ELİPTİK FONKSİYONLAR

SEMA KILIÇ

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK FONKSİYONLAR

SEMA KILIÇ

Prof. Dr. Osman BİZİM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2013

TEZ ONAYI

Sema KILIÇ tarafından hazırlanan "Eliptik Fonksiyonlar" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Osman BİZİM

Başkan : Prof. Dr. Osman BİZİM
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Orhan GÜRLER
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,
Fizik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Ahmet TEKCAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım
Prof. Dr. Ali Osman Demir
Enstitü Müdürü
../../....

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

02/08/2013
Sema KILIÇ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ELİPTİK FONKSİYONLAR

Sema KILIÇ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Osman BİZİM

Bu çalışmada $\mathbb{C}$ üzerinde çifte periyodik ve meromorfik fonksiyon olan eliptik fonksiyonlar ve bu fonksiyonların özellikleri ele alınmıştır.

Çalışmanın birinci bölümünde, temel kavram ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde eliptik fonksiyonlar ve bu fonksiyonların özellikleri ele alınmıştır. Jacobi eliptik fonksiyonları, bu fonksiyonlar için toplam formülleri ve bu fonksiyonların periyodikliği incelenmiştir. Daha sonra Weierstrass eliptik fonksiyonları ele alınmış ve Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonu için diferensiyel denklem verilmiştir. Son olarak, eliptik fonksiyonlar cismi ele alınmış ve esas kısmı verilen eliptik fonksiyonların oluşturulması incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eliptik fonksiyonlar, Jacobi eliptik fonksiyonları, Weierstrass $\wp$ eliptik fonksiyonu.

2013, v + 70 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

ELLIPTIC FUNCTIONS

Sema KILIÇ

Uludağ University
Graduate School of Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Osman BİZİM

In this work, elliptic functions which are doubly periodic and meromorphic functions on $\mathbb{C}$ are discussed and the properties of these functions are given.

In the first chapter of this work, the main concepts and theorems are given.

In the second chapter elliptic functions and their properties are discussed. Jacobi elliptic functions, the addition formulae for these functions and the periodicity of these functions are examined. Then Weierstrass elliptic functions are discussed and the differential equation for Weierstrass $\wp(z)$ function is given. Finally, the field of elliptic functions is discussed and the construction of the elliptic functions with given principal parts is studied.

Key words: Elliptic functions, Jacobi elliptic functions, Weierstrass elliptic functions.

2013, v + 70 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam esnasında sahip olduğu bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ve her zaman bana destek olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Osman BİZİM' e yürekten teşekkürlerimi sunarım.

Sema KILIÇ
29/07/2013

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. ÖNBİLGİLER

1.1 Topolojik Gruplar, Kafesler ve Temel Bölgeler

Bu kısımda, tez çalışmasının diğer kısımlarında ihtiyaç duyulacak bazı temel kavramlar tanımlanacak ve bu kavramların temel özellikleri verilecektir.

1.1.1 Tanım. G bir topolojik uzay ve aynı zamanda bir grup olsun. $G \times G$ üzerinde çarpım topolojisi olmak üzere, eğer

$$m : G \times G \to G, \qquad \text{ve} \qquad i : G \to G,$$

$$(g, h) \to m(g, h) = g{\cdot}h \qquad\qquad g \to i(g) = g^{-1}$$

fonksiyonları sürekli ise G ye *topolojik grup* denir.

1.1.2 Örnek 1. $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi, karmaşık sayıların toplama işlemi ile bir grup ve aynı zamanda $\mathbb{C}$ bir topolojik uzaydır. Bundan başka

$$m(z,w) = z + w \quad \text{ve} \quad i(z) = -z$$

fonksiyonları sürekli olduğundan $\mathbb{C}$ bir topolojik gruptur.

2. $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |\, z \,| = 1\}$ birim çemberi, karmaşık sayıların çarpma işlemi ile bir grup ve alışılmış topoloji ile

$$m : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ m(x, y) = x{\cdot}y \quad \text{ve} \quad i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ i(x) = x^{-1}$$

fonksiyonları sürekli olduğundan $\mathbb{S}^1$ bir topolojik gruptur.

3. $GL(n, \mathbb{C})$, $n \times n$ boyutlu ve tersi olan (determinantı sıfır olmayan) karmaşık terimli matrislerin kümesi olmak üzere $GL(n, \mathbb{C})$, bilinen matris çarpımı ile bir gruptur. Eğer her bir $\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi $\mathbb{C}^{n^2}$ deki $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$ noktası olarak düşünülürse $\mathbb{C}^{n^2}$ üzerindeki alışılmış topolojinin $GL(n, \mathbb{C})$ üzerine kondurduğu topoloji ile $GL(n, \mathbb{C})$ aynı zamanda bir topolojik uzaydır. m ve i dönüşümleri, matrisin a_{ij} koordinatlarının rasyonel fonksiyonları yardımıyla ifade edilebilirler ve üstelik bu dönüşümler sürekli olduklarından $GL(n, \mathbb{C})$ bir topolojik gruptur. Örneğin, $n = 2$ olarak alınırsa, $GL(2, \mathbb{C})$ için bu dönüşümler

$$m : GL(2, \mathbb{C}) \times GL(2, \mathbb{C}) \to GL(2, \mathbb{C}),$$

$$m(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{bmatrix}$$

ve

$$i : GL(2, \mathbb{C}) \to GL(2, \mathbb{C})$$

$$i(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{bmatrix}, \Delta = ad - bc$$

dir.

1.1.3 Tanım. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ve $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Omega = \{n\omega_1 + m\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

kümesine $\mathbb{C}$ de bir *kafes* denir.

Tanımda $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ olması, ω_1 ve ω_2 karmaşık sayılarının aynı doğru üzerinde olmaması gerektiğini belirtmektedir. $\{\omega_1, \omega_2\}$ kümesine Ω kafesinin bir *tabanı* adı verilir ve tabanı $\{\omega_1, \omega_2\}$ olan bu kafes $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ ile gösterilir.

$\Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesi için $\{\omega_1, \omega_2\}$ tabanından başka tabanlar da vardır. Örneğin $\{\omega_1, \omega_1 + \omega_2\}$ kümesi de $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesi için bir tabandır. Gerçekten herhangi bir $\omega \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$ karmaşık sayısı, $m - n, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\omega = m\,\omega_1 + n\,\omega_2 = (m - n)\,\omega_1 + n\,(\omega_1 + \omega_2)$$

biçiminde ifade edilebilir. Daha genel olarak eğer $\omega_1', \omega_2' \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$ ise

$$\omega_2' = a\,\omega_2 + b\,\omega_1, \qquad \omega_1' = c\,\omega_2 + d\,\omega_1 \tag{1.1}$$

olacak biçimde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ sayıları vardır, bu durumda ω_2' ve ω_1', (1.1) eşitlikleri ile verilen karmaşık sayılar olmak üzere

$$"\{\omega_1', \omega_2'\} \text{ kümesi } \Omega(\omega_1, \omega_2) \text{ kafesi için bir taban} \Leftrightarrow ad - bc = \pm 1"$$

olduğu görülür. $ad - bc = \pm 1$ eşitliğini gerçekleyen sonsuz çoklukta a, b, c, d tamsayıları bulunabileceğinden her Ω kafesi için sonsuz sayıda da taban vardır.

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$" z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \Omega "$$

olarak tanımlanan $"\sim"$ bağıntısı $\mathbb{C}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Eğer $z_1 \sim z_2$ ise z_1 ve z_2 karmaşık sayılarına *mod* Ω *ya göre denktir* denir. Doğal olarak $"\sim"$ denklik bağıntısı yardımıyla denklik sınıfları oluşturulabilir, herhangi z karmaşık sayısının denklik sınıfı $z + \Omega$ ile gösterilir, yani

$$z + \Omega = \{w \in \mathbb{C} : z - w \in \Omega\}$$

dir. $\mathbb{C}$ üzerindeki toplama yardımıyla $z + \Omega$ ve $w + \Omega$ denklik sınıflarının toplamı

$$(z + \Omega) + (w + \Omega) = (z + w) + \Omega$$

olarak tanımlanır.

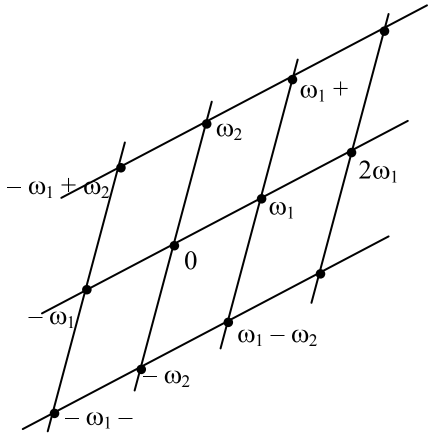
1.1.4 Tanım. P, $\mathbb{C}$ de kapalı, bağlantılı bir alt küme ve Ω bir kafes olsun. Eğer P kümesi için

i. her bir $z \in \mathbb{C}$ noktası P kümesindeki belli bir noktaya Ω denktir,

ii. P kümesinin içinde birbirine Ω denk olan noktalar yoktur,

koşulları gerçekleniyorsa P kümesine Ω kafesi için bir *temel bölge* denir.

Bu koşullardan birincisi dikkate alındığında, düzlemin herhangi bir noktasının P kümesinde veya P kümesinin Ω kafesi altındaki görüntülerinde (yani $\omega \in \Omega$ için $P + \omega$ kümelerinde) olduğu, ikinci koşuldan da, P ve P kümesinin Ω kafesi altındaki görüntülerinin ortak noktalarının sadece sınır noktaları olabileceği görülür. Böylece, P ve P kümesinin Ω kafesi altındaki görüntüleri ile $\mathbb{C}$ düzleminin tamamen örtüldüğü sonucu elde edilir. Bu şekildeki örtmeye $\mathbb{C}$ nin bir P temel bölgesi ile *döşemesi* adı verilir. Aşağıdaki şekilde bir temel bölge yardımıyla elde edilen döşeme görülmektedir.

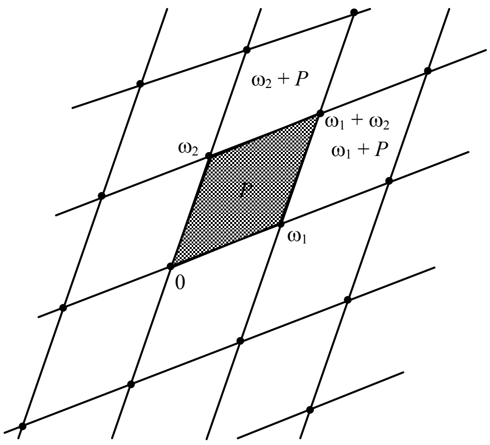


Şekil 1.1 $\mathbb{C}$ nin döşemesi

(1.1) eşitlikleri kullanılarak değişik temel bölgeler, şekillerinden dolayı değişik temel paralel kenarlar ve dolayısıyla $\mathbb{C}$ nin farklı döşemeleri elde edilebilir. Eğer P, Ω kafesi için bir temel bölge ise belli bir $t \in \mathbb{C}$ için

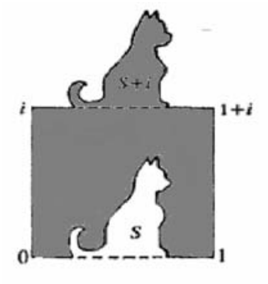
$$P + t = \{z + t : z \in P\}$$

kümesi, yani P temel bölgesinin t kaymasının da bir temel bölge olacağı açıktır. Bu özellik, belli özel noktaları bulunduran veya tam tersine bulundurmayan bir temel bölgenin oluşturulmasında oldukça kullanışlı olacaktır. Örneğin bu özellik kullanılarak, P temel bölgesini sıfır noktasını bulunduran veya tam tersine bulundurmayan bir hale getirmek mümkündür.



Şekil 1.2 Temel paralel kenar

Bir temel bölgenin mutlaka bir paralel kenar veya bir düzgün çokgen olması da gerekmez. Uygun işlemler yardımıyla bir paralel kenar veya bir düzgün çokgensel temel bölgeden keyfi temel bölgeler de elde edilebilir. Örneğin, bir dikdörtgen şeklindeki temel bölgeden aşağıdaki şekildeki gibi bir temel bölge, S alt kümesinin kesip atılması ve yerine bu S kümesinin i birim kayması olan $S + i$ kümesinin eklenmesiyle elde edilebilir.



Şekil 1.3 Temel bölgenin kayması

$X \subset \mathbb{C}$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $\mu(X)$, X kümesinin ölçüsü (uzunluğu, alanı, hacmi, …) ve $\omega \in \mathbb{C}$ için $\omega(X) = X + \omega$ olmak üzere

$$z \to z + \omega$$

kayması, $\mathbb{C}$ nin bir eşmetri dönüşümü olduğundan $\mu(\omega(\mathrm{X})) = \mu(\mathrm{X})$ olacağı açıktır.

1.2 Periyodik Fonksiyonlar ve Özellikleri

Bu bölümde ilk olarak periyodik fonksiyon kavramı tanımlanacak ve bu fonksiyonların temel özellikleri ele alınacaktır.

1.2.1 Tanım. *f*, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z + \omega) = f(z)$$

olacak şekilde bir $\omega \in \mathbb{C}$ sayısı var ise $\omega \in \mathbb{C}$ sayısına f fonksiyonunun bir *periyodu*, eğer f fonksiyonunun bir $\omega \neq 0$ periyodu varsa f fonksiyonuna *periyodik fonksiyon* denir.

Örneğin, $f(z) = \sin z$ trigonometrik fonksiyonunun periyotları, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2k\pi$ sayıları, $g(z) = \sin(2\pi z)$ fonksiyonunun periyotları $k \in \mathbb{Z}$ sayıları, $f(z) = e^z$ üstel fonksiyonunun periyotları, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2k\pi i$ sayıları ve $f(z) = e^{2i\pi z}$ fonksiyonunun periyotları ise $k \in \mathbb{Z}$ sayılarıdır.

Eğer ω, f fonksiyonunun bir periyodu ise $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k\omega$ sayısının da f fonksiyonunun bir periyodu olacağı açıktır. f fonksiyonunun periyotlarının pozitif olanlarının en küçüğüne f fonksiyonunun *esas periyodu* denir. Aksi belirtilmedikçe, bundan sonra bir f fonksiyonunun periyodu denildiğinde f fonksiyonunun esas periyodu anlaşılacaktır.

Buna göre $f(z) = \sin z$ fonksiyonun esas periyodu 2π, $g(z) = \sin(2\pi z)$ fonksiyonunun esas periyodu 1, $f(z) = e^z$ üstel fonksiyonunun esas periyodu $2\pi i$ ve $f(z) = e^{2i\pi z}$ fonksiyonunun esas periyodu da 1 dir.

Daha önce karşılaşılmış olan ve yukarıda birkaç örnek verilen fonksiyonlar, yani f fonksiyonunun periyotlarının kümesi $\Omega_f = \{n\omega_1 : n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde olan fonksiyonlar *basit periyodik* fonksiyonlar olarak bilinir. Bu çalışmada, aşağıda tanımı verilecek olan, basit olmayan periyodik fonksiyonlar ele alınacaktır.

1.2.2 Tanım. f fonksiyonunun periyotlarının kümesi

$$\Omega_f = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}, \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R} \text{ ve } \omega_1 \neq 0 \neq \omega_2\}$$

biçiminde ise f fonksiyonuna *çifte periyodik* fonksiyon denir.

Periyodik bir f fonksiyonunun periyotlarının kümesi olan Ω_f kümesinin biri cebirsel diğeri de topolojik olmak üzere iki önemli özelliği bulunmaktadır. Aşağıdaki teoremlerden birincisi bu özelliklerden cebirsel olanını, diğeri topolojik olanı ortaya koymaktadır.

1.2.3 Teorem. $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı f fonksiyonunun periyotlarının kümesi Ω_f, $\mathbb{C}$ nin toplamsal bir alt grubudur. Üstelik Ω_f, $\mathbb{C}$ nin normal alt grubudur (Jones ve Singerman 1987).

1.2.4 Tanım. X bir topolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun. Her $y \in Y$ noktasının $U \cap Y = \{y\}$ olacak şekilde bir U komşuluğu varsa Y kümesine X topolojik uzayının bir *ayrık alt kümesi* denir.

1.2.5 Örnek 1. $\mathbb{Z}$, tamsayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ alışılmış uzaylarının bir ayrık alt kümesidir. Benzer şekilde $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi de $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ nin bir ayrık alt kümesidir. Diğer yandan $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ alışılmış uzayının bir ayrık alt kümesi değildir.

2. $F = \{1/n : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ kümesi $\mathbb{R}$ alışılmış uzayının bir ayrık alt kümesi olduğu halde $F \cup \{0\}$ kümesi ise $\mathbb{R}$ nin bir ayrık alt kümesi değildir.

1.2.6 Teorem. f, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı sabit olmayan, bir meromorf fonksiyon ve Ω_f, f fonksiyonunun periyotlarının kümesi olsun. Bu durumda Ω_f, $\mathbb{C}$ nin bir ayrık alt kümesidir (Jones ve Singerman 1987).

Yukarıda verilen iki teorem birlikte dikkate alındığında, sabit olmayan bir meromorf fonksiyonun periyotlarının kümesinin $\mathbb{C}$ nin bir ayrık normal alt grubu olduğu sonucu elde edilir.

Diğer yandan $\mathbb{C}$ nin ayrık toplamsal normal alt gruplarının üç tipte olduğunu gösteren aşağıdaki teorem de dikkate alınırsa, sabit olmayan bir meromorf fonksiyonun periyotlarının kümeleri hakkında daha kesin bir bilgi elde edilebilir.

1.2.7 Teorem. Ω, $\mathbb{C}$ nin bir ayrık alt grubu ise aşağıdaki üç halden biri gerçeklenir:

i. $\Omega = \{0\}$,

ii. $\omega_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere $\Omega = \{n\omega_1 : n \in \mathbb{Z}\}$, böylece $\Omega \cong \mathbb{Z}$ dir,

iii. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ve $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ olmak üzere $\Omega = \{n\omega_1 + m\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$, böylece $\Omega \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dir (Jones ve Singerman 1987).

Dolayısıyla bu teorem yardımıyla, f basit periyodik bir fonksiyon ise $\Omega_f \cong \mathbb{Z}$ ve f çifte periyodik bir fonksiyon ise $\Omega_f \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olduğu görülür.

Eğer f fonksiyonu, periyotlarının kümesi $\Omega_f = \{n\omega_1 : n \in \mathbb{Z}\}$ olan basit periyodik bir fonksiyon ise z yerine $\omega_1 z$ alınarak $\Omega_f = \mathbb{Z}$ olarak kabul edilebilir, yani herhangi bir periyot yerine tamsayılar periyot olarak alınabilir. Örneğin sin z fonksiyonu yerine sin $2\pi z$ fonksiyonu veya e^z fonksiyonu yerine $e^{2i\pi z}$ fonksiyonu dikkate alınırsa bu yeni fonksiyonların her ikisinin de periyotlarının kümesi $\Omega_f = \mathbb{Z}$ olur. Dikkate edilirse, ilk halde, her iki fonksiyonun da periyotları 2π ve tam katları olduğu halde, ikinci halde her iki fonksiyonun da periyotları tamsayılar olmuştur. Bu değişken değişimiyle, her $n \in \mathbb{Z}$

için

$$f(z) = f(z+n)$$

eşitliği elde edilir.

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$"z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}"$$

olarak tanımlanan "~" bağıntısının $\mathbb{C}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir ve bu durumda $z_1 \sim z_2$ ise z_1 ve z_2 sayıları mod $\mathbb{Z}$ ye göre *denktir* denir. Böylece "~" bağıntısı yardımıyla elde edilen denklik sınıfları $\mathbb{Z}$ nin kosetlerini oluşturur. Örneğin $1 + i$ sayısının denklik sınıfı

$$[1+i] = \{\ldots, -1+i, i, 1+i, 2+i, \ldots\}$$

dir, dikkat edilirse $1 + i$ sayısının denklik sınıfı, düzlemde $y = 1$ doğrusu üzerinde bulunan Gauss tamsayılarından oluşmaktadır.

"~" denklik bağıntısının tanımından, f fonksiyonunun mod $\mathbb{Z}$ ye göre denk noktalarda aynı değeri alacağı açıktır. Gerçekten, $z_1 \sim z_2$ ise $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $z_1 - z_2 = n$, olacağından $z_1 = z_2 + n$ ve dolayısıyla

$$f(z_1) = f(z_2 + n) = f(z_2)$$

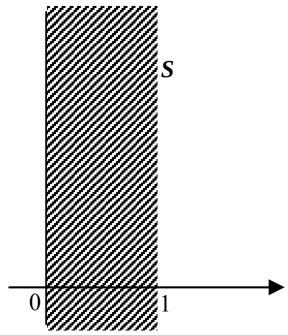
olur.

Düzlemdeki her bir karmaşık sayının, aşağıdaki şekilde görülen,

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(z) < 1\}$$

sonsuz düşey şeridinde tam olarak bir nokta ile mod $\mathbb{Z}$ ye göre denk olduğu kolayca görülebilir, yani her bir karmaşık sayıya tamsayılar eklenerek bu şerit bölge içindeki bir nokta elde edilebilir. Dolayısıyla f periyodik fonksiyonunun tüm düzlemdeki davranışı f fonksiyonunun sadece S kümesi üzerindeki davranışı ile, aşağıda belirtileceği gibi, tam olarak belirlenebilir.

