

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU UZUNLUĞA HAİZ NON-LİNEER MALZEMEDEN
YAPILMIŞ ÇUBUKLARDA DALGA VE GERİLME ANALİZİNE
ANALİTİK YAKLAŞIM

ÖZKAN BADEMCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA 2005

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU UZUNLUĞA HAİZ NON-LİNEER MALZEMEDEN
YAPILMIŞ ÇUBUKLARDA DALGA VE GERİLME ANALİZİNE
ANALİTİK YAKLAŞIM

ÖZKAN BADEMCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA 2005

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU UZUNLUĞA HAİZ NON-LİNEER MALZEMEDEN
YAPILMIŞ ÇUBUKLARDA DALGA VE GERİLME ANALİZİNE
ANALİTİK YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez 20.01.2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yaşar PALA (DANIŞMAN)
(Makine Mühendisliği Bölümü)

Yrd.Doç. Dr. İhsan KARAMANGİL
(Makine Mühendisliği Bölümü)

Doç. Dr. İbrahim GÜNEY
(Matematik Bölümü)

ÖZET

Bu çalışmada, ilk olarak non-lineer denklemlere giriş yapılmaktadır. Daha sonra non-lineer denklemleri çözmeye kullanılan bazı yöntemler örnekler verilerek izah edilmektedir.

İkinci olarak, non-lineer gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip malzemenin yapılmış sonlu uzunlukta çubuktaki non-lineer elastik ve elastik-plastik dalga hareketi analiz edilmektedir. Elde edilen bir non-lineer kısmi diferansiyel denklem yeni bir metot kullanılarak iki non-lineer basit diferansiyel eşitliğe ayrılmaktadır. Sınır şartlarını ve başlangıç şartlarını sağlayan analitik çözüm denklemlerin özel çözümlerinden elde edilmektedir. Çubuktaki gerilmeler, dalga hızları ve yer değiştirmeler keyfi koşullar için bulunmaktadır. İki farklı metot geliştirilmektedir. İlk metot çözümde sınırlama getirirken, ikinci metotta sınırlama pratik açıdan daha mantıklı şartlar seçilerek kaldırılmaktadır.

Anahtar kelimeler : Ankastre, Çubuk, Non-lineer, Dalga, Yayılım, Gerilme

ANALYTICAL APPROACH TO WAVE AND STRESS ANALYSIS OF BARS MADE OF NON LINEAR MATERIAL WITH FINITE LENGTH

ABSTRACT

First of all this study contains an introduction to non-linear equations. Later, some techniques used for solving non-linear equations are explained by given examples.

Second of all, the non-linear elastic and elastic-plastic wave motion in a finite bar made of a material obeying non-linear stress-strain relation is analyzed. Non-linear governing partial differential equation is separated into two non-linear ordinary differential equations using a new method for the separation. Analytical solution satisfying boundary and initial conditions are constructed from the proper solutions of equations. Stresses, wave velocities and displacements in the rod are found for arbitrary conditions. Two methods are developed. While the first method brings a limitation on the solution, the second one removes this problem by selecting more practically logical conditions.

Keywords : Ancastré, Rod, Non-linear, Wave, Motion , Stres

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
2.1 Non-Linearite Nedir?	2
2.2 Linear Teoriden Olan Diğer Çıkarımlar	5
2.3 Non-Linear Kısmi Diferansiyel Denklemler için Ad Hoc Metodu	8
2.3.1 Hareketli Dalga Çözümleri	8
2.3.2 Değişkenlere Ayırma Yöntemi	10
2.3.3 Elemanter Açılım	12
2.3.4 Fonksiyonel Metotlar	13
2.3.5 Bağlı Değişkenler Arasındaki İlişkiler	14
2.4 Benzerlik Dönüşümleri Aracılığıyla Çözülebilir Denklemler	15
3. MATERYAL VE YÖNTEM	17
3.1 Analiz	17
3.2 Non-Linear Elastik Malzemeler	20
3.2.1 Sonlu Uzunlukta Ankastre Çubuk	24
3.2.2. Non-Linear Elastik Dalga Hızı	26

3.2.3 Başlangıç Koşullarının Modifikasyonu	27
4. ARAşTIRMA SONUÇLARI VE TARTIşMA	35
5. KAYNAKLAR	36
6. TEşEKKÜR	38
7. ÖZGEÇMİş	39

ŞEKİLLER DİZİNİ**SAYFA**

Şekil 1. Sonlu Çubuk	17
Şekil 2. Çeşitli n değerleri için u/\bar{u} nun x/x_0 ile değişimi	29
Şekil 3. Çeşitli x/l değerleri için \bar{c}_n nin t/t_0 ile değişimi	31
Şekil 4. $n = 1.3$ için çeşitli x/x_0 değerleri için $\sigma/\bar{\sigma}$ nin t/t_0 ile değişimi	32
Şekil 5. $n = 1.9$ için çeşitli x/x_0 değerleri için $\sigma/\bar{\sigma}$ nin t/t_0 ile değişimi	33
Şekil 6. $n = 2.5$ için çeşitli x/x_0 değerleri için $\sigma/\bar{\sigma}$ nin t/t_0 ile değişimi	33
Şekil 7. $n = 3.1$ için çeşitli x/x_0 değerleri için $\sigma/\bar{\sigma}$ nin t/t_0 ile değişimi	34

1.GİRİŞ

Günümüzde non-linear problemlerle ciddi bir şekilde ilgilenilmektedir. Belkide bu ilginin en önemli sebebi günlük hayatta karşılaşılan problemlerin birçoğunun non-linear davranış sergilemesidir. Bazı alaşımlar, kompozitler ve kauçuklar gibi non-linear elastik veya hiper-elastik davranış gösteren birçok endüstriyel malzeme mevcuttur. Ayrıca, tavllanmış çelikler gibi Hooke kanuna uyan bazı mühendislik malzemeleri özel ısıtma işlemlerinden sonra non-linear davranış gösterebilirler

Mühendislik alanında ve özellikle de uzay sistemleri endüstrisinde kullanılan birçok yapısal eleman non-linear davranış sergiler. Bu gelişmelerin sonucu olarak non-linear malzemeden yapılmış çubuklardaki gerilme ve dalga analizi ilgi çekmektedir. Buna rağmen, bu alanda yapılmış çok fazla analitik çalışmaya rastlanmamıştır. Bu sebeple, bu çalışmada çubuklardaki gerilme ve dalga hareketine dair analitik ifadeler elde etmemizi sağlayan analitik bir yöntem geliştirilmeye çalışılmaktadır.

Yeterince büyük yükleme koşulları için, malzemedeki hem elastik deformasyon hem de plastik deformasyon gelişebilir. Elastik ve elastik-plastik bölgeyi kapsayan tek değerli gerilme uzama eğrisi göz önüne alındığında, sunulan teori malzeme özelliği $\sigma = k\varepsilon^n$ şeklinde karakterize edilmiş olmak koşuluyla çubuk, tel ve konsollardaki elastik-plastik gerilmeleri ve dalgaları açıklamak için kullanılabilir. Burada k, n malzeme bileşenleridir. Gerilme-şekil değiştirme eğri tipine bağlı olmayan dalga hızları, deformasyonlar ve gerilmeler için açık ifadeleri veren önemli ilaveler verilen başlangıç ve sınır koşulları için yapılmamıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1 Non-Linearite Nedir ?

Mühendislik yapılarının çoğu non-linear davranış sergilerler. Non lineeritenin dikkate alındığı metotlar ve elde edilen denklemler analitik olarak çözülemediğinden, çoğu kez gerek malzemede ve gerekse geometride lineerleştirme yapılır. Bu nedenle, “ elastisite modülünü sabit düşünelim ” , “ küçük genlikli titreşimleri ele alalım ” , “ sabit ısı iletkenlik için ” ve benzeri gibi ifadelere çok sık rastlanılır. Üniversite öncesi yıllarda ki konularda olayların çoğunlukla ideal, sürtünmesiz gibi kabulleri içermesi ; malzemelerde de lineer elastik , rijit, sıkıştırılmaz veya bunun gibi çok sayıda kabuller yapılması hep bu yüzdendir. D ile gösterilen operatörü (İşlemci) ele alalım. a ve b sabitler olmak üzere, D operatörü f ve g fonksiyonları halinde

$$D[af + bg] = aDf + bDg \quad (2.1)$$

şeklinde bir eşitliği sağlıyor ise, o taktirde D operatörü lineer bir operatör adını alır.

Aynı lineerlik özelliği integraller, diğer bazı operatörler ve bunların birleşimleri için de geçerli olabilmektedir. Kısaca, bu lineerlik özelliğine, diferansiyel denklemleri, integral denklemlerini, fark denklemleri v.b denklemleri kullanan temel operatörler sahiptir. Genel olarak L operatörü lineer ise :

$$L[af + bg] = aLf + bLg \quad (2.2)$$

dır. Burada g ve f fonksiyonlar ; a ve b ise, sabitlerdir. Açıkça görüleceği üzere, logaritma, kare alma, üstel operatörler bu özelliğe sahip değildirler.

$$\exp[af + bg] = \exp[af] \exp[bg] \neq a \exp f + b \exp g \quad (2.3)$$

İkinci merteye lineer bir adi diferansiyel denklemi ele alalım :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0 \quad (2.4)$$

Bu denklemde a sabittir. Eğer x_1 ve x_2 her ikisi de (2.4) denkleminin çözüm ise,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + ax_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + ax_2 = 0 \quad (2.5)$$

dir. İkinci türevin lineerliğinden $Ax_1 + Bx_2$ çözümüne ulaşılabilir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. Süperpozisyon ilkesinin temelini oluşturan bu kavram, aslında geçmişte fiziki doğa olaylarını tanımlamak için oluşturulan teorilerden elde edilen başarının bir getirisi olmuştur. Bu temel çözüm ilkesiyle, kullanılan matematiksel denklemin daha esnek sonuçlarına ulaşılmıştır, yani fiziksel doğa olaylarını tanımlamada yardımcı koşullar elde edilmiştir.

