &= (z_2 - z_1)e^{-i\alpha}\int_0^1 e^{i\alpha} f'(z(t))\,dt \end{aligned}$$

olur. Hipotezden dolayı, bu son integral sıfır olamaz. Dolayısıyla, $f(z_1) \ne f(z_2)$ elde edilir. Yani, f fonksiyonu D de yalınkattır. ■

$\mathbb{D}$ dairesinde $|f(z)| \le 1$ özelliğinde $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ biçimindeki fonksiyonların kümesini B_0 ile gösterelim. Gerçekte B_0 kümesi $\mathbb{D}$ de sınırlı fonksiyonların kümesidir. Bu fonksiyonlar Schwarz lemmasının şartlarını sağlar. Normalizasyon için $b_1 = 1$ alınamaz. Çünkü $f(z) \in B_0$ ise, Schwarz lemması gereği ya $|b_1| < 1$ ya da $f(z) \equiv e^{i\alpha} z$ dir.

B_0 sınıfı ile P sınıfı arasında

$$g(z) = \frac{1 + f(z)}{1 - f(z)} \quad \text{ve} \quad f(z) = \frac{g(z) - 1}{g(z) + 1}$$

fonksiyonları yardımıyla ilişki kurulabilir.

2.4.17 Teorem. $f \in B_0$ olması için gerek ve yeter şart $g \in P$ olmasıdır.

2.4.18 Tanım. $0 \le \alpha < 1$ için $\mathbb{D}$ dairesinde $\operatorname{Re} p(z) > \alpha$ şartını sağlayan P sınıfının alt kümesini $P(\alpha)$ ile gösterelim. $p \in P(\alpha)$ ise,

$$p(z) = \frac{1 + (1 - 2\alpha)b(z)}{1 - b(z)}$$

olacak şekilde $b \in B_0$ vardır.

2.4.19 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ ve $P(\alpha) = \{p \in P : \operatorname{Re} p(z) > \alpha, 0 \le \alpha < 1\}$ olmak üzere $p \in P(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$p(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+(1-2\alpha)ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\, d\mu(\theta)$$

olacak şekilde $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1$ özelliğinde azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. $p \in P(\alpha)$ ve $z \in \mathbb{D}$ için iken $q(z) = [p(z) - \alpha]/(1-\alpha)$ olarak tanımlanırsa $q(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} q(z) > 0$ olup $q \in P$ dir. Herglotz Temsil Teoremi gereği,

$$q(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z}\, d\mu(\theta)$$

olacak şekilde istenilen özelliğe sahip $\mu(\theta)$ fonksiyonu vardır. Böylece,

$$p(z) = \alpha + \frac{1-\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\, d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+(1-2\alpha)}{1-ze^{-i\theta}}\, d\mu(\theta) \qquad (2.27)$$

elde edilir. ■

3. YALINKAT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Bu bölümde, birim dairede yalınkat analitik fonksiyonların görüntü bölgelerinin yıldızıl veya konveks bölge olması durumunda oluşan alt sınıflar tanımlanıp, bu sınıflara ait fonksiyonların kat sayı, distorsiyon ve büyüme özellikleri incelenecektir. Ayrıca bazı yalınkatlık kriterleri verilecektir.

3.1 Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda, açık birim dairenin yalınkat analitik fonksiyonlar altında görüntü bölgesinin yıldızıl veya konveks bir bölge olması durumunda fonksiyonların analitik ifadeleri, integral temsilleri ve sağladıkları çeşitli bağıntılar üzerinde durulacaktır.

3.1.1 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer sabit bir $w_0 \in A$ noktasını, her bir $w \in A$ noktasına birleştiren doğru parçası A içinde kalıyorsa, yani her $t \in [0,1]$ için $(1-t)w_0 + tw \in A$ ise, A kümesine w_0 *noktasına göre yıldızıl küme* denir. Eğer bütün $w_1, w_2 \in A$ noktalarını birleştiren doğru parçası A içinde kalıyorsa, yani her $t \in [0,1]$ için $(1-t)w_1 + t\,w_2 \in A$ ise, A kümesine *konveks küme* denir. Başka bir deyişle, konveks küme, her bir noktasına göre yıldızıl olan kümedir.

3.1.2 Tanım. $r \in (0,1]$, $f \in A(D_r)$ ve $z_0 \in D_r$ olsun. Eğer f fonksiyonu D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ bölgesi $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl ise, f fonksiyonuna D_r üzerinde z_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Orijine göre yıldızıl olan fonksiyonlara kısaca *yıldızıl fonksiyon* adı verilir. Ayrıca, f fonksiyonu D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ bölgesi $\mathbb{C}$ de konveks ise, f fonksiyonuna D_r üzerinde *konveks fonksiyon* denir.

D_r dairesinde yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla, $S^*(D_r)$ ve $K(D_r)$ ile gösterilir. Özel olarak, $\mathbb{D}$ de $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahip yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla, S^* ve K ile gösterilir.

3.1.3 Tanım. γ, $\mathbb{C}$ de $z(t) = x(t) + iy(t),\ a \le t \le b$, parametrik ifadesi ile verilmiş düzgün bir eğri ve f fonksiyonu γ eğrisini bulunduran bir bölgede analitik olsun. $f(\gamma) = \Gamma$, $w_0 \notin \Gamma$ ve $w \in \Gamma$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\arg(w - w_0)$, t değişkeninin azalmayan tek değişkenli bir fonksiyonu, yani $a \le t \le b$ için

$$\frac{d}{dt}\arg(w - w_0) \ge 0$$

ise, Γ eğrisine w_0 *noktasına göre yıldızıl eğri* denir. Eğer Γ eğrisine teğet olan doğrunun τ argümenti t değişkeninin azalmayan bir fonksiyonu, yani $a \le t \le b$ için

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}\arg\left[f'(z)z'(t)\right] \ge 0$$

ise, Γ eğrisine *konveks eğri* denir.

Aşağıdaki iki teorem yıldızıl ve konveks fonksiyonların analitik ifadesini vermektedir.

3.1.4 Teorem. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde, f fonksiyonunun yıldızıl olması için gerek ve yeter şart, $f'(0) \ne 0$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z f'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır.

İspat. Önce f fonksiyonunun yıldızıl olduğunu kabul edelim. Bu durumda f yalınkat ve $f'(0) \ne 0$ dır. $r \in (0,1)$ için $f(D_r)$ bölgesinin yıldızıl olduğunu gösterelim. Bunun için sabit bir $r \in (0,1)$, $t \in (0,1)$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = f^{-1}(t\, f(z))$ fonksiyonunu tanımlayalım. f yıldızıl olduğundan, g fonksiyonu iyi tanımlı olup, $\mathbb{D}$ de analitiktir. Üstelik, $\mathbb{D}$ de $g(0) = 0$ ve $|g(z)| < 1$ olup, g fonksiyonu Schwarz lemmasının şartlarını sağlar. O halde, $\mathbb{D}$ de $|g(z)| \le |z|$ ve her $z \in D_r$ için $t\, f(z) = f(g(z)) \in f(D_r)$ olur. Böylece, $f(D_r)$ yıldızıl bir bölgedir. Dolayısıyla, $|z| = r$ eğrisinin f altındaki resmi orijine göre yıldızıl bir eğridir. Bu durumda $\arg f(re^{i\theta})$ fonksiyonu θ değişkeninin artan bir fonksiyonu olur. Buradan $\theta \in [0,2\pi]$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}\left[\log f(re^{i\theta})\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{d}{dz}\log f(re^{i\theta})\frac{\partial z}{\partial\theta}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{i\,z\,f'(z)}{f(z)}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$$

bulunur. $f'(0) \neq 0$ olduğundan, harmonik fonksiyonlar için minimum prensibine gereği $z \in D_r$ için

$$\mathrm{Re}\left[\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

ve r sayısı keyfi olduğundan, $\mathbb{D}$ üzerinde

$$\mathrm{Re}\left[\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

elde edilir.

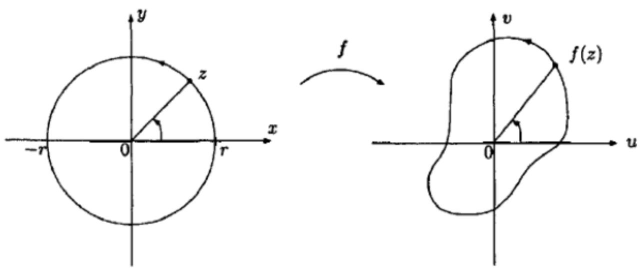
Tersine, $f'(0) \neq 0$ ve $|z| < 1$ için $\mathrm{Re}[z\,f'(z)/f(z)] > 0$ olduğunu kabul edelim. $z \in \mathbb{D}^*$ için $f(z) \neq 0$ dır. Aksi halde $z\,f(z)/f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de bir kutba sahip olabilir. Sabit bir $r \in (0,1)$ sayısı seçelim. İspatın birinci kısmında olduğu gibi basit bir hesaplamayla $\theta \in [0,2\pi]$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta}) > 0$$

olduğu görülür. Buradan $\arg f(re^{i\theta})$ fonksiyonu θ değişkeninin artan bir fonksiyonu olur. Ayrıca f fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalnız bir basit sıfıra sahip olduğundan, argüment prensibi gereği, $\theta \in [0,2\pi]$ için $f(re^{i\theta})$ fonksiyonunun argüment değişimi 2π dir. Gerçekten,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) d\theta = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right\} = 2\pi$$

dir. Böylece $|z| = r$ çemberinin görüntüsü basit bir yıldızıl eğri ve $f(D_r)$ de yıldızıl bir bölgedir (Şekil 3.1). Üstelik f fonksiyonu $|z| = r$ eğrisi üzerinde bire bir olduğundan, 1.17 Teoremi gereği, f fonksiyonu D_r dairesinde yalınkattır. r sayısı keyfi olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesi üzerinde yalınkattır. Sonuç olarak $f(\mathbb{D}) = \bigcup_{0<r<1} f(D_r)$ olduğundan $f(\mathbb{D})$ orijine göre yıldızıl bir bölgedir. ■



Şekil 3.1 $f(D_r)$ nin yıldızıllığı

3.1.5 Teorem. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart, $f'(0) \neq 0$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

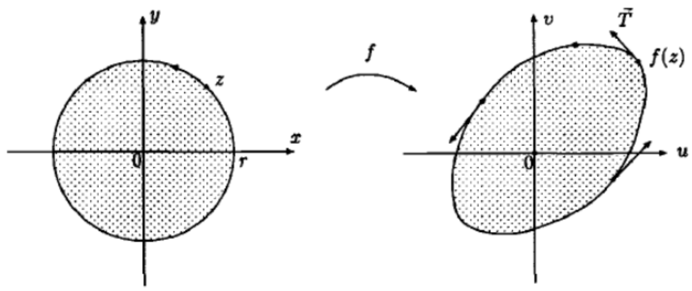
$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0$$

olmasıdır.

İspat. f konveks olsun. Bu takdirde f fonksiyonu yalınkat ve dolayısıyla $f'(0) \neq 0$ dır. Her $r \in (0,1)$ için $f(D_r)$ görüntü kümesinin konveks olduğunu göstermeliyiz. $r \in (0,1)$ keyfi sabit bir sayı, $z_1, z_2 \in D_r$ için $z_2 \neq 0, |z_1| \leq |z_2|$ ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonu

$$g(z) = f^{-1}\left[(1-t)f\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + t\,f(z)\right]$$

biçiminde tanımlansın. f konveks bir fonksiyon olduğundan, g fonksiyonu iyi tanımlı ve $\mathbb{D}$ de analitiktir. Üstelik, $g(0) = 0$ dır. Schwarz lemması gereği, $z \in \mathbb{D}$ için $|g(z)| \leq |z|$ dir. $z = z_2$ için $|g(z_2)| \leq |z_2| < r$ olup, $(1-t)f(z_1) + tf(z_2) \in f(D_r)$ dir. Böylece, $f(D_r)$ bölgesinin konveksdir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 $f(D_r)$ nin konveksliği

$|z| = r$ çemberinin görüntüsü Γ_r olsun. Γ_r pozitif yönlü bir Jordan eğrisi ve onun iç bölgesi konveks bir bölgedir. Üstelik, Γ_r eğrisi $w = f(re^{i\theta}),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$, parametrik ifadesiyle verilir. $f(D_r)$ konveks bir bölge olduğundan, Γ_r eğrisine teğet vektörün argumenti, $\theta \in [0,2\pi]$ değişkeninin azalmayan bir fonksiyonudur. Yani,

$$\psi(\theta) = \arg\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right] = \arg[i\,r\,e^{i\theta} f'(re^{i\theta})]$$

denirse, $\theta \in [0,2\pi]$ için $\psi'(\theta) \geq 0$ veya $z = re^{i\theta}$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Im}[\log(izf'(z))] \geq 0$$

dir. Önceki teoremde yapılan hesaplamaya benzer hesaplamayla, $z = re^{i\theta}$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Im}[\log(i\,z\,f'(z))] = \operatorname{Im}\left[i\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right] = \operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0$$

olduğu görülür. $z=0$ için eşitsizlik kesin olduğundan, harmonik fonksiyonlar için minumum prensibi gereği, $z \in D_r$ için

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

olur. r sayısı keyfi olduğundan $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

elde edilir.

Tersine, $f'(0) \neq 0$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

olsun. Bu durum $z \in \mathbb{D}^*$ için $f'(z) \neq 0$ olmasını gerektirir. $r \in (0,1)$ keyfi sabit bir sayı olmak üzere, yukarıdaki hesaplamadaki adımlar tersine atılacak olursa, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})] \geq 0$$

olur. Buradan $\Gamma_r = f(\partial D_r)$ eğrisinin eğiminin argümentinin θ değişkeninin azalmayan bir fonksiyonu olduğu görülür. Üstelik, $[0,2\pi]$ üzerinde $\psi(\theta)$ fonksiyonunun toplam değişimi 2π dir. Gerçekten;

$$\int_0^{2\pi} \psi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta}\arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})]d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left[1+\frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right]d\theta$$

$$= \operatorname{Re}\int_{|z|=r}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\frac{dz}{iz} = 2\pi$$

dir. Böylece, Γ_r eğrisinin basit konveks bir eğri ve $f(D_r)$ bölgesinin konveks bir bölge olduğu gösterilmiş olur. Buradan, $f(\mathbb{D}) = \bigcup_{0<r<1} f(D_r)$ olduğundan, $f(\mathbb{D})$ bölgesi de konveks bir bölge olur. Ayrıca, f fonksiyonu $|z| = r$ çemberi üzerinde bire bir olduğundan, 1.17 Teoremi gereği, f aynı zamanda her bir $r \in (0,1)$ için D_r üzerinde yalınkattır. O halde, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkat ve konvekstir. ■

Konvekslik için başka çift gerektirmeli sonuçlar Sheil-Small (1969) ve Suffridge (1970) tarafından verilmiştir.

3.1.6 Teorem. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart, $z,\ \zeta \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right] \geq 0 \tag{3.1}$$

olmasıdır.

İspat. $f \in K$ olsun. $z,\ \zeta \in \mathbb{D}$ için

$$g(z,\zeta) = \frac{2z\, f'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}$$

fonksiyonu $P = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1,\ |\zeta| < 1\} \subset \mathbb{C}^2$ birim polidiskinde analitiktir. Çünkü

$$\lim_{\zeta \to z} g(z,\zeta) = 1 + \frac{z\, f''(z)}{f'(z)}$$

dir. $|z| = r < 1$ eğrisinin f altındaki resmi konveks bir eğri olduğundan, çember içindeki her bir noktaya göre yıldızıldır. Buradan $|\zeta| < r$ olmak üzere, ζ sabiti için z, $|z| = r$ çemberi üzerinde değişirken $f(z)$ ve $f(\zeta)$ arasındaki vektörün argümenti $\arg z$ değişkeninin azalmayan bir fonksiyonudur. 3.1.4 Teoreminin ispatından yukarıdaki şartın $|\zeta| < |z| = r < 1$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right]>0 \tag{3.2}$$

olduğu görülür. Eğer $|\zeta|=|z|$, $\zeta\neq z$ ise (3.2) bağıntısı

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right]\geq 0$$

olmasını gerektirir. Bu durumda $\operatorname{Re}[(z+\zeta)/(z-\zeta)]=0$ olduğundan, $\operatorname{Re} g(z,\zeta)\geq 0$ sonucuna ulaşılır. $z=\zeta$, $g(z,\zeta)$ fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktası olduğundan, $|z|=|\zeta|=r<1$ için $\operatorname{Re} g(z,\zeta)\geq 0$ elde edilir. Harmonik fonksiyonlar için minumum prensibi gereği, (önce z, $|z|=r$, değişkeni sabit tutulup ζ değişkenini değiştirilir, sonra da ζ sabit tutup, z değiştirilir) $|z|<r$, $|\zeta|<r$ için $\operatorname{Re} g(z,\zeta)\geq 0$ olur. $r\to 1$ için istenilen (3.1) eşitsizliği elde edilir.