Yukarıda $\varepsilon : z \to \zeta = e^{2\pi i z}$ fonksiyonunun periyotlarının kümesinin $\mathbb{Z}$ olduğu belirtilmişti. Diğer yandan ε fonksiyonunun S ve $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ kümeleri arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğu da açıktır. ϕ fonksiyonu



Şekil 1.4 *S* şerit bölgesi

$$\phi(\zeta) = f(z) = (f \circ \varepsilon^{-1})\,(\zeta) = f\left(\frac{1}{2\pi i}\log\zeta\right)$$

olarak tanımlanan fonksiyon olsun. Eğer, aşağıdaki diyagram dikkate alınırsa, f fonksiyonu S kümesinden X kümesine bir basit periyodik fonksiyon ise, ϕ fonksiyonu da $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ dan X kümesine bir fonksiyon olur.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{C}\backslash\{0 \arrow[dl, "\phi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Gerçekte log ζ fonksiyonu ζ değişkeninin tek değerli bir fonksiyonu değildir, hatırlanacağı gibi, log ζ değerleri log ζ dan $2\pi i$ nin katları kadar fark eder. Bu nedenle $\frac{1}{2\pi i}\log\zeta$ değerleri de $\frac{1}{2\pi i}\log\zeta$ değerinden tamsayı katları kadar fark eder. Dolayısıyla bu tamsayılar f fonksiyonunun periyotları olur, böylece $\phi(\zeta) = f\left(\frac{1}{2\pi i}\log\zeta\right)$ fonksiyonu ζ değişkeninin tek değerli bir fonksiyonu haline gelir. Bu şekilde f fonksiyonunun periyodikliği kullanılarak log ζ fonksiyonunun çok değerliliği ortadan kaldırılmış olur.

Genel olarak, $\phi(\zeta)$ fonksiyonu $f(z)$ fonksiyonundan çok daha basit bir fonksiyondur. Örneğin $f(z) = \sin 2\pi z$ ise

$$\phi(\zeta) = f(z) = \sin 2\pi z = \frac{e^{2\pi iz} - e^{-2\pi iz}}{2i} = \frac{1}{2i}(\zeta - \frac{1}{\zeta})$$

olur, benzer şekilde $f(z) = \cos 2\pi z$ ise

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})$$

olur. Tersine, herhangi $\phi : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to X$ fonksiyonu için

$$f(z) = \phi(\zeta) = \phi(e^{2\pi iz})$$

olarak tanımlanan $f = \phi \circ \varepsilon : \mathbb{C} \to X$ basit periyodik fonksiyonu elde edilebilir. Böylece $\mathbb{Z}$ ye göre periyodik olan tüm $f : \mathbb{C} \to X$ fonksiyonları tam olarak $f = \phi \circ \varepsilon$ biçiminde, yani $\zeta = e^{2\pi iz}$ değişkeninin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilirler.

$\mathbb{C}\backslash\{0\}$ daki her noktanın yeterince küçük komşuluğunda log ζ fonksiyonun tek değerli analitik bir dalı mevcut olacağından f, $\mathbb{C}$ den Σ ya tanımlı bir basit periyodik meromorf fonksiyon ise ϕ fonksiyonu da $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ dan X kümesine bir meromorf fonksiyon olur. Üstelik ϕ fonksiyonunun kutupları ile f nin $\mathbb{C}$ deki kutuplarının denklik sınıfları arasında bir bire-bir eşleşme vardır. Doğal olarak log ζ fonksiyonunun 0 ve ∞ da aykırılığı olabileceğinden ϕ fonksiyonu da 0 ve ∞ da aykırılığı olabilir.

Örneğin $f(z)$ = tan πz fonksiyonunun, $n \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z = n + 1/2$ noktalarında kutupları vardır, dolayısıyla bu kutup noktalarının bir tek denklik sınıfı var olduğundan $\phi(\zeta) = -i(\zeta - 1)/(\zeta + 1)$ fonksiyonun da $\zeta = -1 = e^{2\pi i(n+1/2)}$ noktasında bir tek kutbu vardır. Görüldüğü gibi, gerçekte f fonksiyonunun birbirine denk olan sonsuz çoklukta aykırılığı olduğu halde ϕ fonksiyonunun, bu aykırılıkların oluşturduğu denklik sınıfına karşılık gelen, bir tek aykırılığı vardır.

Tersine ϕ fonksiyonu bir meromorf fonksiyon ise $f = \phi \circ \varepsilon$ ve ε analitik bir fonksiyon olduğundan f fonksiyonu da meromorftur.

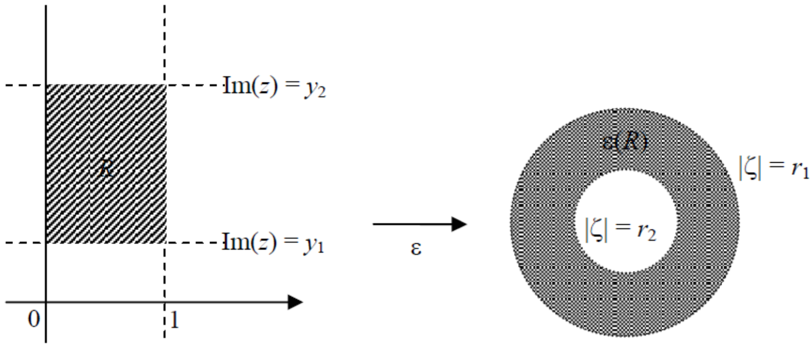
f fonksiyonu meromorf bir fonksiyon ise f fonksiyonunun kutupları ayrık olduğundan sonsuz S şeridi içinde f fonksiyonunun kutuplarını bulundurmayan bir

$$R = \{z : y_1 < \text{İm}(z) < y_2,\ 0 \leq \text{Re}(z) < 1\}$$

dikdörtgeni bulunabilir.

$$\varepsilon : z \to \zeta = e^{2\pi iz}$$

fonksiyonu, $j = 1, 2$ olmak üzere R kümesinin kenarları olan $\{x + iy_j : 0 \leq x < 1\}$ kümelerini $\{e^{-2\pi y_j} \cdot e^{2\pi ix} : 0 \leq x < 1\}$ kümelerine resmeder. Dikkat edilirse resim kümeleri ζ düzleminde yarıçapları $r_j = e^{-2\pi y_j}$ olan çemberlerdir. Böylece R bölgesi, ε fonksiyonu yardımıyla $r_2 < |\zeta| < r_1$ eşitsizlikleri ile ifade edilen ve içinde $\phi(\zeta)$ fonksiyonunun da analitik olduğu $\varepsilon(R)$ halka bölgesine resmedilmiş olur.



Şekil 1.5 R bölgesinin ε fonksiyonu altındaki resmi

$\phi(\zeta)$ fonksiyonunun $r_2 < |\zeta| < r_1$ eşitsizlikleri ile ifade edilen halka bölge üzerinde geçerli olan

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$$

biçiminde bir tek Laurent açılımı vardır. Böylece $f(z)$ fonksiyonunun $y_1 < \text{İm}(z) < y_2$ eşitsizlikleri ile ifade edilen bölge üzerinde geçerli olan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi niz}$$

açılımı vardır. Bu açılımda

$$e^{2\pi niz} = \cos 2\pi nz + i \sin 2\pi nz$$

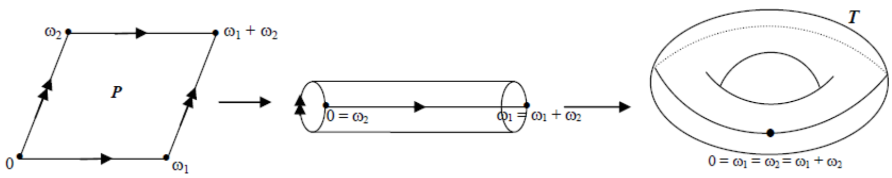
değeri yerine yazıldığında, $n \geq 1$ için $A_n = a_n + a_{-n}$ ve $B_n = i(a_n - a_{-n})$ olmak üzere

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2\pi nz + B_n \sin 2\pi nz)$$

Fourier serisi elde edilir. Bu seri, $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, R ve onun kaymaları olan $R + m$ resimlerinin bulunduğu yatay $y_1 < \text{İm}(z) < y_2$ şeridinde geçerlidir. Bununla birlikte, R dikdörtgeninin farklı seçimleri, doğal olarak f fonksiyonu için farklı Fourier serileri bulunmasına neden olabilir.

Eğer f fonksiyonu $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesine göre çifte periyodik bir fonksiyon ise f fonksiyonunun $\mathbb{C}$ nin tamamı üzerindeki davranışı Ω kafesi için elde edilecek olan P temel paralel kenarı üzerindeki davranışı ile belirlenebilir. Hatırlanacağı gibi, bu temel paralel kenarı, köşeleri 0, ω_1, ω_2 ve $\omega_1 + \omega_2$ noktaları olan paralel kenar olarak seçilebilir. f, Ω kafesine göre çifte periyodik bir fonksiyon olduğundan, doğal olarak f fonksiyonunun bu P paralel kenarı üzerindeki davranışı, $\omega \in \Omega$ olmak üzere P paralel kenarının tüm $P + \omega$ kaymalarında da tekrar eder ve böylece f fonksiyonunun $\mathbb{C}$ nin tamamı üzerindeki davranışı elde edilmiş olur.

O halde f fonksiyonu, $\mathbb{C}$ yerine P üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Ancak f fonksiyonu P paralel kenarının denk olan sınır noktaları üzerinde aynı değerleri alacağından, f fonksiyonunu paralel kenarın bu denk olan kenarlarının özdeşlenmesi ile elde edilecek olan T yüzeyi üzerinde dikkate almak doğru olacaktır. Bu denk kenarların özdeşlenmesiyle elde edilen T yüzeyine *tor* denir. Tersine T yüzeyi üzerinde tanımlı her bir fonksiyona da $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bir çifte periyodik fonksiyon olarak bakılabilir.



Şekil 1.6 Tor yüzeyi

1.2.8 Tanım. Ω kafes ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere z noktasının Ω yörüngesi $[z]_\Omega$ ile gösterilir ve

$$[z]_\Omega = \{z + \omega : \omega \in \Omega\}$$

olarak tanımlanır. $[z]_\Omega$ kümesinin eleman sayısına da yörüngenin uzunluğu adı verilir.

Verilen Ω kafes için, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$"z_1 \sim z_2 \bmod \Omega \;\Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \Omega"$$

olarak tanımlanan "$\sim$" bağıntısı da $\mathbb{C}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla $[z]_\Omega$ kümesi, z noktasına modülo Ω ya göre denk olan noktaların kümesi olur.

Temel bölge tanımı hatırlanırsa, $\mathbb{C}$ üzerindeki her bir Ω-yörüngesi için T yüzeyi üzerinde bir tek nokta vardır, tersine T yüzeyi üzerindeki her bir nokta için de $\mathbb{C}$ üzerinde bir tek

Ω-yörüngesi vardır. Bu nedenle T yüzeyi gerçekte Ω-yörüngelerinin bir kümesi, $\mathbb{C}$ deki Ω-kosetlerinin kümesi, yani $\mathbb{C}/\Omega$ olarak düşünülebilir. Bu nedenle T yüzeyi üzerindeki bir nokta $[z]_\Omega$ veya sadece $[z]$ ile gösterilir. Söz edilen Ω-kosetleri de Ω-yörüngelerinden başka bir şey değildir, yani

$$[z]_\Omega = \{\, u = z + \omega : \omega \in \Omega\}$$

dir. Bu nedenle $\mathbb{C}/\Omega$ kümesi de bu yörüngelerin ailesi, yani bölüm uzayı olarak düşünülebilir. Böylece

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Omega,\ p(z) = [z]_\Omega$$

bölüm dönüşümü olmak üzere, $\mathbb{C}/\Omega$ bölüm uzayı üzerindeki topoloji bu bölüm dönüşümünü, yani kanonik izdüşüm fonksiyonunu sürekli yapan bitiş topoloji, yani bölüm topolojisidir. Doğal olarak bu tanım ile p dönüşümü sürekli olduğu gibi aynı zamanda bir açık dönüşümdür.

Ω, $\mathbb{C}$ toplamsal grubunun bir normal alt grubu olduğundan $\mathbb{C}/\Omega$ bölüm kümesi de doğal olarak bir grup yapısına sahiptir. Bundan başka, P paralel kenarından T yüzeyi üzerine, P paralel kenarının kenarlarının özdeşlenmesi olarak tanımlanan fonksiyon sürekli bir fonksiyon ve P kompakt olduğundan T yüzeyi de kompakttır.

Her bir $[z] \in T$ için $p^{-1}([z])$, z sayısının Ω-yörüngesi olan $[z] = z + \Omega$ dir, yani z sayısına Ω-denk noktaların kümesidir ve dolayısıyla ayrıktır. O halde $p^{-1}([z])$ nin herhangi iki noktası arasındaki en kısa uzaklık d ile gösterilirse, $d > 0$ olur ve bundan başka $p^{-1}([z])$ nin bir noktasını merkez kabul eden en fazla $d/2$ yarıçaplı U açık diski sadece bu noktayı bulundurur. U açık diski her bir Ω-yörüngesinden en çok bir tane nokta bulundurduğundan $V = p(U)$ olarak alınırsa $p : U \to V = p(U)$ fonksiyonu, yani P nin U açık kümesi üzerine olan kısıtlaması, bire-bir, örten, açık ve sürekli bir fonksiyon olur. Dolayısıyla bu dönüşüm bir homeomorfizmdir. Böylece her bir $[z] \in T$ noktasının $\mathbb{C}$ deki bir açık diske (örneğin, U açık diskine) homeomorfik olan bir V komşuluğu vardır.

Bu nedenle bu şekildeki uzaylara *yüzey* denir, tor ve küre bilinen en basit yüzey örnekleridir. Dikkat edilirse $p^{-1}(V)$ kümesi, $\omega \in \Omega$ olmak üzere ayrık ve sonsuz çokluktaki $U + \omega$ açık kümelerinden oluşmaktadır. Bu kümelerin her birinin p ile V üzerine homeomorfik olarak resmedildiği ise açıktır.

1.3 Düzgün ve Normsal Yakınsaklık

Bundan sonraki bölümde eliptik fonksiyonların doğrudan oluşturulması sırasında sonsuz seri ve sonsuz çarpımlardan faydalanılacağı için bu kısımda kısaca sonsuz seri ve sonsuz çarpım kavramları ele alınacak ve bunların temel özellikleri üzerinde durulacaktır. Çifte periyodik fonksiyonlar basit periyodik fonksiyonların genellemeleri olduklarından bu kavramları öncelikle basit periyodik fonksiyonlar için ele almak daha uygun olacaktır.

Üstel veya trigonometrik fonksiyonlar hakkındaki bilinenleri dikkate almadan basit periyodik $F(z)$ fonksiyonu fonksiyon serileri kullanılarak elde edilebilir. f fonksiyonu,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z-n)$$

serisi z noktasında yakınsak olacak şekilde seçilerek F fonksiyonu bu seri yardımıyla

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z-n)$$

olarak tanımlanabilir. Bu seri açılımı yardımıyla da

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=-1}^{-\infty} f(z-n) + \sum_{n=0}^{\infty} f(z-n) \\ &= \sum_{m=0}^{-\infty} f(z+1-m) + \sum_{m=1}^{\infty} f(z+1-m), \qquad (m = n+1) \\ &= F(z+1) \end{aligned}$$

olduğu ve dolayısıyla $F(z)$ fonksiyonunun periyodunun 1 olduğu görülür. Örneğin

$$F(z) = \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi z$$

basit periyodik meromorf fonksiyonu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-n)^{-2}$$

serisi ile temsil edilir.

Benzer işlemler Ω kafesine göre eliptik olan bir

$$F(z) = \sum_{\omega \in \Omega} f(z-\omega)$$

çifte periyodik fonksiyonu için de yapılabilir. Ancak Ω kafesi üzerinden toplam alırken toplama işleminin hangi sırada yapılacağı çok açık olmadığından bu halde F fonksiyonunun periyodik olduğunu gösterebilmek için bazı düzenlemelere gerek duyulur. Hatırlanacağı gibi, eğer bir seri mutlak yakınsak ise serinin toplamı, seriyi oluşturan $f(z)$ fonksiyonlarının toplamının sırasından bağımsızdır, dolayısıyla bazı hallerde bu düzenlemeye ihtiyaç bile duyulmayabilir.

Diğer bir zorluk ise basit veya çifte periyodik $F(z)$ fonksiyonunun meromorf olduğunun gösterilmesinde ortaya çıkar. Bu nedenle f fonksiyonunun meromorf bir fonksiyon ve $F(z)$ fonksiyonunu belirten serinin de terim terim türevlenebilir olabilmesi için $F(z)$ fonksiyonunu tanımlayan serinin düzgün yakınsak olarak seçilmesi oldukça akıllıca olacaktır. Karşılaşılan problemlerde biraz detaya inilecek olursa mutlak ve düzgün yakınsaklığı da içine alan, yani daha geniş bir kavram olan normsal yakınsaklık kavramını ele almak yararlı olacaktır.

Sonsuz serilerin toplamı için indeks kümesi olarak genellikle doğal sayılar kümesi seçildiği halde tamsayılar kümesinin, hatta başka kümelerin de seçilebildiği durumlar da vardır. Örneğin,

$$F(z) = \sum_{\omega \in \Omega} f(z - \omega)$$

olarak tanımlanan toplam Ω kafesi ile indekslenmiş bir toplamdır. Bu küme üzerinden toplam almanın anlamı şu şekilde açıklanabilir. Her bir Λ (= $\mathbb{Z}$ veya Ω) indeks kümesi sayılabilir sonsuz bir küme olduğundan $\mathbb{N}$ ile Λ kümeleri arasında birebir ve örten bir $n \to \lambda_n$ dönüşümü vardır. Böylece Λ indeks kümesinin elemanları bir dizi oluşturacak şekilde yeniden düzenlenebilir. Örneğin,

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

dizisi $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin bir sıralanışını verir.

Eğer Λ,

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

gibi özel bir sıralanışa sahip herhangi bir sayılabilir sonsuz küme ise $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ gösterimi ile $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} a_{\lambda_j}$ limitinin var olduğu anlaşılır. Genellikle, eğer varsa bu limit değeri Λ kümesi için seçilen özel sıralanışa bağlıdır, ancak seri mutlak yakınsak bir seri ise (yani eğer $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} \left| a_{\lambda_j} \right|$ limiti varsa) $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ toplamı Λ kümesinin sıralanışından bağımsızdır. Örneğin,

$\Lambda = \mathbb{Z}$ kümesinin 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, … sıralanışı seçilirse $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ mutlak serisinin toplamının $\sum_{n=0}^{-\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ toplamına eşit olduğu kolaylıkla görülebilir. Ancak, $\sum_{\lambda\in Z} a_\lambda$ serisi şartlı yakınsak ise ne $\sum_{n=0}^{-\infty} a_n$ serisinin, ne de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması gerekmez.

Genellikle a_{λ_j} notasyonu yerine b_j notasyonunun kullanılması gösterimlerde kolaylık sağlar. Böylece, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde alışılmış sıralama olmak üzere, herhangi Λ indeks kümesi için $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ serisi ile indeks kümesi $\mathbb{N}$ olan $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ serisi çakışır. Bu nedenle bu bölümdeki sonuçlar, terimleri $\mathbb{N}$ kümesi ile indekslenmiş seriler için verilirken bu sonuçların tüm sayılabilir sonsuz kümeler ile indekslenmiş mutlak yakınsak seriler için genelleştirilebileceği de açıktır.

1.3.1 Tanım. $E \subset \mathbb{C}$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $u_n : E \to \mathbb{C}$ olmak üzere (u_n), bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > n_0$ ve her $z \in E$ için $|u_n(z) - u(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var ise (u_n) dizisi E üzerinde $u : E \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna *düzgün yakınsar* denir.

Örneğin, $E_k = \{z \in \mathbb{C} : |z| < k\}$ olmak üzere, her $0 < k < 1$ için E_k üzerinde $(z^n) \to 0$ yakınsaması düzgündür. Diğer yandan $k = 1$ alınırsa, her bir belli n sayısı için $\lim_{z\to 1} z^n = 1$ ve böylece her $z \in E_1$ için $|z^n| < \varepsilon = 1/2$ eşitsizliğini gerçekleyen bir n sayısı olmadığından E_1 üzerinde $(z^n) \to 0$ yakınsaması düzgün olamaz. Bununla birlikte her bir kompakt $K \subset E_1$ kümesi, $k < 1$ olmak üzere belli bir E_k kümesi tarafından kapsandığından $(z^n) \to 0$ yakınsaması E_1 kümesinin her kompakt K alt kümesi üzerinde düzgündür.

1.3.2 Tanım. R, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $u_n : R \to \mathbb{C}$ olmak üzere (u_n) fonksiyon dizisi verilsin. Eğer R bölgesinin her bir K kompakt alt kümesi için, u_n fonksiyonlarının K üzerine kısıtlamalarının oluşturduğu $(u_n|K)$ dizisi K üzerinde düzgün yakınsak ise (u_n) fonksiyon dizisine R nin her kompakt alt kümesi üzerinde *düzgün yakınsak*tır denir.

K kompakt kümeleri sonlu sayıdaki $D \subseteq R$ kapalı disklerinin içleri ile örtüldüğünden tanımdaki kompakt kümeler yerine kapalı $D \subseteq R$ diski ve $(u_n|D)$ dizisi de alınabilir.

1.3.3 Teorem. $R \subseteq \mathbb{C}$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $u_n : R \to \mathbb{C}$ fonksiyonu R bölgesinde analitik olmak üzere (u_n) fonksiyon dizisi R bölgesinin kompakt alt kümeleri üzerinde bir u fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. Bu durumda u fonksiyonu da R bölgesinde analitiktir ve üstelik (u_n) dizisinin terimlerinin türevleri alınarak elde edilen (u_n') dizisi de R kümesinin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde u' fonksiyonuna düzgün yakınsar (Jones ve Singerman 1987).

Fonksiyon dizileri için verilen bu sonuç fonksiyon serilerine de genişletilebilir. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ serisinin kısmi toplamı olan $\sum_{n=0}^{m} u_n(z)$ serisi E kümesi üzerinde $u(z)$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa E kümesi üzerinde $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \to u(z)$ yakınsaması düzgün olur.

1.3.4 Sonuç. (u_n), $R \subseteq \mathbb{C}$ bölgesindeki analitik fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer R bölgesinin her kompakt alt kümesi üzerinde $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \to u(z)$ yakınsaması düzgün ise $u(z)$ fonksiyonu R üzerinde analitik ve R bölgesinin her kompakt alt kümesi üzerinde $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(z) \to u'(z)$ yakınsaması düzgün olur (Jones ve Singerman 1987).