Şimdi (2.4) denklemi, kuvvet $ax + bx^2$ formunda tanımlanarak non-lineerliği ifade etmek için tekrarlandığında, denklem aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax + bx^2 = 0 \quad (2.6)$$

Eğer (2.6) denklemin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ şeklinde çözümü mevcut ise ayrıca $x_1 + x_2$ de çözümdür ? Denklemden x yerine $x_1 + x_2$ konursa

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} + ax_1 + ax_2 + bx_1^2 + 2bx_1x_2 + bx_2^2 \quad (2.7)$$

elde edilir ve denklem aşağıdaki şekilde gruplanabilir:

$$\left[\frac{d^2x_1}{dt^2} + ax_1 + bx_1^2 \right] + \left[\frac{d^2x_2}{dt^2} + ax_2 + bx_2^2 \right] + 2bx_1x_2 \quad (2.8)$$

(2.8) denklemindeki ilk iki köşeli parantezdeki terimler uygun varsayımlar ile yok edilebilir, ancak son terim sıfır olamaz. Bu nedenle $x_1 + x_2$ ifadesi çözüm değildir. Böylece, süperpozisyon ilkesinin burada yetersiz kaldığını görülür. Çok nadir durumlarda non-lineer problemi lineer probleme çeviren bir dönüşüm yapılabilir ve bu sayede süperpozisyon ilkesini kullanılabilir. Özellikle birinci mertebe non-lineer denklemlerde bir dönüşüm ile lineer hale getirilebilen denklem sayısı diğer mertebedeki denklemlere oranla daha çoktur.

Eğer adi diferansiyel denklem y değerine ve onun birinci dereceden türevlerine bağlı ve ayrıca bu terimlerin $y'y''$, $yy'y'''$ şeklinde çarpımları yok ise, bu denklem açıkça lineerdir denilir. Buna göre:

$$y'' + x^3 y + e^x y = \log x \quad (2.9)$$

denklemini lineer değişken katsayılı ikinci mertebeden denklemdir. x^3, e^x ve $\log x$ veya x e bağlı herhangi başka bir fonksiyon olması, denklemini y için non-lineer yapmamaktadır. Ancak

$$(y'')^2 + y' + y^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (2.10)$$

$$y''' + y'y'' = 0, \quad (2.11)$$

denklemleri sırasıyla ikinci ve üçüncü dereceden non-lineer denklemlerdir. Bu denklemlerde ki non-lineer terimler $y'y''$, $(y'')^2$ ve $y^{\frac{1}{2}}$ dir. Non-lineer denklem çeşitleri oldukça fazladır. Bazıları çözüm açısından diğerlerinden daha zordur. Çoğunlukla analitik çözüm vermezler.

2.2. Lineer Teoriden Olan Diğer Çıkarımlar

n . dereceden lineer diferansiyel denklem n den farklı veya lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (2.12)$$

denklemini ele alalım. y_1 ve y_2 nin (2.12) denkleminin iki farklı çözümü olduklarını kabul edelim. Bu takdirde, genel çözüm

$$y = Ay_1 + By_2 \quad (2.13)$$

dir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. Eğer (2.12) denklemine yy' terimi eklenerek modifiye edilecek olursa, denklem non-lineer olur ve şöyle yazılabilir:

$$y'' + (b(x) + y)y' + c(x)y = 0 \quad (2.14)$$

Eğer y_1 ve y_2 , (2.14) denkleminin çözümü ise bunların toplamı çözüm değildir. Non-lineer denklemlerde lineer bağımsız çözüm olamaz.

İkinci aşamada, (2.14) denkleminin iki kez üst üste integrasyonla elde edilebilen ve keyfi sabitler içeren bir çözüme sahip olduğu düşünülebilir. Genel çözüm, bu sabitlerin fonksiyonudur ve (2.13) denklemindeki gibi basit bir formda değildir. Şimdi, bu söylenenleri açıklamak üzere, atmosfer dinamiğinde karşılaşılan sınır tabaka problemini içeren bir örnek ele alalım. Kanat yüzeyinden akışkanın ayrılması işlemini tanımlayan denklem:

$$y \frac{d^2 y}{d\eta^2} + v \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 = 0 \quad (2.15)$$

formundadır. Burada;

$$v = (1 - \mu) / \mu \quad (2.16)$$

dir. $p = dy/d\eta$ konulursa,

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dy}{d\eta} \right) = \frac{d}{dy} (p) \frac{dy}{d\eta} = p \frac{dp}{dy} \quad (2.17)$$

bulunur . Bilahare, (2.15) denklemini birinci dereceden denkleme çevrilirse:

$$yp \frac{dp}{dy} = -vp^2 \quad (2.18)$$

verir. Bu denklem düzeltilmiş halde şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\frac{dp}{p} = -v \frac{dy}{y} \quad (2.19)$$

(2.19) denkleminin çözümü, integre edilerek:

$$\log p = -v \log y + C_1 \quad (2.20)$$

ya da

$$p = \frac{dy}{d\eta} = Cy^{-v} = Cy^{1-(1/\mu)} \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir. Tekrar integre edilirse

$$y^{1/\mu} = \frac{1}{\mu} (Cx + B) \quad (2.22)$$

veya

$$y = \left[\frac{1}{\mu} (Cx + B) \right]^\mu \quad (2.23)$$

bulunur. Burada C ve B integrasyon sabitleri olup, genel çözüm bu sabitlerin fonksiyondur.

Üçüncü olarak, bir non-lineer denklemde y nin bütün terimleri aynı dereceli olmadığı sürece, herhangi bir $A (\neq 1)$ sabiti ile çarpım sonucunda meydana çözüm, önceki çözüm ile aynı olmayacaktır. Bunu göstermek için Van Der Pol denklemini örnek olarak ele alalım. Van Der Pol denklemi:

$$y'' + \epsilon y^2 y' - \epsilon y' + y = 0 \quad (2.24)$$

dır. (2.24) denkleminde ikinci terimin derecesi üç iken birinci, üçüncü ve dördüncü y teriminin ve türevlerinin dereceleri birdir. Eğer y_1 in yukarıdaki (2.24) denklemin çözümü olduğunu kabul edersek, y_1 çözümünün herhangi bir A sabiti ile çarpımı sonucunda ($A = 1, A = 0$ durumları hariç) oluşan yeni çözüm, (2.24) denklemini sağlamamaktadır. Şimdi bu söylediklerimizi açıklamak amacıyla A sabitini kullanarak (2.24) denklemini tekrar yazarsak:

$$Ay_1'' + \epsilon A^3 y_1^2 y_1' - \epsilon Ay_1' + Ay_1 = 0 \quad (2.25)$$

formunda olur. (2.25) denkleminde her terim A ya bölüldüğünde:

$$y_1'' + \epsilon A^2 y_1^2 y_1' - \epsilon y_1' + y_1 = 0 \quad (2.26)$$

elde edilir. Denklemden de görüleceği üzere $A=1$ olmadığı sürece denklem 0 (sıfır) dan farklı olmaktadır. Bu bize (2.24) denkleminin çözümü olarak kabul ettiğimiz y_1 in herhangi bir A sabiti ile çarpımı sonucunda artık denklemi sağlamadığını göstermektedir.

Diğer taraftan denklemin tüm terimlerinin dereceleri (2.12) denklemindeki gibi aynı olduğu takdirde, çözüm herhangi bir sabiti ile çarpılırsa da denklemi yine

sağlamaktadır. (2.12) denkleminin çözümü olan (2.23) denklemi herhangi bir A sabiti ile çarpılarak:

$$y = A \left[\frac{1}{\mu} (Cx + B) \right]^\mu \quad (2.27)$$

şeklinde yazılabilir. (2.27) denkleminin, (2.12) denkleminin çözümü olduğu kolayca doğrulanabilir.

2.3 Non-linear Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Ad Hoc Metodu (Çözüm Formlarının Önceden Sezilmesi)

Ad hoc metodu non-linear kısmi diferansiyel denklemlerin özel çözümünü elde etmek için kurulmuştur. Bu, lineer teoride olduğu gibi, bizi ilgilendiren denklemlerin en büyük kaynaklarından biridir.

2.3.1 Hareketli Dalga Çözümleri

Burgers, Hopf ve Cole, türbülanslı akış için matematiksel model olarak ilk takdim edilen

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \quad (2.28)$$

denklemini ele almışlardır. $u = \psi_x$ şeklinde dönüşüm yaparak, x e göre integre edilip, zamana bağlı terimi çıkararak aşağıdaki denklem elde edilebilir:

$$\psi_t + \frac{1}{2} \psi_x^2 = \nu \psi_{xx} \quad (2.29)$$

Genelleştirilmiş hareketli dalga tipi için

$$\psi = f[t + g(x)] \quad (2.30)$$

formunda bir çözüm şekli ortaya atalım. Bu denklemde f, g daha sonra bulunmaları gerekli fonksiyonlardır. (2.30) denklemini $w = t + g(x)$ kabulü ile (2.29) denkleminde yerine koyarak

$$f'(w[1 - vg''(x)]) = [g'(x)]^2 \left[vf'' - \frac{1}{2}(f')^2 \right] \quad (2.31)$$

elde ederiz. Denklem yeniden düzenlenirse,

$$[1 - vg''(x)]/(g')^2 = \left[vf'' - \frac{1}{2}(f')^2 \right] / f' = \lambda \quad (2.32)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde λ , sabittir. λ , (2.32) denkleminin sol tarafı sadece x e bağlı sağ tarafı ise hem x e ve hem de t ye bağlıdır. Bu klasik bir ayırma yöntemidir. Bilahare, $f(w)$ ve $g(x)$ denklemleri

$$vf'' - \frac{1}{2}(f')^2 - \lambda f' = 0 \quad (2.33)$$

$$vg'' + \lambda(g')^2 = 1$$

denklemlerini sağlamalıdır. Açıkça görülebilir ki, yukarıdaki denklemler birer non-linear denklemdir.

