6918

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Doğrusal Olmayan Programlama Modellerinden Quadratik Programlamanın Süt ve Süt Ürünlerinin Üretim Planlanmasında Uygulanması

(Yüksek Lisans Tezi)

Basri BAHTİYAR

Danışman: Prof. Dr. Ahmet ÖZTÜRK

BURSA — 1989

T E Ş E K K Ü R

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde çok büyük katkıları olan değerli danışman hocam Sn.Prof.Dr. Ahmet ÖZTÜRK'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.Modelin kurulması aşamasında değerli katkılarından dolayı Sn.Prof.Dr. Yüksel IŞYAR'a da teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Uludağ Üniversitesi İ.İ.B.F. Bilgi İşlem Merkezi'nden yararlanma imkanı sağlayan Sn.Doç.Dr. Sacit ERTAŞ'a teşekkür ederim. Çalışmamda beni sürekli destekleyen eşim Arş.Gör. Güner BAHTİYAR'a teşekkür ederim.Tezin yazılmasında bilgisayar olanaklarından geniş ölçüde yararlandığım SECOM BİLGİSAYAR LTD.'e de teşekkür ederim.

Basri BAHTİYAR

BURSA-1989

İ Ç İ N D E K İ L E R

G İ R İ Ş

İktisat bilimi kısaca kıt kaynakların yönetimi olarak tanımlanabilir. Toplumlar sahip oldukları kıt üretim kaynaklarını en etkin şekilde kullanarak ekonomik refahlarını en yüksek düzeye çıkarmayı amaçlarlar. Az gelişmiş ülkeler, ekonomik gelişmeyi sağlayacak üretim faktörü yönünden sınırlı kaynağa sahiptirler. Bu nedenle sınırlı kaynakların etkin şekilde kullanımı bu ülkeler için önem arzeder.

Ülke ekonomilerinin temelini firmalar oluşturur. Kıt üretim kaynaklarını kullanarak mal ve hizmet üreten firmalardır. Firmaların üretim işlevlerini gerçekleştirirken karşılaştıkları çeşitli sorunlar vardır. Bu sorunların çözümünde Yöneylem Araştırmasının önemli katkısı vardır. Nicel tekniklere dayanan modellerle işletme yöneticileri temel amaçları olan minimum maliyetle maksimum üretimi sağlamak veya karlarını en üst düzeye çıkarmada başarıya ulaşbilirler(1). Günümüzün karmaşık işletme problemleri karşısında doğru ve yerinde kararları alabilmek için çeşitli seçeneklerin bilinmesi, sonuca etki eden tüm koşulların belirlenmesi gerekir. Bu nedenle yöneticiler karar alırken nicel tekniklere dayanan bilimsel yöntemlerden yararlanmalıdırlar(2).

Bilimsel karar alma süreci modellere dayanır. Karar almada kullanılabilecek çok çeşitli modeller ve nicel teknikler geliştirilmiştir. Doğrusal Programlama, Leontief Modeli,Ulaştırma Model-

---

1. İ.cemalcılar, D.Bayar, İ.Aşkun, Söz-Alp, İşletmecilik Bilgisi, Eskişehir İ.T.İ.A., Eskişehir, 1979, s.1-33.
2. Ahmet Öztürk, Yöneylem Araştırması, Uludağ Üniversitesi, Basımevi, Bursa, 1984, s.1.

leri, Şebeke Analizi, Stok Modelleri, Oyun Kuramı, Bekleme Hattı Modelleri, Doğrusal Olmayan programlama, Dinamik Programlama, Markov analizi, v.b. bunlara örneklerdir. Bu modllere ilişkin çok sayıda kuramsal yönde çalışmalar yapılmıştır. Uygulamalar yönünden ise çalışmalar o denli çok değildir. Özellikle doğrusal olmayan programlama modellerinin uygulamalı çalışmaları oldukça azdır.Çalışmamızda doğrusal olmayan programlama modellerinden biri olan Quadratik Programlama Modeli önce kuramsal yönden açıklaması ele alındıktan sonra bu modelin üretim planlaması açısına yönelik bir çalışma için nasıl kullanılabileceği Bursa'daki Sütaş işletmesine uygulayarak gösterilmeye çalışılacaktır.

Modeller gereksinimlerden doğarlar. Doğrusal olmayan programlama modelleri de bir gereksinimden doğumuştur. Bu gereksinim gerçek ekonomik faliyetlerde davranışsal (arz, talep) ve davranışsal olmayan (kurumsal,teknolojik) fonksiyonel yapıların doğrusal olmayan biçimlerinden gelmektedir. Şunu da belirtmekte yarar vardır ki doğrusal programlama yöntemi,doğrusallık varsayımı nedeni ile bu gibi yapıları incelemeye uygun değildir.İşte doğrusal olmayan ilişkileri inceleme görevi doğrusal olmayan programlama modellerine kalmaktadır.

Çalışmamız iki bölümden oluşmaktadır. Kuramsal bölüm olarak adlandıracağımız birinci bölümde, quadratik programlama modeli doğrusal olmayan programlama modellerinden biri olduğu için quadratik programlama modeli ve doğrusal olmayan programlama modellerinin genel anlamda kuramsal bir açıklaması yapılmıştır.

İkinci bölümde ise quadratik programlama modelinin Bursa'da ki bir süt ve süt ürünleri üreten fabrikaya uygulanmasını içermektedir. Böylece çalışmamız Quadratik programlama konusunda uygulamalı bir çalışmayı olşturduğundan bu konudaki bir boşluğu da giderebileceği inancındayız. Ayrıca bu bölümde modelin oluşturulmasına yönelik verilerin elde edilmesindeki tüm aşamalar ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Burada amaç fonksiyonunun belirlenebilmesi için ürünlerin maliyet fonksiyonlarının tahmin edilmesi bir zorunluluk olmuştur. Yaptığımız ekonometrik bir çalışma ile sözkonusu fonksiyonlar elde edilmiştir. Diğer önemli bir konu da maliyet fonksiyonlarının modelin quadratik yapısını aşmayacak şekilde tahmin edilmesidir. İşte tüm bu konulara ikinci bölümde yer verilerek işletmenin Quadratik programlama modeli düzenlenmiştir.

Ayrıca incelemelerimiz ülkemizde quadratik programlama modelinin bir üretim planlanması alanında nasıl uygulanabileceği konusunda ayrıntılı bir çalışmanın yapılmadığını göstermiştir.

I. DOGRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİ:

I.1. DOGRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİNİN GELİŞİMİ

Bilindiği üzere doğrusal programlama modeli , karar vermeye yönelik birçok alanda yoğun olarak kullanılan matematik bir modeldir. İşletme amaçlarını eniyileyecek olan kararların alınmasında oldukça etkin sonuçlar veren doğrusal programlama yöntemi, bazı sınırlamaları da beraberinde getirmektedir. Doğrusal programlama yöntemi, işletmenin girdileri ile çıktıları arasında doğrusal bir ilişkinin varolduğunu kabul eder ve bu varsayım gereği amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcı koşullar doğrusal olarak tanımlanır(1).

Gerçek yaşamdaki problemlerin çoğu doğrusal olmayan yapıları içerdiklerinden doğrusallık varsayımı bir bakıma araştırmacıları sınırlamaktadır. Maliyet fonksiyonları, talep ilişkileri, fiyat ve üretim fonksiyonu, doğrusal olmayan özellik taşıyabildikleri gibi bu fonksiyonlar içindeki bazı değişkenler doğrusal olmamaktadır. Bu durumda problemlerin çözümü için doğrusal programlama modelini uygulamak sağlıklı olmaz.

Kuramsal açıdan doğrusal programlama yöntemine herhangi bir eleştiri getirilemez. Çünkü yöntemde ele alınan varsayımlar daha işin başında doğrusal olmayan yapıları gözönünde bulundurmaz. Doğrusal olmayan yapıların varlığı halinde, ampirik açıdan

---

1. Ahmet Öztürk,Yöneylem Araştırması,Uludağ Üniversitesi Basımevi, Bursa, 1984 s.18.

doğrusal programlama uygulanabilirliğini yitirmesi araştırmacıları yeni modellere götürmüştür. Doğrusal olmayan yapıları da içerebilecek bir matematik model oluşturmaya yönelik çabalar yoğunlaşmış ve doğrusal olmayan programlama modelleri oluşturulmuştur. Doğrusal olmayan programlama modellerinde amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılar doğrusal olmayabilir.

Doğrusal olmayan programlama teorisi ilk kez Kuhn,ve Tucker' in 1951 yılında yaptıkları araştırmalar sonucunda ortaya konulmuştur(1). Doğrusal olmayan programlamaya duyulan güven ve ilginin 1960'dan sonra artması ve simpleks yönteminin doğrusal olmayan problemlere de uygulanması,doğrusal olmayan programlamaya önemli sayılabilecek gelişme sağlanmıştır. Sağlanan gelişmelere karşın bu alanda hala büyük boşlukların olduğu inancındayız. Örneğin, ikinci dereceden daha yüksek dereceli olan doğrusal olmayan amaç fonksiyonlu problemlerde kullanınılabilecek genel bir yaklaşımın olmaması bunlardan biridir. Bu tür durumlarda ise dinamik programlama kullanılarak probleme bir çözüm getirilebilinir(2).

Doğrusal olmayan programlamaya adım adım yaklaşmak amacıyla şimdi doğrusal proğramlama modelini anımsayalım. Bilindiği gibi doğrusal programlama modelinin yapısı doğrusal bir amaç fonksiyonu ve doğrusallık varsayımına dayanan kısıtlayıcı koşullardan oluşmaktadır. Terimlerle ;

---

1. H.B.Maynard,Industrial Engineering Hendenbook, McGraw-Hill Boock Company,s.10.177-10.194.

2. Hayrettin Kemal Sezen,Dinamik Programlama Yöntemi ve Bursa' daki bir işletmeye uygulanması (Yüksek Lisans tezi),Bursa,1986.

Amaç fonksiyonu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1} c_j x_j$

Kısıtlayıcı koşullar ;

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$i=1,\ldots.m$'e kadar.

ve pozitif olma koşulu; $x_i \geq 0 \quad i=1,\ldots\ldots,n.$

Burada x_i'ler bilinmeyenler veya karar değişkenleridir. c_i'ler, a_i'ler ve b_i'ler bilinen sabitlerdir. c_i'ler amaç katsayılarıdır; kar, hasılat, maliyet, vb.. a_{ij} teknoloji katsayıları; bir birim x_j üretimi için gerekli olan i hammadde miktarı. b_i'ler ise elde bulunan i ekonomik birimi veya ekonomik koşulların miktarı.

Yukarıda tanımlanan modelden de görüleceği gibi hem karar değişkenlerimiz hem de parametrelerimiz birinci derecedendir. Bu durum doğrusal bir modelin karakteristik özelliğidir. Gerçek hayata ilişkin problemlerde ise bu durum nadiren bu özelliktedir. Örneğin değişik üretim düzeylerinde birim maliyetler farklı farklı değerler alabilirler. Böyle durumda c_j'ler sabit olamaz. c_j'lerin fonksiyonel bir özellik göstermesi modeli doğrusal olmayan bir yapıya götürür. Buna benzer durum fiyat talep ilişkisi için de sözkonusudur.

Genel matematiksel programlama problemi bir kriterin enbüyükleme veya enkücükleme edilmek üzere şöyle tanımlanabilir:

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \quad i=1,\ldots\ldots,n$$

Kısıtlayıcılar ;

$$f(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n) \leq b_i \qquad i=1,\ldots\ldots,m$$

pozitif olma koşulu

$$x_i \geq 0 \qquad i=1,\ldots\ldots,n$$

Yukardaki yazılımdan da görüleceği üzere doğrusal programlama modeli genel matematiksel programlama problemlerinin özel bir durumudur. Sıklıkla karşılaşılan durum ise doğrusal olmayan programlama problemleridir.

I.2. DOGRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELININ KURAMSAL YAPISI VE TEMEL KAVRAMLARI

Bu kısımda doğrusal olmayan programlama modelinin genel yapısı, doğrusal olmayan programlama modelini olşturan koşullar, özellikler ve bu modelin uygulama güçlükleri açıklanmaya çalışılacaktır.

I.2.1. Doğrusal Olmayan Programlama Modelinin Yapısı

Daha önce belirtiğimiz gibi doğrusal olmayan programlama modelinin genel matematiksel modelden farklı bir yönü yoktur. Basitçe;

$$g(x)\ [\ \leq, =, \geq\ ]\ b_i \qquad i=1,2,\ldots\ldots,k$$
$$x \geq 0$$

kısıtları altında,

$$Z=f(X) \text{ amaç fonksiyonu eniyilenir.}$$

Açık bir şekilde ifade edersek;

$$a_{11}x_1^{o} + a_{12}x_2^{p} + \ldots\ldots + a_{1n}x_n^{r} \geq \text{veya} \leq b_1$$

$$a_{21}x_1^{s} + a_{22}x_2^{t} + \ldots\ldots + a_{2n}x_n^{u} \geq \text{veya} \leq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{k1}x_1^{v} + a_{k2}x_2^{w} + \ldots\ldots + a_{kn}x_n^{y} \geq \text{veya} \leq b_k$$

$$Z=f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

Burada,

$Z=f(X)$ doğrusal olmayan bir amaç fonksiyonudur. Kısıtlayıcılarda yeralan o,p,r,s,t,u,v,w,y 1,2...,n karar değişkenlerin üstel değerleridir.

Bu tür kısıtlayıcıları içeren maksimizasyon ve minimizasyon problemlerinin çözümünde Lagrange çarpan yöntemi geliştirilmiştir(1).Ayrıca doğrusal olmayan amaç fonksiyonlu problemlerin çözümünde kullanılan Lagrange çarpanı,daha genel haliyle kısıtlayıcı koşulların eşitsizlikler içermesi durumunda da uygulanabilmesi için Kuhn-Tucker koşulları adını verdiğimiz bazı koşulların sağlanması gerekir. Klasik optimizasyon teorisinden anımsanacağı gibi Lagrange çarpanı yöntemi kullanılırken kısıtlayıcı koşullarımızın eşitlikler halinde ifade edilmesi zorunludur.

Kısıtlı bir amaç fonksiyonu Lagrange çarpanı yöntemine uygun olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$L(X,s,\lambda)=f(X) - \lambda g(X)+s$$

Burda;

$s=[s_1,s_2 \ldots\ldots,s_n]$ aylak değişkenler. Bilindiği üzere aylak değişkenler kısıtlayıcı eşitsizliklerini eşitlik haline getirmek için kullanılır.

Kuhn-Tacker koşulları ve böyle bir modelin nasıl kolayca simpleks yöntemiyle çözülebileceği daha sonraki bölümde ele alınacağından burada bu konuya değinilmiyecektir. Asıl konumuz olan Quadratik programlama yönteminin analitik çözümünde Lagrange

1. H.B.Maynard, a.g.e.s.10.177-10.194.

çarpan yönteminden yararlanılacaktır. Lagrange çarpanı yöntemi ve ona bağlı olarak tanımlanmış Kuhn-Tacker koşulları, temelde quadratik programlama gibi doğrusal olmayan programlama yöntemlerinin analitik çözümlerine (global optimum) ulaşmada yararlı olmaktadır.Ayrıca Lagrange çarpanının ekonomik bir anlamı vardır. Bu anlam gölge fiyatları tanımlamasıdır(1). Gölge fiyatları girdi ve kısıtlayıcı koşulların gercek fiyatları olduğu gibi ek girdi kullanımının amaç fonksiyonuna olan katkısını göstermektedir. Bu nedenle Lagrange çarpanı yöntemiyle konuya yaklaşımanın çok yönlü yararları olduğu kanısındayız.

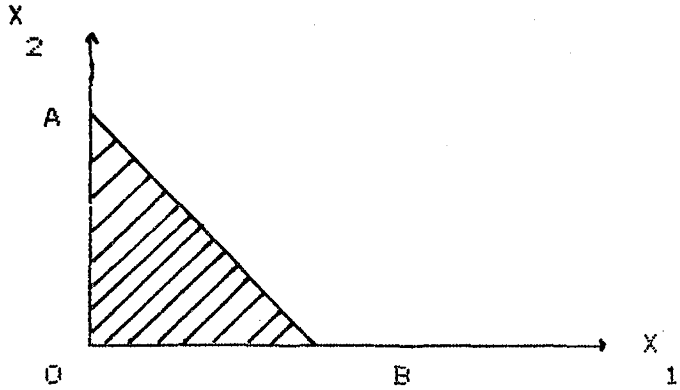
1. Ahmet Öztürk, B.I.T.I.A. Dergisi "Fırsat Maliyeti ve Gölge Fiyatları", Mart-1978, Cilt 6, s.83.

I.2.2. Doğrusal Olmayan Kısıtlayıcılar

Doğrusal programlamada bir konveks (dışbükey) küme, sınırlı sayıdaki doğrusal kısıtlaycıların kesişme noktalarından meydana gelir ve sınırlı sayıda uç (extreme) nokta vardır. Oysa kısıtlayıcılardan en az biri doğrusal değil ise sonsuz sayıda uc nokta olabildiği gibi uygun çözüm alanı konveks olmayabilir.

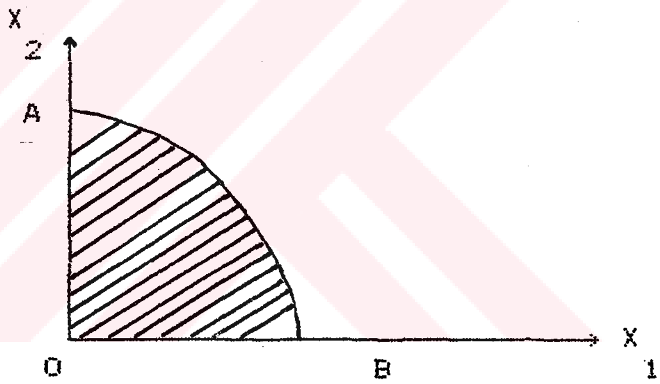
Tek bir kısıtlaması olan ve pozitif olma koşulu altında bir takım matematiksel programlama problemleri Şekil 1.'de grafik olarak gösterilmektedir. Şekilde uygun çözüm alanları taranmıştır. Şekil 1.a'da amaç fonksiyonu doğrusaldır. Eldeki doğrusal programlama problemimizin optimum çözüm uç noktalar O,A,B'de yer alır. Oysa Şekil 1.b'de uygun çözüm alanı dışbükey bir küme olup sonsuz sayıda uç nokta vardır. Gerçekten de AB eğrisi üzerinde her nokta bir uç noktadır.

Simpleks yöntemi bir uç noktadan diğerine haraket eden yinelemeli bir işlem olduğu için,bu yöntemi sonsuz sayıda uç noktanın varolduğu durumlarda kullanmak mümkün değildir.Şekil 1.c.'de belirtilen uygun çözüm alanını oluşturan noktalar kümesinden herhangi bir nokta çiftini birleştiren doğru parçası tümüyle aynı küme içinde yer alması şartını sağlayamadığından konveks olmadığı açıktır. Bu nedenle simpleks yöntemi konveks olmayan kümelere de uygulanamaz.



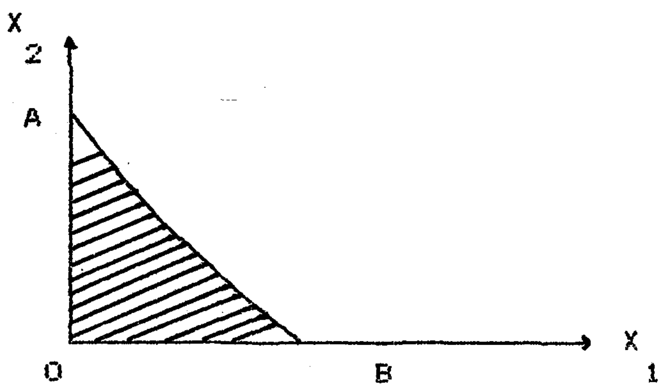
(a)

Sekil:1.



(b)

Sekil:1.



(c)

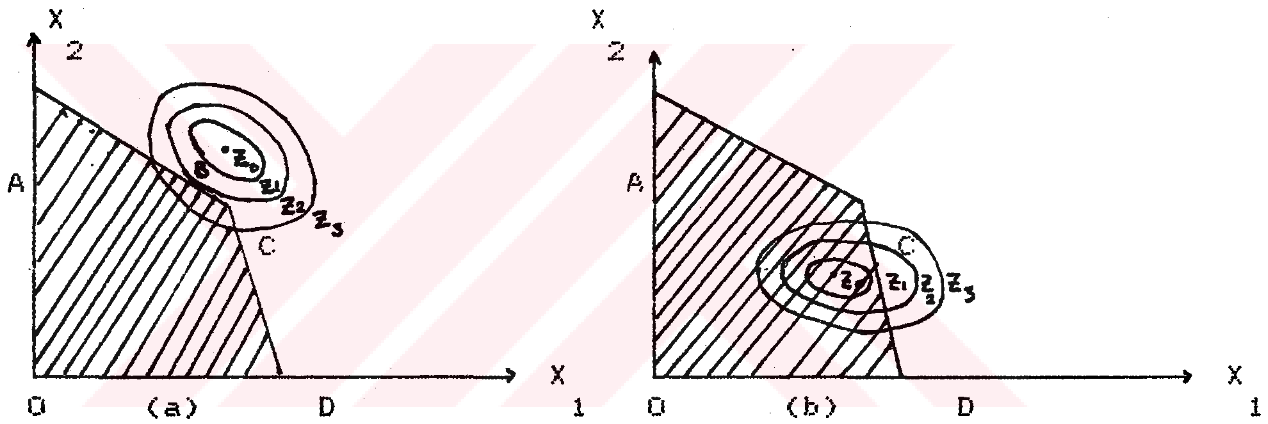
Sekil:1.

I.2.3. Doğrusal Olmayan Amaç Fonksiyonu

Şimdi kısıtlayıcıları doğrusal ve amaç fonksiyonu doğrusal olmayan bir programlama problemini ele alalım.

Şekil 2.'deki grafikler eşkarlılık çizgilerini temsil eder ve Z_0 bu fonksiyon için en yüksek kar noktasıdır. Burada $Z_0 > Z_1 > Z_2 > Z_3$ dir. Şekil 2.a'da, en yüksek kar noktası Z_0 uygun çözüm alanında kalmaktadır. Optimum çözüm, bu sınırlandırılmış problemin eşkarlılık çizgisinin AC kısıtlayıcısına teğet olduğu B noktasında yer almaktadır. Görüldüğü gibi optimum çözüm, dışbükey bir kümenin uç noktasında bulunmaktadır. Şimdi Z_0 yine en yüksek kar noktasını göstermek üzere ve $Z_0 > Z_1 > Z_2 > Z_3$ şartı aynı kalmak koşuluyla doğrusal olmayan amaç fonksiyonu Şekil 2.b'deki gibi kaydığını düşünelim. Böyle bir problem için optimum çözüm uygun çözüm alanının içinde bir noktada yer alır ve x_1 ile x_2 değişkenleri Z_0'a karşılık gelir.

Burada doğrusal programlamanın özelliği olan bütün çözümlerin dışbükey bir kümenin uç noktalarında yer alması koşulunun ihlal edilmiş olduğunu görürüz. Bununla beraber kısıtlayıcıları doğrusal ve amaç fonksiyonu doğrusal olmayan matematiksel programlama problemleri için simpleks yönteminin uygulanmasını olası kılan dönüşümlerin geliştirildiğini belirtmek isteriz.



Şekil:2.