Tersine, (3.1) eşitsizliği sağlansın. (3.1) de $\zeta\to z$ iken limite geçilirse $z\in\mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\geq 0$$

elde edilir. Böylece 1.21 Teoremi ve 3.1.5 Teoremi gereği, f fonksiyonu konvekstir. ■

3.1.6 Teoreminin ispatından normalize edilmiş analitik fonksiyonlar için aşağıdaki konvekslik kriteri çıkarılabilir.

3.1.7 Sonuç. $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $f\in K$ olması için gerek ve yeter şart $|\zeta|<|z|<1$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z\,f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right]>0$$

olmasıdır (Suffridge 1970).

3.1.4 ve 3.1.5 Teoremlerinden S^* ve K sınıfları arasında oldukça kullanışlı olan aşağıdaki bağıntıyı elde etmek mümkündür. Bu bağıntı ilk olarak Alexander (1915-16) tarafından bulunmuştur.

3.1.8 Teorem. f, $\mathbb{D}$ de normalize edilmiş analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = zf'(z)$ olsun. $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart, $g \in S^*$ olmasıdır.

Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları S^* sınıfına ait olduğundan 2.3 Bölümünde verilen S sınıfı için büyüme ve distorsiyon sonuçları S^* sınıfı için de geçerlidir.

3.1.9 Teorem. $f \in S^*$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \tag{3.3}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{3.4}$$

dir. Eşitlik hali, Koebe fonksiyonu ve onun uygun bir rotasyonu için geçerlidir (Goodman 1983).

Aşağıdaki teorem konveks fonksiyonlar için büyüme ve distorsiyon sonucunu verir.

3.1.10 Teorem. $f \in K$ ve $|z| = r < 1$ olsun.

$$\frac{r}{(1+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)} \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2} \tag{3.6}$$

dir. Eşitlik, $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(z) = z/(1-e^{i\theta}z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (3.6) eşitsizliği, 3.1.8 Teorem ve (3.3) bağıntısının bir sonucudur. (3.5) eşitsizliğinin üst sınırı, (3.6) eşitsizliğinin üst sınırının integrali alınarak elde edilebilir. (3.5) eşitsizliğinin alt sınırını elde etmek için, $|z| = r < 1$ özelliğinde bir z sabiti alalım.

$f \in K$ olduğundan, 0 ile $f(z)$ noktalarını birleştiren Γ doğru parçası $f(\mathbb{D})$ içinde kalır. Γ yolunun f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü γ ise, γ yolu, $\mathbb{D}$ de 0 ile z noktalarını birleştiren basit bir eğridir. (3.6) bağıntısındaki alt sınır kullanılarak

$$|f(z)| = \int_\Gamma |d\omega| = \int_\gamma |f'(\zeta)||d\zeta| \geq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|\, d\rho \geq \frac{r}{1+r}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki sonuç konveks fonksiyonlar için örtme teoremi olarak bilinir ve konveks fonksiyonlar altında birim dairenin görüntü bölgesinin daima $1/2$ yarıçaplı daireyi örttüğünü gösterir.

3.1.11 Teorem. $f \in K$ ise, $D_{1/2} \subset f(\mathbb{D})$ dir.

İspat. $w \notin f(\mathbb{D})$ ise, $|w| \geq 1/2$ olduğunu göstermeliyiz. $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = [f(z) - w]^2$ biçiminde tanımlanırsa, g fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkat ve $g(0) = w^2$, $g'(0) = -2w$ dır. $z \in \mathbb{D}$ için $h(z) = (w^2 - g(z))/(2w)$ denirse, $h \in S$ olur. Böylece, 2.3.1 Teoremi gereği, $|w/2| \geq 1/4$ veya $|w| \geq 1/2$ olduğu görülür. ■

3.1.12 Tanım. $k > 1$ bir tamsayı olsun. Eğer D bölgesinin orijin etrafında $2\pi/k$ açılık dönmesi, D bölgesini yine kendi üzerine resmediyorsa, D bölgesine $k-$*katlı simetrik bölge* denir. Eğer her $z \in \mathbb{D}$ için,

$$e^{-2\pi i/k} f(e^{2\pi i/k} z) = f(z)$$

ise, f fonksiyonuna $\mathbb{D}$ dairesinde $k-$*katlı simetrik fonksiyon* adı verilir.

Gronwall (1916), $\mathbb{D}$ de $k-$katlı simetrik analitik bir fonksiyonun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{nk+1} z^{nk+1} \tag{3.7}$$

biçiminde bir seri açılımına sahip olduğunu, tersine, (3.7) biçiminde bir açılıma sahip f fonksiyonunun, serinin yakınsaklık dairesinde k – katlı simetrik bir fonksiyon olduğunu gösterdi.

Tanıma dikkat edilirse, $k-$katlı simetrik fonksiyonların yalınkat olması gerekli değildir. Çalışmamızı daha çok yalınkat $k-$katlı simetrik fonksiyonlar üzerinde yoğunlaştıracağımızdan, $z\in\mathbb{D}$ için

$$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty} b_{nk+1}\, z^{nk+1}$$

biçiminde bir açılıma sahip yalınkat $k-$katlı simetrik fonksiyonların $S^{(k)}$ sınıfını tanımlamak zorunlu hale gelmiştir. Özel olarak, $k=2$ için $S^{(2)}$ sınıfına ait fonksiyonlara *tek yalınkat fonksiyonlar* denir.

Büyüme ve örtme sonuçları ve katsayı sınırları k – katlı simetrik fonksiyonlar için daha da inceltilebilir (Graham ve Varolin 1996).

Aşağıdaki sonuçlar $S^{(k)}$ sınıfına ait fonksiyonlar için bir katsayı tahmini, örtme ve büyüme sınırlarını vermektedir.

3.1.13 Teorem. $g\in S^{(k)}$ ise,

$$|b_{k+1}|\leq\frac{2}{k}$$

dır. Eşitlik, $g(z)=[k(z^k)]^{1/k}=z/(1-z^k)^{2/k}$ $k-$katlı simetrik Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir.

İspat. $g\in S^{(k)}$ olsun. 2.1.3 (v) Teoremi gereği $g(z)=[f(z^k)]^{1/k}$ olacak şekilde bir $f\in S$ fonksiyonu vardır. (2.1) açılımına sahip $f\in S$ fonksiyonu için $|a_2|\leq 2$ ve $g(z)=z+(1/k)\,a_2\, z^{k+1}+\cdots$ olduğundan, $|b_{k+1}|\leq 2/k$ elde edilir. ■

3.1.14 Teorem. (i) $f\in S^{(k)}$ olsun. Bu takdirde, $\rho_k=4^{-1/k}$ olmak üzere, $f(\mathbb{D})\supseteq D_{\rho_k}$ dır.

(ii) $r_k = \int_0^1 (1+t^k)^{-2/k}\, dt$ olmak üzere, $f \in K$ için, $f(\mathbb{D}) \supseteq D_{r_k}$ dır.

Her iki durumda da eşitsizlik kesindir.

İspat. (i) 2.1.3 Teoreminden $f \in S$ için $g(z) = \sqrt[k]{f(z^k)} \in S$ dir. 3.1.9 Teoremi gereği, $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{|z|}{(1+|z|^k)^{2/k}} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|^k)^{2/k}} \tag{3.8}$$

elde edilir. $0 < r < 1$ için $f(D_r)$ bölgesinin sınırı $f(\partial D_r)$ olduğundan, (3.8) bağıntısı $f(\partial D_r)$ kümesinin orijine olan uzaklığının en az $r/(1+r^k)^{2/k}$ olduğunu gösterir. $r \to 1$ için limit alınırsa, istenilen kapsama gösterilmiş olur.

(ii) $h(z) = z f'(z)$ denirse, (3.8) bağıntısı h fonksiyonuna uygulanıp, 3.1.10 Teoreminin ispatına benzer olarak, $|z| = r < 1$ için

$$\int_0^r \frac{dt}{(1+t^k)^{2/k}} \leq |f(z)| \leq \int_0^r \frac{dt}{(1-t^k)^{2/k}}$$

bulunur. $r \to 1$ çin limite geçilirse, istenilen sonuç gösterilmiş olur.

Birinci kapsama için eşitlik $g(z) = z/(1-z^k)^{2/k}$ biçiminde $k-$katlı simetrik Koebe fonksiyonu için geçerlidir. İkinci durumda ise eşitlik,

$$g_k(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{1-z}, & k = 1 \\ \dfrac{1}{2}\log\left[\dfrac{1-z}{1+z}\right], & k = 2 \\ \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{(1-t^k)^{2/k}}, & k \geq 3 \end{cases} \tag{3.9}$$

konveks fonksiyonunu için geçerlidir. $k \geq 3$ için g_k fonksiyonu birim daireyi, düzgün bir *k*-gen üzerine konform olarak resmeder (Nehari s.196). ■

Graham ve Varolin (1996) konveks fonksiyonlar için $a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0$ şartı altında $k-$katlı simetrikten daha zayıf olan aşağıdaki distorsiyon sonucunu elde etmişlerdir.

3.1.15 Teorem. $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de konveks olsun. Bu durumda her $z \in \mathbb{D}$ için,

$$\frac{1}{(1+|z|^k)^{2/k}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|^k)^{2/k}}$$

dır. Eşitlik (3.9) bağıntısı ile verilen g_k fonksiyonu için geçerlidir.

3.1.8 Teoremi kullanılarak benzer bir eşitsizlik yıldızıl fonksiyonlar için de verilebilir.

3.1.16 Teorem. $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yıldızıl ise,

$$\frac{|z|}{(1+|z|^k)^{2/k}} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|^k)^{2/k}}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik, (3.9) ile verilen g_k fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $f_k(z) = zg_k'(z)$ fonksiyonları için geçerlidir.

3.1.17 Sonuç. $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de konveks olsun. Bu takdirde, $r_k = \int_0^1 (1+t^k)^{-2/k}\, dt$ olmak üzere $f(\mathbb{D}) \supset D_{r_k}$ dır.

Şimdi, yeniden S^* ve K sınıfına dönelim. Bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı sınırlarını verelim.

3.1.18 Teorem. $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yıldızıl ise, her $n = 2,3,...$ için $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik, f fonksiyonunun Koebe fonksiyonu ve onun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir (Nevanlinna 1920).

İspat. $f \in S^*$ olsun. $z \in \mathbb{D}$ için $p(z) = z f'(z)/f(z) \in P$ dir. 2.4.15 Teoremi gereği, $p(z) = 1 + p_1 z + \cdots$ denirse, $|p_n| \leq 2$ dir. $z f'(z)$ ve $f(z)p(z)$ fonksiyonların seri açılımındaki katsayıları eşitlendiğinde $n = 2,3,...$ için,

$$(n-1)a_n = a_{n-1}p_1 + a_{n-2}p_2 + \cdots + p_{n-1}$$

bulunur. Buradan tümevarımla,

$$(n-1)\,|\,a_n\,| \le 2(n-1+n-2+\cdots+1) = n\,(n-1)$$

elde edilir. Bu ise, $|\,a_n\,| \le n$ olduğunu gösterir. ■

Aşağıdaki teorem konveks fonksiyonların katsayı tahminini vermektedir. İspatı 3.1.8 Teoreminden açıktır.

3.1.19 Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in K$ ise, $n = 2,3,...$ için $|\,a_n\,| \le 1$ dir. Eşitlik, $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = z/(1-e^{i\theta}z)$ fonksiyonu için geçerlidir (Löwner 1923).

Konveks fonksiyonlar için kullanışlı bir katsayı tahmini Hummel (1957) ve Trimble (1975) tarafından elde edilen aşağıdaki sonuçtur.

3.1.20 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in K$ ise,

$$|\,a_3 - a_2^2\,| \le \frac{1-|\,a_2\,|^2}{3} \tag{3.10}$$

dır.

Aşağıdaki sonuç ilk olarak Nehari (1976) tarafından elde edilmiştir.

3.1.21 Sonuç. $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in K$ ise,

$$|\,a_3 - a_2^2\,| \le \frac{1}{3} \tag{3.11}$$

dır. Eşitlik, $|\,\lambda\,| = 1$ olması durumunda,

$$f(z) = \frac{1}{2\lambda}\log\left[\frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}\right] \tag{3.12}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (3.10) bağıntısından (3.11) eşitsizliği açıktır. Ayrıca, (3.10) bağıntısında $a_2 = 0$ ve $|a_3| = 1/3$ olarak alınırsa, (3.11) bağıntısının eşitlik hali elde edilir. Gerçekten, $z \in \mathbb{D}$ için f fonksiyonunun Taylor açılımı $f(z) = z + a_3 z^3 + \cdots$ biçiminde olup, $z \in \mathbb{D}$ için

$$1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} = 1 + 6a_3 z^2 + \cdots$$

bulunur. Bu fonksiyon P sınıfına aittir. $6|a_3| = 2$ ve burada birinci dereceli terim bulunmadığından, $|\lambda| = 1$ olmak üzere

$$1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} = \frac{1 + \lambda^2 z^2}{1 - \lambda^2 z^2}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

2.3.11 Teoreminde olduğu gibi, belli katsayı bağıntısını sağlayan fonksiyon sınıfları yıldızıl ve konveks olabilir.

3.1.22 Teorem. $f \in A(\mathbb{D})$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Eğer $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$ ise, $f \in S^*$ ve $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \le 1$ ise, $f \in K$ dır.

İspat. f fonksiyonunun yalınkatlığı 2.3.11 Teoreminde gösterildi. Şimdi f fonksiyonunun yıldız olduğunu gösterelim. $z \in \mathbb{D}$ için

$$|zf'(z) - f(z)| \le \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n||z|^n \le |z| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^n \le |f(z)|$$

yazılabilir. Eşitsizliğinin her iki yanını $|f(z)|$ ile bölünürse, $|[z f'(z)/f(z)] - 1| \le 1$ ve buradan $\operatorname{Re}\{z f'(z)/f(z)\} > 0$ olduğu görülür. Bu ise, f fonksiyonunun yıldızıl olması demektir. ■

Aşağıdaki teorem, yıldızıl fonksiyonlar altında $\mathbb{D}$ dairesinin görüntü bölgesinin alanı ile fonksiyonun katsayıları arasındaki bağıntıyı verir.

3.1.23 Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yıldızıl ve $f(\mathbb{D})$ bölgesinin alanı A olsun. Bu takdirde, $n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2} \tag{3.13}$$

dir.

İspat. $f \in S^*$ olduğundan, $z f'(z)/f(z) = \dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}$ olacak biçimde $\mathbb{D}$ de $|w(z)|<1$ özelliğinde bir $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n$ fonksiyonu vardır. Bu eşitlikten

$$\{z f'(z) + f(z)\}w(z) = z f'(z) - f(z)$$

veya

$$\left\{2z + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)a_n z^n\right\}\sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^n \tag{3.14}$$

yazılabilir. (3.14) eşitliğindeki katsayılar karşılaştırılırsa, $n \geq 2$ için

$$2w_{n-1} + 3a_2 w_{n-2} + \cdots + na_{n-1}w_1 = (n-1)a_n$$

bulunur. Böylece (3.14) eşitliğinin sağ tarafındaki a_n katsayısı, sadece $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ katsayılarına bağlı gelir. Buradan $n \geq 2$ için

$$\left\{2z + \sum_{k=2}^{n-1}(k+1)a_k z^k\right\}w(z) = \sum_{k=2}^{n}(k-1)a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k a^k \tag{3.15}$$

olur. (3.15) eşitliğinin her iki yanın modülünün karesi alınıp, $|z| = r < 1$ çevresi üzerinden integralini hesaplar ve $|w(z)| < 1$ eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2 |a_k|^2 r^{2k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k|^2 r^{2k} < 4 + \sum_{k=2}^{n-1}(k+1)^2 |a_k|^2$$

elde edilir. $r \to 1$ için,

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2 |a_k|^2 \leq 4 + \sum_{k=2}^{n-1}(k+1)^2 |a_k|^2$$

veya $n \geq 2$ için,

$$(n-1)^2 |a_n|^2 \leq 4\left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} k |a_k|^2\right) \tag{3.16}$$

bulunur. Öte yandan 2.2.1 Teoremi gereği $f(\mathbb{D})$ görüntü bölgesinin alanı

$$A = \pi\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2\right)$$

bulunur. (3.15) ve (3.16) bağıntılarından $n \geq 2$ için $(n-1)^2 |a_n|^2 \leq 4A/\pi$ veya

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2}$$

elde edilir. ■

3.1.24 Tanım. F, S sınıfının boş olmayan bir alt sınıfı olsun. F sınıfındaki her bir fonksiyon $D_{r^*(F)}$ dairesinde yıldızıl olacak biçimdeki en büyük $r^*(F)$ pozitif sayısına, F sınıfının *yıldızıllık yarıçapı* denir. Benzer şekilde, F sınıfındaki her bir fonksiyon $D_{r_K(F)}$ dairesinde konveks olacak şekilde en büyük $r_K(F)$ pozitif sayısına, F sınıfının *konvekslik yarıçapı* adı verilir.