2.3.2 Değişkenlere Ayırma Yöntemi

Çeşitli araştırmacılar özel non-linear kısmi diferansiyel denklemleri doğrudan ayırmayı denemişlerdir. Bunların arasında Oplinger'in tellerin non-linear titreşimi, Smith'in anizotropik akışı, Tomotika ve Tamata'nın iki boyutlu transonic akışı ve Keller'in çalışmalarını bulabiliriz. Bütün bu yazarlar bu yöntemle elde edilen çözümün formunu incelemek için modus operandi'yi (özel bir inceleme yöntemi) kullanmışlar ve sonra uyum sağlayacak yardımcı koşulları araştırmışlar.

Oplinger problemi , $(x = 0)$ da bir ucundan sabitlenmiş ve $(x = l)$ de belirlenmemiş bir periyodik titreşime maruz bir sicimin salınımlarını idare eden

$$y_{tt} - C^2 \left[1 + \alpha \int_0^1 y_x^2 dx \right] y_{xx} = 0 \quad (2.34)$$

zayıf non-lineer hiperbolik denklemin çözümünü arama problemidir. (2.34) denkleminde

$$y = F(x)G(t) \quad (2.35)$$

şeklinde direkt ayırma denenirse,

$$\int_0^1 y_x^2 dx = G^2(t) \int_0^1 (dF/dx)^2 = IG^2(t) \quad (2.36)$$

elde olunur. Buradan,

$$F'' + v^2 F = 0 \quad (2.37)$$

$$G'' + v^2 C^2 [1 + \alpha IG^2] G = 0$$

bulunur. Bu ayrılmış denklemler v sabitini içermektedir. Yukarıdaki denklemlerden sadece ikinci denklem non-lineer bir denklemdir.

İkinci örnek olarak, değişkenlere ayırma yöntemi yardımıyla benzerlik dönüşümünün geliştirilmesini teklif eden Birkhoff'tan söz edeceğiz. Genel kavram için Ames veya Hansen' e başvurulabilir. Non-lineer difüzyon denklemini ele alalım :

$$[C^n C_r]_r = C_t \quad (2.38)$$

Genel kavram

$$\xi = \xi(r, t) \quad \eta = \eta(r, t) \quad (2.39)$$

şeklinde ξ ve η yeni değişkenlerinin aranmasıdır. Öyle ki (2.38) denklemi yeni değişkenlere dönüştürüldüğü zaman ayrılabilir olsun. Basitlik açısından aşağıdaki şekilde

$$\xi = t \quad \eta = r / R(t) \quad (2.40)$$

bir değişken dönüşümü düşünelim. Burada $R(t)$, denklem ayrıştırılabilir olacak şekilde seçilmesi gerekli bir fonksiyondur. Yani, bu seçim sonunda (2.38) denklemi,

$$C = U(t)Y(\eta) \quad (2.41)$$

şeklinde ayrıştırılmış hale gelsin. (2.41) denklemi (2.38) denklemine yerine konulup, $U^{n+1}(t)$ ye bölüldüğünde

$$\frac{d}{d\eta} [Y^n Y'] = [R(t) / U^{n+1}] [RU'Y - \eta UR'Y'] \quad (2.42)$$

bulunur. (2.42) denklemin sol tarafı sadece η nun fonksiyonudur. Bilahare, eğer sağ taraftaki köşeli parantezdeki terim η ve t fonksiyonlarının çarpımı ise C için çözüm ayrılabilir olmaktadır.

$$UR' = -AU'R \quad (2.43)$$

(2.43) denklemi A sabitiyle birlikte çözümlendiğinde

$$R(t) = [U(t)]^{-A} \quad (2.44)$$

şeklinde olur ve (2.42) denklemi

$$\frac{\frac{d}{d\eta} [Y^n Y']}{Y + A\eta Y'} = \frac{U'}{U^{n+1+2A}} = -\lambda \quad (2.45)$$

formunu alır. U ve Y için iki non-linear denklem çözülmelidir. λ ve A değerleri sınır şartlarına bağlıdır.

2.3.3 Elemanter Açılım

İki veya üç terimli açılım çözümü, non-linear kısmi diferansiyel denklemler için bazen mümkün olmaktadır. Böyle bir açılımı geliştirmek için Tamada ve Tomotika'nın transonic denklemini kullanalım :

$$[kw]_{\psi\psi} = [(kw)^2]_{\phi\phi} \quad (2.46)$$

Bu yazarlar yukarıdaki denklemin

$$kw = f(\phi) + g(\psi) \quad (2.47a)$$

$$kw = f_0(\psi) + f_1(\psi)\phi^2 \quad (2.47b)$$

$$kw = F[\phi + \psi^2] + 2\psi^2 \quad (2.47c)$$

şeklinde çözümlere malik olduklarını bulmuşlardır. Bütün durumlardaki non-linear adi diferansiyel denklemleri çözümlenmişlerdir. Birini örnek olarak gösterecek olursak, (2.47b) denklemini (2.46) denkleminde yerine koyarak

$$f_0'' - 4f_1 f_0 = [12f_1^2 - f_1'']\phi^2 \quad (2.48)$$

bulunur. Denklemin sol tarafı sadece ψ e bağlı iken sağ tarafı her iki değişkeni içermektedir. Açıkça görüldüğü üzere

$$12f_1^2 - f_1'' = 0 \quad (2.49)$$

olmadığı sürece denklem non-linear bir denklemdir

2.3.4 Fonksiyonel Metotlar

Cole, modifiye edilmiş Burger denklemini lineer difüzyon denklemine ($\theta_t = v\theta_{xx}$) dönüştürmek için mükemmel bir fikir ileri sürmüştür. (2.29) denklemini ile işe başlayıp,

$$\psi = F[\theta, (x, t)] \quad (2.50)$$

Koyalım. Burada F ve θ , denklemleri basitleştirecek şekilde seçilebilir. ψ üzerindeki bu dönüşüm ile (2.29) denklemleri aşağıdaki şekilde olur:

$$F'[\theta_t - v\theta_{xx}] = \left[vF'' - \frac{1}{2}(F')^2 \right] \theta_x^2 \quad (2.51)$$

(2.51) denklemlerinden görüleceği üzere denklem, θ ya bağlı olarak önemli değişiklik göstermektedir. Eğer θ , $\theta_t = v\theta_{xx}$ olacak şekilde seçilirse, o takdirde $\theta_x \neq 0$ olur ve bu durumda F ,

$$2vF'' = (F')^2 \quad (2.52)$$

denklemlerinin bir çözümü olmalıdır.

2.3.5 Bağılı Değişkenler Arasındaki İlişkiler

Bazı kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm karakteri, bağımlı değişkenler arasındaki açıkça belirtilmemiş bir bağıntı olduğu varsayılarak elde edilebilir. Yarı sonsuz yassı levha üzerindeki non-newtonian akışkanın sınır tabaka akışı ele alındığında:

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y &= v[(u_y)^n]_y \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

denklemleri elde edilmektedir. Genel $F(u)$ için

$$v = F(u) \quad (2.54)$$

şeklinde çözüm formları araştırılmıştır. Süreklilik denkleminde $u_x = -F(u)u_y$ bulunur. Dolayısıyla, bu sayede momentum denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$[uF(u) - F]u' + v[(u')^n]' = 0 \quad (2.55)$$

(2.55) denklemi y için, x parametrelili adi diferansiyel denklemdir. $F = \alpha u^{m-1}$, $m > 1$ seçildiğinde (2.55) denklemi aşağıdaki şekilde olmaktadır:

$$v[(u')^n]' + \alpha(m-2)u^{m-1}u' = 0 \quad (2.56)$$

(2.56) denklemi bir kez integre edildiğinde

$$v(u')^n + (\alpha/m)(m-2)u^m = A(x) \quad (2.57)$$

verir. Burada $m \neq 2$ olmalıdır. $A(x)$ yardımcı koşullardan tespit edilebilir.

2.4. Benzerlik Dönüşümleri Aracılığıyla Çözülebilir Denklemler

Akışkanlar mekaniği, non-linear difüzyon, dalga yayılımı ve diğer alanlardaki birçok ilerlemeler benzerlik değişkenleri oluşturma kabiliyetimiz sayesinde başarılmıştır. Yaygın kullanılan dört bölüm arasından grup invaryanları en çok ses getiren metot olmuştur. Bu yöntem kolayca genelleştirilmektedir. Bu bölümde non-linear akışkanlardaki ısı tranferinde Lee ve Ames tarafından elde edilen bazı non-linear denklemler özetlenmiştir.

Lee ve Ames ten, sınır tabaka temel denklemleri formu:

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.58)$$

$$uu_x + vv_y = U_e U_e' + \left[|u_y|^{n-1} u_y \right]_y + \alpha \theta \quad (2.59)$$

$$u\theta_x + v\theta_y = (N_{Pr})^{-1} \theta_{yy} \quad (2.60)$$

dır. Burada $u, v, U_e, N_{Pr}, \theta$ ve n sırasıyla x ve y yönündeki boyutsuz hızları, sınır tabaka hızını, Prandtl sayısını, boyutsuz sıcaklığı ve non-lineerite parametrelerini göstermektedir. Zorlanmış konveksiyon için $\alpha = 0$ ve doğal konveksiyon için $\alpha = 1$ dir.