I.2.4. Dışbükey-İçbükey Koşulları

Doğrusal programlama probleminde dışbükey-içbükey koşulları otomatik olarak sağlanır. Uygun çözüm alanı dışbükey bir kümedir. Doğrusal amaç fonksiyonu maksimize edilirken içbükey bir fonksiyon, minimize edilirken dışbükey bir fonksiyon olması gerekir. Çünkü aşağıdaki ifadelerin eşitlik koşullarını hem içbükey hem de dışbükey fonksiyon sağlar. İçbükey bir fonksiyon için,

$$f[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] \geq \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

tanımlanır ve λ burada $0 \leq \lambda \leq 1$ dir. Dışbükey bir fonksiyon için ise,

$$f[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] \leq \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

ve λ yine $0 \leq \lambda \leq 1$ olarak tanımlanır. Bu ifadeler aşağıdaki şekilde elde edilmektedir(1):

$$X_i \in S \text{ ve } \lambda_i \geq 0 \text{ , } \Sigma \lambda_i = 1 \text{ iken,}$$

$$X_0 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots + \lambda_n X_n$$

$$X_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$$

şeklinde elde edilen X_0'a, $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ noktalarının dışbükey bileşimi denir.

---

1. İmdat Kara, Yöneylem Araştırması (Doğrusal Olmayan Modeller), Anadolu Üniversitesi Basımevi, Eskişehir, 1986, s.7-12.

Verilen bir S kümesinin farklı her iki noktasının bileşimi ile bulunan nokta, S'nin bir öğesi ise, S'ye dışbükey küme denir.

Yani, $X_i, X_j \in S$, $0 \leq \lambda \leq 1$ iken,

$X_0 = \lambda X_i + (1-\lambda) X_j$, her $i \neq j$ için,

$X_0 \in S$ ise, S'ye dışbükey küme denir.

$X_1, X_2 \in R^n$ iken,

$D = \{ X \mid X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 ,\ \lambda \in R \}$

X_1, X_2'yi birleştiren doğru denklemini,

$\bar{D} = \{ \bar{X} \mid \bar{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 ,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \}$ ise,

X_1 ve X_2 vektörlerini birleştiren doğru parçasının denklemini verir.

Yukarıda verilen tanım örneklenirse, $X_1, X_2 \in R^3$,

$X_1 = (0,1,2)$ ve $X_2 = (1,0,1)$ iken

$X = \lambda(0,1,2) + (1-\lambda)(1,0,1)$

— $X = (1-\lambda,\ \lambda, 1+\lambda)$ ifadesi,

$\lambda \in R$ için, X_1 ve X_2'den geçen doğrunun; $0 \leq \lambda \leq 1$ için ise X_1 ve X_2 noktalarını birleştiren doğru parçasının denklemini verir.

$f(X)$, verilen bir kümede tanımlı iken, bu kümenin farklı her X_1, X_2 noktaları ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için;

$$f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] \geq \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$$

ise $f(X)$'e içbükey fonksiyon; eğer

$$f[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] > \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

ise $f(X)$'e kesin içbükey fonksiyon denir.

Bu tanıma göre, $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ fonksiyonu üzerindeki farklı iki noktayı birleştiren doğru parçası fonksiyonla çakışıyor veya onun altında kalıyorsa, $f(X)$ içbükey fonksiyon olmaktadır.

Tek değişkenli içbükey fonksiyonun, R^2'deki görünüm şekli Şekil 3' de verilmiştir.

$f(X)$ tanımlı olduğu küme içinde farklı her X_1 ve X_2 için, $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere,

$$f[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] \leq \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

ise $f(X)$'e dışbükey (concav) fonksiyon; eğer

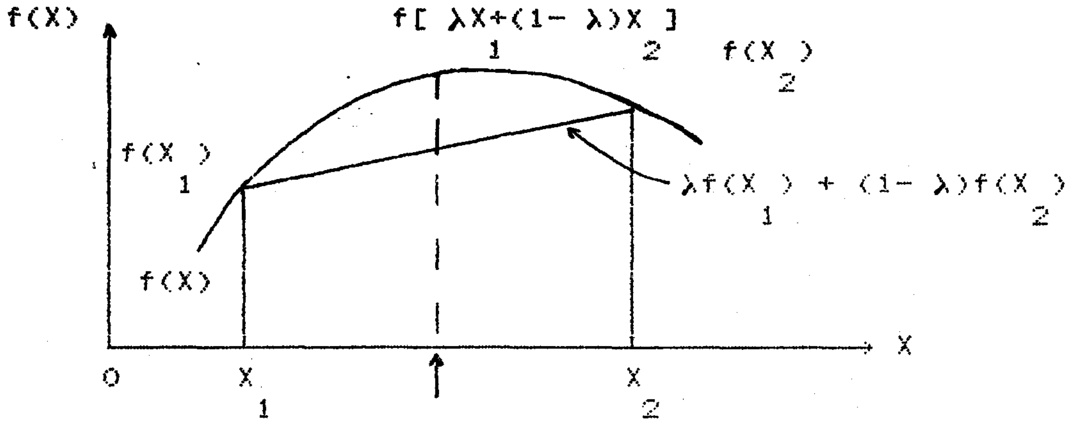
$$f[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] < \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

ise $f(X)$'e kesin dışbükey fonksiyon denir.

Görüldüğü gibi, $f(X)$'in üzerinde alınan farklı iki noktayı birleştiren doğru parçası, fonksiyonun üzerinde veya üstünde kalıyorsa, $f(X)$ dışbükey bir fonksiyon olmaktadır.

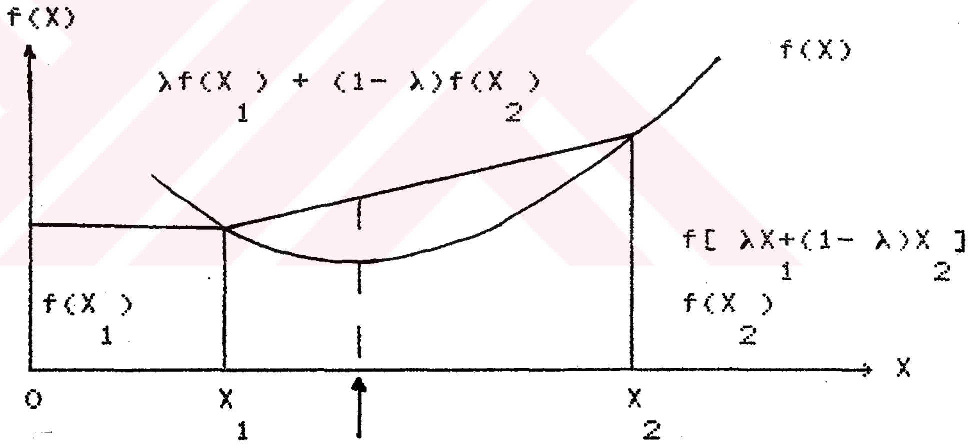
Dışbükey bir fonksiyonun R^2'de görünümü Şekil 4.'de verilmiştir.

Doğrusal bir fonksiyon başta da belirttiğimiz gibi hem dışbükey, hem de içbükeydir.



$X= \lambda X_1 +(1- \lambda)X_2 \; , 0 \leq \lambda \leq 1$

Şekil:3.



$X= \lambda X_1 +(1- \lambda)X_2 \; , 0 \leq \lambda \leq 1$

Şekil:4.

f(X)'in üzerindeki farklı iki nokta X_1 ve X_2 olsun.

$$X= \lambda X_1 +(1- \lambda)X_2$$

iken,

$$f(X)= f[\lambda X_1 +(1- \lambda)X_2]$$

olur.

$f(X)$ doğrusal bir fonksiyon olduğundan,

$$f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] = \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$$

yazılır.

Böylece içbükeylik dışbükeylik tanımında verilen eşitsizlikler, eşitlik halinde gerçekleşmektedir. Sonuç olarak $f(X)$ hem içbükey, hem de dışbükey fonksiyon olmaktadır. Ayrıca dışbükey fonksiyonların toplamı dışbükey, içbükey fonksiyonların toplamı da içbükeydir.

$g_i(X)$'ler her i için dışbükey olduğunda. $f(X) = \sum_i g_i(X)$ fonksiyonunun dışbükey olduğunu gösterelim.

Her i için $g_i(X)$ dışbükey olduğundan,

$$g_i[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] \le \lambda g_i(X_1) + (1-\lambda) g_i(X_2)$$

yazılır. Bu eşitsizlikten

$$\sum_i g_i[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] \le \sum_i \{\lambda g_i(X_1) + (1-\lambda) g_i(X_2)\}$$

elde edilir.

Sağ tarafta toplama işleminin dağılım özelliği kullanılırsa,

$$\sum_i g_i[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] \le \lambda \sum_i g_i(X_1) + (1-\lambda) \sum_i g_i(X_2)$$

olur. $\sum_i g_i(X) = f(X)$ yazılıdığında

$$\lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) \ge f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2]$$

elde edilir.

Bu da dışbükeylik koşulundan başka bir şey değildir.

Doğrusal olmayan programlama açısından içbükeylik-dışbükeylik koşullarını bu genişlikte ele almamızın iki önemli dayanağı var, bunlar(1):

a) Eğer $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bir dışbükey kümede tanımlı dışbükey bir fonksiyon ve X_0, $f(X)$'in yerel enküçük noktası ise, $f(X)$, X_0'da bütünsel enküçük değerini alır.

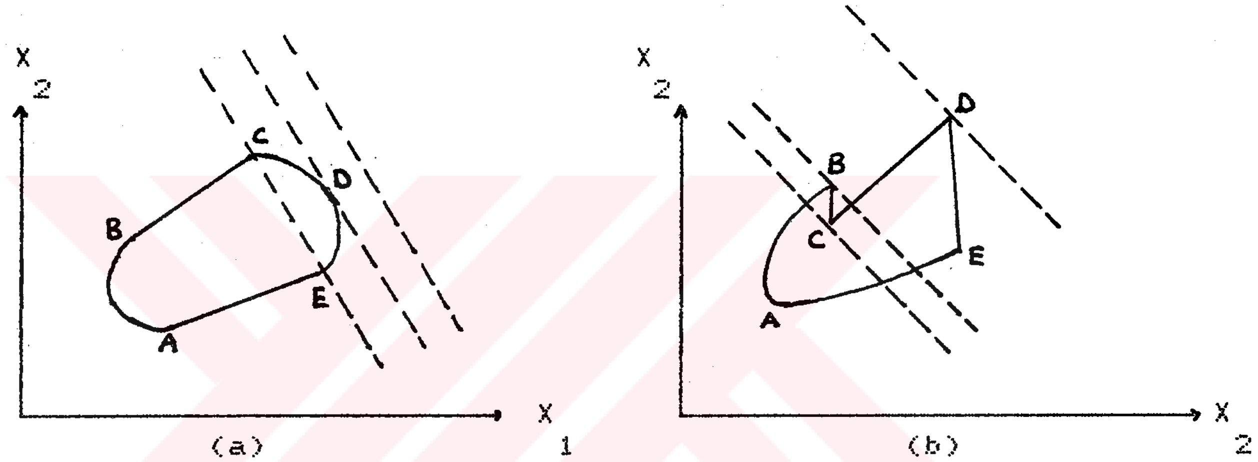
b) Eğer $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bir dışbükey kümede tanımlı içbükey bir fonksiyon ve X_0, $f(X)$'in yerel enbüyük noktası ise, $f(X)$, X_0'da bütünsel enbüyük değerini alır.

Bir çözüm alanı dışbükey değil ise yerel optimuma karşı bütüncül optimumu elde etmek başlıca sorun olarak karşımıza çıkar. Şekil 5.a. doğrusal bir amaç fonksiyonu ile dışbükey bir kümeyi ele almaktadır. Eğer bu bir maksimizasyon problemi ise optimal çözüm doğrusal amaç fonksiyonunun CE sınırlamasına teğet olduğu D noktasındadır. Bu bir bütüncül çözümdür, çünkü bu noktadan yapılacak haraketin ölçüsü ne olursa olsun amaç fonksiyonunun değeri daha büyük olamaz. Şekil 5.b'de bunun tersi olarak çözüm kümesi dışbükey değildir. B noktasında bir optimum çözüm vardır çünkü A veya C noktasına doğru haraket ettiğimizde amaç fonksiyonunun değeri düşer. Ancak D noktasında başka bir optimum sözkonusu olup bu noktada amaç fonksiyonunun değeri B'den büyüktür. Amaç fonksiyonunun daha büyük değerde olduğu bir başka çözüm olmadığı için D'deki çözüm bütüncül optimum olarak anılır. B'deki çözüm ise

1. İmdat Kara, a.g.e.s.7-12.

yerel optimum olarak adlandırılır.

Dışbükey bir çözüm alanı olmayan doğrusal olmayan programlama problemlerinin çoğu sadece yerel optimum verirler. Bununla beraber ilk çözüm için başlangıç noktasını değiştirerek başka yerel optimumlar elde etmek mümkündür. Amaç fonksiyonunun en büyük değeri aldığı yerel optimum bütüncül optimum olur. Mutlaka böyle

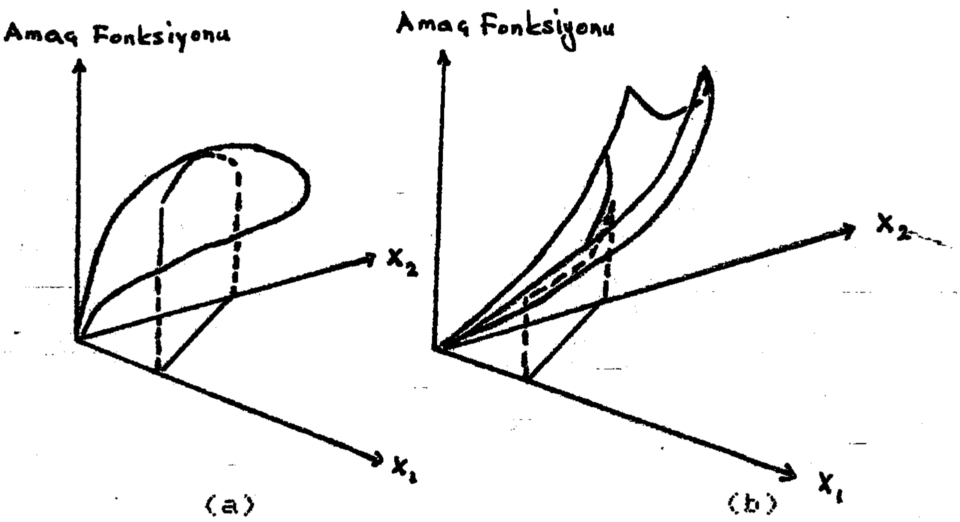


Şekil:5.

olması gerekmez ama bu gibi çözümlere uygulamada sıkça karşılaşılır.

Simpleks yöntemi gibi "miyopic" hesaplama yöntemleri optimumu ararken birbirine bitişik noktaları araştırdığından dışbükey olmayan kümeler için bütüncül optimumun araştırılmasında uygun değildirler.

Doğrusal olmayan amaç fonksiyonu bazı koşulları sağlamazsa aşağıda sözünü edeceğimiz benzer problemler yine vardır. Uygun çözüm alanı dışbükey olduğunda bütüncül optimum; amaç fonksiyonu içbükey ise proble maksimize ederek elde edilir. Amaç fonksiyonu dışbükey ise bütücül optimum problem minimize edilerek sağlanır. Doğrusal olmayan içbükey amaç fonksiyonunu tek bir doğrusal kısıtlayıcı ile Şekil 6.a'da gösterilmektedir. Şekil 6.b'de ise yine tek bir doğrusal kısıtlayıcısı olan doğrusal olmayan dışbükey bir amaç fonksiyonu gösterilmektedir. Dışbükey fonksiyon artan, içbükey fonksiyon ise azalan marjinal değerleri sergiler. İçbükey fonksiyon tepe şeklinde olduğu için başlangıç noktası ne olursa olsun bütün yollar tepenin zirvesine gider. Bu yüzden dışbükey kısıtlayıcılar nedeniyle amaç fonksiyonu için bir öncekinden daha büyük değer bulan her izleyen hesaplama planı bütüncül optimal çözüme götürür. Dışbükey amaç fonksiyonu için dışbükey kısıtlayıcılara bağlı olarak birbirini takip eden her aşama daha düşük bir değer verir ki sonunda fonksiyonu minimize eden bütüncül optimuma ulaşılır.



Şekil:6.

I.2.5. Lagrange Çarpanı Modeli ve Kuhn-Tucker Koşullarının Belirlenmesi

Karmaşık doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde klasik hesaplama yöntemi geçerliliğini yitirmektedir. Lagrange fonksiyonunun eşitsizlikleri de içerecek biçimde genişletilmesi Kuhn-Tucker koşullarının tanımlanması ile mümkün olabilmiştir. Klasik hesaplama yöntemini bir kenara bırakıp bildiğimiz simpleks yönteminin kullanılabilmesinde Kuhn-Tucker koşulları bir baz oluşturur(1).Kuhn-Tucker kuramının önemli bir yanı da geçerli kuramlar olarak ele alınabilmeleridir. Bu kuramlar geçerli oldukları problem grubu için, problemin ancak bu koşulları sağlaması durumunda bir çözüme ulaşılabileceğini söylyebiliriz. Kuhn-Tucker koşullarının Lagrange çarpanına uygulanmasını şu şekilde açıklayabiliriz:

Eğer $\emptyset(X, \lambda)$'yı lagrange ifadesine eşitlersek

$$\emptyset(X, \lambda)=L(X, \lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x)-b_i) \text{ olur.}$$

$f(x)$, $g_1(x)$,......, $g_m(x)$ fonksiyonlarının türevleri alınabilir olduğunu varsadığımızda semer noktası (saddle points) için yeterli koşullar Kuhn-Tucker koşullarına çevrilebilir.

$X^O=(x_1^O, \ldots\ldots, x_m^O)$ vektörü problemin bir çözümüdür. Bu çözüm $\lambda^O=(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m)$ vektörü olduğunda, aşağıda sıralanan koşullar altında gerçekleşir.

1.H.W.Kuhn and A.W.Tucker,"Nonlinear Programing",J.Neyman(Ed.) Proceedings of the Second Berkeley Symposiyum on Matematical Statistics,University of California Press,Berkeley,California, 1951,ss.481-492.

1.Eğer $x_j^0 = 0$, $df(x)/dx_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, dg_i(x)/dx_j \le 0 \quad x_j = x_j^0$, $j=1,\ldots,n$

2.Eğer $x_j^0 > 0$, $df(x)/dx_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, dg_i(x)/dx_j = 0$

3.Eğer $\lambda_i = 0$, $g_i(x_0) - b_i \le 0$, $i=1,\ldots\ldots,m$

4.Eğer $\lambda_i > 0$, $g_i(x_0) - b_i \le 0$, $i=1,\ldots\ldots,m$

ve

5. $x_i^0 \ge 0$, $\lambda_i \ge 0$

İçbükey-dışbükey koşulları sağlandığında yukarıda sıraladığımız beş koşul hem gerekli hem de yeterlidir. Ayrıca çözüm global optimumdur.

Kuhn-Tucker koşulları doğrusal olmayan programlama problelerinin çöümünde doğrudan doğruya yararlı olmamaktadır. Bu koşullar doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümü için seçenekli hesaplama yöntemlerinin geliştirilmesinde katkı sağlar.

Çalışmamızın ana konusunu oluşturan quadratik programlama modelinin çözümünde, Kuhn-Tucker koşulları kullanılarak bütüncül optimum nokta belirlenir. Ayrıca belirtmeliyiz ki simpleks yöntemini uygulanabilir kılan da yine Kuhn-Tucker koşulları olmaktadır.

Doğrusal olmayan programlama probleminde optimal çözümün her zaman en büyük veya en küçük olması mümkün olmayabilir. Bazı durumlarda problem bizi semer noktası dediğimiz bir noktaya götürebilir.

Bir fonksiyon $\emptyset(x_1,\ldots,x_n,\ \lambda_1,\ldots,\ \lambda_m)$, da eğer $\emptyset(X, \lambda_0) \leq \emptyset(X_0, \lambda_0) \leq \emptyset(X_0, \lambda)$ ise (X_0, λ_0) noktasında semer noktası vardır. Eğer bu eşitsizlik bütün X ve λ'lar için geçerli ise (X_0, λ_0)'da bütüncül semer noktası vardır. Aksi taktirde bu yerel bir semer noktasıdır. Burada semer noktasının Von Neumann'ın "iki kişi - sıfır toplam" oyunu içinde bir çözümü olduğunu da belirtmkte yarar vardır.

Şimdi semer noktası için gerekli ve yeterli koşulları belirleyelim:

$$\hat{\emptyset}_x = d\emptyset/dx_j \quad j=1,\ldots,n \qquad \hat{\emptyset}_\lambda = d\emptyset/d\lambda_i \quad i=1,\ldots,m$$

Burada $\emptyset(X, \lambda)$ fonksiyonu $X_j \geq 0$ ve $\lambda_i \geq 0$ için bir diferansiyel fonksiyon olmak üzere, yukarıda alınan kısmi türevleri (X_0, λ_0) noktasında değerlendirildiğini düşünelim $\hat{\emptyset}_x$ ve $\hat{\emptyset}_\lambda$ gradiant vektörlerdir(1).Çünkü $\hat{\emptyset}_x$, $\emptyset(X, \lambda)$'nın X'e göre (X_0, λ_0) değeri için gradientı, $\hat{\emptyset}_\lambda$ ise $\emptyset(X, \lambda)$'nın λ'ya göre (X_0, λ_0) değeri için gradientidir.

Bunun için gerekli koşullar şunlardır:

1. $\hat{\emptyset}_x \leq 0, \quad \hat{\emptyset}_x X_0 = 0, \quad X_0 \geq 0$

2. $\hat{\emptyset}_\lambda \geq 0, \quad \hat{\emptyset}_\lambda \lambda_0 = 0, \quad \lambda_0 \geq 0$

ve yeterli koşullar,

3. $\emptyset(X, \lambda_0) \leq \emptyset(X_0, \lambda) + \hat{\emptyset}_x (X - X_0)$
4. $\emptyset(X, \lambda_0) \geq \emptyset(X_0, \lambda) + \hat{\emptyset}_x (\lambda - \lambda_0)$ dır.

---

1. Uzayın belirli bölgesinde her noktada (x,y,z) değişkenleri ile $\emptyset(x,y,z)$ fonksiyonu belirlensin. $\nabla\emptyset$ veya gradient $\emptyset$ olarak yazılır, $\emptyset$'in gradienti $\nabla\emptyset = i d\emptyset/dx + j d\emptyset/dy + k d\emptyset/dz$.

Eğer $\emptyset(X, \lambda_0)$ X'in içbükey fonksiyonu ve $\emptyset(X_0, \lambda)$ λ'nın bir dışbküey fonksiyonu ise 3 ve 4 nolu koşullar her zaman sağlanır. Buradan şunu çıkarabiliriz eğer içbükeylik-dışbükeylik koşulları sağlanırsa $\emptyset(X, \lambda)$'da, 1 ve 2 nolu koşulların her ikisi de gerekli ve yeterlidir.

I.2.6. Doğrusal Olmayan Programlama Modelinin Uygulama Güçlükleri

Genel olarak doğrusal olmayan programlama modellerinin, hem oluşturulmasında hem de çözümünde doğrusal programlamaya kıyasla güçlükler vardır. Bu güçlükleri şu ana noktalarda toplayabiliriz:

1) Doğrusal olmayan programlama modelinin oluşturulması aşamasında, amaç fonksiyonuna ait parametrelerin belirlenmesinde doğrusal programlamaya göre daha fazla çaba gösterilmesi gerekir. Çünkü doğrusal olmayan amaç fonksiyonlu modellerde, parametreler fonksiyonel özellik gösterirler ve bu fonksiyonel yapılar araştırmacı tarafından belirlenmesi gerekir.

2) Doğrusal olmayan kısıtlayıcı koşulların varlığı halinde, modeli kurma güçlüğü.