Örneğin, $E_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kümesi üzerinde $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \to (z-1)^{-1}$ yakınsaması düzgün olmadığı halde E_1 kümesinin her kompakt alt kümesi üzerinde düzgündür. Dolayısıyla terim terime türev alınacak olursa E_1 kümesinin her kompakt alt kümesi üzerinde

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \to \frac{d}{dz}(1-z)^{-1} = (1-z)^{-2}$$

yakınsaması düzgün olur.

Sonuç 1.3.4 ün kullanabilmesi için $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ serisinin her kompakt küme üzerinde yakınsak olduğunu göstermek gereklidir. Bunun için oldukça kullanışlı olan Weierstrass teoremi verilecektir.

1.3.5. Teorem (Weierstrass *M* Testi). $E \subset \mathbb{C}$ ve (u_n), $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $u_n : E \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer

i. her bir $n \in \mathbb{N}$ ve her $z \in E$ için $|u_n(z)| \leq M_n$ olacak şekilde bir $M_n \in \mathbb{R}$ sayısı var,

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak

şartları gerçekleniyorsa $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ serisi E üzerinde düzgün yakınsaktır ve üstelik her bir $z \in E$ için $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ serisi mutlak yakınsaktır (Jones ve Singerman 1987).

Weierstrass *M* testi, özellikle bir fonksiyon dizisinin veya serisinin normsal yakınsak olduğu gösterilmek istenildiğinde de oldukça sık kullanılır.

1.3.6 Tanım. f sınırlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun normu

$$\|f\| = \|f\|_E = \sup\{|f(z)| : z \in E\}$$

olmak üzere (u_n), fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

i. her bir u_n fonksiyonu E üzerinde sınırlı,

ii. $\sum \|u_n\|$ serisi yakınsak

şartları gerçekleniyorsa $\sum u_n(z)$ serisine E üzerinde *normsal yakınsaktır* denir.

Yukarıda verilen Weierstrass *M* testinde, $M_n = \|u_n\|$ olarak alındığında, eğer $\sum u_n$ serisi normsal yakınsak ise $\sum u_n$ serisinin mutlak ve düzgün yakınsak olduğu görülür. Böylece daha önce belirtildiği gibi, normsal yakınsaklık kavramının mutlak ve düzgün yakınsaklık kavramlarını içine alan bir kavram olduğu da görülmüş olur.

Örneğin, her bir u_n fonksiyonu belli bir R bölgesinde analitik ise $|u_n(z)|$ fonksiyonu sürekli ve dolayısıyla her bir kompakt $K \subseteq R$ kümesi için $\|u_n\|_K$ vardır. $\sum \|u_n\|_K$ serisi negatif olmayan sayılardan oluştuğundan bu serinin yakınsaklığı karşılaştırma, integral veya oran testi gibi temel testler kullanılarak gösterilebilir. Eğer $\sum \|u_n\|_K$ serisi yakınsak ise $\sum u_n$ serisi R bölgesinin her bir kompakt alt kümesi üzerinde normsal ve dolayısıyla hem mutlak hem de düzgün yakınsak olur. Böylece bu seri bir analitik fonksiyon temsil eder ve dolayısıyla seri terim terime türevlenebilir.

1.3.7 Tanım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için u_n, $R \subseteq \mathbb{C}$ bölgesi üzerinde meromorf fonksiyon olmak üzere (u_n) fonksiyon dizisi verilsin. Eğer her bir kompakt $K \subseteq R$ kümesi için

i. $n > N_k$ sayısı için $u_n(z)$ fonksiyonunun K kümesinde kutbu yok (yani analitik)

ii. K üzerinde $\sum_{n>N_K} u_n(z)$ serisi düzgün yakınsak

koşulları gerçekleniyorsa $\sum u_n(z)$ serisine R bölgesinin her kompakt alt kümesi üzerinde *düzgün yakınsaktır* denir.

$\sum_{n\le N_K} u_n(z)$ serisi, sonlu sayıda meromorf fonksiyonun toplamı olduğundan $\overset{o}{K}$ kümesinde meromorftur ve $\sum_{n>N_K} u_n(z)$ serisi, analitik fonksiyonların düzgün yakınsak bir serisi olduğundan $\overset{o}{K}$ kümesinde analitiktir, dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n\le N_k} u_n(z) + \sum_{n>N_k} u_n(z)$$

fonksiyonu $\overset{o}{K}$ kümesinde meromorf olur. Dikkat edilirse $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ fonksiyonunun kutup noktaları $n \le N_k$ için $u_n(z)$ fonksiyonlarının kutup noktalarını bulundurur. Verilen herhangi $z \in \overset{o}{K}$ için $\sum u_n(z)$ değeri K kümesinin veya N_k sayısının seçiminden bağımsızdır. Her bir $z \in R$ noktasının kompakt kapanışa sahip olan $K \subseteq R$ gibi bir komşuluğu olduğundan $\sum u_n(z)$ fonksiyonu R bölgesinde meromorf bir fonksiyondur. Bu bilgiler ve Sonuç 1.3.4 yardımıyla ispatı açık olan aşağıdaki teorem verilebilir:

1.3.8 Teorem. $\sum u_n(z)$, $R \subseteq \mathbb{C}$ bölgesindeki meromorf fonksiyonların serisi ve R bölgesinin her kompakt alt kümesi üzerinde $\sum u_n(z) \to u(z)$ yakınsaması düzgün olsun. Böylece $u(z)$ fonksiyonu R bölgesinde meromorftur ve R bölgesinin her kompakt alt kümesi üzerinde $\sum u_n'(z) \to u'(z)$ yakınsaması düzgün olur (Jones ve Singerman 1987).

Örneğin, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-n)^{-2}$ serisi dikkate alınırsa, bu seri mutlak yakınsak olduğundan $\mathbb{N}$ yerine $\mathbb{Z}$ üzerinden toplam almanın bir sakıncası yoktur. Her bir kompakt $K \subseteq \mathbb{C}$ kümesi sınırlı olduğundan sonlu sayıdaki $(z-n)^{-2}$ meromorf fonksiyonları K kümesinde analitiktir. $\sum \left\|(z-n)^{-2}\right\|_K$ serisi ile yakınsak olan $\sum n^{-2}$ serisine karşılaştırma testi uygulandığında $\mathbb{C}$ kümesinin kompakt her alt kümesi üzerinde $\sum (z-n)^{-2}$ serisinin normsal yakınsak ve dolayısıyla mutlak ve düzgün yakınsak olduğu görülür. Böylece $\sum (z-n)^{-2}$ serisi $\mathbb{C}$ kümesinde her bir $n \in \mathbb{Z}$ noktasında ikinci dereceden kutba sahip basit periyodik meromorf bir fonksiyon ile temsil edilebilir.

1.4 Sonsuz Çarpımlar

Eliptik fonksiyonların oluşturulması sırasında analitik fonksiyonların sonsuz çarpımları kavramından yararlanılacağından bu bölümde kısaca sonsuz çapımla ilgili temel özellikler ele alınacaktır. Ω kafesi ile indekslenmiş sonsuz çarpımlar, sonsuz çarpımların özel hali olduğundan öncelikle $\mathbb{N}$ kümesiyle indekslenmiş olan sonsuz çarpımların genel özelliklerini incelemek akıllıca olacaktır. İlk olarak sıfırdan farklı karmaşık sayıların çarpımları ele alınacaktır, daha sonra fonksiyonların sonsuz çarpımları ele alındığında bazı çarpanların sıfır olabileceği de görülecektir.

(b_n), sıfırdan farklı karmaşık sayıların bir dizisi olmak üzere $\prod_{n=0}^{\infty} b_n$ sonsuz çarpımını dikkate alalım ve $p_n = b_0 b_1 \ldots b_n$ olsun. Eğer $p \in \mathbb{C}$ ve

i. $\lim_{n\to\infty} p_n = p$,

ii. $p \neq 0$

ise sonsuz çarpıma $p \in \mathbb{C}$ sayısına *yakınsıyor* denir ve bu durum $\prod_{n=0}^{\infty} b_n = p$ biçiminde gösterilir.

Eğer $\prod_{n=0}^{\infty} b_n$ çarpımı yakınsak ise ***ii.*** koşulu kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} p_n / p_{n-1} = \lim_{n\to\infty} p_n / \lim_{n\to\infty} p_{n-1} = 1$$

olduğu görülür. Böylece $b_n = 1 + c_n$ değişken değişimi yapıldığında $\prod_{n=0}^{\infty}(1+c_n)$ çarpımının yakınsak olması için $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ olması gerektiği sonucu elde edilir. Sonsuz çarpımların logaritma fonksiyonu yardımıyla sonsuz serilere çevrilebileceği mümkündür.

Hatırlanacağı gibi $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere log z fonksiyonu, arg z değişim aralığı olarak 2π uzunluğundaki herhangi bir aralık seçilmek koşulu ile iyi tanımlı tek değerli fonksiyon haline getirilebilir. Her bir $z \neq 0$ için $-\pi < \arg z \leq \pi$ ve ln $|z|$, $|z|$ nin tek değerli gerçel fonksiyonu olmak üzere

$$\mathrm{Log}\, z = \ln |z| + i \arg z$$

değerine log z fonksiyonunun *esas değeri* adı verilir. Logaritma fonksiyonuna ait

$$\mathrm{Log}\, zw = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$$

eşitliği, sadece eşitliğin iki tarafı arasındaki farkın $\pm 2\pi i$ olması halinde gerçekleşeceği açıktır. Ancak exp $2\pi i = 1$ olduğu dikkate alınırsa her z, $w \neq 0$ için

$$zw = \exp(\mathrm{Log}\, zw) = \exp(\mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w)$$

eşitliği elde edilir. Böylece sonsuz çarpımların yakınsaklığı ile sonsuz serilerin yakınsaklıkları arasında, aşağıdaki teorem ile verilen, ilişki elde edilir.

1.4.1 Teorem. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ olmak üzere

$$\text{“}\prod_{n=0}^{\infty} b_n \text{ yakınsak} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} Log(b_n) \text{ yakınsak”}$$

dır, bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \exp \sum_{n=0}^{\infty} Log(b_n)$ olur (Jones ve Singerman 1987).

İspat. ($\Leftarrow$) $\sum_{n=0}^{\infty} Log(b_n) = w$ olsun. Üstel fonksiyon sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\exp w = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} Log(b_k)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\sum_{k=0}^{n} Log(b_k)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=0}^{n} b_k\right)$$

elde edilir. $\exp w \neq 0$ olduğundan $\prod_{n=0}^{\infty} b_n = \exp w = \exp \sum_{n=0}^{\infty} Log(b_n)$ olur.

($\Rightarrow$) $p \neq 0$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = p$ olsun. Böylece $p_n = \prod_{k=0}^{n} b_k$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

olur. $s_n = \sum_{k=0}^{n} Log(b_k)$ olarak alınırsa her bir $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$s_n = \mathrm{Log}\, p_n + 2\pi i q_n$$

olur. Yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in \mathbb{Z}$ nin sabit olduğu gösterilecektir. İşlem yapılarak

$$\begin{aligned}2\pi \mathrm{i}(q_{n+1} - q_n) &= s_{n+1} - s_n + \mathrm{Log}\, p_n - \mathrm{Log}\, p_{n+1} = \mathrm{Log}\, b_{n+1} + \mathrm{Log}\, p_n - \mathrm{Log}\, p_{n+1}\\ &= \ln|b_{n+1}| + \ln|p_n| - \ln|p_{n+1}| + i(\arg b_{n+1} + \arg p_n - \arg p_{n+1})\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin iki tarafındaki sanal kısımlar eşitlendiğinde

$$|q_{n+1} - q_n| = \frac{1}{2\pi}|\arg b_{n+1} + (\arg p_n - \arg p) + (\arg p - \arg p_{n+1})|$$

olduğu görülür. $n \to \infty$ için $b_{n+1} \to 1$ ve yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için p_n, $p_{n+1} \to p$ olduğundan her bir $|\arg b_{n+1}|$, $|\arg p_n - \arg p|$ ve $|\arg p - \arg p_{n+1}|$ ifadesi $\frac{2}{3}\pi$ değerinden daha küçük alınabilir. Bu ise $|q_{n+1} - q_n| < 1$ olduğunu gösterir, diğer yandan $q_{n+1} - q_n \in \mathbb{Z}$ olduğu da dikkate alınırsa $q_{n+1} = q_n$ olur. Dolayısıyla q_n in sabit olduğu gösterilmiş olur. Yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $q_n = q$ olarak alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(Log(p_n) + 2\pi i q_n)$$

elde edilir. Böylece $\sum_{n=0}^{\infty} Log(b_n) = \mathrm{Log}\, p + 2\pi i q$ olur ve dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = p = \exp\sum_{n=0}^{\infty} Log(b_n)$$

olur.

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} Log(b_n)$ serisi *mutlak yakınsak* ise terimleri negatif olmayan $\prod_{n=0}^{\infty} b_n$ sonsuz çarpımına *mutlak yakınsak*tır denir. Mutlak yakınsak serilerin en önemli özelliği, daha önce de belirtildiği gibi, serinin terimlerini toplarken terimlerinin sırasının değiştirilmesinin serinin yakınsaklık karakterini ve toplamını etkilememesidir. Negatif olmayan karmaşık sayıların her sonsuz çarpımı, üstel fonksiyon yardımıyla sonsuz serilere dönüştürülebildiğinden mutlak yakınsak bir sonsuz çarpımın terimlerinin değiştirilmesi halinde de çarpımın yakınsaklığı veya değeri etkilenmeyecektir. Dolayısıyla sonsuz çarpımların mutlak yakınsaklığıyla ilgili aşağıdaki basit kriter verilebilir. Verilecek olan teoremin ispatında kullanılmak üzere, Log $(1+z)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasında türevinin 1 olduğu dikkate alınırsa,

$$\lim_{z\to 0}\frac{Log(1+z)}{z}=1$$

ve yeterince küçük $|z|$ için

$$\tfrac{1}{2}\,|z| \le |\mathrm{Log}(1+z)| \le 2|z|$$

eşitsizliği elde edilir.

1.4.2. Teorem. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $1 + c_n \neq 0$ olmak üzere

$$\text{“}\prod_{n=0}^{\infty}(1+c_n) \text{ mutlak yakınsak} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}c_n \text{ mutlak yakınsak”}$$

dır. Bir başka ifadeyle,

$$\text{“}\prod_{n=0}^{\infty}(1+c_n) \text{ mutlak yakınsak} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|c_n| \text{ yakınsak”}$$

dır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. ($\Leftarrow$) Eğer $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ yakınsak ise $n \to \infty$ için $|c_n| \to 0$ olur. Böylece yeterince büyük n ler için

$$|\mathrm{Log}\,(1+z)| \le 2|c_n|$$

olur ve dolayısıyla karşılaştırma testi gereği $\prod_{n=0}^{\infty}|Log(1+c_n)|$ sonsuz çarpımı yakınsaktır. O halde $\prod_{n=0}^{\infty}(1+c_n)$ mutlak yakınsaktır.

($\Rightarrow$) Eğer $\prod_{n=0}^{\infty}|Log(1+c_n)|$ yakınsak ise $n \to \infty$ için Log $(1 + c_n) \to 0$ ve $c_n \to 0$ olur, dolayısıyla yeterince büyük her n sayısı için

$$\tfrac{1}{2}\,|c_n| \le |\mathrm{Log}\,(1+c_n)|$$

eşitsizliği elde edilir. Karşılaştırma testi uygulandığında $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ serisinin de yakınsak olduğu görülür.

Buraya kadar ele alınan sonsuz çarpımlardaki b_n terimleri sıfırdan farklı olarak seçildiğinden bu terimlerin logaritmaları alınabildi. Ancak sonsuz çarpımlardaki bazı terimleri sıfır olabilen fonksiyonların sonsuz çarpımlarıyla ilgilenebilmek için daha önce verilen sonsuz çarpım tanımının aşağıdaki gibi genişletilmesi gereklidir.

1.4.3 Tanım. (b_n), karmaşık sayıların bir dizisi olsun. Eğer

i. Her $n \geq N$ sayısı için $b_n \neq 0$,

ii. $\prod_{n=N}^{\infty} b_n$ sonsuz çarpımı sıfırdan farklı bir karmaşık sayıya yakınsıyor, yani $m \to \infty$ için $b_N b_{N+1} \ldots b_m \to p \neq 0$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa $\prod_{n=0}^{\infty} b_n$ sonsuz çarpımına *yakınsak*tır denir ve bu durumda $\prod_{n=0}^{\infty} b_n$ sonsuz çarpımının değeri

$$(b_0 b_1 \ldots b_{N-1}) \cdot \prod_{n=N}^{\infty} b_n = b_0 b_1 \ldots b_{N-1} p$$

olarak tanımlanır.

Tanıma dikkat edilecek olursa, $\prod_{n=0}^{\infty} b_n$ değerinin N sayısının seçiminden bağımsız ve üstelik

$$\text{“}\prod_{n=0}^{\infty} b_n = 0 \Leftrightarrow \text{belli } b_n = 0\text{”}$$

olduğu görülür.

1.4.4 Tanım. $f_n : E \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının oluşturduğu (f_n) fonksiyon dizisi verilsin. Eğer

i. E üzerinde $f_n(z) \to 1$ yakınsaması düzgün (burada $\|f_n - 1\| < 1$ dir ve böylece yeterince büyük $n \geq N$ için Log (f_n) iyi tanımlıdır),

ii. E üzerinde normsal olarak $\sum_{n \geq N} \text{Log}(f_n) = w(z)$,

şartları gerçekleniyorsa $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ çarpımına E üzerinde *normsal yakınsaktır* denir.

Dolayısıyla, bu durumda

$$\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) \ldots f_{N-1}(z) . \prod_{n \geq N} f_n(z) = f_0(z) \ldots f_{N-1}(z) . \exp(w(z))$$

eşitliği N sayısının seçimine bağlı olmadan da ifade edilebilir.

1.4.5 Teorem. $f_n : E \to \mathbb{C}$ olmak üzere $f_n = 1 + F_n$ olsun. Bu durumda

"$\prod_{n=0}^{\infty} f_n$, E kümesi üzerinde normsal yakınsak $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} F_n$, E üzerinde normsal yakınsak"

dır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. ($\Rightarrow$) $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$, E kümesi üzerinde normsal yakınsak olsun. Dolayısıyla normsal yakınsaklık tanımı gereği $n \to \infty$ için $\|F_n\| \to 0$ olduğu görülür. Buradan yeterince büyük $n \geq N$ sayıları için Log $(1 + F_n)$ = Log (f_n) fonksiyonunun E kümesi üzerinde iyi tanımlı olduğu sonucu ortaya çıkar. Teorem 1.4.2 yardımıyla her $z \in E$ için

$$\tfrac{1}{2}\,|F_n| \leq |\mathrm{Log}\, f_n(z)|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece her $n \geq N$ sayısı için

$$\tfrac{1}{2}\|F_n\| \leq \|Log(f_n)\|$$

elde edilir. $\sum \|Logf_n\|$ serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereği $\sum \|F_n\|$ serisi de yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum F_n$ serisi E üzerinde normsal yakınsaktır.

($\Leftarrow$) Tersine $\sum \|F_n\|$ serisi yakınsak olsun. Bu durumda $n \to \infty$ için $\|F_n\| \to 0$ olur, dolayısıyla $f_n \to 1$ yakınsamasının E üzerinde düzgün olduğu görülür, yani normsal yakınsaklığın birinci koşulu gerçeklenmiş olur. Yukarıda belirtildiği gibi yeterince büyük n sayıları için Log $(1 + F_n)$ = Log (f_n) fonksiyonu E kümesi üzerinde iyi tanımlıdır ve Teorem 1.4.2 yardımıyla her $z \in E$ için

$$|\mathrm{Log}\,(f_n(z)| \leq 2\,|F_n(z)|$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla yeterince büyük n sayıları için

$$\|Log(f_n)\| \leq 2\|F_n\|$$

olur ve karşılaştırma testi gereği $\sum \|Logf_n\|$ serisi de E üzerinde normsal yakınsaktır. Böylece normsal yakınsaklığın ikinci koşulu da gerçeklenmiş olur. Böylece $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ sonsuz çarpımının E kümesi üzerinde normsal yakınsak olduğu sonucu elde edilmiş olur.

1.4.6 Sonuç. Eğer $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ sonsuz çarpımı E üzerinde normsal yakınsak ise bu sonsuz çarpım E üzerinde mutlak yakınsaktır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Eğer $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ sonsuz çarpımı E üzerinde normsal yakınsak ise Teorem 1.4.5 yardımıyla $f_n = 1 + F_n$ olmak üzere $\sum F_n$ serisinin de E üzerinde normsal yakınsak olduğu görülür. Böylece $\sum F_n(z)$ serisi her bir $z \in E$ için mutlak yakınsaktır ve Teorem 1.4.2 den

$$\prod (1+F_n(z)) = \prod f_n(z)$$

sonsuz çarpımının de her bir $z \in E$ için E üzerinde mutlak yakınsak olduğu elde edilir.

1.4.7 Teorem. (f_n), $R \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olan fonksiyonların bir dizisi ve $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$, R nin tüm kompakt alt kümelerinde normsal yakınsak olsun. Bu durumda $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$ fonksiyonu R de analitiktir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Verilen herhangi $K \subseteq R$ kompakt kümesi üzerinde $\prod f_n$ çarpımı normsal yakınsaktır. Bu durumda her $n \geq N$ sayısı için $\|f_n - 1\|_K$ ve $\sum_{n \geq N} Log(f_n)$ serisi K üzerinde bir $w(z)$ fonksiyonuna normsal yakınsak olacak şekilde $N = N_K \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece her bir Log (f_n) fonksiyonu $\overset{o}{K}$ üzerinde analitiktir ve $\sum_{n \geq N} Log(f_n)$ serisi K üzerinde düzgün yakınsak olur. Dolayısıyla w fonksiyonu K kümesinde analitiktir ve böylece

$$f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n = \exp(w) f_0 f_1 \ldots f_{N-1}$$

fonksiyonu da K kümesinde analitik olur. R kümesindeki her noktanın kompakt bir kapanışı olduğundan $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$ fonksiyonu da R üzerinde analitiktir.