(a) Düz Tabaka Üzerinde Momentum Transferi

$$n(n+1)f''' + (f'')^{2-n} f = 0 \quad (2.61)$$

Bu problemin incelemesi Acrivos tarafından yapılmıştır.

(b) Jet Akışlarda Momentum Transferi

$$(f')^2 + ff'' = \frac{d}{d\eta} \left[|f''|^{n-1} f'' \right] \quad (2.62)$$

Gutfinger ve Shinnar, Kapur, Kapur ve Srivastava bu tür akışların mühendislik teki önemini kapsamlı olarak araştırmışlardır.

(c) Falkner-Skan akışı $U_e = x^m$

$$(f')^2 - \frac{(2n-1)m+1}{m(n+1)} ff'' = 1 + \frac{1}{m} \frac{d}{d\eta} \left[(f'')^n \right] \quad (2.63)$$

(d) Sıkıştırılmış Akış, Zorlanmış Konveksiyon $U_e = x^{1/3}, \theta_B = x^t$

$$f'^2 - 2ff'' = 1 + 3 \frac{d}{d\eta} \left[(f'')^n \right] \quad (2.64)$$

$$g'' + N_{pr} \left(\frac{2}{3} fg' - tf'g \right) = 0 \quad (2.65)$$

(e) Zorlanmış Konveksiyon, Değişken Isıl İletkenlik

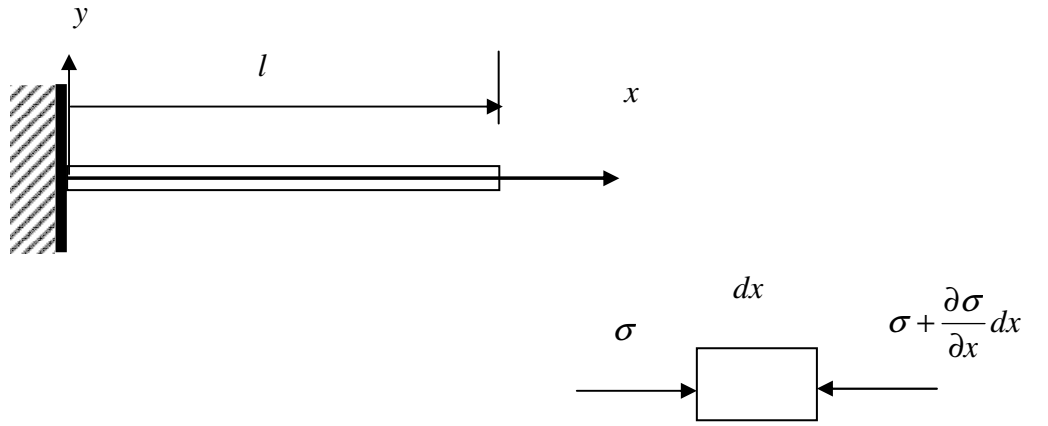
$$n(n+1)f''' + (f'')^{2-n} f = 0 \quad (2.66)$$

$$\frac{1-n}{(r-1)(n+1)} f'g - \frac{1}{n+1} fg' = \frac{1}{N_{pr}} \frac{d}{d\eta} \left[g^{r-1} g' \right] \quad (2.67)$$

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Analiz

Şek.1 deki gibi l uzunluğunda bir çubuk düşünelim. Çubuğun kesiti A ve malzemenin yoğunluğu ise ρ dır. Hareket denklemini elde etmek için Şek.1 deki diferansiyel elemanı göz önüne alıp, x yönünde Newton un ikinci hareket kanununu yazalım [Pala, 2004]:



Şekil 1. Sonlu Çubuk

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Burada u , x doğrultusundaki yer değiştirmedi. $\sigma = k\varepsilon^n$ non-lineer elastik gerilme-şekil değiştirme bağıntısını kullanarak (3.1) denklemini

$$k \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

ya da

$$c_v^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $c_v = \sqrt{k/\rho}$ dur. (3.3) denklemi elemanter teknikler kullanılarak açık (explicit) çözümü periyodik fonksiyonlar cinsinden bulunamayan ikinci derece bir non-linear kısmi diferansiyel denklemdir.

(3.3) denklemini sağlayan bir çözüm aramak yerine kısmi diferansiyel denklemi iki adi diferansiyel denkleme ayırmayı tercih edeceğiz. Bu metodun temelleri Pala tarafından kurulmuştur [Pala, 1997]. (3.3) denklemini adi diferansiyel denklemlere bölmek için u nun aşağıdaki gibi yazılabildiğini varsayalım :

$$\xi(x,t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = V^s(x) T^m(t) \quad (3.4)$$

burada s, m ; değerleri ayrıştırılmış adi diferansiyel denklemlerin çözümleri en basit olacak şekilde seçilmeleri gerekli sabitlerdir.

(3.3) denkleminin sağ tarafı u nun t ye göre kısmi türevini ihtiva ettiği için (3.4) denkleminin formu (3.3) de kullanılmak için uygun değildir. Bunun üstesinden gelmek için (3.3) denkleminin her iki tarafını x e göre türetelim :

$$c_v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.5)$$

(3.4) denklemi ile (3.5) denkleme müracaat ederek

$$c_v^2 \frac{\partial}{\partial x} (sV^{s-1}V'T^m) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(V^{\frac{s}{n}} T^{\frac{m}{n}} \right) \quad (3.6)$$

$$c_v^2 [s(s-1)V^{s-2}V'^2T^m + sV^{s-1}V''T^m] = V^{\frac{s}{n}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{m}{n} T^{\frac{m}{n}-1} \ddot{T} \right] \quad (3.7)$$

$$c_v^2 [s(s-1)V^{s-2}V'^2T^m + sV^{s-1}V''T^m] = V^{\frac{s}{n}} \left[\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) T^{\frac{m-2}{n}} \dot{T}^2 + \frac{m}{n} T^{\frac{m-1}{n}} \ddot{T} \right] \quad (3.8)$$

elde ederiz. Şimdi $m = n$ ve $s = 1$ seçelim. m ve s nin bu değeri $V(x)$ ve $T(t)$ diferansiyel denklemlerinin formunu daha da basitleştiriyor. Bilahare, (3.8) denkleminde

$$c_v^2 V'' T^n = \ddot{T} V^{\frac{1}{n}} \quad (3.9)$$

ya da buradan

$$\frac{\ddot{T}}{T^n} = c_v^2 \frac{V''}{V^{\frac{1}{n}}} \quad (3.10)$$

elde edebiliriz.

(3.10) denkleminin sağ tarafı sadece x in fonksiyonu iken, sol taraf sadece t nin fonksiyonudur. Bu ise sadece iki tarafında bir sabite eşit olmasıyla mümkündür. Bu sabite $-\lambda^2$ diyebiliriz. Şimdi, (3.10) denkleminde aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$\ddot{T} + \lambda^2 T^n = 0 \quad (3.11a)$$

$$V'' + \mu^2 V^{\frac{1}{n}} = 0 \quad \mu^2 = \frac{\lambda^2}{c_v^2} \quad (3.11b)$$

Denklem (3.11a) ve (3.11b), keyfi n değeri için açık çözümü analitik metotlarla kolayca bulunamayan iki adet ikinci dereceden non- lineer adi diferansiyel denklemlerdir. Bunun da ötesinde sönümlenme terimleri içermediği için perturbasyonlar teorisi gibi yarı analitik metotlar da bu denklemlere uygulanamaz. Aslında, literatür de bu tür denklemler üzerine kapsamlı bir çalışmada mevcut değildir. O yüzden farklı bir yol takip ederek çözüm formlarını peşinen önereceğiz.

3.2 Non-Linear Elastik Malzemeler

İlk olarak şekil değiştirme analizini ele alalım. Dalga hızları metodun bir sonucu olarak bu ilk kısımdan elde edilecektir. Lineer hale tekabül eden $n = 1$ hali hariç (3.11a) denkleminin genel çözümü literatürde bulunmamaktadır. Ancak, denklemin kendisinin ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olması münasebetiyle en az iki sabit ihtiva etmesi gerektiğini akılda tutarak (3.11a) denkleminin uygun çözüm formunu aşağıdaki gibi önereceğiz :

$$T(t) = T_0 (t + t_0)^{s_0} \quad (3.12)$$

(3.11a) denklemi, yukarıda önerdiğimiz formun ikinci türevini ihtiva etmektedir. Bu yüzden önerdiğimiz formu iki kez türeteceğiz:

$$\dot{T}(t) = T_0 s_0 (t + t_0)^{s_0-1} \quad (3.13)$$

$$\ddot{T}(t) = T_0 s_0 (s_0 - 1)(t + t_0)^{s_0-2} \quad (3.14)$$

şimdi elde ettiğimiz ikinci türevi ve önerdiğimiz uygun çözüm formunu (3.11a) denkleminde yerine koyarak:

$$T_0 s_0 (s_0 - 1)(t + t_0)^{s_0-2} + \lambda^2 [T_0 (t + t_0)^{s_0}]^n = 0 \quad (3.15)$$

elde ederiz. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$T_0 s_0 (s_0 - 1)(t + t_0)^{s_0-2} + \lambda^2 T_0^n (t + t_0)^{s_0 n} = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. Buradan (3.16) denklemin sifıra eşit olması için $(t + t_0)$ ifadelerinin birbirine eşit olması gerektiğinden

$$s_0 - 2 = s_0 n \quad (3.17)$$

yazabiliriz. Buradan da

$$s_0 = \frac{2}{1-n} \quad (3.18)$$

elde edilir. Yine, denklemin sifıra eşit olması için

$$T_0 s_0 (s_0 - 1) = -\lambda^2 T_0^n \quad (3.19)$$

olmalıdır. Bulduğumuz s_0 değerini (3.19) denkleminde yerine koyarsak

$$T_0 \frac{2}{1-n} \left(\frac{2}{1-n} - 1 \right) = -\lambda^2 T_0^n = 0 \quad (3.20)$$

olur. Bilahare,

$$T_0 = (-1)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{2(n+1)}{(n-1)^2 \lambda^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada T_0, t_0 ve s_0 uygun tarzda belirlenecek sabitlerdir. Sağ taraftaki ilk terimden dolayı T_0 kompleks gibi görünüyor ise de, ilerde bunun böyle olmadığı görülecektir. Ayrıca zaman sabiti t_0 başlangıç şartlarından bulunacaktır.

Benzer şekilde (3.11b) denkleminin uygun çözüm formunu aşağıdaki gibi önereceğiz:

$$V(x) = V_0 (x + x_0)^{t_0} \quad (3.22)$$

(3.11b) denkleminde de, yukarıda önerdiğimiz formun ikinci türevini ihtiva etmektedir. Bu yüzden önerdiğimiz formu iki kez türeteceğiz:

$$V'(x) = V_0 r_0 (x + x_0)^{r_0-1} \quad (3.23)$$

$$V''(x) = V_0 r_0 (r_0 - 1)(x + x_0)^{r_0-2} \quad (3.24)$$

şimdi bulduğumuz bu ikinci türevi ve önerdiğimiz uygun çözüm formunu denklem (3.11b) denkleminde yerine koyarsak

$$V_0 r_0 (r_0 - 1)(x + x_0)^{r_0-2} + \mu^2 \left[V_0 (x + x_0)^{r_0} \right]^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (3.25)$$

elde ederiz. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$V_0 r_0 (r_0 - 1)(x + x_0)^{r_0-2} + \mu^2 V^{\frac{1}{n}} (x + x_0)^{\frac{r_0}{n}} = 0 \quad (3.26)$$

elde edilir. Buradan (3.26) denkleminin sıfıra eşit olması için $(x + x_0)$ ifadelerinin birbirine eşit olması gerektiğinden

$$r_0 - 2 = \frac{r_0}{n} \quad (3.27)$$

yazabiliriz. Buradan

$$r_0 = \frac{2n}{n-1} \quad (3.28)$$

elde edilir. Yine, denklemin sıfıra eşit olması için

$$V_0 r_0 (r_0 - 1) = -\mu^2 V^{\frac{1}{n}} \quad (3.29)$$

olmalıdır. Bulduğumuz r_0 değerini (3.29) denkleminde yerine koyarsak

$$V_0 \frac{2n}{n-1} \left(\frac{2n}{n-1} - 1 \right) = -\mu^2 V_0^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (3.30)$$

olur. Bilahare,

$$V_0 = (-1)^{\frac{n}{1-n}} \left[\frac{2n(n+1)}{(n-1)^2 \mu^2} \right]^{\frac{n}{1-n}} \quad (3.31)$$

elde edilir. Burada V_0 ve r_0 uygun tarzda belirlenecek sabitlerdir. V nin formunun iki yerine üç sabit içermesi gerektiği vurgulanmalıdır. Daha sonra görüleceği üzere, λ^2 bileşeni hesaplamalar sırasında yok olacaktır. Bu halde, sınır ve başlangıç şartlarının her ikisi de kısıtlı bir anlamda sağlanacaktır.

(3.4) denkleminde gerekli düzenlemeler yaparak

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^n = VT^n \quad (3.32)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = V^{\frac{1}{n}} T \quad (3.33)$$

yazabiliriz. Elde ettiğimiz (3.33) denkleminde, (3.12) ve (3.22) denklemlerinde önerdiğimiz uygun çözüm formlarının çözümlerini kullanırsak

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left[(-1)^{\frac{n}{1-n}} \left[\frac{2n(n+1)}{\mu^2 (n-1)^2} \right]^{\frac{n}{1-n}} (x + x_0)^{\frac{2n}{n-1}} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left[(-1)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{2(n+1)}{\lambda^2 (n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} (t + t_0)^{\frac{2}{1-n}} \right] \quad (3.34)$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{x+x_0}{t+t_0}\right]^{\frac{2}{n-1}} \quad (3.35)$$

bulunur. (3.35) denkleminin x e göre integrasyonu

$$u(x,t) = (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{1}{t+t_0}\right]^{\frac{2}{n-1}} \left[\frac{n-1}{n+1} (x+x_0)^{\frac{n+1}{n-1}}\right] + g_0(t) \quad (3.36)$$

verir ve burada $g_0(t)$, t nin bilinmeyen fonksiyonudur.

3.2.1 Sonlu Uzunlukta Ankastre Çubuk

Çubuğun bir ucundan ankastre olduğunu varsayalım : $x = 0$ için $u(0,t) = 0$. Bu şartın (3.35) denkleminde kullanılması

$$g_0(t) = -(c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \frac{(x_0)^{\frac{n+1}{n-1}}}{(t+t_0)^{\frac{2}{n-1}}} \quad (3.37)$$

verir. Bilahare, $u(x,t)$ nin yeni şekli

$$u(x,t) = (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{1}{t+t_0}\right]^{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \left[(x+x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} - (x_0)^{\frac{n+1}{n-1}}\right] \quad (3.38)$$

olur. Çubuğun diğer ucu gerilmesiz ise ($x = l$ için $\sigma = 0$), o takdirde $(\partial u / \partial x)(l,t) = 0$ almalıyız. Bu şartı (3.35) denkleminde yerine koyarak

$$x_0 = -l \quad (3.39)$$

elde ederiz.

Şimdi, $t = 0$ anında $x = l$ deki yer değiştirme ve hız üzerindeki başlangıç şartlarını aşağıdaki gibi alalım :

$$U(l,0) = U_0 \quad (3.40a)$$

$$\dot{U}(l,0) = \dot{U}_0 \quad (3.40b)$$

burada, U_0 ve \dot{U}_0 sırasıyla başlangıç yer değiştirmesi ve başlangıç hızıdır. (3.40a) denklemini (3.38) denkleminde yerine koyarsak

$$U_0 = -a_0 \left[\frac{(-l)^{\frac{n+1}{2}}}{(t_0)^{\frac{n+1}{2}}} \right] \quad (3.41)$$

elde ederiz. Burada

$$a_0 = (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \quad (3.42)$$

dır. (3.38) denkleminin t ye bağlı olarak türevini alır ve (3.40b) denklemini bu ifadeye yerine koyarsak

$$\dot{U}_0 = \left(\frac{2}{n-1} \right) a_0 \left[\frac{(-l)^{\frac{n+1}{2}}}{(t_0)^{\frac{n+1}{2}}} \right] \quad (3.43)$$

elde ederiz. (3.41) ve (3.43) denklemlerini bir arada çözerek

$$t_0 = \frac{U_0}{\dot{U}_0} \left(\frac{2}{1-n} \right) \quad n \neq 1 \quad (3.46)$$

bulunur.

(3.46) ifadesini (3.41) ifadesinde yerine koyalım :

$$U_0 = -(c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left[\left(\frac{\dot{U}_0}{U_0} \right) \left(\frac{1-n}{2} \right) \right]^{\frac{2}{n-1}} (-l)^{\frac{n+1}{n-1}} \quad (3.47)$$

(3.47) denkleminde görüldüğü gibi, yeni yöntem başlangıç şartları arasında zorunlu bir ilişkiyi gerektirmektedir. Diğer bir ifadeyle, tam çözüm (3.47) denkleminin sağlanmasıyla mümkün olmaktadır. Şimdiki teoriye göre \dot{U}_0 keyfi olarak seçildiği zaman U_0 otomatik olarak (3.47) denklemi tarafından -ya da tam tersi- belirlenmektedir. Bu durum λ^2 'nin hesaplamalar sırasında yok olmasından kaynaklanmaktadır. Bilahare, problemin sabitlerinden biri yok olmaktadır. Bu problem verilen şartların fiziki olarak daha uygun hale getirilmesiyle halledilecektir.

3.2.2. Non-Linear Elastik Dalga Hızı

(3.3) denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{kn}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.48)$$

bu denklemi standart ikinci mertebeli dalga denklemiyle karşılaştırarak non-lineer elastik dalga hızının şu şekilde verildiği sonucuna varabiliriz:

$$c_n = \sqrt{\frac{kn}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n-1}} = \sqrt{\frac{kn}{\rho} \mathcal{E}^{n-1}} = c_v \sqrt{n \mathcal{E}^{n-1}} \quad (3.49)$$

(3.35) ve (3.39) denklemlerinin (3.49) denkleminde kullanımıyla

$$c_n = c_v \sqrt{n \left[(c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{x-l}{t+t_0} \right)^{\frac{2}{n-1}} \right]^{n-1}} \quad (3.50)$$

$$c_n = c_v \sqrt{n} (c_v^2 n)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-l}{t+t_0} \right) \quad (3.51)$$

$$c_n = \left(\frac{x-l}{t+t_0} \right) \quad (3.52)$$

sonucu elde olunur. c_v ve n denklem (3.52) de açıkça görülmemesine rağmen t_0 ifadesinde yer almaktadır. (3.52) denklemine göre her bir gerilme, o noktadaki gerilme-şekil değiştirme eğrisinin teğetinin eğimine bağlı kendi karakteristik hızıyla ilerlemektedir.