3) Doğrusal olmayan programlama modellerinin veri gereksiniminin çok fazla olması. Bunun nedeni, parametrelerin tahmin edilebilmesi için gerekli olan zaman veya yatay kesit verilerinin olmasıdır.

4) Doğrusal olmayan programlama modellerinin çözümüne geçmeden önce, cebrik dönüşümler doğrusal programlamadan daha fazla olması ve bazı çözüm teknikleri daha ileri matematik bilgisi gerektirmesi.

5) Yüksek dereceli doğrusal olmayan programlama modellerinin çözümünde, genel bir çözüm tekniğinin olmaması. Bu tür modellerin çözümü için her modelin kendine özgü özel yaklaşımlar geliştirilme zorunluluğu.

6) Mutlak optimumu (global optimum) belirlemekte güçlükler ile karşılaşılması sayılabilir.

Bu açıklamalardan da görüleceği üzere doğrusal olmayan programlama modellerinin uygulamalı çalışmalarda bir kısım güçlükler içerdiği söylenebilir. Ancak bu modellere duyulan gereksinim nedeniyle bu güçlüklerin üstesinden gelmek için araştırmacıların yoğun çabalarının olduğunu belirtmek isteriz.

I.3. QUADRATIK PROGRAMLAMA MODELİ

I.3.1. Modelin Matematik Yapısı

Quadratik programlama modeli aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\text{Max(Min) } Z = cX+X'DX$$

$$\left.\begin{array}{l} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{array}\right\} \text{ kısıtlarına bağlı olarak.}$$

Açık bir şekilde tanımlanırsa:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\dots+a_{1n}x_n \geq \text{veya} \leq b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\dots+a_{2n}x_n \geq \text{veya} \leq b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\dots\dots+a_{kn}x_n \geq \text{veya} \leq b_k$$

$$Z=d_{11}x_1^2+d_{12}x_1x_2+d_{21}x_2x_1+d_{22}x_2^2+\dots+X_nX_n$$

Doğrusal ve Quadratik programlama problemleri arasındaki tek fark, X'DX ifadesinin amaç fonksiyonuna eklenmesidir ki X'DX ifadesi kesinlikle quadratik olan kriterdir. Genel olarak D matrisi simetrik bir matris olarak düşünülür. Literatürde amaç fonksiyonu sıkça cX+1/2X'DX olarak tanımlanır. Bunun nedeni aşağıdaki örnekten açıkça görülebilir.

$$\text{Max} \quad d_{11}x_1^2+d_{12}x_1x_2+d_{21}x_2x_1+d_{22}x_2^2$$

X'DX formunda

$$[x_1, x_2]\begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$x_i x_j = x_j x_i$ olduğu için $d_{12}x_1x_2+d_{21}x_2x_1$ ifadesi $c=d_{12}+d_{21}$ alınırsa cx_1x_2 şeklinde yazılabilir. Simetrik biçimde ifade düzenlendiğinde yukardaki ifade 1/2X'DX aşağıdaki gibi gösterilir.

$$1/2[x_1, x_2]\begin{bmatrix} 2d_{11} & c \\ c & 2d_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$=1/2(2d_{11}x_1^2+2cx_1x_2+2d_{22}x_2^2)$$

$$=4x_1^2+6x_1x_2+x_2^2$$

Bu ifade yukarıda tanımlanan amaç fonksiyonuna eşittir.

Amaç fonksiyonunun artarken içbükey ve azalırken dışbükey olan durumu için çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Şimdi geliştirilen bu yöntemleri açıklamaya çalışalım.

I.3.2. Modelin Çözüm Yöntemleri

Bu kısımda Quadratik programlama modelinin çözümünde kullanılan klasik hesaplama yöntemi ile simpleks yöntemini açıklamaya çalışalım.

I.3.2.1. Klasik Hesaplama Yöntemi

Akademik eğitimleri sırasında cebir öğrenenler için şu soru ortaya çıkar: Doğrusal olmayan problemlerin çözümünde klasik optimizasyon yöntemleri niçin kullanılmaz?Gerçekte doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde bazı cebirsel yöntemlerin kullanıldığı doğrudur. Ancak kullanılan bu yöntemler genellikle daha verimli bir işlevin alt grubunu oluşturmaktadırlar.

Klasik optimizasyon teorisi yeni tekniklerin gerçekleşmesi için bir hareket noktası ve çeşitli doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözüm işlevleri için bir baz olmaktadır. İçerdiği hesaplama zorlukları ile birlikte klasik cebirsel yöntemin bu tür problemlerin çözümünde kullanışını kısaca açıklamaya çalışalım.

1) Amaç fonksiyonunun bütün durağan noktalarının belirlenmesi. Önce $f(x_1,\ldots\ldots,x_n)$ fonksiyonunun her bir bilinmeyen x_j için kısmi türevleri alınır ve her bir türev sıfıra eşitlenerek çözülür ve eşitlikleri sağlayan durağan noktalar bulunur. Yani ;

$$\partial f(x_1,\ldots\ldots,x_n)/\partial x_j=0 \qquad j=1,\ldots\ldots,n$$

Fonksiyonun, gerçek değerli bir diferansiyel fonksiyon olması gerekir. Ayrıca yüksek dereceli doğrusal olmayan fonksiyonun türevleri alınırken zorluklarla karşılaşılabilir.

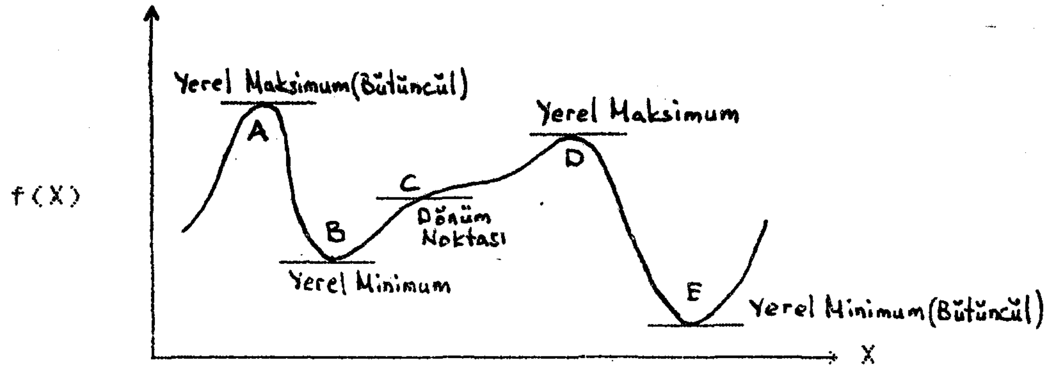
2) Çözüm elde edildikten sonra izleyen aşama, bulunan durağan noktaların yerel maksimum, yerel minimum, dönüm noktası veya "saddle point" (ikiden fazla değişken için) mi olduğunun belirlenmesidir. Tek değişkenli bir fonksiyon için olası sonuçlar Şekil 7.'de gösterilmiştir.

A ve D noktaları, komşularına göre ikisi de yerel maksimum olmalarına karşın A noktası, f(x) fonksiyonunda x değişkeninin bütün değerleri için en yüksek değeri verdiğinden dolayı bütüncül maksimum noktası olarak alınır. Aynı şekilde B ve E yerel minimum, ancak E yine bütüncül minimum noktadır. Fonksiyonun her çözüm noktası için maksimum, minimum ya da tek değişken için dönüm noktası, iki ya da daha fazla değişken içi ise semer noktası belirlenir.

Yerel maksimum veya minimum noktalarını belirlemede dışbükeylik-içbükeylik durumunun araştırılması gerektiğini daha önce belirtmiştik. Bu amaç doğrultusunda Hessian matrisi oluşturulur. n değişkenli fonksiyonda ikinci dereceden kısmi türevler bulunarak oluşturulan Hessian matrisinin asal minörlerinden yararlanılarak fonksiyonun dışbükeylik içbükeylik durumu belirlenir(1). Hessian matrisi şu şekilde tanımlanır:

---

1. İsmail İlhan, Uludağ Üniversitesi İktisadi İdari Bilimler Drgisi "Ekonomide Matematik Eniyleme", Kasım-1986, Cilt 9. s.192.



Şekil:7.

$$d = \begin{vmatrix} d^2f/dx_1^2 & d^2f/dx_1dx_2 \ldots\ldots & d^2f/dx_1dx_n \\ d^2f/dx_2dx_1 & d^2f/dx_2^2 \ldots\ldots & d^2f/dx_2dx_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d^2f/dx_nx_1 & d^2f/dx_ndx_2 \ldots\ldots\ldots & d^2f/dx_n^2 \end{vmatrix}$$

ve asal minörleri,

$$d_1 = d^2f/dx_1^2 \ ,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} d^2f/dx_1^2 & d^2f/dx_1dx_2 \\ d^2f/dx_2dx_1 & d^2f/dx_2^2 \end{vmatrix} ,$$

d_3 ,......,d_n .

Durağan bir nokta $(x_1, \ldots\ldots x_n)$ eğer $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, .. ise içbükey bir fonksiyondur, eğer $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0$,.... ise (konveks) dışbükey bir fonksiyondur.

Bir $X = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ noktasının yerel maksimum noktası olabilmesi için fonksiyonun bu noktada içbükey ve bütün ilk kısmi türevlerinin sıfır olması yeterli koşuldur. Benzer şekilde bir nokta eğer ilk kısmi türevlerinin tümü sıfıra eşit ve fonksiyon bu nokta yakınında dışbükey ise yerel minimumdur.

3) Bütün yerel maksimumlar veya minimumlar elde edildikten sonra bütün kıstlayıcıların sağlanması koşuluyla bütüncül maksimum veya minimum bir anlamda bütüncül optimum olarak çözüm elde edilmiş olur.

4) Kısıtlandırılmış bir problemde bu optimum çözüm uygun çözüm, alanının dışında olabilir.

Bütüncül maksimum ve minimum şu şekilde belirlenir:

Önce uygun çözüm alanı içinde yer alan bütün yerel (göreli) çözümler bulunur. Sonra $f(x_1,.....,x_n)$ fonksiyonunun her kıstlayıcısı için maksimum veya minimum değerini belirlenir. Özellikle çok sayıda kısıtlayıcı ve değişken varsa,böyle bir işlem problemi çok karmaşık hale getirebilir. Örneğin, uygun çözüm alanı pozitif alanla sınırlı olduğunu varsayalım. Bütüncül maksimum veya minimumun bu uygun çözüm bölgesinin sınırı üzerinde yer alması en az bir $x_j=0$ olduğunda mümkündür. (n-1) değişkenli n tane f_j fonksiyonu tanımladığımızda yani $F_j=(x_1,....,x_j=0,.....,x_n)$. Daha sonra her bir F_j için kısmi türevlerin i=j ve $dF_j/dX_j=0$ olmak üzere her değerin bir çözümü bulunur. Aynı işlem (n-2) değişkenin sıfıra eşitlenmesi,(n-3) değişkenin sıfıra eşitlenmesi ve nihayet bütün değişkenlerin sıfıra eşitlenmesine kadar devam eder. Problemin boyutuna baktığımızda; sıfıra eşitlenen tek bir değişken varken F_j için n adet fonksiyon olur. Sıfıra eşitlenen üç değişken olması durumunda fonksiyon sayısı bileşik olarak artar ve sonuçta [(n) (n-1) (n-2)]/6 sayıda fonksiyona ulaşılır. Bunu şu şekilde ifade edebiliriz, F_{ijk} , $x_i = x_j = x_k = 0$ olur.

Yukardaki tartışmadan da açıkça görüleceği gibi,doğrusal olmayan programlama probleminin klasik hesaplama yöntemi ile çözümü gerçekten üstesinden gelinmesi kolay bir iş değildir. Bunun yerine daha çok simpleks yöntem kullanılır. Şimdi bu yöntemi açıklamaya çalışalım.

I.3.2.2. Simpleks Yöntemi

Klasik hesaplama yöntemi ile quadratik programlama modelinin çözüm güçlükleri bizi simpleks yöntemini kullanmaya zorlamaktadır. Problemlerin çözümümde simleks yönteminin getirdiği üstünlükler gözardı edilemez. Günümüzde özellikle, sözkonusu yöntemle ilgili bilgisayar paket programlarının geliştirilmesi problemlerin çözümünü kolaylaştırmıştır.

Simpleks yönteminin quadratik programlama modeline uygulanması, doğrusal programlama modellerine uygulanmasından çok farklı değildir(1).İzlenen yöntem, temelde Kuhn-Tucker koşullarına dayanan modeli doğrusallastırmak ve sonra da simpleks yöntemini uygulamaktır.

Quadratik programlama modelinin simpleks çözümü için izlenen yöntem şöyle açıklanabilir:

1) Quadratik programlama modelinin Lagrange yapısında yazılımı,

2) Ek kısıtlayıcı koşullarının oluşturulması. Bu aşamada Lagrange fonksiyonunun karar değişkenlerine ve Lagrange çarpanlarına göre kısmi türevleri bulunur.Bulunan kısmi türevlerden karar değişkenlerine ilişkin olanlar ≤ 0 , Lagrange çarpanlarına ilişkin olanlar ≥ 0 şeklinde birer kısıtlayıcı denklem olarak modele eklenir.

1.Doğrusal Programlama Sipleks yöntemi için;
Özer Serper-Necmi Gürsakal, Doğrusal Programlama,BİTİA İşletme Fakültesi Yayını No:15, Bursa,1982.

3) Bu aşamada modelin asıl kısıtlayıcıları ve yeni bulduğumuz kısıtlayıcılar doğrusal programlama simpleks yönteminde olduğu gibi eşitlik haline getirilir. Bu işlem aylak, artık ve yapay değişkenler yardımıyla gerçekleştirilir. Çözümde basitliği sağlamak amacıyla tüm kısıtlayıcıları küçük eşit olarak düzenledikten sonra eşitlik haline dönüştürmekte yarar vardır.

4) Eşitlik haline dönüştürülen kısıtlayıcılar başlangıç simpleks tablosuna yazılır. Başlangıç simpleks tablosunun düzenlenmesinde dikkat edilecek bir konu C_j satırının yazılmasıdır. Doğrusal programlama simpleks yönteminden farklı olarak amaç katsayılarına ilişkin bu satır yapay değişkenlerin dışındaki tüm değişkenler için sıfır değeri yeralır.

5) Başlangıç simpleks tablosu bu şekilde düzenlendikten sonra doğrusal programlama simpleks yöntemi için izlenen işlemlerin aynısı uygulanır.

6) Elde edilen çözüm Kuhn-Tucker koşullarına göre bütüncül çözüm olup olmadığı araştırılır.

Quadratik programlama modeline simpleks yönteminin değişik uygulama yordamları vardır. Özellikle bu konuda başvurulabilecek Bela Martos'un Doğrusal Olmayan Programlama kitabıdır(1).B.Martos, eserinde Wolfe yöntemini tanıtarak matrislerle quadratik programlama modeline simpleks yönteminin nasıl uygulanabileceğini ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Wolfe yönteminin temelde izlediği yöntem yine quadratik modeli doğrusallaştırmaya yönelik bir iş-

---

1.Bela Martos, Nonlinear Programing Theory And Methods, North-Holland Publishing Company, Amsterdam,1975.

lemdir. Problemin çözümüne her iki yöntemle de ulaşabiliriz. Quadratik programlamaya simpleks yönteminin benzer başka uygulama yaklaşımları da vardır(1).Çalışmamızda uygulanabilirliği yönünden yukarıda ele aldığımız simpleks yönteminin uygulanmasına ilişkin süreç kullanılacaktır.

Çalışmamızda buraya kadar doğrusal olmayan paogramlama modelini ve quadratik programlama modelinin kuramsal esaslarını açıklamaya çalıştık. Şimdi asıl konumuz olan quadratik programlama modelinin üretim planlaması için Bursa'daki süt ürünleri üreten Sütaş fabrikasında uygulamaya çalışalım.

---

1. Robert J.Thıerauf Robert C.Klekamp, Descision Making Through Operations Research, John Wily Sons Inc., New York, 1975, s.397.

II. QUADRATIK PROGRAMLAMA MODELININ SÜTAŞ FABRIKASINA UYGULANMASI

II.1. IŞLETMEYI TANITICI BILGILER

Sütaş fabrikası, Uluabat Köyü yakınında kurulu süt ve süt ürünleri üreten bir fabrikadır. Fabrika Bursa ve çevresinden topladığı sütleri işleyerek ekonomiye önemli katkılar sağlamaktadır. Fabrikanın süt işlemeciliğinin, küçük mandıralarda ilkel yöntemlerle işlenmesinden kurtarılıp, modern ve sağlıklı sanayi işletmeciliğine geçilmesi açısından önemli işlevi olmaktadır. Küçük mandralarda işlenen sütün, sağlıksız işlenme koşullarının yanında, sütün besin değerinde de önemli kayıplar meydana gelmektedir.

Bursa'da süt ve süt ürünleri üreten üç büyük fabrikanın (Sütaş, Sayas, Eker) yanında çok sayıda süthane ve mandıra bulunmaktadır.Mandıralar birer sanayi kuruluşu gibi işletilmedikleri için, daha düşük maliyetler ile sütü işleyip pazara sunabilmektedirler. Küçük ölçekli bu işletmelerin pazara girişi önemli yatırımlar yapmış büyük fabrikaları zor durumda bırakmaktadır. Sokak sütçüsünden sütünü almaya alışmış olan halkımızın alışkanlığı da küçük süthane ve mandıraların yaşamlarını sürdürebilmesinde başlıca etkendir.

Bursa'da ki hayvancılığın ve süt potansiyelinin gelişmesi için yukarıda isimlerini saydığımız üç büyük fabrikanın önemli katkısı vardır. Bursa'da süt ürünleri piyasasının rekabetçi bir yapısı bulunmaktadır. Bu rekabetçi yapı hammaddeden başlayıp mamul pazarına kadar sürmektedir. Firmaların ucuz süt bulabilmek için Bursa dışındaki hammadde kaynaklarına yöneldikleri de görülür. Ayrıca firmalar pazarlama organizasyonlarını geliştirerek İzmir, İstanbul ve diğer şehirlerde de pazar arayışı içindedirler. Bugün için hem ele aldığımız Sütaş fabrikasının hem de diğer fabrikaların en önemli sorunlarından biri talep yetersizliğidir. Piyasaya çok sayıda firmanın girişi, firmaların kapasite kullanım oranlarını düşürmüştür.

Sütaş firması bir anonim şirket hüviyetinde Ziraat Bankası ortaklı bir firmadır. Firma pastörize süt, ayran, yoğurt, beyaz peynir, kaşar, tereyağ olmak üzere altı ana mamul üretmektedir. Bu mamullerin farklı kalitelere göre alt mamül grupları vardır. Örneğin beyaz peynir koyun beyaz peyniri, tam yağlı beyaz peynir, yarım yağlı beyaz peynir, tuzsuz beyaz peynir olarak üretilmektedir. Çalışmamızda bu tür farklılıklar gözardı edilecek ürünler ana gruplar halinde ele alınacaktır.

Sütaş firmasının çeşitli sorunları vardır. Bu sorunlardan bir kısmı sektörün yapısından kaynaklandığı gibi,bir kısmı da firmanın kendi iç bünyesinden gelmektedir. Sektörün yapısından gelen sorunlar bize göre firmanın üretim özelliği yönünden tam rekabet piyasasına yakın bir piyasada faaliyet göstermesidir. Firmanın yapısından gelen sorunlar ise; kurulus yerinin yanlış seçimi, kalifiye elaman sorunu, yetersiz işletme sermayesidir. Özellikle son yıllarda yüksek kredi faiz oranları bir çok firmayı zorluklara sürüklediği gibi Sütaş'ı da zor durumda bırakmıştır. Firmanın kurulduğu yer hammaddeye yakın, pazara uzak seçilmiştir. Ayrıca işletmenin maliyet yapısı incelendğinde pazarlama maliyetlerinin hammadde sağlama maliyetlerini kat kat aştığı görülmektedir. Kalifiye eleman yetersizliği ise hem üretim açısından hem de yönetsel açıdan önemli diğer bir sorundur.

Çalışmamızın amacı firmanın karını maksimum kılan bir üretim planını hazırlamak olduğundan yukarıda sadece işletmeyi tanıtmak için değinilen sorunların nasıl çözümlenmesi gerektiği konusu ele alınmayacaktır.

İşletmenin üretim süreci şu aşamalardan oluşmaktadır:

1) Toplanan sütlerin pastörize edilmesi,

2) Pastörize edilen sütün günlük üretim miktarlarına göre üretim bölümlerine dağılımı,

3) İlgili üretim bölümünde sütün ek işlemlerden geçirilerek satışa hazır ürün haline getirilmesi,

4) Paketleme ve pazarlara gönderme.

II.2. MODEL İÇİN VERİLERİN ELDE EDİLMESİ

Bu çalışmamızı gerçekleştirirken karşılaştığımız en önemli problemlerden biri yeterli ve sağlıklı verileri bulamamak olmuştur. Ne yazık ki ülkemizde sadece firma düzeyinde değil ülke ekonomisi genelinde de veri bulma güçlükleri vardır. Başarılı bir yönetimin temelinde sağlıklı istatistik verilere çalışmalarında yer vermesi yatar.

Çalışmamız için gerekli verilerin elde edilmesinde önemli ölçüde firmanın muhasebe kayıtlarından, aylık üretim raporlarından, ve yönetimin özel hazırlatığı diğer istatistiki çalışmalardan yararlanılmıştır.Model için ek verileri ise özel olarak yaptığımız çalışmalarla elde edilmiştir.

II.2.1. Maliyet Fonksiyonlarının Tahmin Edilmesi

Temel amacımız en çok karı sağlayacak, üretim bileşiminin bulunmasıdır. Buna göre amaç fonksiyonumuzun katsayıları her ürün için birim başına kardan oluşmaktadır. Bu durumda quadratik programlama modelinin amaç katsayıları iki bileşeni içermektedir; fiyat bileşeni ve maliyet bileşeni. Fiyat, piyasa koşulları nedeniyle veri olarak alınmaktadır. Maliyet ise çeşitli üretim düzeylerinde farklı değerler aldığından her ürünün maliyet fonksiyonu elde edilmeye çalışılacaktır.

Firmanın üretiği altı ana ürün modelimizin karar değişkenleri olacaktır.

X_1 : Pastörize süt üretimi
X_2 : Ayran üretimi
X_3 : Yoğurt üretimi
X_4 : Tereyağ üretimi
X_5 : Beyaz peynir üretimi
X_6 : Kaşar peyniri üretimi

Her ürün için amaç katsayılarımızı tanımlayalım:

$\pi_1 = P_1 - C_1$, $\pi_2 = P_2 - C_2$, $\pi_3 = P_3 - C_3$, $\pi_4 = P_4 - C_4$, $\pi_5 = P_5 - C_5$, $\pi_6 = P_6 - C_6$.