Aşağıdaki teorem, S sınıfına ait fonksiyonların konvekslik yarıçapını verir.

3.1.25 Teorem. $r_K(S) = 2 - \sqrt{3}$ dır.

İspat. $f \in S$ olduğundan, (2.10) eşitsizliği sağlanır. O halde $|z| = r < 1$ için,

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq \frac{1 - 4r + r^2}{1 - r^2}$$

bulunur. $0 \leq r \leq 2 - \sqrt{3}$ için $1 - 4r + r^2 \geq 0$ olduğundan, her bir $r \in [0, \leq 2 - \sqrt{3}]$ için $f(D_r)$ konveks bölgedir. O halde $r_K(S) \geq 2 - \sqrt{3}$ dir. $2 - \sqrt{3} < r < 1$ için $f(z) = z/(1 - z)^2$, $z \in \mathbb{D}$, fonksiyonu $|z| = r$ çemberini konveks bir bölge üzerine resmetmez. Gerçekten,

$$1 + \frac{z\,f''(z)}{f'(z)} = \frac{z^2 + 4z + 1}{1 - z^2}$$

ifadesi $-1 < z < -(2 - \sqrt{3})$ özelliğindeki z reel sayıları için negatif olduğundan, $r_K(S) \leq 2 - \sqrt{3}$ olduğu görülür. Böylece, $r_K(S) = 2 - \sqrt{3}$ elde edilir. ■

H. Grunsky (1933), $r^*(S)$ yıldızıllık yarıçapını $\log\dfrac{1+r}{1-r} = \dfrac{\pi}{2}$ denkleminin bir kökü olarak bulmuştur.

3.1.26 Teorem. $r^*(S) = \tanh(\pi/4)$ dır.

3.2 Yalınkatlık Kriterleri

Bu kısımda, daha önce verilen yalınkatlık kriterlerine ek olarak Schwarzian türevi yardımıyla elde edilen yalınkatlık kriterleri verilecektir. İlk olarak Nehari (1949) tarafından verilen ve Kraus (1932) tarafından geliştirilen bu kavramı tanımlayalım.

3.2.1 Tanım. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve yerel yalınkat olsun. f fonksiyonunun *Schwarzian türevi*, $z \in \mathbb{D}$ için

$$\{f; z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

biçiminde tanımlanır.

Schwarzian türevinin lineer kesirsel dönüşüm altında değişmez kalması önemli bir özelliktir. Gerçekten, f ve g yerel yalınkat fonksiyonlar olmak üzere, $h = f \circ g$ bileşke fonksiyonu için,

$$\{h;z\} = \{f;g(z)\}(g'(z))^2 + \{g;z\}$$

olur. T lineer kesirsel dönüşümü için $\{T;z\} = 0$ olduğundan, $\{T \circ g;z\} = \{g;z\}$ ve $\{f \circ T;z\} = \{f;T(z)\}(T'(z))^2$ elde edilir.

Bundan başka, konveks fonksiyonların Schwarzian türevinin bir eşitsizliği dikkate değerdir.

3.2.2 Teorem. $f \in K$ ise, $z \in \mathbb{D}$ için

$$|\{f;z\}| \le \frac{2}{(1-|z|^2)^2} \tag{3.17}$$

dır. Eşitlik, $|\eta| = 1$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{1}{2\lambda}\log\left[\frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}\right] \tag{3.18}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $z \neq 0$ için (3.17) eşitsizliğini göstermek yeterlidir. $\zeta \in \mathbb{D}$ için

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\dfrac{\zeta + z}{1+\bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + \cdots \tag{3.19}$$

biçiminde tanımlanırsa, g fonksiyonu $\mathbb{D}$ de konveks ve 3.1.21 Teoremi gereği $|b_3 - b_2^2| \le 1/3$ dür. Basit hesaplamalar sonucunda

$$|(1-|z|^2)^2\{f;z\}| = |\{g;0\}| = 6|b_3 - b_2^2| \le 2$$

bulunur. Buradan (3.17) eşitsizliği elde edilir. ■

Schwarzian türevinin yalınkatlık kriterleri, yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

3.2.3 Teorem. (i) $z \in \mathbb{D}$ için $f \in S$ ise

$$|\{f;z\}| \leq \frac{6}{(1-|z|^2)^2}$$

dir.

(ii) $f:\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olmak üzere, $z \in \mathbb{D}$ için

$$|\{f;z\}| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}$$

ise, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır.

İspat. (i) sabit bir $z \in \mathbb{D}$ ve keyfi $t \in \mathbb{D}$ için, 2.1.3 Teorem (iv) gereği,

$$g(t) = \frac{f\left(\dfrac{t+z}{1+\bar{z}t}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots$$

fonksiyonu S sınıfına aittir. Buradan,

$$b_2 = \frac{1}{2}\left[(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right]$$

ve

$$b_3 = \frac{1}{6}\left[(1-|z|^2)^2\frac{f'''(z)}{f'(z)} - 6\bar{z}(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} + 6\bar{z}^2\right]$$

olarak bulunur. $\zeta \in \mathbb{D}^*$ için

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{g(1/\zeta)} = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \cdots$$

şeklinde tanımlanan φ fonksiyonunu göz önüne alalım. $g \in S$ olduğundan, $\varphi \in \Sigma$ fonksiyonu için $\alpha_0 = -b_2$ ve

$$\alpha_1 = b_2^2 - b_3 = -\frac{1}{6}(1-|z|^2)^2\{f;z\}$$

olduğu görülür. 2.2.5 Sonucundan $|\alpha_1| \leq 1$ ve böylece, $z \in \mathbb{D}$ için

$$|\{f;z\}| \leq \frac{6}{(1-|z|^2)^2}$$

elde edilir. Eşitsizlik kesin olup, eşitlik Koebe fomksiyonu için sağlanır.

Teoremin ikinci kısmının ispatı için J. Becker (1972)'e bakılabilir. ■

3.2.4 Teorem. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$|\{f;z\}| \leq \frac{\pi^2}{2}$$

ise, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır (Nehari 1949).

Burada $\pi^2/2$ sınırı ideal sınırdır. Çünkü, $\lambda > \pi$ için $f(z) = e^{\lambda z}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkat değildir. Bu durumda $|\{f;z\}| = \lambda^2/2$ dir.

3.2.5 Teorem. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $f'(0) \neq 0$ olsun. Eğer $z \in \mathbb{D}$ için

$$(1-|z|^2)\left|\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1$$

ise, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır (Becker 1972).

3.2.6 Teorem. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve yerel yalınkat olsun. $z \in \mathbb{D}$ için

$$|\{f;z\}| \leq \frac{4}{1-|z|^2}$$

ise, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkattır (Pokornyi 1951), (Nehari 1979).

3.2.7 Teorem. $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve yerel yalınkat olsun. $z\in\mathbb{D}$ için

$$\left|\{f;z\}+\frac{4\bar{z}^2}{(1-|z|^2)^2}\right|\leq\frac{4}{(1-|z|^2)^2}$$

ise, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkattır (Chuaqui 1995).

4. YILDIZIL VE KONVEKS FONKSİYON KAVRAMINDAN HAREKETLE TANIMLANAN YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, yıldızıl ve konveks fonksiyon kavramlarından hareketle tanımlanan yalınkat α mertebeli yıldızıl ve konveks fonksiyonlar, alfa konveks fonksiyonlar, alfa spiral fonksiyonlar, gama yıldızıl fonksiyonlar, simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyonlar, kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonlar ve konvekse yakın fonksiyonların sınıfları tanımlanacak. Bu sınıflara ait fonksiyonların kat sayı, distorsiyon ve büyüme özellikleri verilecektir.

4.1 α Mertebeli Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda ilk olarak Robertson (1936) tarafından verilen, birim dairede normalize edilmiş yıldızıl ve konveks fonksiyonların bazı özel alt sınıfları tanımlanarak, bu sınıflara ait temel özellikler verilecektir.

4.1.1 Tanım. $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $0\le\alpha<1$, $f(0)=0$ ve $f'(0)\neq 0$ olmak üzere, $z\in\mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z f'(z)}{f(z)}\right]>\alpha$$

ise, f fonksiyonuna α *mertebeli yıldızıl fonksiyon*,

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right]>\alpha$$

ise, f fonksiyonuna α *mertebeli konveks fonksiyon* denir.

$z\in\mathbb{D}$ için $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ biçiminde normalize edilmiş α mertebeli yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfı sırasıyla $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ ile gösterilir. 3.1.8 Teoreminde verilen S^* ile K arasındaki ilişki, $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ sınıfları arasında da mevcuttur. İspatı benzerdir.

4.1.2 Teorem. f, $\mathbb{D}$ de normalize edilmiş analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = z f'(z)$ olsun. Bu takdirde, $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*(\alpha)$ olmasıdır.

K ile $S^*(\alpha)$ sınıfları arasındaki önemli sonuçlardan biri aşağıdaki teoremde verilmiştir. İspatı Suffridge (1970)'ye aittir.

4.1.3 Teorem. $f \in K$ ise $f \in S^*(1/2)$ dir. Sonuç kesin olup $1/2$ sabiti büyütülemez.

İspat. $f \in K$ olduğundan, 3.1.6 Teoremi gereği $z,\ \zeta \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left[\frac{2z f'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right] \geq 0$$

dir. Bu eşitsizlikte $\zeta = 0$ konumu yapılırsa, $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left[\frac{z f'(z)}{f(z)}\right] \geq \frac{1}{2}$$

bulunur. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibini kullanılarak istenilen sonuç elde edilir. Eşitlik $f(z) = z/(1-z)$ fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir. ■

4.1.4 Sonuç. $f \in K$ ise $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}[f(z)/z] > 1/2$ dir. Sonuç kesin olup, sabit büyütülemez.

İspat. $f \in K$ olduğundan (3.1) bağıntısı sağlanır. $z, \zeta \in \mathbb{D}$ için

$$F(z,\zeta) = \frac{z f'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{\zeta}{z-\zeta}$$

diyelim. (3.1) bağıntısından $z, \zeta \in \mathbb{D}$ için $F(z,\zeta) \geq 1/2$ eşitsizliği elde edilir. $\zeta \in \mathbb{D}$ sabit tutulup $F(z,\zeta)$, z değişkenine göre kuvvet serisine açılırsa,

$$F(z,\zeta) = 1 + \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{f(\zeta)}\right) z + \cdots$$

elde edilir. Bu iki bağıntıyı eşitlersek $\varphi(z) = 2F(z,\zeta) - 1 \in P$ olur. 2.2.6 Teoremi gereği

$$\left| \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{f(\zeta)} \right| \leq 1$$

eşitsizliği elde edilir. Her iki taraf ζ ile çarpılırsa,

$$\left| 1 - \frac{\zeta}{f(\zeta)} \right| \leq |\zeta| < 1$$

bulunur. Buradan $\mathrm{Re}[f(z)/z] > 1/2$ elde edilir. Eşitlik $f(z) = z/(1-z)$ fonksiyonu için sağlanır. ■

4.1.3 Teoreminin Jack (1971)'e ait olan bir genellemesi aşağıda verilmiştir.

4.1.5 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{2\alpha - 1 + \sqrt{(2\alpha-1)^2 + 8}}{4}$$

olmak üzere $f \in K(\alpha)$ ise $f \in S^*(\beta)$ dır.

Aşağıdaki teorem S^* ile $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ sınıfları arasındaki ilişkiyi verir. İspatı sınıfların tanımından açıktır.

4.1.6 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ olsun.

(i) $z \in \mathbb{D}$ ve $g(z) = z[f(z)/z]^{1/(1-\alpha)}$ olmak üzere, $f \in S^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*$ olmasıdır. Burada kuvvet fonksiyonunun dalı $[f(z)/z]^{1/(1-\alpha)} \big|_{z=0} = 1$ olacak şekilde seçilmiştir.

(ii) $z \in \mathbb{D}$ ve $h(z) = z[f'(z)]^{1/(1-\alpha)}$ olmak üzere, $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $h \in S^*$ olmasıdır. Kuvvet fonksiyonunun dalı $[f'(z)]^{1/(1-\alpha)} \big|_{z=0} = 1$ olacak şekilde seçilmiştir.

4.1.6 Teoremi kullanılarak $\alpha \in [0,1)$ için α mertebeli konveks fonksiyonlar için Robertson (1936)'a ait olan büyüme ve distorsiyon özellikleri verilebilir.

4.1.7 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $|z| = r < 1$ olmak üzere $f \in K(\alpha)$ ise,

$$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}} \tag{4.1}$$

dır. Eğer $\alpha \neq 1/2$ ise,

$$\frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1} \leq |f(z)| \leq \frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \tag{4.2}$$

ve $\alpha = 1/2$ ise,

$$\log(1+r) \leq |f(z)| \leq -\log(1-r) \tag{4.3}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikler kesin olup, eşitlik hali

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} & \alpha \neq 1/2 \\ \\ -\log(1-z) & \alpha = 1/2 \end{cases} \tag{4.4}$$

fonksiyonu için sağlanır.

İspat. $f \in K(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \alpha\right] = 1 + b_1 z + \cdots$$

fonksiyonu P sınıfına aittir. Böylece, (3.6) bağıntısından $|z| = r < 1$ için

$$\left|\operatorname{Re}\varphi(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

yazılabilir. Buradan, mutlak değer özelliği gereği,

$$\frac{-2(1-\alpha)}{1+r} \le \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \le \frac{2(1-\alpha)}{1-r}$$

bulunur. Her iki tarafın 0 dan r ye integrali alınırsa,

$$\log(1+r)^{-2(1-\alpha)} \le \log |f'(z)| \le \log(1-r)^{-2(1-\alpha)}$$

elde edilir. Bu ise (4.1) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. 2.3.6 Teoremi gereği, $\alpha \ne 1/2$ için (4.1) bağıntısından (4.2) eşitsizliği elde edilir. Eğer $\alpha = 1/2$ ise, (4.1) bağıntısı ve 2.3.6 Teoremi birlikte düşünüldüğünde, (4.4) eşitsizliği elde edilmiş olur. ■

4.1.6 Teoremi ve (4.1) bağıntısından $S^*(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki büyüme teoremi elde edilebilir.

4.1.8 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $|z| = r < 1$ olmak üzere, $f \in S^*(\alpha)$ ise $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

dır. Sınırlar kesin olup, eşitlik $k^*(z,\alpha) = z(1-z)^{-2(1-\alpha)}$, fonksiyonu için geçerlidir.

α mertebeli konveks fonksiyonlar için gerek ve yeter şartı ifade eden aşağıdaki teorem, Brown (1989) tarafından elde edilmiştir. Bu sonuç, $|\zeta| < 1$ için $\mathbb{D}$ de konveks bir fonksiyonun her $|z-\zeta| < r < 1-|\zeta|$ dairesini konveks bir bölge üzerine dönüştürdüğünü gösterir.

4.1.9 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart, $|\zeta| < 1$ ve $|z-\zeta| < 1-|\zeta|$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

olmasıdır.

İspat. İlk olarak, $|\zeta|<1$ ve $|z-\zeta|<1-|\zeta|$ için $\operatorname{Re}\left\{1+\frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$ olduğunu kabul edelim. Bu eşitsizlikte $\zeta=0$ konumu yapılırsa, $f\in K(\alpha)$ olduğu görülür.