(3.52) denklemi aşağıdaki şekilde boyutsuz hale getirilebilir :

$$\bar{c}_n = \frac{t_0}{l} c_n = \left[\frac{\frac{x}{l} - 1}{1 + \frac{t}{t_0}} \right] \quad (3.53)$$

3.2.3 Başlangıç Koşullarının Modifikasyonu

Görüldüğü üzere, ilk metot problemin genel çözümünde başlangıç şartları yönünden sınırlama getirmektedir. Bu sınırlamayı kaldırmak için, başlangıç ve sınır şartlarında birkaç gerekli modifikasyon yapmaya ihtiyacımız vardır. Bu sınırlamanın sebebi belki de seçilen şartların yanlış vazedilmesidir. Bunun böyle olduğunu görmek için gerilmesiz serbest uç yerine $t=0$ anında $x=l$ deki U_0 başlangıç yer değiştirmesinin bir σ_0 gerilmesinin uygulamasından meydana geldiğini düşünelim. Bu yeni halde uçtaki gerilme ile yer değiştirme arasında

$$U_0 = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^l \left(\frac{\sigma_0}{k} \right)^{\frac{1}{n}} dx = \left(\frac{\sigma_0}{k} \right)^{\frac{1}{n}} l \quad (3.54)$$

veya

$$\sigma_0 = k \left(\frac{U_0}{l} \right)^n \quad (3.55)$$

şeklinde bir bağıntı olmalıdır Şu halde, $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l, t=0} = 0$ şartını $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l, t=0} = (\sigma_0/k)^{\frac{1}{n}}$ şartı ile değiştirebiliriz. Aslında bu yeni form pratik durumlar ile daha uygundur. Bu şartın (3.35) denkleminde yerine konulması

$$x_0 = -l + (t_0) \left[\frac{\sigma_0}{k(nc_v)^{\frac{n}{1-n}}} \right]^{\frac{n-1}{2n}} \quad (3.56)$$

sonucunu verir.

Diğer iki şart $u(0,0) = 0$ ve $u(0,t) = 0$ şartları ile değiştirilmektedir. $u(0,t) = 0$ şartını denklem (3.36) de kullanarak

$$g_0(t) = -(c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \frac{(x_0)^{\frac{n+1}{n-1}}}{(t+t_0)^{\frac{2}{n-1}}} \quad (3.57)$$

buluruz. Şimdi, $u(x,t)$ aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$u(x,t) = (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{1}{t+t_0} \right]^{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left[(x+x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} - (x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} \right] \quad (3.58)$$

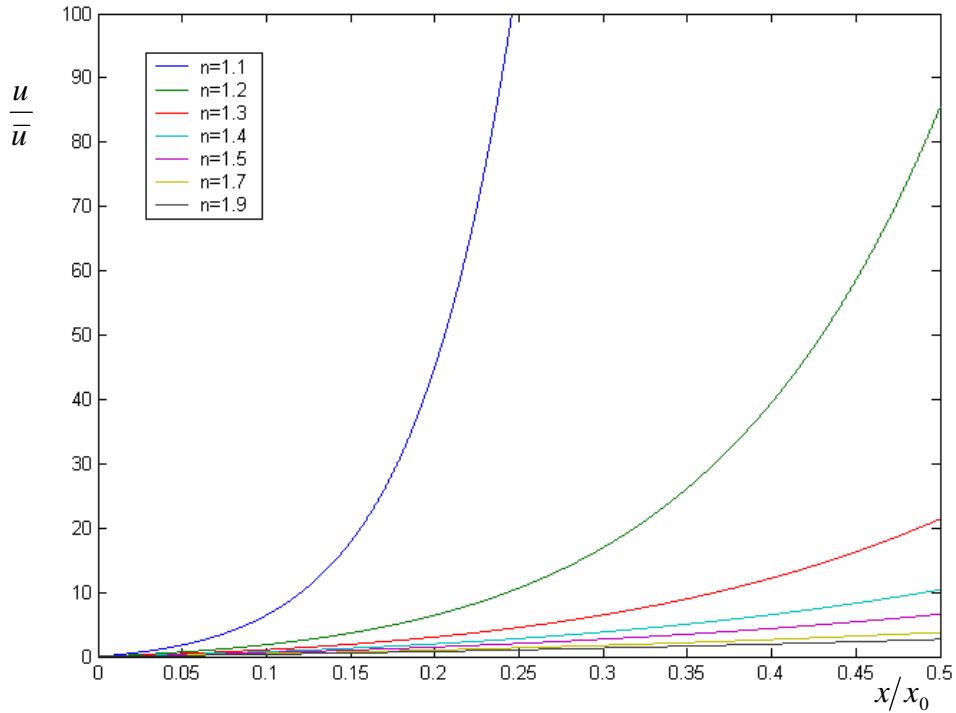
Bu ise (3.38) denkleminin aynısıdır. $u(0,0) = 0$ şartı, (3.58) denklemi tarafından otomatik olarak sağlanmaktadır.

$$\bar{u} = (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\frac{1}{t+t_0} \right]^{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) (x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} \quad (3.59)$$

ikamesi yapılarak (3.58) denklemi

$$\frac{u}{\bar{u}} = \left[\left(1 + \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} - 1 \right] \quad (3.60)$$

boyutsuz formuna getirilir. Şek. 2., $n = 1.1$, $n = 1.2$, $n = 1.3$, $n = 1.4$, $n = 1.5$, $n = 1.7$, $n = 1.9$ için u/\bar{u} nun x/x_0 bağılı olarak değişimini göstermektedir.



Şekil 2. Seçilen çeşitli n değerleri için u/\bar{u} nun x/x_0 ile değişimi

t_0 1 elde etmek için u nun t ye göre diferansiyelini aldıktan sonra, bulunan denklemde $\dot{u}(l,0) = \dot{U}_0$ şartı kullanılır. Sonuç aşağıdaki şekildedir :

$$\dot{U}_0 = t_0^{\frac{n+1}{1-n}} (c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{2}{n-1} \right) \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left[(l+x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} - (x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} \right] \quad (3.61)$$

Buradan ;

$$t_0 = \left[\frac{\dot{U}_0 (n+1)(1-n)}{2(c_v^2 n)^{\frac{1}{1-n}} (n-1) \left[(l+x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} - (x_0)^{\frac{n+1}{n-1}} \right]} \right]^{\frac{1-n}{n+1}} \quad (3.62)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, şartlar üzerindeki modifikasyonlar (3.47) denklemindeki sınırlamayı kaldırmakta ve çözümü tamamlamaktadır.

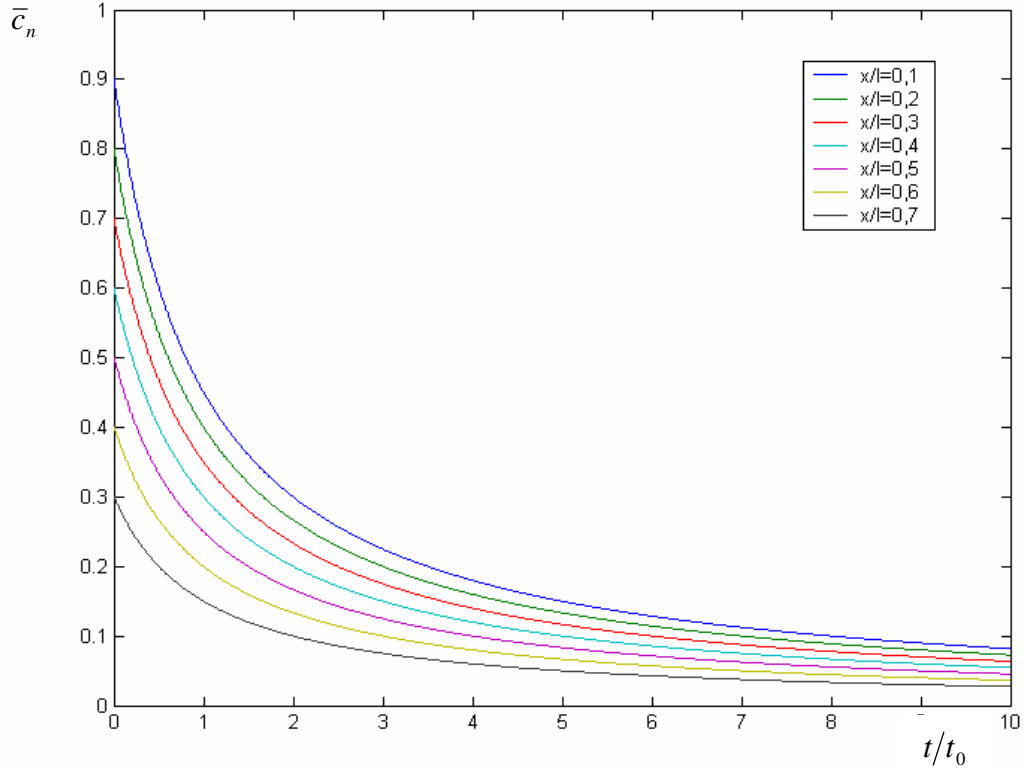
Şimdi, dalga hızlarını elde etmeye geçebiliriz. (3.58) denklemi ve (3.38) denklemindeki u ifadesi aynı olduğundan dalga denklemlerinin formu aynı olur. Yani,

$$c_n = \left(\frac{x-l}{t+t_0} \right) \quad (3.63)$$

dir. İfade aşağıdaki gibi boyutsuz hale getirilebilir :

$$\bar{c}_n = \frac{t_0}{l} c_n = \left[\frac{\frac{x}{l} - 1}{1 + \frac{t}{t_0}} \right] \quad (3.64)$$

Şek. 3, $x/l = 0.1$, $x/l = 0.2$, $x/l = 0.3$, $x/l = 0.4$, $x/l = 0.5$, $x/l = 0.6$, $x/l = 0.7$ ve konumları için boyutsuz dalga hızının boyutsuz zamanla değişimini göstermektedir. Dalga hızının zamanla azaldığı açık bir şekilde görülmektedir.



