E^n DEKİ KENDİSİNE BENZER EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

ESRA ETEMOĞLU

T. C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^n DEKİ KENDİSİNE BENZER EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Esra ETEMOĞLU

Prof. Dr. Kadri ARSLAN

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2013

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../….

İmza

Esra ETEMOĞLU

TEZ ONAYI

Esra ETEMOĞLU tarafından hazırlanan "IE^n deki Kendisine Benzer Eğriler ve Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Üye: Prof. Dr. Kadri ARSLAN İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ İmza
Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

E^n deki KENDİSİNE BENZER EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Esra ETEMOĞLU

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu çalışmada E^n deki kendisine benzer yüzeylerin 1. ve 2. temel form katsayıları yardımıyla bazı sınıflandırmaları verilmiştir.
Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş bölümüdür.
İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.
Üçüncü bölümde E^n deki eğriler ele alınmıştır. Bu bölümde kendisine benzer eğriler ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiştir.
Dördüncü bölümde E^3 deki yüzeyler ele alınmıştır. Bu bölümde kendisine benzer yüzeyler ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.
Beşinci bölümde E^4 deki yüzeyler ele alınmıştır. Bu bölümde kendisine benzer yüzeyler ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kendisine benzer eğriler, Kendisine benzer yüzeyler, Ortalama eğriliği, 1. Frenet eğriliği

2013, v + 34 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A CHARACTERIZATION OF A SELFSIMILAR CURVES AND SURFACES IN E^n

Esra ETEMOĞLU

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

In this thesis, a characterizations of self similar surfaces in E^n with the help of coefficients of the first and second fundamental form are given.

This thesis consist of five chapters.

First chapter is introduction.

In the second chapter it is given some basic definitions and theorems which will be use in the other chapters.

In the third chapter self similar curves in n-dimensional Euclidean space E^n are considered.

In the fourth chapter self similar surfaces in 3-dimensional Euclidean space E^3 are considered. Some of the original results were obtained.

In the final chapter self similar surfaces in 4-dimensional Euclidean space E^4 are considered. Some of the original results were obtained.

Key Words: Self similar curves, Self similar surfaces, Mean curvature, 1.Frenet curvature

2013, v + 34 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca sağlam bir bilgi birikimine sahip olmamı sağlayan, Yüksek lisans tez konusunun belirlenmesinde ve kayda değer sonuçlar elde edebileceğimiz problemlerin ortaya atılmasında çok büyük katkıları olan ve bu tez çalışmasının ortaya çıkışından son haline gelene kadar gerek akademik bilgisiyle gerek de manevi desteğiyle yanımda olduğunu hep gösteren hocam Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a teşekkürü bir borç bilirim. Bu alanda her anlamda doğru, kendinden emin ve bilgili olmamda en büyük pay saygıdeğer hocama aittir. Ayrıca bilgi birikimiyle bana birçok konuda yardımcı olan, her zaman fikirlerine başvurduğum Arş. Gör. Dr. Betül BULCA'ya teşekkür ederim. Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anne ve babama ayrıca teşekkür ederim.

Esra ETEMOĞLU
.. / .. / ….

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
E^n	n-boyutlu Öklit uzayı
γ	Eğri
V_i	Frenet vektörleri
κ_i	Frenet eğrilikleri
$\lVert \, , \rVert$	Norm
S^3	3-küre
X	Regüler yama
g	Metrik tensör
C^∞	Diferansiyellenebilme
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^\perp(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
$C^\infty(M,R)$	M den R ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
∇	M üzerinde indirgenmiş Riemann koneksiyonu
$\widetilde{\nabla}$	$\widetilde{M}$ üzerinde Riemann koneksiyon
$\nabla^\perp$	Normal koneksiyon
$\overline{\nabla}$	Van-der Waerden –Bortolotti koneksiyonu
$[\, ,]$	Lie parantez operatörü
$\langle \, , \rangle$	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
A_ξ	Şekil operatörü
T_pM	p noktasında teğet uzay
$T_p^\perp M$	p noktasında normal uzay
$\vec{H}$	Ortalama eğrilik vektörü
$\lVert H \rVert$	Ortalama eğrilik
c_{ij}^k	M nin ikinci temel form katsayıları
Γ_{ij}^k	M nin Christoffel sembolleri
h_{ij}^k	M nin ikinci temel form katsayıları
N_i	Normal vektörleri
K	Gauss eğriliği
K_N	Normal eğrilik
∂	Kısmi türev
R	M nin eğrilik tensörü
$\widetilde{R}$	$\widetilde{M}$ nin eğrilik tensörü
Δ	Laplas operatörü

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı E^n deki kendisine benzer eğriler ve yüzeylerin bir karakterizasyonunu vermektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda E^n deki bir eğrinin Frenet eğrilikleri ve Frenet çatısı ile ilgili temel özelikler verilmiştir. İkinci kısımda E^n de regüler bir yama ile verilen yüzeylerin ikinci temel formları, Gauss ve ortalama eğrilikleri ile ilgili temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde n-boyutlu Öklit uzayı E^n deki eğriler ele alınmıştır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda E^n deki bir eğrinin eğrilik vektörü ile ilgili bilinen özelikler ele alınmıştır. İkinci kısımda E^n deki kendisine benzer eğriler ile ilgili temel sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde 3-boyutlu Öklit uzayı E^3 deki kendisine benzer yüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda E^3 de kendisine benzer yüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir. İkinci kısımda Monge yaması ile, üçüncü kısımda dönel yüzey yaması ve dördüncü kısımda ise paralel yüzey yaması ile verilen kendisine benzer yüzeyler ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise E^4 deki kendisine benzer yüzeyler ile ilgili temel sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.0. Giriş

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda E^n deki bir eğrinin Frenet eğrilikleri ve Frenet çatısı ile ilgili temel özelikler verilmiştir. İkinci kısımda E^n de regüler bir yama ile verilen yüzeylerin ikinci temel formları, Gauss ve ortalama eğrilikleri ile ilgili temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir.

2.1. Frenet Çatısı ve Eğrilikleri

$\gamma : I \to E^n$ regüler parametrik bir eğri olsun. Bu takdirde $\forall\, t \in I$ için γ nin yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(t), \gamma''(t),\ \gamma'''(s)\ ,..., \gamma^{(d)}(t)$, $(d \le n)$ lineer bağımsız ve $\gamma'(t), \gamma''(t),\ \gamma'''(t)\ ,..., \gamma^{(d)}(t), \gamma^{(d+1)}(t)$ lineer bağımlı ise γ eğrisine *d-ranklı Frenet eğrisi* adı verilir. Bu durumda d-ranklı bir Frenet eğrisi E^n nin d-boyutlu alt uzayında yatacaktır. E^n nin d-boyutlu alt uzayını $\phi_d(t)$ ile gösterelim. Bu alt uzay $\gamma'(t),\ \gamma''(t),\ \gamma'''(t)\ ,..., \gamma^{(d)}(t)$ vektörleri ile gerildiğinden $\phi_d(t)$ ye γ eğrisinin *d. nci oskülatör uzayı* denir. Açık olarak $\phi_1(t) \subset \phi_2(t) \subset ... \subset \phi_d(t)$ dir. Eğer γ, *d*-ranklı bir Frenet eğrisi ise $\gamma'(t),\ \gamma''(t),\ \gamma'''(t)\ ,..., \gamma^{(d)}(t)$ vektörlerine Gram-Schmidt ortanormalleştirme metodu uygulayarak $V_1(t),\ V_2(t),\ V_3(t)\ ,..., V_d(t)$ ortanormal d-çatısı (Serret-Frenet Vektörleri) elde edilir. Yani;

$$E_1(t) = \gamma'(t),\ V_1(t) = \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|},$$

$$E_k(t) = \gamma^{(k)}(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \gamma^{(k)}(t), E_i(t) \right\rangle \frac{E_i(t)}{\|E_i(t)\|^2} \qquad (2.1.1)$$

$$V_k(t) = \frac{E_k(t)}{\|E_k(t)\|},\ 2 \le k \le d$$

dir (Gluck 1966).

Bu bölümde eğrileri hızlarına göre birim hızlı (yay-parametreli) ve keyfi hızlı (keyfi parametreli) olarak inceleyeceğiz.