Tersine, $f\in K(\alpha)$ ise, $|\zeta|=r<1$ özelliğinde belli bir ζ noktası için

$$A=1+\left(\frac{z-\zeta}{1-\alpha}\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

olsun. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibi dikkate alınarak, $|z-\zeta|=\rho<1-r$ için $\operatorname{Re}A>0$ olduğunu göstermek yetecektir. Bunun için $|z-\zeta|=\rho$ özelliğinde bir $z\in\mathbb{D}$ noktası seçelim. $f\in K(\alpha)$ olduğundan, $p\in P$ için

$$A=\frac{(z-\zeta)(p(z)-1)}{z}+1 \tag{4.5}$$

olarak yazılabilir. P sınıfının ekstrem noktaları, $\theta\in\mathbb{R}$ için, $p_\theta(z)=(1+e^{i\theta}z)/(1-e^{i\theta}z)$ fonksiyonları olduğu biliniyor. (4.5) eşitliğinin sağ tarafı P üzerinde bir afin dönüşüm olduğundan, $\min\limits_{p\in P}\operatorname{Re}A$ değerini P sınıfının bir ekstrem noktasında alır (Hallenbeck ve MacGregor 1984). $\zeta=r\,e^{i\varphi}$ ve $z=\zeta+\rho\,e^{i\phi}$ için, gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\operatorname{Re}A\geq\min_{0\leq\theta<2\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{(z-\zeta)(p_\theta(z)-1)}{z}+1\right]$$

$$=\min_{0\leq\theta<2\pi}|1-e^{i\theta}z|^{-2}\,[-\rho^2+1-2r\cos(\theta+\varphi)+r^2]$$

$$\geq\min_{0\leq\theta<2\pi}|1-e^{i\theta}z|^{-2}\,[(1-r)^2-\rho^2]>0$$

bulunur. Bu ise, ispatı tamamlar. ■

Son olarak, $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için Robertson (1936)'a ait katsayı tahminlerini verelim.

4.1.10 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun.

(i) $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^*(\alpha)$ ise, $n = 2,3,...$ için,

$$|a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=2}^{n} (k - 2\alpha) \tag{4.6}$$

dir. Eşitlik, $k^*(z,\alpha) = z(1-z)^{-2(1-\alpha)}$ fonksiyonu için geçerlidir.

(ii) $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in K(\alpha)$ ise, $n = 2,3,...$ için,

$$|b_n| \leq \frac{1}{n!} \prod_{k=2}^{n} (k - 2\alpha) \tag{4.7}$$

dir. Eşitlik (4.4) bağıntısında verilen fonksiyonlar için geçerlidir.

İspat. p fonksiyonu

$$p(z) = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} - \alpha \right\} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + ... \tag{4.8}$$

biçiminde tanımlanırsa, $p \in P$ olur. (4.8) bağıntısından elde edilen $((1-\alpha)p(z) + \alpha) f(z) = z f'(z)$ eşitliğinde seri açılımı yapılır ve $n.$ dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse, $n = 2,3,...$ için

$$n a_n = a_n + (1-\alpha)(c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_{n-1}) \tag{4.9}$$

bulunur. $|c_n| \leq 2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(n-1)|a_n| \leq 2(1-\alpha)(1 + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|)$$

olur. Bur eşitsizlikten, özel olarak,

$$|a_2| \leq 2-2\alpha,$$
$$|a_3| \leq \frac{1}{2}(2-2\alpha)(1+|a_2|) \leq \frac{1}{2}(2-2\alpha)(3-2\alpha),$$
$$|a_4| \leq \frac{1}{3!}(2-2\alpha)(3-2\alpha)(4-2\alpha)$$

bulunur. Böylece, tümevarımla (4.6) eşitsizliğine ulaşılır. (4.6) eşitsizliğinde özel olarak $\alpha = 1/2$ alınırsa, $|a_n| \leq 1$ ve $\alpha = 0$ alınırsa, $|a_n| \leq n$ olduğu görülür.

(4.7) eşitsizliğini göstermek için, $zg'(z) \in S^*(\alpha)$ ve (4.6) bağıntısını dikkate alınmak yetecektir. ■

Aşağıdaki teorem, $S^*(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonların integral temsilini vermektedir.

4.1.11 Teorem. $f \in S^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart, $z \in \mathbb{D}$ için,

$$f(z) = z\exp\left[-\frac{(1-\alpha)}{\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-ze^{-i\theta})d\mu(\theta)\right] \tag{4.10}$$

olacak biçimde, $\mu(2\pi)-\mu(0)=2\pi$ özelliğinde, azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. $f \in S^*(\alpha)$ ise, $\mathrm{Re}[zf'(z)/f(z)] > \alpha$ dır.

$$p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha\right\} \tag{4.11}$$

denirse, $p \in P$ olur. 2.4.8 Sonucu (Herlogz temsil teoremi) gereği, $\mu(2\pi)-\mu(0)=2\pi$ bağıntısını sağlayan azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonu için,

$$p(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z}d\mu(\theta)$$

yazılabilir. (4.11) eşitliğinden,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+(1-2\alpha)ze^{-i\theta}}{z(1-ze^{-i\theta})}d\mu(\theta)$$

bulunur. Bu ifadenin z_0 noktasından z noktasına integrali alınıp, $z_0 \to 0$ için limite geçilirse,

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\log z - (2-2\alpha)\log(1-e^{-i\theta}z)]\,d\mu(\theta)$$

olur. Buradan (4.10) bağıntısı elde edilir. ■

$f \in S^*(\alpha)$ için $g(z) = \int_0^z [f(\zeta)/\zeta]\,d\zeta \in K(\alpha)$ olduğundan 4.1.11 Teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

4.1.12 Sonuç. $0 \le \alpha < 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \int_0^z \exp\left[-\frac{(1-\alpha)}{\pi}\int_0^{2\pi} \log(1-ze^{-i\theta})\,d\mu(\theta)\right] \tag{4.12}$$

olacak biçimde $\mu(2\pi) - \mu(0) = 2\pi$ özelliğinde azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

4.1.13 Teorem. $z \in \mathbb{D}$, $0 \le \alpha < 1$ ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)\,|a_n| \le 1-\alpha \tag{4.13}$$

ise, $f \in S^*(\alpha)$ dır.

İspat. (4.13) bağıntısından

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha}\,|a_n| \le 1$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\left|zf'(z) - f(z)\right| - (1-\alpha)\left|f(z)\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^n\right| - (1-\alpha)\left|z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,|a_n||z|^n-(1-\alpha)\left(|z|-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n\right)$$

$$\leq |z|\left(\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\,|a_n|-(1-\alpha)\right)\leq 0$$

olur. Buradan

$$\left|1-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leq 1-\alpha \text{ veya } \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha$$

elde edilir. ■

Benzer bir sonuç $K(\alpha)$ sınıfı için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

4.1.14 Teorem. $z\in\mathbb{D}$, $0<\alpha<1$ ve $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)\,|a_n|\leq 1-\alpha \tag{4.14}$$

ise, $f\in K(\alpha)$ dir.

İspat. (4.14) bağıntısından,

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}\,|a_n|\leq 1$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$|z^2f''+zf'|-(1-\alpha)\,|zf'(z)|=|z+\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nz^n|-(1-\alpha)\,|z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n|$$

$$\leq |z|+\sum_{n=2}^{\infty}n^2\,|a_n||z|^n-(1-\alpha)\left(|z|-\sum_{n=2}^{\infty}n\,|a_n||z|^n\right)$$

$$\leq |z|+\sum_{n=2}^{\infty}n^2\,|a_n||z|^{n-1}-|z|\,(1-\alpha)+(1-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}n\,|a_n||z|^n$$

$$\leq |z| \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha) \, |a_n| - (1-\alpha) \right] \leq 0$$

olur. Buradan,

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha \quad \text{veya} \quad \left|1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1-\alpha$$

elde edilir. ■

4.2 Alfa Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda, Mocanu (1969) tarafından verilen S sınıfının bir alt sınıfı olan, $\alpha-$ konveks fonksiyonlar sınıfı tanımlanıp bu sınıfın özellikleri üzerinde durulacaktır.

4.2.1 Tanım. f, $\mathbb{D}$ de analitik bir fonksiyon ve $z \in \mathbb{D}$ için $\dfrac{f(z)}{z} f'(z) \neq 0$ olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$J(\alpha, f; z) = \alpha \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right) + (1-\alpha) \frac{z f'(z)}{f(z)}$$

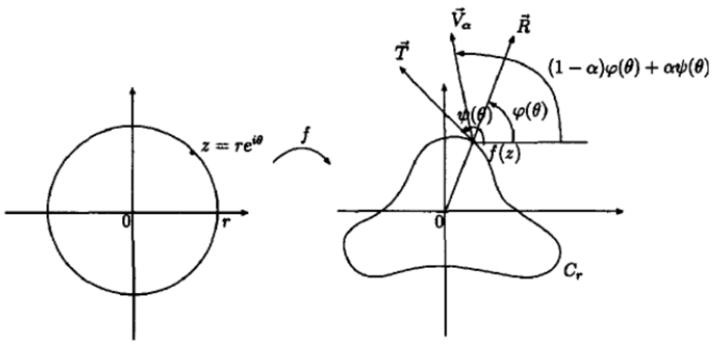
olmak üzere, $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) \geq 0 \tag{4.15}$$

ise, f fonksiyonuna $\alpha-$*konveks fonksiyon* denir. $\alpha-$konveks fonksiyonların sınıfı $\alpha - K$ ile gösterilir.

4.2.1 Tanımından, eğer $\alpha = 1$ ise, $\alpha-$konveks bir fonksiyon konveks, $\alpha = 0$ ise, $\alpha-$ konveks bir fonksiyon aynı zamanda yıldızıl olduğu açıktır.

Mocanu (1969) $\alpha-$konveks fonksiyonların tanımını geometrik olarak yorumlamıştır. Şimdi $0 \leq \alpha \leq 1$ özelliğindeki α sayıları için Mocanu (1969)'nun bu yorumunu verelim.



Şekil 4.1 C_r eğrisinin $\alpha-$konveksliği

f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de, $f(0)=0$ özelliğinde, analitik ve yalınkat olsun. Ayrıca, $r\in(0,1)$ için $|z|=r$ çemberinin f altındaki görüntüsünü C_r ile gösterelim. f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkat olduğundan, C_r eğrisi, $w=f(re^{i\theta})=w(\theta)$, $0\leq\theta\leq 2\pi$, biçiminde tanımlı pozitif olarak yönlendirilmiş bir Jordan eğrisidir (Şekil 4.1).

Eğer z noktası pozitif yönde $|z|=r$ çemberi boyunca hareket ettikçe $\arg f(z)$ artıyorsa, C_r eğrisinin yıldızıl bir eğri ve eğer C_r eğrisinin teğet vektörünün argümenti θ, $0\leq\theta\leq 2\pi$, değişkeninin azalmayan bir fonksiyonu ise, C_r eğrisinin konveks bir eğri olduğunu biliyoruz. $\varphi(\theta)=\arg f(re^{i\theta})$ konum vektörünün argümenti ve $\psi(\theta)$, C_r eğrisinin $w=f(re^{i\theta})$ noktasındaki teğet vektörünün argümenti olsun. $\vec{V}_\alpha=\vec{V}_\alpha(\theta)$ vektörü, C_r eğrisinin $w=f(re^{i\theta})$ noktasındaki teğet vektörü ve konum vektörünün arasında kalan açıyı α oranında bölen bir vektör olsun. Bu durumda $\vec{V}_\alpha(\theta)$ vektörünün eğim açısı $(1-\alpha)\varphi(\theta)+\alpha\psi(\theta)$ dır. Eğer bu açı θ, $0\leq\theta\leq 2\pi$, değişkeninin artan bir fonksiyon ise, C_r eğrisi $\alpha-$konveksdir. Bu bağıntının, $|z|=r$ için, $\operatorname{Re} J(\alpha,f;z)>0$ eşitsizliğine denk olduğunu görmek zor değildir.

4.2.2 Teorem. $f(z)$ fonksiyonu $\alpha-$konveks olsun. Bu takdirde,

(i) $\alpha\in\mathbb{R}$ için $f(z)$ yıldızıldır.

(ii) $\alpha\geq 1$ ise, $f(z)$ konvekstir.

(iii) $\alpha \leq -1$ ise, $g(z) = 1/f(1/z)$ fonksiyonu $|z|>1$ de konvekstir.

İspat. (i) $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ için

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \quad \text{ve} \quad q(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

olarak tanımlanırsa, p ve q fonksiyonları $\mathbb{D}$ de analitik olur. Böylece,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg p(z) = \frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Im}\log[p(z)] = \operatorname{Im}\left\{\frac{d}{dz}\log[p(z)]\right\}\frac{dz}{d\theta}$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\frac{d}{dz}\log[p(z)]\right\}\frac{dz}{d\theta} = \operatorname{Re}[q(z) - p(z)]$$

bulunur. $p(0) = 1$ olduğundan, orijinin küçük bir komşuluğundaki her bir çemberin $w = p(z)$ altındaki görüntüsü, sağ yarı düzlemde bulunan bir Γ_r eğrisi üzerine dönüşür. Ayrıca, w fonksiyonu altındaki resmi imajiner eksene teğet olan olacak biçimde en küçük yarıçaplı $|z|= \rho$ çemberi bulmak mümkündür. $\Gamma_\rho = w(|z|=\rho)$ ve Γ_ρ eğrisinin imajiner eksene teğet olduğu noktaya $w_0 = p(z_0)$ diyelim. $|z_0| = \rho$ olduğu açıktır. $f'(z) \neq 0$ olduğundan, $w_0 \neq 0$ ve z_0 noktasında teğet olma özelliğinden

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg p(z_0) = 0$$

ve aynı noktada $\operatorname{Re} p(z_0) = 0$ sonucu elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg p(z_0) = \operatorname{Re}[q(z_0) - p(z_0)] = 0$$

eşitliğinden, $\operatorname{Re} q(z_0) = 0$ bulunur. Böylece, herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ değeri için

$$\operatorname{Re}[J(\alpha, f(z_0))] = \operatorname{Re}[\alpha\, q(z_0) + (1-\alpha)p(z_0)] = 0$$

olur. $J(\alpha, f(z))$ analitik fonksiyonu için $\operatorname{Re}[J(\alpha, f(z))]$ harmonik bir fonksiyon olup, $\mathbb{D}$ de negatif değildir. Eğer z_0 noktası $\mathbb{D}$ dairesinin bir iç noktası ise, bu durumda $\mathbb{D}$ de $\operatorname{Re} J(\alpha, f(z)) \equiv 0$ dır. Bu ise $\operatorname{Re} J(\alpha, f(0)) = 1$ olmasıyla çelişir. O halde, z_0 noktası $\mathbb{D}$ dairesinin dışında olmak zorundadır. Böylece, $\mathbb{D}$ de $\operatorname{Re} p(z) > 0$ olur. Yani her $\alpha \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yıldızıldır.

(ii) $\alpha > 1$ olduğunu kabul edelim. $\operatorname{Re} J(\alpha, f(z)) \geq 0$ olduğundan, yukarıda verilen ispatın ilk kısmından

$$\operatorname{Re}[\alpha\, q(z)] \geq (\alpha - 1) \operatorname{Re}[\, p(z)] > 0$$

elde edilir. Böylece $\alpha > 1$ için f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de konvekstir.

(iii) $\alpha \leq -1$ olsun. $z = 1/\zeta$ dönüşümü ile $\mathbb{D}$ de $g(\zeta) = 1 / f(1/\zeta)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $|\zeta| > 1$ için,

$$\operatorname{Re}\left\{(1+\alpha)\frac{\zeta\, g'(\zeta)}{g(\zeta)} - \alpha \frac{1+\zeta\, g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right\} > 0 \tag{4.16}$$

bulunur. f fonksiyonu yalınkat ve yıldızıl olduğundan, g fonksiyonu da yalınkat ve yıldızıldır. $1+\alpha \leq 0$ için (4.16) eşitsizliğinden

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1+\zeta\, g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right\} > 0$$

elde edilir. Böylece $g(\zeta)$ fonksiyonu $\alpha \leq -1$ için konvekstir. ■

Aşağıda $\alpha-$konveks fonksiyonlara ait bazı temel sonuçlar verilecektir.

4.2.3 Teorem. $0 \leq \alpha / \beta < 1$ özelliğindeki her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları için $\beta - K \subset \alpha - K$ dır.