Şekil 3. Seçilen çeşitli x/l değerleri için \bar{c}_n nin t/t_0 ile değişimi

Ek olarak $\sigma = k\varepsilon^n$ bağıntısı kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir ve bu bağıntı kullanılarak herhangi bir kısımdaki gerilme bulunabilir :

$$\sigma(x,t) = k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = k(V(x))T(t)^n = k(nc_v^2)^{\frac{n}{1-n}} \left(\frac{x+x_0}{t+t_0} \right)^{\frac{2n}{n-1}} \quad (65)$$

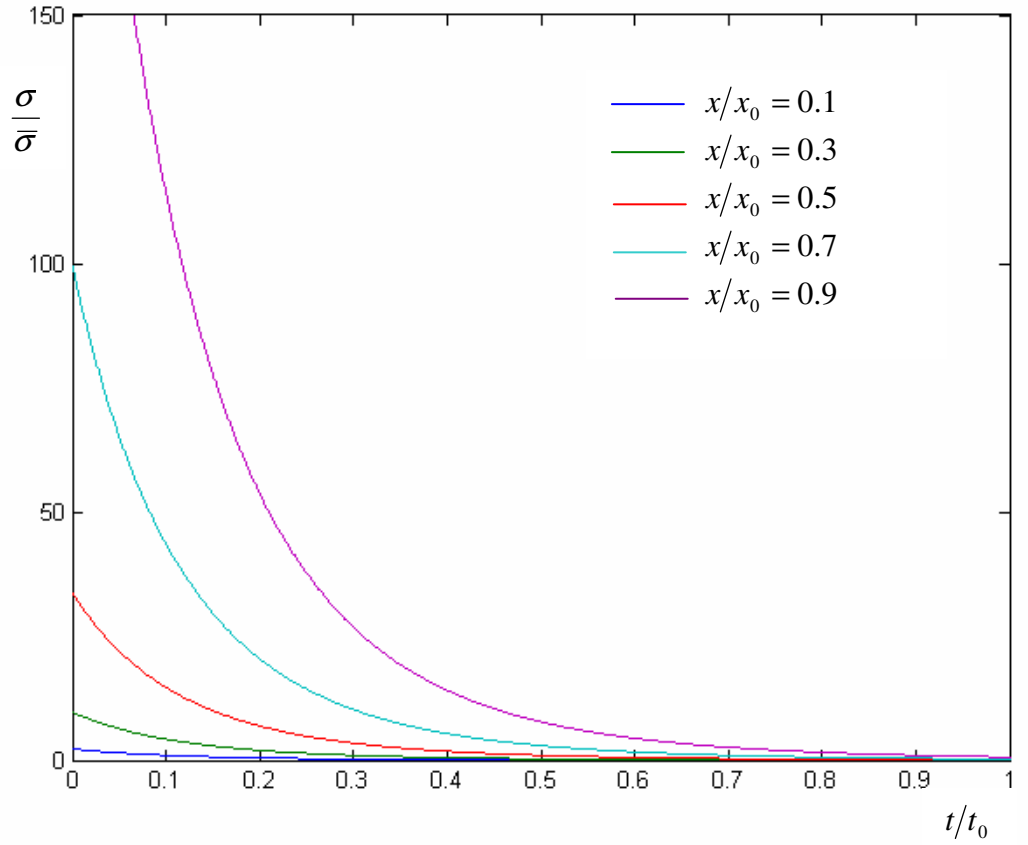
yine boyutu gerilme olan

$$\bar{\sigma} = k(nc_v^2)^{\frac{n}{1-n}} \left(\frac{x_0}{t_0} \right)^{\frac{2n}{n-1}} \quad (66)$$

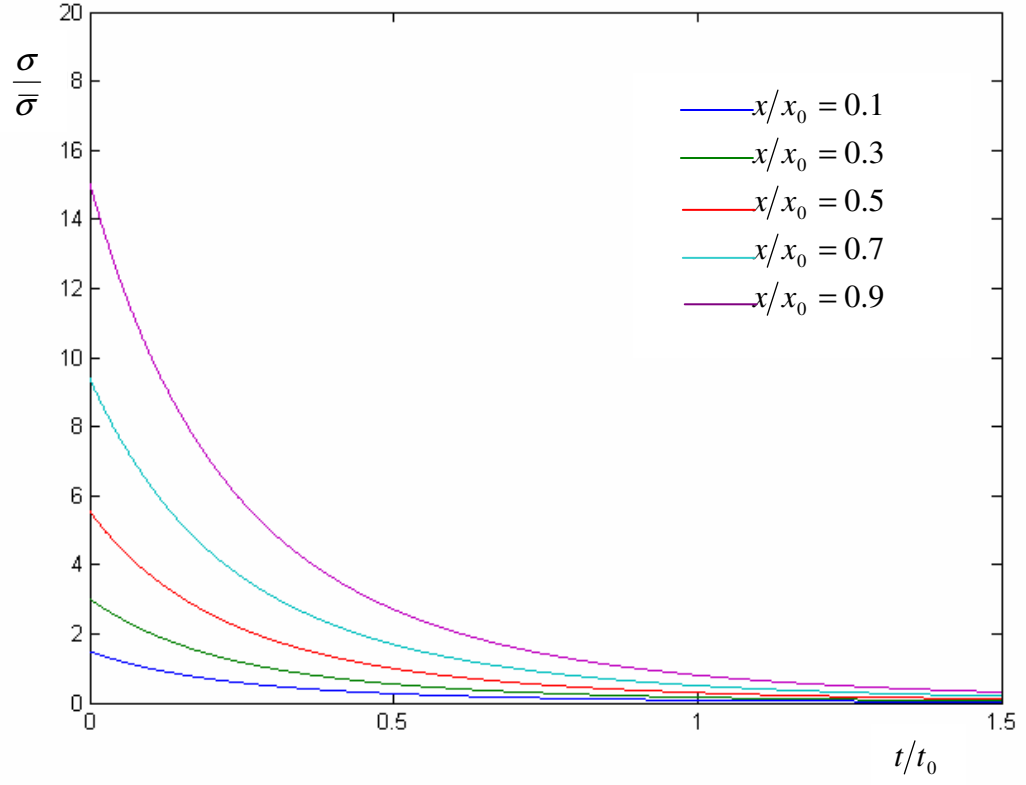
koyarak boyutsuz gerilmeyi elde ederiz :

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = \left[\frac{1 + \frac{x}{x_0}}{1 + \frac{t}{t_0}} \right]^{\frac{2n}{n-1}} \quad (67)$$

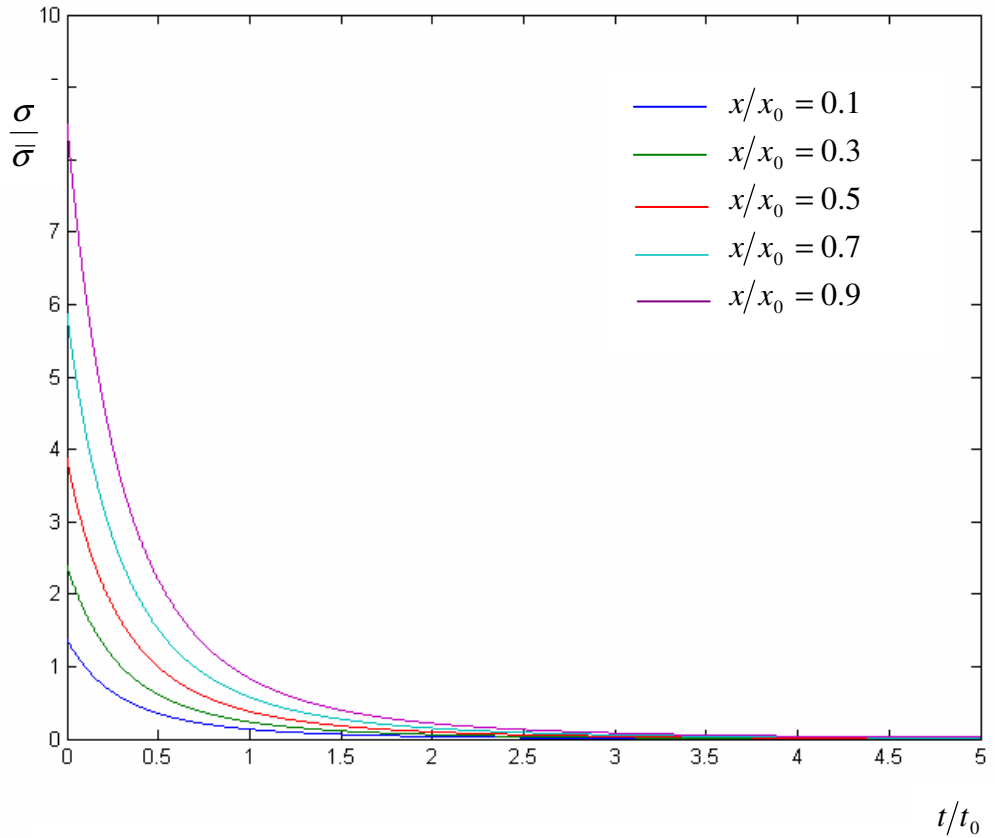
olur. Şek.4, Şek.5, Şek.6, Şek.7 de boyutsuz gerilmenin boyutsuz zaman t/t_0 ile sırasıyla $n = 1.3$, $n= 1.9$, $n=2.5$ ve $n=3.1$ için değişimleri çizilmiştir. Görüldüğü üzere herhangi bir kesitte gerilme zamanla azalmaktadır.



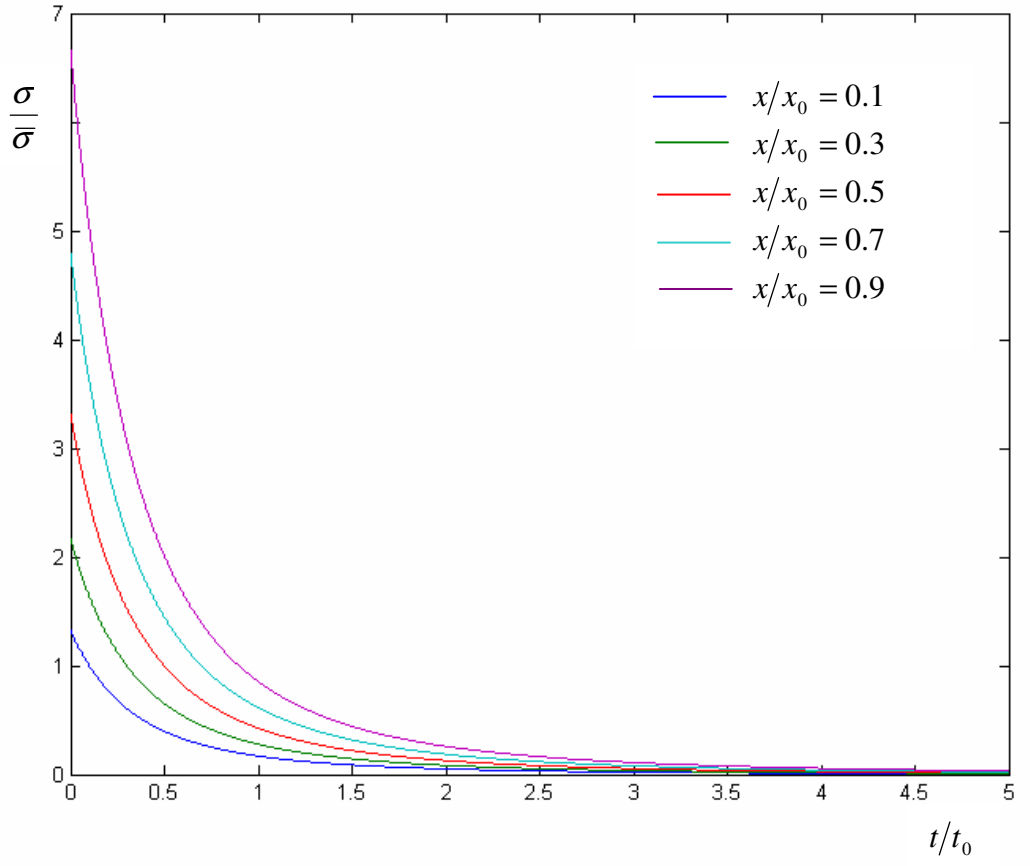
Şekil 4. $n = 1.3$ için çeşitli x/x_0 değerleri için $\sigma/\bar{\sigma}$ 'nin t/t_0 ile değişimi



Şekil 5. $n = 1.9$ için çeşitli x/x_0 değerleri için $\sigma/\bar{\sigma}$ 'nin t/t_0 ile değişimi



Şekil 6. $n = 2.5$ için çeşitli x/x_0 değerleri için $\sigma/\bar{\sigma}$ 'nin t/t_0 ile değişimi



Şekil 7. $n = 3.1$ için çeşitli x/x_0 değerleri için $\sigma/\bar{\sigma}$ 'nin t/t_0 ile değişimi

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu çalışmada malzemesi non-lineer gerilme-şekil değiştirme bağıntısına uyan sınırlı ve başlangıç şartlarına maruz sonlu çubuklarda non-lineer elastik dalga hareketini ve gerilme dağılımını analiz etmek için bir analitik çözüm yöntemi geliştirildi. Gerilme-şekil değiştirme eğrisi $\sigma = k\varepsilon^n$ formunda olduğu sürece sunulan metod sonlu uzunluğa sahip çubuklarda elastik-plastik dalga hareketine de uygulanabilir. Bu yönüyle bu çalışma Karman, Donnel ve Rakhmatulin in içbükey gerilme-şekil değiştirme bağıntısına uyan çalışmalarını genişletmektedir. Yeni metod, sonlu çubuklarda dalga hızının n değerine bağlı olduğunu göstermektedir. Diğer taraftan, Karman-Donnel metodu başlangıç yer değiştirmesinin dalga hızı üzerindeki etkisi hakkında herhangi bir bilgi içermemektedir. Yeni metod bu boşlukları doldurmaktadır. Takdir edileceği gibi, non-lineer kısmi denklemlerin açık çözümlerinin bulunması zordur ve bazı durumlarda elde edilmesi genellikle mümkün değildir. Çözümü bulabilsek bile, çözüm genellikle teklik içermektedir. Bilahare, diferansiyel denklemin yaklaşık periyodik çözümlerini bulmaya teşebbüs edebiliriz. Bununla birlikte, biz burada yapılarıdaki dalga hızı ve gerilme analizi ile ilgilendiğimiz için bu yöntem takip edilemez. Ancak, eğer titreşim analizi yapılacaksa, o zaman $T(t)$ nin periyodik çözümü kullanılabilir. Bunun için hesaplamalarda n nin özel değerleri alınarak Mickens metodu (Mickens, 1996, 2001) kullanılabilir.

Bu çalışmada ikinci önemli nokta, çözümün non-lineer elastik dalganın çubuğun sabitlendiği kısma erişinceye kadar geçerli olduğudur. Bundan sonra, gerilme dalgaları iki uçtan yansıtacaklarından, analitik çözüm geçersiz olacaktır.

Son olarak, ne Karman-Donnel metodunun ne de yeni metodun yanal atalet etkileri ve şekil değiştirme oranı hassasiyetini içermediğini belirtmek gerekir. Bilahare, bu etkileri içeren yeni bir metod daha hassas sonuçlar verecektir. Yukarıda bahsedilen zorluklar dolayısıyla teoremin bu yeni genişletilmiş hale cevap verip vermeyeceği hala cevaplanması gerekli bir sorudur.

5. KAYNAKLAR

Ames, W.F. 1967. "Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering", Academic Press, New York.1-21.

Campell, J.D. 1953. 'An Investigation of the Plastic Behavior of Metal Rods Subjected to Longitudinal Impact'. J.Mech.Phys.Solids, 1, 113.

Craggs J.W. 1952. 'The Normal Penetration of a Thin Elastic-Plasticplate by a Rigid Circular Cone', Proc.Roy.Soc.Edin., A, 63, 369.

Cristescu, N. 1957. 'Wave Propagation in Flexible Fibres(Influence of Speed of Deformation)'(In Russian), Priklad.Mat.Mech., 21, 486.

Donnell, L.H. 1930. 'Longitudinal Wave Transmission and Impact' Trans.Amer.Soc.Mech.Eng., 52, 153.

Goldmith, Werner. 1960. Impact, The Teory and Physical Behavior of Colliding Solids, London, Edward Arnold Ltd, sayfa. 159-166.

Hopkins, H.G. 1955. 'On the Behavior of Infinitely Long Rigid Plastic Beams Under Transverse Concentrated Load', J.Mech.Phys.Solids., 4, 38.

Inmann, Daniel.J. 1994. 'Engineering Vibration', sayfa..318-322,Prentice Hall International Edition, ISBN: 0-13-191941-5.

Karman, T.V., and Duwez, P.E. 1950. 'On the Propagation of Plastic Deformation In Solids', J. Appl. Phys., 21, 987.

Love, A.E.H. 1944. 'A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity ', 4. edition, New York, Dover Publication.

Mickens, R.E. 1996. Oscillation in Planar Dynamic Systems, Singapore, World Scientific.

Mickens, R.E. 2001. Journal of Sound and Vibration, 246(2), 375-378, oscillation in an $x^{4/3}$ Potential.

Pala, Y. 2004. 'Mühendislik Mekaniği : Dinamik', Sayfa : 58-69, Nobel Yayıncılık, ISBN : 975-591-657-1.

Pala Y. 1997. 'Generalized Method Separation of Variables On The Non-linear Elastic-Plastic Wave Motion', J.of.Non-Linear Dynamics, sayfa 49-56.

Rakhmatulin, H.A. 1945. 'On Plastic Waves of Loading(in Russian), Priklad', Mat.Mech., 9, 91.

Taylor, D.B.C. 1954. 'The Dynamics Straining of Metal Having Definite Yield Point', J.Mech.Phys. Solids, 3, 38.

Zukas, J.A., Nicholas,T., Swift, H.F., Greszczuk, L.B., Curran, D.R. 1982. 'Impact Dynamics', sayfa.95-109.

6. TEŐEKKÜR

Bu çalıőmanın hazırlanmasında yardımlarıyla katkıda bulunan değerli danışman hocam Prof. Dr. Yaşar PALA ya, araştırma görevlisi Murat REİS e ve gösterdikleri destek ve sabırdan dolayı aileme teőekkürlerimi sunarım.

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı, Soyadı : Özkan BADEMCİ

Doğum Tarihi : 17. 01. 1982

Doğum Yeri : Yalova

Öğrenim Bilgileri : Uludağ Üniversitesi

Mühendislik – Mimarlık Fakültesi

Makine Mühendisliği Bölümü.....(1999-2003)

Lüleburgaz Süper Lisesi.....(1995-1999)

Büyükkarıştıran İlköğretim Okulu.....(1988-1995)