Teorem 2.1.1: $\gamma : I \to E^n$ d-ranklı keyfi hızlı bir Frenet eğrisi olmak üzere γ nın ortonormal çatısı $V_1(t), V_2(t), V_3(t), ..., V_d(t)$ nin türevleri $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ için

$$
\begin{aligned}
V_1'(t) &= v(t)\kappa_1(t)V_2(t) \\
V_i'(t) &= -v(t)\kappa_{i-1}(t)V_{i-1}(t) + v(s)\kappa_i(t)V_{i+1}(t) \qquad (2.1.2) \\
V_d'(t) &= -v(t)\kappa_{d-1}(t)V_{d-1}(t)
\end{aligned}
$$

$(2 \le i \le d-1)$ dir. Burada $k_1, ..., k_{d-1} : I \to E$ fonksiyonları γ nın Frenet eğrilik fonksiyonlarıdır.

Açıklama 2.1.2: $V_1(t), V_2(t), V_3(t), ..., V_d(t)$ vektörlerine *Frenet d-çatısı* ve (2.1.2) deki eşitliklere de *Frenet denklemleri* adı verilir. Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekilde yazılır;

$$
\begin{bmatrix} V_1'(t) \\ V_2'(t) \\ V_3'(t) \\ \cdots \\ V_d'(t) \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & . & . & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & . & . \\ . & -\kappa_1 & . & . & . \\ . & . & . & . & \kappa_{d-1} \\ 0 & . & . & -\kappa_{d-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \\ \cdots \\ V_d(t) \end{bmatrix}. \qquad (2.1.3)
$$

Teorem 2.1.3: $\gamma : I \to E^n$ d-ranklı keyfi hızlı bir Frenet eğrisinin ortonormal çatısı $V_1(t), V_2(t), V_3(t), ..., V_d(t)$ için

$$
F_k(t) = \gamma^{(k)}(t) - \sum_{j<k} < \gamma^{(k)}(t), V_j(t) > V_j(t) \qquad (2.1.4)
$$

olmak üzere

$$
\kappa_k(s) = \frac{\|F_{k+1}\|}{\|F_k\|\|F_1\|}, \; 1 \le k \le d-1 \qquad (2.1.5)
$$

dir.

2.2. E^n de Yüzeyler

M yüzeyi $X : U \subset E^2 \to E^n$ yaması ile verilsin. *M* nin $p \in X(u,v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, X_u ve X_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece *M* nin *birinci temel formu*

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.2.1}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

1. temel form katsayıları olup $\langle\, , \rangle$ bir Öklid iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.2.2) yardımıyla

$$\left\| X_u \times X_v \right\|^2 = EG - F^2 \tag{2.2.3}$$

elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \neq 0$ ise $X(u,v)$ yaması *regüler*dir denir.

Şu andan itibaren aksi söylenmedikçe $X(u,v)$ yaması regüler kabul edilecektir ve

$$EG - F^2 = W^2 \tag{2.2.4}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.1: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. E^n de Riemann koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için *M* yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ olmak üzere *M* nin *ikinci temel form dönüşümü*

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M) \ ; h(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \tag{2.2.5}$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.5) eşitliği *Gauss denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.2.2: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $\forall X \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi^{\perp}(M)$ için M nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A : \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) \to \chi(M);\; A_{\xi} X = -\widetilde{\nabla}_X \xi + \nabla^{\perp}_X \xi \tag{2.2.6}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_{\xi} X$, ξ ya karşılık gelen şekil operatörü ve $\nabla^{\perp}$ ise $\chi^{\perp}(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. Herhangi $X,Y \in T_p(M)$ için

$$\left\langle A_{\xi} X, Y \right\rangle = \left\langle h(X,Y), \xi \right\rangle \tag{2.2.7}$$

dir. Bu operatör self-adjoint ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.6) eşitliği *Weingarten denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Ayrıca $\forall X,Y,Z \in T_p(M)$ için M yüzeyinin ikinci temel formu h nın kovaryant türevi

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

dir. Böylece *Codazzi denklemi*

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) \tag{2.2.8}$$

dir (Chen 1973).

Tanım 2.2.3: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u,v)$ yamasının 2. mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} ve normal vektör alanları $N_1, N_2, \ldots, N_{n-2}$ olmak üzere M nin *ikinci temel form katsayıları*

$$\begin{aligned} c_{11}^k &= \left\langle X_{uu}, N_k \right\rangle = \left\langle h(X_u, X_u), N_k \right\rangle, \\ c_{12}^k &= \left\langle X_{uv}, N_k \right\rangle = \left\langle h(X_u, X_v), N_k \right\rangle, \quad 1 \le k \le n-2 \\ c_{22}^k &= \left\langle X_{vv}, N_k \right\rangle = \left\langle h(X_v, X_v), N_k \right\rangle \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

şeklinde tanımlanır (Mello 2003).

Tanım 2.2.4: *M* yüzeyi $X : U \subset E^2 \to E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu durumda *M* yüzeyinin *Christoffel sembolleri* Γ_{ij}^{k} $(1 \le i, j, k \le 2)$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^{2} &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{12}^{1} &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^{2} &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{22}^{1} &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^{2} &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}
\end{aligned}
\tag{2.2.10}
$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\Gamma_{21}^{1} = \Gamma_{12}^{1}$ ve $\Gamma_{21}^{2} = \Gamma_{12}^{2}$ dir (Gray 1993).

Önerme 2.2.5: *M* yüzeyi $X : U \subset E^2 \to E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde $\forall X_u, X_v \in T_p(M)$ ve $\{N_1, N_2, ..., N_{n-2}\} \in T_p^{\perp}(M)$ için

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= \widetilde{\nabla}_{X_u} X_u = \Gamma_{11}^{1} X_u + \Gamma_{11}^{2} X_v + c_{11}^{1} N_1 + c_{11}^{2} N_2 + \ldots + c_{11}^{n-2} N_{n-2} \\
X_{uv} &= \widetilde{\nabla}_{X_u} X_v = \Gamma_{12}^{1} X_u + \Gamma_{12}^{2} X_v + c_{12}^{1} N_1 + c_{12}^{2} N_2 + \ldots + c_{12}^{n-2} N_{n-2} \\
X_{vv} &= \widetilde{\nabla}_{X_v} X_v = \Gamma_{22}^{1} X_u + \Gamma_{22}^{2} X_v + c_{22}^{1} N_1 + c_{22}^{2} N_2 + \ldots + c_{22}^{n-2} N_{n-2}
\end{aligned}
\tag{2.2.11}
$$

dir (Gray 1993).

Böylece (2.2.11), (2.2.5) ve (2.2.6) denklemleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.2.6: *M* yüzeyi $X : U \subset E^2 \to E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
h(X_u, X_u) &= c_{11}^{1} N_1 + c_{11}^{2} N_2 + \ldots + c_{11}^{n-2} N_{n-2} \\
h(X_u, X_v) &= c_{12}^{1} N_1 + c_{12}^{2} N_2 + \ldots + c_{12}^{n-2} N_{n-2} \\
h(X_v, X_v) &= c_{22}^{1} N_1 + c_{22}^{2} N_2 + \ldots + c_{22}^{n-2} N_{n-2}
\end{aligned}
\tag{2.2.12}
$$

dir.

Sonuç 2.2.7: *M* yüzeyi $X : D \subset E^2 \to E^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$h(X_u, X_u) = X_{uu} - \Gamma_{11}^1 X_u - \Gamma_{11}^2 X_v$$
$$h(X_u, X_v) = X_{uv} - \Gamma_{12}^1 X_u - \Gamma_{12}^2 X_v \tag{2.2.13}$$
$$h(X_v, X_v) = X_{vv} - \Gamma_{22}^1 X_u - \Gamma_{22}^2 X_v$$

dir.

Tanım 2.2.8: $X(u,v):(u,v) \in D \subset E^2$ regüler yaması ile verilen $M \subset E^n$ yüzeyinin *Gauss eğriliği*

$$K = \frac{1}{W^2} \sum_{i=1}^{n-2} (c_{11}^i c_{22}^i - (c_{12}^i)^2) \tag{2.2.14}$$

dir (Mello 2009).