Örnek olarak

$$S(z) = z.\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

fonksiyonunu ele alalım. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2}$ serisi $\mathbb{C}$ nin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde normsal yakınsak olduğundan Teorem 1.4.5 gereği $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ çarpımı $\mathbb{C}$ nin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde normsal yakınsaktır. Böylece Teorem 1.4.7 gereği $S(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}$ de analitik olduğu sonucu elde edilir.

1.4.8 Teorem. (f_n), bir R bölgesinde analitik olan fonksiyonların bir dizisi, $z \in R$ ve $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$ olsun. $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ çarpımının da R üzerinde normsal yakınsak olduğunu varsayalım. Böylece

"$f(z) = 0 \Leftrightarrow$ belli $n \in \mathbb{N}$ sayıları için $f_n(z) = 0$"

dır. Bu koşulu gerçekleyen sadece sonlu sayıda 'n' vardır ve üstelik f fonksiyonunun sıfırı olan z nin mertebesi, f_n fonksiyonlarının sıfırları olan z lerin mertebelerinin toplamına eşittir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Eğer belli bir f_n fonksiyonu $f_n(z) = 0$ oluyorsa $z \in R$ noktasında $f = \prod f_n$ çarpımının da sıfır olacağı açıktır. Tersine keyfi karmaşık sayıların sonsuz çarpımlarının tanımı dikkate alınacak olursa eğer $f(z) = 0$ ise belli bir n için $f_n(z) = 0$ olacağı açıktır. Yakınsaklığın tanımı gereği en fazla sonlu sayıda $f_n(z)$ çarpanı sıfır olabilir ve her $n \geq N$ sayısı için $f_n(z) \neq 0$ olmak üzere

$$f = (f_0 f_1 \dots f_{N-1}) \cdot \prod_{n \geq N} f_n$$

yazıldığında $\prod_{n \geq N} f_n(z) \neq 0$ elde edilir ve böylece teoremin çift gerektirmeli kısmını ispatı tamamlanmış olur.

Örneğin, $S(z)$ fonksiyonunun her bir $n \in \mathbb{Z}$ noktasında basit sıfırları vardır. Dolayısıyla $S(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ üzerinde sıfırdan farklı olduğu açıktır.

Her bir $n \in \mathbb{N}$ sayı için f_n analitik fonksiyon ve m yeterince büyük bir doğal sayı olmak üzere $f = f_0 \dots f_m$ çarpımı dikkate alındığında, f fonksiyonunun türevini, f_n ve f_n

fonksiyonlarının türevleri cinsinden yazmak biraz karmaşıktır. Bu gibi durumlarda f fonksiyonunun

$$\frac{d}{dz}(\log f) = \frac{f'}{f}$$

logaritmik türevini kullanmak daha akıllıca olacaktır. Bu durumda

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=0}^{m} \frac{f_n'}{f_n}$$

şeklinde yazılabilir. Bu formül $f = f_0 \ldots f_m$ eşitliğinin her iki tarafının aynı mertebeden kutuplara sahip olması halinde ve üstelik f fonksiyonunun sıfır yerlerinde de geçerlidir.

1.4.9 Teorem. f, f_n ve R, Teorem 1.4.7 deki gibi olsunlar. Böylece R nin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n} \to \frac{f'}{f}$ yakınsaması düzgündür (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Eğer K, R nin herhangi bir kompakt alt kümesi ise $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ çarpımı K üzerinde normsal yakınsak olur. O halde her $n \geq N$ için $\|f_n - 1\|_K < 1$ olacak şekilde bir $N = N_K \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ve böylece f_n fonksiyonunun K kümesinde sıfırı yoktur.

Böylece $g = f_0 f_1 \ldots f_{N-1}$ ve $h = \prod_{n \geq N} f_n$ fonksiyonları $\overset{o}{K}$ üzerinde analitik iki fonksiyon olur. Dolayısıyla $f = gh$ ve böylece

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f_n'}{f_n} + \frac{h'}{h}$$

elde edilir. $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ çarpımı K üzerinde normsal yakınsak olduğundan Teorem 1.4.1 gereği

$$h = \prod_{n \geq N} f_n = \exp(w)$$

olmak üzere $\sum_{n \geq N} Log(f_n)$ serisi K üzerinde bir w fonksiyonuna normsal yakınsar. Teorem 1.4.7 ve Teorem1.4.8 de belirtildiği üzere h fonksiyonu sıfırdan farklıdır ve üstelik $\overset{o}{K}$ üzerinde analitik olan bir fonksiyon olduğundan $\overset{o}{K}$ üzerinde

$$\frac{h'}{h} = \frac{w' \exp(w)}{\exp(w)}$$

eşitliği elde edilir. $w = \sum_{n\geq N} Log(f_n)$, $\overset{o}{K}$ üzerindeki analitik fonksiyonların normsal yakınsak ve dolayısıyla da düzgün yakınsak bir dizisi olduğundan terim terime türevi alınabilir ve böylece

$$w' = \sum_{n\geq N} \frac{f_n'}{f_n}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f_n'}{f_n} + \sum_{n\geq N} \frac{f_n'}{f_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n}$$

elde edilir. Bu seriler Sonuç 1.3.4 de bahsedildiği gibi $\overset{o}{K}$ kümesinin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır. Bu ifade her $K \subseteq R$ için geçerli olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n} \to \frac{f'}{f}$ yakınsaması R nin her kompakt alt kümesi üzerinde düzgündür.

Örneğin,

$$S(z) = z.\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) = z.\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n})(1+\frac{z}{n})$$

çarpımı $\mathbb{C}$ nin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde normsal yakınsak olduğundan bir önceki teorem yardımıyla $S(z)$ nin logaritmik türevi olan

$$Z(z) = \frac{S'(z)}{S(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n})$$

serisi elde edilir. Bu $Z(z)$ serisi $\mathbb{C}$ nin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır. Teorem 1.3.8 yardımıyla $Z(z)$ nin terim terim türevi alınarak bir meromorf fonksiyon elde edilebilir. Eğer $P(z) = -Z'(z)$ denirse

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

olarak bulunur. $P(z)$ fonksiyonunun, periyodik ve periyotlarının kümesi $\mathbb{Z}$ olan, bir basit periyodik meromorf fonksiyon olduğu tanımından görülmektedir. Üstelik

$$P(z) = \pi^2 \cos ec^2 \pi z\ ,\ Z(z) = \pi \cot \pi z \ \text{ ve } S(z) = \pi \sin \pi z$$

olduğu da açıktır. Bir sonraki bölümde elde edilecek olan $\wp(z)$ eliptik fonksiyonu ile $\zeta(z)$ ve $\sigma(z)$ fonksiyonları da $P(z)$, $Z(z)$ ve $S(z)$ fonksiyonlarına benzer şekilde oluşturulacaklardır.

2. ELİPTİK FONKSİYONLAR

Beklenenin aksine eliptik fonksiyonlar ile elips arasındaki matematiksel ilişki oldukça zayıf olduğu halde, özellikle bu fonksiyonların ortaya çıkmalarına neden olduklarından aralarında tarihi bir ilişki söz konusudur. Eliptik fonksiyonlar ilk defa, 1655 yılında John Wallis'in ikinci dereceden eğrileri (konikleri) incelemesi sırasında bir elipsin çevresini hesaplama isteği sonucunda adına *eliptik integraller* denen integralleri tanımlamasıyla ortaya çıkmıştır. Hatırlanacağı gibi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

elipsinin çevresi, $e=1-\frac{b^2}{a^2}$ olmak üzere

$$4\int_0^a\sqrt{\frac{a^2-ex^2}{a^2-x^2}}dx$$

dir. 1790 ların sonlarında Gauss,

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x \qquad \text{ve} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$$

biçimindeki integraller ile elde etmiş olduğu fonksiyonların tersleri olan tan x ve sin x fonksiyonlarına *basit periyodik fonksiyonlar* ve

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

biçimindeki eliptik integraller ile elde edilen fonksiyonların tersleri olan fonksiyonlara da *çifte periyodik fonksiyonlar* adını vermiştir. Bundan başka, 1697 yılında J. Bernoulli, bir spiralin yay uzunluğunun da, adına o zaman eliptik integral denmemiş olsa da, bir eliptik integral yardımıyla bulunabileceğini göstermiştir. Özellikle elektromanyetik ve yerçekimi teorilerinde eliptik integraller oldukça önemli bir yere sahiptirler. Gauss tarafından yapılmış olan bu konudaki çalışmalar yayınlanmadığı halde 1820 lerde Abel ve Jacobi tarafından yapılan çalışmalarda eliptik fonksiyonlara bugün kullanılan isimleri verilmiştir.

Jacobi, kutup noktaları dışında analitik, iki tane esas periyodu olan ve bu sayılar arasındaki oranın gerçel bir sayı belirttiği bir fonksiyon olup olmadığını incelemiş ve böyle bir fonksiyonun ancak bir sabit fonksiyon olabileceğini görmüştür. Bununla birlikte, eğer iki esas periyodun oranı bir gerçel sayı belirtmiyorsa böyle fonksiyonların yeni bir fonksiyon sınıfı oluşturduğu ve dolayısıyla bunlar için yeni bir tanım yapmanın gerekli olduğunu görmüştür.

Daha genel olarak $p(x)$, derecesi 3 veya 4 olan, üstelik katlı kökü olmayan bir polinom ve $r(x, y)$ iki değişkenli rasyonel fonksiyon olmak üzere

$$\int r(x, \sqrt{p(x)})dx$$

biçimindeki integrallere *eliptik integraller* adı verilir. Bu tip integraller yardımıyla tanımlanan eliptik fonksiyonlar içinde en iyi bilinen Weierstrass $\wp$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon, g_2 ve g_3, Ω kafesine karşılık gelen *Eisenstein serileri* ve $p(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ olmak üzere

$$\int \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} = \wp^{-1}(x)$$

biçiminde tanımlanır.

Bir n tamsayısının verilen bir S kümesindeki tamsayılar cinsinden ifade edilmesi sayılar teorisinin önemli problemlerinden biridir, örneğin, S kümesi olarak asal, karesel, kübik veya diğer özel sayıların kümesi olarak seçilebilir. Verilen bir tam sayının S kümesinin elemanlarının toplamı cinsinden ifade edilip edilemeyeceği, edilebilirse bunun kaç farklı şekilde olacağı oldukça önemli bir problemdir. $f(n)$, n tamsayısının S kümesinin elemanlarının toplamı cinsinden kaç farklı şekilde gösterilebileceğini belirten sayı olmak üzere yeterince büyük n tamsayıları için $f(n)$ nin asimptotlarının davranışı sayılar teorisi ile çalışmalar yapan matematikçiler için bir uğraş konusudur. n tamsayılarının, $x \leq n$ özelliğindeki pozitif tamsayıların toplamı cinsinden ifade edilebilme sayılarını veren $p(n)$ parçalı fonksiyonu ve sayılar teorisindeki diğer fonksiyonlar ile karmaşık analizde *eliptik modüler fonksiyon* adı verilen fonksiyonlar arasında oldukça yakın bir ilişki vardır. Bu fonksiyonların toplamsal sayılar teorisinde oynağı rol, çarpımsal sayılar teorisinde Dirichlet serilerinin oynadığı rolle benzerdir (Apostol 1920).

2.1. Eliptik Fonksiyonların Genel Özellikleri

Eğer f, Ω kafesine göre eliptik bir fonksiyon ise $T = \mathbb{C}/\Omega$ olmak üzere f fonksiyon $f : T \rightarrow \Sigma$ olarak düşünülebilir. $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ meromorf fonksiyonları ele alındığında, Σ küresi kompakt olduğundan, Liouville teoremi gereği, “f fonksiyonu analitik ise f fonksiyonu sabittir” sonucu elde edilir. T toru kompakt olduğundan benzer sonuçlar eliptik fonksiyonlar için de verilebilir. İlerleyen kısımlarda rasyonel fonksiyonların küreyle olan ilişkisine benzer bir ilişkinin eliptik fonksiyonlar ile tor arasında olduğu da görülecektir.

Sabit olmayan bir eliptik fonksiyonun oluşturulması oldukça zor bir iştir. Bu şekilde bir eliptik fonksiyonu oluşturmadan önce bir eliptik fonksiyonun sahip olması gereken temel özellikler üzerinde durmak daha uygun olacaktır. f eliptik fonksiyonu, $c \in \Sigma$ olmak üzere c sayısına özdeşliğin eşit olmayan ve Ω kafesine göre eliptik bir fonksiyon olarak seçilebilir. Dolayısıyla $f(z) = c$ denkleminin çözümleri ayrıktır ve üstelik bu denklemin her bir çözümü sonlu katlılığa sahiptir, üstelik birbirine denk olan çözümlerin katlılıkları da aynıdır. $f(z) = c$ denkleminin çözümleri ayrık olduğundan Ω kafesi için herhangi bir P temel paralel kenarı seçilirse, P kompakt olduğundan bu paralel kenar $f(z) = c$ denkleminin sadece sonlu çoklukta çözümünü bulundurur. Üstelik, eğer gerek duyulursa $P \rightarrow P + t$ kayması yapılarak P temel paralel kenarı, sınırı üzerinde hiç çözüm bulunduramayacak hale de getirilebilir. P temel paralel kenarındaki çözümler, katlılıkları $k_1, \ldots, k_r$ olmak üzere $z = z_1, \ldots, z_r$ noktalarında ve $N = k_1 + \ldots + k_r$ olsun. Böylece $f(z) = c$ denkleminin P temel paralel kenarında tam N tane çözümü olur. $z = z_1, \ldots, z_r$ noktaları $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z) = c$ denkleminin çözümlerinin denklik sınıflarının temsilcileri olduğundan N sayısı, $[z] \in T = \mathbb{C}/\Omega$ olmak üzere $f([z]) = c$ denkleminin çözümlerinin katlılıklarının toplamı olarak da düşünülebilir.

2.1.1 Tanım. Bir eliptik f fonksiyonunun mertebesi, $f(z) = \infty$ denkleminin çözümlerinin sayısı olarak tanımlanır ve bu değer $ord(f)$ ile gösterilir.

Tanıma dikkat edilecek olursa, $ord(f)$, f fonksiyonunun kutuplarının denklik sınıflarının mertebelerinin toplamına eşittir. Bu tanım, rasyonel bir g fonksiyonunun derecesinin katlılıkları sayılmak üzere $g(z) = \infty$ denkleminin çözümlerinin sayısına eşit olmasıyla benzerlik gösterir. Bundan sonraki kısımlarda f fonksiyonu denildiğinde mertebesi N ve Ω kafesine göre eliptik bir fonksiyon ve P temel paralel kenarı denildiğinde de t, ∂P üzerinde f fonksiyonunun sıfırları ya da kutupları olmayacak şekilde bir karmaşık sayı olmak üzere, köşeleri t, $t + \omega_1$, $t + \omega_2$, $t + \omega_1 + \omega_2$ olan $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesi için bir temel paralelkenar olarak anlaşılacaktır.

2.1.2 Teorem. "f fonksiyonu sabit $\Leftrightarrow N = 0$" dir, yani bir başka ifadeyle analitik bir f eliptik fonksiyonu sabit fonksiyon olmak zorundadır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Eğer f fonksiyonu sabit ve meromorf bir fonksiyon ise f fonksiyonunun $\mathbb{C}$ de kutbu yoktur, yani $N = 0$ dır. Tersine $N = 0$ olduğu varsayılırsa f fonksiyonunun hiç kutbu yoktur. Dolayısıyla f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de analitiktir. P temel bölgesi kompakt ve f fonksiyonu sürekli olduğundan $f(P)$ de $\mathbb{C}$ nin kompakt bir alt kümesidir ve dolayısıyla sınırlıdır. $f(\mathbb{C}) = f(P)$ olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{C}$ kümesinde sınırlıdır. Liouville teoremi gereği, f fonksiyonu analitik ve sınırlı olduğundan sabit fonksiyon olmak zorundadır (bu teoremin ispatında f fonksiyonunun sınırlı olduğunu göstermek için $T = \mathbb{C}/\Omega$ torunun kompakt olduğu dikkate alınarak $f(\mathbb{C}) = f(T)$ eşitliği de kullanılabilirdi).

2.1.3 Teorem. f fonksiyonunun P temel paralel kenarı boyunca kalıntıları toplamı sıfırdır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. f fonksiyonu ∂P üzerinde analitik ve meromorf bir fonksiyon olduğundan $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} f(z)dz$ değeri f fonksiyonunun P temel paralelkenarı boyunca kalıntıları toplamına eşittir. Γ_1, Γ_2, Γ_3 ve Γ_4, aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi, P temel paralel kenarının sırasıyla t köşesinden $t + \omega_1$ köşesine, $t + \omega_1$ köşesinden $t + \omega_1 + \omega_2$ köşesine, $t + \omega_1 + \omega_2$ köşesinden $t + \omega_2$ köşesine ve $t + \omega_2$ köşesinden t köşesine olan kenarlarını göstersinler. ∂P üzerinde, $j = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere Γ_j kenarları boyunca saat yönünün tersi yönünde hareket edilirse

$$\int_{\partial P} f(z) = \sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_j} f(z)dz$$

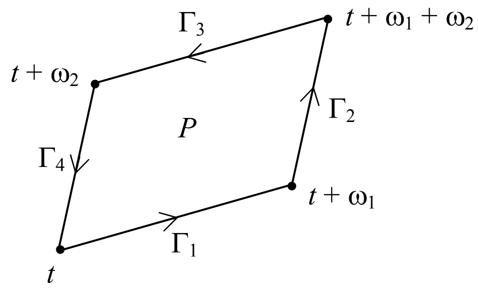
olur. ω_2 karmaşık sayısı f fonksiyonunun bir periyodu olduğundan

$$\int_{\Gamma_3} f(z)dz = \int_{\Gamma_3} f(z+\omega_2)dz$$

yazılabilir. $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \omega_2$ eşitliği sadece yön farkıyla doğru olduğundan

$$\int_{\Gamma_3} f(z)dz = \int_{\Gamma_3} f(z+\omega_2)dz = -\int_{\Gamma_1+\omega_2} f(z+\omega_2)d(z+\omega_2)$$

olur. z yerine $z - \omega_2$ değeri yerine yazılırsa



Şekil 2.1 P temel paralel kenarının sınırı

$$\int_{\Gamma_3} f(z)dz = \int_{\Gamma_3} f(z+\omega_2)dz = -\int_{\Gamma_1+\omega_2} f(z+\omega_2)d(z+\omega_2) = -\int_{\Gamma_1} f(z)dz$$

olur. Benzer şekilde ω_1 karmaşık sayısı f fonksiyonunun bir periyodu olduğundan

$$\int_{\Gamma_4} f(z)dz = -\int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

eşitliği de kolayca elde edilebilir. Dolayısıyla

$$\int_{\partial P} f(z)dz = 0$$

sonucu bulunur.

2.1.4 Sonuç. $N = 1$ mertebeli bir eliptik fonksiyon yoktur (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Eğer f fonksiyonu 1 mertebeli bir eliptik fonksiyon olsaydı f fonksiyonunun P temel paralel kenarında bir mertebeli bir basit kutbu olurdu. Bu kutup noktası $z = a \in P$ olarak seçilirse $a_{-1} \neq 0$ olmak üzere f fonksiyonu $z = a$ noktası civarında

$$\sum_{j=-1}^{\infty} a_j (z-a)^j$$

şeklinde seriye açılabilir. Dolayısıyla f fonksiyonunun P temel paralelkenarı boyunca kalıntıları toplamı sıfırdan farklı olan a_{-1} sayısına eşit olurdu. Bu ise yukarıda verilen teoremle çelişir.

Mertebesi 1 olan eliptik fonksiyon olmadığı gibi en basit eliptik fonksiyonun mertebesinin de 2 olabileceği ve üstelik tüm basit periyodik fonksiyonların $e^{2i\pi z}$ cinsinden ifade edilebildiği gibi tüm eliptik fonksiyonların da mertebesi 2 olan bu eliptik fonksiyon yardımıyla ifade edilebileceği görülecektir.

2.1.5 Teorem. Eğer f fonksiyonu $N > 0$ mertebeli bir eliptik fonksiyon ise f fonksiyonu her bir $c \in \Sigma$ değerini tam N defa alır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Eğer $c = \infty$ olarak alınırsa bu halde N sayısının daha önce verilmiş olan tanımı elde edilir. Dolayısıyla $c \in \mathbb{C}$ olarak düşünülebilir. f fonksiyonu, kendisiyle aynı metrebeden olan $f - c$ fonksiyonuyla değiştirilirse $c = 0$ olarak alınabilir. f'/f fonksiyonu meromorf ve ∂P üzerinde f fonksiyonunun sıfırları veya kutupları olmadığından f'/f fonksiyonu ∂P üzerinde analitik bir fonksiyondur. Diğer yandan f fonksiyonu eliptik olduğundan f' fonksiyonu da eliptiktir ve böylece f'/f fonksiyonu da eliptik bir fonksiyon olur. Teorem 2.1.3 kullanılarak

$$\int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

olduğu sonucu elde edilir. f'/f fonksiyonunun kutup noktaları, f fonksiyonunun kutup ve sıfır noktalarından başka bir şey değildir. Eğer f fonksiyonunun sıfırı, k katlılığa sahip olan $z = a \in P$ noktası olarak alınırsa, g analitik bir fonksiyon ve $g(a) \neq 0$ olmak üzere f fonksiyonu $z = a$ noktasının civarında

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitliğin her iki tarafının türevi alındığında, $z = a$ noktasının civarında

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1} g(z) + (z-a)^k g'(z)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla f'/f fonksiyonunun $z = a$ noktasında kalıntısı k olmak üzere $z = a$ noktasının civarında

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

olarak ifade edilebilir. Benzer bir düşünce ile, $f(z) = (z-a)^{-k} g(z)$ olarak alınarak, f'/f fonksiyonunun, f fonksiyonunun k katlı her bir kutup noktasında $-k$ kalıntısına sahip olduğu da gösterilebilir. f'/f fonksiyonunun kalıntıları toplamı sıfır olduğundan f fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı, katlılıkları sayılmak şartıyla, kutup yerlerinin sayısına eşit olduğu görülür. Dolayısıyla $f(z) = 0$ denkleminin N tane çözümü vardır.