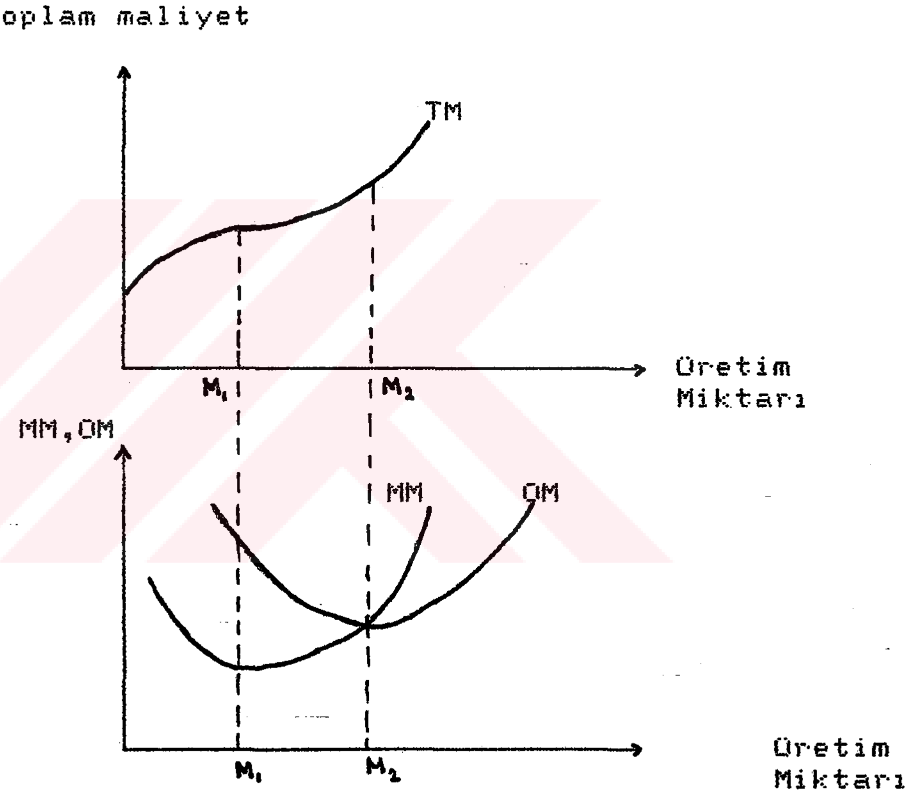
Burada $\pi_1, \ldots, \pi_6$ amaç veya kar katsayılarıdır. $P_1, \ldots, P_6$ ürünlerin piyasa fiyatları, $C_1, \ldots, C_6$ ise ürünlerin ortalama maliyet fonksiyonlarıdır.

İktisat literatüründe toplam maliyet fonksiyonu üçüncü dereceden bir fonksiyon olarak tanımlanır. Ortalama maliyet ve marjinal maliyet fonksiyonları ise ikinci dereceden fonksiyonlardır(1). Şekil 8.'de toplam, ortalama ve marjinal maliyet fonksiyonları gösterilmiştir.

Toplam maliyet fonksiyonlarını üçüncü dereceden fonksiyonlar olarak tahmin edilmesi durumunda amaç fonksiyonumuz üçüncü dereceden bir fonksiyon olacaktır. $\pi_1 X_1, \ldots, \pi_6 X_6$ çarpımları buna yol açmaktadır. Çünkü $C_1, \ldots, C_6$, ortalama maliyet fonksiyonları ikinci dereceden fonksiyonlardır ve $X_1, \ldots, X_6$ ile çarpımları amaç fonksiyonumuzun üçüncü dereceden olmasına neden olacaktır.

1.Zeynel Dinler, Mikro Ekonomik Analize Giriş, Uludağ Üniversitesi Yayınları, 2B, Bursa, 1982, s.281.

Oysa quadratik programlama modelinin amaç fonksiyonu ikinci dereceden bir fonksiyondur. Ortaya çıkan bu problemin üstesinden gelebilmek için toplam maliyet fonksiyonlarımızın anlamlı bir şekilde derecesini düşürmemiz gerekmektedir. Bunun için maliyet



Şekil:8.

fonksiyonlarının tamamını tahmin etmek yerine, firmamızın bulunduğu üretim düzeyindeki maliyetlerinin ne şekilde değiştiğine bakıp maliyet fonksiyomlarını birer yay (ikinci dereceden) veya doğru (birinci dereceden) parçalı olarak tahmin etmek yoluna gidilmesinin yararlı olduğunu düşünmekteyiz. Örneğin firmanın pastörize süt üretiminin M_1 ile M_2 üretim miktarları arasında yer aldığını düşünelim (Şekil 8.). Bu durumda pastörize süt maliyet fonksiyonumuzu ikinci dereceden bir fonksiyon veya yaklaşık olarak bir doğru parçası olarak tahmin edebiliriz. İkinci dereceden bir fonksiyon olarak mı, yoksa doğru parçası olarak mı tahmin etmek gerektiğini regresyon anlamlılık derecesi yol gösterecektir.

Maliyet fonksiyonlarının tahmin edilmesinde 1988 yılı 11 aylık verileri kullanılmıştır. $X_1,\ldots,X_6$ üretim miktarları (kg.olarak), $Y_1,\ldots,Y_6$ toplam maliyetler olmak üzere aşağıya çıkarılmıştır.

	X_1	Y_1	X_2	Y_2
OCAK	1143339	271416454	74371	33658534
ŞUBAT	976297	234280733	84245	46849201
MART	1058596	252037902	104580	44087000
NİSAN	596577	159403431	92753	54299534
MAYIS	297704	82884946	108009	74181464
HAZİRAN	52474	17380078	180327	134117401
TEMMUZ	208679	60936945	237289	178087091
AĞUSTOS	145592	42847583	218243	166646051
EYLÜL	89828	27642454	148023	116375269
EKİM	75559	27784749	186960	159103508
KASIM	146766	56900005	164324	143885362

	X_3	Y_3	X_4	Y_4
OCAK	219984	134459968	16705	57892748
ŞUBAT	243142	155347043	20576	71093851
MART	298517	187072789	18137	63777210
NİSAN	284307	189333219	16316	63534172
MAYIS	279216	194596918	19672	75589193
HAZİRAN	301024	218963574	19021	73607093
TEMMUZ	264950	198174199	10081	35313972
AĞUSTOS	258654	202884148	14274	57514620
EYLÜL	218953	178017712	14173	66333884
EKİM	186960	159103508	13231	58120753
KASIM	164324	143885362	14908	78192710

	X_5	Y_5	X_6	Y_6
OCAK	104917	130100885	63321	177943599
ŞUBAT	101027	122312070	45035	138055549
MART	93916	147550639	31993	97904577
NİSAN	85758	150305262	27904	102676381
MAYIS	113351	188825034	45816	149099774
HAZİRAN	103806	186880126	30625	114430332
TEMMUZ	74360	152207318	16184	61873717
AĞUSTOS	90803	192694854	17188	65397084
EYLÜL	110730	237761679	15262	64944067
EKİM	102167	292037676	12693	56044131
KASIM	95980	56900005	18949	96121648

Verilen bu değerlerin aralarındaki ilişkiyi kaba taslak analiz etmek açısından bilgisayarla birleşik karteziyen grafikleri çizilmiştir. Üretim miktarları ile maliyetler arasında genelde uyumlu bir ilişkinin varlığı dikkati çekmektedir. Bütün ürünler için üretim ile maliyetler arasındaki ilişkiye baktığımızda, üretim miktarı artarken maliyetler artmakta, üretim miktarı azalırken maliyetler azalmaktadır. Ancak beyaz peynir üretimi ile maliyeti arasındaki ilişkinin bu kuralı bozduğu görülmektedir. Ocak-Şubat-Mart döneminde üretim düşerken maliyet yükselmekte. Nisan-Mayıs-Haziran döneminde üretimdeki yükselmeye karşılık maliyetlerde daha az bir yükselme görülmektedir.Temmuz-Ağustos-Eylül de ise önce hızlı üretim düşüşüne maliyetler küçük bir düşüşle karşılık verirken, daha sonra üretimdeki artışa maliyetler yüksek bir artışla katılmaktadır. Ekim-Kasım arası ise Ekim'de üretim düşerken maliyetler yükselmekte, Kasım'da ki üretim azalmasına maliyetler çok hızlı bir düşüşle karşılık vermektedir. Beyaz peynirdeki bu kararsızlık maliyet yükleme sisteminde gecikmelerin olduğunu gösterir. Yani beyaz peynir maliyetleri dönemsel olarak gecikmeli bir şekilde muhasebe kayıtlarına yansıtılmaktadır. Bu nedenle beyaz peynirin maliyet fonksiyonunu tahmin etmek güçleşmiştir. Yapılan regresyon analizlerinin beyaz peynir için yeterli bulunamaması, beyaz peynir maliyetlerini fonksiyonel olarak quadratik model için kullanmaktan vazgeçmemize neden olmuştur. Beyaz peynirin maliyet fonksiyonunun yerine tek bir ortalama rakam alınmıştır. Her bir ürün için verilen üretim miktarlarına karşılık gelen maliyet değerlerinin nasıl bir saçılım gösterdiğini incelemek de çalışmamız açısından yararlı olacaktır. Elde ettiğimiz grafikler bilgisayar çıktıları olarak verilmiştir. Saçılım grafiklerinden de görüleceği gibi beyaz peynir dışındaki diğer ürünlerin saçılım grafikleri maliyetleri bir doğru veya eğri ile temsil etmeye uygundur. Ancak beyaz peynire ilişkin değerler geniş bir alana dağıldıkları için uyumlu bir şekilde fonksiyonel olarak tahmin etmek zordur.

Çeşitli regresyon analizleri yapılarak her ürün için en iyi uyumu veren model kalıpları belirlenmiştir. Bunlar:

Pastörize süt için : $Y_1 = b_{01} + b_{11} X_1 + b_{21} X_1^2$

Ayran için : $Y_2 = b_{02} + b_{12} X_2$

Yoğurt için : $Y_3 = b_{03} + b_{13} X_3^2$

Tereyağ için : $Y_4 = b_{04} + b_{14} X_4$

Kaşar için : $Y_6 = b_{06} + b_{16} X_6$

Bu model kalıplarına ilişkin bilgisayar tahmin sonuçları, bölüm sonunda yer almaktadır. Asağıda görülece üzere özet olarak ürünlerin maliyet fonksiyonları verilmeye çalışılmıştır.

$$Y_1 = 5771284.7814 + 280.3673 X_1 - 4.4121E{-}5 X_1^2$$

S.H.	(19.3341)	(1.62465E-5)
t^*	(14.501)	(-2.716)

$R^2 = 0.9982$

DW=1.0594

$$Y_2 = -20028420.4893 + 849.3182 X_2$$

S.H. (66.5561)

t^* (12.761)

$R^2 = 0.9476$

DW=0.756

$$Y_3 = 116010582.1178 + 9.89458E{-}4 X_3^2$$

S.H. (2.52018E-4)

t^* (3.926)

$R^2 = 0.6314$

DW=0.2351

$$Y_4 = 1602521.9857 + 3602.1329 X_4$$

S.H. (475.6374)

t^* (7.736)

$R^2 = 0.9089$

DW=1.2359

$$Y_6 = 30887024.8763 + 2414.7878 X_6$$

S.H. (190.1928)

t^* (12.697)

$R^2 = 0.9471$

DW=1.5248

Burada, S.H. standart hatayı, R^2 determinasyon katsayısını, DW Durbin-Watson değerini göstermektedir. Elde edilen regresyon sonuçları genel anlamlılık testlerini sağladıklarından elde edilen bu tahminleri amaç fonksiyonumuzda kullanabiliriz(1).Ancak bu fonksiyonların toplam maliyetleri gösterdiğini belirtelim. Ortalama maliyet fonksiyonlarının elde edilebilmesi için toplam maliyet fonksiyonlarının her iki tarafını üretim miktarları $X_1,\ldots,X_6$ ile bölmek gerekmektedir. Buna göre ortalama maliyet fonksiyonları:

$$C_1=280.3673+5771284.7814/X_1-4.4121E-5X_1$$

$$C_2=849.3182-20028420.4893/X_2$$

$$C_3=116010582.1178/X_3+9.89458E-4X_3$$

$$C_4=3602.1329+1602521.9857/X_4$$

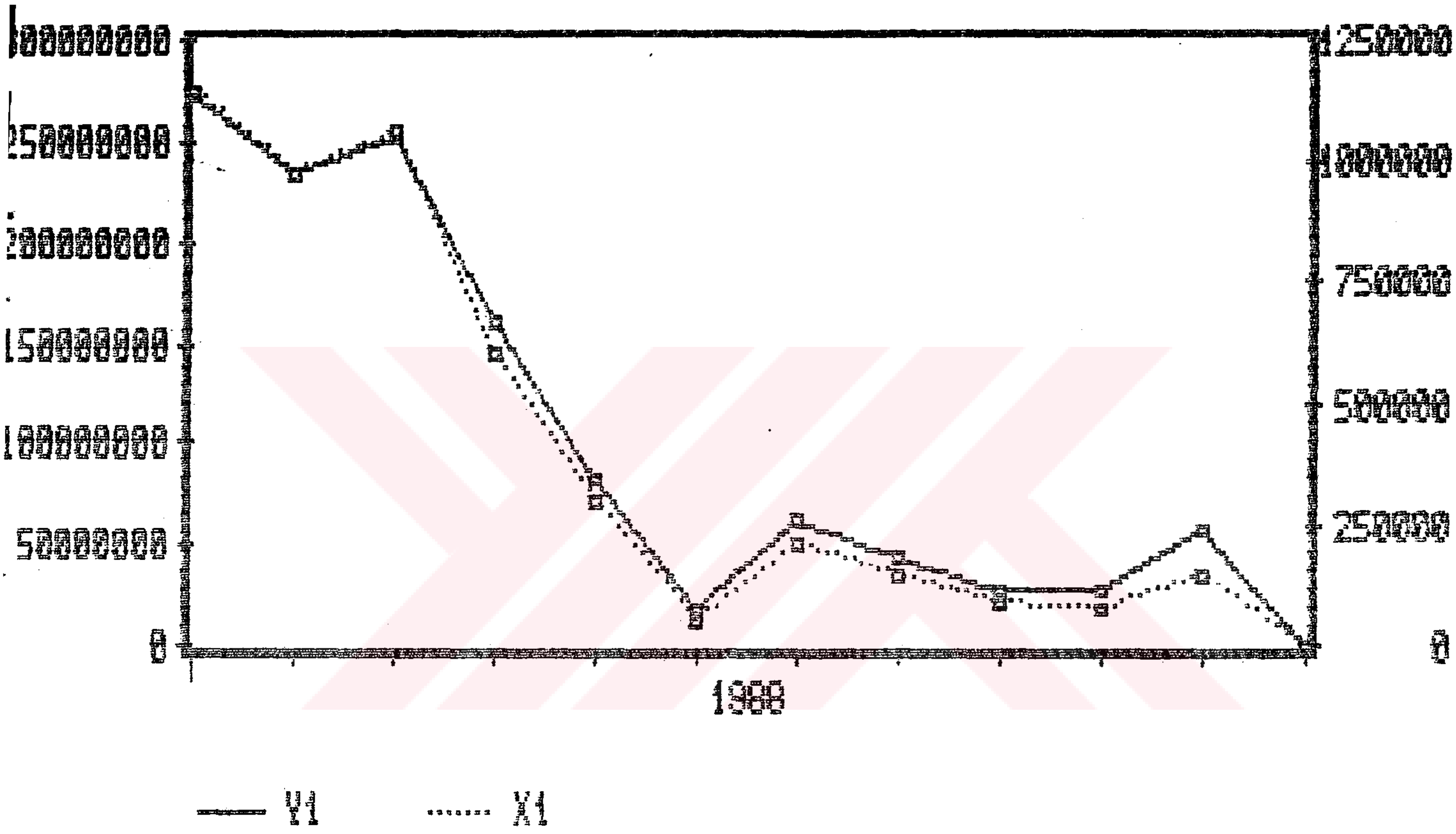
$$C_6=2414.7878+30887024.8763/X_6$$

dır.

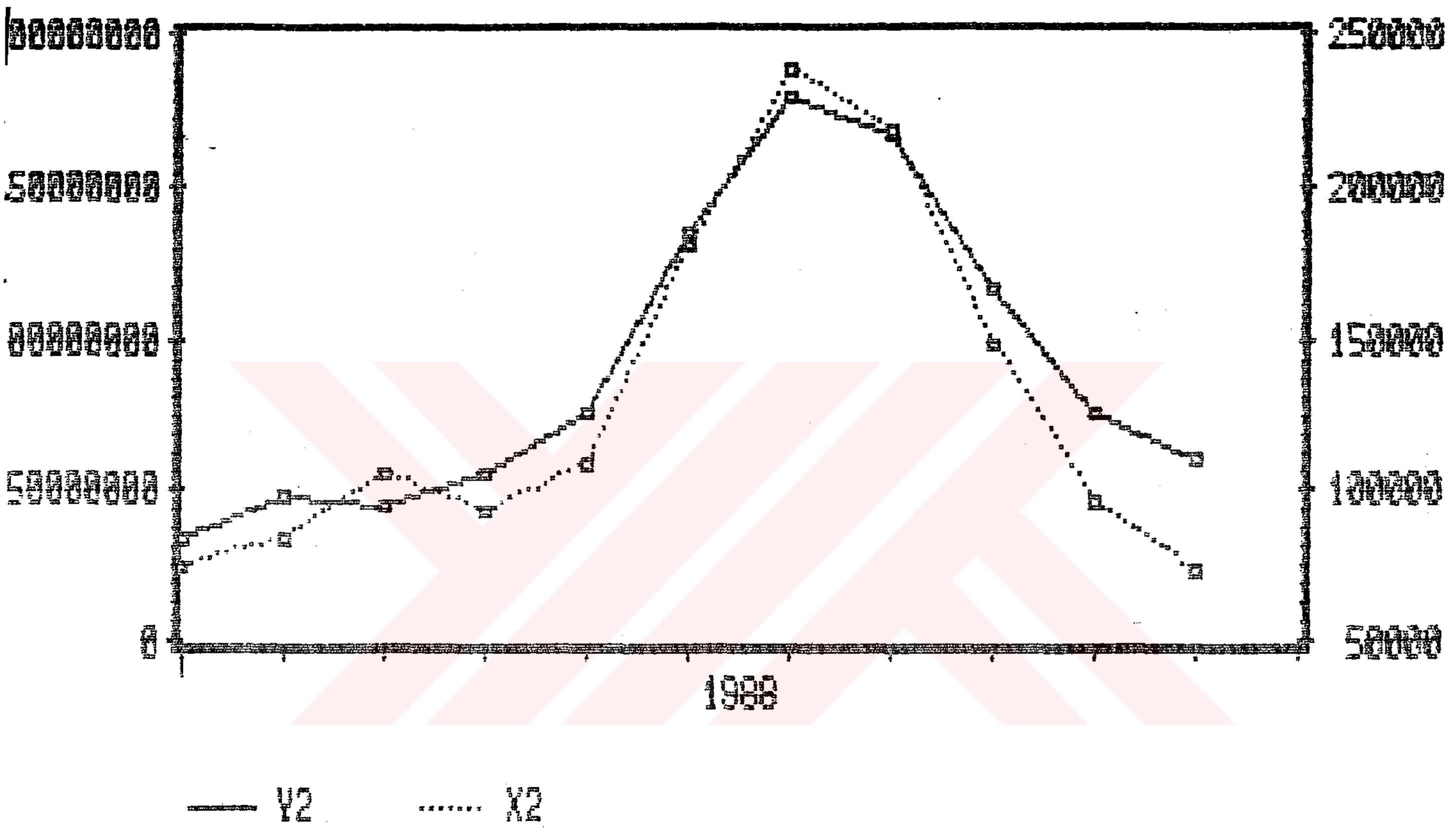
Beyaz peynir ise ortalama bir değer olarak 1988 yılı için $C_5=1446.46$ alınmıştır.

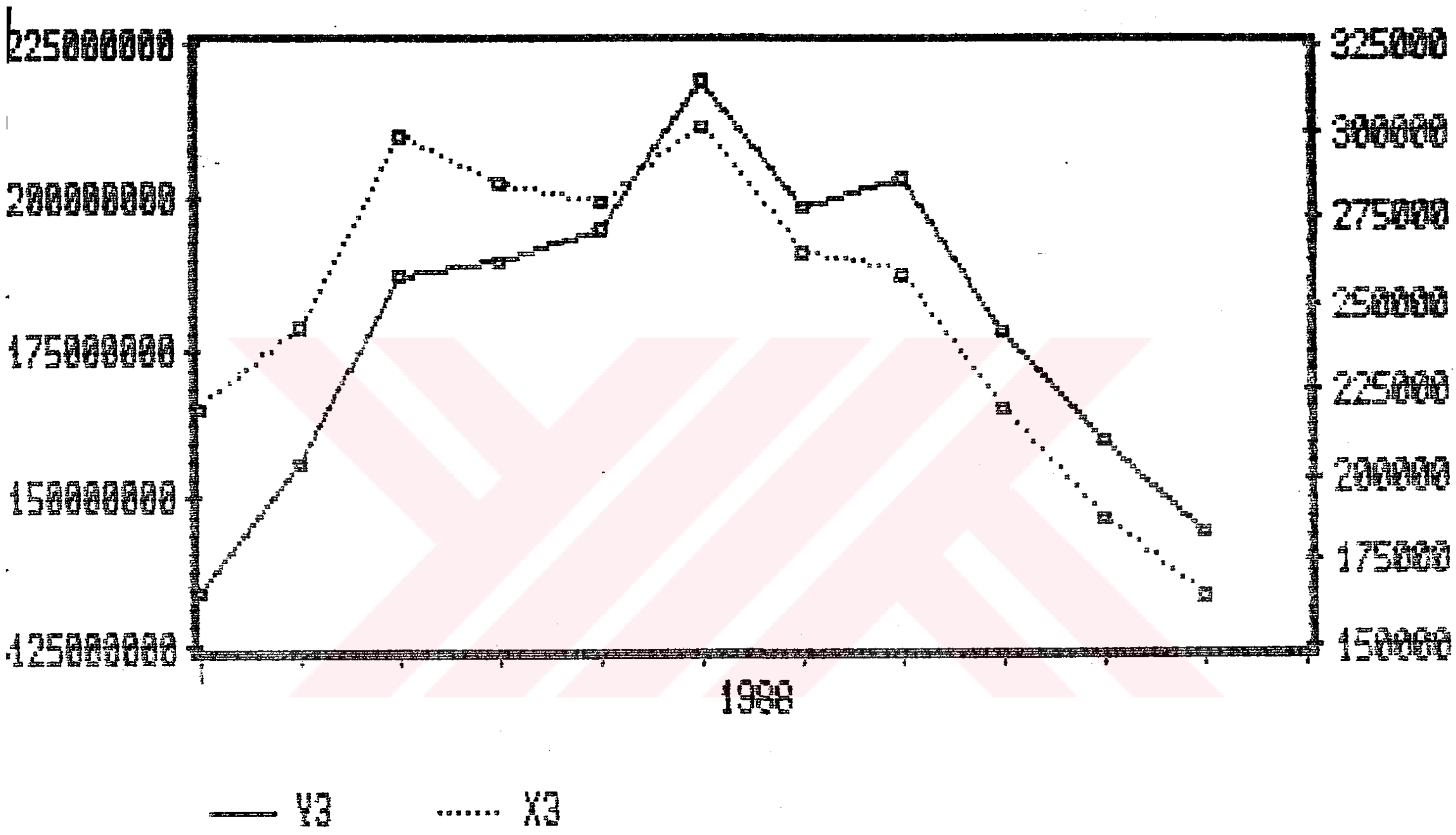
---

1. Genel anlamlılık testleri için: Sacit Ertaş, Ekonometrinin Teorisi (Ders Notları), Uludağ Üniversitesi, 1983.

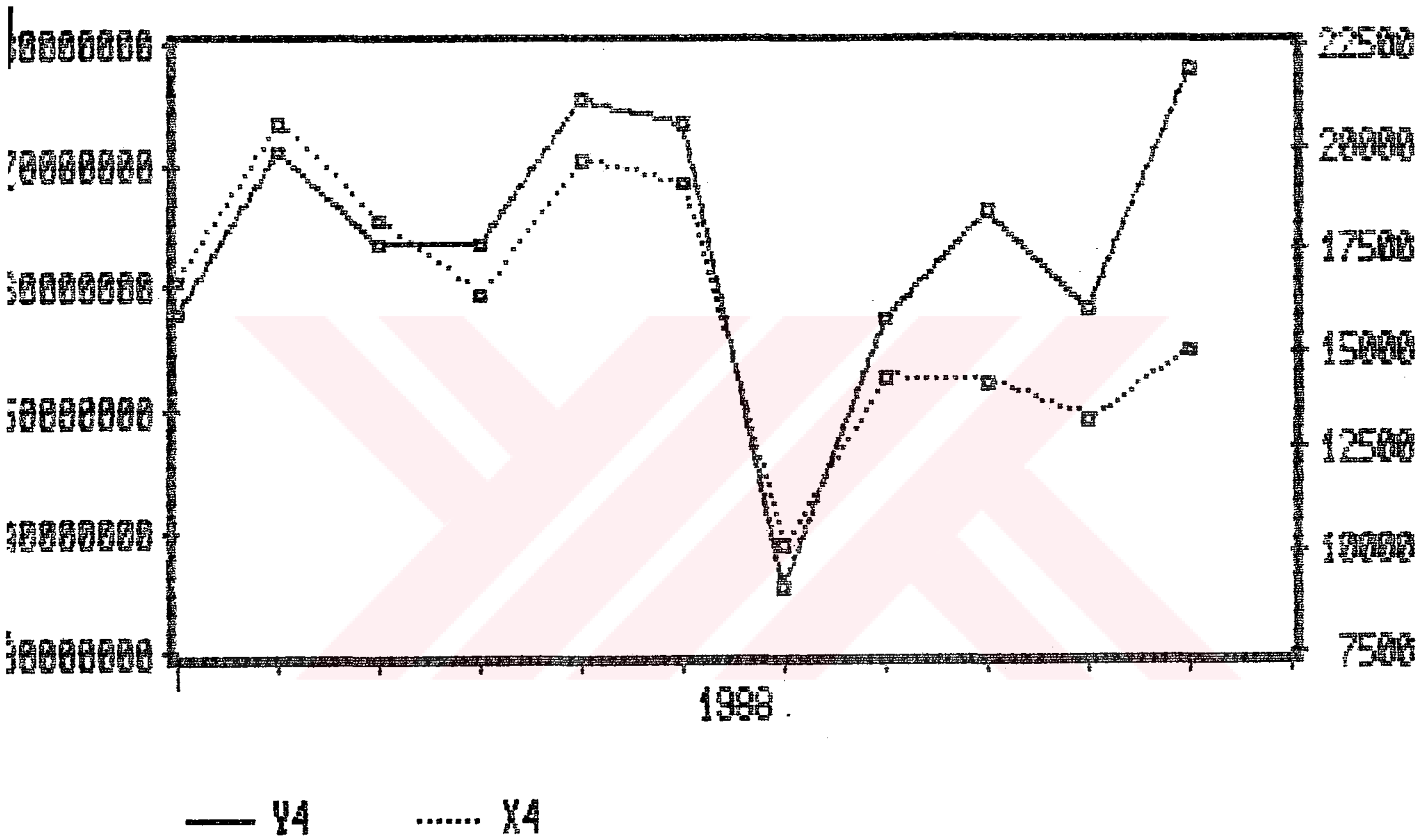


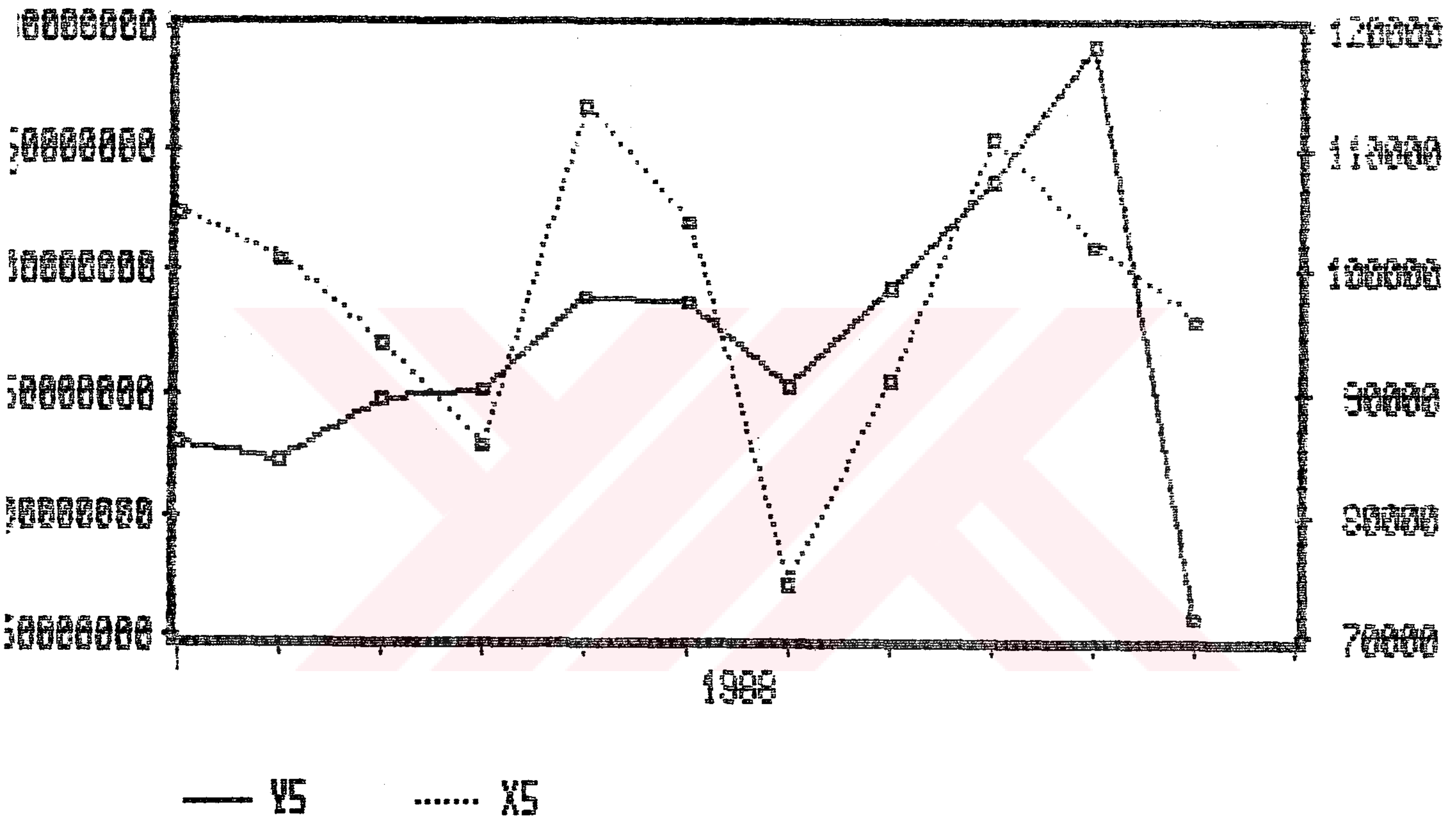
300000000
250000000
200000000
150000000
100000000
50000000
0
1250000
1000000
750000
500000
250000
0
1988
Y1
X1

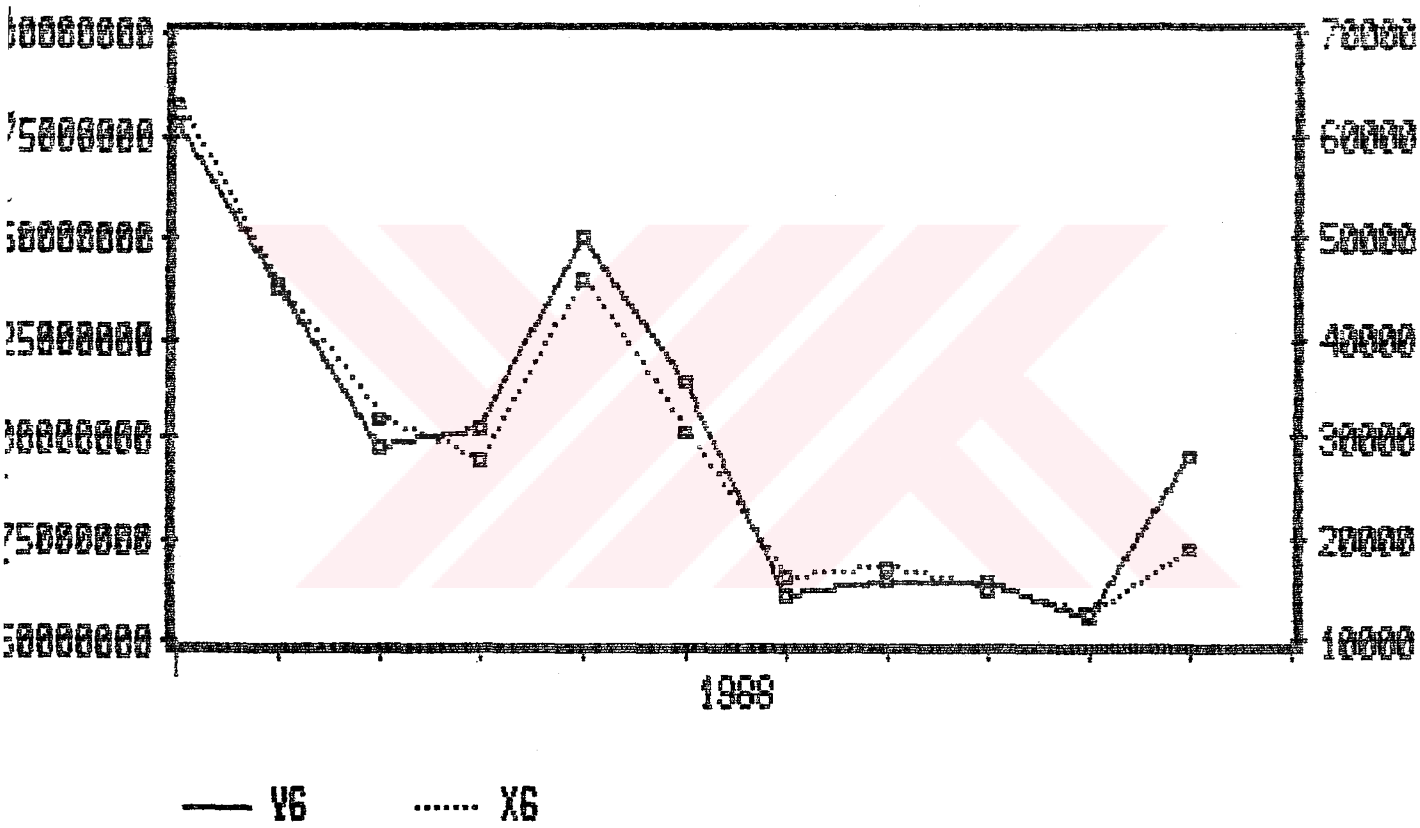

250000
200000
150000
100000
50000
0
1988
Y2
X2



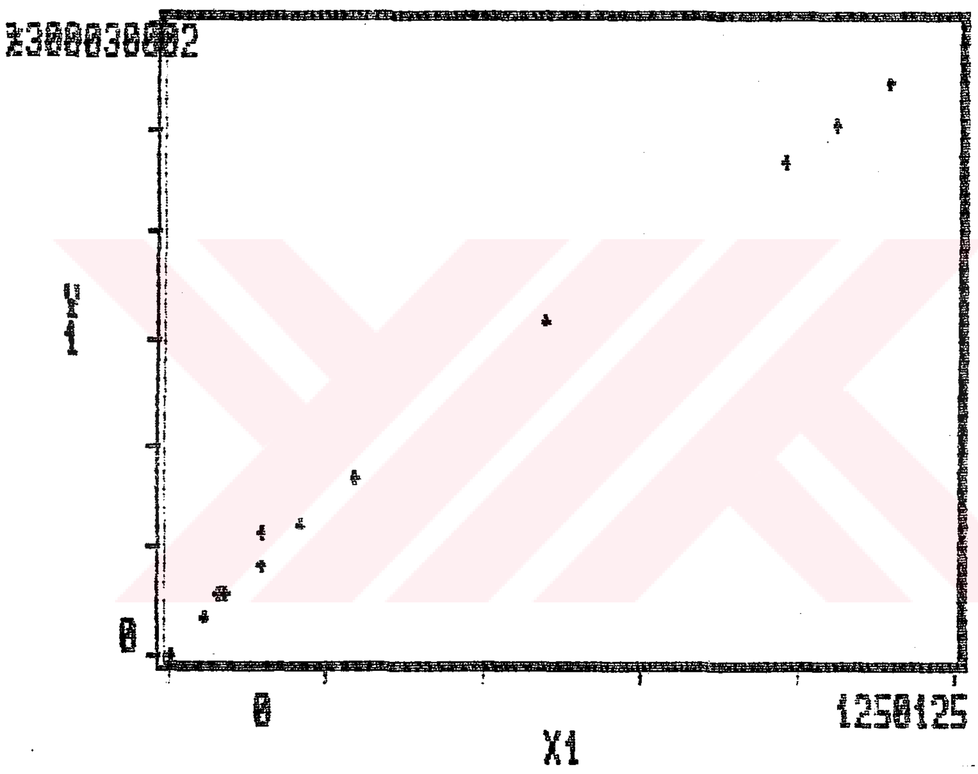
225000000
200000000
175000000
150000000
125000000
325000
300000
275000
250000
225000
200000
175000
150000
1988
Y3
X3

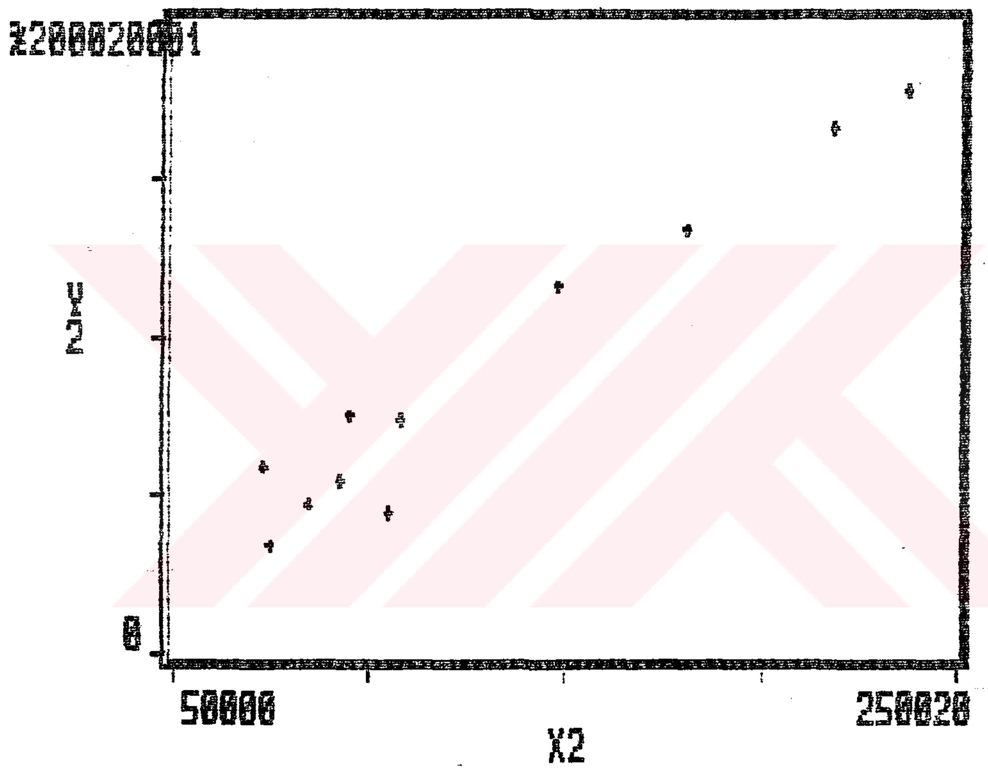

80000000
70000000
60000000
50000000
40000000
30000000
22500
20000
17500
15000
12500
10000
7500
1988
Y4
X4

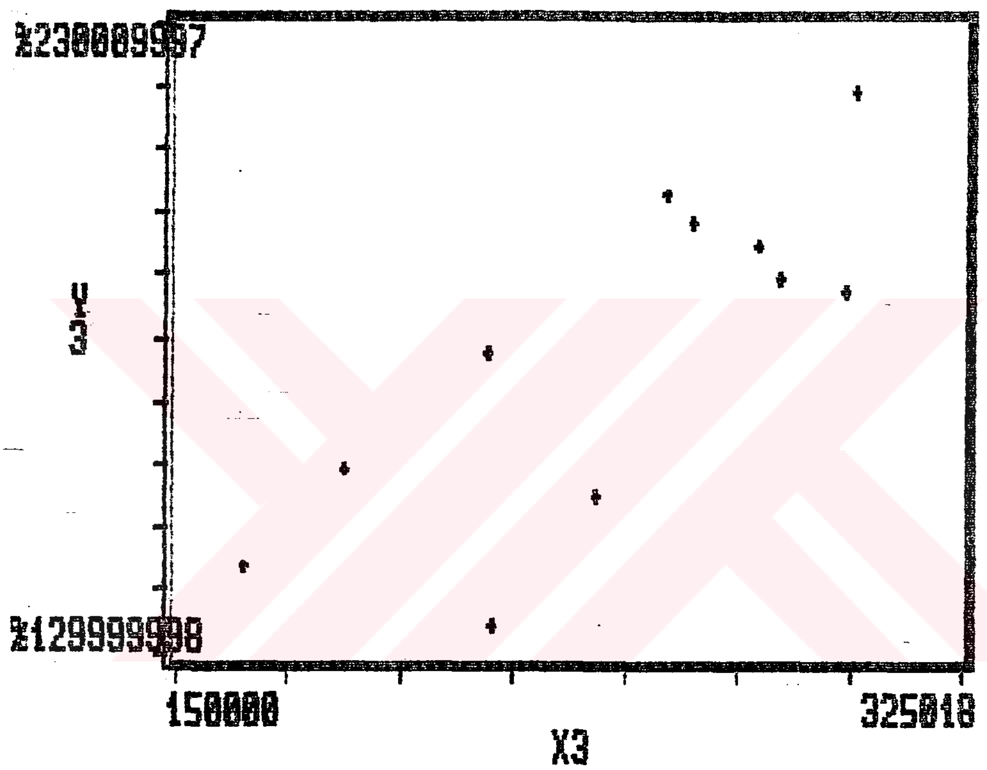

120000
110000
100000
90000
80000
70000
1988
Y5
X5

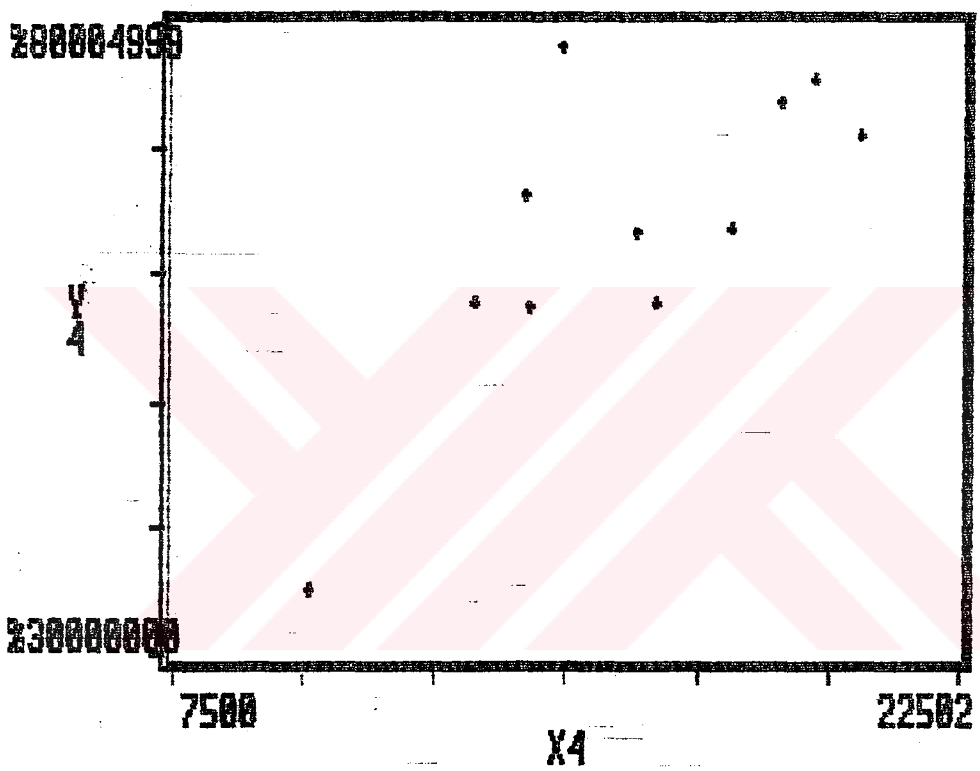


100000000
75000000
50000000
25000000
00000000
75000000
50000000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
1986
Y6
X6

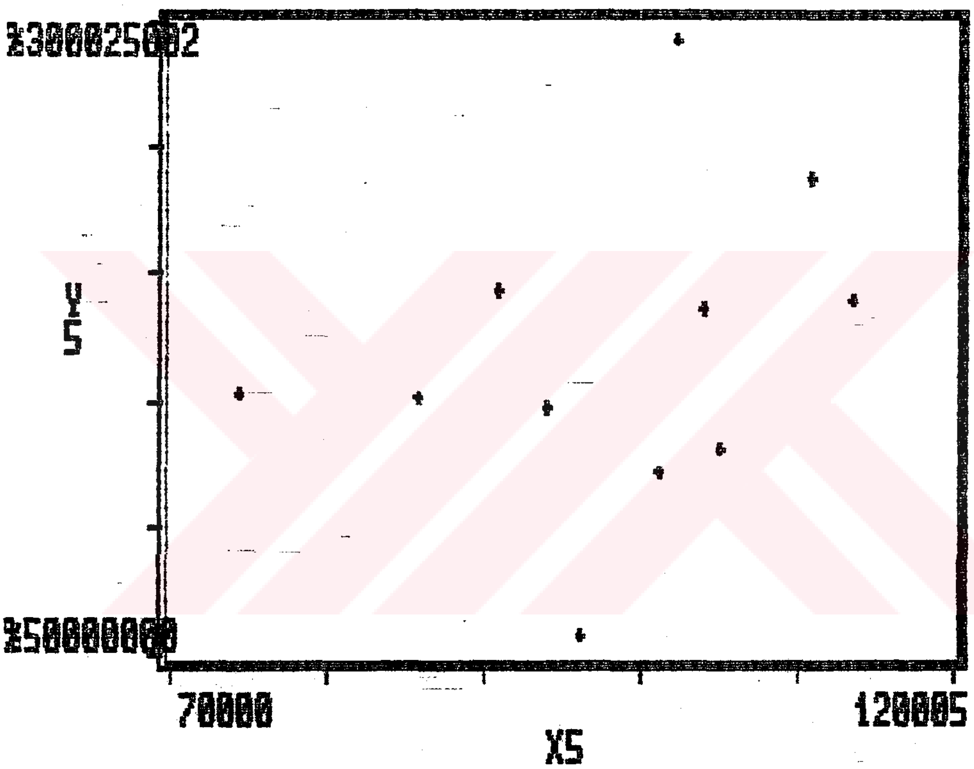

Y1
0
0
1250125
X1

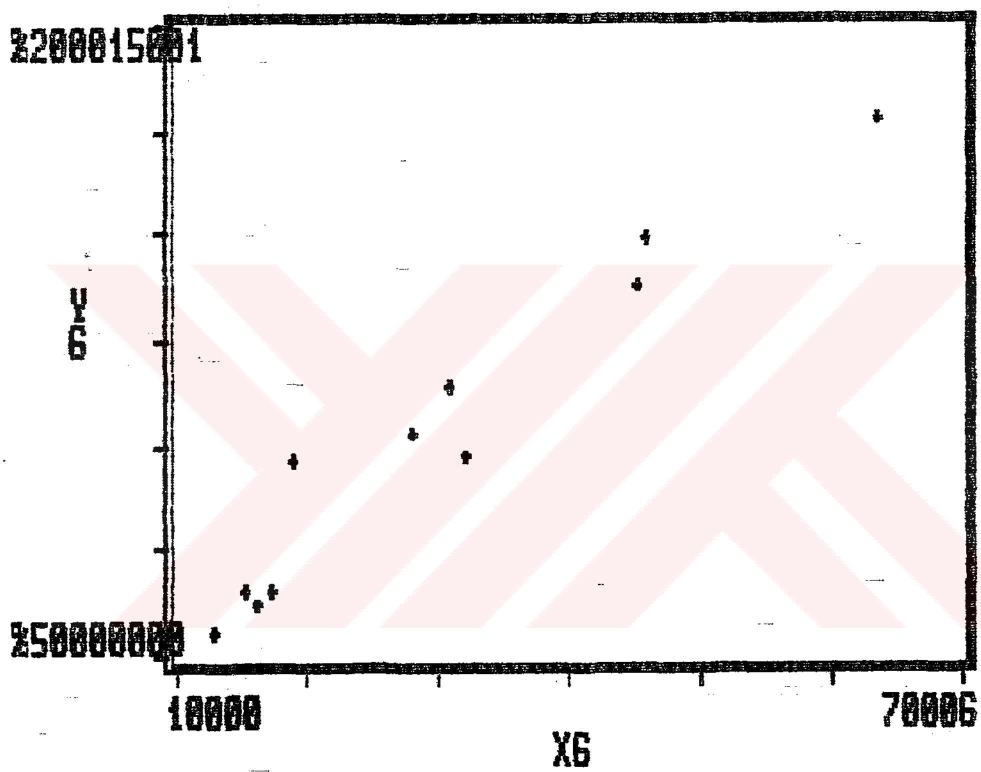

0
50000
250020
X2


%230009997
%129999998
Y3
150000
325018
X3



%80004998
%30000000
Y
4
7500
22502
X4


%300025002
Y5
%50000000
70000
120005
X5


%200015001
%50000000
Y6
10000
70006
X6

---------------------- REGRESSION ANALYSIS ----------------------

DEPENDENT VARIABLE: Y1

VAR.	REGRESSION COEFFICIENT	STD. ERROR	T(DF= 8)	PROB.	PARTIAL r²
X1	280.3673	19.3341	14.501	.00000	.963
X12	-4.4121E-05	1.62465E-05	-2.716	.02642	.479
CONSTANT	5771284.6814				

STD. ERROR OF EST. =4.70718E+06
R SQUARED = .9982
MULTIPLE R = .9991

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

SOURCE	SUM OF SQUARES	D.F.	MEAN SQUARE	F RATIO	PROB.
REGRESSION	9.64809E+16	2	4.82405E+16	2177.156	1.131E-11
RESIDUAL	1.77260E+14	8	2.21576E+13		
TOTAL	9.66582E+16	10			

STANDARDIZED RESIDUALS

	OBSERVED	CALCULATED	RESIDUAL	-2.0	0	2.0
1	2.7142E+08	2.6865E+08	2766633.8345		*	
2	2.3428E+08	2.3744E+08	-3157893.6040	*		
3	2.5204E+08	2.5312E+08	-1085708.0137	*		
4	1.5940E+08	1.5733E+08	2074400.5641		*	
5	8.2885E+07	8.5327E+07	-2442435.9594	*		
6	1.7380E+07	2.0362E+07	-2981709.9416	*		
7	6.0937E+07	6.2357E+07	-1419757.7416	*		
8	4.2848E+07	4.5655E+07	-2807694.2090	*		
9	2.7642E+07	3.0600E+07	-2957644.3880	*		
10	2.7785E+07	2.6704E+07	1081089.1933		*	
11	5.6900E+07	4.5969E+07	10930720.2654			*

DURBIN-WATSON TEST = 1.0594

---------------------- REGRESSION ANALYSIS ----------------------

HEADER DATA FOR: C:AYRAN1   LABEL:
NUMBER OF CASES: 34   NUMBER OF VARIABLES: 4

AYRAN TOPLAM MALIYET FONKSYONU

INDEX	NAME	MEAN	STD.DEV.
1	X2	128695.6364	58599.8802
DEP. VAR.:	Y2	89275130.0909	51126806.5456

DEPENDENT VARIABLE: Y2

VAR.	REGRESSION COEFFICIENT	STD. ERROR	T(DF= 9)	PROB.
X2	849.3182	66.5561	12.761	.00000
CONSTANT	-20028420.4893			

STD. ERROR OF EST. =1.23335E+07
r SQUARED = .9476
r = .9735

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

SOURCE	SUM OF SQUARES	D.F.	MEAN SQUARE	F RATIO	PROB.
REGRESSION	2.47705E+16	1	2.47705E+16	162.841	4.553E-07
RESIDUAL	1.36903E+15	9	1.52114E+14		
TOTAL	2.61395E+16	10			

```
                                                   STANDARDIZED RESIDUALS
      OBSERVED  CALCULATED   RESIDUAL -2.0                      0                  2.
   1 3.3659E+074.3136E+07-9477691.8802 !               *        !
   2 4.6849E+075.1522E+07-4673193.1212 !                  *     !
   3 4.4087E+076.8793E+07**************<                        !
   4 5.4300E+075.8748E+07-4448859.6547 !                  *     !
   5 7.4181E+077.1706E+07 2475871.3697 !                        !  *
   6 1.3412E+081.3313E+08  990812.3343 !                        !*
   7 1.7809E+081.8151E+08-3418362.9021 !                   *    !
   8 1.6665E+081.6533E+08 1316712.1798 !                        !*
   9 1.1638E+081.0569E+0810685056.5605 !                        !       *
  10 7.4910E+076.0697E+0714213458.3168 !                        !          *
  11 5.8815E+074.1772E+0717042477.2034 !                        !            *
```

DURBIN-WATSON TEST = .7560

```
------------------------ REGRESSION ANALYSIS ------------------------
DEPENDENT VARIABLE: Y3

VAR.    REGRESSION COEFFICIENT     STD. ERROR   T(DF=   8)      PROB.   PARTIAL r
X3               -295.0693          1512.7366        -.195     .85021        .004
X32                  .0016              .0032         .504     .62756        .030
CONSTANT   149893951.7241

STD. ERROR OF EST. =1.80687E+07
         R SQUARED =    .6331
        MULTIPLE R =    .7957

                       ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

 SOURCE            SUM OF SQUARES   D.F.       MEAN SQUARE     F RATIO  PROB.
REGRESSION            4.50705E+15     2        2.25353E+15       6.903 .0181
RESIDUAL              2.61183E+15     8        3.26479E+14
TOTAL                 7.11889E+15    10

                                                    STANDARDIZED RESIDUALS
        OBSERVED  CALCULATED   RESIDUAL -2.0                   0                 2.
   1 1.3446E+081.6288E+08************* ¦    *                  ¦
   2 1.5535E+081.7332E+08************* ¦         *             ¦
   3 1.8707E+082.0526E+08************* ¦         *             ¦
   4 1.8933E+081.9612E+08-6787386.4656 ¦               *       ¦
   5 1.9460E+081.9300E+08 1592322.0860 ¦                       ¦*
   6 2.1896E+082.0694E+0812024263.9907 ¦                       ¦     *
   7 1.9817E+081.8472E+0813456757.1057 ¦                       ¦      *
   8 2.0288E+081.8127E+0821615672.0657 ¦                       ¦           *
   9 1.7802E+081.6246E+0815557942.5500 ¦                       ¦       *
  10 1.5910E+081.5100E+08 8108414.8603 ¦                       ¦   *
  11 1.4389E+081.4487E+08 -988720.4908 ¦                      *¦

DURBIN-WATSON TEST =    .2534
```

------------------------ REGRESSION ANALYSIS ------------------------

HEADER DATA FOR: C:TEREYAG1   LABEL:
NUMBER OF CASES: 34   NUMBER OF VARIABLES: 4

TEREYAG TOPLAM MALYET FONKSYONU

INDEX	NAME	MEAN	STD.DEV.
1	X4	16847.7500	3401.2109
DEP. VAR.:	Y4	62290357.3750	12851119.1471

DEPENDENT VARIABLE: Y4

VAR.	REGRESSION COEFFICIENT	STD. ERROR	T(DF= 6)	PROB.
X4	3602.1329	465.6374	7.736	.00025
CONSTANT	1602521.9857			

STD. ERROR OF EST. =4.19016E+06
r SQUARED = .9089
r = .9533

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

SOURCE	SUM OF SQUARES	D.F.	MEAN SQUARE	F RATIO	PROB.
REGRESSION	1.05071E+15	1	1.05071E+15	59.844	2.450E-04
RESIDUAL	1.05345E+14	6	1.75574E+13		
TOTAL	1.15606E+15	7			

```
                                                         STANDARDIZED RESIDUALS
       OBSERVED  CALCULATED    RESIDUAL -2.0                  0                   2.
   1 5.7893E+076.1776E+07-3883404.8965 |          *           |
   2 7.1094E+077.5720E+07-4626158.5416 |        *             |
   3 6.3777E+076.6934E+07-3157197.2793 |            *         |
   4 6.3534E+076.0375E+07 3159248.8206 |                      |      *
   5 7.5589E+077.2464E+07 3125511.6442 |                      |      *
   6 7.3607E+077.0119E+07 3488400.1939 |                      |       *
   7 3.5314E+073.7916E+07-2601652.2432 |             *        |
   8 5.7515E+075.3019E+07 4495252.3022 |                      |          *
```

DURBIN-WATSON TEST = 1.2359

---------------------- REGRESSION ANALYSIS ----------------------

HEADER DATA FOR: C:KASAR1   LABEL:
NUMBER OF CASES: 34   NUMBER OF VARIABLES: 3

KASAR TOPLAM MALYET FONKSYONU

INDEX	NAME	MEAN	STD.DEV.
1	X6	29542.7273	16083.6458
DEP. VAR.:	Y6	102226441.7273	39908059.0721

DEPENDENT VARIABLE: Y6

VAR.	REGRESSION COEFFICIENT	STD. ERROR	T(DF= 9)	PROB.
X6	2414.7878	190.1928	12.697	.00000
CONSTANT	30887024.8763			

STD. ERROR OF EST. =9.67339E+06
r SQUARED = .9471
r = .9732

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

SOURCE	SUM OF SQUARES	D.F.	MEAN SQUARE	F RATIO	PROB.
REGRESSION	1.50844E+16	1	1.50844E+16	161.202	4.755E-07
RESIDUAL	8.42170E+14	9	9.35744E+13		
TOTAL	1.59265E+16	10			

```
                                                 STANDARDIZED RESIDUALS
     OBSERVED  CALCULATED   RESIDUAL -2.0                0                2.0
   1 1.7794E+081.8379E+08-5850202.9899 !             *     !
   2 1.3806E+081.3964E+08-1581443.6171 !                .* !
   3 9.7905E+071.0814E+08************* !         *         !
   4 1.0268E+089.8269E+07 4407117.8682 !                   !   *
   5 1.4910E+081.4152E+08 7576832.1256 !                   !       *
   6 1.1443E+081.0484E+08 9590431.3146 !                   !         *
   7 6.1874E+076.9968E+07-8094233.3324 !           *       !
   8 6.5397E+077.2392E+07-6995313.2651 !            *      !
   9 6.4944E+076.7742E+07-2797448.9979 !                *  !
  10 5.6044E+076.1538E+07-5493795.1872 !             *     !
  11 9.6122E+077.6645E+0719476809.4517 !                   !
```

DURBIN-WATSON TEST = 1.5248

II.2.2. Hammadde Kısıtlayıcıları İçin Teknoloji Katsayılarınının Belirlenmesi

Çalışmamızda hammadde kısıtlayıcısı için gerekli olan teknoloji katsayılarını belirlemede iki güçlükle karşılaşılmıştır. Birincisi, birim ürün üretimi için gerekli olan hammadde miktarının her ay değişme göstermesidir. Neden olarak sütün organik bir madde olmasıdır. Çünkü gelen çiğ sütün yağ oranı ve asitlik derecesi her gün farklıdır. Bu durum standart ürün üretimini güçleştirmektedir. İkinci bir güçlük ise ürün kalitesine göre kullanılacak hammadde miktarının değişmesidir. Tam yağlı beyaz peynir için gerekli olan hammadde miktarı ile yarım yağlı peynir için gerekli olan hammadde miktarı farklıdır. Böyle bir durum ayran, yoğurt, kaşar için de sözkonusudur.

Çalışmamızda üretim kalitesinden gelen farklılığı dikkate almak için ağırlıklı ortalama yönteminin kullanılmasının uygun olacağını düşündük. Ağırlık olarak her ürün için çeşitli kalitelerdeki ürün miktarları alınmıştır. Sütün kalitesi mevsimlik değişme gösterdiğinden modelin çözümünde planlanan dönemin bir önceki aya ilşkin değerlerin alınması uygun olacağı kanısındayız. Model için planlama dönemi 1989 Mart ayı seçildiğinde fabrikadaki çalışmalarımız ile ürünlerin Şubat 1989 ayı üretim katsayıları olarak aşağıdaki değerler bulunmuştur:

Pastörize süt için : $a_{11} = 0.95$ kg.

Ayran için : $a_{12} = 0.62$ kg.

Yoğurt için : $a_{13} = 1.49$ kg.

Tereyağ için : a_{14} =0 kg.

Beyaz peynir için : a_{15} =4.98 kg.

Kaşar peyniri için : a_{16} =10.8 kg.

Burada a_{14} 'ün sıfır olması tereyağ üretiminde hammadde olarak süt değil, bir yarı mamül olan krema kullanılmasıdır. Tereyağ üretimi için kullanılan birim başına krema miktarı a_{24} =1.35 kg. olarak belirlenmiştir.

Fabrikanın günlük toplam kurulu süt işleme kapasitesi 80000 kg dir. Ancak finansal nedenlerle bu kapasitenin tamamı kullanamamaktadır. Yaptığımız incelemelere göre firmanın günlük süt satınalabilme olanağı ancak 50000 kg. Buna göre aylık toplam hammadde olanağı da ortalama b_1 =50000x30=1500000 kg./ay olmaktadır. Tereyağ için hammadde kısıtlaması da yaptığımız hesaplara göre b_2 =25000 kg./ay dır.

II.2.3. Üretim Kapasitesinin Belirlenmesi

Fabrikanın toplam süt işleme kapasitesi 80000 kg./gün dür. Aylık süt işleme kapasitesi ise 2400000 kg./ay dır. Bu kapasitenin bölümlere dağılımı ise şöyledir:

Pastörize süt	: 550000 kg./ay
Ayran	: 300000 kg./ay
Yoğurt	: 544000 kg./ay
Beyaz peynir	: 540000 kg./ay
Kaşar peyniri	: 476000 kg./ay
Toplam	: b_3 =2400000 kg./ay.

Tereyağ bölümünün kapasitesi ise krema işleme kapasitesi olarak b_4 =45000 kg./ay dır.

Pastörize süt bölümü ile ayran bölümü, dolum makinasını ortaklaşa kullanmaktadırlar. Dolum makinasının optimal bir şekilde kullanımı pastörize süt üretimi ile ayran üretiminin kordineli yapılmasını gerektirmektedir. Talep durumu da göz önüne alınarak dolum makinasını hangi bölümün daha çok kullanımına verilmesi gerektiği belirlenmelidir. Bir anlamda süt tüketim talebinin düşük olduğu dönemlerde dolum makinası tamamen veya büyük bir iş zamanı ayran bölümüne tahsis edilmelidir.

Kapasiteyi süt ve krema işleme kapasitesi olarak belirlediğimizden, hammadde için belirtilen teknoloji katsayıları kapasite kısıtlayıcı denklemleri için de kullanılabilir.

II.2.4. Birim İşgücü Zamanlarının Belirlenmesi

Fabrikanın birim işgücü zamanlarını veya işgücü verimliliğini hesaplamak için önce, Şubat/89'da fabrikanın her üretim bölümünde çalışılan saat toplamları belirlenmiştir. Sonra bu rakamlar ilgili olduğu bölümün aynı ay içindeki toplam üretim değerine bölünmüştür.İşgücü verimliliği zaman içinde değişebileceğini göz önüne aldığımızda planlama dönemi olarak seçtiğimiz Mart/89 için Şubat/89 işgücü verimliliklerinin alınması uygun olacaktır.

İşgücü verimliliğinin bölümlere göre hesaplanmasında bir takım güçlükler vardır. Bu güçlükler bize göre bölümlerin geneli için kullanılan işgücü zamanlarından kaynaklanmaktadır. Bu tür sorunun çözümünde bölümlerin işgücü zamanları, bölümlerin oransal üretim miktarlarına göre dağılım yöntemi izlenmiştir. Bu yönteme göre bölümlerin işgücü zamanlarının değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Pastörize süt için : a_{51} =(3864 h/ 152918 kg.)x60=1.52 dk/kg.

Ayran için : a_{52} =(3211 h/ 85050 kg.)x60=2.26 dk/kg.

Yoğurt için : a_{53} =(3811 h/ 152818 kg.)x60=1.50 dk/kg.

Tereyağ için : a_{54} =(1343 h/ 12203 kg.)x60=6.60 dk/kg.

Beyaz peynir için : a_{55} =(3103 h/ 107585 kg.)x60=1.73 dk/kg.

Kaşar peyniri için : a_{56} =(2649 h/ 28149 kg)x60=5.65 dk/kg.

Fabrikanın bir ay içinde istihdam edebileceği toplam işgücü miktarı saat olarak : b_4 =18000 işçi/h = 1080000 işçi/dk olarak belirlenir.

II.2.5. Finansman Maliyetleri ve Üretim İlişkisi

Fabrikanın en önemli problemlerinden birinin döner sermaye yetersizliği olduğundan söz etmiştik. Kredi faiz oranlarının çok yüksek düzeyde olması finansman maliyetlerini önemli ölçüde yükseltmiştir.

Çalışmamızda finansman maliyetlerinin üretim bölümlerine dağılımında, işgücü zamanlarının dağılımında izldiğimiz yöntemin benzeri uygulanmıştır. Aynı şekilde üretim bölümlerinin oransal üretimi, dağıtım kriteri olarak kullanılacaktır. Buna göre Kasım/88 için birim başına finansman maliyetlerimiz aşağıdadır:

Pastörize süt için : a_{61} =1155261 TL/146766 kg.=7.87 TL/kg.

Ayran için : a_{62} =5871747 TL/72765 kg.=8.69 TL/kg.

Yoğurt için : a_{63} =12366692 TL/164324 kg.=75.25 TL/kg.

Tereyağ için : a_{64} =4174701 TL/14908 kg.=280.03 TL/kg.

Beyaz peynir için : a_{65} =22878627 TL/95980 kg.=238.36 TL/kg.

Kaşar peyniri için : a_{66} =12352973 TL/18949 kg.=651.90 Tl/kg.

Finansman maliyetlerinin hesaplanmasında Kasım/88 ayı alınmıştır. Bunun nedeni maliyet fonksiyonlarımız da Ocak/88-Kasım/88 dönemi için tahmin edilmiş olmasıdır. Bunun yanında işletmenin bir ay içinde borçlanarak toplam ödeyebileceği finansman giderleri: b_6 =57000000 TL olarak belirlenmiştir.

II.2.6. Yardımcı Maddeler ve Ambalaj Maliyetlerinin Hesaplanması

Süt ve süt ürünleri üretiminde süt hammaddesi dışında maya, tuz, süt tozu, gibi yardımcı maddeler ve ambalaj malzemeleri de kullanılmaktadır. Bu girdilerin üretim bölümlerine göre aylık tüketim miktarları ambar çıkış fişlerine göre belirlenmektedir. Aylık tüketim miktarları, yardımcı madde ve ambalajlamanın aylık ortalama fiyatları ile çarpılarak maliyet muhasebesi kayıtlarına yansıtılmaktadır. Maliyet muhasebesinde kullanılan bu bilgilerden yararlanarak her bölüm için bu girdilerin birim ürün başına değerleri hesaplanmıştır. Ürünlerin kg. başına Kasım/88 dönemine ilşkin giderleri aşağıda görülmektedir.

Pastörize süt için : a_{71} =109220 TL/146766 kg.=0.75 TL/kg.

Ayran için : a_{72} =9107500 TL/72765 kg.=125.16 TL/kg.

Yoğurt için : a_{73} =6338071 TL/164324 kg.=38.57 TL/kg.

Tereyağ için : a_{74} =1906720 TL/14908 kg.=127.89 TL/kg.

Beyaz peynir için : a_{75} =15343950 TL/95980 kg.=159.87 TL/kg.

Kaşar peyniri için : a_{76} =3119555 TL/18949 kg.=164.63 Tl/kg.

Fabrikanın aylık bütçesinden yardımcı madde ve ambalaj malzemesi alımı için ayırabileceği miktar ise: b_7 =30000000 Tl/ay olarak belirlenmiştir.

II.2.7. Diğer Maliyetlerin Hesaplanması

Buraya kadar bütün ana girdilerin modelde birer kısıtlayıcı denklem olarak yer almak üzere gerekli olan parametre değerleri hesaplandı. Bu ana girdi kalemleri dışında yer alan girdileri de modele topluca eklemekte yarar vardır. Sözkonusu girdiler yakıt, elektrik, tamir bakım, amortismanlar, idare, satış ve labaratuvar masraflarından oluşmaktadır. Bu masraflara ilişkin hesaplanan parametre değerleri Kasım/88 ayı için aşağıda verilmiştir.

Pastörize süt için : a_{81} =3997560 TL/146766 kg.=27.24 TL/kg.

Ayran için : a_{82} =22051462 TL/72765 kg.=303.05 TL/kg.

Yoğurt için : a_{83} =37036243 TL/164324 kg.=225.39TL/kg.

Tereyağ için : a_{84} =11303948 TL/14908 kg.=758.25 TL/kg.

Beyaz peynir için : a_{85} =40760656 TL/95980 kg.=424.68 TL/kg.

Kaşar peyniri için : a_{86} =18252861 TL/18949 kg.=963.26 Tl/kg.

Yukarıda sıraladığımız masraflar için işletmenin aylık bütçesinden ayırabileceği miktar yani b_8 =150000000 TL/ay dır.

II.2.8. Ürünlerin Talep Tahmini

Süt sektöründe en önemli problemlerden birisinin talep yetersizliği olduğunu söylemiştik. Bunun yanında talep değişimleri de oldukça kararsız bir yapı özelliği göstermektedir. Mevsimlik dalgalanmalar dikkati çekmektedir. Planlama dönemimizi Mart/89 olarak belirlediğimiz için daha önceki yıllarda Mart ayı satış miktarlarını analiz ederek nokta talep tahmini yoluna gidilmiştir. Aşağıda bulduğumuz değerler nokta talep tahminleri olup ortalama rakamlardır.

Pastörize süt için : b_9 = 250000 kg./ay

Ayran için : b_{10} = 100000 kg./ay

Yoğurt için : b_{11} = 150000 kg./ay

Tereyağ için : b_{12} = 20000 kg./ay

Beyaz peynir için : b_{13} = 95000 kg./ay

Kaşar peyniri için : b_{14} = 25000 kg./ay

II.3. MODELİN KURULMASI

Bu kısımda buraya kadar elde ettiğimiz verilere dayanarak işletmenin Quadratik programlama modeli kurulmaya çalışılacaktır.

II.3.1. Amaç Fonksiyonunun Belirlenmesi

Fabrikanın amacı karını maksimum kılacak üretim bileşimini belirlemektir. Şimdi sözkonusu amaca hizmet edecek quadratik programlama modelinin amaç fonksiyonunu oluşturmaya çalışalım.

Maksimum $Z = \pi_1 X_1 + \pi_2 X_2 + \pi_3 X_3 + \pi_4 X_4 + \pi_5 X_5 + \pi_6 X_6$ Burada; $\pi_1, \ldots, \pi_6$ modelin kar katsayıları olmak üzere, daha önce tanımladığımız gibi $\pi_i = P_i - C_i$ olarak belirlenir. C_i'ler, daha önce elde ettiğimiz ortalama maliyet fonksiyonlardır. P_i'ler, ise ürünlerin Şubat 1989 ayı fiyatlarıdır.

Pastörize süt için : P_1 = 511.05 TL/kg.

Ayran için : P_2 = 873.04 TL/kg.

Yoğurt için : P_3 = 976.77 TL/kg.

Tereyağ için : P_4 = 5508.40 TL/kg.

Beyaz peynir için : P_5 = 2356.69 TL/kg.

Kaşar peyniri için : P_6 = 4422.40 Tl/kg.

dır.

Ortalama fiyatlara ve ortalama maliyet fonksiyonlarına dayanarak kar katsayılarımızı şöyle elde edebiliriz:

$$\pi_1 = 511.05-280.37-5771284.68/X_1 + 4.4121E-5X_1$$
$$\pi_2 = 837.04-849.32+20028420.49/X_2$$
$$\pi_3 = 976.77-116010582.12/X_3 - 9.89458E-4X_3$$
$$\pi_4 = 5508.40-3602.13-1602521.98/X_4$$
$$\pi_5 = 2356.69-1446.46=910.23$$
$$\pi_6 = 4422.40-2414.79-30887024.88/X_6$$

Buradan π_i değerlerini amaç fonksiyonumuzda yerine kor ve gerekli düzenlemelerden sonra aşağıdaki amaç fonksiyonunu elde ederiz:

$$Z=230.68X_1 + 4.4121E-5X_1^2 - 12.28X_2 + 976.77X_3 - 9.89458E-4X_3^2 + 1906.27X_4 + 910.23X_5 + 2007.61X_6 - 134242993.17$$

II.3.2. Kısıtlayıcı Denklemlerin Belirlenmesi

Bu kısımda modelimizde yer alan hammadde, kapasite, işçilik, finansman, yardımcı madde ve ambalaj maliyetleri, diğer maliyetler ve talep kısıtlayıcıları belirlenmeye çalışılacaktır.

II.3.2.1. Hammadde Kıstlayıcısının Belirlenmesi

Hammadde kısıtlayıcısı için gerekli olan teknoloji katsayılarını ve fabrikanın bir ay içinde satın alabileceği en fazla hammadde miktarını daha önce belirlemiştik. Belirlenen verilere dayanarak hammadde kısıtlayıcısını yazabiliriz.

Süt hammaddesi için:

(1) $0.95X_1 +0.62X_2 +1.49X_3 +0.X_4 +4.98X_5 +10.8X_6 \leq 1500000$

Krema için:

(2) $1.35X_4 \leq 25000$

dır.

II.3.2.2. Kapasite Kısıtlayıcısının Belirlenmesi

Her bölümün süt işleme veya krema işleme kapasitesini bulduğumuza göre hammadde kısıtlayıcısı için hesapladığımız teknoloji katsayılarını aynı zamanda kapasite kısıtlayıcısı için de kullanabiliriz. Kapasite kısıtlamasını da hammadde işleme yönünden belirlemiştik. Ancak burada bir basitleştirici düzenlemeye gidilmesi gerekir. Kısıtlayıcı sayısını gereksiz yere arttırmamak için, süt işleme yönünden kapasite kısıtlaması getirdiğimiz bölümleri toplam kapasite kısıtlaması şeklinde bir tek kısıtlayıcıya dönüştürülmesi yerinde olacağı kanısındayız. Öte yandan krema kullanan tereyağ bölümü için yine ayrı bir kısıtlayıcı oluşturulacaktır.

Süt kullanan üretim bölümlerinin kapasite kısıtlayıcısı:

(3) $0.95X_1 + 0.62X_2 + 1.49X_3 + 0.X_4 + 4.98X_5 + 10.8X_6 \leq 2400000$

Krema kullanan tereyağ üretim bölümü için kapasite kısıtlayıcısı:

(4) $1.35X_4 \leq 45000$

dır.

II.3.2.3. İşgücü Kısıtlayıcısının Belirlenmesi.

Modelimizin işgücü kısıtlayıcısı birim işgücü zamanları ve fabrikanın bir ay içinde satın alabileceği toplam işgücü saatini kullanarak belirlenmiştir. Buna göre işgücü kısıtlayıcı denklemimiz:

(5) $1.52X_1 + 2.26X_2 + 1.50X_3 + 6.60X_4 + 1.73X_5 + 5.65X_6 \leq 1080000$

şeklinde elde edilir.

II.3.2.4. Finansman Maliyetleri Kısıtlayıcısının Belirlenmesi.

İşletmenin borçlanma gücünü de ifade eden finansman maliyeti kısıtlayıcısı her ürün için hesapladığımız birim başına finansman maliyetleri rakamlarını kullanarak oluşturulmuştur. Yani

(6) $7.87X_1 + 8.69X_2 + 75.25X_3 + 280.03X_4 + 238.36X_5 + 651.90X_6 \leq 57000000$

dir.

II.3.2.5. Yardımcı Maddeler ve Ambalaj Maliyetleri Kısıtlayıcısının Belirlenmesi

Bundan önceki kısıtlayıcılar için izlediğimiz yöntemin benzeri izlenerek.

$$(7)\quad 0.75X_1 + 125.16X_2 + 38.57X_3 + 127.89X_4 + 159.87X_5 + 164.63X_6 \leq 30000000$$

elde edilir.

II.3.2.6. Diğer Maliyetlere İlişkin Kısıtlayıcının Belirlenmesi

Maliyet veya girdilere ilişkin bu en son kısıtlayıcımız da şu şekilde yazılabilir:

$$27.24X_1 + 303.05X_2 + 225.39X_3 + 758.25X_4 + 424.68X_5 + 963.26X_6 \leq 150000000$$

Bu kısıtlayıcı denklemin her iki yanını 10 ile bölerek rakamları küçültebiliriz. Bu işleme başvurmamızın nedeni, bilgisayar programında 9 haneli rakamın girilememesidir. Bu işlem kısıtlayıcı koşulumuzu aşağıdaki şekilde yazmamızı sağlayacaktır.

$$(8)\quad 2.724X_1 + 30.305X_2 + 22.539X_3 + 75.825X_4 + 42.468X_5 + 96.326X_6 \leq 15000000$$

II.3.2.7. Talep Kısıtlayıcılarının Belirlenmesi

Ortalama talep tahminleri kullanılarak ürünlerin Mart 1989 ayı talepleri belirlenmiş ve talep kısıtlayıcısı olarak aşağıda verilmiştir.

(9) $X_1 \leq 250000$

(10) $X_2 \leq 100000$

(11) $X_3 \leq 150000$

(12) $X_4 \leq 20000$

(13) $X_5 \leq 95000$

(14) $X_6 \leq 25000$

Buraya kadar modelimiz için gerekli olan amaç fonskiyonunu ve tüm kısıtlayıcıları oluşturduk. Şimdi işletmenin Quadratik programlama modelini yazabiliriz:

Amaç fonksiyonu;

$$Z=230.68X_1 +4.4121E-5X_1^2 -12.28X_2 +976.77X_3 -9.89458E-4X_3^2$$

$$+1906.27X_4 +910.23X_5 +2007.61X_6 -134242993.17$$

Kısıtlayıcılar;

(1) $0.95X_1 +0.62X_2 +1.49X_3 +0.X_4 +4.98X_5 +10.8X_6 \leq 1500000$

(2) $1.35X_4 \leq 25000$

(3) $0.95X_1 +0.62X_2 +1.49X_3 +0.X_4 +4.98X_5 +10.8X_6 \leq 2400000$

(4) $1.35X_4 \leq 45000$

(5) $1.52X_1 +2.26X_2 +1.50X_3 +6.60X_4 +1.73X_5 +5.65X_6 \leq 1080000$

$$(6)\quad 7.87X_1 + 8.69X_2 + 75.25X_3 + 280.03X_4 + 238.36X_5 + 651.90X_6 \leq 57000000$$

$$(7)\quad 0.75X_1 + 125.16X_2 + 38.57X_3 + 127.89X_4 + 159.87X_5 + 164.63X_6 \leq 30000000$$

$$(8)\quad 2.724X_1 + 30.305X_2 + 22.539X_3 + 75.825X_4 + 42.468X_5 + 96.326X_6 \leq 15000000$$

$$(9)\quad X_1 \leq 250000$$

$$(10)\quad X_2 \leq 100000$$

$$(11)\quad X_3 \leq 150000$$

$$(12)\quad X_4 \leq 20000$$

$$(13)\quad X_5 \leq 95000$$

$$(14)\quad X_6 \leq 25000$$

Pozitif olma koşulu;

$X_1, \ldots X_6 \geq 0.$

II.4. MODELİN ÇÖZÜMÜ VE SONUÇLARIN YORUMLANMASI

Bu kısımda önce modelin Lagrange biçiminde yazılımı ve simpleks çözüm için düzenledikten sonra bilgisayarda çözüm değerleri ele alınacaktır.

II.4.1. Modelin Lagrange Biçiminde Yazılımı ve Simpleks Çözüm İçin Düzenlenmesi

Modelimizi Lagrange biçiminde şu şekilde elde edebiliriz:

$Z^* = Z + \lambda_i g_i(X)$ için,

$$
\begin{aligned}
Z^{*} = {} & 230.68X_1 + 4.4121E\text{-}5X_1^{2} - 12.28X_2 + 976.77X_3 - 9.89458E\text{-}4X_3^{2} \\
& + 1906.27X_4 + 910.23X_5 + 2007.61X_6 - 134242993.17 \\
& + \lambda_1 (1500000 - 0.95X_1 - 0.62X_2 - 1.49X_3 - 0.X_4 - 4.98X_5 - 10.8X_6) \\
& + \lambda_2 (25000 - 1.35X_4) \\
& + \lambda_3 (2400000 - 0.95X_1 - 0.62X_2 - 1.49X_3 - 0.X_4 - 4.98X_5 - 10.8X_6) \\
& + \lambda_4 (45000 - 1.35X_4) \\
& + \lambda_5 (1080000 - 1.52X_1 - 2.26X_2 - 1.50X_3 - 6.60X_4 - 1.73X_5 - 5.65X_6) \\
& + \lambda_6 (57000000 - 7.87X_1 - 8.69X_2 - 75.25X_3 - 280.03X_4 - 238.36X_5 - 651.90X_6) \\
& + \lambda_7 (30000000 - 0.75X_1 - 125.16X_2 - 38.57X_3 - 127.89X_4 - 159.87X_5 - 164.63X_6) \\
& + \lambda_8 (15000000 - 2.724X_1 - 30.305X_2 - 22.539X_3 - 75.825X_4 - 42.468X_5 - 96.326X_6) \\
& + \lambda_9 (250000 - X_1) \\
& + \lambda_{10} (100000 - X_2) \\
& + \lambda_{11} (150000 - X_3) \\
& + \lambda_{12} (20000 - X_4) \\
& + \lambda_{13} (95000 - X_5) \\
& + \lambda_{14} (25000 - X_6)
\end{aligned}
$$

Elde edilen bu amaç fonksiyonundan $X_1, \ldots, X_6$ ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_{14}$ için kısmi türevleri aldığımızda;

$$
\begin{aligned}
dZ^{*}/dX_1 = {} & 230.68 + 8.8242E\text{-}5X_1 - 0.95\lambda_1 - 0.95\lambda_3 - 1.52\lambda_5 - 7.87\lambda_6 \\
& - 0.75\lambda_7 - 2.724\lambda_8 - \lambda_9 \leq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dZ^{*}/dX_2 = {} & -12.28 - 0.62\lambda_1 - 0.62\lambda_3 - 2.26\lambda_5 - 8.69\lambda_6 - 125.16\lambda_7 \\
& - 30.305\lambda_8 - \lambda_{10} \leq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dZ^{*}/dX_3 = {} & 976.77 - 1.97891E\text{-}3X_3 - 1.49\lambda_1 - 1.49\lambda_3 - 1.50\lambda_5 - 75.25\lambda_6 \\
& - 38.57\lambda_7 - 22.539\lambda_8 - \lambda_{11} \leq 0
\end{aligned}
$$

$$dZ^*/dX_4 = 1906.27 - 1.35\lambda_2 - 1.35\lambda_4 - 6.60\lambda_5 - 280.03\lambda_6 - 127.89\lambda_7 - 75.825\lambda_8 - \lambda_{12} \le 0$$

$$dZ^*/dX_5 = 910.23 - 4.98\lambda_1 - 4.98\lambda_3 - 1.73\lambda_5 - 238.36\lambda_6 - 159.87\lambda_7 - 42.468\lambda_8 - \lambda_{13} \le 0$$

$$dZ^*/dX_6 = 2007.61 - 10.8\lambda_1 - 10.8\lambda_3 - 5.65\lambda_5 - 651.90\lambda_6 - 164.63\lambda_7 - 96.326\lambda_8 - \lambda_{14} \le 0$$

$$dZ^*/d\lambda_1 = 1500000 - 0.95X_1 - 0.62X_2 - 1.49X_3 - 0.X_4 - 4.98X_5 - 10.8X_6 \ge 0$$

$$dZ^*/d\lambda_2 = 25000 - 1.35X_4 \ge 0$$

$$dZ^*/d\lambda_3 = 2400000 - 0.95X_1 - 0.62X_2 - 1.49X_3 - 0.X_4 - 4.98X_5 - 10.8X_6 \ge 0$$

$$dZ^*/d\lambda_4 = 45000 - 1.35X_4 \ge 0$$

$$dZ^*/d\lambda_5 = 1080000 - 1.52X_1 - 2.26X_2 - 1.50X_3 - 6.60X_4 - 1.73X_5 - 5.65X_6 \ge 0$$

$$dZ^*/d\lambda_6 = 57000000 - 7.87X_1 - 8.69X_2 - 75.25X_3 - 280.03X_4 - 238.36X_5 - 651.90X_6 \ge 0$$

$$dZ^*/d\lambda_7 = 30000000 - 0.75X_1 - 125.16X_2 - 38.57X_3 - 127.89X_4 - 159.87X_5 - 164.63X_6 \ge 0$$

$$dZ^*/d\lambda_8 = 15000000 - 2.724X_1 - 30.305X_2 - 22.539X_3 - 75.825X_4 - 42.468X_5 - 96.326X_6 \ge 0$$

$$dZ^*/d\lambda_9 = 250000 - X_1 \ge 0$$

$$dZ^*/d\lambda_{10} = 100000 - X_2 \ge 0$$

$$dZ^{*}/d\lambda_{11}=150000-X_{3}\geq 0$$

$$dZ^{*}/d\lambda_{12}=20000-X_{4}\geq 0$$

$$dZ^{*}/d\lambda_{13}=95000-X_{5}\geq 0$$

$$dZ^{*}/d\lambda_{14}=25000-X_{6}\geq 0$$

II.4.2.Modelin Bilgisayar Çözümü

Elde edilen bu ksmi türelerin tümünü eşitlik haline dönüştürdükten sonra başlangç simpleks değerleri bilgisayar programına yüklenir. Modele ait verilerin dökümü ve elde edilen sonuçlar aşağıda sunulmaktadr.

```
                     Input Data Describing Your Problem sutas     Page  1

Max     __________X1 __________X2 __________X3 __________X4 __________X5
        __________X6 __________S1 __________S2 __________S3 __________S4
        __________S5 __________S6 __________S7 __________S8 __________S9
        __________S10 _________S11 _________S12 _________S13 _________S14
        __________11 __________12 __________13 __________14 __________15
        __________16 __________17 __________18 __________19 __________110
        __________111 _________112 _________113 _________114 _________S15
        __________S16 _________S17 _________S18 _________S19 _________S20
Subject to
( 1) -8.3D-05X1 __________X2 __________X3 __________X4 __________X5
        __________X6 -1.00000S1 __________S2 __________S3 __________S4
        __________S5 __________S6 __________S7 __________S8 __________S9
        __________S10 _________S11 _________S12 _________S13 _________S14
        +.95000011 __________12 +.95000013 __________14 +1.5200015
        +7.8700016 +.75000017 +2.7240018 +1.0000019 __________110
        __________111 _________112 _________113 _________114 _________S15
        __________S16 _________S17 _________S18 _________S19 _________S20 = +230.680
```

```
: 2) __________X1  __________X2  __________X3  __________X4  __________X5
     __________X6  __________S1  +1.00000S2    __________S3  __________S4
     __________S5  __________S6  __________S7  __________S8  __________S9
     __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
     -.62000011    __________12  -.62000013    __________14  -2.2600015
     -8.6900016    -125.16017    -30.305018    __________19  -1.00000110
     __________111 __________112 __________113 __________114 __________S15
     __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +12.2800
: 3) __________X1  __________X2  +.001980X3    __________X4  __________X5
     __________X6  __________S1  __________S2  -1.00000S3    __________S4
     __________S5  __________S6  __________S7  __________S8  __________S9
     __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
     +1.4900011    __________12  +1.4900013    __________14  +1.5000015
     +75.250016    +38.570017    +22.539018    __________19  __________110
     +1.00000111   __________112 __________113 __________114 __________S15
     __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +976.770
```

```
4) __________X1  __________X2  __________X3  __________X4  __________X5
   __________X6  __________S1  __________S2  __________S3  -1.00000S4
   __________S5  __________S6  __________S7  __________S8  __________S9
   __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
   __________11  +1.3500012    __________13  +1.3500014    +6.6000015
   +280.03016    +127.89017    +75.825018    __________19  __________110
   __________111 +1.00000112   __________113 __________114 __________S15
   __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +1906.27
5) __________X1  __________X2  __________X3  __________X4  __________X5
   __________X6  __________S1  __________S2  __________S3  __________S4
   -1.00000S5    __________S6  __________S7  __________S8  __________S9
   __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
   +4.9800011    __________12  +4.9800013    __________14  +1.7300015
   +238.36016    +159.87017    +42.468018    __________19  __________110
   __________111 __________112 +1.00000113   __________114 __________S15
   __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +910.230
```

```
6)  __________X1  __________X2  __________X3  __________X4  __________X5
    __________X6  __________S1  __________S2  __________S3  __________S4
    __________S5  -1.00000S6    __________S7  __________S8  __________S9
    __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
    +10.800011    __________12  +10.800013    __________14  +5.6500015
    +651.90016    +164.63017    +96.326018    __________19  __________110
    __________111 __________112 __________113 +1.00000114   __________S15
    __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +2007.61
7)  +.950000X1    +.620000X2    +1.49000X3    __________X4  +4.98000X5
    +10.8000X6    __________S1  __________S2  __________S3  __________S4
    __________S5  __________S6  +1.00000S7    __________S8  __________S9
    __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
    __________11  __________12  __________13  __________14  __________15
    __________16  __________17  __________18  __________19  __________110
    __________111 __________112 __________113 __________114 __________S15
    __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +1.5D+06
```

```
( 8) __________X1  __________X2  __________X3  +1.35000X4  __________X5
     __________X6  __________S1  __________S2  __________S3  __________S4
     __________S5  __________S6  __________S7  +1.00000S8  __________S9
     __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
     __________11  __________12  __________13  __________14  __________15
     __________16  __________17  __________18  __________19  __________110
     __________111 __________112 __________113 __________114 __________S15
     __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +2.5D+04
( 9) +.950000X1  +.620000X2  +1.49000X3  __________X4  +4.98000X5
     +10.8000X6  __________S1  __________S2  __________S3  __________S4
     __________S5  __________S6  __________S7  __________S8  +1.00000S9
     __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
     __________11  __________12  __________13  __________14  __________15
     __________16  __________17  __________18  __________19  __________110
     __________111 __________112 __________113 __________114 __________S15
     __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +2.4D+06
```

```
10) __________X1  __________X2  __________X3  +1.35000X4  __________X5
    __________X6  __________S1  __________S2  __________S3  __________S4
    __________S5  __________S6  __________S7  __________S8  __________S9
    +1.00000S10   __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
    __________11  __________12  __________13  __________14  __________15
    __________16  __________17  __________18  __________19  __________110
    __________111 __________112 __________113 __________114 __________S15
    __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +4.5D+04
11) +1.52000X1    +2.26000X2    +1.50000X3    +6.60000X4    +1.73000X5
    +5.65000X6    __________S1  __________S2  __________S3  __________S4
    __________S5  __________S6  __________S7  __________S8  __________S9
    __________S10 +1.00000S11   __________S12 __________S13 __________S14
    __________11  __________12  __________13  __________14  __________15
    __________16  __________17  __________18  __________19  __________110
    __________111 __________112 __________113 __________114 __________S15
    __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +1.1D+06
```

```
(12) +7.87000X1  +8.69000X2  +75.2500X3  +280.030X4  +238.360X5
     +651.900X6  _________S1  _________S2  _________S3  _________S4
     _________S5  _________S6  _________S7  _________S8  _________S9
     _________S10 _________S11 +1.00000S12 _________S13 _________S14
     _________11  _________12  _________13  _________14  _________15
     _________16  _________17  _________18  _________19  _________110
     _________111 _________112 _________113 _________114 _________S15
     _________S16 _________S17 _________S18 _________S19 _________S20 = +5.7D+07
(13) +.750000X1  +125.160X2  +38.5700X3  +127.890X4  +159.870X5
     +164.630X6  _________S1  _________S2  _________S3  _________S4
     _________S5  _________S6  _________S7  _________S8  _________S9
     _________S10 _________S11 _________S12 +1.00000S13 _________S14
     _________11  _________12  _________13  _________14  _________15
     _________16  _________17  _________18  _________19  _________110
     _________111 _________112 _________113 _________114 _________S15
     _________S16 _________S17 _________S18 _________S19 _________S20 = +3.0D+07
```

```
:14) +2.72400X1  +30.3050X2  +22.5390X3  +75.8250X4  +42.4680X5
     +96.3260X6  __________S1 __________S2 __________S3 __________S4
     __________S5 __________S6 __________S7 __________S8 __________S9
     __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 +1.00000S14
     __________I1 __________I2 __________I3 __________I4 __________I5
     __________I6 __________I7 __________I8 __________I9 __________I10
     __________I11 __________I12 __________I13 __________I14 __________S15
     __________S16 __________S17 __________S18 __________S19 __________S20  =  +1.5D+07
:15) +1.00000X1  __________X2 __________X3 __________X4 __________X5
     __________X6 __________S1 __________S2 __________S3 __________S4
     __________S5 __________S6 __________S7 __________S8 __________S9
     __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
     __________I1 __________I2 __________I3 __________I4 __________I5
     __________I6 __________I7 __________I8 __________I9 __________I10
     __________I11 __________I12 __________I13 __________I14 +1.00000S15
                                                                        +05
```

```
(16) __________X1   +1.00000X2  __________X3  __________X4  __________X5
     __________X6   __________S1  __________S2  __________S3  __________S4
     __________S5   __________S6  __________S7  __________S8  __________S9
     __________S10  __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
     __________I1   __________I2  __________I3  __________I4  __________I5
     __________I6   __________I7  __________I8  __________I9  __________I10
     __________I11  __________I12 __________I13 __________I14 __________S15
     +1.00000S16    __________S17 __________S18 __________S19 __________S20 = +1.0D+05
(17) __________X1   __________X2  +1.00000X3    __________X4  __________X5
     __________X6   __________S1  __________S2  __________S3  __________S4
     __________S5   __________S6  __________S7  __________S8  __________S9
     __________S10  __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
     __________I1   __________I2  __________I3  __________I4  __________I5
     __________I6   __________I7  __________I8  __________I9  __________I10
     __________I11  __________I12 __________I13 __________I14 __________S15
     __________S16  +1.00000S17   __________S18 __________S19 __________S20 = +1.5D+05
```

```
18) __________X1 __________X2 __________X3 +1.00000X4 __________X5
    __________X6 __________S1 __________S2 __________S3 __________S4
    __________S5 __________S6 __________S7 __________S8 __________S9
    __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
    __________11 __________12 __________13 __________14 __________15
    __________16 __________17 __________18 __________19 __________110
    __________111 __________112 __________113 __________114 __________S15
    __________S16 __________S17 +1.00000S18 __________S19 __________S20 = +2.0D+04
19) __________X1 __________X2 __________X3 __________X4 +1.00000X5
    __________X6 __________S1 __________S2 __________S3 __________S4
    __________S5 __________S6 __________S7 __________S8 __________S9
    __________S10 __________S11 __________S12 __________S13 __________S14
    __________11 __________12 __________13 __________14 __________15
    __________16 __________17 __________18 __________19 __________110
    __________111 __________112 __________113 __________114 __________S15
    __________S16 __________S17 __________S18 +1.00000S19 __________S20 = +9.5D+04
```

```
20) _________X1 _________X2 _________X3 _________X4 _________X5
    +1.00000X6 _________S1 _________S2 _________S3 _________S4
    _________S5 _________S6 _________S7 _________S8 _________S9
    _________S10 _________S11 _________S12 _________S13 _________S14
    _________I1 _________I2 _________I3 _________I4 _________I5
    _________I6 _________I7 _________I8 _________I9 _________I10
    _________I11 _________I12 _________I13 _________I14 _________S15
    _________S16 _________S17 _________S18 _________S19 +1.00000S20 = +2.5D+04
```

Summarized Results for sutas								Page : 1
Variables No.	Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No.	Names	Solution	Opportunity Cost	
1	X1	%250000.000	0.0000	16	S10	20000.0000	0.0000	
2	X2	21886.6979	0.0000	17	S11	1870.0017	0.0000	
3	X3	%150000.000	0.0000	18	S12	0.0000	0.0000	
4	X4	18518.5182	0.0000	19	S13	0.0000	0.0000	
5	X5	92597.5975	0.0000	20	S14	%2530122.55	0.0000	
6	X6	25000.0000	0.0000	21	11	0.0000	0.0000	
7	S1	0.0000	0.0000	22	12	241.7986	0.0000	
8	S2	665.0044	0.0000	23	13	0.0000	0.0000	
9	S3	0.0000	0.0000	24	14	0.0000	0.0000	
10	S4	0.0000	0.0000	25	15	0.0000	0.0000	
11	S5	0.0000	0.0000	26	16	0.0000	0.0000	
12	S6	0.0000	0.0000	27	17	0.2878	0.0000	
13	S7	%294294.206	0.0000	28	18	20.3500	0.0000	
14	S8	0.0000	0.0000	29	19	195.7808	0.0000	
15	S9	%1194294.20	0.0000	30	110	0.0000	0.0000	
Maximum value of the OBJ = 0 (multiple sols.) Iters. = 28								

Summarized Results for sutas						Page : 2	
Variables No.	Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No.	Names	Solution	Opportunity Cost
31	111	210.0020	0.0000	46	A6	0.0000	0.0000
32	112	0.0000	0.0000	47	A7	0.0000	0.0000
33	113	0.0000	0.0000	48	A8	0.0000	0.0000
34	114	0.0000	0.0000	49	A9	0.0000	0.0000
35	S15	0.0000	0.0000	50	A10	0.0000	0.0000
36	S16	78113.3021	0.0000	51	A11	0.0000	0.0000
37	S17	0.0000	0.0000	52	A12	0.0000	0.0000
38	S18	1481.4818	0.0000	53	A13	0.0000	0.0000
39	S19	2402.4025	0.0000	54	A14	0.0000	0.0000
40	S20	0.0000	0.0000	55	A15	0.0000	0.0000
41	A1	0.0000	0.0000	56	A16	0.0000	0.0000
42	A2	0.0000	0.0000	57	A17	0.0000	0.0000
43	A3	0.0000	0.0000	58	A18	0.0000	0.0000
44	A4	0.0000	0.0000	59	A19	0.0000	0.0000
45	A5	0.0000	0.0000	60	A20	0.0000	0.0000
Maximum value of the OBJ = 0 (multiple sols.)						Iters. = 28	

Sensitivity Analysis for OBJ Coefficients   Page : 1

C(j)	Min. C(j)	Original	Max. C(j)	C(j)	Min. C(j)	Original	Max. C(j)
C(1)	0.0000	0.0000	+ Infinity	C(19)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(2)	0.0000	0.0000	0.0000	C(20)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(3)	0.0000	0.0000	+ Infinity	C(21)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(4)	0.0000	0.0000	+ Infinity	C(22)	0.0000	0.0000	0.0000
C(5)	0.0000	0.0000	0.0000	C(23)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(6)	0.0000	0.0000	+ Infinity	C(24)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(7)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(25)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(8)	0.0000	0.0000	0.0000	C(26)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(9)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(27)	0.0000	0.0000	0.0000
C(10)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(28)	0.0000	0.0000	0.0000
C(11)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(29)	0.0000	0.0000	0.0000
C(12)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(30)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(13)	0.0000	0.0000	0.0000	C(31)	0.0000	0.0000	0.0000
C(14)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(32)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(15)	0.0000	0.0000	0.0000	C(33)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(16)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(34)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(17)	0.0000	0.0000	0.0000	C(35)	- Infinity	0.0000	0.0000
C(18)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(36)	0.0000	0.0000	0.0000

Sensitivity Analysis for OBJ Coefficients							Page : 2
C(j)	Min. C(j)	Original	Max. C(j)	C(j)	Min. C(j)	Original	Max. C(j)
C(37)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(39)	0.0000	0.0000	0.0000
C(38)	- Infinity	0.0000	0.0000	C(40)	- Infinity	0.0000	0.0000

Sensitivity Analysis for RHS Page : 1							
B(i)	Min. B(i)	Original	Max. B(i)	B(i)	Min. B(i)	Original	Max. B(i)
B(1)	34.8992	230.6800	+ Infinity	B(11)	%1078130.00	%1080000.00	+ Infinity
B(2)	-652.7244	12.2800	+ Infinity	B(12)	%56632612.0	%57000000.0	+ Infinity
B(3)	766.7680	976.7700	+ Infinity	B(13)	%29000000.0	%30000000.0	+ Infinity
B(4)	1579.8419	1906.2700	+ Infinity	B(14)	%14000000.0	%15000000.0	+ Infinity
B(5)	885.1108	910.2300	1949.5632	B(15)	%180164.343	%250000.000	%251209.37
B(6)	937.3314	2007.6100	2064.5854	B(16)	21886.6953	%100000.000	+ Infinity
B(7)	%1205705.75	%1500000.00	+ Infinity	B(17)	%142476.859	%150000.000	%151594.28
B(8)	22281.7324	25000.0000	25445.1699	B(18)	18518.5176	20000.0000	+ Infinity
B(9)	%1400000.00	%2400000.00	+ Infinity	B(19)	92597.5938	95000.0000	+ Infinity
B(10)	25000.0000	45000.0000	+ Infinity	B(20)	24147.5469	25000.0000	25314.9590

II.4.3. Elde Edilen Sonuçların Yorumlanması

Bu bölümde, modelin çözümünden elde edilen sonuçları işletme yöneticisine yol gösterecek yönde değerlendirmeye çalışacağız.

Elde edilen bilgisayar çözümünden işletmenin Mart 1989 dönemi için uygulaması gereken optimal üretim planı; pastörize süt 250000 kg./ay, ayran 21886.70 kg./ay, yoğurt 150000 kg./ay, tereyağ 18518.52 kg./ay, beyaz peynir 92597.60 kg./ay, kaşar peyniri 25000 kg./ay olarak elde edilmiştir. Quadratik programlama modelimizden elde edilen bu değerler gerçek üretim değerleri ile karşılaştırıldığında genelde uyumlu ve tutarlı sonuçlar oldukları görülür. İşletme bu üretim programını uyguladığında Mart 1989'da karını maksimum kılacaktır. Burada çok önemli bir koşul kuşkusuz talep tahminlerinin gerçekleşmesidir.

Modelin çözümünden elde edilen diğer önemli bir bilgi, yukarıda açıklanan üretim programını gerçekleştirebilmek için işletmenin Mart 1989 döneminde hangi girdiden nekadar kullanması gerktiğidir. İşletmenin Mart 1989 dönemi girdi miktarları; süt hammaddesi 1205705.80 kg./ay, krema yarı mamul 25000 kg./ay, işçilik 1078130 işçi saat/ay, finansman maliyeti 57000000 TL./ay, yardımcı madde ve ambalaj malzemesi 30000000 TL./ay diğer girdi maliyetleri 124698777.90 TL./ay olarak belirlenir.

Belirlenen üretim programına göre bazı girdilerin tümü kullanılırken bazılarında ise boş kapasiteler meydana gelmektedir. Süt hammaddesinden S_{7} =294294.2 kg./ay atıl kaynak oluşacaktır. Tereyağ üretim bölümünün, üretilen kremanın tamamını kullandığından krema yarı mamulünde atıl kaynak yoktur S_{8} =0 kg./ay. Ayrıca kurulu kapasitenin tamamının kullanılmadığını görmekteyiz. Süt işleme kapasitesinde S_{9} =1194294.2 kg./ay atıl kapasitenin olduğnu görmekteyiz. Krema işleme kapasitesinde de S_{10} =20000 kg./ay atıl kapasite oluşmaktadır. Üretim programına göre bir kısım işgücü atıl kalmakta veya marjinal verimliliği sıfır olmaktadır yani, S_{11} =1870 işçi saat/ay. Finansman masraflarının üst sınırına ulaşıldığı için S_{12} =0 TL./ay elde edilir. Yardımcı madde ve ambalaj malzemelerinde de atıl kaynak yoktur burda S_{13} =0 TL./ay elde edilir. Diğer girdilerde ise S_{14} =2530122.55 TL./ay bir atıl kaynak vardır. İşletme yöneticisi atıl olan bu kaynakları verimli hale dönüştürmenin yolunu bulmalıdır. Süt alım politikası gözden geçirilmeli ve Mart 1989 için satın alınacak süt miktarı atıl kaynak kadar düşürülmelidir. Diğer masraflardaki gereksiz harcamalar da gözden geçirilmelidir. Atıl işgücünün ise verimli hale getirilmesi için personel politikası yeniden değerlendirilmelidir. Üretim bölümlerindeki atıl kapasitenin kullanılabilmesi ise diğer girdi koşullarındaki değişmelre ve talebe bağılıdır.

Gerçekleştirilecek üretim sonucunda bazı ürünler için talebin tamamı karşılanırken bazıları için ise talebin bir kısmı karşılanmamaktadır. Ayran S_{16} =78113.30 kg./ay, tereyağ S_{18} =1481.48 kg./ay, beyaz peynir S_{19} =2402.40 kg./ay karşılanmayan talep söz konusudur. öte yandan pastörize süt, yoğurt, kaşar için talebin tamamı karşılanmaktadır.

Modelin çözümünden elde edilen Lagrange çarpanlarını modelimizde yer alan tüm kısıtlayıcılar için yorumlamaya çalışalım:

-Hammadde kısıtlayıcısına ilişkin olanlar;

Süt hammadesi $\lambda_1=0$ elde edilmiştir. Bu süt hammaddesinin Mart/1989 üretimini gerçekleştirmede önemli bir kısıtlayıcı olmadığını gösterir. 294294.20 kg. süt hammaddesinin üretimde kullanılmaması bunun nedenidir. Böylece süt hammaddesinin gölge fiyatı sıfır çıkmaktadır. Fabrika bu durumda Mart/1989 süt alım politikasını gözden geçirmelidir.

Krema için $\lambda_2=241.7986$ olan gölge fiyatı, keremanın tamamı üretimde kullanıldığı için beklenen bir sonuçtur. 1.5 ton kadar tereyağ talebinin karşılanamamasının bir nedeni de krema üretiminin yetersizliğidir. λ_2 bize krema miktarında bir birimlik artışın amaç fonksiyonunda meydana gelecek artışı göstermaktedir. Fabrika, eğer karlı ise piyasadan krema satın alarak tereyağ üretimini artırmalıdır.

-Kapasite kısıtlayıcılarına ilişkin olanlar;

Süt işleme kapasitesi için gölge fiyat $\lambda_3=0$ dır çünkü atıl kapasite vardır. Aynı durum krema işleme kapasitesi için de söz konusudur, yani $\lambda_4=0$ dır.

İşçilik kısıtlayıcısına ilişkin ise,

Atıl işgücü saatinin bulunması $\lambda_5=0$ çıkmasına neden olmuştur. Bu atıl işgücünün hangi bölümlerden kaynaklandığı araştırılmalı ve personel politikası buna göre düzenlenmelidir.

-Finansman, yardımcı madde, ambalaj ve diğer maliyetlere ilişkin olanlar;

Finansman, yardımcı madde ve ambalaj kısıtlayıcılarında boş kapasite yoktur. Bu durumda gölge fiyatlarının sıfırdan farklı çıkmasını bekleyebiliriz. Oysa finansman maliyetlerinin gölge fiyatı λ_6 =0 yardımcı madde ve ambalaj kısıtlayıcısının gölge fiyatı λ_7 =0.2878 bulunmuştur. Diğer maliyetlerde atıl kapasite olduğu halde gölge fiyatı λ_8 =20.35 elde edilmiştir. Bu durumun bir nedeni maliyet muhasebesi sisteminde hatalı maliyet ayrımından geldiği kanısındayız. Bu nedenle ana girdiler dışındaki girdilere ilişkin gölge fiyatlarını toplam gölge fiyatı olarak değerlendirmek daha yararlı olacaktır düşüncesindeyiz. Buradan $\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8$ =20.64 bulunur.

-Talep kısıtlayıcılarına ilişkin olanlar;

Pastörize süt talebinin gölge fiyatı λ_9 =195.78 bulunmuştur. Bu bize pastörize süt talebinde bir birimlik artışın amaç fonksiyonumuza olan katkısını gösterir. Aynı şekilde yoğurt talebinin gölge fiyatı da λ_{11} =210.002 elde edilmiştir. Ayran, tereyağ, beyaz peynir ve kaşar için ise gölge fiyatları sıfır bulunmuştur.Bu da bize pazarlama bölümünün süt ve yoğurt talebini arttırıcı önlemler alması gerektiğini bildirir.

Yukarıda belirlenen üretim programına göre işletme Mart 1989 döneminde acaba ne kadar kar veya zarar edecektir. Bu durumu belirlemek amacıyla karar değişkenlerine ilişkin çözüm değerlerini Z amaç fonksiyonunda yerlerine koyduğumuzda Max Z=219945007 TL/ay bulunur. Bulunan bu değerin bütüncül maksimum olup olmadığına baktığımızda Kuhn-Tucker koşulları bulunan çözüm değerleri için yaklaşık olarak sağlandığından çözümün bütüncül optimum olduğunu söyleyebiliriz.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bilgisayar ve haberleşme teknolojisindeki hızlı gelişme, günümüz yöneticileri için bilgi akışını hızlandırdığı gibi bilgilerdeki ayrıntıları da arttırmıştır. Bu ayrıntılar arasından genel yargılara varmak ise güçleşmiştir. Bu nedenle karar vermeye yönelik model çalışmaları giderek önem kazanmaktadır. Çalışmamızda yerli ve yabancı literatürde kaynak sıkıntısı çekilen Quadratik programlama modelinin üretim planlaması için nasıl kullanılabileceği açıklanmaya çalışılmıştır.

Çalışmamızın birinci bölümünde, ele alınan quadratik programlama modeli ve genel olarak doğrusal olmayan programlama,kuramsal açıdan geniş olarak ele alınmaya çalışılmıştır. Kuşkusuz tüm konulara ayrıntılı şekilde değinilememiştir. Ancak genel çerçeve içinde modelin yapısına, özelliklerine, çözüm tekniklerine ve sorunlar anlatılmaya çalışılmıştır.

İkinci bölümde ise quadratik programlama modelini,Bursa'daki bir süt ürünleri üreten işletmeye üretim planlaması açısından uygulamaya çalıştık. Modelin çözümünde ve kurulmasında karşılaştığımız güçlükler ampirik çalışmalarda ne gibi sorunların ortaya çıkabileceğini göstermesi açısından çok yararlı olmuştur. Modelin oluşturulması aşamasında maliyet fonksiyonlarının tahmin edilmesi ise ekonometrik bir çalışmayı gerektirmiştir. Bu bize sorun çözmede, sistem yaklaşımının bir kez daha önemini gösermiştir(1).

---

1. Sistem yaklaşımı, sorun çözmede değişik bilim dallarından yararlanarak konuya bir bütün olarak yaklaşan bir Yöneylem Araştırması yöntemidir

Quadratik programlama amaç fonksiyonunun oluşturlmasında maliyet fonksiyonlarının parçalı olarak tahmin edilme yoluna gidilerek amaç fonksiyonumuzun ikinci dereceden daha yüksek çıkması önlenmiştir. Bu yöntem problemimizi çözülebilir kılmıştır. Başta da söz ettiğimiz gibi ikinci dereceden daha yüksek dereceli amaç fonksiyonlu modeller için genel bir çözüm tekniğinin bulunmaması bizi buna başvurmaya zorlamıştır. Uygulamamızda elde edilen sonuçlar Quadratik programlama modelinin üretim planlama çalışmalarında başarılı bir şekilde kullanılabileceğini göstermiştir. Ayrıca çalışmamızın bu alanda ampirik uygulama boşluğunu kısmen de olsa doldurduğu kanısındayız.

Quadratik programlama modelinin çözümünden elde ettiğimiz sonuçlar işletmenin girdi ve çıktı kararlarında yol gösterici yararlı bilgiler olmaktadır. İşletme, düzenlediğimiz model yardımıyla kaynaklarını daha verimli kullanarak, çıktı düzeyini arttırabilir. Öte yandan, bu bilgilere dayanarak hangi girdilerde darboğazlar oluştuğunu, bunların nasıl giderilebileceğini öğrenebilir. Ayrıca belirtmekte yarar vardır ki model işletmenin genel yapısını gösteren karar vermeye yönelik etkili bir araçtır.

Modelin oluşturulması aşamasında elde edilen ürünlerin maliyet fonksiyonları fabrika için yararlı bilgilerdir. Modelin çözümüyle, buldugumuz gölge fiyatları ve yorumlarımız da yöneticiye yol gösterecek diğer önemli bilgilerdir. Gölge fiyatları,girdilerin gerçek fiyatlarını gösterdiğinden girdileri verimli kullanmak açısından da ayrıca önemlidirler.

Çalışmamızda ele aldığımız quadratik programlama modeli karar vermeye yönelik modellerden sadece biridir. Bu amaca yönelik daha pek çok model geliştirilmiştir. Amacımız girişte de belirtiğimiz gibi bu modellerden biri olan quadratik programlama modelini ele alarak kuramsal açıdan tanıtmak ve bir işletmeye nasıl uygulanabileceğini göstermaktir. Çalışmamızı tümüyle değerlendirdiğimizde böyle bir amaca ulaşıldığı söylenebilir. Ancak bu alanda araştırılabilecek daha pek çok konunun bulunduğunu kabul etmekteyiz. Modellerin çözümünde karşılaşılan güçlüklerin uygulamalı çalışmaların yoğulaşması ile daha kolay aşolabilir hale geleceğini düşünüyoruz.

Sonuç olarak çalışmamızda doğrusal olmayan programlama modellerinden Quadratik programlama modelinin süt ve süt ürünleri üretim planlamasında bir araç olarak nasıl kullanılabileceği ve yönetim kararlarında ne tür yararlar sağlayabileceği gösterilmiştir.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

KİTAPLAR:

ALLEN DGR	:	Matematical Analysis for Ekonomist, The Macmıllan Press LTD.,London, 1976.
CEMALCILAR İ. BAYAR D. AŞKUN İ. SÖZ-ALP	:	İşletmecilik Bilgisi,Eskişehir İ.T.İ.A.,Eskişehir,1979.
CHİNANG ALPHA C.	:	Matematiksel İktisadın Temel Yöntemleri,(çev.Ergun Kip,Muzzaffer Sarımeşeli,Osman Aydoğuş),Teori Yayınları,Ankara,1986.
DOGAN MUAMMER	:	İşletmelerde Karar Verme Teknikleri,Bilgehan Basımevi,İzmir, 1985.
DİNLER ZEYNEL	:	Mikro Ekonomik Analize Giriş, Uludağ Üniversitesi yayını,Bursa, 1982.
ERTAŞ SACİT	:	Ekonometrinin Teorisi(Ders Notları) Uludağ Üniversitesi,1983.
MARTOS BELA	:	Nonliner Programing Theory and Methods,Nort-Holland Pub.Comp., Amsterdam, 1975.
MILLER DAVID W., STARR K.MARTIN	:	Executive Decisions and Operation Research, Prentice-Hall of Indıa Prıvıate Ltd., New Delhı,1973.
İLHAN İSMAİL	:	Paremetrik Doğrusal Programlama ve Bir Uygulama Denemesi, B.İ.T.İ.A., BURSA,1980.
KARA İMDAT	:	Yöneylem Araştırması (Doğrusal Olmayan Modeller), Anadolu Üniversitesi Basımevi,Eskişehir, 1986.
MAYNARD H.B.	:	Industrıal Ingıneerıng Hendenbook, Mac Graw-Hall Book Comp.
SERPER ÖZER NECMİ GÜRSAKAL	:	Doğrusal Programlama,B.İ.T.İ.A. İşletme Fakültesi Yayını,Bursa, 1982.

ÖZTÜRK AHMET : Yöneylem Araştırması, Uludağ Üniversitesi Basımevi,BURSA, 1984.

ÖZTÜRK AHMET : Leontıef Modeli ve Doğrusal Programlama,Örnek Kitabevi, 1986.

RIGGES JAMES L., INOUE MICHAEL S. : Introductıon to Operations Research and Management Scıence, Mac Graw-Hall Book Inc. Comp.,New York,1975.

SEZEN HAYRETTİN KEMAL : Dinamik Programlama Yöntemi ve Bursa'daki Bir İşletmeye Uygulanması (Yüksek Lisans Tezi),Bursa, 1986.

ŞENEL MUSA : Matematiksel İktisat Ders Notları, E.İ.T.İ.A.,1974.

TAHA HAMDEY A. : Operatıon Research an Introductıon, Macmıllan Pub.Comp.Inc.New York, 1971.

THIERAUF ROBERT J., KLEKAMP ROBERT C. : Descısıon Makıng Through Operations Research,Johan Wiley Sons Inc., New York,1975.

WAGNER HARVEY M. : Prencıples of Operations Resarch, Prentıce-Hall. Inc., Englewood Cliff, New Jersey,1969.

MAKALELER:

HAZELL P.B.R. : "A Lınear Alternatıve to Quadratic and Samivariance Prfogramming for Farm Plannıng Under Uncertaınty", Amerıcan Journal of Agro Ekonomıcs 1971,Vol.53.pp.53-62.

MCCARL BRUCE A., TICE THOMAS F. : "Linerizing Quadratic Programs through Matrix Digonalization", Amerıcan Journal of Agro Ekonomıcs 1980,Vol.62.pp.571-573.

İLHAN İSMAİL : "Ekonomide Matematik Eniyleme" U.O.İ.İ.B. Dergisi, Kasım-1986, Cilt.9.

ÖZTÜRK AHMET : "Fırsat Maliyetleri ve Gölge Fiyatları",B.İ.T.İ.A.,Mart-1978, Cilt 6.

24 ref