Tanım 2.2.9: $M \subset E^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset E^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde her $\{X_1, X_2\} \in T_p(M)$ ve $\{N_1, N_2, ..., N_{n-2}\} \in T_p^{\perp}(M)$ ortonormal bazları için M nin *ortalama eğrilik vektörü*

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n-2} H_i N_i \tag{2.2.15}$$

dir. Burada

$$H_i = \frac{1}{2W^2} \sum_{i=1}^{n-2} \left(G c_{11}^i - 2F c_{12}^i + E c_{22}^i \right) \tag{2.2.16}$$

M nin *i.nci ortalama eğriliği*dir. Bununla birlikte M nin *ortalama eğriliği* $H = \left\| \vec{H} \right\|$ dir (Mello 2003).

3. E^n DE KENDİSİNE BENZER EĞRİLER

3.0. Giriş

Bu bölümde n-boyutlu Öklit uzayı E^n deki eğriler ele alınmıştır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda E^n deki eğriler ile ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır. İkinci kısımda E^n deki kendisine benzer eğriler ile ilgili temel sonuçlar verilmiştir.

3.1. Bir Eğrinin Eğrilik Vektörü

Tanım 3.1.1: $\gamma : I \to E^n$ birim hızlı parametrik bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin *eğrilik vektörü*

$$\vec{\kappa} : I \to E^n \,;\; \vec{\kappa}(s) = \gamma''(s) \tag{3.1.1}$$

biçiminde tanımlanır. Bununla birlikte

$$\|\vec{\kappa}\| : I \to [0,\infty) \,;\; \kappa = \|\vec{\kappa}(s)\| = \|\gamma''(s)\| \tag{3.1.2}$$

fonksiyonuna γ eğrisinin *eğriliği* denir (Gray 1993).

Y. Teorem 3.1.2: $\vec{u} : I \to E^n$ vektör değerli fonksiyonu verilsin. Bu taktirde

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}(t)}{\|\vec{u}(t)\|}\right) = \frac{\vec{u}'(t)}{\|\vec{u}(t)\|} - \frac{1}{\|\vec{u}(t)\|^2}\left(\frac{< \vec{u}(t), \vec{u}'(t) >}{\|\vec{u}(t)\|}\right)\vec{u}(t) \tag{3.1.3}$$

dir (Gray 1993).

İspat: $\vec{u}, \vec{v} : I \to E^n$ vektör değerli fonksiyonları verilsin. Analizde çarpımın türevi kuralı yardımıyla

$$\frac{d}{dt}\left(< \vec{u}(t), \vec{v}(t) >\right) = < \vec{u}'(t), \vec{v}(t) > + < \vec{u}(t), \vec{v}'(t) > \tag{3.1.4}$$

dir. Böylece

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\vec{u}(t)\right\|\right)=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{<\vec{u}(t),\vec{u}(t)>}\right)$$
$$=\frac{<\vec{u}'(t),\vec{u}(t)>+<\vec{u}(t),\vec{u}'(t)>}{2\sqrt{<\vec{u}(t),\vec{v}'(t)>}}$$
$$=\frac{<\vec{u}(t),\vec{u}'(t)>}{\left\|\vec{u}(t)\right\|}$$

yardımıyla

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}(t)}{\left\|\vec{u}(t)\right\|}\right)=\frac{\vec{u}'(t)}{\left\|\vec{u}(t)\right\|}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\left\|\vec{u}(t)\right\|}\right)\vec{u}(t)$$
$$=\frac{\vec{u}'(t)}{\left\|\vec{u}(t)\right\|}+\frac{-\frac{d}{dt}\left(\left\|\vec{u}(t)\right\|\right)}{\left\|\vec{u}(t)\right\|^2}\vec{u}(t) \tag{3.1.5}$$
$$=\frac{\vec{u}'(t)}{\left\|\vec{u}(t)\right\|}-\frac{1}{\left\|\vec{u}(t)\right\|^2}\left(\frac{<\vec{u}(t),\vec{u}'(t)>}{\left\|\vec{u}(t)\right\|}\right)\vec{u}(t)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3: $\gamma : I \to E^n$ keyfi parametreli regüler parametrik bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin eğrilik vektörü $\vec{\kappa} : I \to E^n$;

$$\vec{\kappa}(t)=\frac{1}{\left\|\gamma'(t)\right\|^2}\left(\gamma''(t)-\frac{<\gamma'(t),\gamma''(t)>}{\left\|\gamma'(t)\right\|^2}\gamma'(t)\right) \tag{3.1.6}$$

dir (Gray 1993).

İspat: γ keyfi parametreli regüler bir eğri olsun. Böylece γ eğrisinin birim hızlı yeniden parametrelendirmesi $\beta : J \to E^n$; $\beta=\gamma\circ h$ olacak şekilde vardır. Böylece

$$\beta'(s)=\frac{d}{ds}\left(\gamma(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(\gamma(t)\right)\frac{dt}{ds};\ h(s)=t$$

dir. Ayrıca $\left\|\beta'(s)\right\|=1$ ve $\frac{ds}{dt}=\left\|\gamma'(t)\right\|$ olduğundan $\beta'(s)=\frac{\gamma'(t)}{\left\|\gamma'(t)\right\|}$ elde edilir. Böylece

$$\vec{\kappa}(s) = \beta''(s) = \frac{d}{ds}\left(\beta'(s)\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)\frac{dt}{ds} \tag{3.1.7}$$

dir. Ayrıca Y. Teorem 3.1.2 yardımıyla

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|} - \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}\left(\frac{<\gamma'(t),\gamma''(t)>}{\|\gamma'(t)\|}\right)$$

elde edilir. Son eşitlik (3.1.7) de yerine yazılıp $\frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|$ eşitliği kullanılırsa (3.1.6) elde edilir. □

Teorem 3.1.3 ün bir sonucu aşağıdaki gibidir.

Sonuç 3.1.4: $\gamma : I \to E^n$ keyfi parametreli regüler bir eğri olsun. Bu taktirde γ eğrisinin eğrilik vektörü $\vec{\kappa}(t)$ olmak üzere $<\vec{\kappa}(t),\gamma'(t)>=0$ dır (Gray 1993).

Tanım 3.1.5: $\gamma : I \to E^n$ keyfi parametreli regüler bir eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{u} : I \to E^n$; $\vec{u}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ biçiminde tanımlanır. γ eğrisi regüler ve $\|\gamma'(t)\| > 0$ olduğundan $\vec{u}(t)$ vektörü iyi tanımlıdır. Ayrıca başka bir vektör değerli fonksiyon $\vec{v} : I \to E^n$; nin *dik izdüşümü*

$$\vec{v}^{\perp}(t) = \vec{v}(t) - <\vec{v}(t),\vec{u}(t)> \vec{u}(t) \tag{3.1.8}$$

şeklinde tanımlanır (Gray 1993).

Sonuç 3.1.6: Keyfi parametreli bir γ eğrisinin eğrilik vektörü $\vec{\kappa}(t)$ olmak üzere

$$\vec{\kappa}(t) = \frac{\gamma''^{\perp}(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} \tag{3.1.9}$$

dir (Gray 1993).

İspat: (3.1.8) eşitliğinden

$$\gamma''^{\perp}(t)=\gamma''(t)-\frac{<\gamma'(t),\gamma''(t)>}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma'(t) \tag{3.1.10}$$

elde edilir. Böylece (3.1.10) eşitliği (3.1.6) da yerine yazılırsa (3.1.9) elde edilir. □

3.2. E^n de Kendisine Benzer Eğriler

$\gamma : I \to E^n$ türevlenebilir bir eğri olsun. Bu taktirde γ eğrisinin türevlerinden

$$\begin{aligned}\gamma'(t)&=\|\gamma'(t)\|v_1\\ \gamma''(t)&=\frac{<\gamma''(t),\gamma'(t)>}{\|\gamma'(t)\|}v_1(s)+\|\gamma'(t)\|^2\kappa_1 v_2(s)\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.6) eşitliği yardımıyla γ eğrisinin eğrilik vektörü

$$\begin{aligned}\vec{\kappa}(t)&=\frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2}\left(\gamma''(t)-\frac{<\gamma'(t),\gamma''(t)>}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma'(t)\right)\\ &=\frac{1}{v^2}\left(v^2\kappa_1 v_2(t)\right)\\ &=\kappa_1 v_2(t)\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

bulunur. Buradan

$$\|\vec{\kappa}(t)\|=\kappa_1(t) \tag{3.2.3}$$

dir.

Tanım 3.2.1: $\gamma : I \to E^n$ türevlenebilir bir eğri olsun. Bu taktirde

$$\vec{\kappa}(t)+\lambda\gamma(t)^{\perp}=0 \tag{3.2.4}$$

eşitliği sağlanırsa γ ya *kendisine benzer eğri* denir. Burada

$$\gamma^{\perp}(t)=\gamma(t)-\frac{<\gamma'(t),\gamma(t)>}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma'(t)$$

ifadesi γ eğrisinin dik izdüşümüdür.

Önerme 3.2.2: $\gamma : I \to E^n$ türevlenebilir bir eğri olsun. Bu taktirde γ eğrisinin kendisine benzer eğri olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin düz bir doğru yada 1.nci Frenet eğriliğinin

$$\kappa_1(t) = -\lambda\langle v_2(t), \gamma(t)\rangle \tag{3.2.5}$$

olmasıdır.

İspat: (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.4) eşitlikleri ve $\langle \vec{\kappa}(t), \gamma^{\perp}(t)\rangle = \langle \vec{\kappa}(t), \gamma(t)\rangle$ yardımıyla

$$\begin{aligned}&\langle \vec{\kappa}(t), \vec{\kappa}(t)\rangle + \lambda\langle \vec{\kappa}(t), \gamma(t)^{\perp}\rangle = (\kappa_1(t))^2 + \lambda\kappa_1(t) < v_2(t), \gamma(t) > \\ &= \kappa_1(t)\big(\kappa_1(t) + \lambda\langle v_2(t), \gamma(t)\rangle\big) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\kappa_1(t) = 0$ yada $\kappa_1(t) + \lambda\langle v_2(t), \gamma(t)\rangle = 0$ dir .□

Tanım 3.2.3: $\gamma : I \to IE^n$ regüler bir eğri olsun. Bu taktirde γ nın 1. eğriliği sabit ise bu eğriye *Salkowski eğrisi* adı verilir [Salkowski 1909].

Örnek 3.2.4: 3-boyutlu Öklit uzayı E^3 de sabit k_1 eğrilikli eğrilerin karakterizasyonu ilk olarak E. Salkowski tarafından verilmiştir (Salkowski 1909). Bu eğrilerin parametrik gösterimi

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}}\left(\frac{1-n}{4(1+2n)}\sin(1+2n)t + \frac{1+n}{4(1-2n)}\sin(1-2n)t + \frac{1}{2}\sin t\right)\\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left(\frac{1-n}{4(1+2n)}\cos(1+2n)t + \frac{1+n}{4(1-2n)}\cos(1-2n)t + \frac{1}{2}\cos t\right)\\ z(t) &= \frac{1}{4m\sqrt{1+m^2}}\cos 2nt\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $n \neq \frac{1}{2}, n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}; \quad m \in IR / \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right\}$ dır.

Tanım 3.2.5: $\gamma \subset E^n$ regüler bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi E^n nin (n-ı)-boyutlu bir hiper küresinde yatıyor ise γ eğrisine küresel eğri denir (Kocayiğit ve ark. 2003).

Önerme 3.2.6: $\gamma \subset E^n$ eğrisi kendisine benzer bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi küresel bir eğri ise bu taktirde γ eğrisi Salkowski eğrisidir.

İspat: $\gamma \subset E^n$ küresel bir eğri olduğundan $\|\gamma\| = \langle \gamma, \gamma \rangle = 1$ dır. Buradan

$$\frac{d}{dt}\langle \gamma, \gamma \rangle = 2\langle \gamma', \gamma \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{d}{dt}\langle \gamma', \gamma \rangle = \langle \gamma'', \gamma \rangle + \langle \gamma', \gamma' \rangle = 0 \tag{3.2.6}$$

bulunur. Ayrıca $\langle \gamma', \gamma' \rangle = v^2$ olup $\gamma'' = v' v_1 + v^2 \kappa_1 v_2$ eşitlikleri (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$v'\langle v_1, \gamma \rangle + v^2 \left(\kappa_1 \langle v_2, \gamma \rangle + 1 \right) = 0 \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.2.5) eşitliği yardımıyla $\langle v_2(t), \gamma(t) \rangle = -\dfrac{\kappa_1(t)}{\lambda}$ dır. Buradan

$$v'\langle v_1, \gamma \rangle + v^2 \left(1 - \frac{\kappa_1^{\,2}(t)}{\lambda} \right) = 0 \tag{3.2.8}$$

dır. Ayrıca $\langle \gamma', \gamma \rangle = 0$ olduğundan $\langle v_1, \gamma \rangle = 0$ bulunur. Böylece (3.2.8) den $\kappa_1^{\,2}(t) = \lambda$ sonucuna varılır. O halde, Tanım 3.2.3 gereği γ bir Salkowsi eğrisidir. □

3.3. Kendisine Benzer Düzlemsel Eğriler

$\alpha(t) \subset E^2$ eğrisi $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ keyfi parametrelendirilme ile verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \left(x'(t), y'(t) \right), \\ v_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \left(-y'(t), x'(t) \right) \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

dir. Böylece α eğrisinin eğriliği

$$\kappa_1(t) = \frac{< v_1'(t), v_2(t) >}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} \tag{3.3.2}$$

dir. Eğer α eğrisi kendisine benzer bir eğri ise Önerme 3.2.2. den

$$\kappa_1(t)\left(\kappa_1(t) + \lambda\langle v_2(t), \gamma(t)\rangle\right) = 0$$

dir. Buradan

$$(x'y'' - x''y')\left\{x'y'' - x''y' + \lambda\left((x')^2 + (y')^2\right)(x'y - xy')\right\} = 0$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir;

Teorem 3.3.1: $\alpha \subset E^2$ eğrisi $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ parametrelendirilmesi ile verilsin. Bu taktirde α eğrisi düz bir doğrudur yada

$$(x'y'' - x''y')\left\{x'y'' - x''y' + \lambda\left((x')^2 + (y')^2\right)(x'y - xy')\right\} = 0 \tag{3.3.3}$$

eşitliğini sağlayan düzlemsel bir eğridir.

Örnek 3.3.2: $\alpha \subset E^2$ eğrisi $\alpha(t) = (t, f(t))$ parametrelendirilmesi ile verilsin. Bu durumda (3.3.3) eşitliğinden

$$f(t) = at + b \quad \text{yada} \; f''(t) + \lambda\left(-tf'(t) + f(t)\right)\left(1 + (f'(t))^2\right) = 0$$

elde edilir.

Örnek 3.3.3: $\alpha(t) = (\cos(r(t)), \sin(r(t)))$ parametrelendirilmesi ile verilen birim çemberi $\lambda = 1$ durumunda kendisine benzer bir eğridir.

3.4. Kendisine Benzer Uzay Eğrileri

$\alpha \subset E^3$ eğrisi $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ keyfi parametrelendirilme ile verilsin. α eğrisinin türevleri

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$
$$\alpha''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

olmak üzere

$$\alpha' \times \alpha'' = (y'z'' - z'y'', z'x'' - x'z'', x'y'' - y'x'')$$

elde edilir. Burada işlem kolaylığı için

$$a(t) = y'z'' - z'y'',$$
$$b(t) = z'x'' - x'z'',$$
$$c(t) = x'y'' - y'x'',$$

alınacaktır. Böylece,

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = \sqrt{a^2(t) + b^2(t) + c^2(t)}$$

dır. Bu eğrinin Frenet vektörleri

$$v_1(t) = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

$$v_2(t) = \frac{1}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)(a^2(t) + b^2(t) + c^2(t))}} (bz' - cy', cx' - az', ay' - bx'), \quad (3.4.1)$$

$$v_3(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2(t) + b^2(t) + c^2(t)}} (a(t), b(t), c(t)),$$

dir. Böylece α eğrisinin eğriliği

$$\kappa_1(t) = \frac{\sqrt{a^2(t) + b^2(t) + c^2(t)}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4.2)$$

olarak bulunur. Eğer α eğrisi kendisine benzer bir eğri ise Önerme 3.2.2. den

$$\kappa_1(t)(\kappa_1(t) + \lambda\langle v_2(t), \alpha(t)\rangle) = 0$$

dir. Buradan

$$a^2+b^2+c^2+\lambda\left((x')^2+(y')^2+(z')^2\right)\left(x(bz'-cy')+y(cx'-az')+z(ay'-bx')\right)=0$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir;

Teorem 3.4.1: $\alpha \subset E^3$ eğrisi $\alpha(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ parametrelendirilmesi ile verilsin. Bu taktirde α eğrisi düz bir doğrudur yada

$$a^2+b^2+c^2+\lambda\left((x')^2+(y')^2+(z')^2\right)\left(x(bz'-cy')+y(cx'-az')+z(ay'-bx')\right)=0 \qquad (3.4.3)$$

eşitliğini sağlayan bir eğridir.

4. E^3 DE KENDİSİNE BENZER YÜZEYLER

4.0. Giriş

Bu bölümde 3-boyutlu Öklit uzayı E^3 deki kendisine benzer yüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda E^3 de kendisine benzer yüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir. İkinci kısımda Monge yaması ile, üçüncü kısımda dönel yüzey yaması ve dördüncü kısımda ise paralel yüzey yaması ile verilen kendisine benzer yüzeyler ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. E^3 de Kendisine Benzer Yüzeyler

$M \subset E^3$ yüzeyi

$$X(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) \tag{4.1.1}$$

regüler yaması ile verilsin. M yüzeyinin 1'nci ve 2'nci temel form katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

ve

$$\vec{N} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

birim normal vektör olmak üzere

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

dir. Hesaplama kolaylığından H.Anciaux tarafından

$$\bar{e} = \langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle$$
$$\bar{f} = \langle X_{uv}, X_u \times X_v \rangle \tag{4.1.4}$$
$$\bar{g} = \langle X_{vv}, X_u \times X_v \rangle$$

alınarak $M \subset E^3$ yüzeyinin ortalama eğriliği

$$2H = \frac{\bar{e}G + \bar{g}E - 2\bar{f}F}{(EG - F^2)^{3/2}} \tag{4.1.5}$$

biçiminde tanımlanır (Anciaux 2006).

Bununla birlikte bir $M \subset E^3$ yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\overrightarrow{H} = HN$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 4.1.1: $M \subset E^3$ yüzeyi

$$\vec{H} + \lambda X^{\perp} = 0$$

eşitliğini sağlarsa, bu yüzeye *kendisine benzer yüzey* denir (Anciaux 2006). Burada $X^{\perp}$ vektörü X in normal bileşenidir.

Önerme 4.1.2: $M \subset E^3$ yüzeyinin kendisine benzer yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\bar{e}G + \bar{g}E - 2\bar{f}F + 2\lambda(EG - F^2)\det(X, X_u, X_v) = 0 \tag{4.1.6}$$

olmasıdır (Anciaux 2006).

İspat: $(\Rightarrow)$: M yüzeyi kendisine benzer bir yüzey olsun. Bu taktirde $\vec{H} + \lambda X^{\perp} = 0$ eşitliği sağlanır. Böylece kendisine benzer yüzey olma şartı

$$H + \lambda < X, N >= 0 \tag{4.1.7}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\langle X,N\rangle=\left\langle X,\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}\right\rangle=\frac{1}{\|X_u\times X_v\|}\langle X,X_u\times X_v\rangle=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det(X,X_u,X_v) \quad (4.1.8)$$

bulunur. Böylece (4.1.5) ve (4.1.8) eşitlikleri (4.1.7) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlenirse (4.1.6) elde edilir.
$(\Leftarrow)$: Tersi benzer şekilde gösterilebilir.□

Sonuç 4.1.3: $M\subset E^3$ yüzeyi, $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen sabit ortalama eğrilikli $(H\neq 0)$ bir yüzey olsun. M yüzeyinin kendisine benzer yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$(EG-F^2)\det(X,X_u,X_v)\neq 0$$

olmasıdır.

İspat: M yüzeyi kendisine benzer yüzey olsun. Bu taktirde $\vec{H}+\lambda X^{\perp}=0$ eşitliği sağlanır. Böylece (4.1.7) ve (4.1.8) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. □

4.2. Monge Yamasıyla Verilen Yüzeyler

$M\subset E^3$ yüzeyi

$$X(u,v)=(u,v,f(u,v)) \quad (4.2.1)$$

biçiminde Monge yaması ile verilsin (O'Neill 1997). Bu taktirde X yamasının kısmi türevleri

$$\begin{aligned}X_u&=(1,0,f_u)\\X_v&=(0,1,f_v)\\X_{uu}&=(0,0,f_{uu})\\X_{uv}&=(0,0,f_{uv})\\X_{vv}&=(0,0,f_{vv})\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + f_u^2$$
$$F = \langle X_u, X_v \rangle = f_u f_v \qquad (4.2.2)$$
$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + f_v^2$$

ve

$$\bar{e} = \langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle = f_{uu}$$
$$\bar{f} = \langle X_{uv}, X_u \times X_v \rangle = f_{uv} \qquad (4.2.3)$$
$$\bar{g} = \langle X_{vv}, X_u \times X_v \rangle = f_{vv}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\det(X, X_u, X_v) = f - (uf_u + vf_v) \qquad (4.2.4)$$

dir. Böylece (4.2.2)– (4.2.4) eşitlikleri (4.1.6) eşitliğinde yazılırsa

$$f_{uu}(1+f_v^2) + f_{vv}(1+f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv} + 2\lambda(1+f_u^2+f_v^2)(f - uf_u - vf_v) = 0 \qquad (4.2.5)$$

bulunur (Etemoğlu ve ark. 2013).
Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.1: $M \subset E^3$ yüzeyi (4.2.1) Monge yamasıyla verilen bir yüzey olsun. M yüzeyinin kendisine benzer yüzey olması için gerek ve yeter şart (4.2.5) eşitliğinin sağlanmasıdır (Etemoğlu ve ark. 2013).

Tanım 4.2.2: $M \subset E^3$ yüzeyi

$$\alpha(u) = (u, 0, h(u))$$
$$\beta(v) = (0, v, g(v)) \qquad (4.2.6)$$

uzay eğrilerinin toplamı olarak tanımlanırsa bu yüzeye *öteleme yüzeyi* denir. Bu nedenle $M \subset E^3$ öteleme yüzeyi

$$X(u,v) = (u, v, h(u) + g(v)) \qquad (4.2.7)$$

Monge yaması ile tanımlanır (Liu 1999).

Sonuç 4.2.3: $M \subset E^3$ öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin kendisine benzer yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$h''(1+(g')^2)+g''(1+(h')^2)+2\lambda(1+(g')^2+(h')^2)(h+g-uh'-vg')=0 \qquad (4.2.8)$$

olmasıdır.

İspat: $M \subset E^3$ bir öteleme yüzeyi olduğundan $f(u,v)=h(u)+g(v)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} f_u(u,v) &= h'(u) \\ f_v(u,v) &= g'(v) \\ f_{uu}(u,v) &= h''(u) \\ f_{uv}(u,v) &= 0 \\ f_{vv}(u,v) &= g''(v) \end{aligned}$$

eşitlikleri (4.2.5) de yerine yazılırsa (4.2.8) elde edilir.
Tersi aşikardır.□

Örnek 4.2.4: $f(u)=\frac{1}{a}\ln|\cos(au)|$ ve $g(v)=-\frac{1}{a}\ln|\cos(av)|$ alındığında elde edilen öteleme yüzeyi Sherk yüzeyi olup minimal bir yüzeydir. Bu yüzey $\lambda=0$ durumunda kendisine benzer yüzeydir (Liu 1999).

Teorem 4.2.5: M öteleme yüzeyi, sabit ortalama eğrilikli $(H \neq 0)$ bir yüzey olsun. Bu taktirde M yüzeyi

$$\begin{aligned} h(u) &= -\frac{\sqrt{1-a^2}}{2H}\sqrt{1-4H^2u^2} \\ g(v) &= -av \end{aligned} \qquad (4.2.9)$$

parametrizasyonu ile verilen bir yüzeydir. Burada $a<1$ ve sıfırdan farklı pozitif bir sabittir (Liu 1999).
Böylece (4.2.8)–(4.2.9) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.6: 3-boyutlu Öklit uzayı E^3 de sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli kendisine benzer bir öteleme yüzeyi yoktur.