2.1.6 Teorem. f ve g fonksiyonları, $\mathbb{C}$ kümesinde kutupları aynı noktalarda ve bu noktalardaki esas kısımları da aynı olan Ω kafesine göre eliptik iki fonksiyon olsun. Bu durumda belli bir $c \in \mathbb{C}$ için f ve g fonksiyonlar arasında $f(z) = g(z) + c$ bağıntısı vardır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $f - g$ fonksiyonu eliptik bir fonksiyondur ve bu fonksiyonun hiç kutup noktası olmadığından mertebesi sıfırdır. Analitik bir eliptik fonksiyonun mutlaka sabit fonksiyon olması gerektiği daha önce gösterilmişti. Dolayısıyla $f - g$ fonksiyonu sabit fonksiyondur.

2.1.7 Teorem. f ve g fonksiyonları $\mathbb{C}$ kümesinde kutupları ve sıfırları aynı noktalarda olan, Ω kafesine göre eliptik iki fonksiyon olsun. Bu durumda belli bir $c \neq 0$ sabiti için $f(z) = cg(z)$ dir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Teorem 2.1.6 in ispatında $f - g$ fonksiyonu yerine f / g fonksiyonunun alınması ispatı tamamlar.

Özdeşliğin sıfıra eşit olmayan bir $f : \Sigma \to \Sigma$ rasyonel fonksiyonunun sonlu sayıda sıfırları ve sonlu sayıda kutup noktaları vardır. Bu f fonksiyonunun sıfırları olarak, katlılıkları $k_1, \ldots, k_r$ olan $a_1, \ldots, a_r$ noktaları ve kutupları da, katlılıkları $l_1, \ldots, l_s$ olan $b_1, \ldots, b_s$ noktaları olarak alınabilir. Tersine katlılıkları, sırasıyla, $k_1, \ldots, k_r$ ve $l_1, \ldots, l_s \geq 1$ olarak verilen $a_1, \ldots, a_r$ noktalarında sıfırları ve $b_1, \ldots, b_s$ noktalarında da kutupları olan bir f rasyonel fonksiyonu vardır. Bu f rasyonel fonksiyonu aşağıdaki koşulları gerçekler:

i. $k_1 + \ldots + k_r = l_1 + \ldots + l_s$ (her iki toplam f fonksiyonunun dercesine eşittir),

ii. $\{a_1, \ldots, a_r\}$ ve $\{b_1, \ldots, b_s\}$ kümeleri ayrıktırlar (yani bir kutup noktası ile sıfır noktası çakışmaz).

Bu durumda f fonksiyonu, $a_j = \infty$ ve $b_j = \infty$ çarpanları hariç $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = \prod_{j=1}^{r} (z - a_j)^{k_j} / \prod_{j=1}^{s} (z - b_j)^{t_j}$$

olarak alınabilir. Eğer $f : \mathbb{C} \to \Sigma$ eliptik fonksiyonunun sıfır yerleri $[a_1], [a_2], \ldots, [a_r]$ denklik sınıflarında $k_1, \ldots, k_r$ katlılıklı ve kutup yerleri $[b_1], [b_2], \ldots, [b_s]$ denklik sınıflarında $l_1, \ldots, l_s$ katlılıklı ise Teorem 2.1.5 gereği ***i.*** koşulu gereklidir ve ***ii.*** koşuluna karşılık

ii.′ $[a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_r]$ ve $[b_1] \cup [b_2] \cup \ldots \cup [b_s]$ kümeleri farklıdırlar maddesi elde edilir.

Sıradaki sonuç rasyonel fonksiyonların tersine bu koşulların f fonksiyonunun varlığı için yeterli olmadığını göstermektedir.

2.1.8 Teorem. Bir eliptik f fonksiyonunun sıfır yerleri $[a_1]$, $[a_2]$, …, $[a_r]$ denklik sınıflarında k_1, …, k_r katlılıklı ve kutup yerleri de $[b_1]$, $[b_2]$, …, $[b_s]$ denklik sınıflarında l_1, …, l_s katlılıklı olsun. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^{r} k_j a_j \sim \sum_{j=1}^{s} l_j b_j \quad \bmod \Omega$$

dır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. P, Ω kafesi için, ∂P üzerinde f fonksiyonunun sıfırlarını veya kutuplarını bulundurmayan bir temel paralel kenar olsun. İlk olarak

$$\sum k_j a_j - \sum l_j b_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz$$

eşitliği ispatlanacaktır.

$z f'/f$ fonksiyonunun kutup noktaları f fonksiyonunun sıfır ve kutup yerlerindedir ve f fonksiyonunun $z = a$ noktasına k katlı bir sıfırı varsa, g analitik bir fonksiyon ve $g(a) \neq 0$ olmak üzere f fonksiyonu $z = a$ noktasının civarında

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $z g'/g$ fonksiyonu a noktasında analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{z}{(z-a)^k g(z)}(k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'(z)) = \frac{kz}{z-a} + \frac{zg'(z)}{g(z)}$$

yazılabilir. Bu eşitlik yardımıyla $z f'/f$ fonksiyonunun $z = a$ noktasında kalıntısının ka olduğu görülür. Benzer şekilde, eğer f fonksiyonunun $z = b$ noktasında l katlı bir kutbu varsa $z f'/f$ fonksiyonunun $z = b$ noktasında kalıntısının da $-lb$ olduğu kolayca görülebilir. Artık f fonksiyonunun P temel paralelkenarında sıfır ve kutup yerleri sırasıyla a_1, …, a_r noktalarında k_1, …, k_r katlılıklı ve b_1, …, b_s noktalarında l_1, …, l_s katlılıklı olur ve üstelik

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz$$

değeri de $z\,f'/f$ fonksiyonunun kalıntılarının toplamına eşittir. Bu değer ise

$$\sum k_j a_j - \sum l_j b_j$$

değerine eşittir. P temel paralelkenarının kenarları Teorem 2.1.3 nin ispatındaki gibi isimlendirilsin. f ve f' periyodik iki fonksiyon, Γ_4 yolu $\Gamma_2 - \omega_1$ yolunun ters yönlüsü ve z, Γ_2 kenarı boyunca $t + \omega_1$ köşesinden $t + \omega_1 + \omega_2$ köşesine hareket ettiğinde, $\log f(z)$ fonksiyonu $2\pi i$ nin tamsayı katlarında farklı değerler aldığı bilgisi kullanıldığında, belli $n_1 \in \mathbb{Z}$ için

$$\int_{\Gamma_2} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \int_{\Gamma_2} \frac{(z-\omega_1)f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\omega_1 f'(z)}{f(z)}dz$$

$$= -\int_{\Gamma_4} \frac{zf'(z+\omega_1)}{f(z+\omega_1)}dz + \omega_1\left[\log f(z)\right]_{\Gamma_2}$$

$$= -\int_{\Gamma_4} \frac{zf'(z)}{f(z)} + 2\pi n_1 i\omega_1$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, belli $n_2 \in \mathbb{Z}$ için

$$\int_{\Gamma 1} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = -\int_{\Gamma_3} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz + 2\pi n_2 i\omega_2$$

olduğu ve böylece

$$\sum k_j a_j - \sum l_j b_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{4}\int_{\Gamma_j} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(2\pi n_1 i\omega_1 + 2\pi n_2 i\omega_2) = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikteki $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ toplamı Ω kafesinin bir elemanıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Bir eliptik fonksiyon oluşturulmak istenildiğinde, yukarıda verilen ***i)*** ve **ii**$)'$ koşullarına ek olarak

iii. $\sum_{j=1}^{r} k_j a_j \sim \sum_{j=1}^{s} l_j b_j \mod \Omega$

koşulunun gerçeklenmesi, yukarıda belirtilen noktalarda sıfırları ve kutupları bulunan f eliptik fonksiyonunun varlığı için yeterlidir.

2.2 Jacobi Eliptik Fonksiyonları

Daha önceki bölümlerde bir eliptik fonksiyonunun mertebesinin 2 den az olamayacağı belirtilmişti. Dolayısıyla en basit eliptik fonksiyonunun mertebesi 2 dir. Bu durum iki başlık altında incelenebilir: Bu fonksiyonlar, sıfırı bulundurmayan her bir temel paralel kenarda bir tane çift katlı kutbu olan ve bu kutup noktasındaki kalıntılarının toplamı sıfır olan eliptik fonksiyonlar ile her biri basit olan iki kutup noktasına sahip ve bu kutup noktalarındaki kalıntılarının toplamı mutlak değerce birbirine eşit ancak zıt işaretli olan eliptik fonksiyonlar. Bu bölümde ikinci tipteki *Jacobi eliptik fonksiyonları* ele alınacaktır.

$-1 < x < 1$ olmak üzere

$$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{2.1}$$

$$\tfrac{1}{2}\pi = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{2.2}$$

integrallerini dikkate alalım. Eğer birinci intgeral sıfırdan π ye düşünülür ve u nun pozitif karekökü alınırsa (2.1) eşitliğinin, değişkeni x ve tek fonksiyon olan bir u fonksiyonu tanımladığı görülür. Tersine, bu integral yardımıyla x in, u değişkenli bir tek fonksiyonu olduğu görülür. Eğer bu fonksiyon $x(u) = \sin u$ ile gösterilirse, (2.1) nolu integral

$$u(x) = \arcsin x$$

biçimini alır. (2.2) nolu integral yardımıyla da $\cos u$ fonksiyonu

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu durumda u için $-\tfrac{1}{2}\pi$ ve $\tfrac{1}{2}\pi$ arasında pozitif karekök alındığından gerçekte, u fonksiyonunun x değişkenine bağlı bir çift fonksiyon olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

eşitliği elde edilir. Burada $\sin 0 = 0$ ve $\cos 0 = 1$ olduğuna dikkat edilmelidir.

(2.1) nolu integralin x e göre türevi alındığında

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

elde edilir. $x = \sin u$ olduğundan

$$\frac{d}{du}\{\sin u\} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$$

olur. Üstelik (2.2) nolu integralin diferensiyeli alındığında

$$\frac{d}{du}\{\cos u\} = -\sin u$$

elde edilir.

$$\omega = \sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2$$

özdeşliğinin u_1 ve u_2 değişkenlerine göre kısmi türevleri birbirine eşittir. Böylece $f(u_1 + u_2)$, $u_1 + u_2$ değişkenin bir fonksiyonu olmak üzere

$$\omega = f(u_1 + u_2) = \sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2$$

biçiminde ifade edilebilir. Eğer $u_2 = 0$ ise $f(u_1) = \sin u_1$ ve benzer şekilde $u_1 = 0$ ise $f(u_2) = \sin u_2$ olur. Dolayısıyla

$$f(u_1 + u_2) = \sin(u_1 + u_2)$$

dir. Bu eşitlikler dikkate alındığında

$$\sin(u_1 + u_2) = \sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2$$

toplam formülü elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla, $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ özdeşliği de kullanılırsa

$$\cos(u_1 + u_2) = \cos u_1 \cos u_2 - \sin u_1 \sin u_2$$

toplam formülü elde edilir. Elde edilen bu iki toplam formülü aynı zamanda sin u ve cos u fonksiyonlarının 2π periyotlu basit periyodik fonksiyon olduklarını göstermek için de kullanılabilir.

2.2.1 Tanım. Belli bir k sabiti için

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

integrali yardımıyla elde edilen sn u fonksiyonuna *Jacobi eliptik fonksiyonu* adı verilir. Bu integralin tersi alındığında $x = \mathrm{sn}\, u$ ve sn 0 = 0 olduğu görülür. Yukarıdakilere benzer şekilde, cn u ve dn u fonksiyonları

$$sn^2u + cn^2u = 1$$

$$k^2sn^2u + dn^2u = 1$$

özdeşlikleri yardımıyla tanımlanabilir. Bu tanımla birlikte cn 0 = 1 ve dn 0 = 1 sonuçları elde edilir. Her bir Jacobi eliptik fonksiyonu bir k parametresine bağlıdır. Bu k parametresine *Jacobi eliptik fonksiyonunun modülü* adı verilir.

$$k^2 + k'^2 = 1$$

eşitliği ile tanımlanan k' parametresine de *tümler* (*bütünleyici*) *modül* adı verilir.

Özel olarak seçilmiş bir modül vurgulanmak istenildiğinde, Jacobi eliptik fonksiyonları

$$\text{sn}\,(u, k),\ \text{cn}\,(u, k) \text{ ve } \text{dn}\,(u, k)$$

biçiminde ifade edilirler. $m = k^2$ parametreli alternatif notasyon kullanıldığında ise Jacobi eliptik fonksiyonları için

$$\text{sn}\,(u|m),\ \text{cn}\,(u|m) \text{ ve } \text{dn}\,(u|m)$$

gösterimleri kullanılır. Özel olarak $k = 0$ olması halinde dn $u = 1$ olurken, sn u ve cn u Jacobi eliptik fonksiyonları sırasıyla sin u ve cos u trigonometrik fonksiyonlarına dönüşür. $k = 1$ olması halinde ise cn u ve dn u Jacobi eliptik fonksiyonları sech u hiperbolik fonksiyonuna eşit olurken sn u fonksiyonu da tanh u hiperbolik fonksiyonuna eşit olur.

2.2.2 Teorem. sn u fonksiyonu tek, cn u ve dn u fonksiyonları ise çift Jacobi eliptik fonksiyonlardır (Whittaker ve Watson 1927).

İspat. Eğer

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

integralinde, $t = -t$ değişken değişikliği yapıldığında x in işareti değişirse benzer şekilde u nun da işareti değişir. Dolayısıyla sn $(-u) = -$sn u olur. Buradan sn u Jacobi eliptik fonksiyonunun tek olduğu elde edilir.

$$sn^2u + cn^2u = 1$$

özdeşliğinden cn $(-u) = \pm$cn u sonucu bulunur. cn u eliptik fonksiyonu tek değerli analitik sürekli bir fonksiyon olduğundan üst işaret veya alt işaret alınmalıdır. Diğer yandan $u = 0$ olduğunda pozitif işaret alınacağından cn $(-u)$ = cn u olması gerekir. Benzer şekilde dn $(-u)$ = dn u olduğu da görülebilir. Böylece dn u ve cn u Jacobi eliptik fonksiyonlarının çift fonksiyonlar oldukları sonucu elde edilmiş olur.

2.2.3 Teorem. sn (u, k), cn (u, k) ve dn (u, k) Jacobi eliptik fonksiyonlarının türevleri

$$\frac{d}{du}\{sn\,u\} = cn\,u\,du$$

$$\frac{d}{du}\{cn\,u\} = -sn\,u\,du$$

$$\frac{d}{du}\{dn\,u\} = -k^2 sn\,u\,cn\,u\,du$$

dir (Bowman 1953).

İspat. x = sn u olduğundan

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

integralinin diferensiyeli alındığında

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d}{du}\{sn\,u\} = \sqrt{(1-sn^2\,u)(1-k^2 sn^2\,u)} = cn\,u\,du$$

olur. Eğer $sn^2u + cn^2u = 1$ özdeşliğinin diferensiyeli alınırsa

$$\frac{d}{du}\{cn\,u\} = -sn\,u\,du$$

ve benzer şekilde $k^2sn^2u + dn^2u = 1$ özdeşliğinin diferensiyeli alındığında

$$\frac{d}{du}\{dn\,u\} = -k^2 sn\,u\,cn\,u\,du$$

elde edilir.

2.3 Jacobi Eliptik Fonksiyonları İçin Toplam Formülleri

2.3.1 Tanım. R sıfırdan farklı üç değişkenli bir rasyonel fonksiyon olmak üzere her u_1, u_2 için $f(u_1)$, $f(u_2)$ ve $f(u_1 + u_2)$ fonksiyonları arasında

$$R(f(u_1), f(u_2), f(u_1 + u_2)) = 0$$

eşitliği gerçekleniyorsa $f(u)$ fonksiyonu *cebirsel toplam formülüne* sahiptir denir.

Örneğin, tan u trigonometrik fonksiyonu için

$$\tan(u_1+u_2)=\frac{\tan u_1+\tan u_2}{1-\tan u_1\tan u_2}$$

eşitliği gerçeklendiğinden tan u fonksiyonu cebirsel toplam formülüne sahip bir fonksiyondur.

2.3.2 Teorem. Jacobi eliptik fonksiyonları için toplam formülleri

$$sn(u_1+u_2)=\frac{sn\,u_1 cn\,u_2 dn\,u_2+sn\,u_2 cn\,u_1 dn\,u_1}{1-k^2 sn^2\,u_1 sn^2\,u_2}$$

$$cn(u_1+u_2)=\frac{cn\,u_1 cn\,u_2-sn\,u_1 sn\,u_2 dn\,u_1 dn\,u_2}{1-k^2 sn^2\,u_1 sn^2\,u_2}$$

$$dn(u_1+u_2)=\frac{dn\,u_1 dn\,u_2-k^2 sn\,u_1 sn\,u_2 cn\,u_1 cn\,u_2}{1-k^2 sn^2\,u_1 sn^2 u_2}$$

dir (Bowman 1953).

İspat. s_1 = sn u_1, s_2 = sn u_2, c_1 = cn u_1, c_2 = cn u_2, d_1 = dn u_1, d_2 = dn u_2 olmak üzere

$$\omega=\frac{s_1c_2dn\,u_2+s_2c_1d_1}{1-k^2{s_1}^2{s_2}^2}$$

olsun. u_1 e göre kısmi diferensiyel alınıp

$$u=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

ve

$$sn^2u+cn^2u=1$$

eşitlikleriyle birlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{d\omega}{du_1}=\frac{c_1d_1c_2d_2(1+k^2{s_1}^2{s_2}^2)-s_1s_2({d_1}^2{d_2}^2+k^2{c_1}^2{c_2}^2)}{1-k^2{s_1}^2{s_2}^2}$$

elde edilir. dω/du_1 u_1, u_2 ye göre simetrik ve üstelik ω fonksiyonu da simetrik fonksiyon olduğundan

$$d\omega/du_2 = d\omega/du_1$$

olur. Dolayısıyla $f(u_1+u_2)$ fonksiyonu için

$$\omega = f(u_1+u_2)$$

ve

$$f(u_1+u_2)=\frac{s_1c_2d_2+s_2c_1d_1}{1-k^2{s_1}^2{s_2}^2}$$

eşitlikleri elde edilir. $u_2 = 0$ için $f(u_1) = s_1$ ve $u_2 = 0$ için $f(u_2) = s_2$ olur. Dolayısıyla

$$f(u_1 + u_2) = \mathrm{sn}(u_1 + u_2)$$

olur. $u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ integrali ve Jacobi eliptik fonksiyonları için verilmiş olan toplam formülleri yardımıyla

$$\mathrm{cn}^2(u_1 + u_2) = 1 - \mathrm{sn}^2(u_1 + u_2) = \frac{(1-k^2{s_1}^2{s_2}^2)^2 - (s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)^2}{(1-k^2{s_1}^2{s_2}^2)^2}$$

elde edilir. Eğer $(1-k^2{s_1}^2{s_2}^2)^2$ ifadesi $({c_1}^2 + {s_1}^2{d_2}^2)({c_2}^2 + {s_2}^2{d_1}^2)$ biçiminde ifade edilirse

$$\mathrm{cn}^2(u_1 + u_2) = \frac{(c_1c_2 - s_1s_2d_1d_2)^2}{(1-k^2{s_1}^2{s_2}^2)^2}$$

olur. Bu son eşitliğin karekökü alınıp işaret belirsizliği bir kenara bırakıldığında her iki tarafın da ayrık kutup noktaları hariç u_1 in tek değerli fonksiyonları olduğu görülür. Dolayısıyla analitik devam teorisi gereği eşitliğin her iki tarafının aynı işaretli olması gerekir. Ancak $u_2 = 0$ alındığında mutlak pozitif işaret alınmalıdır. Benzer şekilde hareket edilerek, $\mathrm{dn}(u_1 + u_2)$ için de buna benzer bir formül elde edilebilir.

Şimdi Jacobi eliptik fonksiyonlarının periyotlarını, sıfır ve kutup yerlerini belirtirken kullanılacak olan K ve K' sabitlerinin tanımı verilecektir. K sabiti

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

integrali yardımıyla tanımlanır. Bu tanımdan

$$\mathrm{sn}\,K = 1, \qquad \mathrm{cn}\,K = 0, \qquad \mathrm{dn}\,K' = k'$$

olduğu görülür. Benzer şekilde K' sabiti de

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

integrali yardımıyla tanımlanır.

$$K + iK' = \int_0^{1/k} \frac{dt}{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$$

olduğundan

$$\mathrm{sn}\,(K + i\,K') = 1/k, \qquad \mathrm{cn}\,(K + i\,K') = -i\,k'/k, \qquad \mathrm{dn}\,(K + i\,K') = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

2.4 Jacobi Eliptik Fonksiyonlarının Periyodikliği

Eliptik fonksiyonların tanımı hatırlanacak olursa, Jacobi eliptik fonksiyonlarının da çifte periyodik fonksiyonlar olması gerektiği kolayca görülebilir. Bu periyotlar daha önce tanımı verilen K ve K' sabitleri cinsinden de ifade edilebilirler.

2.4.1 Teorem. sn u ve cn u fonksiyonlarının her ikisinin periyodu $4K$, dn u fonksiyonunun periyodu $2K$ dır (Whittaker ve Watson 1927).