İspat. $f \in \alpha - K$ olsun. $z \in \mathbb{D}$ için $p(z) = z f'(z) / f(z)$ olarak tanımlanırsa, p fonksiyonu $\mathbb{D}$ de analitik, $p(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0$ şartı

$$\operatorname{Re}\left[p(z)+\alpha\frac{z\,p'(z)}{p(z)}\right]=\operatorname{Re}p(z)+\alpha\operatorname{Re}\frac{z\,p'(z)}{p(z)}>0$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu ifade daha kısa olarak,

$$A+\alpha B>0 \tag{4.17}$$

biçiminde yazılırsa, her z_0 sabit noktası için α ya göre bir doğru denklemi gösterir. 4.2.2 Teoreminin ispatı gereği, $A>0$ dır. Eğer (4.17) bağıntısı belli $\alpha>0$ için doğru ise, $0\le\beta<\alpha$ özelliğindeki her bir β için de doğrudur. Böylece, f fonksiyonu $\beta-$ konvekstir. (4.17) bağıntısı α ya göre bir doğru denklemi olduğundan, $\alpha<\beta\le 0$ olmak üzere β ya göre de bir doğru denklemi olur. Böylece f fonksiyonu $\beta-$ konvekstir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Bu teorem α sayılarının negatif olması durumunda $\alpha-K$ sınıfının genişleyeceğini α sayılarının pozitif olması durumunda ise $\alpha-K$ sınıfının daralacağını gösterir. En geniş sınıf $0-K=S^*$ dır. Aşağıdaki sonuç 4.3.1 Teoreminden elde edilebilir.

4.2.4 Sonuç. (i) $\alpha\ge 1$ için $\alpha-K\subseteq K$ dır.

(ii) $0\le\alpha<1$ için $K\subseteq\alpha-K$ dır.

(iii) $z\in\mathbb{D}$ için $I(z)=z$ denirse, $\bigcap_{\alpha=0}^{\infty}\{\alpha-K\}=\{I\}$ dir.

Aşağıdaki teoremde $\alpha\ge 0$ için $\alpha-K$ ve S^* sınıfları arasındaki geçiş verilmektedir.

4.2.5 Teorem. $z\in\mathbb{D}$ ve $\alpha>0$ olsun. Eğer $f\in\alpha-K$ ise,

$$F(z)=f(z)\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\alpha}\in S^*$$

dir. Tersine, $F\in S^*$ ise

$$f(z)=\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{[F(\zeta)]^{1/\alpha}}{\zeta}d\zeta\right]^{\alpha}\in \alpha-K$$

dir. Burada $F(z)$ kuvvet fonksiyonunun dalı $\left.\left[\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right]^{\alpha}\right|_{z=0}=1$ olacak şekilde seçilmiştir.

İspat. F fonksiyonunun logaritmik türevi $z\in\mathbb{D}$ için,

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(\frac{f(z)+z\,f''(z)}{z\,f'(z)}\right)-\frac{f'(z)}{f(z)}$$

olur. Buradan

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=(1-\alpha)\frac{z\,f'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right) \tag{4.18}$$

bulunur. Böylece $f\in\alpha-K$ olması, $F\in S^*$ olmasını gerektirir.

Tersine, $F(z)=f(z)[z\,f'(z)/f(z)]^{\alpha}$ eşitliğinden $f(z)$ çekilecek olursa, $\alpha\neq 0$ için

$$F^{1/\alpha}(z)=f^{1/\alpha}(z)\;\frac{z\,f'(z)}{f(z)}$$

olur. Buradan,

$$\frac{1}{z}F^{1/\alpha}(z)=f^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(z)f'(z)=d(\alpha f^{1/\alpha}(z))$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bu ifadenin her iki yanının 0 dan z ye integrali alınırsa,

$$f(z)=\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{[F(\zeta)]^{1/\alpha}}{\zeta}d\zeta\right]^{\alpha} \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.18) bağıntısından $f\in\alpha-K$ olduğu görülür. ■

$k(z) = z/(1-z)^2$ Koebe fonksiyonunun S^* sınıfı için ekstramal fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa, (4.19) bağıntısından,

$$k(z,\alpha) = \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{\zeta^{1/\alpha}}{\zeta(1-\zeta)^{2/\alpha}}\,d\zeta\right]^\alpha$$

fonksiyonu da $\alpha - K$ sınıfı için bir ekstramal fonksiyon olup, adına $\alpha -$ *konveks Koebe fonksiyonu* denir.

$\alpha - K$, $\alpha > 0$, sınıfına ait fonksiyonlar için Miller (1973)'e ait büyüme sonucu aşağıda verilmiştir.

4.2.6 Teorem. $\alpha > 0$ ve $f \in \alpha - K$ ise, $z = re^{i\theta}$ için

$$k(-r,\alpha) \leq |f(z)| \leq k(r,\alpha) \tag{4.20}$$

dir. Burada her iki eşitsizlik de kesindir.

İspat. Önce $z = r$ alalım. Genel durumda ise, $|\eta| = 1$ olmak üzere, $f(\eta z)/\eta$ fonksiyonunu incelemek yeterlidir. Teorem 4.2.5 den $F \in S^*$ ve $z \in \mathbb{D}$ için,

$$f(z) = \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{[F(\zeta)]^{1/\alpha}}{\zeta}\,d\zeta\right]^\alpha$$

fonksiyonu $\alpha -$ konvekstir. $z = r$ konumu yapılıp, 0 dan r ye pozitif reel eksen boyunca integral alınırsa, $\zeta = \rho e^{i\theta}$ için

$$f(r) = \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^r \frac{[F(\rho)]^{1/\alpha}}{\rho}\,d\rho\right]^\alpha$$

olur. $F \in S^*$ olduğundan,

$$\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \leq |F(\rho)| \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \tag{4.21}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten faydalanarak

$$[f(r)]^{1/\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{(1/\alpha)-1}(1-\rho)^{-2/\alpha}\,d\rho$$

bulunur. $\rho = ru$ değişken dönüşümü ile,

$$|f(r)| \leq r\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^1 u^{(1/\alpha)-1}(1-ru)^{-2/\alpha}\,du\right]^{\alpha} = k(\alpha, r)$$

olur.

(4.20) eşitsizliğin sol tarafını göstermek için orijini $f(z) = \mathrm{R}e^{i\theta}$ noktasına birleştiren Γ doğrusunu göz önüne alalım. f yıldızıl olduğundan, Γ doğrusu $\mathbb{D}$ de orijini $z = e^{i\theta}$ noktasına birleştiren bir γ Jordan yayının resmidir. γ yayının $\{f(z)\}^{1/\alpha}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü orijin başlangıçlı doğru parçalarından ibarettir. Her birinin uzunluğu

$$R^{1/\alpha} = |f(z)|^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_\gamma \left|\frac{d[f(\zeta)]^{1/\alpha}}{d\zeta}\right| |d\zeta|$$

dır. $f \in \alpha - K$ olduğundan, 4.2.5 Teoremi gereği

$$\frac{d[f(\zeta)]^{1/\alpha}}{d\zeta} = \frac{1}{\alpha}\frac{[F(\zeta)]^{1/\alpha}}{\zeta}$$

dır. $\rho = |\zeta|$ için (2.10) dan

$$R^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_\gamma \left|\frac{[F(\zeta)]^{1/\alpha}}{\zeta}\right| |d\zeta| \geq \frac{1}{\alpha}\int_\gamma \rho^{(1/\alpha)-1}(1+\rho)^{-2/\alpha}\,|d\zeta|$$

$$\geq \frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{(1/\alpha)-1}(1+\rho)^{-2/\alpha}\,d\rho$$

ve $\rho = ru$ dönüşümü ile $|f(z)| \geq -k(\alpha, -r)$ eşitsizliğine ulaşırız. (4.20) bağıntısının eşitlik hali $k(\alpha, z)$ fonksiyonunda z yerine $-r$ ve r alarak elde edilir. ■

4.2.6 Teoreminde α 'nın özel değerleri için ilginç sonuçlar elde edilir.

4.2.7 Açıklama $f \in \alpha - K$ ve $z = re^{i\theta}$ olsun.

(i) $\alpha = 1$ için

$$\frac{r}{1+r} \le |f(z)| \le \frac{r}{1-r}$$

(ii) $\alpha = 2$ için

$$[\arctan\sqrt{r}]^2 \le |f(z)| \le \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\right)^2$$

(iii) $\alpha > 2$ için

$$|f(z)| \le \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{(1/\alpha)-1}(1-\rho)^{-2/\alpha}\,d\rho\right]^\alpha \le \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \rho^{(1/\alpha)-1}(1-\rho)^{-2/\alpha}\,d\rho\right]^\alpha$$

bulunur.

4.2.8 Teorem. $\alpha \ge 1$ olmak üzere, $f \in \alpha - K$ ise $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ için,

$$\frac{\partial}{\partial r}k(-r,\alpha) \le |f'(z)| \le \frac{\partial}{\partial r}k(r,\alpha)$$

dir.

İspat. 4.2.5 Teoreminden

$$|f'(z)| = \frac{|F(z)|^{1/\alpha}|f(z)|^{1-(1/\alpha)}}{|z|}$$

bulunur. (4.21) ve 4.2.6 Teoreminden $0 < r < 1$ ve $|z| = r$ için,

$$|f'(z)| \le \frac{1}{r}\left[\frac{r}{(1-r)^2}\right]^{1/\alpha}\left[k(\alpha,r)\right]^{1-(1/\alpha)}$$

$$= \frac{1}{r^{1-(1/\alpha)}(1-r)^{2/\alpha}} \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^r \rho^{(1/\alpha)-1} (1-\rho)^{-2/\alpha} d\rho \right]^{\alpha-1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} k(\alpha, r)$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafı benzer şekilde gösterilir. ■

4.3 Alfa Spiral Fonksiyonlar

4.3.1 Tanım. $\mathbb{D}$ de analitik $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu ve $|\alpha| < \pi/2$ özelliğindeki α sayısı için,

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \frac{z f'(z)}{f(z)} \right) > 0 \tag{4.22}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna $\mathbb{D}$ de α – *spiral fonksiyon* denir. α – spiral fonksiyonların sınıfı $SP(\alpha)$ ile gösterilir.

Aşağıdaki iki sonuç Spacek (1932)'e ait olup, $SP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini yalınkatlığını verir.

4.3.2 Teorem. $p \in P$ olmak üzere $f \in SP(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$f(z) = z \exp\left\{ e^{-i\alpha} \cos\alpha \int_0^z \frac{p(\zeta)-1}{\zeta} d\zeta \right\} \tag{4.23}$$

olmasıdır.

İspat. $f \in SP(\alpha)$ olsun. Bu takdirde $z = 0$ noktası civarında

$$e^{i\alpha} \frac{z f'(z)}{f(z)} = \cos\alpha + i \sin\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{4.24}$$

olur. (4.22) bağıntısı gereği $\cos\alpha \geq 0$ ve böylece $|\alpha| \leq \pi/2$ elde edilir. Eğer $\alpha = \pm\pi/2$ ise $f(z) = z$ olur. Bu yüzden $|\alpha| < \pi/2$ olarak alınacak. (4.24) ifadesinden

$$\frac{1}{\cos\alpha}\left[e^{i\alpha}z\frac{f'(z)}{f(z)}-i\sin\alpha\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n = p(z) \tag{4.25}$$

yazılabilir. Buradan, f fonksiyonunun (4.23) bağıntısını sağladığı görülür. ■

(4.25) de verilen p fonksiyonu $p(z)=(1+z)/(1-z)$ olarak alınırsa, $s=e^{-i\alpha}\cos\alpha$ olmak üzere, f fonksiyonu

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^{2s}} \tag{4.26}$$

bulunur. Bu fonksiyona α – *spiral Koebe fonksiyonu* denir.

4.3.3 Teorem. $f \in SP(\alpha)$ ise, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkattır.

İspat. f fonksiyonunun $\mathbb{D}$ de yalınkat olmadığını kabul edelim. Bu takdirde, belli bir $|z|=r<1$ çemberi üzerinde f fonksiyonu farklı iki noktada aynı değeri alır. O halde, $t_1 \neq t_2 \pmod{2\pi}$ açıları ve $r\in(0,1)$ sabit sayısı için $f(re^{it_1})=f(re^{it_2})$ olsun. f fonksiyonu sadece $z=0$ da bir sıfıra sahip olduğundan, $\Delta \arg f(C_r)=2\pi$ dir. $0\le t_1<t_2<2\pi$ olarak alınırsa, $t_1\le\theta\le t_2$ özelliğindeki θ sayıları için $z=re^{i\theta}$ noktalarının f altındaki görüntüsü olan Γ basit kapalı bir eğri olup orijini çevrelemez. Böylece, $\log w=\log f(z)$ fonksiyonu Γ üzerinde tek değerli ve $\log f(re^{it_1})=\log f(re^{it_2})$ dir. O halde, $z=re^{i\theta}$ için

$$0=\int_{\Gamma}\frac{d}{dz}\log f(z)dz=\int_{t_1}^{t_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{d\theta}d\theta=i\int_{t_1}^{t_2}z\frac{f'(z)}{f(z)}d\theta$$

elde edilir. Halbuki, (4.22) eşitsizliğinden integrali alınan fonksiyonun değeri, orijinden geçen bir doğrunun bir tarafında kalan yarı düzlem içinde kalır. Böylece integralin değeri sıfır olamaz. O halde f fonksiyonu yalınkattır. ■

Zamorski (1960)'ye ait olan aşağıdaki sonuç, $SP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı bağıntısını verir.

4.3.4 Teorem. $f \in SP(\alpha)$ ise, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ için

$$|a_n| \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|k+2s-1|}{k} = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} ((k-1)^2 + 4k\cos^2\alpha)^{1/2} \qquad (4.27)$$

dir. Eşitsizlik $n \geq 2$ için kesin olup, eşitlik (4.26) da verilen f fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir.

İspat. $f \in SP(\alpha)$ olsun.

$$I(z) = e^{-i\alpha} \cos\alpha \int_0^z \frac{p(\zeta)-1}{p(\zeta)} d\zeta$$

olmak üzere, 4.3.2 Teoremi gereği $f(z) = ze^{I(z)}$ biçminde yazılabilir. $s = e^{-i\alpha}\cos\alpha$ için

$$f'(z) = e^{\mathrm{I}(z)}[1 + s(p(z)-1)]$$

ve

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{ze^{\mathrm{I}(z)}[1+s(p(z)-1]}{ze^{\mathrm{I}(z)}} = 1 + s(p(z)-1) + \cdots \qquad (4.28)$$

olur. $p \in P$ olduğundan,

$$p(z) = \frac{1+b(z)}{1-b(z)} \quad \text{veya} \quad p(z) - 1 = \frac{2b(z)}{1-b(z)}$$

olacak şekilde Schwarz lemmasının şartlarını sağlayan bir $b(z)$ fonksiyonu vardır. (4.28) bağıntısı kullanılarak,

$$z f'(z) - f(z) = b(z)[(2s-1)f(z) + z f'(z)]$$

bulunur. Eğer $b(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ ise,

$$\left(\sum_1^{\infty} b_k z^k\right)\left(\sum_1^{\infty} (k+2s-1)a_k z^k\right) = \sum_1^{\infty} (k-1)a_k z^k$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1}(k+2s-1)a_k z^k\right)=\sum_{k=1}^{n}(k-1)a_k z^k-\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+2s-1)a_k z^k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\,a_k\,z^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k z^k$$

olur. Burada, c_k katsayılarına ihtiyaç olmadığından açıkça yazılmadı. $z=re^{i\theta}$ konumu yapılıp θ üzerinden integral ve $r\to 1$ için limit alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n-1}|k+2s-1|^2|a_k|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_1^{n-1}(k+2s-1)a_k z^k\right|^2 d\theta$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_1^{n-1}(k+2s-1)a_k z^k\right|^2 |b(z)|^2\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|b(z)\sum_1^{n-1}(k+2s-1)a_k z^k\right|^2 d\theta$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_1^{n}(k-1)a_k z^k+\sum_{n+1}^{\infty}c_k z^k\right|^2 d\theta$$

$$\geq \sum_1^{n-1}(k+2s-1)\,|a_k|^2\, z^k+\sum_{n+1}^{\infty}|c_k|^2$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\,|a_k|^2$$

olur. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\,|a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1}|k+2s-1|^2|a_k|^2\,,$$

$$(n-1)^2\,|a_n|^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1}|k+2s-1|^2|a_k|^2$$

veya

$$|a_n| \leq \frac{4\cos^2\alpha}{(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-1} k\,|a_k|^2 \tag{4.29}$$

bulunur. $a_1 = 1$ olduğu dikkate alınırsa, bu eşitsizlikten

$$|a_2| \leq 2\cos\alpha \quad \text{ve} \quad |a_3| = \cos\alpha(1+8\cos^2\alpha)^{1/2}$$

elde edilir. Bu sınırlar teoremde ifade edilen sınırlardır. (4.27) bağıntısını göstermek için tümevarım metodu kullanılacak. (4.27) bağıntısı $m, (m = 2,3,...,n-1)$ için doğru, yani

$$|a_m| \leq \prod_{k=1}^{m-1} \frac{|k+2s-1|}{k}$$

olsun. (4.29) gereği $m = n-1$ için,

$$|a_{n-1}|^2 \leq \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{|k+2s-1|}{k}\right)^2 = \frac{4\cos^2\alpha}{(n-2)^2}\left[1+\sum_{k=2}^{n-2} k\prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{|j+2s-1|^2}{j}\right)^2\right] \tag{4.30}$$

elde edilir. a_n için (4.29) bağıntısı ve tümevarım hipotezinden,

$$|a_n|^2 \leq \frac{4\cos^2\alpha}{(n-1)^2}\left[1+\sum_{k=2}^{n-2} k\prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{|j+2s-1|}{j}\right)^2\right] + \frac{4\cos^2\alpha}{(n-1)^2}(n-1)\prod_{k=1}^{n-2}\left(\frac{|k+2s-1|^2}{k}\right)$$

olur. (4.30) bağıntısı kullanılarak,

$$|a_n|^2 \leq \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2}\prod_{k=1}^{n-2}\left(\frac{|k+2s-1|}{k}\right)^2 + \left(\frac{4\cos^2\alpha}{n-1}\right)\prod_{k=1}^{n-2}\left(\frac{|k+2s-1|}{k}\right)^2,$$

$$|a_n|^2 \leq \prod_{k=1}^{n-2}\left(\frac{|k+2s-1|}{k}\right)^2\left[\frac{(n-2)^2+4(n-1)\cos^2\alpha}{(n-1)^2}\right]$$

bulunur. $k=n-1$ olduğunda sağ taraftaki ikinci çarpan $[(k-1)^2+4k\cos^2\alpha]/k^2$ olur. Böylece (4.27) bağıntısı elde edilir. Sınırların kesinliğini görmek için $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$ olmak üzere $F(z)=z/(1-z)^{2s}\in SP(\alpha)$ fonksiyonunu dikkate almak yeterlidir. Gerçekten,

$$F(z)=\frac{z}{(1-z)^{2s}}=z+\sum_{n=2}^{\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+2s-1}{k}z^n$$

dir. ■

4.4 Gama Yıldızıl Fonksiyonlar

Bu kısımda, ilk olarak Lewandowski, S. Miller ve Zlotkiewicz (1974) tarafından tanımlanan gama-yıldızıl fonksiyonların sınıfı üzerinde kısaca durulacak.

4.4.1 Tanım. $\mathbb{D}$ dairesinde analitik $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ fonksiyonu, her $z\in\mathbb{D}-\{0\}$ için $f(z)\neq 0$, $f'(z)\neq 0$ ve $\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\neq 0$ şartlarını sağlasın. $\gamma\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re} I\big(f(z),\gamma\big)=\operatorname{Re}\left[\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right]>0 \tag{4.31}$$

ise, f fonksiyonuna *gama-yıldızıl* denir ve bu fonksiyonların sınıfı $\gamma-S^*$ ile gösterilir.

Ayrıca, (4.31) eşitsizliği yerine

$$\left|(1-\gamma)\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)+\gamma\arg\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right|<\frac{\pi}{2} \tag{4.32}$$

eşitsizliği de alınabilir. Eğer $\gamma=0$ ise, $0-S^*=S^*$ ve $\gamma=1$ ise, $1-S^*=CC$ dir. Bu sınıf ileride incelenecektir.

4.4.2 Teorem. $\gamma\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma-S^*\subset S^*$ dir.

İspat. $z\in\mathbb{D}$ için $f\in\gamma-S^*$ olsun. w fonksiyonunu

$$\frac{1+w(z)}{1-w(z)}=\frac{zf'(z)}{f(z)} \tag{4.33}$$

biçiminde tanımlayalım. Buna göre, $w(0)=0$ ve $w(z)\neq \mp 1$ olup, w meromorf bir fonksiyondur. $z\in\mathbb{D}$ için $R(z)>0$ olmak üzere $w(z)=R(z)e^{i\phi(z)}$ olsun. $z_0\in\mathbb{D}$ noktasını

$$\max\{|w(z)|:|z|\leq|z_0|\}=|w(z_0)|=1 \tag{4.34}$$

olacak biçimde seçelim. Böylece $z=re^{i\theta}$ için, $\dfrac{\partial R(z_0)}{\partial\theta}=0$,

$$\frac{w'(z)}{w(z)}=\frac{R'(z)}{R(z)}+i\phi'(z)=-\frac{i}{z}\frac{1}{R(z)}\frac{\partial R(z)}{\partial\theta}+\frac{1}{z}\frac{\partial\phi(z)}{\partial\theta}$$

ve buradan

$$\frac{zw'(z)}{w(z)}=\frac{\partial\phi(z)}{\partial\theta}-\frac{i}{R}\frac{\partial R(z)}{\partial\theta}$$

elde edilir. $z=z_0$ için bu durum, $\left[z_0w'(z_0)/w(z_0)\right]=\partial\phi(z_0)/\partial\theta$ olup, $z_0w'(z_0)/w(z_0)$ bir reel sayıdır. Eğer $\partial\phi(z_0)/\partial\theta<0$ ise $w(z)$, z_0 noktasında yerel yalınkat olur. Bu durum (4.34) ifadesini çelişkiye götürür. O halde, $\partial\phi(z_0)/\partial\theta>0$ olmalıdır. Yani,

$$z_0\frac{w'(z_0)}{w(z_0)}=\alpha \tag{4.35}$$

dir. $|w(z_0)|=1$ ve $w(z_0)\neq\mp 1$ olduğundan $\beta\neq 0$ reel sayısı için,

$$\frac{1+w(z_0)}{1-w(z_0)}=i\beta \tag{4.36}$$

dir. Ayrıca (4.31) ve (4.33) bağıntılarından,

$$\operatorname{Re} I\big(f(z),\gamma\big)=\operatorname{Re}\left[\left(\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{1+w(z)}{1-w(z)}+z\frac{w'(z)}{w(z)}\right)\left(\frac{w(z)}{1+w(z)}+\frac{w(z)}{1-w(z)}\right)^{\gamma}\right]>0$$

olur. Burada (4.35) ve (4.36) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\operatorname{Re} I\big(f(z_0),\gamma\big) = \operatorname{Re}\left[(i\beta)^{1-\gamma}\left(i\beta + \frac{\alpha}{2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)i\right)^{\gamma}\right] > 0$$

elde edilir. $\mu = \beta + \alpha(\beta + 1/\beta)/2$ denirse, $\beta\mu > 0$ olur. Böylece,

$$\operatorname{Re} I\big(f(z_0),\gamma\big) = \operatorname{Re}[(\beta i)^{1-\gamma}(\mu i)^{\gamma}] = \operatorname{Re}(|\beta|^{1-\gamma}|\mu|^{\gamma}\, i) = 0$$

bulunur. $f \in \gamma - S^*$ olduğundan bu durum mümkün değildir. O halde, $\mathbb{D}$ dairesinde $|w(z)| < 1$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $f(z) \in S^*$ dir. ■

4.4.3 Teorem. $0 \le \delta \le \gamma$ veya $\gamma \le \delta \le 0$ ise, $\gamma - S^* \subset \delta - S^*$ dir.

İspat. $\delta = 0$ durumu önceki teoremde gösterildi. Şimdi $0 < \delta < \gamma$ olması durumunda teoremin doğruluğunu gösterelim. $f \in \gamma - S^*$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma} = p(z) \tag{4.37}$$

olacak biçimde bir $p \in P$ fonksiyonu vardır. 4.4.2 Teoremi gereği, $f \in S^*$ olduğundan,

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = q(z) \tag{4.38}$$

olacak biçimde bir $q \in P$ fonksiyonu vardır. (4.37) eşitliğinin δ/γ ve (4.38) eşitliğinin de $1-(\delta/\gamma)$ kuvveti alınıp taraf tarafa çarpılırsa,

$$\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)^{\delta} = [\,p(z)]^{\delta/\gamma}[\,q(z)]^{1-\delta/\gamma} = \Gamma(z) \tag{4.39}$$

olur. p ve q fonksiyonları P sınıfına ait olduğundan, 2.4.2 Teoremi gereği $\Gamma \in P$ dir. Bu ise, teoremin ispatını tamamlar. ■

4.4.4 Tanım. $\mathbb{D}$ dairesinde analitik $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu, her $z \in \mathbb{D}$ için $\dfrac{f(z)}{z} \neq 0$, $f'(z) \neq 0$ ve $1 + \dfrac{z f''(z)}{f'(z)} \neq 0$ şartlarını sağlasın. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left[\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right)^{\mu}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)^{\lambda}\right] > 0 \tag{4.40}$$

ise, f fonksiyonuna $S^*(\mu,\lambda)$ sınıfına aittir denir.

Özel olarak, $S^*(1,0) = S^*$, $S^*(0,1) = K$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ için $S^*(1-\gamma,\gamma) = \gamma - S^*$ dır. (4.40) bağıntısı yerine

$$\left|\mu \arg\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right) + \lambda \arg\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2} \tag{4.41}$$

bağıntısı da alınabilir.

4.4.5 Teorem. $L = \{(\mu,\lambda) : 4n+1 \leq \mu + \lambda \leq 4n+3, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(\mu,0) : |\mu| \geq 1\}$ $\cup \{(0,\lambda) : |\lambda| \geq 1\}$ olmak üzere $(\mu,\lambda) \in L$ ise

$$S^*(\mu,\lambda) \subset S^* \tag{4.42}$$

dır (Miller 1976).

Aşağıdaki teorem 4.4.5 Teoreminin daha genel halini vermektedir.

4.4.6 Teorem. $0 \leq t \leq 1$ ve $(\mu,\lambda) \in L$ ise, $S^*(\mu,\lambda) \subset S^*[(\mu-1)t+1, \lambda t]$ dir.

İspat. $f \in S^*(\mu,\lambda)$ ise, $z \in \mathbb{D}$ için

$$\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right)^{\mu}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)^{\lambda} = p(z) \tag{4.43}$$

olacak şekilde $p \in P$ vardır. 4.4.5 Teoremi gereği,

$$\frac{z f'(z)}{f(z)} = q(z) \tag{4.44}$$

dir. (4.43) bağıntısının t. kuvveti ile (4.44) bağıntısının $(1-t)$. kuvveti taraf tarafa çarpılırsa,

$$\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right)^{(\mu-1)t+1}\left(1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)^{\lambda t} = [\,p(z)]^{t}[\,q(z)]^{1-t} = r(z)$$

bulunur. $r(z)$ fonksiyonunun verilişinden,

$$|\arg r(z)| \le t\,|\arg p(z)| + (1-t)\,|\arg q(z)| \le t\frac{\pi}{2} + (1-t)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

elde edilir. Böylece, $r(0)=1$ ve $\operatorname{Re} r(z) > 0$ olur. Bu ise, $f \in S^*[(\mu-1)t+1, \lambda t]$ olduğunu gösterir. ■

4.4.7 Sonuç. $0 \le t \le 1$ ve $(\mu,\lambda) \in L$ ise,

(i) $0 \le \delta \le \lambda$ veya $\lambda \le \delta \le 0$ ve $(1,\lambda) \in L$ ise $S^*(1,\lambda) \subset S^*(1,\delta)$ dır.

(ii) $0 \le \delta \le \lambda$ veya $\lambda \le \delta \le 0$ ise, her λ reel sayısı için, $S^*(1-\lambda,\lambda) \subset S^*(1-\delta,\delta) \subset S^*$ dır.

4.5 Simetrik Noktalara Göre Yıldızıl Fonksiyonlar

Bu kısımda, ilk olarak Sakaguchi (1958) tarafından tanımlanan ve Stankiewicz (1965) tarafından geliştirilen, simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyonların sınıfı tanımlanıp bu sınıfın özellikleri incelenecek.

4.5.1 Tanım. $\mathbb{D}$ dairesinde

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z f'(z)}{f(z)-f(-z)}\right\} > 0 \tag{4.45}$$

şartını sağlayan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ fonksiyonuna *simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf S^{**} ile gösterilir.

$f\in S^{**}$ ise $g(z)=-f(-z)$ ile tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da S^{**} sınıfına aittir. (4.45) bağıntısı gereği,

$$\frac{2z\,f'(z)}{f(z)-f(-z)}=p(z) \tag{4.46}$$

olacak şekilde bir $p\in P$ fonksiyonu vardır. (4.46) bağıntısında z yerine $-z$ yazılırsa,

$$\frac{2z\,f'(z)}{f(z)-f(-z)}=\frac{2z\,g'(z)}{g(z)-g(-z)}=p(-z) \tag{4.47}$$

elde edilir. (4.46) ve (4.47) bağıntıları birlikte düşünülürse, $h=(f+g)/2$ fonksiyonunun yıldızıl olduğu görülür. $\varphi(z)=\int_0^z \zeta^{-1}h(\zeta)d\zeta$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde normalize edilmiş yalınkat bir fonksiyondur. (4.46) eşitliğinden $\varphi(z)$ fonksiyonu için $\operatorname{Re}\{f'(z)/\varphi'(z)\}>0$ eşitsizliği sağlanır. Bu durum, simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyonların sınıfının, konvekse yakın fonksiyonların sınıfının bir alt sınıfı olduğunu gösterir.

4.5.2 Teorem. $f\in S^{**}$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z)=\int_0^z p(\mu)\{\exp\frac{1}{2}\int_0^{\mu}[\,p(\zeta)+p(-\zeta)-2]\zeta^{-1}d\zeta\}d\mu \tag{4.48}$$

olacak şekilde bir $p\in P$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır (Stankiewicz 1965).

İspat. $f\in S^{**}$ ise, (4.46) ve (4.47) bağıntılarından, $f'(z)/f'(-z)=p(z)/p(-z)$ ve

$$f'(-z)=\frac{p(-z)f'(z)}{p(z)} \tag{4.49}$$

bulunur. Böylece (4.46) eşitliğinden $-f(-z)=[2z\,f'(z)-f(z)p(z)]/\,p(z)$ elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanının türevi alınırsa,

$$f'(-z) = \frac{2zp(z)f''(z) + 2p(z)f'(z) - 2zp'(z)f'(z) - p^2(z)f'(z)}{[p(z)]^2} \tag{4.50}$$

eşitliği elde edilir. (4.49) ve (4.50) eşitliklerinden

$$q(z) = \frac{p(z) + p(-z) - 2}{2z} \quad \text{ve} \quad \frac{f''(z)}{f'(z)} = q(z) + \frac{p'(z)}{p(z)}$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar sonucunda (4.48) eşitliği elde edilir.

Tersine, f fonksiyonunun (4.48) bağıntısını sağladığını kabul edelim. (4.48) eşitliğinden

$$f'(z) = p(z)\exp\left\{\int_0^z q(\zeta)d\zeta\right\} \tag{4.51}$$

elde edilir. Böylece, $\mathbb{D}$ dairesinde $f'(z) \neq 0$ dır. Ayrıca

$$-f(-z) = \int_0^z p(-\mu)\left\{\exp\int_0^\mu q(\zeta)d\zeta\right\}d\mu \tag{4.52}$$

dır. (4.48) ve (4.52) birlikte düşünülürse

$$f(z) - f(-z) = \int_0^z [p(\zeta) + p(-\zeta)]\left\{\exp\int_0^\mu q(\zeta)d\zeta\right\}d\mu \tag{4.53}$$

elde edilir. (4.51) ve (4.53) den $f(z) - f(-z) = 2z f'(z)/p(z)$ bulunur. Dolayısıyla f fonksiyonu S^{**} sınıfına aittir. ■

4.5.3. Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $|z| < 1$ için yalınkat ve simetrik noktalara göre yıldızıl olsun. Bu takdirde $n \geq 2$ için,

$$|a_n| \leq 1$$

dir. Eşitlik $|\eta| = 1$ olmak üzere $f(z) = z/(1 + \eta z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (4.46) eşitsizliğinden,

$$\frac{z\,f'(z)}{f(z)-f(-z)} << \frac{1+z}{2(1-z)}$$

yazılabilir. Diğer yandan, $|z|<1$ için $f(z)-f(-z)$ ifadesi tek fonksiyon ve orijine göre yıldızıl olduğundan, $f(z)-f(-z) << 2z/(1-z^2)$ bulunur. Buradan $z\,f'(z) << z/(1-z)^2$ elde edilir. Bu ise, ispatı tamamlar. ■

4.6 Kompleks Mertebeden Yıldızıl Fonksiyonlar

Bu kısımda Nasr (1977) ve Aouf (1988) tarafından tanımlanan kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı ve özellikleri üzerinde durulacaktır.

4.6.1 Tanım. $b \neq 0$ ve $b \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbb{D}$ dairesinde $f(z)/z \neq 0$ ve

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{b}\left(\frac{z\,f'(z)}{f(z)}-1\right)\right\} > 0 \tag{4.54}$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ analitik fonksiyonuna $(1-b)$. *mertebeden yıldızıl fonksiyon* denir. Böyle fonksiyonların sınıfı $S^*(1-b)$ ile gösterilir. $b=1$ için, $S^*(0)=S^*$ ve $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere, $b=1-\alpha$ için $S^*(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

4.6.1 Tanımı; "$f \in S^*(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\frac{z\,f'(z)}{f(z)} = b[p(z)-1]+1 \tag{4.55}$$

olacak biçimde bir $p \in P$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır" biçimde de ifade edilebilir. (4.55) eşitliği ve reel kısmı pozitif fonksiyonlar için verilen Herlogz temsilinden faydalanarak, aşağıdaki teoremin ispatı kolayca elde edilir.

4.6.2 Teorem. $f \in S^*(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$f(z) = z\exp\left\{\int_0^{2\pi} -2b\log(1-ze^{-it})\,d\mu(t)\right\} \tag{4.56}$$

olacak biçimde $\int_0^{2\pi} d\mu(t)=1$, $\int_0^{2\pi}(1+ze^{-it})/(1-ze^{-it})d\mu(t)=p(z)\in P$ eşitliklerini gerçekleyen azalmayan bir $\mu(t)$ fonksiyonu var olmasıdır.

4.6.2 Teoremi ve S^* sınıfındaki fonksiyonlar için temsil teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

4.6.3 Sonuç. $f\in S^*(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart, $z\in\mathbb{D}$ için, $f(z)=z[g(z)/z]^b$ olacak şekilde bir $g\in S^*$ fonksiyonunun var olmasıdır.

4.6.4 Teorem. $\operatorname{Re} b>0$ olmak üzere $n=2,3,\ldots$ için, $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in S^*(1-b)$ ise,

$$|a_n|\le\frac{1}{(n-1)!}\prod_{m=0}^{n-2}|2b+m| \tag{4.57}$$

dir. Eşitlik,

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^{2b}}=\left\{z+\sum_{n=2}^{\infty}\prod_{m=0}^{n-2}\left(\frac{2b+m}{m+1}\right)z^n\right\} \tag{4.58}$$

fonksiyonu için sağlanır.

İspat. $f\in S^*(1-b)$ ise,

$$\left\{2bz+\sum_{k=2}^{\infty}(2b+k-1)a_k z^k\right\}w(z)=\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_k z^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}d_k z^k$$

olacak şekilde Schwarz lemmasını sağlayan $w(z)$ analitik fonksiyonu vardır. $|w(z)|<1$ olduğundan,

$$\left|2bz+\sum_{k=2}^{\infty}(2b+k-1)a_k z^k\right|\ge\left|\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_k z^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}d_k z^k\right| \tag{4.59}$$

bulunur. (4.59) eşitsizliğinin her iki yanının karesi alınıp, $|z|=r<1$ çevresi üzerinden integrali hesaplanır ve $r\to 1$ için limiti alınırsa,

$$(n-1)^2 |a_n|^2 \leq |2b|^2 + \sum_{k=2}^{n-1} [|2b+k-1|^2 - (k-1)^2] |a_k|^2 \tag{4.60}$$

eşitsizliği elde edilir. $\operatorname{Re} b > 0$ olduğundan, $|a_2| \leq 2|b|$, $|a_3| \leq |2b||2b+1|/2!$ ve tümevarımla, $n = 2,3,\ldots$ için (4.57) eşitsizliği elde edilir. ■

4.6.5 Tanım. $b \neq 0$ ve $b \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbb{D}$ dairesinde $g'(z) \neq 0$ ve

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{1}{b}\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \tag{4.61}$$

şartlarını sağlayan f analitik fonksiyonuna *b. mertebeden konveks fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların sınıfı $C(b)$ ile gösterilir.

4.6.1 Tanımı ve 4.6.5 Tanımından, $f \in C(b)$ olması için gerek ve yeter şart $z f' \in S^*(1-b)$ olduğu görülebilir.

4.7 $C_\beta(\gamma)$ Sınıfı

4.7.1 Tanım. $0 \leq \beta < 1$ ve $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$ olmak üzere, $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} e^{i\gamma}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right) > \beta \tag{4.62}$$

olacak biçimde β, γ sayıları varsa, f fonksiyonuna $C_\beta(\gamma)$ sınıfına aittir denir. $\gamma = 0$ için $C_\beta(0)$ sınıfı β mertebeden konveks fonksiyonların $K(\beta)$ sınıfını verir. $\beta = 0$ için $z f'(z)$ fonksiyonu $\gamma-$spiral fonksiyonların sınıfına aittir.

4.7.2 Teorem. $C_\beta(\gamma)$ sınıfının konvekslik yarıçapı,

$$((\cos\gamma - \beta) + \sqrt{\beta^2 + \sin^2\gamma})^{-1} \tag{4.63}$$

dir.

İspat. 4.7.1 Tanımından

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=e^{-i\gamma}[(\cos\gamma-\beta)p(z)+i\sin\gamma+\beta] \tag{4.64}$$

olacak şekilde bir $p\in P$ vardır. $p(z)=u(z)+iv(z)$ denirse, (4.64) eşitliğinin sağ tarafının reel kısmı,

$$(\cos\gamma-\beta)[u(z)\cos\gamma+v(z)\sin\gamma]+\sin^2\gamma+\beta\cos\gamma$$

bulunur. Robertson (1965) $u(z)+iv(z)\in P$ ise,

$$u(z)\cos\gamma+v(z)\sin\gamma\geq\frac{(1+|z|^2)\cos\gamma-2|z|}{1-|z|^2}$$

olduğunu göstermiştir. Bundan faydalanarak,

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\geq[1+|z|(2\beta-2\cos\gamma)+|z|^2(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma-2\beta\cos\gamma)][1-|z|^2]^{-1}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı $|z|<((\cos\gamma-\beta)+\sqrt{\beta^2+\sin^2\gamma})^{-1}$ için pozitiftir. ■

4.7.3 Teorem. $-\pi/2<\gamma-\sigma<\pi/2$, $0\leq\rho<1$ olmak üzere $\alpha=\rho e^{i\sigma}$ olsun. $f\in C_\beta(\gamma)$ olması için gerek ve yeter şart $\delta=\cos(\gamma-\sigma)-\rho\cos\gamma+\sigma\beta$ ve $z\in\mathbb{D}$ için

$$f_\alpha(z)=\int_0^z(f'(\zeta))^\alpha d\zeta\in C_\delta(\gamma-\sigma) \tag{4.65}$$

olmasıdır.

İspat. $f_\alpha(z)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri $f'_\alpha(z)=(f'(z))^\alpha$, $f''_\alpha(z)=\alpha(f'(z))^{\alpha-1}f''(z)$ dir. Buradan,

$$1+\frac{zf''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)}=\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha) \tag{4.66}$$

elde ederiz. $\alpha=\rho e^{i\sigma}$ alınırsa,

$$\frac{e^{i(\gamma-\sigma)}}{\rho}\left(1+\frac{z f_\alpha''(z)}{f_\alpha'(z)}\right)=e^{i\gamma}\left(1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)+\frac{e^{i(\gamma-\sigma)}}{\rho}(1-\rho e^{i\sigma})$$

veya

$$\operatorname{Re}\left[e^{i(\gamma-\sigma)}\left(1+\frac{z f_\alpha''(z)}{f_\alpha'(z)}\right)\right]=\rho\operatorname{Re}\left[e^{i\gamma}\left(1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)\right]+\cos(\gamma-\sigma)-\rho\cos\gamma$$

elde edilir. $f\in C_\beta(\gamma)$ olduğundan, son eşitlik

$$\rho\operatorname{Re}\left[e^{i\gamma}\left(1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)\right]+\cos(\gamma-\sigma)-\rho\cos\gamma\geq\rho\beta+\cos(\gamma-\sigma)-\rho\cos\gamma=\delta$$

olur. 4.7.1 Tanımı gereği $f_\alpha\in C_\delta(\gamma-\sigma)$ bulunur. (4.66) bağıntısından,

$$1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}=\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{z f_\alpha''(z)}{f_\alpha'(z)}\right)-\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

bulunur. $f\in C_\delta(\gamma-\sigma)$ olduğundan,

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\gamma}\left(1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)\right]\geq\frac{1}{\rho}\delta-\frac{\cos(\gamma-\sigma)}{\rho}+\cos\gamma=\beta$$

yazılabilir. Bu ise, $f\in C_\beta(\gamma)$ olması demektir. ■

4.7.4 Sonuç. α reel bir sayı olsun. Bu takdirde, $f\in K$ olması için gerek ve yeter şart $f_\alpha\in K(1-\alpha)$ olmasıdır.

İspat. 4.7.3 Teoreminde $\sigma=\gamma=\beta=0$ ve $\rho=\alpha$ alınırsa, istenilen sonuç elde edilir. ■

4.7.5 Sonuç. $f\in K(\beta)$ olması için gerek ve yeter şart $f_\alpha\in K(1-\alpha(1-\beta))$ olmasıdır.

İspat. 4.7.3 Teoreminde $\sigma=\gamma=0$ ve $\rho=\alpha$ alınırsa, istenilen sonuç elde edilir. ■

4.8 Konvekse Yakın Fonksiyonlar

Bu kısımda konveks fonksiyonlarla dolaylı olarak ilgili olan konvekse yakın fonksiyonların sınıfı tanımlanıp, bu sınıfın bilinen özellikleri üzerinde durulacaktır. Bu sınıfı tanımlamadan önce Noshiro ve Warchawski (1935) tarafından verilen bir yalınkatlık kriterini verelim.

4.8.1 Yardımcı Teorem. D, $\mathbb{C}$ de konveks bir bölge olsun. $f \in A(D)$ fonksiyonu D bölgesinde $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ şartını sağlıyorsa, f fonksiyonu D bölgesinde yalınkattır.

İspat. $z_1 \neq z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in D$ ve γ, D de z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçası olsun. Bu durumda γ yolu $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, $0 \le t \le 1$, parametrik denklemi ile verilir. Her $t \in [0,1]$ için $z(t) \in D$ olduğundan,

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_\gamma f'(\zeta)d\zeta = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'(z(t))dt$$

bulunur. Hipotez gereği

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right] = \int_0^1 \operatorname{Re}[f'(z(t))]dt > 0$$

elde edilir. Buradan $f(z_2) \neq f(z_1)$ olup, bu ise ispatı tamamlar. ■

Ozaki (1935) ve Kaplan (1952), 4.8.1 Yardımcı Teoremini kullanarak aşağıdaki yalınkatlık kriterini elde etmişlerdir.

4.8.2 Yardımcı Teorem. D, $\mathbb{C}$ üzerinde bir bölge, f ve φ fonksiyonları D bölgesinde analitik, φ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ve $\varphi(D)$ konveks bir bölge olsun. Bu durumda $z \in D$ için,

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right] > 0$$

ise, f fonksiyonu D de yalınkattır.

İspat. φ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat, $\varphi(D)$ konveks bir bölge ve $\mathrm{Re}[f'(z)/\varphi'(z)]>0$ olsun. $\varphi(D)=B$ olmak üzere, $w=\varphi(z)\in B$ için

$$g(w)=f(\varphi^{-1}(w))$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Buradan ters fonksiyonun türevi gereği,

$$g'(w)=f'(\varphi^{-1}(w))\,(\varphi^{-1})'(w)=\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}$$

bulunur. Böylece $\mathrm{Re}\, g'(w)>0$ olup, 4.8.1 Yardımcı Teoremi gereği, g B de yalınkattır. O halde $f(z)=g(\varphi(z))$ fonksiyonu da D de yalınkattır. ■

4.8.3 Tanım. $f\in A(\mathbb{D})$ olsun. Her $z\in\mathbb{D}$ için,

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right]>0 \tag{4.67}$$

olacak biçimde $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı g konveks fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna $\mathbb{D}$ üzerinde *konvekse yakın fonksiyon* denir.

4.1.6 Teoremi kullanılarak, (4.67) şartı, $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı yıldızıl bir h fonksiyonu için

$$\mathrm{Re}\left[\frac{z\,f'(z)}{h(z)}\right]>0 \tag{4.68}$$

biçiminde verilebilir. Böylece, $\mathbb{D}$ de yıldızıl olan bir f fonksiyonunun aynı zamanda konvekse yakın bir fonksiyon olduğu açıktır. $\mathbb{D}$ de tanımlı normalize edilmiş konvekse yakın fonksiyonların sınıfını C ile gösterelim. Buradan, $K\subset S^*\subset C\subset S$ olduğunu görmek zor değildir.

Reade (1955-56), konvekse yakın fonksiyonların katsayılarının Bierbach tahminini sağladığını göstermiştir.

4.8.4 Teorem. $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de konvekse yakın bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $n=2,3,\cdots$ için, $|a_n|\leq n$ dir. $|a_n|=n$ eşitliği f fonksiyonunun Koebe fonksiyonu ve onun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir.

İspat. $f\in C$ olduğundan, $z\in\mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right]>0$$

eşitsizliğini sağlayan bir h konveks fonksiyonu vardır. Buradan $\mathrm{Re}[1/h'(0)]>0$ olup, $\alpha=\arg h'(0)$ denirse, $|\alpha|<\pi/2$ bulunur. $z\in\mathbb{D}$ için,

$$g(z)=\frac{h(z)-h(0)}{h'(0)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda, $g\in K$ ve

$$q(z)=\frac{f'(z)}{e^{i\alpha}g'(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}q_nz^n$$

fonksiyonunu tanımlanırsa, $q_0=e^{-i\alpha}$ ve $\mathrm{Re}\,q(z)>0$ bulunur. Ayrıca $z\in\mathbb{D}$ için,

$$p(z)=\frac{q(z)+i\sin\alpha}{\cos\alpha}=1+p_1z+\cdots$$

olarak alınırsa, $p\in P$ ve $n\geq 1$ için $q_n=p_n\cos\alpha$ olduğu kolayca görülür.

$$g(z)=z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$$

denirse, $f'(z)$ ve $e^{i\alpha}g'(z)q(z)$ kuvvet serilerinin katsayılarını eşitlersek

$$na_n=e^{i\alpha}[nc_ne^{-i\alpha}+(n-1)c_{n-1}q_1+(n-2)c_{n-2}q_2+\cdots+2c_2q_{n-2}+q_{n-1}]$$

bulunur. $p\in P$ olduğundan, $n=2,3,...$ için $|p_n|\leq 2$ olduğu dikkate alınırsa, $|q_n|\leq 2\cos\alpha\leq 2$ olur. $g\in K$ ve $n=2,3,...$ için $|c_n|\leq 1$ olduğundan,

$$n\,|\,a_n\,|\leq n+2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2\cdot 2+2=n^2$$

yazılabilir. Dolayısıyla $n=2,3,\cdots$ için $|\,a_n\,|\leq n$ elde edilir. ■

Konvekse yakın fonksiyonların Kaplan (1952)'a ait geometrik karekterizasyonuna geçmeden önce teoremde kullanılacak aşağıdaki sonucu verelim.

4.8.5 Yardımcı Teorem. $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $t\in\mathbb{R}$ için

$$v\,(t+2\pi)=v(t)+2\pi \tag{4.69}$$

ve her $t_1<t_2$ için

$$v(t_1)-v(t_2)<\pi \tag{4.70}$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde, $t\in\mathbb{R}$ için,

$$w(t+2\pi)=w(t)+2\pi \tag{4.71}$$

ve

$$|\,w(t)-v(t)\,|\leq\frac{\pi}{2} \tag{4.72}$$

şartlarını sağlayan azalmayan bir $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyon vardır.

İspat. w fonksiyonunu

$$w(t)=\sup_{s\leq t}v(s)-\frac{\pi}{2} \tag{4.73}$$

biçiminde tanımlayalım. Buna göre, w fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde azalmayan bir fonksiyon olduğu açıktır. $v\,(t+2\pi)=v(t)+2\pi$ olduğundan,

$$w(t+2\pi)=\sup_{s\leq t}v(s+2\pi)-\frac{\pi}{2}=w(t)+2\pi$$

elde edilir. Öte yandan, $s<t$ için $v(s)<v(t)+\pi$ olduğundan,

$$w(t) \leq v(t) + \frac{\pi}{2}$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.70) bağıntısından

$$v(t) = \sup_{s \leq t} v(s) = w(t) + \frac{\pi}{2}$$

yazılabilir. Son iki eşitsizlik birlikte düşünülürse, (4.72) eşitsizliği elde edilir.

Aşağıdaki teorem konvekse yakın fonksiyonların analitik temsilini verir.

4.8.6 Teorem. f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartını sağlayan yerel olarak yalınkat analitik bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konvekse yakın bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart, $r \in (0,1)$ için $z = re^{i\theta}$ olmak üzere, $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ eşitsizliğini sağlayan her θ_1 ve θ_2 reel sayıları için

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left[1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right] d\theta > -\pi \tag{4.74}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. f konvekse yakın bir fonksiyon olsun. $f'(z)$ ve $\varphi'(z)$ fonksiyonlarının $\mathbb{D}$ de kutbu olmadığından $0 < r < 1$ olmak üzere $z = re^{i\theta}$ için

$$p(z) = \arg f'(z) \text{ ve } q(z) = \arg \varphi'(z)$$

fonksiyonları tanımlanabilir. Her iki fonksiyon sürekli olup 2π periyoduna sahiptir. Ayrıca (4.66) bağıntısı gereği her $z \in \mathbb{D}$ için

$$| p(z) - q(z) | < \frac{\pi}{2} \tag{4.75}$$

olacak şekilde $p(z)$ ve $q(z)$ fonksiyonları için uygun dallar seçilebilir. Şimdi

$$P(r,\theta) = p(re^{i\theta}) + \theta = \arg z f'(z) \tag{4.76}$$

ve

$$Q(r,\theta) = q(re^{i\theta}) + \theta = \arg z\varphi'(z) \tag{4.77}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$Q(r,\theta_1) < Q(r,\theta_2) \tag{4.78}$$

olur. Çünkü $\arg[z_0\varphi'(z_0)]$, $\varphi(z_0)$ da $|z| = r_0$ eğrisinin resminin normal vektörünün argümentidir ve $\varphi(z)$ konveks olduğu için bu normal, sürekli olarak saat yönünün tersine döner. Herhangi θ_1, θ_2 ve $r \neq 0$ için

$$\begin{aligned} P(r,\theta_2) - P(r,\theta_1) &= p(r,\theta_2) + \theta_2 - p(r,\theta_1) - \theta_1 \\ &= [p(r,\theta_2) - q(r,\theta_2)] + [q(r,\theta_2) + \theta_2 \\ &\quad - q(r,\theta_1) - \theta_1] - [p(r,\theta_1) - q(r,\theta_1)] \end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ ise, eşitliğin sağ yanındaki ilk ve son ifadelerde (4.75) ve ortadaki ifadede (4.78) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$P(r,\theta_2) - P(r,\theta_1) > -\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = -\pi \tag{4.79}$$

elde edilir ve (4.76) bağıntısı gereği,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left(1 + re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right)d\theta = P(r,\theta_2) - P(r,\theta_1) > -\pi \tag{4.80}$$

bulunur. Böylece (4.66) eşitsizliğinin (4.74) eşitsizliğini gerektirdiği gösterilmiş olur.

Tersine, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yerel yalınkat ve (4.74) bağıntısını sağlasın. f fonksiyonunun konvekse yakın olduğunu göstermeliyiz. Bunun için f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinin sınırı üzerinde de analitik ve 4.8.5 Yardımcı Teoreminde $v(\theta) = P(1,\theta)$ kabul edelim. (4.76) ve (4.80) ifadelerinden $v(\theta)$ 4.8.5 Yardımcı Teoreminin şartlarını sağlar. w, 4.8.5 Yardımcı Teoreminde tanımlanan fonksiyon olmak üzere,

$$q(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)(w(\gamma)-\gamma)}{1-2r\cos(\gamma-\theta)+r^2}d\gamma \tag{4.81}$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ de sürekli olarak sınıra genişletilebilen harmonik bir fonksiyondur ve $q(1,\theta)=w(\theta)-\theta$ dır.

$$Q(r,\theta)=q(r,\theta)+\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)w(\gamma)}{1-2r\cos(\gamma-\theta)+r^2}d\gamma \tag{4.82}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $Q(r,\theta)$ fonksiyonunun her sabit r için θ değişkenine göre monoton artan olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için

$$Q(r,\theta)-\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)(w(\gamma)-\gamma)}{1-2r\cos(\gamma-\theta)+r^2}d\gamma$$

yazılırsa, $w(\gamma)-\gamma$ ve $\cos(\gamma-\theta)$'nın periyodikliği ve değişken değişimi kullanılarak,

$$Q(r,\theta)-\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)(w(\gamma+\theta)-\gamma-\theta)}{1-2r\cos\gamma+r^2}d\gamma$$

veya

$$Q(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)(w(\gamma+\theta)-\gamma)}{1-2r\cos\gamma+r^2}d\gamma$$

elde edilir. Sonuç olarak $\theta_2>\theta_1$ için $w(\gamma+\theta_2)\geq w(\gamma+\theta_1)$ ve integral negatif olmadığından,

$$Q(r,\theta_2)-Q(r,\theta_1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)(w(\gamma+\theta_2)-w(\gamma+\theta_1))}{1-2r\cos\gamma+r^2}d\gamma\geq 0$$

olur. Böylece $\partial Q/\partial\theta\geq 0$ elde edilir.

$\operatorname{Im} h(z)=q(r,\theta)$ ve $\operatorname{Re} h(0)=0$ özelliğinde $h(z)$ analitik fonksiyonu için istenen konveks fonksiyon,

$$\phi_1(z) = \int_0^z e^{h(\zeta)} d\zeta \tag{4.83}$$

biçiminde verilebilir. Buna göre $\phi_1(0) = 0$ ve $|\phi_1'(0)| = |e^{h(0)}| = |e^{iq(0,\theta)}| = 1$ dir. Böylece uygun bir $\beta \in \mathbb{R}$ için $\phi(z) = e^{-i\beta}\phi_1(z)$ olarak alınırsa, $\phi'(0) = 1$ olur. Ayrıca, $z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z\phi_1''(z)}{\phi_1'(z)}\right) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\arg z\phi_1'(z) = \frac{\partial}{\partial\theta}(\theta + \arg e^{h(z)}) \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}(\theta + \operatorname{Im} h(z)) = \frac{\partial}{\partial\theta}(\theta + q(r,\theta)) \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta} Q \geq 0
\end{aligned} \tag{4.84}$$

olur. O halde, ϕ_1 fonksiyonu $\mathbb{D}$ de konvekstir.

$\mathbb{D}$ dairesinin sınırında

$$\arg\frac{f'(z)}{\phi_1'(z)} = \arg\frac{zf'(z)}{z\phi_1'(z)} = P(1,\theta) - Q(1,\theta) \tag{4.85}$$

dır. 4.8.5 Yardımcı Teoreminde $P(1,\theta) = v(\theta)$ ve (4.81) eşitliği ile $Q(1,\theta) = w(\theta)$ olduğundan (4.85) ve 4.8.5 Yardımcı Teorem gereği, $\partial\mathbb{D}$ üzerinde

$$\left|\arg\frac{f'(z)}{\phi_1'(z)}\right| = |v(\theta) - w(\theta)| \leq \frac{\pi}{2} \tag{4.86}$$

bulunur. $\arg(f'(z)/\phi_1'(z))$ harmonik fonksiyon olduğundan, (4.86) eşitsizliği $\overline{\mathbb{D}}$ da sağlanır ve $\mathbb{D}$ 'nin içinde ise, eşitsizlik kesindir.

Son olarak, f fonksiyonu yalnız $\mathbb{D}$ 'nin içinde analitik ve sınırında analitik olmasın. $r \in (0,1)$ olmak üzere, (4.86) eşitsizliğini sağlayan, D_r diskinde konveks $\phi_r(z)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu özellikte olan sonsuz sayıdaki $\phi_r(z)$ fonksiyonlarından, $r \to 1$ iken konveks bir $\phi_1(z)$ fonksiyonuna yakınsayan bir fonksiyon dizisi elde edilebilir. Bu $\phi_1(z)$ limit fonksiyonu, $\mathbb{D}$ de, (4.86) eşitsizliğini kesin olarak sağlar. Bu ise ispatı tamamlar. ■

4.8.6 Teoreminin ilginç bir geometrik yorumu vardır. f , normalize edilmiş konvekse yakın bir fonksiyon ve $0 < r < 1$ için $f(|z| = r) = \Gamma_r$ olsun. Γ_r eğrisinin $f(re^{i\theta_1})$ ve $f(re^{i\theta_2})$ noktalarındaki birim teğet vektörlerini sırasıyla $\vec{T}_1$ ve $\vec{T}_2$ ile gösterelim. $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ olmak üzere (4.29) bağıntısı $\arg\vec{T}_2 - \arg\vec{T}_1 > -\pi$ eşitsizliğine dönüşür. Başka bir deyişle Γ_r eğrisinin saat yönünde bir U-dönüşü yapmaz. Yani, θ değeri $[0,2\pi]$ üzerinde artarken teğet vektörü π açısına eşit veya ondan daha büyük bir açı ile geri dönemez.

KAYNAKLAR

Alexander, J.W. 1915-16. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of Math., 17 : 12-22.

Aouf, M.K. 1988. On the coefficients of some classes of starlike and convex functions of complex order, *Journal of Natural Sciences and Mathematics*, 28 : 107-120.

Becker, J. 1972. Löwnersche differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare Schlichte funktionen, *J. Reine Angew. Math*., 255 : 23-43.

Bieberbach, L. 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreiss vermitteln. *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, 940-955.

Branges, L. De 1985. A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Mathematica*, 154 : 137-152.

Brown, J.E. 1989. Images of discs under convex and starlike functions, *Math. Z.*, 202 : 457-462.

Chuaqui, M. 1995. A unified approach to univalence criteria, *Proc. Amer. Math. Soc*., 123 : 441-453.

Conway, J.B. 1995. Functions of One Complex Variable II, Springer-Verlag, New York.

Dinghas, A. 1959. Über einige Monotoniesatze in der Theorie der schlichten Funktionen, *Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo* I,85-295.

Duren, P.L. 1983. Univalent Functions, Springer-Verlag, New York.

Gamelin, T.W. 2001. Complex Analysis, Springer-Verlag, New York.

Goluzin, G.M. 1936. On distortion theorems in the theory of conformal mappings, *Mat. Sb.*, 1(43) : 127-135 (in Russian).

Goodman, A.W. 1983. Univalent Functions, I-II, Mariner Publ. Co., Tampa Florida.

Graham, I., Varolin D. 1996., Bloch constants in one and several variables, *Pacif. J. Math.* 174 : 347-357.

Gronwall, T. 1916. Sur la deformation dans la represantation conforme, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 162 : 249-252.

Grunsky, H. 1933. Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, 43 : 140-143.

Hallenbeck, D.J., MacGregor, T.H. 1984. Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory, Pitman, Boston.

Hayman, W.K. 1953. La regularite des fonctions univalentes, *C. R. Acad. Sci. Paris* 237:1624-1625.

Hayman, W.K. 1994. Multivalent Functions (second edition), Cambridge Univ. Press.

Herlogtz, G. 1911. Über Potenzreihen mit positivern, reelen Teil im Einheitskreis, *S.B. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Natur. Kl.*, 63 : 501,511.

Hummel, J.A. 1957. The coefficient regions of starlike functions, *Pacif. J. Math.*, 7 : 1381-1389.

Jack, I.S. 1971. Functions starlike and convex of order α, *J. London Math. Soc.*, 3 : 469-474.

Kaplan, W. 1952. Close-to-convex schlicht functions, *Michigan Math. J.*, 1 : 169-185.

Kraus, W. 1932. Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhangenden Bereiches mit der Kreisabbildung, *Mitt. Math. Sem Giessen* 21 : 1-28.

Krzyz, J. 1955. On the maximum modulus of univalent functions, *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl.* III, 3 : 203-206.

Lewandowski, Z., Miller, S., Zlotkiewicz, E. 1974. Generating functions for some classes of univalent functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* [2,4,5,6,69].

Löwner, K. 1923. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, *I, Math. Ann.*, 89 : 103-121.

Miller, S.S. 1973. Distortion properties of alpha-starlike functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 : 311-318.

Miller, S.S. 1976. Second order differential inequalities and some applications in univalent function theory, *Notices Amer. Math. Soc.* Abstract 731-30-10, p. A-100. [2]

Mocanu, P.T. 1969. Une propriete de convexite generalisee dans la theorie dee la representation conforme, *Mathematica (Cluj)*, 11 (34) : 127-133.

Nasr, M. 1977. On Bazilevic functions and generalized convexity, *Rev. Roumaine. Math. Pures et Appl 9*, 22 : 1279-1281.

Nehari, Z. 1949. The Schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull. Amer. Math.*, 55 : 545-551.

Nehari, Z. 1952. Conformal Mapping, Mcgraw-Hill, New York.

Nehari, Z. 1976. A property of convex conformal maps, *J. Analyse Math.*, 30 : 390-393.

Nehari, Z. 1979. Univalence criteria depending on the Schwarzian derivative, *Illinois J. Math.*, 23 : 345-351.

Nevanlinna, R. 1920. Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises, *Översikt Finska Vetenskaps-Soc. Förh.*, 62A : 1-14.

Noshiro, K. 1934-35. On the theory of schlicht functions, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, 2 : 129-155.

Ozaki, S. 1935. On the theory of multivalent functions, *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku*, 40 : 167-188.

Palka, B.P 1991. An Introduction to Complex Function Theory, Springer-Verlag, New York.

Pokornyi, V.V. 1951. On some sufficient conditions for univalence, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 79 : 743-746 (in Russian).

Pommerenke, C. 1975. Univalent Functions, Vandenhoeck&Ruprecht, Göttingen.

Reade, M.O. 1955-56. On close to convex univalent functions, *Mich. Math. J.*, 3 : 59-62.

Robertson, M.S. 1936. A remark on the odd schlict functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 : 366-370.

Robertson, M.S. 1936. On the theory of univalent functions, *Ann. Math.*, 37 : 374-408.

Robertson, M.S. 1965. Radii of starlikeness and close to convexity, *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 : 847-852.

Sakaguchi, K. 1959. On a certain univalent mapping, *J. Math. Soc.* Japan 11 : 72-75.

Sheil- Small, T. 1969. On convex univalent functions, *J. London Math. Soc.*, 1 : 483-492.

Spacek, L. 1932. Contribution a la theorie des fonctions univalentes, *Casopis Pest. Math.*, 62 : 12-19 (in Russia).

Stankiewicz, J. 1965. Some remarks on functions starlike with respect to symmetric points, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect.* A19, 53-59(1970); MR 41 #5612.

Suffridge, T.J. 1970. Some remarks on convex maps of the unit disc, *Duke Math. J.* 37 : 775-777.

Suffridge, T.J. 1970. The principle of subordination applied to functions of several variables, *Pacif. J. Math.*, 33 : 241-248.

Trimble, S.Y. 1975. A coefficient inequality for konvex univalent functions, *Proc. Amer. Math Soc.*, 48 : 266-267.

Warschawski, S.E. 1935. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 38 : 310-340.

Zamorski, J. 1960. About the extremal spiral schlicht functions, *Ann. Polon. Math.*, 9 : 265-273.

Zill, D.G.,Shanahan, P.D. 2003. A First Course in Complex Analysis, Jones and Barlett Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Hasan BAYRAM
Doğum Yeri ve Tarih	: Bursa, 07.09.1989
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yılı)

Lise	: Orhangazi Öğretmen Eyüp Topçu Anadolu Lisesi, 2007
Lisans	: Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2011