İspat: $M \subset E^3$ yüzeyi (4.2.7) yaması ile verilen sabit ortalama eğrilikli $(H \neq 0)$ bir öteleme yüzeyi olsun. Bu taktirde M yüzeyinin kendisine benzer bir yüzey olması için (4.2.8) eşitliğin sağlanması gerekir. Yani

$$H + 2\lambda(h + g - uh' - vg') = 0 \tag{4.2.10}$$

olmalıdır. Böylece H ve λ sabit olduklarından (4.2.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned} h(u) - uh'(u) &= c_1 \\ g(v) - vg'(v) &= c_2 \end{aligned}$$

($c_i \in R$ reel sabit) olmalıdır. Bu denklem sistemin çözümünden

$$h(u) = au + c_1, \quad g(v) = bv + c_2 \tag{4.2.11}$$

elde edilir. Bu değerler

$$H = \frac{h''(1+(g')^2) + g''(1+(h')^2)}{2(1+(g')^2 + (h')^2)}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa $H = 0$ bulunur. Bu da bir çelişki oluşturur. Bu nedenle M yüzeyi kendisine benzer olamaz.□

4.3. Dönel Yüzeyler

$M \subset E^3$ yüzeyi

$$X(u,v) = (f(u), g(u)\cos v, g(u)\sin v) \tag{4.3.1}$$

yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun (O'Neill 1997). Bu taktirde

$$\begin{aligned} X_u &= (f_u, g_u \cos v, g_u \sin v) \\ X_v &= (0, -g\sin v, g\cos v) \\ X_{uu} &= (f_{uu}, g_{uu}\cos v, g_{uu}\sin v) \\ X_{uv} &= (0, -g_u \sin v, g_u \cos v) \\ X_{vv} &= (0, -g\cos v, -g\sin v) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = f_u^2 + g_u^2$$
$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0 \qquad (4.3.2)$$
$$G = \langle X_v, X_v \rangle = g^2$$

ve

$$\bar{e} = \langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle = g(g_u f_{uu} - f_u g_{uu})$$
$$\bar{f} = \langle X_{uv}, X_u \times X_v \rangle = 0 \qquad (4.3.3)$$
$$\bar{g} = \langle X_{vv}, X_u \times X_v \rangle = g^2 f_u$$

elde edilir. Ayrıca

$$\det(X, X_u, X_v) = g(fg_u - gf_u) \qquad (4.3.4)$$

dir. Böylece (4.3.2) – (4.3.4) eşitlikleri (4.1.6) eşitliğinde yazılırsa

$$g(g_u f_{uu} - f_u g_{uu}) + f_u(f_u^2 + g_u^2) + 2\lambda g(f_u^2 + g_u^2)(fg_u - gf_u) = 0 \qquad (4.3.5)$$

elde edilir.

Teorem 4.3.1: $M \subset E^3$ yüzeyi (4.3.1) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. M yüzeyinin kendisine benzer yüzey olması için gerek ve yeter şart (4.3.5) eşitliğinin sağlanmasıdır (Etemoğlu ve ark. 2013).

Örnek 4.3.2: $M \subset E^3$ yüzeyi (4.3.1) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. Bu taktirde

$$f(u) = u$$
$$g(u) = a\cosh(\frac{u}{a} + b)$$

alındığında M yüzeyi katenoid olup minimal bir yüzeydir. Böylece $\lambda = 0$ durumunda kendisine benzer yüzey olur (Etemoğlu ve ark. 2013).

Örnek 4.3.3: $M \subset E^3$ yüzeyi (4.3.1) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. Bu taktirde

$$f(u) = u, \; g(u) = sabit$$

değerleri için M yüzeyi bir silindir olup düz bir yüzeydir. Böylece $g = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ durumunda kendisine benzer yüzey olur (Etemoğlu ve ark. 2013).

4.4. Paralel Yüzeyler

Bu kısımda E^3 ün paralel yüzeyleri ele alınmıştır. Bir M yüzeyi ile onun M^* paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile ilgili bağıntılar elde edilmiştir.

Tanım 4.4.1: $M \subset E^3$ yüzeyi $X(u,v)$ yaması ile verilsin. Bu taktirde M yüzeyinin birim normal vektörü $\vec{N}(u,v)$ olmak üzere

$$X^*(u,v) = X(u,v) + \varepsilon\, \vec{N}(u,v) \tag{4.4.1}$$

parametrelendirmesine sahip yüzeye M yüzeyinin *paralel yüzeyi* denir (Görgülü 1989, Gray 1993).

Teorem 4.4.2: $M \subset E^3$ yüzeyinin paralel yüzeyi M^* olsun. M yüzeyinin şekil operatörü A ve k_1, k_2 ve k_1^*, k_2^* sırasıyla M ve M^* yüzeyinin asli eğrilikleri olmak üzere $\det(I - \varepsilon A) > 0$ ise

$$k_i^* = \frac{k_i}{1 - \varepsilon k_i} \qquad i = 1, 2 \tag{4.4.2}$$

dir (Gray 1993).

Teorem 4.4.3: $M \subset E^3$ yüzeyinin paralel yüzeyi M^* olsun. Bu taktirde *K, H* ve K^*, H^* sırasıyla *M* ve M^* yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri olmak üzere

$$K^* = \frac{\kappa}{1 - \frac{\varepsilon}{2} H + \varepsilon^2 \kappa} \tag{4.4.3}$$

$$H^{*}=\frac{H-\varepsilon\kappa}{1-\frac{\varepsilon}{2}H+\varepsilon^{2}\kappa} \qquad (4.4.4)$$

dır (Carmo 1983), (Hacısalihoğlu 1983) ve (Görgülü, 1989).
Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.4.4: *M* yüzeyinin paraleli olan M^{*} yüzeyi kendisine benzer bir yüzey olsun. Bu taktirde *M* yüzeyinin kendisine benzer bir yüzey olması için Gauss ve ortalama eğrilikleri sabit olmalıdır.

İspat: M^{*} yüzeyi kendisine benzer yüzey olsun. Bu durumda

$$H^{*}+\lambda^{*}\left\langle X^{*},N\right\rangle=0 \qquad (4.4.5)$$

dır. M^{*} yüzeyinin ortalama eğriliği (4.4.4) ve (4.4.1) eşitliği (4.4.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{H-\varepsilon\kappa}{1-\frac{\varepsilon}{2}H+\varepsilon^{2}\kappa}+\lambda^{*}\left\langle X+\varepsilon N,N\right\rangle=0$$

bulunur. Son eşitlik düzenlenirse

$$\frac{H}{1-\frac{\varepsilon}{2}H+\varepsilon^{2}\kappa}+\lambda^{*}\left\langle X,N\right\rangle-\frac{\varepsilon K}{1-\frac{\varepsilon}{2}H+\varepsilon^{2}K}+\lambda^{*}\varepsilon=0 \qquad (4.4.6)$$

elde edilir. Böylece

$$H+\lambda^{*}\left\langle X,N\right\rangle=0$$

eşitliğinin sağlanması için $-\frac{\varepsilon}{2}H+\varepsilon^{2}K=0$ ve $\lambda^{*}=K$ olmalıdır. Buradan istenilen sonuç elde edilir. □

5. E^4 DE KENDİSİNE BENZER YÜZEYLER

5.0. Giriş

Bu bölümde E^4 deki kendisine benzer yüzeyler ile ilgili temel sonuçlar verilmiştir.

5.1. E^4 de Kendisine Benzer Yüzeyler

Tanım 5.1.1: M yüzeyi $X: U \to E^4$ lokal parametrizasyonu ile verilsin. M yüzeyi

$$\left\langle \vec{H}, N_i \right\rangle + \lambda \langle X, N_i \rangle = 0, \; i = 1,2 \tag{5.1.1}$$

eşitliğini sağlarsa bu yüzeye *kendisine benzer yüzey* denir. Burada N_i vektörleri yüzeyin birim normal vektörleridir. Böylece (5.1.1) eşitliği düzenlenirse

$$\langle X_{uu}, N_i \rangle G + \langle X_{vv}, N_i \rangle E - 2\langle X_{uv}, N_i \rangle F = -2\lambda \left(EG - F^2\right)\langle X, N_i \rangle \tag{5.1.2}$$

elde edilir.

Önerme 5.1.2: $M \subset E^4$ yüzeyi $X(u,v) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u), x_4(u))$ regüler yamasıyla verilsin. M yüzeyinin kendisine benzer yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} c_{11}^1 G + c_{22}^1 E - 2c_{12}^1 F &= -2\lambda \left(EG - F^2\right)\langle X, N_1 \rangle \\ c_{11}^2 G + c_{22}^2 E - 2c_{12}^2 F &= -2\lambda \left(EG - F^2\right)\langle X, N_2 \rangle \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

olmasıdır (Etemoğlu ve ark. 2013).

İspat: (2.2.9) eşitlikleri kullanılarak (5.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 5.1.3: $\alpha : R \to E^3$, $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ uzay eğrisi ve $\beta : R \to E^2$, $\beta(v) = (g_1(v), g_2(v))$ düzlem eğrilerinin küresel çarpım yüzeyi

$$X = \alpha \otimes \beta : E^2 \to E^4 \; ; \; X(u,v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u)g_1(v), f_3(u)g_2(v))$$

$u \in \mathrm{I} = (u_0, u_1), v \in J = (v_0, v_1)$ yaması ile tanımlanır (Jaklic ve ark. 2000). Burada $f_1(u) = 0$ yada $f_2(u) = 0$ olduğunda $X(u,v) = \alpha \otimes \beta : E^2 \to E^3$ yaması düzlemsel eğrilerinin küresel çarpımına dönüşür.

Son zamanlarda G.Ganchev ve V.Milousheva $\alpha(u)=(f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ uzay eğrisi ve $\beta(v)=(\cos v, \sin v)$ çemberinin genel çarpımını

$$X(u,v)=\alpha(u)\otimes\beta(v)=(f_1(u), f_2(u), f_3(u)\cos v, f_3(u)\sin v)\,;\, u\in \mathrm{I}, 0\leq v<2\pi \qquad (5.1.4)$$

küresel çarpım yüzeyi olarak ele almışlardır. Burada α birim hızlı eğri olup $(f_1')^2+(f_2')^2+(f_3')^2=1$, $f_3>0$ şartları sağlanır (Ganchev ve Milousheva 2008). (5.1.3) yamasıyla verilen yüzeyler Ganchev-Milousheva rotasyon yüzeyleri olarak adlandırılır (Bulca 2012).

Önerme 5.1.4: $M\subset E^4$ yüzeyi (5.1.4) yamasıyla verilen küresel çarpım yüzeyi olsun. Bu taktirde M yüzeyinin kendisine benzer olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa^2 f_3 - f_3'' + 2\lambda f_3(f_1 f_1'' + f_2 f_2'' + f_3 f_3'') = 0$$

ve

$$2\lambda f_3\{f_1(f_2' f_3'' - f_3' f_2'') + f_2(f_1' f_3'' - f_3' f_1'') + f_3(f_1' f_2'' - f_2' f_1'')\} - \kappa_1 = 0$$

olmasıdır (Etemoğlu ve ark. 2013).

İspat: $X(u,v)=(f_1(u), f_2(u), f_3(u)\cos v, f_3(u)\sin v)$ yamasının kısmi türevleri

$$\frac{\partial X}{\partial u}=(f_1', f_2', f_3'\cos v, f_3'\sin v)$$
$$\frac{\partial X}{\partial v}=(0,0,-f_3\sin v, f_3\cos v)$$

olmak üzere M yüzeyinin 1. Temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E&=\langle X_u(u,v), X_u(u,v)\rangle=1\\ F&=\langle X_u(u,v), X_v(u,v)\rangle=0\\ G&=\langle X_v(u,v), X_v(u,v)\rangle=f_3^2(u)\end{aligned} \qquad (5.1.5)$$

dır. Ayrıca $X(u,v)$yamasının 2. Kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{uu}(u,v)&=(f_1'', f_2'', f_3''\cos v, f_3''\sin v)\\ X_{uv}(u,v)&=(0,0,-f_3'\sin v, f_3'\cos v)\\ X_{vv}(u,v)&=(0,0,-f_3\cos v,-f_3\sin v)\end{aligned} \qquad (5.1.6)$$

dır. Ayrıca M yüzeyinin birim normal vektörleri

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{\kappa}\left(f_1'', f_2'', f_3''\cos v, f_3''\sin v\right) \\
N_2 &= \frac{1}{\kappa}\left(f_2' f_3'' - f_2'' f_3', f_1'' f_3' - f_1' f_3'', (f_1' f_2'' - f_1'' f_2')\cos v, (f_1' f_2'' - f_1'' f_2')\sin v\right)
\end{aligned}
\tag{5.1.7}
$$

olmak üzere (5.1.6) ve (5.1.7) eşitlikleri (2.2.9) da yerine yazılırsa M yüzeyinin 2. Temel form katsayıları

$$
\begin{aligned}
c_{11}^1 &= \left\langle X_{uu}(u,v), N_1 \right\rangle = \kappa, \\
c_{12}^1 &= \left\langle X_{uv}(u,v), N_1 \right\rangle = 0, \\
c_{22}^1 &= \left\langle X_{vv}(u,v), N_1 \right\rangle = \frac{-f_3 f_3''}{\kappa}, \\
c_{11}^2 &= \left\langle X_{uu}(u,v), N_2 \right\rangle = 0, \\
c_{12}^2 &= \left\langle X_{uv}(u,v), N_2 \right\rangle = 0, \\
c_{22}^2 &= \left\langle X_{vv}(u,v), N_2 \right\rangle = \frac{-f_3 \kappa_1}{\kappa}.
\end{aligned}
\tag{5.1.8}
$$

bulunur. Burada

$$\kappa = \sqrt{(f_1'')^2 + (f_2'')^2 + (f_3'')^2}$$

α eğrisinin eğriliği ve

$$\kappa_1 = f_1' f_2''(u) - f_1'' f_2'(u)$$

α eğrisinin Oe_1e_2 düzlemine izdüşümü olan $\alpha_1(u) = (f_1(u), f_2(u))$ eğrisinin eğriliğidir.

(5.1.5) ve (5.1.8) eşitlikleri (5.1.3) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.5: $M \subset E^4$ yüzeyi (5.1.4) regüler yamasıyla verilen küresel çarpım yüzeyi olsun. $\kappa^2 f_3 - f_3'' = 0$ ve $\kappa_1 = 0$ ise M yüzeyi minimaldir ve $\lambda = 0$ için kendisine benzer yüzeydir (Etemoğlu ve ark. 2013).

İspat: (5.1.8) eşitlikleri (2.2.15) de yerine yazılırsa M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{f_3''}{2\kappa f_3}\right)N_1 - \frac{\kappa_1}{2\kappa f_3}N_2$$

elde edilir. Böylece M yüzeyinin minimal olması için $\kappa^2 f_3 - f_3'' = 0$ ve $\kappa_1 = 0$ şartları sağlanır (Bulca ve ark. 2012). Buradan $\lambda = 0$ durumunda istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 5.1.6: $X : U \to E^4$ bir dönüşüm olsun. f ve g türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$X(u,v) = (u, v, f(u,v), g(u,v)) \tag{5.1.9}$$

parametrizasyonuna E^4 de *Monge yaması* denir (Aminov 1994).

Önerme 5.1.7: M yüzeyi Monge yamasıyla verilen türevlenebilir bir yüzey olsun. Bu taktirde M yüzeyinin kendisine benzer bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$f_{uu}G + f_{vv}E + 2f_{uv}F + 2\lambda\left(EG - F^2\right)\left(f - uf_u - vf_v\right) = 0$$

ve

$$\begin{aligned}&\left(Ag_{uu} - Bf_{uu}\right)G + \left(Ag_{vv} - Bf_{vv}\right)E - 2\left(Ag_{uv} - Bf_{uv}\right)F \\ &+ 2\lambda\left(EG - F^2\right)\left\{Ag - Bf + u\left(Bf_u - Ag_u\right) + v\left(Bf_v - Ag_v\right)\right\} = 0\end{aligned}$$

olmasıdır. Burada

$$\begin{aligned}E &= 1 + \left(f_u\right)^2 + \left(g_u\right)^2, \\ F &= f_u f_v + g_u g_v, \\ G &= 1 + \left(f_v\right)^2 + \left(g_v\right)^2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}A &= 1 + \left(f_u\right)^2 + \left(f_v\right)^2, \\ B &= f_u g_u + f_v g_v, \\ C &= 1 + \left(g_u\right)^2 + \left(g_v\right)^2\end{aligned}$$

dır (Etemoğlu ve ark. 2013).

İspat: $X(u,v) = (u, v, f(u,v), g(u,v))$ yamasının kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= \left(1, 0, f_u, g_u\right) \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \left(0, 1, f_v, g_v\right)\end{aligned}$$

olmak üzere M yüzeyinin 1. Temel form katsayıları

$$\begin{aligned}E &= \left\langle X_u(u,v), X_u(u,v)\right\rangle = 1 + f_u^2 + g_u^2 \\ F &= \left\langle X_u(u,v), X_v(u,v)\right\rangle = f_u f_v + g_u g_v \\ G &= \left\langle X_v(u,v), X_v(u,v)\right\rangle = 1 + f_v^2 + g_v^2\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

dır. Ayrıca $X(u,v)$ yamasının 2. Kısmi türevleri

$$\begin{aligned} X_{uu}(u,v) &= (0,0,f_{uu},g_{uu}) \\ X_{uv}(u,v) &= (0,0,f_{uv},g_{uv}) \\ X_{vv}(u,v) &= (0,0,f_{vv},g_{vv}) \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

dır. Ayrıca M yüzeyinin birim normal vektörleri

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{A}}(-f_u,-f_v,1,0) \\ N_2 &= \frac{1}{\sqrt{A}}(Bf_u - Ag_u, Bf_v - Ag_v, -B, A) \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

olmak üzere (5.1.11) ve (5.1.12) eşitlikleri (2.2.9) yerine yazılırsa M yüzeyinin 2. Temel form katsayıları

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= \langle X_{uu}(u,v), N_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{A}} f_{uu}, \\ c_{12}^1 &= \langle X_{uv}(u,v), N_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{A}} f_{uv}, \\ c_{22}^1 &= \langle X_{vv}(u,v), N_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{A}} f_{vv}, \\ c_{11}^2 &= \langle X_{uu}(u,v), N_2 \rangle = -\frac{B}{\sqrt{A}} f_{uu} + \frac{A}{\sqrt{A}} g_{uu}, \\ c_{12}^2 &= \langle X_{uv}(u,v), N_2 \rangle = -\frac{B}{\sqrt{A}} f_{uv} + \frac{A}{\sqrt{A}} g_{uv}, \\ c_{22}^2 &= \langle X_{vv}(u,v), N_2 \rangle = -\frac{B}{\sqrt{A}} f_{vv} + \frac{A}{\sqrt{A}} g_{vv}. \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

(5.1.11) ve (5.1.13) eşitlikleri (5.1.3) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 5.1.8: M yüzeyi (5.1.9) Monge yamasıyla verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$f(u,v) = f_3(u) + g_3(v) \quad , \quad g(u,v) = f_4(u) + g_4(v)$$

fonksiyonları için

$$X(u,v) = (u, v, f_3(u) + g_3(v), f_4(u) + g_4(v)) \tag{5.1.14}$$

yaması ile tanımlanan yüzey E^4 te *öteleme yüzeyi* olarak bilinir (Dillen ve ark. 1995).

Sonuç 5.1.9: $M \subset E^4$ (5.1.14) yamasıyla verilen öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyi

$$f_k(u) = \frac{c_k}{c_3^2 + c_4^2}\left(\log\left|\cos\left(\sqrt{a}u\right)\right| + cu\right) + e_k u,$$
$$g_k(v) = \frac{c_k}{c_3^2 + c_4^2}\left(-\log\left|\cos\left(\sqrt{b}v\right)\right| + dv\right) + p_k v, \quad k = 3,4$$

parametrizasyonu ile verilirse M yüzeyi minimaldir (Dillen ve ark. 1995) ve $\lambda = 0$ için kendisine benzer yüzeydir.

KAYNAKLAR

Abresch, U., Langer, J. 1986. The normalized curve shortening flow and homothetic solutions, J. Of Diff. Geom. 23: 175-196

Aminov, Yu. A. 1994. Surfaces in E^4 with a Gaussian curvature coinciding with a Gaussian torsion up to the sign. *Mathematical Notes*, 56(6): 1211-1215.

Anciaux, H. 2009. Two non existence results for the self-similar equation in Euclidean 3-space. *arXiv:0904.426901.*

Anciaux H. 2006. Construction of equivariant self-similar solutions to the mean curvature flow in C^n . *Geom. Dedicata*, 120 (1): 37.48.

Anciaux, H., Castro, I., Romon, P. 2006. Lagrangian submanifolds of R^{2n} which are foliated by spheres. *Acta Math. Sinica (English Series)*, 22(4) : 1197-1214.

Anciaux, H., Romon, P. 2008. Cyclic and ruled Lagrangian surfaces in complex Euclidean space. *math.DG/0703645.*

Angenent, S. 1992. Shrinking donuts, in Nonlinear diffusion reaction equations & their equilibrium,States 3. editor N.G. Lloyd, Birkha¨ user, *Boston*.

Bulca, B. 2012. E^4 deki Yüzeylerin bir Karakterizasyonu. Doktora Tezi, UÜ Fen Bilimleri, Bursa.

Bulca, B., Arslan K. Surfaces given with the Monge patch in E^4 ,Preprint

Bulca, B., Arslan K., Bayram, B.K., Öztürk, G. 2012. Spherical product surfaces in E^4. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica,* 20(2012):41-54.

Chen, B. Y. 1973. Geometry of Submanifols. Marcel Dekker, New York, 298.

Carmo, M. P. DO. 1983. Differantial geometrıe Von Kurvenund Flachen ,Viweg Verlag, Weisbaden, Braunschweig

Dillen, F., Verstraelen, L., Vrancken, L., Zafindratafa G. 1995. Classi.cation of Polynomial Translation Hypersurfaces of Finite Type. *Results in Math,* 27 (1995): 244-249.

Etemoğlu, E., Arslan, K., Bulca, B. 2013. Self similar surfaces in Euclidean space, *Selçuk J. of Appl. Math.*, (kabul edildi).

Ganchev, G., Milousheva V. 2008. On the Theory of Surfaces in the Four Dimensional Euclidean Space. *Kodai Math. J.,* 31: 183-198.

Gluck, H. 1966. Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space. *Am. Math. Monthly,* 73: 243-249.

Görgülü, A. 1989. Relations Between The Mean Curvatures of the Parallel Submanifolds. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A, V. 38, Number 1-2, pp. 87-93.

Görgülü, A. 1992. On The Curvatures of The Parallel Hypersurfaces. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series. A, V.41, pp. 85-91.

Gray, A. 1993. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press, Inc.

Hacısalihoğlu, H.H. 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No 2.

Jaclik, A., Leonardis A., Solina F. 2000. Segmentation and Recovery Superquadrics. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Joyce, D., Lee, Y.I., Tsui, M.P. Self-similar solutions and translating solitons for Lagrangianmean curvature flow. *arXiv:0801.3721.*

Liu, H. 1999. Translation Surfaces With Constant Mean Curvature in 3-Dimensional Spaces, *Journal of Geometry*, 141-149.

Kocayiğit, H., Yaz, N., Camcı, C.,Hacısalihoğlu H.H. 2003. On the explicit characterization of spherical curves in *n*-dimensional Euclidean space. *J. Inv. Ill-posed problems*, 11: 245-254.

Mello, L.F. 2003. Mean directionally curved lines on surfaces immersed in R^4. *Publ. Math.,* 47: 415-440.

Mello, L.F. 2009. Orthogonal asymptotic lines on surfaces immersed in R^4. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 39(5): 1597-1612.

O'neill, B. 1997. Elementary Differential Geometry. *Academic Pess*, USA,1-475.

Özdemir, B. 2008. " de Focal eğriler ve Focal Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu", Doktora Tezi, UÜ Fen Bilimleri, Bursa.

Salkowski, E., 1909. Zur Transformation von Raumkurven. *Mathematische Annalen*, 66 (4): 517–557.

Smoczyk, K. 2005. Self-shrinkers of the mean curvature .ow in arbitrary codimension, *IMRN 48* (2005): 2983-3004.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Esra ETEMOĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 24/06/1989
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Bursa Ulubatlı Hasan Anadolu Lisesi, 2003-2007
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2007-2011
iletişim (e–posta)	: e.etemoglu@hotmail.com.tr
Yayınları:	:

Etemoğlu, E., Arslan, K., Bulca, B. 2013. Self similar surfaces in Euclidean space, *Selçuk J. of Appl. Math.*, (kabul edildi).