İspat. Teorem 2.3.2 yardımıyla

$$\operatorname{sn}(u+K)=\frac{sn\,u\operatorname{cn}K\operatorname{dn}K+\operatorname{sn}u\operatorname{cn}K\operatorname{dn}K}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2K}=\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u}=\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{dn}^2u}=\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}=\operatorname{cn}u$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\operatorname{cn}(u+K)=\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{cn}K-\operatorname{sn}u\operatorname{sn}K\operatorname{dn}u\operatorname{dn}K}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2K}=-\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u\operatorname{dn}K}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2K}=-\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}K}{\operatorname{dn}u}=-k'\frac{sn\,u}{dn\,u}$$

$$=-k'\operatorname{sd}u$$

ve

$$\operatorname{dn}(u+K)=\frac{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}K-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}K\operatorname{cn}u\operatorname{cn}K}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2K}=\frac{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}K}{\operatorname{dn}^2u}=\frac{\operatorname{dn}K}{\operatorname{dn}u}=\frac{k'}{\operatorname{dn}u}=k'\operatorname{nd}u$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\operatorname{sn}(u+2K)=\frac{\operatorname{cn}(u+K)}{\operatorname{dn}(u+K)}=\frac{-k'\operatorname{sd}u}{k'\operatorname{nd}u}=-\operatorname{sn}u$$

ve

$$\operatorname{cn}(u+2K)=-\operatorname{cn}u,\qquad \operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn}u$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\operatorname{sn}(u+4K)=\operatorname{sn}u,\qquad \operatorname{cn}(u+4K)=\operatorname{cn}u$$

dır ve dolayısıyla ispat tamamlanır.

2.4.2 Teorem. sn u ve dn u fonksiyonlarının her biri $4K+iK'$ periyoduna sahip olduğu halde cn u fonksiyonu $2K+2iK'$ periyoduna sahiptir (Whittaker ve Watson 1927).

İspat. Daha önce verilen

$$\operatorname{sn}(K+iK')=1/k,\qquad \operatorname{cn}(K+iK')=-ik'/k,\qquad \operatorname{dn}(K+iK')=0$$

eşitlikleri ve Teorem 2.3.2 yardımıyla

$$\operatorname{sn}(K+iK')=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}(K+iK')\operatorname{dn}(K+iK')+\operatorname{sn}(K+iK')\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2(K+iK')}=(1/k)\operatorname{dc}u$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\mathrm{cn}\,(u + \mathrm{K} + iK') = -(ik'/k)\,\mathrm{nc}\,u, \qquad \mathrm{dn}\,(u + K + iK') = ik'\,\mathrm{sc}\,u$$

dir. Aynı formüller üzerinde birkaç işlem daha yapıldığında

$$\mathrm{sn}\,(u + 2\mathrm{K} + 2iK') = -\mathrm{sn}\,u,\ \mathrm{cn}\,(u + 2K + 2iK') = \mathrm{cn}\,u,\ \mathrm{dn}\,(u + 2K + 2iK') = -\mathrm{dn}\,u$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mathrm{sn}\,(u + 4K + 4iK') = \mathrm{sn}\,u, \qquad \mathrm{dn}\,(u + 4K + 4iK') = \mathrm{dn}\,u$$

elde edilir.

2.4.3 Teorem. cn u ve dn u fonksiyonları $4iK'$, sn u fonksiyonu $2iK'$ periyoduna sahiptir (Whittaker ve Watson 1927).

İspat. Teorem 2.3.2 ve

$$\mathrm{sn}(K + iK') = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}(K + iK')\mathrm{dn}(K + iK') + \mathrm{sn}(K + iK')\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(K + iK')} = (1/k)\mathrm{dc}\,u$$

yardımıyla

$$\mathrm{sn}\,(u + iK') = \mathrm{sn}\,(u - K + K + iK') = (1/k)\mathrm{dc}(u - K)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mathrm{sn}\,(u + iK') = (1/k)\mathrm{ns}\,u,$$

ve

$$\mathrm{cn}\,(u + iK') = -(i/k)\mathrm{ds}\,u, \qquad \mathrm{dn}\,(u + iK') = -i\mathrm{cs}\,u$$

elde edilir. Bu formüller üzerinde yapılan işlemlerle

$$\mathrm{sn}\,(u + 2iK') = \mathrm{sn}\,u,\ \mathrm{cn}\,(u + 2iK') = -\mathrm{cn}\,u,$$

$$\mathrm{dn}\,(u + 2iK') = -\mathrm{dn}\,u,\ \mathrm{cn}\,(u + 4iK') = \mathrm{cn}\,u$$

ve

$$\mathrm{dn}\,(u + 4iK') = \mathrm{dn}\,u$$

elde edilir.

$4K$ ve $4K'$ Jacobi eliptik fonksiyonlarının periyotları olduğundan K sabitine *çeyrek periyot*, K' sabitine ise *tamamlayıcı çeyrek periyot* olarak bakılabilir. sn u, cn u ve dn u fonksiyonlarının her birinin iki basit kutbu ve iki basit sıfırı vardır. sn u fonksiyonunun kutup noktaları, kalıntıları sırasıyla $1/k$ ve $-1/k$ olmak üzere iK' veya $2K + iK'$ sayılarına denktirler. sn u fonksiyonunun basit sıfırları ise 0 ve $2K$ sayılarına denktir. cn u fonksiyonunun kutup noktaları, kalıntıları sırasıyla $-i/k$ ve $-i/k$ olmak üzere iK' veya $2K + iK'$ sayılarına, sıfırları ise K veya $-K$ sabitlerine denktir. dn u fonksiyonunun kutupları, kalıntıları sırasıyla $-i$ ve i olmak üzere iK' veya $-iK$ sayılarına, sıfırları ise $K + iK'$ veya $K - iK'$ sayılarına denktir.

2.5 Teta Fonksiyonları

Jacobi eliptik fonksiyonlarını, eliptik olmayan fonksiyonların bölümleri ile elde edilen *teta fonksiyonları* cinsinden ifade etmek mümkündür. τ sanal kısmı pozitif olan bir karmaşık sayı ve $|q| < 1$ için $q = e^{\pi i \tau}$ olmak üzere $\vartheta_4(z, q)$ teta fonksiyonu

$$\vartheta_4(z, q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} \cos 2nz$$

biçiminde tanımlanır.

Tanıma dikkat edilecek olursa

$$\vartheta_4(z + \pi, q) = \vartheta_4(z, q)$$

ve dolayısıyla $\vartheta_4(z, q)$ teta fonksiyonunun periyodunun π olduğu görülür. Üstelik

$$\vartheta_4(z + \pi\tau, q) = -q^{-1} e^{-2iz}\, \vartheta_4(z, q)$$

dir. Dolayısıyla $\vartheta_4(z, q)$ fonksiyonuna z nin *hemen hemen çifte periyodik fonksiyon*u adı verilir. z yi π veya $\pi\tau$ kadar artırmak demek $\vartheta_4(z, q)$ fonksiyonunu aynı katlılıkta 1 veya $-q^{-1} e^{-2iz}$ kadar artırmak demektir. Dolayısıyla 1 ve $-q^{-1} e^{-2iz}$ sayılarına sırasıyla π ve $\pi\tau$ periyotlarıyla ilgili *çarpanlar* adı verilir.

Aşağıda tanımları verilen, üç tane daha özel teta fonksiyonu vardır; bunlar

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_4(z + \tfrac{1}{2}\pi, q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz$$

$$\vartheta_1(z, q) = ie^{iz + \frac{1}{4}\pi i\tau}\, \vartheta_4(z + \tfrac{1}{2}\pi, q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)z$$

$$\vartheta_2(z, q) = \vartheta_1(z + \tfrac{1}{2}\pi, q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos(2n+1)z$$

fonksiyonlarıdır. Verilen tanımlarla birlikte $\vartheta_4(z, q)$ fonksiyonunun tek, $\vartheta_1(z, q)$, $\vartheta_2(z, q)$ ve $\vartheta_3(z, q)$ fonksiyonlarının çift fonksiyon oldukları görülür. Eğer q parametresi vurgulanmak istenmiyorsa $\vartheta(z, q)$ yerine kısaca $\vartheta(z)$ yazılır. Eğer teta fonksiyonunun, özellikle τ karmaşık sayısına bağlı olduğu belirtilmek istenirse, $\vartheta(z|\tau)$ gösterimi kullanılır. Ayrıca $\vartheta(0)$ yerine ϑ ve $\vartheta'(0)$ yerine de ϑ' kısaltmalarını yapmak işlemleri kolaylaştırır.

2.5.1 Teorem. $\vartheta(z)$ teta fonksiyonunun bir temel paralel kenar içinde tam olarak bir tane sıfırı vardır (Whittaker ve Watson 1927).

İspat. $\vartheta(z)$ fonksiyonu karmaşık düzlemin sonlu bir kısmında analitiktir, dolayısıyla kalıntı teoremi gereği eğer C köşeleri t, $t + \pi$, $t + \pi + \pi\tau$, $t + \pi\tau$ olan bir temel paralel kenar ise $\vartheta(z)$ fonksiyonunun bu C temel paralel kenarındaki sıfırlarının sayısı

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}dz$$

integral değerine eşittir. Diğer yandan bu integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} 2i\,dz$$

integraline indirgenebilir ve dolayısıyla

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}dz = 1$$

dir. Sonuç olarak $\vartheta(z)$ fonksiyonunun C temel paralel kenarında tam olarak bir tane sıfır vardır.

$\vartheta_1(z)$ fonksiyonunun bu sıfırı $z = 0$ noktası olduğundan $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$ ve $\vartheta_4(z)$ fonksiyonlarının sıfırları sırasıyla $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau$ ve $\frac{1}{2}\pi\tau$ noktalarına denk olan noktalardır.

Verilen bu bilgiler altında artık Jacobi eliptik fonksiyonlarını teta fonksiyonları cinsinden yazmak mümkündür. $u = z\vartheta_3^2$ ve $k = \vartheta_2^2 / \vartheta_3^2$ olmak üzere

$$\mathrm{sn}(u,k) = \frac{\vartheta_3\vartheta_1(u/\vartheta_3^2)}{\vartheta_2\vartheta_4(u/\vartheta_3^2)},$$

$$\mathrm{cn}(u,k) = \frac{\vartheta_4\vartheta_2(u/\vartheta_3^2)}{\vartheta_2\vartheta_4(u/\vartheta_3^2)},$$

$$\mathrm{dn}(u,k) = \frac{\vartheta_4\vartheta_3(u/\vartheta_3^2)}{\vartheta_3\vartheta_4(u/\vartheta_3^2)}$$

dir. Yukarıdaki eşitlikler $1/\vartheta_3^2$ çarpanını bulundurduğundan

$$\Theta(u) = \vartheta_4(u/\vartheta_3^2|\tau)$$

fonksiyonu ele alınabilir. $\Theta(u)$ fonksiyonunun periyotları $2K$ ve $2iK'$ dür. Dolayısıyla $\Theta(u + K)$ fonksiyonu $\vartheta_3(z)$ ile yer değiştirir ve $\vartheta_1(z)$ fonksiyonu yerine

$$H(u) = -i\,q^{-\frac{1}{4}}\,e^{i\pi u/2K}\,\Theta(u + i\,K') = \vartheta_1(u/\,\vartheta_3^{\,2}|\tau)$$

ile tanımlı *eta fonksiyonu* kullanılabilir. Böylece $\vartheta_2(z)$ fonksiyonu yerine de $H(u + K)$ fonksiyonu elde alınabilir.

2.6 Weierstrass Fonksiyonları

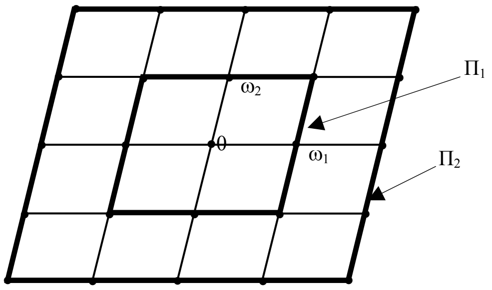
$\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$, $\{\omega_1, \omega_2\}$ tabanlı bir kafes ve P ise, P nin sınırı olan ∂P üzerinde Ω nın elemanlarını bulundurmayan bir temel bölge olsun. Bu kısımda Ω kafesine göre eliptik fakat sabit olmayan fonksiyonlar oluşturulacaktır. Teorem 2.1.2 ye dayanarak böyle bir f fonksiyonunun analitik olamayacağı ve dolayısıyla da bu fonksiyonun P temel bölgesinde mutlaka kutuplarının olması gerektiği bilinmektedir, bundan başka f fonksiyonunun P temel bölgesinde basit kutbu olamayacağı da belirtilmiştir. Dolayısıyla, en basit sabit olmayan bir eliptik fonksiyonun derecesi 2 olmalıdır. O halde bu f fonksiyonunun P temel bölgesinde ya iki tane basit kutbu ya da ikinci dereceden tek kutbunun olması gerekir. Bu bölümde Ω kafesine göre eliptik olan ve P temel bölgesinde ikinci dereceden tek kutbu olan 2 dereceli $\wp(z)$ Weierstrass fonksiyonu ele alınacak ve Ω kafesine göre eliptik olan her bir fonksiyonunun $\wp$ ve bunun türevi olan $\wp'$ fonksiyonlarının rasyonel bir fonksiyonu şeklinde olduğu sonucu elde edilecektir. $N \geq 3$ mertebeli eliptik fonksiyonların oluşturulması, Teorem 2.6.2 de de görüleceği gibi zor değildir, fakat bu teoremde verilecek olan metot, $N = 2$ olması durumunda uygulanamaz. $\sigma(z)$ fonksiyonunun $\wp(z)$ fonksiyonu ile olan ilişkisi, $S(z) = \pi \sin \pi z$ fonksiyonunun $P(z) = \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi z$ fonksiyonuyla olan ilişkisine benzer olduğundan $\wp(z)$ fonksiyonu farklı bir yöntem kullanılarak, $\sigma(z)$ Weierstrass sigma fonksiyonundan elde edilecektir.

Tıpkı $P(z)$, $Z(z)$ ve $S(z)$ fonksiyonlarını tanımlayan serilerin ve çarpımların yakınsaklıklarının $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ serisinin yakınsaklığına dayandığı gibi, Weierstrass fonksiyonları ile tanımlı çarpımlar ve serilerin yakınsaklığı da Ω kafesi ile indekslenmiş benzer toplamların yakınsaklığına bağlıdır. Ω kafesi tam sıralı bir küme olmadığından, Ω kafesi üzerinden toplamayı netleştirmek için öncelikle Ω kafesinin özel bir sıralanışının tanımlanması gerekir.

$r \geq 1$ tamsayıları için

$$\Pi_r = \{a\omega_1 + b\omega_2 : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve maks}\{|a|, |b|\} = r\}$$

kümeleri, aşağıda şekil 2.2 de 2 tanesi görülen, 0 merkezli benzer paralel kenarlardır.



Şekil 2.2 Π_1 ve Π_2 kümeleri

Eğer

$$\Omega_r = \Omega \cap \Pi_r$$

olarak tanımlanırsa

$$\Omega_\mathrm{r} = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z} \text{ ve maks}\{|a|, |b|\} = r\}$$

olduğu görülür. Dikkat edilirse Ω kafesi $\{0\}$, Ω_1, Ω_2 , … kümelerinin

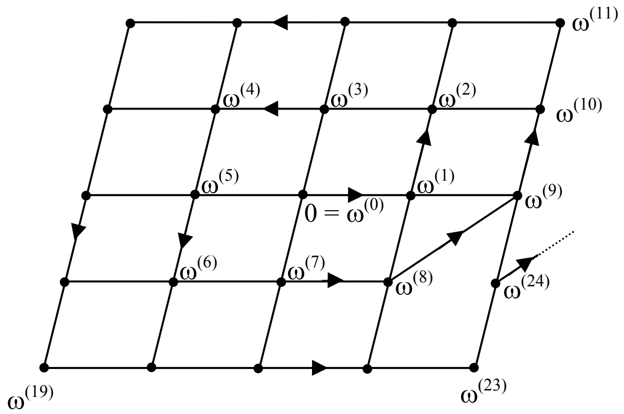
$$\Omega = \{0\} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots$$

ayrık birleşimi olarak ifade edilebilir. Üstelik her bir $r \geq 1$ için $|\Omega_r| = 8r$ dir.

Ω kafesinin elemanları, sıfırdan başlayıp sırasıyla Ω_1, Ω_2, …kümelerinin elemanları gelecek şekilde ve her bir Ω_r nin etrafında

$$r\omega_1,\ r\omega_1 + \omega_2,\ \ldots,\ r\omega_1 - \omega_2$$

sırasıyla dönerek sıralandığında, aşağıdaki şekilde de görülen, 0 sayısından dışa doğru bir spiral oluşturan bir dizi elde edilir.



Şekil 2.3 Ω kafesinin elemanlarının sıralanması

Eğer bu sıralama $\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots$ ile gösterilecek olursa

$$\omega^{(0)} = 0,\ \omega^{(1)} = \omega_1,\ \omega^{(2)} = \omega_1 + \omega_2,\ \omega^{(3)} = \omega_2,\ \ldots,\ \omega^{(8)} = \omega_1 - \omega_2,\ \omega^{(9)} = 2\omega_1,$$

$$\omega^{(10)} = 2\omega_1 + \omega_2,\ \ldots$$

olur ve üstelik $k \to \infty$ için $\left|\omega^{(k)}\right| \to \infty$ olacağı da açıktır. Bundan sonra $\sum\limits_{\omega\in\Omega}$ ve $\sum\limits_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}{}'$ gösterimleri ile yukarıdaki sıralamaya göre tüm kafes noktaları üzerinden alınacak olan toplamlar anlaşılacaktır. Böylece her h fonksiyonu için

$$\sum_{\omega\in\Omega} h(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h(\omega^{(k)}) \text{ ve } \sum_{\omega\in\Omega}{}' h(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} h(\omega^{(k)})$$

olur. Benzer şekilde

$$\prod_{\omega\in\Omega} h(\omega) = \prod_{k=0}^{\infty} h(\omega) \text{ ve } \prod_{\omega\in\Omega}{}' h(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} h(\omega)$$

olur. Genellikle $\sum\limits_{\omega\in\Omega}$ ve $\sum\limits_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}{}'$ yerine Σ ve Σ' gösterimleri kullanılır ve bu gösterimler ile bilinen özel kafesler üzerinden toplam anlatılmak istenir. Ele alınan toplam ve çarpımlar genellikle mutlak yakınsak olduğundan Ω kafesinin yukarıdaki şekildeki özel sıralanışının bir öneminin olmadığı açıktır.

Weierstrass fonksiyonlarının yakınsaklığı gerçekte özel bir serinin yakınsaklığına bağlıdır. Eğer

$$"\sum_{r=1}^{\infty} r^{-s} \text{ Rieman zeta fonksiyonu yakınsaktır} \Leftrightarrow s > 1"$$

olduğu dikkate alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

2.6.1 Teorem. $s \in \mathbb{R}$ olmak üzere $"\sum\limits_{\omega\in\Omega}{}' |\omega|^{-s}$ yakınsak $\Leftrightarrow s > 2"$ dir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. D ve d, sırasıyla, Π_1 temel paralel kenarının elemanlarının modüllerinin en büyük ve en küçük değerleri olmak üzere

$$\Omega_r \subseteq \Pi_r = \{rz : z \in \Pi_1\}$$

olduğundan her $\omega \in \Omega_r$ için

$$rD \geq |\omega| \geq rd$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\sigma_{r,s} = \sum_{\omega\in\Omega} |\omega|^{-2}$$

olarak tanımlı $\sigma_{r,s}$ fonksiyonu $8r(rD)^{-s} = 8r^{1-s} D^{-s}$ ile $8r(rd)^{-s} = 8r^{1-s} d^{-s}$ değerleri arasında değerler alır. Böylece

$$\text{“}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{r,s} \text{ serisi yakınsak} \Leftrightarrow \sum_{r=1}^{\infty} r^{1-s} \text{ yakınsak”}$$

ve dolayısıyla

$$\text{“}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{r,s} \text{ serisi yakınsak} \Leftrightarrow s > 2\text{”}$$

olduğu görülür. $\sum{}' |\omega|^{-s}$ serisinin terimleri $\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{r,s}$ serisini verecek şekilde yeniden gruplandırılabilir ve üstelik bu serinin terimleri pozitif olduğundan

$$\text{“}\sum{}' |\omega|^{-s} \text{ serisi yakınsak} \Leftrightarrow s > 2\text{”}$$

sonucu elde edilir. Bu hazırlıklardan sonra mertebesi $N \geq 3$ olan eliptik fonksiyonların oluşturulması biraz daha kolaylaşmış olur.

2.6.2 Teorem. Her $N \geq 3$ tamsayısı için $F_N(z) = \sum_{\omega\in\Omega} (z-\omega)^{-N}$ fonksiyonu Ω kafesine göre N. mertebeden bir eliptik fonksiyondur (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Eğer K, $\mathbb{C}\backslash\Omega$ nın herhangi bir kompakt alt kümesi ise $(z - \omega)^{-N}$ terimleri K üzerinde analitik ve dolayısıyla sınırlıdırlar. K sınırlı bir kümesi olduğundan sonlu tanesi hariç her bir $\omega \in \Omega$ (örneğin her $\omega \in \Phi \subseteq \Omega$) ve her $z \in K$ için $|\omega| \geq 2|z|$ dir. Her $\omega \in \Phi$ ve her $z \in K$ için $|z - \omega| \geq |\omega| - |z| \geq \frac{1}{2} |\omega|$ eşitsizliği yardımıyla her $\omega \in \Phi$ için

$$\left\| (z-\omega)^{-N} \right\|_K \leq 2^N |\omega|^{-N}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $N \geq 3$ ise Teorem 2.6.1 ve karşılaştırma testi yardımıyla $\sum_{\omega\in\Omega} \left\| (z-\omega)^{-N} \right\|_K$ serisinin yakınsak olduğu görülür. Dolayısıyla $\sum_{\omega\in\Omega} (z-\omega)^{-N}$ serisi K üzerinde normsal yakınsaktır. Her bir $(z - \omega)^{-N}$ terimi K üzerinde analitik olduğundan Sonuç 1.3.4 yardımıyla $F_N(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}\backslash\Omega$ üzerinde analitik olduğu sonucu elde edilir. Teorem 1.3.8 yardımıyla da $F_N(z)$ fonksiyonunun her bir $\omega \in \Omega$ noktasında meromorf olduğu görülür. $F_N(z)$ fonksiyonunun $(z - \omega)^{-N}$ terimlerinin her birinin N.

mertebeden kutbu olduğu da açıktır. Dolayısıyla $F_N(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde meromorf bir fonksiyondur.

Normsal yakınsaklık mutlak yakınsaklığı gerektirdiğinden $F_N(z)$ fonksiyonunu veren seri yeniden düzenlenebilir. Eğer $\omega_0 \in \Omega$ ise $\omega \in \Omega$ olmak üzere $\omega' = \omega - \omega_0$ olarak alınırsa, Ω üzerinden ω indisli toplam yerine Ω üzerinden ω' indisli toplam alınabileceğinden

$$F_N(z + \omega_0) = \sum_{\omega\in\Omega}(z+\omega_0-\omega)^{-N} = \sum_{\omega'\in\Omega}(z-\omega')^{-N} = F_N(z)$$

elde edilir. O halde $F_N(z)$ fonksiyonunun Ω kafesine göre periyodik, dolayısıyla da eliptik bir fonksiyon olduğu sonucu elde edilir. $F_N(z)$ fonksiyonunun N mertebeli kutup noktalarının bir tek sınıfı olduğundan $F_N(z)$ fonksiyonu N mertebeli eliptik fonksiyondur.

Bu metodun, Teorem 2.6.1, $\sum(z-\omega)^{-2}$ serinin yakınsaklığının ispat edilmesinde kullanılamayacağından 2. mertebeden $F_2(z)$ eliptik fonksiyonunu oluşturmak için yetersiz olduğu açıktır. Bu serinin yakınsaklığını garanti etmek için her bir $\omega \neq 0$ için $(z-\omega)^{-2}$ terimini $(z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}$ terimi ile yer değiştirerek bu serilerin terimlerinin küçültülmesi gerekir. Böylece elde edilen

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

fonksiyonu ikinci mertebeden eliptik *Weierstrass pe fonksiyonu* olarak isimlendirilir. $\wp(z)$ fonksiyonu $\sum_{\omega\in\Omega} f(z-\omega)$ biçiminde olmadığından $\wp(z)$ fonksiyonunun periyodik olduğu açık bir şekilde görülmemektedir. Bununla birlikte $\wp(z)$ fonksiyonunun periyodik olduğu, eliptik bir fonksiyon olan $-2F_3(z)$ fonksiyonuna eşit olan $\wp'(z)$ türevinin integrali alınarak dolaylı yoldan görülebilir. Teorem 2.6.2' nin ispatına benzer şekilde, $\wp(z)$ fonksiyonunun meromorf olduğunu göstermek için $\sum{}' |\omega|^{-3}$ serisi ile karşılaştırma yapmak geleneksel bir yoldur. Ancak bunun yerine biraz farklı bir yaklaşım izleyerek $\wp(z)$ fonksiyonu, Weierstrass sigma fonksiyonu yardımıyla da elde edilebilir.

$$g(z,\omega) = \left(1 - \frac{z}{\omega}\right)\exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)$$

olmak üzere

$$\sigma(z) = z \cdot \prod\nolimits'_{\omega\in\Omega} g(z,\omega)$$

olarak tanımlanan σ fonksiyonuna *Weierstrass sigma fonksiyonu* denir. Bu fonksiyonun tanımına dikkat edilirse $g(z, \omega)$ fonksiyonunun $1 - (z/\omega)$ çarpanı, kafesin her bir noktasında $\sigma(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının olduğunu, çarpımın üstel çarpanlı kısmı ise bu sonsuz çarpımın yakınsak olduğunu garanti eder.

Eğer K, $\mathbb{C}$ nin herhangi kompakt alt kümesi ise K sınırlı ve üstelik $k \to \infty$ için $\left|\omega^{(k)}\right| \to \infty$ olduğundan $k \to \infty$ için $g(\omega^k, z) \to 1$ yakınsaması K üzerinde düzgündür. Tüm $k > N_1$ ler için böyle bir N_1 tamsayısı olduğundan $z \in K$ için Log $g(\omega^k, z)$ iyi tanımlıdır ve üstelik

$$\begin{aligned} Log(g(\omega^{(k)}, z)) &= Log\left(1-\frac{z}{\omega^{(k)}}\right) + Log\left(\exp\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= Log\left(1-\frac{z}{\omega^{(k)}}\right) + \frac{z}{\omega^{(k)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^2 \end{aligned}$$

dir. K sınırlı olduğundan her $z \in K$ ve $k > N_2$ için $\left|\omega^{(k)}\right| = 2|z|$ olacak şekilde bir N_2 tamsayısı vardır. Dolayısıyla her $z \in K$ ve $k > \text{maks}\{N_1, N_2\}$ için

$$\begin{aligned} \left|Log(g(\omega^k, z)\right| &= \left|Log\left(1-\frac{z}{\omega^k}\right) + \frac{z}{\omega^{(k)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^2\right| = \left|\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^4 + \ldots\right| \\ &\le \frac{1}{3}\left|\frac{z}{\omega^{(k)}}\right|^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right) \le \left|\frac{z}{\omega^{(k)}}\right|^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.6.1 gereği $\sum_k Log(g(\omega^{(k)}, z))$ serisi K üzerinde normsal yakınsaktır ve böylece $z\prod'_{\omega\in\Omega} g(\omega, z)$ serisi de K üzerinde normsal yakınsaktır. Teorem 1.4.7 gereği bu çarpım $\mathbb{C}$ de analitik olan $\sigma(z)$ fonksiyonuna yakınsar. Üstelik

$$g(\omega, -z) = g(-\omega, z) \text{ ve } \sigma(-z) = -\sigma(z)$$

olduğundan $\sigma(z)$ tek fonksiyondur.

$$S(z) = z\prod^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\exp\left(\frac{z}{n}\right)$$

olarak yazıldığında $\sigma(z)$ fonksiyonu ile $S(z)$ fonksiyonu arasındaki ilişki daha da açık bir hale gelir. Dolayısıyla $\sigma(z)$ fonksiyonunun logaritmik türevi, $\mathbb{C}$ nin kompakt alt kümelerinde meromorf bir fonksiyona düzgün yakınsayan bir sonsuz seri verir. Bu fonksiyon $\zeta(z)$ ile gösterilen *Weierstrass zeta fonksiyonu*dur ve

$$\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z) = \frac{d}{dz}\left(Log\sigma(z)\right)$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$$

dir. $\sigma(z)$ fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan $\zeta(z)$ fonksiyonu da tek fonksiyondur. $\zeta(z)$ fonksiyonunun kafes noktalarında basit kutupları vardır, dolayısıyla $\zeta(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\Omega$ da analitik bir fonksiyondur. $\zeta(z)$, meromorf fonksiyonların bir serisi yardımıyla tanımlandığından bu seri $\mathbb{C}$ nin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsar. Böylece $\zeta(z)$ fonksiyonunu belirten serinin terim terime türevi alınarak $\zeta'(z)$ meromorf fonksiyonunu elde etmek mümkündür. $\wp(z) = -\zeta'(z)$ yazıldığında, $\mathbb{C}\backslash\Omega$ da analitik olan ve her bir $\omega \in \Omega$ noktasında 2. dereceden kutupları olan

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

çift fonksiyonu elde edilir.

2.6.3 Teorem. $\wp(z)$ fonksiyonu, periyotlarının kümesi $\Omega_\wp$ olan, $\Omega_\wp$ kafesine göre bir eliptik fonksiyondur (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $\wp(z)$ fonksiyonunun meromorf bir fonksiyon olduğu yukarıda belirtildiğinden sadece $\Omega_\wp = \Omega$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\wp(z)$ fonksiyonunu belirten

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

serisi $\mathbb{C}$ nin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak olduğundan terim terime türev alındığında, $F_3(z)$ fonksiyonu daha önce elde edilmiş olan, 3. mertebeli eliptik fonksiyon olmak üzere

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{2}{(z-\omega)^3} = -2\sum_{\omega\in\Omega}(z-\omega)^{-3} = -2F_3(z)$$

elde edilir. Dolayısıyla her bir $\omega \in \Omega$ için $\wp'(z+\omega) - \wp'(z)$ özdeşliğin sıfır olur ve böylece $\wp(z+\omega) - \wp(z)$ farkı bir sabite eşittir. Her $z \in \mathbb{C}$ için $\wp(z+\omega) - \wp(z) = c_\omega$ olarak alınırsa, $\wp(z)$ çift fonksiyon olduğundan $z = -\omega/2$ için $c_\omega = \wp(\omega/2) - \wp(-\omega/2) = 0$ olur. Böylece her $z \in \mathbb{C}$ ve $\omega \in \Omega$ için $\wp(z+\omega) = \wp(z)$, yani $\Omega \subseteq \Omega_\wp$ dir. Diğer yandan 0, $\wp(z)$ fonksiyonunun bir kutup noktası olduğundan $\Omega_\wp$ deki her noktada $\wp(z)$ fonksiyonunun bir kutbu vardır. $\wp(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}\backslash\Omega$ da kutbu olmadığından $\Omega_\wp \subseteq \Omega$ dir. Yani $\Omega_\wp = \Omega$ dir.

2.6.4 Teorem. $\wp(z)$ fonksiyonu 2. mertebeden, $\wp'(z)$ fonksiyonu ise 3. mertebeden birer eliptik fonksiyondur (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $\wp(z)$ fonksiyonunun $\omega \in \Omega$ kafes noktalarındaki kutuplarının mertebesi 2 olan tek bir denklik sınıfı var olduğundan $\wp(z)$ fonksiyonu 2. mertebeden bir eliptik fonksiyondur. Benzer şekilde

$$\wp'(z) = -2F_3(z)$$

fonksiyonunun kutuplarının da 3. mertebeden bir tek denklik sınıfı olduğundan $\wp'(z)$ fonksiyonu da 3. mertebeden bir eliptik fonksiyondur.

$\wp(z)$, $\zeta(z)$ ve $\sigma(z)$ Weierstrass fonksiyonlarının her birisi özel bir Ω kafesine bağlı olduklarından $\wp(z, \Omega)$, … vb. şeklinde yazılmalıdırlar. Ancak, çoğu durumda Ω kafesi bilindiğinden kısa gösterimleri tercih edilir.

2.7 $\wp$(z) Fonksiyonu İçin Diferensiyel Denklemler

Bu bölümde $\wp(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasının komşuluğundaki Laurent serisinden faydalanarak $\wp(z)$ ve $\wp'(z)$ fonksiyonlarını bir araya getiren önemli bir eşitlik elde edilecektir. Bunun için öncelikle

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

fonksiyonunun Laurent serisi bulunacaktır. Eğer $m = \min\{|\omega| : \omega \in \Omega\backslash\{0\}\}$ olarak alınırsa $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < m\}$ diski içinde Ω kafesinin 0 noktasından başka hiçbir elemanı olmadığı açıktır.

$$\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}=\frac{z^2}{\omega^2(z-\omega)}$$

olduğundan $\sum{}' |\omega|^{-3}$ ile karşılaştırıldığında $\sum{}' (z-\omega)^{-1}+(1/\omega)+(z/\omega^2)$ serisinin her bir $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ için mutlak yakınsak olduğu görülür. Üstelik her bir $\omega \in \Omega\backslash\{0\}$ için

$$\frac{1}{z-\omega}=-\frac{1}{\omega}-\frac{z}{\omega^2}-\frac{z^3}{\omega^3}-\ldots$$

binom serisi de her $z \in D$ için mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla bu eşitliği $\zeta(z)$ fonksiyonunda yerine koyup ve toplamanın sırasını tersine çevirirsek

$$G_k = G_k(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}{}' \omega^{-k}$$

olmak üzere her $z \in D$ için

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum{}'\left(-\frac{z^2}{\omega^3}-\frac{z^3}{\omega^4}-\ldots\right)=\frac{1}{z}-G_3z^2-G_4z^3-\ldots$$

elde edilir. G_k serilerine Ω için *Eisenstein serileri* denir ve $k \geq 3$ için bu seriler mutlak yakınsaktırlar. k tek sayısı için ω^{-k} ve $(-\omega)^{-k}$ yok edildiğinde $G_k = 0$ olduğu görülür. Böylece $\zeta(z)$ fonksiyonu için Laurent serisi

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\sum_{n=2}^{\infty}G_{2n}z^{2n-1}$$

halini alır, dolayısıyla $z \in D$ için $\wp(z)$ fonksiyonunun Laurent serisi

$$\wp(z)=-\zeta'(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)G_{2n}z^{2n-2}$$

olur. Basit bir hesaplama ile $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ ve $\phi_3(z)$, D de yakınsak kuvvet serileri olmak üzere

$$\wp'(z)=\frac{-2}{z^3}+6G_4z+20G_6z^3+\ldots$$

ve böylece

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6}-\frac{24G_4}{z^2}-80G_6+z^2\phi_1(z)$$

$$4\wp'(z)^3 = \frac{4}{z^6}+\frac{36G_4}{z^2}+60G_6+z^2\phi_2(z)$$

$$60G_4\wp(z) = \frac{60G_4}{z^2}+z^2\phi_3(z)$$

eşitlikleri bulunur. Son üç denklem dikkate alındığında, $\phi(z) = \phi_1(z) - \phi_2(z) + \phi_3(z)$, D de yakınsak bir kuvvet serisi olmak üzere,

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6 = z^2\phi(z)$$

sonucu elde edilir. $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonları Ω kafesine göre eliptik fonksiyonlar olduklarından

$$f(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6$$

fonksiyonu da bir eliptik fonksiyondur. $\phi(z)$, D de analitik ve $f(z) = z^2\phi(z)$ olduğundan f fonksiyonu 0 noktasında sıfır olur ve böylece tüm $\omega \in \Omega$ noktalarında da sıfır olur. Bununla birlikte f fonksiyonunun oluşturuluşu gereği, f sadece $\wp$ veya $\wp'$ fonksiyonunun kutup noktalarında kutuplara sahiptir, yani f fonksiyonunun kafes noktalarında kutupları vardır. Dolayısıyla f nin kutupları yoktur ve ″ f fonksiyonu sabit $\Leftrightarrow N = 0$″ teoremi gereği f fonksiyonu sabittir. Eğer $f(0) = 0$ olduğu da dikkate alınırsa f fonksiyonun 0 sabit fonksiyonuna eşit olduğu görülür. Böylelikle aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmış olur.

2.7.1 Teorem. $\wp(z)$ ve $\wp'(z)$ fonksiyonları için

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$$

dir (Jones ve Singerman 1987).

Dikkat edilirse bu teorem ile $\wp(z)$ ve $\wp'(z)$ fonksiyonlarını bulunduran bir diferensiyel eşitlik verilmektedir, dolayısıyla bu denklem bu iki fonksiyonu bir birine ilişkilendiren bir eşitliktir. Bu eşitliği

$$g_2 = 60G_4 = 60\sum{}' \omega^{-4}$$

$$g_3 = 140G_6 = 140\sum{}' \omega^{-6}$$

olmak üzere

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

şeklinde ifade etmek daha yaygındır. $z = \wp(t)$ değeri yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında $p(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3$ kübik polinom olmak üzere

$$\wp^{-1}(z) = t = \int \frac{dz}{\sqrt{(p(z)}}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik, daha önce belirtildiği gibi, eliptik fonksiyonların terslerinin de trigonometrik fonksiyonların tersleri gibi belirsiz integraller yardımıyla tanımlanabileceğini göstermektedir.

Verilen farklı köklere sahip herhangi bir

$$p(z) = 4z^3 - c_2 z - c_3$$

kübik poninomuna karşılık $c_2 = g_2(\Omega)$ ve $c_3 = g_3(\Omega)$ olacak biçimde bir Ω kafesi vardır. Aşağıda bu durumun tersinin, yani $\wp'(z)$ fonksiyonunun sıfırları dikkate alınarak $4z^3 - g_2 z - g_3$ polinomunun farklı köklere sahip olduğu gösterilecektir.

2.7.2 Teorem. Ω, $\{\omega_1, \omega_2\}$ tabanlı bir kafes ve $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ olsun. Eğer 0, $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ ve $\omega_3/2$ noktaları P temel paralel kenarının içinde ise $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ ve $\omega_3/2$ noktaları $\wp'$ fonksiyonunun P temel bölgesindeki sıfırlarıdır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $\wp'$ fonksiyonunun 3. mertebeden eliptik bir fonksiyon olduğu yukarıda belirtilmişti. Dolayısıyla $\wp'$ fonksiyonunun P temel paralel kenarında 3 tane sıfırı vardır. Eğer $\omega \in \Omega$ ise $\frac{1}{2}\omega \sim -\frac{1}{2}\omega \bmod \Omega$ olduğundan

$$\wp'(\tfrac{1}{2}\omega) = \wp'(-\tfrac{1}{2}\omega)$$

olur. $\wp'$ fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan

$$\wp'(-\tfrac{1}{2}\omega) = -\wp'(\tfrac{1}{2}\omega)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\wp'(\frac{1}{2}\omega) = 0$ veya $\wp'(\frac{1}{2}\omega) = \infty$ dur. $\wp'$ fonksiyonu P temel paralel kenarında sadece 0 noktasında üç katlı kutba sahip olduğundan $j = 1, 2, 3$ olmak üzere

$$\wp'(\tfrac{1}{2}\omega_j) = 0$$

olduğu elde edilir. $j = 1, 2, 3$ olmak üzere $e_j = \wp(\frac{1}{2}\omega_j)$ olarak alınırsa

$$S = [\tfrac{1}{2}\omega_1] \cup [\tfrac{1}{2}\omega_2] \cup [\tfrac{1}{2}\omega_3]$$

kümesi $\wp'$ fonksiyonunun $\mathbb{C}$ deki tüm sıfır yerlerinin kümesi olduğundan $\{e_1, e_2, e_3\}$ = $\wp(S)$ kümesi Ω kafesinin özel olarak seçilmiş olan $\{\omega_1, \omega_2\}$ tabanından bağımsızdır.

2.7.3 Sonuç. Her bir $c \in \Sigma \backslash \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$ için $\wp(z) = c$ denkleminin iki basit çözümü vardır, $c = e_1, e_2, e_3$ veya ∞ için bu eşitliğin bir tane iki katlı çözümü vardır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $\wp(z)$ fonksiyonu 2. mertebeden bir eliptik fonksiyon olduğundan her bir $c \in \Sigma$ değerini tam iki defa alır. $\wp(z)$ çift fonksiyon olduğundan $\wp(z) = c$ denkleminin z ve $-z$ noktalarında iki basit çözümü vardır veya bu eşitliğin bir tane iki katlı çözümü vardır. Eğer $c \in \mathbb{C}$ ise

“ $\wp(z) = c$ denkleminin iki katlı çözümü var $\Leftrightarrow \wp'(z) = 0$”

dır. $j = 1, 2, 3$ olmak üzere, bu çift gerektirme $z \sim \frac{1}{2}\omega_j$ olduğunu ve dolayısıyla $c = e_j$ olduğunu gösterir. $z = 0$ noktası 2 mertebeli kutup ise $\wp(z) = \infty$ denkleminin iki katlı çözümünün olduğunu gösterir.

2.7.4 Teorem. e_1, e_2 ve e_3 değerleri ikişer ikişer farklıdırlar (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $j = 1, 2, 3$ için $f_j(z) = \wp(z) - e_j$ olsun. $f_j(z)$ fonksiyonunun kutupları $\wp(z)$ fonksiyonunun kutuplarıyla aynı olduğundan $f_j(z)$ fonksiyonu 2. mertebeden eliptik bir fonksiyondur ve dolayısıyla sıfırlarının katlılıkları sayılmak şartıyla iki sınıfı vardır.

$$f_j(\tfrac{1}{2}\omega_j) = f_j'(\tfrac{1}{2}\omega_j) = 0$$

olduğundan $f_j(z)$ fonksiyonunun $[\frac{1}{2}\omega_j]$ de çift katlı sıfırı vardır ve bundan başka sıfırı da yoktur. Özel olarak $j \neq k$ için $f_j(\frac{1}{2}\omega_k) \neq 0$ dır.

$$f_j(\tfrac{1}{2}\omega_k) = \wp(\tfrac{1}{2}\omega_k) - e_j = e_k - e_j$$

olduğundan $j \neq k$ için $e_j \neq e_k$ olur.

Yukarıda elde edilmiş olan $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ eşitliği

$$p(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

biçiminde yeniden düzenlenirse $p(z)$ polinomunun, $\wp'(t) = 0$ olmak üzere $z = \wp(t)$ noktalarında sıfırlarının olduğu görülür. Dolayısıyla $p(z)$ polinomunun $z = e_1$, e_2 ve e_3 noktalarında farklı üç tane sıfırı vardır.

2.8 Eliptik Fonksiyonlar Cismi

Bu bölümde belli bir Ω kafesi dikkate alınacak ve eliptik fonksiyon denildiğinde bu Ω kafesine göre eliptik olan fonksiyon anlaşılacaktır. Eğer f ve g fonksiyonları eliptik ise $f + g$, $f - g$ ve fg fonksiyonları da birer eliptik fonksiyonlardır ve eğer g özdeşliğin sıfır değil ise $1/g$ fonksiyonu da bir eliptik fonksiyondur. Böylece tüm eliptik fonksiyonların kümesi bir cisimdir ve bu cisim genellikle $E(\Omega)$ ile gösterilir. $E_1(\Omega)$ çift eliptik fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda $E_1(\Omega)$ kümesi de bir cisimdir ve aynı zamanda $E_1(\Omega)$, $E(\Omega)$ cisminin bir alt cismi olur. Sabit fonksiyonlar da bir cisim oluştururlar. Bu cisim de $E_1(\Omega)$ cisminin bir alt cismidir. Üstelik bu cisim $\mathbb{C}$ cismine izomorftur. Böylece $E(\Omega)$ ve $E_1(\Omega)$ cisimleri $\mathbb{C}$ nin birer cisim genişlemeleri olarak düşünülebilirler. $E_1(\Omega)$ kümesi $\wp(z) = \wp(z,\omega)$ fonksiyonunu bulundurduğundan $\wp$ fonksiyonunun karmaşık katsayılı tüm rasyonel fonksiyonlarını da bulundurur. Bu rasyonel fonksiyonlar $\wp$ fonksiyonunu ve $\mathbb{C}$ deki sabit fonksiyonları içeren en küçük cisim olan $\mathbb{C}(\wp)$ kümesini oluştururlar. Benzer şekilde $E(\Omega)$ kümesi de $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonlarını içerir ve böylece $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonlarının rasyonel fonksiyonlarının cismi olan $\mathbb{C}(\wp,\wp')$ kümesini de kapsar. $\mathbb{C}(\wp,\wp')$ kümesi, $\wp$, $\wp'$ ve $\mathbb{C}$ yi içeren en küçük cisimdir.

2.8.1 Teorem. ***i.*** Eğer f bir çift eliptik fonksiyon ise belli bir R_1 rasyonel fonksiyonu için $f = R_1(\wp)$ ve böylece $E_1(\Omega) = \mathbb{C}(\wp)$,

ii. Eğer f, herhangi bir eliptik fonksiyon ise R_1 ve R_2 rasyonel fonksiyonlar olmak üzere $f = R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$ ve böylece $E(\Omega) = \mathbb{C}(\wp,\wp')$

dir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. ***i.*** f bir çift fonksiyon olsun. Sabit fonksiyonlar için bu sonuç aşikar olduğundan f fonksiyonunun mertebesi $N > 0$ alınarak ispat yapılacaktır. Eğer $k \in \mathbb{C}$ ise $f(z) = k$ denkleminin katlı kökleri sadece $f'(z) = 0$ olan yerlerdedir ve $f'(z) = 0$ eşitliği z noktalarının sonlu sayıdaki denklik sınıflarında gerçeklenir. Dolayısıyla $f(z) = k$ denklemi sonlu sayıdaki k hariç her k değeri için basit köklere sahiptir. O halde c ve d karmaşık sayıları, $f(z) = c$ ve $f(z) = d$ denkleminin tüm kökleri basit ve üstelik bu basit köklerin hiçbirisi 0 sayısına veya $j = 1, 2, 3$ için $\frac{1}{2}\omega_j$ sayısına denk olmayacak biçimde seçilebilir.

f fonksiyonu çift olduğundan $f(z) = c$ denkleminin köklerinin tamamının kümesi basit ve aralarında ayrık olan sayılardan oluşan

$$a_1, -a_1, a_2, -a_2, \ldots, a_n, -a_n$$

şeklindedir. Benzer şekilde $f(z) = d$ denkleminin kökleri de

$$b_1, -b_1, b_2, -b_2, \ldots, b_n, -b_n$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$g(z) = \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

eliptik fonksiyonunun $a_1, -a_1, a_2, -a_2, \ldots, a_n, -a_n$ noktalarında basit sıfırları ve $b_1, -b_1, b_2, -b_2, \ldots, b_n, -b_n$ noktalarında ise basit kutupları vardır. Sonuç 2.7.3 dikkate alındığında $\wp(z) = \wp(a_i)$ ve $\wp(z) = \wp(b_i)$ denklemlerinin sırasıyla $z = \pm a_i$ ve $z = \pm b_i$ $(1 \le i \le n)$ noktalarında basit kökleri olduğu görülür. Böylece

$$h(z) = \frac{(\wp(z) - \wp(a_1))(\wp(z) - \wp(a_2))\ldots(\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1))(\wp(z) - \wp(b_2))\ldots(\wp(z) - \wp(b_n))}$$

eliptik fonksiyonunun $g(z)$ fonksiyonuyla aynı noktalarda aynı katlılıklara sahip hepsi basit olan kutupları ve sıfırları vardır. Dolayısıyla Teorem 2.1.7 yardımıyla belli bir $\mu \neq 0$ sabiti için $g = \mu h$ olur. $f(z)$ fonksiyonu için

$$\frac{f(z) - c}{f(z) - d} = \mu \frac{(\wp(z) - \wp(a_1))\ldots(\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1))\ldots(\wp(z) - \wp(b_n))}$$

denklemi çözüldüğünde f fonksiyonunun $\wp(z)$ fonksiyonunun karmaşık katsayılı belli bir $R_1(\wp)$ rasyonel fonksiyonu biçiminde olduğu görülür.

ii. Eğer f fonksiyonu tek ise $f/\wp'$ fonksiyonu çift olur. Dolayısıyla ***i.*** şıkkı gereği belli bir rasyonel R_2 fonksiyonu için $f = \wp' R_2(\wp)$ dir. Genel olarak, eğer f, herhangi bir eliptik fonksiyon ise $\frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$ çift ve eliptik fonksiyon, $\frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$ tek ve eliptik fonksiyon olmak üzere

$$f(z) = \tfrac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \tfrac{1}{2}(f(z) - f(-z))$$

biçimindedir. Dolayısıyla R_1 ve R_2 rasyonel fonksiyonlar olmak üzere

$$f = R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$$

elde edilir.

$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ diferensiyel eşitliği kullanılarak $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonlarının herhangi rasyonel fonksiyonu $\wp'$ kuvvetleri yok edilerek $R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$ şekline getirilebilir. Örneğin,

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$$

eşitliğine artık $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonları arasındaki cebirsel bir eşitlik olarak bakılabilir. Şimdi $E(\Omega)$ kümesinde herhangi iki eliptik fonksiyonun birbirine cebirsel bir eşitlikle bağlı oldukları gösterilecektir.

2.8.2 Teorem. Eğer $f, g \in E(\Omega)$ ise sıfırdan farklı, indirgenemez, karmaşık katsayılı ve $\Phi(f, g)$ özdeşliğin sıfıra eşit olacak biçimde bir $\Phi(x, y)$ polinomu vardır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. x, y gibi iki değişkenli herhangi bir polinom

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\alpha_{kl}x^k y^l \quad , \quad (\alpha_{kl} \in \mathbb{C})$$

biçiminde seçilebilir. Dolayısıyla $h(z) = F(f(z), g(z))$ fonksiyonu, kutupları sadece f veya g fonksiyonunun kutup noktalarında olan bir eliptik fonksiyondur. Eğer f ve g fonksiyonları sırasıyla M ve N tane kutba sahipse h fonksiyonunun katlılıkları sayılmak koşulu ile en fazla $mM + nN$ tane kutup noktası vardır. Bundan dolayı Teorem 2.1.5 yardımıyla h fonksiyonu özdeşliğin sıfırı olmadıkça sıfırlarının sayısı da en fazla $mM + nN$ tanedir. Eğer m ve n yeterince büyük sayılar olarak seçilirse α_{kl} katsayılarının da, h fonksiyonunun sıfırlarının sayısı $mM + nN$ taneden fazla olacak şekilde seçilebileceği ve dolayısıyla $h(z) \equiv 0$ olduğu gösterilecektir. Bunu gösterebilmek için $z_1, \ldots, z_{mn-1}$ noktaları $mn - 1$ tane birbirine denk olmayan, f ve g fonksiyonunun kutup noktalarından farklı noktalar olarak seçilsin. Böylece mn tane α_{kl} bilinmeyenine sahip olan $mn - 1$ tane

$$h(z_j) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\alpha_{kl}f(z)^k g(z)^l = 0 \qquad (j = 1, \ldots, mn - 1)$$

homojen lineer (doğrusal) denklem kümesi ele edilir. Bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla olduğundan bu denklemlerin çözüm kümesi aşikar olmayan bir çözüme sahiptir. Yani yukarıdaki denklemi gerçekleyen tamamı sıfır olmayan α_{kl} katsayıları vardır. O halde $F(x, y)$ fonksiyonu özdeşliğin sıfıra eşit olmadığı halde $z = z_1, \ldots, z_{mn-1}$ noktalarında $F(f(z), g(z)) = h(z) = 0$ olur. Yeterince büyük m, n sayıları için

$$mn - 1 > mM + nN$$

olur ve yukarıdaki gibi seçilen α_{kl} katsayıları için $h(z) \equiv 0$ olur. $F(x, y)$ fonksiyonu $\mathbb{C}[x, y]$ polinom halkasında indirgenemez polinomların çarpımı olarak

$$F(x, y) = F_1(x, y)\, F_2(x, y) \ldots F_r(x, y)$$

biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla $E(\Omega)$ cisminde belli bir $F_i(x, y) = 0$ polinomu için

$$F_1(x,y)\, F_2(x,y) \ldots F_r(x,y) = 0$$

olur.

2.9 Sıfırları ve Kutupları Verilen Eliptik Fonksiyonların Oluşturulması

Bu kısımda sıfır ve kutup yerleri verilen bir f eliptik fonksiyonunun nasıl bulunabileceği sorusuna cevap aranacaktır. f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de, katlılıkları $k_1, \ldots, k_r$ olan sıfırlarının denklik sınıfları $[a_1], [a_2], \ldots, [a_r]$ ve katlılıkları $l_1, \ldots, l_s$ olan kutuplarının denklik sınıfları $[b_1], [b_2], \ldots, [b_s]$ olan bir fonksiyon ise aşağıdaki koşullar gerçeklenir:

i. $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} k_j = \sum_{j=1}^{s} l_j$,

ii. $[a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_r]$ ve $[b_1] \cup [b_2] \cup \ldots \cup [b_s]$ kümeleri farklıdırlar,

iii. $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} k_j a_j \sim \sum_{j=1}^{s} l_j b_j \mod \Omega.$

İlerleyen kısımlarda bu koşulların f fonksiyonunun varlığı için sadece gerekli değil aynı zamanda yeterli de olduğu görülecektir.

2.9.1 Teorem. Ω kafesi için $[a_1], [a_2], \ldots, [a_r]$ ve $[b_1], [b_2], \ldots, [b_s]$, $\mathbb{C}/\Omega$ nın elemanları, $k_1, \ldots, k_r$ ve $l_1, \ldots, l_s$ pozitif tamsayılar olsunlar. Eğer ***i***, ***ii*** ve ***iii*** koşulları gerçekleniyorsa her bir $[a_j]$ noktasında k_j katlılığında sıfırları ve her bir $[b_j]$ noktasında l_j katlılığında kutupları olan ve bu noktalardan başka sıfırları ve kutupları olmayan bir $f \in E(\Omega)$ eliptik fonksiyonu vardır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $n = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} k_j$ olmak üzere $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sayıları her bir a_j nin k_j defa listelenmesiyle ve $a_1, \ldots, a_r$ elemanlarının yeni düzenlemesi ve benzer şekilde $v_1, \ldots, v_n$ sayıları da her bir b_j nin l_j defa listelenmesiyle $b_1, \ldots, b_s$ elemanlarının yeni düzenlemesi olsun. Böylece **(*iii*)** şıkkından

$$\sum_{j=1}^{n} u_j - \sum_{j=1}^{n} \nu_j = \omega \in \Omega$$

elde edilir. Eğer $u_1 \rightarrow u_1 + \omega$ değişken değişimi yapılırsa, bu son eşitlik

$$\sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{n} \nu_j$$

şeklini alır.

$$f(z) = \frac{\sigma(z-u_1')\ldots\sigma(z-u_n)}{\sigma(z-\nu_1)\ldots\sigma(z-\nu_n)}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu dikkate alınırsa, $\sigma(z)$ fonksiyonu analitik olduğundan $f(z)$ fonksiyonunun meromorf bir fonksiyon olduğu görülür. Böylece

$$\sigma(z+\omega) = \varepsilon\sigma(z)\exp\eta\left(z+\frac{1}{2}\omega\right)$$

eşitliği yardımıyla

$$\sigma(z-u_j+\omega_i) - \sigma(z-u_j)\exp\left(\eta_i\left(z-u_j+\frac{1}{2}\omega_i\right)\right) \qquad (j = 1, \ldots, n;\ i = 1,2)$$

ve benzer şekilde $i = 1, 2$ ve $\sigma(z-\nu_j+\omega_i)$ için

$$f(z+\omega_i) = \frac{(-1)^n \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_i(z-u_j+\tfrac{1}{2}\omega_i)\right)}{(-1)^n \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_i(z-\nu_i+\tfrac{1}{2}\omega_i)\right)}\cdot f(z)$$

$$= \exp\left(\eta_i\sum_{j=1}^{n}(\nu_j-u_j)\right)\cdot f(z), \qquad \sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{n} \nu_j$$

$$= f(z)$$

olarak bulunur. Böylece f fonksiyonunun Ω kafesine göre çifte periyodik bir fonksiyon olduğu ve dolayısıyla eliptik bir fonksiyon olduğu sonucu elde edilir. $\sigma(z)$ fonksiyonunun $z \in \Omega$ kafes noktalarında basit sıfır yerleri vardır ve $z \notin \Omega$ için $\sigma(z) \neq 0$ dir. Böylece f fonksiyonunun $[a_1], [a_2], \ldots, [a_r]$ noktalarında katlılıkları $k_1, \ldots, k_r$ olan sıfırları ve $[b_1]$, $[b_2], \ldots, [b_s]$ noktalarında katlılıkları $l_1, \ldots, l_s$ olan kutup yerleri vardır.

Dikkat edilirse, g fonksiyonu da f fonksiyonu ile aynı sıfır ve kutuplara sahip başka bir eliptik fonksiyon ise belli bir $c \neq 0$ sabiti için $g(z) = c\, f(z)$, yani sabit katı farkıyla bu özelliklere sahip çifte periyodik eliptik fonksiyon bir tektir.

2.10 Esas Kısımları Verilen Eliptik Fonksiyonların Oluşturulması

Bu kısımda esas kısımları bilinen eliptik fonksiyonların oluşturulması üzerinde durulacaktır. Eğer f fonksiyonu, $\mathbb{C}$ deki kutuplarının sınıfları $[b_1]$, $[b_2]$, …, $[b_s]$ ve her bir b_j $(1 \leq j \leq s)$ noktasındaki esas kısmı

$$\sum_{k=1}^{l_j} \frac{a_{k,j}}{(z-b_j)^k}$$

olan bir eliptik fonksiyon ise, kalıntıların toplamı sıfır olduğundan

$$\sum_{j=1}^{s} a_{1,j} = 0$$

olur. Bu kısmın asıl amacı, esas kısmı $\sum_{k=1}^{l_j} \frac{a_{k,j}}{(z-b_j)^k}$ olan bir $f(z)$ eliptik fonksiyonunun varlığı için $\sum_{j=1}^{s} a_{1,j} = 0$ eşitliğinin sadece gerekli değil aynı zamanda yeterli olduğunu göstermektir. Bunun için aşağıdaki yardımcı teorem kullanılacaktır.

2.10.1 Yardımcı Teorem. c_1, …, c_s karmaşık sayılar olmak üzere

$$\text{“}g(z) = \sum_{j=1}^{s} c_j \zeta(z-b_j) \text{ eliptik} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{s} c_j = 0\text{”}$$

dır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $\zeta(z)$ fonksiyonu meromorf olduğundan $g(z)$ fonksiyonu da meromorftur. Eğer $\omega \in \Omega$ ise

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta$$

eşitliği yardımıyla $\omega = n\omega_1 + m\omega_2$ için $\eta = m\eta_1 + n\eta_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g(z+\omega) &= \sum_{j=1}^{s} c_j \zeta(z+\omega-b_j) \\ &= \sum_{j=1}^{s} c_j \zeta(z-b_j) + \sum_{j=1}^{s} c_j \eta \\ &= g(z) + \eta \sum_{j=1}^{s} c_j \end{aligned}$$

elde edilir. $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$ Legendre bağıntısı yardımıyla η_1, η_2 sabitlerinden en az birinin sıfırdan farklı olduğu görülür. Dolayısıyla belli $\omega \neq 0$ için $\eta \neq 0$ olur. Böylece

$$\text{“}g(z) \text{ fonksiyonu } \Omega \text{ kafesine göre eliptiktir} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{s} c_j = 0\text{”}$$

olduğu elde edilir.

2.10.2 Teorem. $b_1, b_2, \ldots, b_s$, Ω kafesine göre birbirine denk olmayan karmaşık sayılar ve $l_1, \ldots, l_s$ pozitif tamsayılar olsunlar. Eğer $a_{k,j}$ $(1 \leq k \leq l_j,\ 1 \leq j \leq s)$ karmaşık sayıları $\sum_{j=1}^{s} a_{1,j} = 0$ eşitliğini gerçekliyor ve üstelik her bir j için $a_{l_j,j} \neq 0$ ise kutupları $[b_1]$, $[b_2]$, …, $[b_s]$ noktalarında ve her bir b_j noktasında esas kısmı $\sum_{k=1}^{l_j} \frac{a_{k,j}}{(z-b_j)^k}$ olan bir $f \in E(\Omega)$ eliptik fonksiyonu vardır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $F_1 = \zeta$, $F_2 = \wp$ ve $k \geq 3$ için

$$F_k(z) = \sum\nolimits_{\omega\in\Omega} (z-\omega)^{-k}$$

olmak üzere

$$f(z) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{l_j} a_{k,j} F_k(z-b_j)$$

olarak tanımlanana f fonksiyonunu dikkate alalım. $\sum_{j=1}^{s} a_{1,j} = 0$ ve yardımcı teorem gereği

$$\sum_{j=1}^{s} a_{1,j} F_1(z-b_j)$$

fonksiyonunun eliptik olduğu görülür ve üstelik her bir $k \geq 2$ için F_k fonksiyonları eliptik olduğundan f fonksiyonu da eliptiktir. Her bir F_k fonksiyonunun $\omega \in \Omega$ noktalarındaki kutuplarının k mertebeli tek bir sınıfı vardır ve bu fonksiyonların 0 noktasındaki esas kısmı z^{-k} dır. Dolayısıyla f fonksiyonunun kutupları $[b_1]$, $[b_2]$, …, $[b_s]$ noktalarındadır ve $a_{l_j,j} \neq 0$ olmak üzere f fonksiyonunun esas kısmı her bir b_j noktasında $\sum_{k=1}^{l_j} \frac{a_{k,j}}{(z-b_j)^k}$ dir.

Eğer g fonksiyonu da, f fonksiyonuyla aynı kutuplara ve aynı esas kısma sahip bir başka eliptik fonksiyon ise $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z) = g(z) + c$ olduğu açıktır. Şimdi

$$V = V(l_1, b_1; l_2, b_2; \ldots; l_s, b_s)$$

kümesi Ω kafesine göre, $\mathbb{C}\backslash([b_1], [b_2], \ldots, [b_s])$ kümesi üzerinde analitik ve $1 \leq j \leq s$ için her bir $[b_j]$ denklik sınıfı üzerinde en fazla l_j mertebeden kutbu olan veya analitik olan tüm eliptik fonksiyonların kümesi olsun. Eğer $f, g \in V$ ise $f + g \in V$ ve her $c \in \mathbb{C}$ sabiti için $cf \in V$ olduğundan V, $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

2.10.3 Teorem. V, $\mathbb{C}$ üzerinde $l_1 + \ldots + l_s$ boyutlu bir vektör uzayıdır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. V kümesinin herhangi bir g elemanı, $c \in \mathbb{C}$ ve $a_{k,\,j}$ sayıları da $\sum_{j=1}^{s} a_{1,j} = 0$ özeliğindeki sabitler olmak üzere

$$f(z) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{l_j} a_{k,j}F_k(z-b_j)$$

fonksiyonu yardımıyla $g = f + c$ biçiminde ifade edilebilir. g fonksiyonunun $[b_j]$ noktasındaki kutbunun mertebesi l_j den daha küçük olması halinde $a_{l_j,j} = 0$ olabilirler. Dolayısıyla V vektör uzayı ($2 \leq k \leq l_j$, $1 \leq j \leq s$) olmak üzere $l_1 + \ldots + l_s - s$ tane $F_k(z - b_j)$ fonksiyonu, ($2 \leq j \leq s$) olmak üzere $s - 1$ tane $F_1(z - b_j) - F_1(z - b_1)$ fonksiyonu ve sabit 1 fonksiyonu ile gerildiğinden V nin boyut en fazla $l_1 + \ldots + l_s$ dir. Esas kısımlar dikkate alındığında bu fonksiyonların $\mathbb{C}$ üzerinde lineer bağımsız oldukları sonucu elde edilir. Bu ise bu fonksiyonların oluşturduğu kümenin V için bir taban ve dolayısıyla da V vektör uzayının boyutunun da $l_1 + \ldots + l_s$ olduğunu gösterir.

Örneğin, $V = V(2, 0)$ vektör uzayı için $\{\wp, 1\}$ kümesi bir tabandır ve dolayısıyla da boy $V = 2$ dir. Ω kafesindeki kutuplarının mertebesi en çok 2 olan ve $\mathbb{C}\backslash\Omega$ üzerinde analitik olan eliptik fonksiyonların en genel formu, a ve c keyfi karmaşık sabitler olmak üzere $a\wp(z) + c$ biçimindedir.

KAYNAKLAR

Apostol, Tom M. 1990. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. Second Edition, Springer-Verlag, New York, U.S.A., 331 pp.

Bowman, F. 1953. Introduction to Elliptic Functions with Applications. English Universities Press, London, United Kingdom, 115 pp.

Jones, G. A. ve Singerman, D. 1987. Complex Functions: An Algebric and Geometric Viewpoint. Cambridge University Pres, Cambridge, United Kingdom, 334 pp.

Whittaker, E.T. ve Watson, G.N. 1927. A Course of Modern Analysis. Fourth Edition, Cambridge University Pres, Cambridge, United Kingdom, 590 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Sema KILIÇ
Doğum Yeri ve Tarihi	: BURSA – 28.01.1988
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Bursa Anadolu Kız Lisesi – 2006
Lisans	: Celal Bayar Üniversitesi – 2011
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013
Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl	:
İletişim (e-posta)	:
Yayınları	: