**PSEUDOANALİTİK FONKSİYONLAR VE UYGULAMALARI**

**Yeşim SAĞLAM**

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# PSEUDOANALİTİK FONKSİYONLAR VE UYGULAMALARI

Yeşim SAĞLAM

Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2013

**U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;**

-tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,

-görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,

-başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,

-atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,

-kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,

-ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim**.

../../....

**İmza**

**Yeşim SAĞLAM**

**ÖZET**

Yüksek Lisans Tezi

PSEUDOANALİTİK FONKSİYONLAR VE UYGULAMALARI

**Yeşim SAĞLAM**

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Doç. Dr. Sezayi Hızlıyel

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, pseudoanalitik fonksiyonlara ilişkin tanımlar ile türev ve integraline ilişkin temel özellikler verilmiştir.
Üçüncü bölümde, kompleks pseudoanalitik fonksiyonların reel kısımlarına ilişkin ikinci basamaktan eliptik denklemlerin çözümleri ele alınmıştır. Ayrıca temel Vekua denklemi incelenmiş ve Schrödinger denklemi için Cauchy integral teoremi elde edilmiştir.
Dördüncü bölümde, kuvvet fonksiyonları incelenmiş, temel teoremler ele alınmıştır. Bir doğurucu dizinin inşası incelenmiştir.
Son bölüm olan beşinci bölümde ise pseudoanalitik fonksiyonlar için Cauchy integral formülü için ön bilgilerden bahsedilmiş ve transplant operatörü incelenmiştir.

**2013,v+79 sayfa.**

**Anahtar Kelimeler :** Pseudoanalitik fonksiyonlar, Doğurucu çiftler, Schrödinger denklemi, Vekua denklemi, Transplant operatörü.

## ABSTRACT

MSc Thesis

PSEUDOANALYTIC FUNCTIONS AND APPLICATIONS



**Yeşim SAĞLAM**

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

**Supervisor**: Assoc. Prof. Dr. Sezayi Hızlıyel



This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, definitions and basic properties of derivatives and integrals of pseudoanalytic functions are given.

In the third chapter, solutions of second-order elliptic equations as real components of complex pseudoanalytic functions have been examined. Also, the main Vekua equation have been examined and Cauchy integral formula for Schrödinger equation have been obtained.

In the fourth chapter, power functions have been examined,main theorems are given. Explicit construction of a generating sequence have been examined.

In the final chapter, preliminary informations for Cauchy integral formula for pseudo-analytic functions are given and transplant operator have been examined.



**2013,v+79 pages.**

**Key Words:** Pseudoanalytic functions, Generating pairs, Schrödinger equation, Vekua equation, transplant operator.

## TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarımın her aşamasında ilgi ve desteklerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sezayi Hızlıyel'e, yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve çalışmalarım süresince bana anlayış gösteren aileme en içten saygı, sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Yeşim Sağlam

__/__/____

# İÇİNDEKİLER

# 1. GİRİŞ

Pseudo analitik fonksiyonlar kabaca söylenecek olursa genelleştirilmiş Cauchy Riemann denklemlerinin çözümleridir. Böyle fonksiyonlar Picard (1891) ve Beltrami (1911) tarafından incelenmiştir. Ancak ilk sonuçlar İsveç matematikçi Carleman (1933) tarafından elde edilmiştir.

Kompleks kısmi türevli denklemler ve buna bağlı olarak genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar, 1950'li yıllardan beri üzerinde ünlü matematikçilerin çalıştığı bir konudur. L. Bers' in yazdığı "Theory of Pseudoanalytic Functions (1953)" isimli monograf ile I. N. Vekua' nın aynı yıllarda Bers' ten bağımsız olarak yazdığı "Generalized Analytic Functions (1959)" isimli kitap bu konunun temelini oluşturmaktadır. Bers genelleştirilmiş analitik fonksiyonları, tanımladığı "doğurucu fonksiyonlar" kavramı yardımıyla Hölder-sürekli fonksiyonlar uzayında incelemiştir.

Pseudoanalitik fonksiyonların matematikte ve matematiksel fizikte farklı alanlarda pek çok uygulaması vardır. Özellikle eliptik sistemlerin genel teorisinin genelleştirilmesinde önemli rol oynamıştır. Pseudoanalitik fonksiyonlar özel hallerinin Elastisite Teorisi ile Gazlar Dinamiğinde kullanıldığı bir konudur.

# 2. PSEUDOANALİTİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Birinci kısımda doğurucu çiftler ve türev, ikinci kısımda pseudoanalitik fonksiyonlar ve üçüncü kısımda pseudoanalitik fonksiyonların türev ve integralleri ele alınmıştır.

## 2.1 Doğurucu Çiftler ve Türev

İkinci mertebeden hemen-hemen lineer

$$L\phi = A(x,y)\,\phi_{xx} + 2B(x,y)\,\phi_{xy} + C(x,y)\,\phi_{yy} + F\left(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y\right) = 0 \qquad (2.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $A$, $B$ ve $C$; $xy$-düzleminin bir $D$ bölgesinde $x$ ve $y$ nin iki defa sürekli türetilebilir fonksiyonlarıdır ve $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ dır. $L = AD_x^2 + 2BD_xD_y + CD_y^2$ operatörüne (2.1) denkleminin *esas kısmı* denir. Denklemin özelliklerini belirleyen kısım burasıdır.

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)\,C(x,y)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona (2.1) denkleminin *diskriminantı* denir.

Eğer $D$ nin bir $(x_0, y_0)$ noktasında

$$\begin{aligned}
\Delta(x_0,y_0) &> 0 \text{ ise, (2.1) denklemine bu noktada } \textit{hiperboliktir,}\\
\Delta(x_0,y_0) &= 0 \text{ ise, (2.1) denklemine bu noktada } \textit{paraboliktir,}\\
\Delta(x_0,y_0) &< 0 \text{ ise, (2.1) denklemine bu noktada } \textit{eliptiktir,}
\end{aligned}$$

denir. Bir $D$ bölgesinin tüm noktalarında hiperbolik, parabolik veya eliptik bir denkleme $D$ de sırasıyla *hiperbolik, parabolik veya eliptiktir* denir.

Eğer denklem eliptik ise bağımsız değişkenlerin uygun bir değişimiyle (2.1) denklemi

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \tilde{F}\left(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y\right) = 0 \tag{2.2}$$

kanonik formuna dönüştürülebilir. En basit eliptik denklem

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \tag{2.3}$$

Laplace denklemidir. Bu denklemin teorisi oldukça geniş çalışılmıştır. (2.3) denkleminin çözümleri, $z = x + iy$ olmak üzere, $f(z)$ analitik fonksiyonlarının reel kısımlarıdır.

Bu çalışma boyunca $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $w = u + iv, ...$ şeklinde kompleks değişkenler kullanılacaktır ve kompleks eşlenikler $\bar{z} = x - iy$, $\bar{w} = u - iv, ...$ ile gösterilecektir. $x$ ve $y$ nin fonksiyonları, analitikliği sağlamaksızın, $z$ nin fonksiyonları şeklinde yazılmıştır. Kısmi türevler alt indisler yardımıyla gösterilecektir. Klasik türev operatörleri $(\partial/\partial z)$, $(\partial/\partial \bar{z})$

$$2w_z = w_x - iw_y \quad , \quad 2w_{\bar{z}} = w_x + iw_y \tag{2.4}$$

bağıntılarıyla tanımlanmıştır. $w_z$ ve $w_{\bar{z}}$ türevlerinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $w_x$ ve $w_y$ türevlerinin mevcut olmasıdır.

$$w_z = \frac{1}{2}\left\{(u_x + v_y) - i(u_y - v_x)\right\} \tag{2.5}$$

$$w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left\{(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\right\} \tag{2.6}$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Bu operatörler çarpım, toplam, vb. üzerinde bilinen türev gibi rol oynar.

Bir bölge düzlemde açık bağlantılı bir kümedir. $D$ bölgesinin kapanışı $\overline{D}$, sınırı $D'$ ile gösterilecektir. Eğer $D$ sınırlı ve $D'$ sonlu sayıda parçalı sürekli türevlenebilir basit kapalı Jordan eğrisinden oluşuyorsa bölgeye *regülerdir* denir.

$w(z)$ fonksiyonu $z_0$ noktasında, $K$ sabiti ve $\alpha$, $0<\alpha<1$, üsteliyle birlikte

$$|w(z)-w(z_0)| \leq K|z-z_0|^{\alpha}$$

şartını sağlıyor ise $w$ fonksiyonuna *Hölder şartını* sağlıyor denir. Eğer bir fonksiyon aynı $K$ ve $\alpha$ ile $D$ nin bütün noktalarında Hölder şartını sağlıyorsa bu fonksiyon $D$ üzerinde bir düzgün Hölder şartnı sağlar. Bir fonksiyon $\overline{D}_1 \subseteq D$ olacak şekilde her $D_1$ bölgesinde düzgün Hölder şartını sağlıyorsa bu fonksiyona $D$ bölgesinde *Hölder süreklidir* denir. Bu eşitsizlikte $\alpha=1$ olması durumunda $w$ fonksiyonuna $D$ de *Lipschitz sürekli fonksiyon* adı verilir.

(2.5) ve (2.6) göz önüne alınırsa fonksiyon teorisindeki elemanter sonuçlar aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

**Lemma 2.1.1.**

$$w'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)-w(z_0)}{z-z_0} \tag{2.7}$$

limiti mevcut ise $w_z(z_0)$, $w_{\bar{z}}(z_0)$ mevcuttur ve

$$w_{\bar{z}}(z_0)=0 \tag{2.8}$$

$$w_z(z_0)=w'(z_0). \tag{2.9}$$

$w_z(z)$ ve $w_{\bar{z}}(z)$ mevcut, $z_0$ noktasının bir komşuluğunda sürekli ve (2.8) geçerliyse (2.9) mevcuttur.■

(2.7) de $w(z_0)$ kompleks bir sabittir, yani $\lambda.1+\mu.i$ şeklindedir. Burada $\lambda$ ve $\mu$ ler reel sabitlerdir. Fonksiyon teorisinin genelleştirilmesi 1 ve $i$ yerine keyfi $F(z)$ ve $G(z)$ fonksiyonlarının alınmasına dayanır. Bu fonksiyonların bir $D_0$ bölgesinde tanımlı olduklarını varsayalım. (Bütün $D$ bölgelerinin $D_0$ da bulunan kapanışının sınırlı olduğu varsayılacaktır.)

$D$ bölgesinde ki her $z_0$ için

$$w(z_0) = \lambda_0 F(z_0) + \mu_0 G(z_0)$$

olacak şekilde bir tek $\lambda_0$ ve $\mu_0$ reel sabitleri bulunuabilir.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{w(z) - \lambda_0 F(z) - \mu_0 G(z)}{z - z_0} \tag{2.10}$$

(sonlu) limiti mevcut ise $w(z)$, $z_0$ da $(F, G)$-*türeve* sahiptir denir ve $\dot{w}(z_0)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.2** $D_0$, $\mathbb{C}$ de $\bar{D} \subset D_0$ koşulunu sağlayan bir bölge olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon çiftine $D_0$ da *doğurucu çift* denir:

*i)* $z \in D_0$ için $\operatorname{Im}\left\{\bar{F}(z) G(z)\right\} > 0$

*ii)* $F_z(z)$, $F_{\bar{z}}(z)$, $G_z(z)$, $G_{\bar{z}}(z)$ türevleri var ve Hölder-sürekli

$z_0$ sabiti için

$$W(z) = w(z) - \lambda_0 F(z) - \mu_0 G(z) \tag{2.11}$$

olsun. $\lambda_0$ ve $\mu_0$ reel sabitleri

$$W(z_0) = 0 \tag{2.12}$$

şartıyla tek olarak belirlenebilir (Bers 1953).

$W(z)$ nin (sürekli) kısmi türevlere sahip olması için gerek ve yeter koşul $w(z)$ nin kısmi türevlere sahip olmasıdır. $\dot{w}(z_0)$ ın mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$W'(z_0)$ ın mevcut olmasıdır. O halde

$$\dot{w}(z_0) = W'(z_0)$$

dir. Burada $W'(z_0)$, $W$ nın $z_0$ noktasındaki kompleks türevidir: $W'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \dfrac{W(z) - W(z_0)}{z - z_0}$. Buradan $W_z(z_0)$, $W_{\bar{z}}(z_0)$ ve

$$W_{\bar{z}}(z_0) = 0 \tag{2.13}$$

denkleminin varlığı (2.10) un varlığı için gereklidir. $|z - z_0| < r$ için $W_z(z)$, $W_{\bar{z}}(z)$ nin varlığı ve sürekliliği ile (2.13) denklemi (2.10) un varlığı için yeterlidir.

$W$ fonksiyonu

$$W(z) = \frac{\begin{vmatrix} w(z) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F(z) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}} \tag{2.14}$$

şeklinde yazılabilir ve $W_{\bar{z}}(z_0) = 0$ olup

$$\begin{vmatrix} w_{\bar{z}}(z_0) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F_{\bar{z}}(z_0) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G_{\bar{z}}(z_0) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.15}$$

elde edilir. (2.10) mevcut ise

$$\dot{w}(z_0) = \frac{\begin{vmatrix} w_z(z_0) & w(z_0) & \overline{w(z_0)} \\ F_z(z_0) & F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G_z(z_0) & G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(z_0) & \overline{F(z_0)} \\ G(z_0) & \overline{G(z_0)} \end{vmatrix}}. \tag{2.16}$$

L. Bers (Bers 1953) $w_{\bar{z}} = aw + b\bar{w}$ denkleminin Tanım 2.1.2 de ifade edilen özellikleri sağlayan $F$ ve $G$ gibi iki çözümünün varlığını göstermiştir.

$$\begin{aligned} F_{\bar{z}} &= aF + b\bar{F} \\ G_{\bar{z}} &= aG + b\bar{G} \end{aligned} \tag{2.17}$$

denklemleri ortak çözülerek

$$a_{(F,G)} = -\frac{\bar{F}G_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\bar{G}}{F\bar{G} - \bar{F}G} \quad , \qquad b_{(F,G)} = \frac{FG_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}G}{F\bar{G} - \bar{F}G} \tag{2.18}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} F_z &= AF + B\bar{F} \\ G_z &= AG + B\bar{G} \end{aligned}$$

denklemleri ortak çözülerek

$$A_{(F,G)} = -\frac{\bar{F}G_z - F_z\bar{G}}{F\bar{G} - \bar{F}G} \quad , \qquad B_{(F,G)} = \frac{FG_z - F_zG}{F\bar{G} - \bar{F}G} \tag{2.19}$$

elde edilir. (2.18) ve (2.19) ile tanımlanan ifadelere $(F, G)$-doğurucu çiftinin *karakteristik katsayıları* denir. Burada (2.15) ve (2.16) denklemleri

$$w_{\bar{z}} = aw + b\bar{w} \tag{2.20}$$

$$\dot{w} = w_z - Aw - B\bar{w} \tag{2.21}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

**Teorem 2.1.3.** $\dot{w}(z_0)$ mevcut ise $z_0$ da $w_z$ ve $w_{\bar{z}}$ mevcuttur ve (2.20), (2.21) denklemleri geçerlidir. Eğer $z_0$ ın bazı komşuluklarında $w_z$, $w_{\bar{z}}$ mevcut ve sürekliyse ve $z_0$ da (2.20) sağlanıyorsa o halde $\dot{w}(z_0)$ mevcuttur ve (2.21) geçerlidir (Bers 1953).■

**Uyarı 2.1.4.** (2.20) denklemi $a_{ij}(x,y)$ katsayıları reel Hölder sürekli olmak üzere

$$\begin{cases} u_x - v_y = a_{11}u + a_{12}v \\ u_y + v_x = a_{21}u + a_{22}v \end{cases} \tag{2.22}$$

reel sistemine denktir. Aynı mantıkla her (2.1) eliptik denklemin (2.22) şeklinde bir sisteme denk olacağı görülebilir. $B = 0$ olmak üzere (2.2) şeklindeki bir denklem için bu açıktır. $\phi$ bir çözüm olsun ve $u = \phi_x$, $v = -\phi_y$ alalım. Burada $u$, $v$

$$a_{11} = -B_1, \quad a_{12} = B_2, \quad a_{21} = a_{22} = 0$$

olmak üzere (2.22) i sağlar.

## 2.2 Pseudoanalitik Fonksiyonlar

**Tanım 2.2.1.** Eğer $\dot{w}$, $D$ bölgesinde her yerde mevcut ise $w$ fonksiyonuna $D$ bölgesinde *birinci çeşit* $(F,G)$-*pseudonalitik* (karıştırma tehlikesi yoksa kısaca pseudoanalitik) fonksiyon denir.

$D$ bölgesinde $\operatorname{Im}\left(\bar{F}G\right) > 0$ şartı göz önüne alındığında, bu bölgedeki her $w$ fonksiyonu tek

$$w = \varphi F + \psi G$$

gösterimine sahiptir. Burada $\varphi$ ve $\psi$ reel değerli fonksiyonlardır.

$$\omega = \varphi + i\psi$$

alındığında $w$ ve $\omega$ arasındaki bağıntı birebirdir. Bunu

$$w =^* \omega \quad , \qquad \omega =_* w \,(\operatorname{mod} F, G)$$

yazımıyla göstereceğiz.

Her reel $\lambda$ ve $\mu$ için

$$_*(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda ({}_*w_1) + \mu ({}_*w_2)$$

$_*0 = 0$, $_*F = 1$, $_*G = i$ olduğuna ve her kapalı $\bar{D}$ bölgesinde

$$0 < \frac{1}{K} \leq \left| \frac{{}_*w(z)}{w(z)} \right| \leq K$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Burada $K$ sabiti yalnızca $(F, G)$ ve $D$ bölgesine bağlıdır.

**Tanım 2.2.2** Eğer $w$ birinci çeşit $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyon ise $\omega =_* w$ fonksiyonuna *ikinci çeşit* $(F, G)$-*pseudoanalitik fonksiyon* denir.

Analitik fonksiyonlarda $F$ ve $G$ fonksiyonları $F = 1$ ve $G = i$ olarak seçilebilir ve böylece $w$ ve $\omega$ çakışırlar.

**Teorem 2.2.3.** Bir $\omega = \varphi + i\psi$ fonksiyonunun ikinci çeşit $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $\varphi$ ve $\psi$ fonksiyonlarının sürekli kısmi türevlere sahip olması ve

$$\varphi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G = 0 \tag{2.23}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Eğer bu şart sağlanıyorsa, $w =^* \omega$ alındığında

$$\dot{w} = \varphi_z F + \psi_z G \tag{2.24}$$

dır (Bers 1953).

**İspat.**

$$W(z) = w(z) - \lambda_0 F(z) - \mu_0 G(z)$$

fonksiyonunu ele alalım, burada $\lambda_0 = \varphi(z_0)$ ve $\mu_0 = \psi(z_0)$ dır öyle ki

$$w(z_0) = \lambda_0 F(z_0) + \mu_0 G(z_0).$$

Dikkat edilirse

$$W(z) = (\varphi(z) - \varphi(z_0)) F(z) + (\psi(z) - \psi(z_0)) G(z)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}}(z) &= \varphi_{\bar{z}}(z) F(z) + (\varphi(z) - \varphi(z_0)) F_{\bar{z}}(z) \\ &\quad + \psi_{\bar{z}}(z) G(z) + (\psi(z) - \psi(z_0)) G_{\bar{z}}(z) \end{aligned}$$

dir ve böylece $z_0$ noktasında

$$W_{\bar{z}}(z_0) = \varphi_{\bar{z}}(z_0) F(z_0) + \psi_{\bar{z}}(z_0) G(z_0)$$

dır. Benzer yolla

$$W_z(z_0) = \varphi_z(z_0) F(z_0) + \psi_z(z_0) G(z_0)$$

elde edilebilir.

$$w_{\bar{z}} = aw + b\overline{w} \tag{2.25}$$

Vekua denklemi $z_0$ da $W_{\bar{z}}(z_0) = 0$ Cauchy-Riemann şartına denk olduğu için (2.25) denkleminin (2.23) denklemine denk olduğu elde edilir. $\dot{w}(z_0) = W'(z_0)$ olduğundan (2.24) elde edilir.■

**Örnek 2.2.4.** $f$ reel değerli bir fonksiyon olsun. $F = f,\ G = \dfrac{i}{f}$ fonksiyonlarını ele alalım. Böylece (2.23) denklemi

$$\varphi_{\bar{z}} f + \psi_{\bar{z}} \frac{i}{f} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem

$$f\varphi_x - \frac{1}{f}\psi_y = 0 \quad , \quad f\varphi_y + \frac{1}{f}\psi_x = 0$$

sistemine denktir. Bu sistem genelleştirilmiş Cauchy-Riemann sistemi şeklinde yazılabilir:

$$\varphi_x = \frac{1}{f^2}\psi_y \quad , \quad \varphi_y = -\frac{1}{f^2}\psi_x$$

$p$, $x$ ve $y$ nin verilen pozitif bir fonksiyonu olmak üzere iyi bilinen

$$u_x = \frac{1}{p}v_y \quad , \quad u_y = -\frac{1}{p}v_x$$

sistemi dikkate alındığında, bu sistemi sağlayan $u + iv$ kompleks fonksiyonlarına *p-analitik* fonksiyon denir.
Böylece ikinci çeşit $\left(f, \dfrac{i}{f}\right)$-pseudoanalitik fonksiyonları $f^2$-analitiktir.

## 2.3 Pseudoanalitik Fonksiyonların Türev ve İntegralleri

Bu kısımda pseudo-analitik fonksiyonların türev ve integral özellikleri için temel tanım ve teoremler verilecektir.

### 2.3.1 Denk Doğurucu Çiftler ve $(F, G)$-türevleri için Vekua Denklemi

Analitik bir fonksiyonun kompleks türevi yine analitik bir fonksiyondur ve ikiside Cauchy-Riemann sistemini sağlar. Bu ifade pseudoanalitik fonksiyonlar olması durumunda farklıdır. Genelde bir $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyonun $(F, G)$-türevi,

$(F,G)$-pseudoanalitik olmak zorunda değildir. Bunun yerine başka bir doğurucu çifte karşılık gelen başka bir Vekua denklemini sağlar.

**Tanım 2.3.1.**

$$\tilde{F} = a_{11}F + a_{12}G \qquad ve \qquad \tilde{G} = a_{21}F + a_{22}G$$

ise $(F,G)$ ve $\left(\tilde{F},\tilde{G}\right)$ doğurucu çiftlerine *denktir* denir, burada $a_{ij}$ reel sabitlerdir.

**Teorem 2.3.2.**

**(i)** Aynı bölgede tanımlı iki doğurucu çiftin denk olması için gerek ve yeter şart aynı karakteristik katsayılara sahip olmalarıdır.

**(ii)** Eğer $(F,G)$ ve $\left(\tilde{F},\tilde{G}\right)$ denk ise, birinci çeşit her $\left(\tilde{F},\tilde{G}\right)$-pseudoanalitik fonksiyon, birinci çeşit $(F,G)$-pseudoanalitiktir ve

$$\frac{d_{(F,G)}w}{dz} = \frac{d_{\left(\tilde{F},\tilde{G}\right)}w}{dz}$$

dir (Bers 1953).■

**Tanım 2.3.3.** $(F,G)$ bir doğurucu çift olsun. $(F,G)$ nin adjoint doğurucu çifti $(F,G)^* = (F^*,G^*)$

$$F^* = -\frac{2\bar{F}}{F\bar{G}-\bar{F}G} \qquad , \qquad G^* = \frac{2\bar{G}}{F\bar{G}-\bar{F}G}$$

eşitlikleri yardımıyla tanımlanır.

**Teorem 2.3.4.**

$(i)$ $(F,G)^{**} = (F,G)$

$(ii)$ Karakteristik katsayılar arasında aşağıdaki ilişki geçerlidir.

$$a_{(F^*,G^*)} = -a_{(F,G)} \quad , \quad A_{(F^*,G^*)} = -A_{(F,G)}$$

$$b_{(F^*,G^*)} = -\overline{B_{(F,G)}} \quad , \quad B_{(F^*,G^*)} = -\overline{b_{(F,G)}}$$

(Bers 1953).

**İspat.** $(i)$ Tanım 2.3.3 yardımıyla

$$F^{**} = (F^*)^* = -\frac{2\overline{F^*}}{F^*\overline{G^*} - \overline{F^*}G^*} = F$$

bulunur. Benzer şekilde $G^{**} = G$ olduğu gösterilebilir.

$(ii)$ Karakteristik katsayılar arasındaki ilişki (2.18) ve (2.19) da ki ifadeler kullanılarak doğrudan hesaplamalarla elde edilir.■

**Tanım 2.3.5.** $(F,G)$ ve $(F_1,G_1)$, $D$ bölgesinde iki doğurucu çift olsun. Eğer

$$a_{(F_1,G_1)} = a_{(F,G)} \quad ve \quad b_{(F_1,G_1)} = -B_{(F,G)}$$

ise $(F_1,G_1)$ e $(F,G)$ nin *halefi* ve $(F,G)$ ye $(F_1,G_1)$ in *selefi* denir.

**Lemma.2.3.6.** $(F_1,G_1)$, $(F,G)$ nin halefi ise $(F,G)^*$, $(F_1,G_1)^*$ ın halefidir.

**İspat.** $(F_1,G_1)$, $(F,G)$ nin halefi olsun. O halde Teorem 2.3.4 yardımıyla

$$a_{(F^*,G^*)} = -a_{(F,G)} = -a_{(F_1,G_1)} = a_{(F_1^*,G_1^*)}$$

ve

$$b_{(F^*,G^*)} = -\overline{B_{(F,G)}} = \overline{b_{(F_1.G_1)}} = -B_{\left(F_1^*,G_1^*\right)}$$

elde edilir. Buradan $(F,G)^*$ , $(F_1,G_1)^*$ ın halefidir.

**Teorem 2.3.7.** $(F,G)$ , $D$ bölgesinde bir doğurucu çift olsun. $D_1$ sınırlı bir bölge ve $\overline{D}_1 \subset D$ olsun. O halde $(i)$ $(F,G)$ , $D_1$ de bir halefe $(ii)$ $(F,G)$ , $D_1$ de bir selefe sahiptir (Bers 1953).■

**Tanım 2.3.8.** Doğurucu çiftlerin bir $\{(F_m,G_m)\}$ , $m = 0,\pm1,\pm2,...,$ dizisine, $(F_{m+1},G_{m+1})$, $(F_m,G_m)$ in bir halefi ise *doğurucu dizi* denir. $(F_0,G_0) = (F,G)$ ise $(F,G)$ ye $\{(F_m,G_m)\}$ dizisi içerisine *gömülüdür* denir.

**Teorem 2.3.9.** $(F,G)$ , $D$ de bir doğurucu çift olsun. $D_1$ sınırlı bir bölge ve $\overline{D}_1 \subset D$ olsun. O halde $(F,G)$ , $D_1$ de bir doğurucu dizi içerisine gömülebilir (Bers 1953).■

**Tanım 2.3.10.** Bir $\{(F_m,G_m)\}$ doğurucu dizisine $(F_{m+\mu},G_{m+\mu})$ , $(F_m,G_m)$ e denk ise, yani aynı karakteristik katsayılara sahip iseler, $\mu > 0$ periyoduna sahiptir denir.

**Teorem 2.3.11.** $w$ bir $(F,G)$-pseudoanalitik fonksiyon ve $(F_1,G_1)$ , $(F,G)$ nin *halefi* olsun. O halde

$$\dot{w} = \frac{d_{(F,G)}w}{dz}$$

bir $(F_1,G_1)$-pseudoanalitik fonksiyondur (Bers 1953).

**İspat.** $\omega = \varphi + i\psi$ alalım. O halde

$$\dot{w} = \varphi_z F + \psi_z G \tag{2.26}$$

ve

$$\varphi_{\bar{z}}F + \psi_{\bar{z}}G = 0$$

şeklindedir öyle ki

$$\varphi_z\bar{F} + \psi_z\bar{G} = 0. \tag{2.27}$$

(2.26) ve (2.27) denklemleri beraber çözülürse

$$\varphi_z = \frac{\bar{G}\dot{w}}{F\bar{G} - \bar{F}G} \qquad ve \qquad \psi_z = -\frac{\bar{F}\dot{w}}{F\bar{G} - \bar{F}G} \tag{2.28}$$

elde edilir. Dikkat edilirse

$$\varphi_{z\bar{z}}F + \psi_{z\bar{z}}G + \varphi_{\bar{z}}F_z + \psi_{\bar{z}}G_z = 0.$$

$$\begin{aligned}
(\dot{w})_{\bar{z}} &= \varphi_{z\bar{z}}F + \psi_{z\bar{z}}G + \varphi_z F_{\bar{z}} + \psi_z G_{\bar{z}} \\
&= \varphi_z F_{\bar{z}} + \psi_z G_{\bar{z}} - \left(\overline{\varphi_z \bar{F}_{\bar{z}} + \psi_z \bar{G}_{\bar{z}}}\right)
\end{aligned}$$

(2.28) son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\dot{w})_{\bar{z}} &= \left(\frac{\bar{G}F_{\bar{z}} - \bar{F}G_{\bar{z}}}{F\bar{G} - \bar{F}G}\right)\dot{w} - \left(\frac{\overline{\overline{GF_{\bar{z}}} - \overline{FG_{\bar{z}}}}}{F\bar{G} - \bar{F}G}\right)\overline{\dot{w}} \\
&= a\dot{w} - B\overline{\dot{w}}.
\end{aligned}$$

Böylece $\dot{w}$, $(\dot{w})_{\bar{z}} = a\dot{w} - B\overline{\dot{w}}$ Vekua denkleminin bir çözümüdür.■

$W$ bir $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyon olsun. $(F, G)$ içerisine gömülmüş bir doğurucu diziyi kullanarak, tümevarım formülü ile $W$ nın yüksek basamaktan türevi tanımlanabilir:

$$W^{[0]} = W \;\; ; \qquad W^{[m+1]} = \frac{d_{(F_m, G_m)}W^{[m]}}{dz} \;\;, \quad m = 0, 1, 2...$$

### 2.3.2 İntegral

Teorem 2.3.11 in ispatında (2.28) yardımcı bağıntı çifti elde edildi.

$$\varphi_z = \frac{\bar{G}\dot{w}}{F\bar{G} - \bar{F}G} \qquad \text{ve} \qquad \psi_z = -\frac{\bar{F}\dot{w}}{F\bar{G} - \bar{F}G} \tag{2.29}$$

$\varphi$ ve $\psi$ (dolayısıyla $\omega$ ve $w$) $\dot{w}$ den kurtarılmak isteniyorsa (2.29) daki ifadeler integre edilmelidir.

Tüm kompleks düzlemde veya bir konveks bölgede

$$\varphi_z = \Phi \tag{2.30}$$

denklemini ele alalım. Burada $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ kompleks değerli bir fonksiyondur ve $\varphi$ reel değerlidir. Bu denklemin aşağıdaki sisteme denk olduğunu görmek kolaydır.

$$\varphi_x = 2\Phi_1 \quad ve \quad \varphi_y = -2\Phi_2$$

Yalnızca aşağıdaki uyuşma şartı sağlanırsa bu denklem bir çözüme sahiptir.

$$\partial_y \Phi_1 + \partial_x \Phi_2 = 0 \tag{2.31}$$

Eğer bu şart yerine getirilirse, $\varphi$ reel keyfi sabitlerle birlikte

$$\varphi(x, y) = 2\left(\int_{x_0}^{x} \Phi_1(\eta, y)\, d\eta - \int_{y_0}^{y} \Phi_2(x_0, \xi)\, d\xi\right) + c$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Burada $(x_0, y_0)$ ilgili bölgede keyfi bir sabit noktadır.

Dikkat edilirse bu formül $(x_0, y_0)$ dan $(x, y)$ ye giden keyfi bir $\Gamma$ eğrisi boyunca integral göz önüne alındığında herhangi bir basit bağlantılı bölgeye genişletilebilir.

$$\varphi(x, y) = 2\left(\int_{\Gamma} \Phi_1 dx - \Phi_2 dy\right) + c \tag{2.32}$$

$A$, (2.32) deki integral operatörü göstermek üzere

$$A[\Phi](x,y) = 2\left(\int_\Gamma \Phi_1 dx - \Phi_2 dy\right).$$

Bu ifade şu şekilde de yazılabilir:

$$A[\Phi](x,y) = 2\operatorname{Re}\int_\Gamma (\Phi_1 + i\Phi_2)(dx + idy) = 2\operatorname{Re}\int_\Gamma \Phi dz. \tag{2.33}$$

Benzer şekilde, $\partial_{\bar{z}}$ operatörüne karşılık gelen ve tüm reel ve sanal kısımları

$$\partial_x \Phi_1 - \partial_y \Phi_2 = 0$$

şartını sağlayan kompleks fonksiyonlara uygulanan integral operatörü

$$\bar{A}[\Phi](x,y) = 2\left(\int_\Gamma \Phi_1 dx + \Phi_2 dy\right)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(2.29) denklemine dönülürse, $\varphi$ ve $\psi$ fonksiyonlarını keyfi sabitlerden kurtarmak için ifadelerin sağ taraflarına $A$ operatörünün uygulanabileceği görülür. Buradan

$$\varphi = A\left[\frac{\bar{G}\dot{w}}{F\bar{G} - \bar{F}G}\right] \qquad \text{ve} \qquad \psi = -A\left[\frac{\bar{F}\dot{w}}{F\bar{G} - \bar{F}G}\right] \tag{2.34}$$

ve böylece

$$\omega = A\left[\frac{\bar{G}\dot{w}}{F\bar{G} - \bar{F}G}\right] - iA\left[\frac{\bar{F}\dot{w}}{F\bar{G} - \bar{F}G}\right].$$

(2.33) göz önüne alınırsa

$$\omega = \operatorname{Re}\int_\Gamma \frac{2\bar{G}\dot{w}dz}{F\bar{G} - \bar{F}G} - i\operatorname{Re}\int_\Gamma \frac{2\bar{F}\dot{w}dz}{F\bar{G} - \bar{F}G}$$

ve

$$w = F \operatorname{Re} \int_\Gamma \frac{2\bar{G}\dot{w}dz}{F\bar{G} - \bar{F}G} - G \operatorname{Re} \int_\Gamma \frac{2\bar{F}\dot{w}dz}{F\bar{G} - \bar{F}G}$$

olduğu görülebilir.

**Tanım 2.3.12.** $(F, G)$-*-integrali

$$* \int_\Gamma W d_{(F,G)} z = \operatorname{Re} \int_\Gamma G^* W dz + i \operatorname{Re} \int_\Gamma F^* W dz$$

eşitliğiyle ve $(F, G)$ integrali

$$\int_\Gamma W d_{(F,G)} z = F(z_1) \operatorname{Re} \int_\Gamma G^* W dz + G(z_1) \operatorname{Re} \int_\Gamma F^* W dz \tag{2.35}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $\Gamma$, $z_0$ dan $z_1$ e giden bir eğridir.

**Tanım 2.3.13.** $D$ bölgesinde tanımlı, sürekli bir $W$ fonksiyonuna eğer $D$ nin basit bağlantılı bir alt bölgesinde bulunan her kapalı $\Gamma$ eğrisi için

$$\oint_\Gamma W d_{(F,G)} z = 0$$

ise $(F, G)$-*integrallenebilirdir* denir.

**Teorem 2.3.14.** Bir $w$ $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyonunun $\dot{w}$ $(F, G)$-türevi $(F, G)$-integrallenebilirdir (Bers 1953).

**İspat.** (2.34) deki integrallerin yoldan bağımsızlığından elde edilir.■

**Teorem 2.3.15.** $\dot{w}$ basit bağlantılı bir $D$ bölgesinde $w$ $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyonunun $(F, G)$-türevi olsun ve $\Gamma \subset D$, $z_0$ dan $z$ ye giden bir eğri olsun.

O halde

$$*\int_{\Gamma} \dot{w} d_{(F,G)} z = \omega(z) - \omega(z_0) \quad , \qquad \omega =_* w \,(\mathrm{mod}\, F, G)$$

$$\int_{\Gamma} \dot{w} d_{(F,G)} z = w(z) - \varphi(z_0) F(z) - \psi(z_0) G(z)$$

eşitlikleri geçerlidir (Bers 1953).

**İspat.** İlk eşitlik (2.29) ve $(F,G)$-$*$-integralin tanımı ile

$$d\varphi = 2\,\mathrm{Re}\,(\varphi_z dz) \quad , \qquad d\psi = 2\,\mathrm{Re}\,(\psi_z dz)$$

özdeşlikleri yardımıyla gösterilebilir. İkinci eşitlik ise ilk eşitlikten yararlanılarak elde edilir.■

$\int_{x_0}^{x} \dot{w} d_{(F,G)} z$ integrali $\dot{w}$ nın $(F,G)$-antitürevidir.

**Teorem 2.3.16.** *$W$ basit bağlantılı bir $D$ bölgesinde tanımlı sürekli bir fonksiyon ve $W$, $(F,G)$-integrallenebilir ise*

$$W(z) = \frac{d_{(F,G)} w(z)}{dz}$$

*olacak şekilde $D$ de bir $(F,G)$-pseudoanalitik $w$ fonksiyonu mevcuttur (Kravchenko 2009).*

**İspat.** Teoremin hipotezleri altında

$$\omega = \varphi + i\psi = *\int_{\Gamma} W d_{(F,G)} z$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır ve ($D$ de herhangi sabit $z_0$ noktasında) sürekli kısmi türevlere sahiptir.

$$\varphi = \mathrm{Re}\int_{\Gamma} G^* W dz = \int_{\Gamma} \frac{\bar{G}W dz - G\bar{W} d\bar{z}}{F\bar{G} - \bar{F}G}$$

ve

$$\psi = \mathrm{Re}\int_{\Gamma} F^* W dz = -\int_{\Gamma} \frac{\bar{F}W dz - F\bar{W} d\bar{z}}{F\bar{G} - \bar{F}G}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\varphi_z = \frac{\bar{G}W}{F\bar{G} - \bar{F}G}, \qquad \psi_z = -\frac{\bar{F}W}{F\bar{G} - \bar{F}G}$$

$$\varphi_{\bar{z}} = -\frac{G\bar{W}}{F\bar{G} - \bar{F}G}, \qquad \psi_{\bar{z}} = \frac{F\bar{W}}{F\bar{G} - \bar{F}G}$$

ifadeleri kullanılarak

$$\varphi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G = 0 \quad \text{ve} \quad \varphi_z F + \psi_z G = W$$

ile Teorem 2.2.3 ten $w = \varphi F + \psi G$ fonksiyonunun pseudoanalitik olduğu ve $\dot{w} = W$ elde edilir.■

**Teorem 2.3.17.** $(F_1, G_1)$ , $(F, G)$ nin halefi ve $W$, $(F_1, G_1)$-pseudoanalitik bir fonksiyon olsun. O halde $W$, $(F, G)$-integrallenebilirdir ve böylece (tek değerli olmak zorunda olmayan) $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyonun $(F, G)$-türevidir (Kravchenko 2009).

**İspat.** Teorem 2.3.16 ya göre $D$ regüler bir bölge ise ve $\bar{D}$, $W$ nın tanım bölgesinde bulunuyorsa

$$*\int_{\partial D} W d_{(F,G)} z = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $(F^*, G^*)$, $(F, G)$ nin adjointi olmak üzere her $W$ için

$$\operatorname{Re}\left(*\int_{\partial D} W d_{(F,G)} z\right) = \operatorname{Re}\int_{\partial D} G^* W dz$$

ve

$$\operatorname{Im}\left(*\int_{\partial D} W d_{(F,G)} z\right) = \operatorname{Re}\int_{\partial D} F^* W dz.$$

Teorem 2.3.4 yardımıyla

$$F^*_{\bar{z}} = -aF^* - \overline{BF^*} \ \text{ ve } G^*_{\bar{z}} = -aG^* - \overline{BG^*}$$

ve hipotezlerden

$$W_{\bar{z}} = aW - B\overline{W}$$

dir, burada $a$, $b$ ve $B$, $(F, G)$ nin karakteristik katsayılarıdır.

Burada Green-Gauss integral teoreminin kompleks versiyonlarından biri kullanılacaktır. Bu teoreme göre regüler bir $D$ bölgesi için ve $x$ ile $y$ ye göre sürekli diferensiyellenebilir, $D$ da tanımlı herhangi bir kompleks $g(z)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} F^* W dz &= 2i \int_D (F^* W)_{\bar{z}}\, dxdy \\
&= 2i \int_D \left(-aF^* W - \overline{BF^*} W + F^* aW - F^* B\bar{W}\right) dxdy \\
&= -4i \int_D \operatorname{Re}\left(F^* B\bar{W}\right) dxdy
\end{aligned}$$

integrali sadece sanal kısımdan oluşur. Böylece

$$\operatorname{Re}\int_{\partial D} F^* W dz = 0.$$

Benzer işlemler yapılarak

$$\operatorname{Re} \int_{\partial D} G^* W dz = 0$$

olduğu görülebilir.■

**Teorem 2.3.18.** $(F, G)$ , $(F_1, G_1)$ in selefi olsun. Sürekli bir fonksiyonun $(F_1, G_1)$-pseudoanalitik olması için gerek ve yeter şart bu fonksiyonun $(F, G)$-integrallenebilir olmasıdır (Bers 1953).■

# 3. KOMPLEKS PSEUDOANALİTİK FONKSİYONLARIN REEL KISIMLARI İÇİN İKİNCİ BASAMAKTAN ELİPTİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

## 3.1 Zamandan Bağımsız Schrödinger Denkleminin Çarpanlara Ayrılması

$f_0$ bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+v(x)\right)f\left(x\right)=0$$

sıfırdan farklı bir özel çözümü ise o halde Schrödinger operatörü

$$\frac{d^2}{dx^2}-v(x)=\left(\frac{d}{dx}+\frac{f_0'}{f_0}\right)\left(\frac{d}{dx}-\frac{f_0'}{f_0}\right)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu sonuç iki boyuta genelleştirilecektir. $D\subset\mathbb{R}^2$ bölgesinde iki boyutlu Schrödinger denklemi

$$\left(-\Delta+v\right)f=0 \tag{3.1}$$

ele alınacaktır. Burada $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ ve $v$ ile $f$ reel değerli fonksiyonlardır. $f$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir olduğu varsayılacaktır. $C$ ile kompleks eşlenik operatör gösterilecektir.

**Teorem 3.1.1.** $f$, $D$ de (3.1) denkleminin pozitif özel bir çözümü olsun. O halde reel değerli her $\varphi\in C^2\left(D\right)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\Delta-v\right)\varphi &= \left(\partial_{\bar z}+\frac{f_z}{f}C\right)\left(\partial_z-\frac{f_z}{f}C\right)\varphi \\ &= \left(\partial_z+\frac{f_{\bar z}}{f}C\right)\left(\partial_{\bar z}-\frac{f_{\bar z}}{f}C\right)\varphi\end{aligned} \tag{3.2}$$

(Kravchenko 2005a).

**İspat.** Direkt hesaplamalarla (3.2) deki ilk eşitlik aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned}\left(\partial_{\bar{z}}+\frac{f_z}{f}C\right)\left(\partial_z-\frac{f_z}{f}C\right)\varphi &= \left(\partial_{\bar{z}}+\frac{f_z}{f}C\right)\left(\partial_z\varphi-\frac{f_z}{f}\varphi\right)\\ &= \partial_{\bar{z}}\partial_z\varphi-\partial_{\bar{z}}\left(\frac{f_z}{f}\varphi\right)+\frac{f_z}{f}\partial_{\bar{z}}\varphi-\frac{f_z}{f}\frac{f_{\bar{z}}}{f}\varphi\\ &= \frac{1}{4}\left(\Delta-\upsilon\right)\varphi \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Buradan (3.3) ün her iki yanına $C$ operatörünün uygulanmasıyla ikinci eşitlik bulunabilir.

$I$ özdeşlik operatörü olmak üzere $\partial_z-\frac{f_z}{f}I$ operatörü

$$\partial_z-\frac{f_z}{f}I=f\partial_z f^{-1}I$$

şeklinde yazılabilir. Bu operatör $P=f\partial_z f^{-1}I$ ile gösterilmek üzere Teorem 3.1.1 e göre $f$, (3.1) denkleminin pozitif bir çözümü ise, $P$ operatörü (3.1) in reel değerli çözümlerini

$$\left(\partial_{\bar{z}}+\frac{f_z}{f}C\right)w=0 \qquad (3.4)$$

Vekua denkleminin çözümlerine dönüştürür.

$\Phi=f^{-1}w$, (2.30) şartını sağlayacak şekilde, her kompleks değerli $w$ fonksiyonuna uygulanabilir olan $S=fAf^{-1}I$ operatörü göz önüne alınırsa böyle bir $w$ için $PSw=w$ olduğu açıktır.■

**Önerme 3.1.2.** $f$, (3.1) in bir pozitif özel çözümü ve $w$, (3.4) denkleminin bir çözümü olsun. O halde reel değerli $g=Sw$ fonksiyonu (3.1) in bir çözümüdür (Kravchenko 2005b).

**İspat.** Öncelikle $\Phi = \dfrac{w}{f}$ fonksiyonunun (2.30) u sağladığını kontrol edelim. $u = \operatorname{Re} w$ ve $v = \operatorname{Im} w$ olsun. $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2 = \dfrac{u}{f} + i\dfrac{v}{f}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\partial_y \Phi_1 + \partial_x \Phi_2 &= \partial_y \left(\frac{u}{f}\right) + \partial_x \left(\frac{v}{f}\right) \\
&= \frac{1}{f}\left[(\partial_y u + \partial_x v) - \left(\frac{\partial_y f}{f} u + \frac{\partial_x f}{f} v\right)\right] \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

dir. Dikkat edilirse (3.4) denklemi

$$\begin{cases}
\partial_x u - \partial_y v = -\dfrac{\partial_x f}{f} u + \dfrac{\partial_y f}{f} v \\
\partial_x v + \partial_y u = \dfrac{\partial_x f}{f} v + \dfrac{\partial_y f}{f} u.
\end{cases}$$

sistemine denktir. (2.30) dan (3.5) ifadesi sıfıra eşittir. Böylece $\Phi$ fonksiyonu (2.30) u sağlar. Buradan $\varphi = A[w/f]$ reel değerli fonksiyonu iyi tanımlıdır ve

$$\begin{aligned}
\partial_z \varphi &= \frac{1}{2}(\partial_x \varphi - i\partial_y \varphi) = \frac{1}{2}(\partial_x A[w/f] - i\partial_y A[w/f]) \\
&= \frac{u(x,y)}{f(x,y)} - i\left[\int_{x_0}^{x} \partial_y \frac{u(\eta,y)}{f(\eta,y)} d_\eta - \frac{v(x_0,y)}{f(x_0,y)}\right] \\
&= u/f + iv/f = w/f
\end{aligned}$$

olup $\partial_z \varphi = w/f$ denklemi sağlanır. Aşağıdaki ifadeyi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}} \partial_z (Sw) &= \partial_{\bar{z}} \partial_z \left(f A f^{-1} w\right) = \partial_{\bar{z}} \partial_z \left(f A\left[\frac{w}{f}\right]\right) \\
&= \partial_{\bar{z}} \left(A\left[\frac{w}{f}\right] \partial_z f + w\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}\Delta f\right) A\left[\frac{w}{f}\right] + (\partial_z f)\, \partial_{\bar{z}} A\left[\frac{w}{f}\right] - \frac{\partial_z f}{f} \bar{w}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

$\partial_{\bar{z}} A[w/f]$ ifadesini hesaplamak için $\partial_{\bar{z}} = \partial_z + i\partial_y$ ifadesi ve $A[w/f]$ operatörü tanımı kullanılacak olursa

$$\partial_{\bar{z}} A\left[\frac{w}{f}\right] = \partial_z A\left[\frac{w}{f}\right] + i\partial_y A\left[\frac{w}{f}\right] = \frac{w}{f} - 2i\frac{v}{f} = \frac{\bar{w}}{f} \qquad (3.7)$$

elde edilir, burada

$$\begin{aligned}\partial_y A\left[\frac{u+iv}{f}\right](x,y) &= 2\left(\int_{x_0}^{x}\partial_y\left(\frac{u(\eta,y)}{f(\eta,y)}\right)d\eta-\frac{v(x_0,y)}{f(x_0,y)}\right)\\ &= -2\left(\int_{x_0}^{x}\partial_\eta\left(\frac{v(\eta,y)}{f(\eta,y)}\right)d\eta-\frac{v(x_0,y)}{f(x_0,y)}\right)=-\frac{2v(x,y)}{f(x,y)}\end{aligned}$$

ifadesi kullanılmıştır. Şimdi,

$$\partial_{\bar{z}}\partial_z(Sw)=\frac{1}{4}\Delta(Sw)=\frac{1}{4}(\Delta f)A\left[\frac{w}{f}\right]$$

olmak üzere $(3.7)$, $(3.6)$ da yerine yazılırsa $\Delta(Sw)=\upsilon f A\left[\frac{w}{f}\right]=\upsilon Sw$ bulunur. Buradan $(-\Delta+\upsilon)Sw=0$ olup (3.1) sağlanır.■

**Önerme 3.1.3.** $g$, (3.1) denkleminin reel değerli bir çözümü olsun. O halde

$$SPg=g+cf$$

dir, burada c keyfi reel sabittir (Kravchenko 2005b).

**İspat.** $S=fAf^{-1}I$ ve $P=f\partial_z f^{-1}I$ olmak üzere

$$SPg=fAf^{-1}f\partial_z f^{-1}g=fA\partial_z\left[\frac{g}{f}\right]=f\left(\frac{g}{f}+c\right)=g+fc.$$

Basit hesaplamalarla $A\partial_z\left[\frac{g}{f}\right]=\frac{g}{f}+c$ olduğu görülebilir.■

Teorem 3.1.1 ile Önerme 3.1.2, (3.1) denkleminin (3.4) Vekua denklemine denk olduğunu gösterir. Bu denklemlerden birinin her çözümü, diğer denklemin bir çözümüne dönüştürülebilir ve terside doğrudur.

### 3.2 divpgrad + q Operatörünün Çarpanlara Ayrılması

**Önerme 3.2.1.** $p$ ve $q$ reel değerli fonksiyonlar, $p\in C^2(D)$ ve $D$ de $p\neq 0$ olsun.

O halde $D$ de

$$\operatorname{div} p \operatorname{grad} + q = p^{1/2} (\Delta - r) p^{1/2} \tag{3.8}$$

dir, burada $r = \dfrac{\Delta p^{1/2}}{p^{1/2}} - \dfrac{q}{p}$ dir (Kravchenko 2009).

**İspat.** Uhlmann (1999) ın çalışmasından iyi bilinen

$$\operatorname{div} p \operatorname{grad} = p^{1/2} \left( \Delta - \frac{\Delta p^{1/2}}{p^{1/2}} \right) p^{1/2} \tag{3.9}$$

bağıntısının iki yanına $q$ terimi eklenir ve sağ taraf $p^{1/2} (q/p) p^{1/2}$ şeklinde yazılırsa

$$\begin{aligned} \operatorname{div} p \operatorname{grad} + q &= p^{1/2} \left( \Delta - \frac{\Delta p^{1/2}}{p^{1/2}} \right) p^{1/2} + q \\ &= p^{1/2} \left( \Delta - \frac{\Delta p^{1/2}}{p^{1/2}} \right) p^{1/2} + p^{1/2} \frac{q}{p} p^{1/2} \\ &= p^{1/2} (\Delta - r) p^{1/2} \end{aligned}$$

elde edilebilir.■

**Teorem 3.2.2.** p ve q reel değerli fonksiyonlar, $p \in C^2(D)$ ve $D$ de $p \neq 0$ olmak üzere $u_0$

$$(\operatorname{div} p \operatorname{grad} + q) u = 0 \quad , \qquad D \; de \tag{3.10}$$

denkleminin bir pozitif özel çözümü olsun. O halde herhangi bir reel değerli ikinci mertebeden sürekli diferensiyellenebilir $\varphi$ fonksiyonu için

$$\frac{1}{4} (\operatorname{div} p \operatorname{grad} + q) \varphi = p^{1/2} \left( \partial_z + \frac{f_{\bar{z}}}{f} C \right) \left( \partial_{\bar{z}} - \frac{f_{\bar{z}}}{f} C \right) p^{1/2} \varphi \tag{3.11}$$

eşitliği geçerlidir, burada

$$f = p^{1/2} u_0 \tag{3.12}$$

dır (Kravchenko 2006).

**İspat.** İspat (3.2) ye dayanmaktadır. (3.8) den $u_0$, (3.10) denkleminin bir çözümü ise (3.12) fonksiyonu

$$(\Delta - r)\, f = 0 \tag{3.13}$$

denkleminin bir çözümüdür. Buradan (3.8) ve (3.2) birleştirilirse (3.11) elde edilir.■

**Uyarı 3.2.3.** (3.9) a göre $\Delta - r = f^{-1}\operatorname{div} f^2 \operatorname{grad} f^{-1}$ dir, burada $f$, (3.13) ün bir çözümüdür. Böylece (3.8) den

$$\operatorname{div} p \operatorname{grad} + q = p^{1/2} f^{-1} \operatorname{div} f^2 \operatorname{grad} f^{-1} p^{1/2} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.12) göz önüne alınırsa $D$ de

$$\operatorname{div} p \operatorname{grad} + q = u_0^{-1} \operatorname{div} p u_0^2 \operatorname{grad} u_0^{-1}$$

bulunur.

**Uyarı 3.2.4.** $q \equiv 0$ olsun. O halde $u_0 \equiv 1$ olarak seçilebilir. Böylece (3.11) den

$$\frac{1}{4}\operatorname{div}(p \operatorname{grad} \varphi) = p^{1/2}\left(\partial_z + \frac{\partial_{\bar{z}} p^{1/2}}{p^{1/2}} C\right)\left(\partial_{\bar{z}} - \frac{\partial_{\bar{z}} p^{1/2}}{p^{1/2}} C\right)\left(p^{1/2}\varphi\right)$$

elde edilir.

Bundan sonra $D$ de (3.10) denkleminin bir pozitif özel çözümünün mevcut olduğu varsayılacak ve bu çözüm $u_0$ ile gösterilecektir.

$f$, $x$ ve $y$ nin reel değerli bir fonksiyonu olsun.

$$W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W} \qquad , \qquad D \ de \tag{3.15}$$

Vekua denklemi ele alınsın. Bu denklem bundan sonraki kısımlarda oldukça önemli bir role sahip olduğu için bu denkleme *temel Vekua denklemi* denilecektir. Bu denkleme karşılık gelen $\partial_{\bar{z}} - \frac{f_{\bar{z}}}{f}C$ operatörü (3.2) de olduğu gibi (3.11) in çarpanlara ayrılmasında ortaya çıkar.

$W_1 = \operatorname{Re} W$ ve $W_2 = \operatorname{Im} W$ gösterimi kullanılacaktır.

**Uyarı 3.2.5.** $W = W_1 + iW_2$ olmak üzere (3.15) denklemi

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}} - \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W} &= (W_{1_{\bar{z}}} + iW_{2_{\bar{z}}}) - \frac{\partial_{\bar{z}} f}{f}(W_1 - iW_2) \\ &= f\frac{fW_{1_{\bar{z}}} - f_{\bar{z}}W_1}{f^2} + \frac{i}{f}(fW_{2_{\bar{z}}} + f_{\bar{z}}W_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$f\partial_{\bar{z}}\left(f^{-1}W_1\right) + if^{-1}\partial_{\bar{z}}(fW_2) = 0 \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabilir.

**Teorem 3.2.6.** $W = W_1 + iW_2$, (3.15) denkleminin bir çözümü olsun. O halde $U = f^{-1}W_1$, $D$ de

$$\operatorname{div}\left(f^2\nabla U\right) = 0 \tag{3.17}$$

*ilektenlik denkleminin* ve $V = fW_2$, $D$ de

$$\operatorname{div}\left(f^{-2}\nabla V\right) = 0 \tag{3.18}$$

*ilişkili iletkenlik denkleminin* bir çözümüdür. $r_1 = \Delta f/f$ olmak üzere $W_1$ fonksiyonu $D$ de

$$-\Delta W_1 + r_1 W_1 = 0 \tag{3.19}$$

*zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin* bir çözümüdür.
$r_2 = 2(\nabla f)^2/f^2 - r_1$ ve $(\nabla f)^2 = f_x^2 + f_y^2$ olmak üzere $W_2$ fonksiyonu $D$ de

$$-\Delta W_2 + r_2 W_2 = 0 \tag{3.20}$$

*ilişkili zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin* bir çözümüdür (Kravchenko 2006).

**İspat.** Teoremin ilk kısmını ispatlamak için (3.15) denkleminin Uyarı 3.2.5 de verilen formu kullanılacaktır. (3.16), $f$ ile çarpılır ve $\partial_z$ uygulanırsa

$$\begin{aligned}\partial_z\left(f^2\partial_{\bar{z}}\left(f^{-1}W_1\right)\right) + i\partial_z\left(\partial_{\bar{z}}\left(fW_2\right)\right) &= 0\\ \partial_z\left(f^2\partial_{\bar{z}}\left(f^{-1}W_1\right)\right) + \frac{i}{4}\Delta\left(fW_2\right) &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\partial_z\left(f^2\partial_{\bar{z}}\left(f^{-1}W_1\right)\right) = 0$ olup

$$\operatorname{Re}\left[\partial_z\left(f^2\partial_{\bar{z}}\left(f^{-1}W_1\right)\right)\right] = \partial_x\left(f^2\partial_x\left(f^{-1}W_1\right)\right) + \partial_y\left(f^2\partial_y\left(f^{-1}W_1\right)\right) = 0$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(f^2\nabla U\right) &= \partial_x\left(f^2\partial_x\left(f^{-1}W_1\right)\right) + \partial_y\left(f^2\partial_y\left(f^{-1}W_1\right)\right)\\ &= \partial_x\left(f^2\partial_x U\right) + \partial_y\left(f^2\partial_y U\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $U = f^{-1}W_1$, (3.17) nin çözümüdür.

Benzer şekilde (3.16), $f^{-1}$ ile çarpılır ve $\partial_z$ uygulanırsa

$$\frac{1}{4}\Delta\left(f^{-1}W_1\right) + i\partial_z\left(f^{-2}\partial_{\bar{z}}\left(fW_2\right)\right) = 0$$

elde edilir. $\operatorname{Re}\left[\partial_z\left(f^{-2}\partial_{\bar z}\left(fW_2\right)\right)\right]=0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(f^{-2}\nabla V\right) &= \partial_x\left(f^{-2}\partial_x\left(fW_2\right)\right)+\partial_y\left(f^{-2}\partial_y\left(fW_2\right)\right)\\
&= \partial_x\left(f^{-2}\partial_x V\right)+\partial_y\left(f^{-2}\partial_y V\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. Böylece $V=fW_2$, (3.18) denkleminin çözümüdür.

$r_1=\Delta f/f$ için (3.9) dan

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(f^2\operatorname{grad}\left(f^{-1}W_1\right)\right) &= f\left(\Delta-\frac{\Delta f}{f}\right)ff^{-1}W_1\\
&= f\left(\Delta-r_1\right)W_1
\end{aligned}$$

olmak üzere $\left(\Delta-r_1\right)W_1 = f^{-1}\operatorname{div}\left(f^2\nabla\left(f^{-1}W_1\right)\right)$ dir. Buradan yukarıda ispatlanan (3.17) denkleminden $W_1$, (3.19) un bir çözümüdür. $r_2 = 2\left(\nabla f\right)^2/f^2-r_1$ olmak üzere (3.9) dan

$$f\operatorname{div}\left(f^{-2}\nabla\left(fW_2\right)\right)=\left(\Delta-r_2\right)W_2$$

elde edilir. Böylece (3.18) denkleminden $W_2$, (3.20) un bir çözümüdür.■

**Uyarı 3.2.7.** (3.15) in çözümleri olan

$$F=f \quad \text{ve} \quad G=\frac{i}{f} \tag{3.21}$$

fonksiyon çifti ele alınsın. (3.15) Vekua denklemine karşılık gelen doğurucu çift bu fonksiyonlarla gösterilecektir. Buradan (3.15) denklemi ikinci çeşit pseudoanalitik fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$\varphi_{\bar z}f+\psi_{\bar z}\frac{i}{f}=0. \tag{3.22}$$

Burada $\varphi$ ve $\psi$ reel değerli fonksiyonlardır. Eğer $\varphi$ ve $\psi$, (3.22) yi sağlıyorsa

$W = \varphi f + \psi \dfrac{i}{f}$, (3.15) in bir çözümüdür ve terside doğrudur.

$w = \varphi + i\psi$ gösterimi kullanılacak olursa (3.22) den

$$(w + \overline{w})_{\overline{z}}\, f + (w - \overline{w})_{\overline{z}}\, \frac{1}{f} = 0$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$w_{\overline{z}} = \frac{1 - f^2}{1 + f^2} \overline{w}_{\overline{z}} \tag{3.23}$$

bulunur. (3.23) ve (3.17) , (3.18) arasındaki ilişki Astala ve Päivärinta (2006) tarafından incelenmiş, düzlemde Calderón probleminin çözümü için önemli olduğu ortaya çıkarılmıştır.

**Teorem 3.2.8.** $W = W_1 + iW_2$, (3.15) in bir çözümü olsun. $u_0$, $D$ de (3.10) un bir çözümü olmak üzere $f = p^{1/2} u_0$ varsayımı yapılsın. O halde $u = p^{-1/2} W_1$, $D$ de (3.10) un bir çözümüdür ve $v = p^{1/2} W_2$

$$\left( \operatorname{div} \frac{1}{p} \operatorname{grad} + q_1 \right) v = 0 \quad , \quad D \ de \tag{3.24}$$

denkleminin bir çözümüdür, burada

$$q_1 = -\frac{1}{p} \left( \frac{q}{p} + 2 \left\langle \frac{\nabla p}{p}, \frac{\nabla u_0}{u_0} \right\rangle + 2 \left( \frac{\nabla u_0}{u_0} \right)^2 \right) \tag{3.25}$$

dır (Kravchenko 2006).

**İspat.** Teorem 3.2.6 ya göre $f^{-1} W_1$ fonksiyonu (3.17) nin bir çözümüdür. (3.14) den

$$\begin{aligned} p^{-1/2} (\operatorname{div} p \operatorname{grad} + q) \left( p^{-1/2} W_1 \right) &= p^{-1/2} p^{1/2} f^{-1} \operatorname{div} f^2 \operatorname{grad} f^{-1} p^{1/2} p^{-1/2} W_1 \\ &= f^{-1} \operatorname{div} \left( f^2 \nabla \left( f^{-1} W_1 \right) \right) . \end{aligned}$$

$f^{-1}W_1$, (3.17) nin bir çözümü olduğundan $\operatorname{div}\left(f^2\nabla\left(f^{-1}W_1\right)\right) = 0$ dır. O halde $(\operatorname{div} p \operatorname{grad} + q)\left(p^{-1/2}W_1\right) = 0$ olup $u = p^{-1/2}W_1$ (3.10) un bir çözümüdür.

Teoremin ikinci iddiasını elde etmek amacıyla her bir reel değerli $\varphi \in C^2(D)$ için

$$p^{1/2}\left(\operatorname{div}\frac{1}{p}\operatorname{grad} + q_1\right)\left(p^{1/2}\varphi\right) = f \operatorname{div}\left(f^{-2}\nabla\left(f\varphi\right)\right)$$

gösterimi kullanılacaktır. (3.14) den

$$p^{1/2}\left(\operatorname{div}\frac{1}{p}\operatorname{grad} + q_1\right)\left(p^{1/2}\varphi\right) = f \operatorname{div}\left(f^{-2}\nabla\left(f\varphi\right)\right).$$

(3.9) a göre

$$f \operatorname{div}\left(f^{-2}\nabla\left(f\varphi\right)\right) = \left(\Delta - \frac{\Delta f^{-1}}{f^{-1}}\right)\varphi = \left(\Delta - r_2\right)\varphi.$$

Direkt hesaplamalarla aşağıdaki eşitlik elde edilebilir.

$$\frac{\Delta f^{-1}}{f^{-1}} = \frac{3}{4}\left(\frac{\nabla p}{p}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p} + \left\langle\frac{\nabla p}{p}, \frac{\nabla u_0}{u_0}\right\rangle - \frac{\Delta u_0}{u_0} + 2\left(\frac{\nabla u_0}{u_0}\right)^2$$

$u_0$, (3.10) denkleminin bir çözümü olduğundan

$$-\frac{\Delta u_0}{u_0} = \frac{q}{p} + \left\langle\frac{\nabla p}{p}, \frac{\nabla u_0}{u_0}\right\rangle$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f^{-1}}{f^{-1}} &= \frac{3}{4}\left(\frac{\nabla p}{p}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p} + 2\left\langle\frac{\nabla p}{p}, \frac{\nabla u_0}{u_0}\right\rangle + \frac{q}{p} + 2\left(\frac{\nabla u_0}{u_0}\right)^2 \\
\frac{\Delta p^{-1/2}}{p^{-1/2}} &= \frac{3}{4}\left(\frac{\nabla p}{p}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p}.
\end{aligned}$$

O halde

$$\frac{\Delta f^{-1}}{f^{-1}} = \frac{\Delta p^{-1/2}}{p^{-1/2}} + 2\left\langle\frac{\nabla p}{p}, \frac{\nabla u_0}{u_0}\right\rangle + \frac{q}{p} + 2\left(\frac{\nabla u_0}{u_0}\right)^2$$

olup $q_1$, (3.25) formunda seçilirse (3.8) sonucu elde edilir.■

### 3.3 Eşlenik Metaharmonik Fonksiyonlar

Teorem 3.2.6 ve Teorem 3.2.8, kompleks analitik bir fonksiyonun reel ve sanal kısımlarının harmonik olmasının yanısıra, temel Vekua denklemi (3.15) in bir çözümünün reel ve sanal kısımlarının, ilişkili zamandan bağımsız Schrödinger denklemlerinin çözümleri olduğunu ve aynı zamanda daha genel eliptik (3.10) ve (3.24) denklemlerinin yanında iletkenlik denklemleriyle de ilgili olduğunu gösterdi. Basit bağlantılı bir bölgede verilen keyfi bir reel değerli harmonik fonksiyon için bir harmonik eşlenik fonksiyonun yapılandırılabileceği biliniyor. Öyle ki elde edilen harmonik fonksiyonlar çifti, bir kompleks analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımlarını gösterir. Bu ilişliki zamandan bağımsız Schrödinger denklemlerinin ve diğer eliptik denklemlerin çözümleri için daha genel bir gerçeğe karşılık gelir (ilişliki zamandan bağımsız Schrödinger denklemi Vekua'nın tanımının biraz daha genelleştirilmişidir. Buna metaharmonik fonksiyonlar denilecektir).

**Teorem 3.3.1.** $W_1$ basit bağlantılı bir $D$ bölgesinde (3.19) un reel değerli bir çözümü olsun. O halde $W = W_1 + iW_2$, (3.15) in bir çözümü olacak şekilde (3.20) nin bir çözümü olan reel değerli $W_2$ fonksiyonu

$$W_2 = f^{-1}\bar{A}\left(if^2\partial_{\bar{z}}\left(f^{-1}W_1\right)\right) \tag{3.26}$$

şeklinde yapılandırılabilir.

(3.20) nin verilen bir $W_2$ çözümü için $W = W_1 + iW_2$, (3.15) in bir çözümü olmak üzere (3.19) un bir çözümü olan reel değerli $W_1$ fonksiyonu

$$W_1 = -f\bar{A}\left(if^{-2}\partial_{\bar{z}}\left(fW_2\right)\right) \tag{3.27}$$

olarak inşa edilebilir (Kravchenko 2005a).

**İspat.** (3.15) Vekua denklemini ele alalım. $W = \phi f + i\psi/f$, (3.15) in çözümü olsun. Bu taktirde

$$\psi_{\bar{z}} - if^2\phi_{\bar{z}} = 0 \tag{3.28}$$

denklemi geçerlidir. Dikkat edilmelidir ki eğer $W_1 = \operatorname{Re} W$ ise $\phi = \dfrac{W_1}{f}$ dir.
$\psi_{\bar{z}} = if^2\phi_{\bar{z}} = -\dfrac{f^2}{2}\phi_y + i\dfrac{f^2}{2}\phi_x$ olmak üzere

$$\partial_y\left(-\frac{f^2}{2}\phi_y\right) - \partial_x\left(\frac{f^2}{2}\phi_x\right) = -\left(W_{1_{xx}} + W_{1_{yy}}\right)\frac{f}{2} + \frac{W_1}{2}\left(f_{xx} + f_{yy}\right)$$

dir, buradan $W_1$ fonksiyonu (3.19) un çözümü olduğundan $-\Delta W_1 + \dfrac{\Delta f}{f}W_1 = 0$ yazılabilir. O halde $\partial_y\left(-\dfrac{f^2}{2}\phi_y\right) - \partial_x\left(\dfrac{f^2}{2}\phi_x\right) = 0$ olup

$$\begin{aligned}\psi_{\bar{z}} &= if^2\phi_{\bar{z}} \\ \psi &= \bar{A}\left[if^2\phi_{\bar{z}}\right] + c\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Teorem 3.2.6 dan $W_2 = f^{-1}\psi$, (3.20) nin çözümüdür.Böylece (3.26) elde edilir. $\bar{A}$ operatörü reel fonsiyonu keyfi bir reel sabite kadar tekrar yapılandırdığı için (3.26) formülünde ki $W_2$ fonksiyonu toplanmış $cf^{-1}$ terimine kadar tek olarak bellidir, burada $c$ keyfi reel sabittir.

(3.27) denklemi için ispat benzer şekilde yapılabilir.■

**Uyarı 3.3.2.** (3.19) da $r_1 \equiv 0$ ve $f \equiv 1$ olduğunda, (3.26) ve (3.27) denklemleri kompleks analizde harmonik eşlenik fonksiyonların yapılandırılması için iyi bilinen formüllere dönüşür.

**Sonuç 3.3.3.** $U$, (3.17) nin bir çözümü olsun. O halde

$$W = fU + if^{-1}V$$

(3.15) in bir çözümü olacak şekilde, (3.18) in bir $V$ çözümü

$$V = \bar{A}\left(if^2 U_{\bar{z}}\right) \tag{3.29}$$

formülüne göre inşa edilir.

Tersine (3.18) in verilen bir $V$ çözümü için (3.17) nin karşılık gelen $U$ çözümü

$$U = -\bar{A}\left(if^{-2} V_{\bar{z}}\right)$$

şeklinde inşa edilir (Kravchenko 2006).

**İspat.** $W_1 = fU$ ve $W_2 = f^{-1}V$ fonksiyonlarının sırasıyla (3.26) ve (3.27) denklemlerinde yerlerine konmasıyla gösterilebilir.■

**Sonuç 3.3.4.** $u_0$, basit bağlantılı bir $D$ bölgesinde (3.10) un bir pozitif çözümü olmak üzere $f = p^{1/2}u_0$ olsun ve $u$, (3.10) un bir çözümü olsun. O halde $W = p^{1/2}u + ip^{-1/2}v$, (3.15) in bir çözümü olacak şekilde, (3.25) ifadesiyle tanımlı $q_1$ ile (3.24) ün bir $v$ çözümü

$$v = u_0^{-1}\bar{A}\left(ipu_0^2\partial_{\bar{z}}\left(u_0^{-1}u\right)\right)$$

formülüyle inşa edilir.

$v$, (3.24) ün bir çözümü olsun. O halde $W = p^{1/2}u + ip^{-1/2}v$, (3.15) in bir çözümü olacak şekilde, (3.10) un $u$ çözümü

$$u = -u_0\bar{A}\left(ip^{-1}u_0^{-2}\partial_{\bar{z}}\left(u_0 v\right)\right)$$

formülüne göre inşa edilir (Kravchenko 2006).

**İspat.** $f = p^{1/2}u_0$, $W_1 = p^{1/2}u$ ve $W_2 = p^{-1/2}v$ fonksiyonları (3.26) ve (3.27) denklemlerinde yerlerine yazılarak istenilen elde edilebilir.■

### 3.4 Temel Vekua Denklemi

Önceki bölümün sonuçları

$$(\operatorname{div} p \operatorname{grad} + q)\, u = 0 \tag{3.30}$$

eliptik denkleminin teorisinin

$$W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W} \tag{3.31}$$

denklemiyle yakından ilgili olduğunu göstermiştir.

$u_0$ ilgili bölgede (3.30) un pozitif bir çözümü olmak üzere $f = p^{1/2}u_0$ ise bu takdirde (3.30) un herhangi bir $u$ çözümü için (3.31) in karşılık gelen bir $W$ çözümü mevcuttur öyle ki

$$u = p^{-1/2} \operatorname{Re} W \tag{3.32}$$

dir ve tersi de doğrudur. (3.31) in verilen bir $W$ çözümü için (3.32) fonksiyonu (3.30) un bir çözümü olacaktır. Uyarı 3.2.7 de belirtildiği gibi $F = f$ ve $G = \dfrac{i}{f}$ fonksiyon çifti bu denklem için bir doğurucu çifttir. Buradan karşılık gelen $A_{(F,G)}$ ve $B_{(F,G)}$ karakteristik katsayıları

$$A_{(F,G)} = 0 \quad , \quad B_{(F,G)} = \frac{f_z}{f}$$

şeklindedir. (2.24) a göre $(F,G)$-*türevi* şu şekilde tanımlıdır.

$$\dot{W} = W_z - \frac{f_z}{f}\overline{W} = \left(\partial_z - \frac{f_z}{f}C\right)W$$

**Önerme 3.4.1.** $W$, (3.31) in bir çözümü olsun. O halde $W$ nın $(F,G)$-*türevi,* $w = \dot{W}$ fonksiyonu (3.4) ün bir çözümüdür. Basit hesaplamalarla şu şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned}\left(\partial_{\bar{z}} + \frac{f_z}{f}C\right)\left(\partial_z - \frac{f_z}{f}C\right)W &= \frac{1}{4}\left(\Delta - \upsilon\right)W \\ &= \frac{1}{4}\left(\Delta - \upsilon\right)\left(W_1 + iW_2\right)\end{aligned}$$

Teorem 3.2.9 dan $W$ (3.31) in bir çözümü olmak üzere $(\Delta - \upsilon)\,W_1 = 0$ ve $(\Delta - \upsilon)\,W_2 = 0$ olup $(\Delta - \upsilon)\,W = 0$ dır. Buradan $\left(\partial_{\bar{z}} + \frac{f_z}{f}C\right)w = 0$ gerçeklenir.

(2.35) e göre $F = f$ ve $G = \frac{i}{f}$ ise $F^* = -if$ ve $G^* = \frac{1}{f}$ olduğu dikkate alınırsa $(F,G)$-*antitürevi* şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z} w(\zeta)\, d_{(F,G)}\zeta &= f(z)\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\frac{w(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta - \frac{i}{f(z)}\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} if(\zeta)\,w(\zeta)\,d\zeta \\ &= f(z)\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\frac{w(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta + \frac{i}{f(z)}\operatorname{Im}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,w(\zeta)\,d\zeta \quad (3.33)\end{aligned}$$

**Önerme 3.4.2.** $w$ (3.4) ün bir çözümü olsun. O halde

$$W(z) = \int_{z_0}^{z} w(\zeta)\, d_{(F,G)}\zeta$$

(3.31) in bir çözümüdür.

(3.31) temel Vekua denklemi ve (3.4) Vekua denklemi arasında kurulan bağıntıdan ikincisinin çözümleri için Cauchy integral teoremi elde edilecektir.

**Teorem 3.4.3.** $w$ bir $D$ bölgesinde (3.4) ün bir çözümü olsun. O halde $D$ nin bir basit bağlantılı alt bölgesinde bulunan her kapalı $\Gamma$ eğrisi için

$$\operatorname{Re}\int_\Gamma \frac{w}{f}dz + i\operatorname{Im}\int_\Gamma fwdz = 0 \tag{3.34}$$

dir (Kravchenko 2009).

**İspat.** Teorem 2.3.14 den $\dot{W} = w$ türevi $(F, G)-$integrallenebilirdir. Yani

$$\operatorname{Im}\int_\Gamma \frac{w}{f}dz - i\operatorname{Re}\int_\Gamma fwdz = 0$$

dir.■

### 3.5 Schrödinger Denklemi için Cauchy İntegral Teoremi

**Teorem 3.5.1.** $f$, $D$ bölgesinde (3.1) in pozitif bir çözümü ve $u$, $D$ de (3.1) in başka bir reel değerli çözümü olsun. O halde $D$ nin basit bağlantılı bir alt bölgesinde bulunan her kapalı $\Gamma$ eğrisi için

$$\operatorname{Re}\int_\Gamma \partial_z\left(\frac{u}{f}\right)dz + i\operatorname{Im}\int_\Gamma f^2\partial_z\left(\frac{u}{f}\right)dz = 0 \tag{3.35}$$

dir (Kravchenko 2005c).

**İspat.** (3.34) de $w = Pu = f\partial_z\left(\frac{u}{f}\right)$ yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.■

**Uyarı 3.5.2.** Bu teorem $f \equiv 1$ olduğunda yani $u$ bir harmonik fonksiyon olduğunda da geçerlidir.O halde $u$ harmonikse $\partial_z u$ analitik olduğundan (3.35) in $\int_\Gamma \partial_z u d_z = 0$ eşitliğine dönüştüğü açıktır.

**Teorem 3.5.3.** $f$, (3.1) in bir pozitif özel çözümü olsun. Eğer (3.35) denklemi $D$ nin basit bağlantılı bir alt bölgesinde yer alan her kapalı $\Gamma$ eğrisi için sağlanıyorsa $C^2$-reel değerli $u$ fonksiyonu da (3.1) in bir çözümüdür (Kravchenko 2009).■

**Örnek 3.5.4.** Schrödinger denklemi için Cauchy integral teoremini örneklendirmek amacıyla $f(x,y) = e^{xy}$ ve $u = e^{-xy}$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.$f$ ve $u$ fonksiyonlarının ikiside tüm düzlemde, aynı $v(x,y) = x^2 + y^2$ potansiyeline sahip, (3.1) in çözümleridir. Böylece Teorem 3.5.1 uygulanabilir. $\Gamma$ orijin merkezli birim çember olarak alınsın. O halde

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Re}\int_\Gamma \partial_z\left(\frac{u}{f}\right)dz + i\operatorname{Im}\int_\Gamma f^2\partial_z\left(\frac{u}{f}\right)dz \\
= {} & \operatorname{Re}\int_\Gamma (-y+ix)\,e^{-2xy}dz + i\operatorname{Im}\int_\Gamma (-y+ix)\,dz \\
= {} & \operatorname{Re}\int_0^{2\pi} i\,(-\sin\tau + i\cos\tau)\,e^{-2\cos\tau\sin\tau}d\tau \\
& +i\operatorname{Im}\int_0^{2\pi} i\,(-\sin\tau + i\cos\tau)\,d\tau \\
= {} & -\int_0^{2\pi}\cos\tau e^{-2\cos\tau\sin\tau}d\tau - i\int_0^{2\pi}\sin\tau d\tau
\end{aligned}
$$

iki integralin de sıfır olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla (3.35) gerçeklenir.

### 3.6 p-analitik fonksiyonlar

**Tanım 3.6.1.** $z = x + iy$ kompleks değişkeninin bir $\Phi = u + iv$ fonksiyonunun $D$ bölgesinde $p$-*analitik* olması için gerek ve yeter şart

$$u_x = \frac{1}{p}v_y \quad , \quad u_y = -\frac{1}{p}v_x \quad , \qquad D \text{ de} \tag{3.36}$$

burada $p$, $x$ ve $y$ nin verilen pozitif bir fonksiyonudur ve sürekli diferensiyellenebilir olduğu varsayılır.

$p$-analitik fonksiyonların teorisi Polozhy (1965) tarafından çalışılmıştır. Bir anlamda $p$-analitik fonksiyonlar, pseudoanalitik fonksiyonların bir alt sınıfını gösterir. Bu alt sınıf, pseudoanalitik fonksiyonların büyük bir sınıfı tarafından korunmayan, analitik fonksiyonlar sınıfına ait bazı özellikleri korur. Burada gösterileceği gibi $p$-analitik fonksiyonlar temel Vekua denkleminin çözümleriyle yakından ilgilidir.

Uyarı 3.2.7 de bahsedildiği gibi $W = \phi f + \dfrac{i}{f}\psi$ fonksiyonunun (3.31) temel Vekua denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart $\phi$ ve $\psi$ fonksiyonlarının (3.22) denklemini sağlamasıdır. (3.22) denklemi düzenlenirse

$$\phi_x = \frac{1}{f^2}\psi_y \quad , \quad \phi_y = -\frac{1}{f^2}\psi_x$$

sistemine denk olduğu görülür.

Diğer bir deyişle $W$ fonksiyonunun temel Vekua denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen ikinci çeşit pseudoanalitik fonksiyonun $f^2$-analitik olmasıdır. Böylece zamandan bağımsız Schrödinger denklemi ve $p$-analitik fonksiyonların sistemi arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir.

**Teorem 3.6.2.** $f$ fonksiyonu

$$-\Delta f + vf = 0 \tag{3.37}$$

denkleminin bir pozitif çözümü olsun. Burada $v$ reel değerli bir fonksiyondur. $W_1$ bu denklemin başka bir reel değerli çözümü olsun. Bu taktirde $W_2$, (3.26) ile tanımlı olmak üzere $\Phi = \dfrac{W_1}{f} + ifW_2$ fonksiyonu bir $f^2$-analitik fonksiyondur. Tersine, $\Phi$ $f^2$-analitik fonksiyon olsun. O halde $W_1 = f\,\mathrm{Re}\,\Phi$ fonksiyonu (3.37) nin bir çözümüdür (Kravchenko 2009).■

Aşağıdaki teoremde iletkenlik denkleminin çözümleri ve $p$-analitik fonksiyonlar arasındaki ilişki ifade edilmiştir.

**Teorem 3.6.3.** $f$ bir $\Omega$ bölgesinde pozitif sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun ve $U$

$$\mathrm{div}\left(f^2\nabla U\right) = 0 \quad , \qquad D \text{ de} \tag{3.38}$$

denkleminin reel değerli bir çözümü olsun. O halde $\Phi = U + iV$ fonksiyonu $D$ de

$f^2$-analitiktir, burada $V$, (3.29) ile tanımlıdır. Tersine $\Phi$, $D$ de $f^2$-analitik fonksiyon olsun. O halde $U = \operatorname{Re} \Phi$, (3.38) in bir çözümüdür (Kravchenko 2009).$\blacksquare$

Böylece zamandan bağımsız Schrödinger denklemi ve iletkenlik denkleminin çözümleri $p$-analitik fonksiyonlara dönüştürülebilir. Terside doğrudur.

# 4. KUVVET FONKSİYONLARI

## 4.1 Tanım

Bir doğurucu dizi Vekua denklemlerinin bir sonsuz dizisini tanımlar. Verilen bir (orijinal) Vekua denklemi için sadece karşılık gelen doğurucu çift değil aynı zamanda tüm doğurucu dizi biliniyorsa, yani orijinal denkleme karşılık gelen denklemlerin sonsuz dizisinden, her bir Vekua denklemi için tam ve bağımsız çözümlerin bir çifti bulunabiliyorsa orijinal Vekua denkleminin çözümlerinin bir sonsuz sistemi inşa edilebilir.

**Tanım 4.1.1.** $z_0 \in D$ merkezli $\alpha$ katsayılı ve 0 üstelli $Z_m^{(0)}(\alpha, z_0; z)$ *kuvvet fonksiyonu*, $\lambda F_m(z_0) + \mu G_m(z_0) = \alpha$ olacak şekilde saçilen $\lambda$ ve $\mu$ reel sabit katsayılarıyla birlikte $F_m$ ve $G_m$ doğurucu fonksiyonlarının lineer terkibi olarak tanımlanır.
$n = 1, 2, ...$ üsteline sahip kuvvet fonksiyonları tümevarım formülüyle tanımlanır.

$$Z_m^{(n)}(\alpha, z_0; z) = n \int_{z_0}^{z} Z_{m+1}^{(n-1)}(\alpha, z_0; \zeta)\, d_{(F_m, G_m)}\zeta \tag{4.1}$$

Bu tanım aşağıdaki özellikleri gerçekler:

**1.** $Z_m^{(n)}(\alpha, z_0; z)$, $z$ nin $(F_m, G_m)$-pseudoanalitik bir fonksiyonudur.

**2.** $\alpha'$ ve $\alpha''$ reel sabitler ise o halde

$$Z_m^{(n)}\left(\alpha' + i\alpha'', z_0; z\right) = \alpha' Z_m^{(n)}(1, z_0; z) + \alpha'' Z_m^{(n)}(i, z_0; z).$$

**3.** Kuvvet fonksiyonları aşağıdaki diferensiyel bağıntıyı sağlar:

$$\frac{d_{(F_m, G_m)} Z_m^{(n)}(\alpha, z_0; z)}{dz} = n Z_{m+1}^{(n-1)}(\alpha, z_0; z)$$

**4.** Asimptotik formüller geçerlidir.

$$Z_m^{(n)}(\alpha, z_0; \zeta) \sim \alpha (z - z_0)^n \quad , \qquad z \to \infty \tag{4.2}$$

Kuvvet fonksiyonlarının 2. özelliğinden her bir $\alpha$ katsayısı için $Z_m^{(n)}(\alpha, z_0; z)$, $Z_m^{(n)}(1, z_0; z)$ ve $Z_m^{(n)}(i, z_0; z)$ aracılığıyla ifade edilebilir. Böylece herhangi $n$ sayısı için sadece bu iki kuvvet fonksiyonunu hesaplamak yeterlidir (Bers 1953).

**Örnek 4.1.2.** $c$ bir reel sabit olmak üzere

$$\left(-\Delta + c^2\right) u = 0 \tag{4.3}$$

Yukawa denklemini düşünelim. (4.3) ün özel çözümü $f = e^{cy}$ ele alınsın. Karşılık gelen temel Vekua denklemi

$$W_{\bar{z}} = \frac{ic}{2}\overline{W} \tag{4.4}$$

biçimindedir.

Dikkat edilmelidir ki $(F, G) = \left(f(y), \dfrac{i}{f(y)}\right)$ doğurucu çifti 1-periyodlu bir periyodik doğurucu dizi içine gömülmüştür. Yani bu durumda herhangi $m$ tamsayısı için doğurucu dizi $(F_m, G_m) = (F, G)$ şeklinde seçilebilir. Orijin merkezli ilk bir kaç kuvvet fonksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} Z^{(0)}(1, z_0; z) &= e^{cy} \quad , \qquad Z_m^{(0)}(i, z_0; z) = ie^{-xy} \\ Z^{(1)}(1, z_0; z) &= \int_0^z Z^{(0)}(1, z_0; \zeta)\, d_{(F,G)}\zeta = \int_0^z e^{c\eta} d_{(F,G)}\zeta \quad , \qquad \zeta = \xi + i\,\eta \\ &= F(z)\,\mathrm{Re} * \int_0^z e^{c\eta} d_{(F,G)}\zeta + G(z)\,\mathrm{Im} * \int_0^z e^{c\eta} d_{(F,G)}\zeta \\ &= xe^{cy} + \frac{i}{c}\sinh cy \end{aligned}$$

Benzer işlemler yapılarak diğer kuvvet fonksiyonları da bulunabilir.

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}(i, z_0; z) &= -\frac{\sinh cy}{c} + ixe^{-cy}, \\
Z^{(2)}(1, z_0; z) &= \left(x^2 - \frac{y}{c}\right) e^{cy} + \frac{\sinh cy}{c^2} + \frac{2ix \sinh cy}{c}, \\
Z^{(2)}(i, z_0; z) &= -\frac{2x \sinh cy}{c} + i\left(\left(x^2 + \frac{y}{c}\right) e^{-cy} - \frac{\sinh cy}{c^2}\right), ...
\end{aligned}$$

Bu kuvvet fonksiyonlarının aslında (4.4) ün çözümleri olduğunu ve (4.2) özelliğini sağladıklarını görmek kolaydır. Örneğin $Z^{(1)}(1, z_0; z)$ ve $Z^{(1)}(i, z_0; z)$ fonksiyonlarını alalım ve içerdiği fonksiyonların Taylor seri açılımlarını kullanalım.

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}(1, z_0; z) &= x\left(1 + cy + \tfrac{(cy)^2}{2!} + ...\right) + \frac{i}{c}\left(cy + \tfrac{(cy)^3}{3!} + ...\right) \\
&= x + iy + x\left(cy + \tfrac{(cy)^2}{2!} + ...\right) + \frac{i}{c}\left(\tfrac{(cy)^3}{3!} + \tfrac{(cy)^5}{5!} + ...\right) \\
&\sim z\ , \qquad z \to 0 \text{ için}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}(i, z_0; z) &= -\frac{1}{c}\left(cy + \tfrac{(cy)^3}{3!} + ...\right) + ix\left(1 - cy + \tfrac{(cy)^2}{2!} - ...\right) \\
&= -y + ix - \frac{1}{c}\left(\tfrac{(cy)^3}{3!} + \tfrac{(cy)^5}{5!} + ...\right) + ix\left(-cy + \tfrac{(cy)^2}{2!} - ...\right) \\
&\sim iz\ , \qquad z \to 0 \text{ için}
\end{aligned}$$

Kuvvet fonksiyonlarının reel kısımlarının alınmasıyla Yukawa denkleminin çözümlerinin bir tam sistemi elde edilir

$$\begin{aligned}
u_1(x, y) &= e^{cy}\ ,\ u_2(x, y) = xe^{cy}\ ,\ u_3(x, y) = -\frac{\sinh cy}{c} \\
u_4(x, y) &= \left(x^2 - \frac{y}{c}\right) e^{cy} + \frac{\sinh cy}{c^2}\ ,\ u_5(x, y) = -\frac{2x}{c} \sinh cy\ , ...
\end{aligned}$$

Bu örnekte ele alınan $(F, G) = \left(f(y), \dfrac{i}{f(y)}\right)$ doğurucu çifti, doğrucu çiftlerin daha genel bir sınıfına aittir. Lipman Bers bu sınıf için karşılık gelen formal kuvvetler için açık formüller elde etmiştir.

## 4.2 Önemli Özel Bir Durum

Bu kısımda $\sigma$ ve $\tau$ karşılık gelen değişkenlerin reel değerli fonksiyonları olmak üzere

$$F(x,y)=\frac{\sigma(x)}{\tau(y)} \quad , \qquad G(x,y)=\frac{i\tau(y)}{\sigma(x)}$$

formundaki bir doğurucu çift durumunda kuvvet fonksiyonları için açık formüller elde edilecektir. Basitlik için $z_0=0$ ve $F(0)=1$ olduğu varsayılırsa kuvvet fonksiyonları aşağıdaki şekilde elde edilir. İlk olarak

$$X^{(0)}(x)=\tilde{X}^{(0)}(x)=Y^{(0)}(y)=\tilde{Y}^{(0)}(y)=1$$

ve $n=1,2,...$ için

$$\begin{aligned}
X^{(n)}(x) &= \begin{cases} n\displaystyle\int_0^x X^{(n-1)}(\xi)\,\frac{d\xi}{\sigma^2(\xi)}, & n \text{ tek} \\ n\displaystyle\int_0^x X^{(n-1)}(\xi)\,\sigma^2(\xi)\,d\xi, & n \text{ çift} \end{cases} \\
\tilde{X}^{(n)}(x) &= \begin{cases} n\displaystyle\int_0^x \tilde{X}^{(n-1)}(\xi)\,\sigma^2(\xi)\,d\xi & n \text{ tek} \\ n\displaystyle\int_0^x \tilde{X}^{(n-1)}(\xi)\,\frac{d\xi}{\sigma^2(\xi)}, & n \text{ çift} \end{cases} \\
Y^{(n)}(y) &= \begin{cases} n\displaystyle\int_0^y Y^{(n-1)}(\eta)\,\frac{d\eta}{\tau^2(\eta)}, & n \text{ tek} \\ n\displaystyle\int_0^y Y^{(n-1)}(\eta)\,\tau^2(\eta)\,d\eta, & n \text{ çift} \end{cases} \\
\tilde{Y}^{(n)}(y) &= \begin{cases} n\displaystyle\int_0^y \tilde{Y}^{(n-1)}(\eta)\,\tau^2(\eta)\,d\eta, & n \text{ tek} \\ n\displaystyle\int_0^y \tilde{Y}^{(n-1)}(\eta)\,\frac{d\eta}{\tau^2(\eta)}, & n \text{ çift} \end{cases}
\end{aligned}$$

O halde $\alpha=\alpha'+i\alpha''$ ise

$$Z^{(n)}(\alpha.0;z)=\frac{\sigma(x)}{\tau(y)}\operatorname{Re}*Z^{(n)}(\alpha.0;z)+i\frac{\tau(y)}{\sigma(x)}\operatorname{Im}*Z^{(n)}(\alpha.0;z)$$

dir, burada

$$*Z^{(n)}(\alpha.0;z) = \alpha' \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^{(n-j)} i^j Y^{(j)} + i\alpha'' \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \tilde{X}^{(n-j)} i^j \tilde{Y}^{(j)}, \quad n \text{ tek için} \tag{4.5}$$

$$*Z^{(n)}(\alpha.0;z) = \alpha' \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \tilde{X}^{(n-j)} i^j Y^{(j)} + i\alpha'' \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^{(n-j)} i^j \tilde{Y}^{(j)}, \quad n \text{ çift için.} \tag{4.6}$$

### 4.3 Benzerlik Prensibi

Hölder şartını sağlayan ve geniş bir diskin dışında özdeş olarak sıfır olan $a$ ve $b$ katsayılarıyla

$$w_{\bar{z}} = aw + b\overline{w} \tag{4.7}$$

Vekua denklemini ele alalım. Bu varsayımlar basitlik için yapılmıştır.

$$q(z) = T\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \tag{4.8}$$

integralini ele alalım, burada $D$ sınırlı basit bağlantılı bir bölgedir. $\zeta = \xi + i\eta$ ve $\rho$ her yerde tanımlı ve $R$ yarıçaplı bir diskin dışında sıfır olan kompleks değerli Hölder sürekli bir fonksiyondur.

**Teorem 4.3.1.** Sürekli, kompleks değerli $\rho$ fonksiyonu $|z| < R$ diskinin dışında özdeş olarak sıfır olsun ve her yerde $|\rho| \leq M$ eşitsizliği sağlansın. O halde $0 < \varepsilon < 1$ olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon$ için

$$|q(z)| \leq \frac{KM}{1 + |z|^{\varepsilon}} \quad , \quad |q(z_1) - q(z_2)| \leq KM\,|z_1 - z_2|^{\varepsilon}$$

dir, burada $q$ (4.8) ile tanımlanmıştır ve $K$ sabiti yalnızca $\varepsilon$ ve $R$ ye bağlıdır.

Ayrıca, $\rho$ fonksiyonu $D$ de Hölder sürekli ise bu taktirde $q$ Hölder sürekli kısmi türevlere sahiptir ve $D$ de

$$q_{\bar{z}} = \rho$$

denklemini sağlar (Kravchenko 2009).■

**Teorem 4.3.2.** $D$ de tanımlı bir sürekli sınırlı $w$ fonksiyonunun (4.7) Vekua denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\Psi = w - T\left[aw + b\overline{w}\right] \tag{4.9}$$

fonksiyonunun $D$ de analitik olmasıdır (Vekua 1962).

**İspat.** Dikkat edilirse $T\left[aw + b\overline{w}\right]$ Hölder süreklidir. Böylece $w$ nın Hölder sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\Psi$ nin Hölder sürekli olmasıdır. Ayrıca $w$ sürekli diferensiyellenebilirdir ancak ve ancak $\Psi$ sürekli diferensiyellenebilirdir. Teorem 4.3.1 den $\Psi$ analitikse ya da $w$ pseudoanalitikse, o halde $D$ de $\Psi_{\bar{z}} = w_{\bar{z}} - aw - b\overline{w} = 0$ dır.■

**Teorem 4.3.3** (Kaldırılabilir Singülerite Teoremi). $w$ pseudoanalitik ve $r > 0$ sayıları için $0 < |z - z_0| < r$ bölgesinde sınırlı bir fonksiyon olsun. O halde $w$ $|z - z_0| < r$ diskinin tümünde pseudoanalitik olacak şekilde $z_0$ da tanımlanabilir.■

**Teorem 4.3.4** (Benzerlik Prensibi). $w$ bir $D$ bölgesinde pseudoanalitik olsun. O halde $D$ de tanımlı bir analitik $\Phi$ fonksiyonu ve $\overline{D}$ de tanımlı Hölder sürekli bir $s$ fonksiyonu mevcuttur öyle ki

$$w = \Phi e^{s} \tag{4.10}$$

ve aksine $\Phi$, $D$ bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. O halde $\overline{D}$ de Hölder sürekli bir $s$ fonksiyonu mevcuttur öyle ki (4.10) $D$ de pseudoanalitiktir. $s$ fonksiyonu herhangi bir $z_0 \in D$ sabit noktasında $s(z_0) = 0$ alınması yoluyla inşa edilebilir

(Kravchenko 2009).

**İspat.** $D^*$, $D$ dan $w(z)$ nin ayrık noktalarının çıkarılmasıyla elde edilen bölge olsun.

$$\rho(z) = a(z) + b(z)\frac{\overline{w}(z)}{w(z)}$$

olmak üzere $\rho$, $D^*$ da tanımlı ve Hölder süreklidir. $|a| + |b| \leq M$ olmak üzere

$$|\rho(z)| \leq |a(z)| + |b(z)| \left|\frac{\overline{w}(z)}{w(z)}\right| \leq M.$$

Teorem 4.3.1 den $s(z) = T\left[a + b\frac{\overline{w}}{w}\right](z) = T\rho(z)$ fonksiyonu göz önüne alınırsa

$$|s(z)| \leq k$$

sağlanır. $s(z)$ düzgün süreklidir ve $D^*$ da $\rho(z)$ Hölder sürekli olduğundan $s$ Hölder sürekli kısmi türevlere sahiptir. Yani $s_z$ ve $s_{\overline{z}}$ mevcuttur. Teorem 4.3.1 den $s_{\overline{z}} = \rho$ dir. O halde

$$\Phi = e^{-s}w \tag{4.11}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}}\Phi &= \partial_{\overline{z}}\left(e^{-s}w\right) = -e^{-s}w\partial_{\overline{z}}(s) + e^{-s}\partial_{\overline{z}}(w) \\ &= -e^{-s}\left(a + b\frac{\overline{w}}{w}\right)w + e^{-s}(aw + b\overline{w}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\Phi$ fonksiyonu $D$ de analitiktir.

$D^*$, $D$ den $\Phi(z)$ nin sıfırlarının ve singüleritelerinin kaldırıldığı bölgeyi göstersin. $s(z)$, $D^*$ da sürekli diferensiyellenebilir olmak üzere $w(z) = \Phi(z)e^{s(z)}$ fonksiyonunun $D^*$ da $(F, G)$-pseudoanalitik olması için $w_{\bar{z}} = aw + b\bar{w}$, yani

$$(\Phi e^s)_{\bar{z}} = a\,(\Phi e^s) + b\left(\overline{\Phi e^s}\right)$$

olmalıdır. Eğer $\hat{a} = a$ ve $\hat{b} = b\dfrac{\bar{\Phi}}{\Phi}$, $(e^s)_{\bar{z}} = \hat{a}\,(e^s) + \hat{b}\,(\overline{e^s})$ ise

$$(\Phi e^s)_{\bar{z}} = \Phi\left(\hat{a}e^s + \hat{b}\overline{e^s}\right) = a\Phi e^s + b\overline{\Phi e^s}$$

olur. Buradan $a$ ve $b$ iki Hölder sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\hat{a} = a_{\left(\hat{F},\hat{G}\right)} \text{ } ve \text{ } \hat{b} = b_{\left(\hat{F},\hat{G}\right)}$$

ifadesini sağlayan $\left(\hat{F}, \hat{G}\right)$ normal doğurucu çifti mevcuttur (Bers 1953).

$e^{s(z)} = \gamma\hat{F}\,(z) + \delta\hat{G}\,(z)$ alınsın. $\gamma$ ve $\delta$ reel sabitleri $e^{s(z_0)}$ şartıyla bellidir. $e^{s(z)}$ düzgün süreklidir. $\bar{D}$ da sınırlıdır ve $z = \infty$ da limite sahiptir. O halde $w\,(z)$ istenilen pseudoanalitik fonksiyondur.■

**Sonuç 4.3.5 (**Carleman Teoremi**).** Özdeş olarak sıfır olmayan bir pseudoanalitik fonksiyon yalnızca ayrık sıfırlara sahiptir.

**Sonuç 4.3.6** (Liouville Teoremi). Tüm düzlemde tanımlı olan ve düzlemde sabit bir $z_0$ noktasında ($z_0$ sonsuz olabilir) sıfır olan sınırlı bir pseudoanalitik fonksiyon özdeş olarak sıfırdır.

**İspat.** Teorem 4.3.4 ten $w = \Phi e^s$, burada $\Phi$ tam fonksiyondur ve $s$ sınırlıdır. Böylece $\Phi$ sınırlıdır ve buradan analitik fonksiyonlar teorisindeki Liouville teoremi yardımıyla $\Phi$ sabittir. $w\,(z_0) = 0$ olduğundan bu sabit sıfır olmak zorundadır.■

**Sonuç 4.3.7** (Maksimum Modül Teoremi). $w$, $D$ de tanımlı ve $\overline{D}$ da sürekli bir pseudoanalitik fonksiyon olsun. O halde

$$|w(z)| \leq M \max_{t \in \partial\Omega} |w(t)| \ , \qquad z \in D \text{ için}$$

olacak şekilde yalnızca $a$ ve $b$ ye bağlı $M \geq 1$ pozitif sabiti mevcuttur.

### 4.4 Taylor Serisi

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n, z_0; z) \tag{4.12}$$

olduğunu varsayalım. Burada $m$ alt indisinin yokluğu bütün kuvvet fonksiyonlarının aynı $(F, G)$ doğurucu çiftine karşılık geldiği anlamına gelir. Seriler $z_0$ ın bazı komşuluklarında düzgün yakınsaktır. Benzerlik prensibi temel alınarak, pseudoanalitik fonksiyonların düzgün limitinin pseudoanalitik olduğu ve $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyonların düzgün yakınsak bir serisinin terim terime $(F, G)$-türevlenebildiği Bers (1956b) tarafından gösterilmiştir. Böylece (4.12) deki $W$ fonksiyonu pseudoanalitiktir ve $r$. türevi aşağıdaki açılıma sahiptir.

$$W^{[r]}(z) = \sum_{n=r}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-r+1)\, Z_r^{(n-r)}(a_n, z_0; z)$$

Buradan katsayılar için Taylor formülleri

$$a_n = \frac{W^{[n]}(z_0)}{n!} \tag{4.13}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.4.1.** $W(z)$ , $|z - z_0|$ ın küçük değerleri için tanımlı verilen bir $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyon olsun. (4.13) ile verilen katsayılara sahip

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n, z_0; z) \tag{4.14}$$

serisine $W$ nın $z_0$ da *Taylor serisi* denir. Bu seri kuvvet fonksiyonları yardımıyla şekillenir.

Taylor serileri genellikle asimptotik bir fonksiyonu temsil eder. Bütün $N$ sayıları için

$$W(z) - \sum_{n=0}^{N} Z^{(n)}(a_n, z_0; z) = O\left(|z - z_0|^{N+1}\right), \qquad z \to z_0 \tag{4.15}$$

dir. Bir pseudoanalitik fonksiyon özdeş olarak sıfır olmadıkça, keyfi yüksek basamaktan sıfıra sahip olamayacağı için türevlerin $\left\{W^{[n]}(z_0)\right\}$ dizisi $W$ fonksiyonunu tek olarak belirler. Eğer (4.14) serisi $z_0$ ın bir komşuluğunda düzgün yakınsak ise bu seri $W$ fonksiyonuna yakınsar.

**Teorem 4.4.2.** Bir periyodik doğurucu dizi yardımıyla tanımlı kuvvet fonksiyonlarında bir pseudoanalitik fonksiyonun (4.14) Taylor genişlemesi merkezin bir komşuluğunda yakınsaktır (Bers 1953).■

Bu teorem kuvvet fonksiyonlarının sisteminin yalnızca lokal tamlığı anlamına gelir. Aşağıdaki tanımda karşılık gelen formal kuvvetler, $z$ değişkenine sahip kuvvetler ve Cauchy-Riemann denklemi durumundaki gibi Vekua denkleminin çözümlerinin global olarak tam bir sistemini temsil ettiği durum L. Bers tarafından verilmiştir.

**Tanım 4.4.3.** Bir doğurucu $(F, G)$ çiftine eğer bu fonksiyonlar $z$ nin bütün değerleri için tanımlı ve Hölder koşulunu sağlıyor, $F(\infty)$, $G(\infty)$ limitleri mevcut, $\operatorname{Im}\left(\overline{F(\infty)}G(\infty)\right) > 0$ ve $F(1/z)$, $G(1/z)$ fonksiyonlarıda Hölder koşulunu sağlıyor ise *tamdır* denir. $F(\infty) = 1$ ve $G(\infty) = i$ ise bir tam doğurucu çiftine *normaldir* denir (Bers 1953).

Tam bir doğurucu çifte denk olan doğurucu çiftte tamdır ve her doğurucu çift tek olarak belirlenmiş normal bir çifte denktir. Bir tam (normal) doğurucu çiftin adjointi de tamdır (normaldir).

Bundan sonra $(F, G)$ nin bir tam normal doğurucu çift olduğu varsayılacaktır. Bers'in 1953 yılında yazdığı kitaptan $W_n$ fonksiyonlarının bir dizisi $D$ nin her sınırlı kapalı alt bölgesinde düzgün yakınsak ise bu dizi $D$ de *normal yakınsaktır.*

**Teorem 4.4.4.** $W$, $|z - z_0| < R$ için tanımlı bir $(F, G)$-pseudoanalitik fonksiyon olsun. O halde $W$ fonksiyonu

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n, z_0; z)$$

şeklinde bir tek açılıma sahiptir. Bu fonksiyon $|z - z_0| < \theta R$ için normal yakınsaktır, burada $\theta$ doğurucu diziye bağlı pozitif bir sabittir.■

Bu teoremin ispatı S. Agmon ve L. Bers (1952) tarafından yapılmıştır.

**Uyarı 4.4.5.** $\theta = 1$ bağıntısı için gerek ve yeter şart ne yazık ki bilinmiyor. Ancak Bers (1956b) $(F, G)$ doğurucularının kısmi türevlere sahip olması durumu için yeter şartları vermiştir. Bunlardan biri

$$|F_{\bar{z}}(z)| + |G_{\bar{z}}(z)| \leq \frac{sabit}{1 + |z|^{1+\varepsilon}}, \qquad \varepsilon > 0 \text{ için}$$

dir. Diğeri ise

$$\int\int_{|z|<\infty} \left(|F_{\bar{z}}|^{2-\varepsilon} + |F_{\bar{z}}|^{2+\varepsilon} + |G_{\bar{z}}|^{2-\varepsilon} + |G_{\bar{z}}|^{2+\varepsilon}\right) dxdy < \infty, \qquad 0 < \varepsilon < 1 \text{ için}$$

dir.

### 4.5 Runge Teoremi

**Teorem 4.5.1.** Basit bağlantılı bir bölgede tanımlı bir pseudoanalitik fonksiyon, kuvvet polinomlarının (pozitif üslere sahip kuvvet fonksiyonlarının lineer terkibi) bir normal yakınsak serisine genişletilebilir (Bers 1956b).■

**Uyarı 4.5.2.** Bu teoremin çok bağlantılı bölgeler için genelleştirilmesi mevcuttur (Bers 1956b).

**Teorem 4.5.3.** $W$, Jordan eğrisiyle sınırlı bir $D$ bölgesinde pseudoanalitik bir fonksiyon olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $\alpha$ üsteliyle birlikte $\partial D$ üzerinde Hölder şartını sağlasın. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $n$ doğal sayısı için

$$|W(z) - P_n(z)| \leq \frac{sabit}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \quad \text{herhangi } z \in \overline{D} \text{ için}$$

eşitsizliğini sağlayan pseudoanalitik fonksiyonların $n$. basamaktan bir polinomu mevcuttur. Burada sabit yalnızca $\varepsilon$ a bağlıdır (Kravchenko 2009).■

## 4.6 İkinci Basamaktan Denklemler İçin Çözümlerin Tam Sistemleri

$D$ nin sınırlı, basit bağlantılı bir bölge olduğu ve pozitif $f \in C^1\left(\overline{D}\right)$ fonksiyonunun yeterince düzgün bir sınıra sahip daha büyük bir $D_\varepsilon$ bölgesinde tanımlandığı varsayılacaktır. Böylece $z \in D_\varepsilon \backslash D$ için $f$ fonksiyonu değiştirilir ve büyük $|z|$ ler için $f = 1$ ve $z$ nin bütün sonlu değerleri için Hölder şartını sağlayan $f(1/z)$ ile birlikte $f(z)$ alınarak tüm düzlemde devam edilir. Buradan

$$(F, G) = (f, i/f) \tag{4.16}$$

doğurucu çifti tam ve normaldir.

**Tanım 4.6.1.** $u(z)$ fonksiyonu $|z - z_0|$ ın küçük değerleri için tanımlı olan (3.10) denkleminin verilen bir çözümü olsun. $W(z)$, $\operatorname{Re} W = p^{1/2}u$ olacak şekilde Sonuç 3.3.4 e göre yapılandırılmış (3.15) in bir çözümü olsun. (4.13) de verilen katsayılarla birlikte

$$p^{-1/2}(z) \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} Z^{(n)}(a_n, z_0; z)$$

serisine $u$ nun $z_0$ daki Taylor serisi denir, yani kuvvet fonksiyonlarıyla ifade edilir.

**Teorem 4.6.2.** $u(z)$, $|z - z_0| < R$ için tanımlı (3.10) denkleminin çözümü olsun. O halde $u(z)$ fonksiyonu

$$u(z) = p^{-1/2}(z) \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} Z^{(n)}(a_n, z_0; z)$$

şeklinde $|z - z_0| < R$ için normal yakınsak olan bir tek genişlemeye sahiptir (Kravchenko 2006).

**İspat.** Teorem 4.4.4 ve Uyarı 4.4.5 in doğrudan sonucudur. Uyarı 4.4.5 deki gerek koşulların ikiside (4.16) doğurucu çifti için de geçerlidir.■

**Teorem 4.6.3.** (3.10) un sınırlı basit bağlantılı bir $D$ bölgesinde tanımlı bir keyfi çözümü kuvvet polinomlarının $p^{-1/2}$ ile çarpılmış normal yakınsak bir serisine genişletilebilir. $D$ de pozitif bir $u_0 \in C^1(\overline{D})$ özel çözümü mevcuttur (Kravchenko 2006).■

Daha net olarak son teorem şu anlama gelir. Kuvvet fonksiyonlarının ikinci özelliğinden, herhangi bir $a$ Taylor sabiti için, $Z^{(n)}(a, z_0; z)$ kuvvet fonksiyonu, $Z^{(n)}(1, z_0; z)$ ve $Z^{(n)}(i, z_0; z)$ aracılığıyla ifade edilebilir. Buradan Teorem 4.5.1 e göre (3.15) in herhangi bir $W$ çözümü $Z^{(n)}(1, z_0; z)$ ve $Z^{(n)}(i, z_0; z)$ nin lineer terkibinin bir normal yakınsak serisine genişletilebilir. Sonuç olarak, (3.10) un herhangi bir çözümü $Z^{(n)}(1, z_0; z)$ ve $Z^{(n)}(i, z_0; z)$ nin reel kısımlarının lineer terkibinin $p^{-1/2}$ ile çarpılmış bir normal yakınsak serisine genişletilebilir.

Teorem 4.6.3 aşağıdaki sonucu ortaya çıkarır:

$$\left\{p^{-1/2}(z) \operatorname{Re} Z^{(n)}(1, z_0; z), p^{-1/2}(z) \operatorname{Re} Z^{(n)}(i, z_0; z)\right\}_{n=0}^{\infty} \tag{4.17}$$

fonksiyonları, (3.10) un pozitif bir çözümünün mevcut olduğu herhangi sınırlı, basit bağlantılı $D$ bölgesinde (4.17) fonksiyonları yardımıyla şekillenen bir seri, normal yakınsak seri ile (3.10) un herhangi bir çözümünün temsil edilebileceği mantığıyla (3.10) un çözümlerinin bir tam sistemini temsil eder.

### 4.7 Düzlemde Ortogonal Koordinat Sistemleri Üzerine Bir Uyarı

Düzlemde ortogonal koordinat sistemleri

$$u + iv = \Phi\left(x + iy\right)$$

bağıntısı yardımıyla $x, y$ kartezyen koordinatlarından elde edilmiştir, burada $\Phi$ bir keyfi analitik fonksiyondur (Madelung 1957). Çoğunlukla, daha genel koordinatlara olan

$$\xi = \xi\left(u\right), \quad \eta = \eta\left(v\right)$$

dönüşümü kullanılır. $\xi$ *ve* $\eta$ ortogonallik özelliğini korur.

**Örnek 4.7.1** (Kutupsal Koordinatlar).

$$u + iv = \ln\left(x + iy\right)$$

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad v = \arctan\frac{y}{x} \tag{4.18}$$

Genellikle aşağıdaki yeni koordinatlar tanımlanır.

$$r = e^u = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = v = \arctan\frac{y}{x}$$

**Örnek 4.7.2** (Parabolik Koordinatlar).

$$\frac{u + iv}{\sqrt{2}} = \sqrt{x + iy}$$

$$u = \sqrt{r + x}, \quad v = \sqrt{r - x}$$

Genellikle parabolik koordinatlar $\xi = u^2$ ve $\eta = v^2$ şeklinde alınır.

### 4.8 Bir Doğurucu Dizinin İnşası

(3.15) Vekua denklemindeki $f$ fonksiyonunun

$$f = U(u)\,V(v) \tag{4.19}$$

formunda olduğunu varsayalım. Burada $u$ ve $v$ bir ortogonal koordinat sistemini temsil etmektedir ve önceki bölümde verilen açıklamaya göre $\Phi = u + iv$ fonksiyonunun $z = x + iy$ değişkeninin bir analitik fonksiyonu olduğu varsayılacaktır. $U$ ve $V$ keyfi diferensiyellenebilir sıfırdan farklı reel değerli fonksiyonlardır.

(3.15) temel Vekua denklemi için bir doğurucu dizinin inşasında ilk adım, Bölüm 3.4 de gösterilen temel Vekua denkleminin bir halefi olan (3.4) denklemi için bir doğurucu çiftin inşa edilmesidir. Bunun için bu olasılıklardan biri, (3.15) in çözümlerinin başka bir çiftinin inşasını içerir. Buradan onların $(F, G)$ türevleri (3.4) ün çözümlerini verecektir.

(3.15) Vekua denklemini, denk olan (3.22) formunda alalım:

$$\varphi_{\bar{z}} + \frac{i}{f^2}\psi_{\bar{z}} = 0 \tag{4.20}$$

ve bir çözüm $\varphi = \varphi(u)\,,\ \psi = \psi(v)$ şeklinde olsun. O halde (4.20) de yerine yazılırsa

$$\varphi'(u)\,u_{\bar{z}} + \frac{i}{f^2}\psi'(v)\,v_{\bar{z}} = 0$$

denklemi elde edilir. $\Phi = u + iv$ analitik olup $\Phi_{\bar{z}} = u_{\bar{z}} + iv_{\bar{z}} = 0$ olduğundan $\varphi'(u) = \psi'(v)\,/f^2$ ise

$$\varphi_{\bar{z}} + \frac{i}{f^2}\psi_{\bar{z}} = \varphi'(u)\,u_{\bar{z}} + \frac{i}{f^2}\psi'(v)\,v_{\bar{z}} = \varphi'(u)\,(u_{\bar{z}} + iv_{\bar{z}}) = 0$$

olup (4.20) sağlanır. (4.19) kullanılırsa

$$f^2 = \frac{\psi'(v)}{\varphi'(u)} = U^2(u)\, V^2(v)$$

ve böylece

$$\frac{\psi'(v)}{V^2(v)} = U^2(u)\, \varphi'(u)$$

olup

$$\varphi(u) = \int \frac{du}{U^2(u)} \quad \text{ve} \quad \psi(v) = \int V^2(v)\, dv$$

elde edilir.

$W_1 = f\varphi(u) + \frac{i}{f}\psi(v)$ olmak üzere (3.15) in

$$W_1 = U(u)\, V(v) \int \frac{du}{U^2(u)} + \frac{i}{U(u)\, V(v)} \int V^2(v)\, dv$$

şeklinde uygun bir $W_1$ çözümünü alalım. $W_1$ in $(F, G)$ türevi (2.10) a göre

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= f\varphi'(u)\, u_z + \frac{i}{f}\psi'(v)\, v_z \\ &= \frac{V(v)}{U(u)} u_z + i\frac{V(v)}{U(u)} v_z \\ &= \frac{V}{U}\Phi_z \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer yolla (4.20) nin bir çözümü

$$\varphi = \varphi(v) \;, \qquad \psi = \psi(u)$$

olarak alınırsa (4.20)

$$\varphi'(v)\,v_{\bar{z}}+\frac{i}{f^2}\psi'(u)\,u_{\bar{z}}=0$$

şeklinde yazılabilir. Eğer

$$\varphi'(v)=-\frac{1}{V^2(v)}\qquad \text{ve}\qquad \psi'(u)=U^2(u)$$

ise bu denklem gerçeklenir. Böylece

$$\varphi(v)=-\int\frac{dv}{V^2(v)}\qquad ve\qquad \psi(u)=\int U^2(u)\,du.$$

(3.15) in karşılık gelen $W_2$ çözümü

$$W_2=f\varphi(v)+\frac{i}{f}\psi(u)=-\int\frac{dv}{V^2(v)}U(u)\,V(v)+\int U^2(u)\,du\frac{i}{U(u)\,V(v)}$$

şeklindedir. $W_2$ nin $(F,G)$ türevi (2.10) a göre

$$\begin{aligned}\dot{W}_2 &= f\varphi_z(v)+\frac{i}{f}\psi_z(u)\\ &= -\frac{U(u)}{V(v)}v_z+i\frac{U(u)}{V(v)}u_z\\ &= i\frac{U}{V}\Phi_z\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

$F_1=\dot{W}_1$ ve $G_1=\dot{W}_2$ yazılırsa $F_1$, $G_1$ çiftinin Tanım 2.1.2 (i) şıkkını ve (3.4) denklemini sağladığını görmek kolaydır.

Sıradaki adımda $(F_2,G_2)$ doğurucu çifti elde edilecektir. Bunun için (3.4) denkleminin çözümlerinin başka bir çifti bulunmalı ve bu çifte $(F_1,G_1)$ türevi uygulanmalıdır. Aşağıdaki şekilde yazılan (3.4) denklemi ele alınsın:

$$\varphi_{\bar{z}}F_1+\psi_{\bar{z}}G_1=0$$

$$F_1 = \frac{V}{U}\Phi_z, \qquad G_1 = i\frac{U}{V}\Phi_z$$

olup

$$\varphi_{\bar{z}}\frac{V}{U} + \psi_{\bar{z}} i\frac{U}{V} = 0 \tag{4.21}$$

yazılabilir. Tekrar $\varphi = \varphi(u)$, $\psi = \psi(v)$ biçiminde bir çözüm alınsın. Eğer $\varphi'(u) = \left(\frac{U(u)}{V(v)}\right)^2 \psi'(v)$ ise (4.21) denklemi sağlanır. Buradan $\varphi(u) = \int U^2(u)\,du$ ve $\psi(v) = \int V^2(v)\,dv$ elde edilir. O halde (3.4) ün karşılık gelen çözümü

$$\begin{aligned} w_1 &= F_1\varphi(u) + G_1\psi(v) \\ &= \frac{V(v)}{U(u)}\Phi_z \int U^2(u)\,du + i\frac{U(u)}{V(v)}\Phi_z \int V^2(v)\,dv \end{aligned}$$

şeklindedir. $w_1$ in $(F_{1,}G_1)$ türevi

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \varphi_z F_1 + \psi_z G_1 \\ &= \varphi'(u)\,u_z\frac{V}{U}\Phi_z + \psi'(v)\,v_z i\frac{U}{V}\Phi_z \\ &= UV\Phi_z(u_z + iv_z) = UV(\Phi_z)^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Benzer yolla (4.21) in bir $\varphi = \varphi(v)$, $\psi = \psi(u)$ çözümü alınsın. $-\varphi'(v) = \frac{U^2}{V^2}\psi'(u)$ ise (4.21) denklemi sağlanır. Yani $\varphi(v) = -\int \frac{dv}{V^2(v)}$ ve $\psi(u) = \int \frac{du}{U^2(u)}$. Buradan (3.4) ün karşılık gelen çözümü

$$\begin{aligned} w_2 &= F_1\varphi(v) + G_1\psi(u) \\ &= -\frac{V}{U}\Phi_z \int \frac{dv}{V^2(v)} + i\frac{U}{V}\Phi_z \int \frac{du}{U^2(u)} \end{aligned}$$

şeklindedir. $w_2$ nin $(F_1, G_1)$ türevi

$$\begin{aligned}
\dot{w}_2 &= \varphi_z F_1 + \psi_z G_1 \\
&= \varphi'(v)\, v_z \frac{V}{U} \Phi_z + \psi'(u)\, u_z i \frac{U}{V} \Phi_z \\
&= \frac{i}{UV} (\Phi_z)^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$F_2 = \dot{w}_1$, $G_2 = \dot{w}_2$ çifti $(F_1, G_1)$ in bir halefidir.

$$\begin{aligned}
(F_1, G_1) &= \left( \frac{V}{U} \Phi_z, i \frac{U}{V} \Phi_z \right) \\
&= \left( \frac{\Phi_z}{U^2} F, U^2 \Phi_z G \right) \\
(F_2, G_2) &= \left( UV (\Phi_z)^2, \frac{i}{UV} (\Phi_z)^2 \right) \\
&= \left( F (\Phi_z)^2, G (\Phi_z)^2 \right)
\end{aligned}$$

Bu formüller elde edildikten sonra, karşılık gelen doğurucu dizinin genel halini tahmin etmek kolaydır. Aşağıdaki ifade bu sonuca ilişkindir.

**Teorem 4.8.1.** $F = U(u)\, V(v)$ ve $G = \dfrac{i}{U(u)\, V(v)}$ olsun. Burada $U$ ve $V$ keyfi, diferensiyellenebilir, sıfırdan farklı, reel değerli fonksiyonlardır. $\Phi = u + iv$, $z = x + iy$ değişkeninin $D$ de analitik bir fonksiyonudur öyle ki $\Phi_z$ sınırlıdır ve $\Phi$, $D$ de sıfıra sahip değildir. O halde $(F, G)$ doğurucu çifti, $D$ de, $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
F_m &= (\Phi_z)^m F \qquad ve \qquad G_m = (\Phi_z)^m G \qquad , \qquad m \text{ çift ise} \\
F_m &= \frac{(\Phi_z)^m}{U^2} F \qquad ve \qquad G_m = (\Phi_z)^m U^2 G \quad , \qquad m \text{ tek ise}
\end{aligned}$$

ile tanımlanan $(F_m, G_m)$ doğurucu dizisi içerisine gömülebilir (Kravchenko 2008b).

**İspat.** Öncelikle, $m = \pm 1, \pm 2, ...$ için $(F_m, G_m)$ in bir doğurucu çift olduğunu gösterelim.

$$\operatorname{Im}\left(\overline{F}_m G_m\right) = \operatorname{Im}\left(\overline{(\Phi_z)}^m \overline{F} (\Phi_z)^m G\right) = \operatorname{Im}\left(|\Phi_z|^{2m} \overline{F} G\right) > 0$$

$a_{(F_m,G_m)}$, $m$ in hem çift hem de tek değerleri için

$$a_{(F_m,G_m)} = -\frac{\bar{F}_m G_{m\bar{z}} - F_{m\bar{z}} \bar{G}_m}{F_m \bar{G}_m - \bar{F}_m G_m} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi

$$b_{(F_m,G_m)} = -B_{(F_{m-1},G_{m-1})} \tag{4.22}$$

olduğunu gösterelim. İlk olarak $m$ tek olsun.

$$b_{(F_m,G_m)} = \left(\frac{\Phi_z}{\overline{\Phi}_z}\right)^m \left(b_{(F,G)} - 2u_{\bar{z}}\frac{U'}{U}\right)$$

ve

$$B_{(F_{m-1},G_{m-1})} = \left(\frac{\Phi_z}{\overline{\Phi}_z}\right)^{m-1} B_{(F,G)}.$$

(4.22) nin sağlanması için gerek ve yeter şart $\frac{\Phi_z}{\overline{\Phi}_z}\left(b_{(F,G)} - 2u_{\bar{z}}\frac{U'}{U}\right) = -B_{(F,G)}$ olmasıdır. $F = UV$, $G = i/UV$ olmak üzere

$$B_{(F,G)} = u_z\left(\frac{U'}{U} - i\frac{V'}{V}\right)$$

ifadesininin gerçeklendiğini görmek kolaydır.

$$\frac{\Phi_z}{\overline{\Phi}_z}\left(b_{(F,G)} - 2u_{\bar{z}}\frac{U'}{U}\right) = u_z\left(-\frac{U'}{U} + i\frac{V'}{V}\right)$$

olup $m$ nin tek olduğu durum için (4.22) eşitliği sağlandığından ispat tamamlanır.

Şimdi $m$ çift olsun.

$$b_{(F_m,G_m)} = \left(\frac{\Phi_z}{\overline{\Phi}_z}\right)^m b_{(F,G)}$$

ve

$$B_{(F_{m-1},G_{m-1})} = \left(\frac{\Phi_z}{\overline{\Phi}_z}\right)^{m-1} \left(B_{(F,G)} - 2\frac{U'}{U}u_z\right).$$

(4.22) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\frac{\Phi_z}{\overline{\Phi}_z}b_{(F,G)} = \left(-B_{(F,G)} + 2u_{\bar{z}}\frac{U'}{U}\right)$ olmasıdır.

$$B_{(F,G)} = u_z\left(\frac{U'}{U} - i\frac{V'}{V}\right) \text{ ve } \frac{\Phi_z}{\overline{\Phi}_z}b_{(F,G)} = u_z\left(\frac{U'}{U} + i\frac{V'}{V}\right)$$

olup (4.22) gerçeklenir.

Tüm durumlar için (4.22) eşitliği ispatlandı ve $(F_m, G_m)$, $m = 0, \pm1, \pm2, ...,$ dizisi Tanım 2.3.5 gereği bir doğurucu dizidir.■

**Uyarı 4.8.2.** Bu sonuç Bölüm 4.2 de $u = x$ ve $v = y$ olması durumunda gösterilen bir doğurucu dizinin açık inşasının bir genelleştirmesidir.

# 5. CAUCHY İNTEGRAL FORMÜLÜ

Bu bölümde pseudoanalitik ve $p$-analitik fonksiyonlar için Cauchy integral formülüyle ilgili bilgi verilecek ve $x^k$-analitik fonksiyonlar için Cauchy çekirdeğinin nasıl oluşturulacağı gösterilecektir.

Bölüm 3.6 da bahsedildiği gibi $p$-analitik fonksiyonların en önemli ve üzerinde en çok çalışılan sınıfı $x^k$-analitik fonksiyonlardır. Burada $k$ herhangi bir tamsayıdır. Bu sınıf üzerinde çok sayıda çalışma bulunmasına rağmen karşılık gelen Cauchy integral formülü sadece iki şekilde, $k = 0$ ($1/(z - z_0)$ Cauchy çekirdeğine sahip klasik Cauchy integral formülü) ve $k = 1$ durumları için elde edilebilmiştir. Bu durumda Cauchy çekirdeği eliptik integralleri içeren karmaşık bir şekle sahiptir.

Burada yukarıda bahsedilen durumlar için Cauchy çekirdeği bilgisine dayanan, $k$ herhangi bir tamsayı olmak üzere, $x^k$-analitik fonksiyonlar için Cauchy integral formülünün elde edilme aşamaları verilecektir. Bu aşamalar $p$-analitik fonksiyonlar ve temel Vekua denklemini sağlayan pseudoanalitik fonksiyonlar arasındaki yakın ilişkiye dayanır.

## 5.1 Pseudoanalitik Fonksiyonlar için Cauchy İntegral Formülüne İlişkin Ön Bilgiler

Basit bağlantılı sınırlı bir $D$ bölgesinde

$$\partial_{\bar{z}} W = aW + b\overline{W} \tag{5.1}$$

temel Vekua denklemini ele alalım. Burada $a$ ve $b$, Hölder koşulunu sağlayan kompleks değerli fonksiyonlardır. (5.1) in $D \setminus \{z_0\}$ bölgesinde

$$\lim_{z \to z_0} \frac{w(z)}{\alpha (z - z_0)^{-1}} = 1 \tag{5.2}$$

bağıntısını sağlayan çözümünün varlığı Bers (1953) tarafından gösterilmiştir, burada

$\alpha$ herhangi bir kompleks sayıdır. Bu fonksiyon

$$w(z) = Z^{(-1)}(\alpha, z_0; z)$$

olarak gösterilir.

Cauchy integral formülünün aşağıdaki genellemesi geçerlidir.

**Teorem 5.1.1.** $W$, (5.1) in basit kapalı sürekli diferensiyellenebilir $\Gamma$ eğrisiyle sınırlı bir $D$ bölgesinde tanımlı bir çözümü olsun. $W$ nın sınıra kadar sürekli olduğunu varsayalım. O halde herhangi $z \in D$ için

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(iW(\zeta)\, d\zeta, \zeta, z) \tag{5.3}$$

eşitliği geçerlidir. Bu integral şu şekilde anlaşılmalıdır. Eğer $\Gamma$ eğrisinin parametrik gösterimi $\zeta(t)$, $0 \leq t \leq T$ şeklindeyse $\Gamma$ eğrisi üzerinde tanımlı herhangi bir $\chi$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} Z^{(-1)}(\chi(\zeta)\, d\zeta, \zeta, z) = \int_0^T Z^{(-1)}(\chi(\zeta)\, \zeta'(t), \zeta(t), z)\, dt$$

dır (Bers 1953).■

Analitik fonksiyonlar durumunda sınırlı bir $D$ bölgesinde Cauchy integral formülü için çekirdek $1/(z - z_0) + w(z)$ olarak alınabildiği gibi, (5.1) in (5.2) yi sağlayan $\bar{D} \setminus \{z_0\}$ bölgesindeki herhangi bir çözümü (5.3) için Cauchy çekirdeği rolünde uygun olabilir.

Kuvvet fonksiyonları ve özellikle ilk negatif kuvvet fonksiyonu $Z^{(-1)}$ aşağıdaki özelliği gerçekler. $\alpha'$ ve $\alpha''$ reel sabitler ise

$$Z^{(-1)}(\alpha' + i\alpha'', z_0, z) = \alpha' Z^{(-1)}(1, z_0, z) + \alpha'' Z^{(-1)}(i, z_0, z). \tag{5.4}$$

Böylece Cauchy integral formülü için gerekli olan $Z^{(-1)}(\alpha, z_0, z)$ kuvvet fonksiyonunun herhangi kompleks $\alpha$ katsayısı için yazılabilmesi için $Z^{(-1)}(1, z_0, z)$ ve $Z^{(-1)}(i, z_0, z)$ iki Cauchy çekirdeği inşa edilmelidir.

### 5.2 Temel Vekua Denklemi ve $p$-analitik Fonksiyonları Tanımlayan Sistem Arasındaki Bağıntı

$a = 0$ ve $b = \dfrac{f_{\bar{z}}}{f}$ durumu, yani temel Vekua denklemi, ele alınsın. Buarada $f$, $D$ de tanımlı sürekli diferensiyellenebilir reel değerli pozitif bir fonksiyondur.

$$V := \partial_{\bar{z}} - \frac{f_{\bar{z}}}{f} C$$

burada $C$ kompleks eşlenik operatördür. $p = f^2$ olduğu varsayılsın ve aşağıdaki operatör tanımlansın:

$$\Pi := f \partial_{\bar{z}} P^{+} + \frac{1}{f} \partial_{\bar{z}} P^{-}.$$

Burada $P^{\pm} := \dfrac{1}{2}(I \pm C)$ ve $I$ özdeşlik operatörüdür.

$$\Pi \omega = 0 \tag{5.5}$$

denklemi

$$\varphi_x = \frac{1}{f^2} \psi_y \quad , \qquad \varphi_y = -\frac{1}{f^2} \psi_x \tag{5.6}$$

sistemine denktir, burada $\varphi = \operatorname{Re} \omega$, $\psi = \operatorname{Im} \omega$ dır.

$$B := f P^{+} + \frac{1}{f} P^{-}$$

olmak üzere

$$B^{-1} = \frac{1}{f} P^{+} + f P^{-}$$

ifadesinin gerçeklendiğini görmek kolaydır.

**Önerme 5.2.1.**

$$VB = \Pi.$$

**İspat.** $CP^{+} = P^{+}$ ve $CP^{-} = -P^{-}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} VB &= \left(\partial_{\bar{z}} - \frac{f_{\bar{z}}}{f}C\right)\left(fP^{+} + \frac{1}{f}P^{-}\right) \\ &= f\partial_{\bar{z}}P^{+} + f_{\bar{z}}P^{+} + \frac{1}{f}\partial_{\bar{z}}P^{-} - \frac{f_{\bar{z}}}{f^{2}}P^{-} \\ &\quad -\frac{f_{\bar{z}}}{f}C\left(fP^{+}\right) - \frac{f_{\bar{z}}}{f^{2}}C\left(P^{-}\right) \\ &= f\partial_{\bar{z}}P^{+} + \frac{1}{f}\partial_{\bar{z}}P^{-} = \Pi \end{aligned}$$

elde edilir.■

Bu önerme, Vekua operatörü $V$ ile $p$-analitik fonksiyonların (5.6) sistemine karşılık gelen $\Pi$ operatörü arasındaki basit bağıntıyı verir. $W$ fonksiyonu

$$\left(\partial_{\bar{z}} - \frac{f_{\bar{z}}}{f}C\right)W = 0 \tag{5.7}$$

temel Vekua denklemini sağlarsa, $W$ nın karşılık gelen ikinci çeşit pseudoanalitik fonksiyonu $\omega = B^{-1}W$ (5.6) nın bir çözümüdür.

**Uyarı 5.2.2.** Önerme 5.2.1 den $V = \Pi B^{-1}$ olduğunu görmek kolaydır.

$Z_{f}^{(-1)}(1, z_0, z)$ ve $Z_{f}^{(-1)}(i, z_0, z)$ ifadelerinde alt indis bu Cauchy çekirdeklerinin (5.7) nin çözümleri olduğu anlamına gelmektedir. O halde (5.3) deki Cauchy integrali

$$C_{f}W(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} Z_{f}^{(-1)}\left(iW(\zeta)\, d\zeta, \zeta, z\right)$$

şeklinde alınabilir ve böylece $p$-analitik fonksiyonlar için aşağıdaki Cauchy integral formülü elde edilir.

**Teorem 5.2.3.** $\omega$, (5.5) in basit kapalı sürekli diferensiyellenebilir bir $\Gamma$ eğrisiyle sınırlı bir $D$ bölgesinde tanımlı bir çözümü olsun ve $\omega$ nın $\Gamma$ sınırına kadar sürekli olduğunu varsayalım. O halde herhangi $z \in D$ için

$$\omega(z) = B^{-1} C_f B \omega(z) \tag{5.8}$$

geçerlidir (Kravchenko 2008a).

**İspat.** (5.7) nin çözümleri için Cauchy integral formülünü ele alalım. $W = C_f W$ ve $W = B\omega$ yerine konmasıyla ve $B^{-1}$ in uygulanmasıyla istenilen elde edilir. $\Pi\omega = 0$ olsun. $W$, (5.7) nin çözümü olmak üzere $VW = 0$ dır. Buradan $VB\omega = \Pi\omega = 0$.

$$W = C_f W \Rightarrow B\omega = C_f B\omega \Rightarrow \omega = B^{-1} C_f B\omega$$

elde edilir.■

## 5.3 Transplant Operatörü

Bu bölüğmde $x^k$-analitik fonksiyonlar için Cauchy çekirdeklerinin inşasında karşılaşılan yeni bir kavram ifade edilecektir. (5.7) temel Vekua denklemini ele alalım. Burada $f$ fonksiyonu

$$(-\Delta + \upsilon) f = 0 \ , \qquad D \ de \tag{5.9}$$

zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin pozitif çözümüdür. Teorem 3.2.6 da $W$, (5.7) nin bir çözümü ise $W$ nın reel kısmı $W_1$ in (5.9) denkleminin bir çözümü olması gerektiği gösterildi. Aynı zamanda $W$ nın sanal kısmı $W_2$ de

$$(-\Delta + \eta) h = 0 \ , \qquad D \ de \tag{5.10}$$

Schrödinger denkleminin bir çözümüdür, burada $\eta = 2\frac{(\nabla f)^2}{f^2} - \upsilon$ dır.

Ayrıca Teorem 3.3.1 e göre (5.9) un verilen bir $W_1$ çözümü için $W = W_1 + iW_2$, (5.7) nin çözümü olacak şekilde karşılık gelen ( eşlenik metaharmonik) fonksiyon $W_2$

$$W_2 = f^{-1}\bar{A}\left(if^2\partial_{\bar{z}}\left(f^{-1}W_1\right)\right) \tag{5.11}$$

şeklinde kolayca inşa edilebilir.

Şimdi $g$, (5.9) un başka bir pozitif çözümü olsun ve karşılık gelen

$$w_{\bar{z}} = \frac{g_{\bar{z}}}{g}\bar{w} \;, \qquad D \; de \tag{5.12}$$

Vekua denklemi göz önüne alınsın. $W$, (5.7) nin bir çözümü olmak üzere $\operatorname{Re} W$ ve $\operatorname{Re} w$, (5.9) denklemini sağlarken, $\operatorname{Im} W$ ve $\operatorname{Im} w$, genel olarak aşağıdaki farklı Schrödinger denklemlerini sağlar:

$$\begin{aligned} (-\Delta + \eta_1)\operatorname{Im} W &= 0 \;, \qquad D \; de \\ (-\Delta + \eta_2)\operatorname{Im} w &= 0 \;, \qquad D \; de \end{aligned}$$

burada $\eta_1 = 2\frac{(\nabla f)^2}{f^2} - \upsilon$ ve $\eta_1 = 2\frac{(\nabla g)^2}{g^2} - \upsilon$.

Şimdi (5.7) nin çözümlerini (5.12) nin çözümlerine dönüştüren bir operatör tanımlayalım:

$$T_{f,g}[W] = P^+W + ig^{-1}\bar{A}\left(ig^2\partial_{\bar{z}}\left(g^{-1}P^+W\right)\right). \tag{5.13}$$

Bu operatörün uygulanmasında (5.7) nin bir çözümünün sanal kısmı yerine Teorem 3.3.1 e göre inşa edilen sanal kısım alınır. Böyle bir uygulamanın ardından $w = T_{f,g}[W]$ yeni kompleks fonksiyonu (5.12) nin çözümü haline gelir. Bu yüzden $T_{f,g}$ operatörüne *transplant operatörü* denir.

İlgili bölgenin belli bir noktasında $\bar{A}$ operatörünün uygulanmasının sonucuna sabit bir değer atanırsa, (5.7) ve (5.12) nin çözümleri arasında kurulan tersinir birebir bir dönüşüm elde edilir. $T_{f,g}$ nin tersi aşağıdaki şekilde verilir.

$$T_{f,g}^{-1}[w] = T_{g,f}[w] = P^{+}w + if^{-1}\bar{A}\left(if^{2}\partial_{\bar{z}}\left(f^{-1}P^{+}w\right)\right).$$

**Örnek 5.3.1.** $T_{f,g}$ operatörünün uygulanmasına bir örnek olarak

$$w_{\bar{z}} = \frac{1}{2x}\bar{w} \tag{5.14}$$

denkleminin çözümleri için Cauchy çekirdeğini, analitik Cauchy çekirdeği $\dfrac{1}{z-z_0}$ dan başlayarak inşa edelim. $f = 1$ ve $g = x$ olsun. $f$ ve $g$ fonksiyonlarının ikiside aynı zamandan bağımsız Schrödinger denklemini sağlar. Bu durumda zamandan bağımsız Schrödinger denklemi Laplace denklemine dönüşür. Bu özel durumda temel Vekua denklemi $W_{\bar{z}} = 0$ Cauchy-Riemann sistemidir. $g = x$ olmak üzere (5.12) Vekua denklemi (5.14) formunu alır. Bu denklemi $\mathbb{C}_{+}$ $(\operatorname{Re} z > 0)$ sağ yarı düzlemde ele alacağız. $z_0 = x_0 + iy_0$, $\mathbb{C}_{+}$ da herhangi bir nokta olmak üzere $W = \dfrac{1}{z-z_0}$ fonksiyonunu alalım ve transplant operatörünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} T_{f,g}[W] &= w = \frac{1}{2}(I+C)\frac{1}{z-z_0} + \frac{i}{x}\bar{A}\left(ix^{2}\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2x}(I+C)\frac{1}{z-z_0}\right)\right) \\ &= \frac{x-x_0}{|z-z_0|^{2}} + \frac{i}{x}\bar{A}\left(ix^{2}\partial_{\bar{z}}\left(\frac{x-x_0}{x|z-z_0|^{2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}\left(\frac{x-x_0}{x|z-z_0|^{2}}\right) &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\left(\frac{x-x_0}{x\left[(x-x_0)^{2}+(y-y_0)^{2}\right]}\right) \\ &= \frac{|z-z_0|^{2}x_0 - 2x(x-x_0)^{2}}{2x^{2}|z-z_0|^{4}} - i\frac{x(y-y_0)(x-x_0)}{x^{2}|z-z_0|^{4}} \\ &= \frac{x_0}{2x^{2}|z-z_0|^{2}} + \frac{(x_0-x)(z-z_0)}{x|z-z_0|^{4}}. \end{aligned}$$

$ix^{2}\partial_{\bar{z}}\left(\dfrac{x-x_0}{x|z-z_0|^{2}}\right)$ ifadesine $\bar{A}$ operatörü uygulanmadan önce reel ve sanal kısımlar ayrılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$ix^2\partial_{\bar{z}}\left(\frac{x-x_0}{x\left|z-z_0\right|^2}\right)=\frac{x\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)}{\left|z-z_0\right|^4}+\frac{ix^2x_0}{2x^2\left|z-z_0\right|^2}-\frac{ix\left(x-x_0\right)^2}{\left|z-z_0\right|^4}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}\left(ix^2\partial_{\bar{z}}\left(\frac{x-x_0}{x\left|z-z_0\right|^2}\right)\right) &= 2\int_{x_1}^{x}\frac{\eta\left(\eta-x_0\right)\left(y-y_0\right)d\eta}{\left[\left(\eta-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right]^2} \\ &+2\int_{y_1}^{y}\frac{x_0d\xi}{2\left[\left(x_1-x_0\right)^2+\left(\xi-y_0\right)^2\right]} \\ &-2x_1\left(x_1-x_0\right)^2\int_{y_1}^{y}\frac{d\xi}{\left[\left(x_1-x_0\right)^2+\left(\xi-y_0\right)^2\right]^2}+c_1\end{aligned}$$

Son ifadedeki üç integral hesaplanıp yerine yazılırsa

$$\bar{A}\left(ix^2\partial_{\bar{z}}\left(\frac{x-x_0}{x\left|z-z_0\right|^2}\right)\right)=-\frac{x\left(y-y_0\right)}{\left|z-z_0\right|^2}+\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0}+c$$

bulunur. Böylece (5.14) Vekua denklemine karşılık gelen Cauchy çekirdeği

$$\begin{aligned}w\left(z\right) &= \frac{x-x_0}{\left|z-z_0\right|^2}+\frac{i}{x}\bar{A}\left(ix^2\partial_{\bar{z}}\left(\frac{x-x_0}{x\left|z-z_0\right|^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{z-z_0}+\frac{i}{x}\left(\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0}+c\right)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $c$ reel sabiti sıfır olarak seçilebilir ve böylece $Z_x^{(-1)}\left(1,z_0,z\right)$ Cauchy çekirdeği

$$Z_x^{(-1)}\left(1,z_0,z\right)=\frac{1}{z-z_0}+\frac{i}{x}\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0} \tag{5.15}$$

ifadesine dönüşür.

## 5.4 $x^k$-analitik Fonksiyonlar için Cauchy İntegral Formülü

Bu bölümde aşağıdaki basit gözleme dayanan $x^k$-analitik fonksiyonların Cauchy integral gösterimlerinin açık şeklini elde etmek için Kravchenko (2008a) tarafından kullanılan yol verilecektir.

**Uyarı 5.4.1.** Herhangi $k \in \mathbb{R}$ için $x^{-k}$ ve $x^{k+1}$ fonksiyonlarının her ikiside

$$\left(-\Delta + \frac{k(k+1)}{x^2}\right) h(x,y) = 0$$

Schrödinger denkleminin çözümleridir.

Şimdi benzer prosedür kompleks kısma da uygulanabilir. Bu bölümdeki bütün denklemler basit kapalı sürekli diferensiyellenebilir bir eğri ile sınırlı olan keyfi bir $D \subset \mathbb{C}_+$ bölgesinde ele alınacaktır. (5.7) denklemi için $f = x^k$ olmak üzere $Z_{x^k}^{(-1)}(a, z_0, z)$ Cauchy çekirdeği olduğunu varsayalım. Buradan $f = x^{-k}$ olmak üzere $iZ_{x^k}^{(-1)}(a, z_0, z)$, (5.7) denklemi için bir Cauchy çekirdeğidir ve $z_0$ da ki asimptotik davranışı $(\sim ia/z - z_0)$ şeklindedir. Yani,

$$Z_{x^{-k}}^{(-1)}(ia, z_0, z) = iZ_{x^k}^{(-1)}(a, z_0, z).$$

$g = x^{k+1}$ göz önüne alınırsa Uyarı 5.4.1 den $f = x^{-k}$ olmak üzere (5.7) ve $g = x^{k+1}$ olmak üzere (5.12) arasında (5.13) transplant operatörü yardımıyla bir bağıntı kurulabilir. Buradan $iZ_{x^k}^{(-1)}(a, z_0, z)$ ifadesine $T_{f,g}$ operatörünün uygulanmasıyla (5.12) denklemi için bir Cauchy çekirdeği elde edilir. $z_0$ da ki asimptotik davranış yine $(\sim ia/z - z_0)$ şeklindedir. Buradan

$$Z_{x^{k+1}}^{(-1)}(ia, z_0, z) = T_{x^{-k}, x^{k+1}}\left[iZ_{x^k}^{(-1)}(a, z_0, z)\right] \tag{5.16}$$

elde edilir. Böylece $f = x^k$ ya karşılık gelen Cauchy çekirdeğinin bilgisinden $f = x^{k+1}$ olmak üzere (5.7) nin çözümleri için Cauchy integral formülünü açık bir şekilde elde etmek için belirlenen prosedür uygulanabilir.

Şimdi $x^k$-analitik fonksiyonlara dönelim. $k$ nın çift olduğunu varsayalım: $k = 2j$, $j = 0, 1, 2, ...,$ O halde karşılık gelen temel Vekua denklemi (5.7) de katsayı $f = x^j$ ifadesini içerir. Yukarıda belirtildiği gibi bu durumda Cauchy çekirdeği, analitik Cauchy çekirdeği $1/(z - z_0)$ dan tümevarımla inşa edilebilir. $k$ tek ise, $k = 2j + 1$, $j = 0, 1, 2, ...,$ karşılık gelen temel Vekua denklemi (5.7) de katsayı $f = x^{j+1/2}$ yi içerir. Bu durumda Cauchy çekirdeği yukarıda bahsedilen prosedüre göre $f = x^{1/2}$ için Cauchy çekirdeğinden tümevarımla elde edilebilir.

Girişte bahsedildiği gibi, eliptik integralleri içeren oldukça karmaşık şekle sahip olmasına rağmen $f = x^{1/2}$ için Cauchy çekirdeği bilinir. Bu Cauchy çekirdeği $f = x^{1/2}$ olmak üzere (5.7) ile $w = \sqrt{x}W$ şeklinde ilişkili olan

$$\partial_{\bar{z}}w - \frac{1}{2\left(z+\bar{z}\right)}\left(w+\bar{w}\right) = 0$$

Vekua denklemi için inşa edilmiştir (Daniljuk 1963). Burada üstel $k$ nın tek olduğu durumun üzerinde durulmayacaktır. Bu kısımın amacı bilinen Cauchy çekirdeklerinden yeni Cauchy çekirdekleri elde etmek için yöntem ve örnek vermektir. $k$ nın çift olduğu durum için metodun uygulamasını inceleyeceğiz. Karşılık gelen integraller analitik olarak hesaplanabilir ve Cauchy çekirdekleri basit ve açık bir şekilde gösterilebilir. Buradan $f = x^j$, $j = 0, 1, 2, ...$, olmak üzere (5.7) denklemini ele alalım. (5.7) temel Vekua denklemindeki katsayının $j/2x$, $j = 0, 1, 2, ...$, formunda olduğuna dikkat edilmelidir. Bölüm 5.1 de bahsedildiği gibi her bir $j$ için aslında iki Cauchy çekirdeğine ihtiyaç vardır.

$$Z_{x^j}^{(-1)}\left(1, z_0, z\right) \text{ ve } Z_{x^j}^{(-1)}\left(i, z_0, z\right).$$

Örnek 5.3.1 de $1/\left(z-z_0\right)$ dan hareketle $Z_x^{(-1)}\left(1, z_0, z\right)$ inşa edilmişti. Aynı yolla şimdi $i/\left(z-z_0\right)$ alınarak $Z_x^{(-1)}\left(i, z_0, z\right)$ elde edilebilir.

$$\begin{aligned} Z_x^{(-1)}\left(i, z_0, z\right) &= T_{1,x}\left(\frac{i}{z-z_0}\right) = P^+\left(\frac{i}{z-z_0}\right) + \frac{i}{x}\bar{A}\left(ix^2\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{x}P^+\left(\frac{i}{z-z_0}\right)\right)\right) \\ &= \frac{y-y_0}{\left|z-z_0\right|^2} + \frac{i}{x}\bar{A}\left(ix^2\partial_{\bar{z}}\left(\frac{y-y_0}{x\left|z-z_0\right|^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}\left(\frac{y-y_0}{x\left|z-z_0\right|^2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\partial_y\right)\left(\frac{y-y_0}{x\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right]}\right) \\ &= \frac{y-y_0+ix}{2x^2\left|z-z_0\right|^2} + \frac{\left(y-y_0\right)\left(z-z_0\right)}{x\left|z-z_0\right|^4} \end{aligned}$$

$ix^2\partial_{\bar{z}}\left(\dfrac{y-y_0}{x\left|z-z_0\right|^2}\right)$ ifadesi reel ve sanal kısımlara ayrıldıktan sonra $\bar{A}$ operatörü uygulanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\bar{A}\left(ix^2\partial_{\bar{z}}\left(\frac{y-y_0}{x\left|z-z_0\right|^2}\right)\right)=\frac{x_0\left(x-x_0\right)-\left(y-y_0\right)^2}{\left|z-z_0\right|^2}+\ln\frac{1}{\left|z-z_0\right|}+c$$

$c=0$ seçilerek, elde edilenler (5.17) ifadesinde yerine konulursa

$$Z_x^{(-1)}\left(i,z_0,z\right)=\frac{i}{z-z_0}+\frac{i}{x}\ln\frac{1}{\left|z-z_0\right|} \tag{5.18}$$

bulunur. Böylece (5.15) ve (5.18) ifadeleri yardımıyla

$$\begin{aligned} Z_x^{(-1)}\left(\alpha,z_0,z\right) &= \alpha' Z_x^{(-1)}\left(1,z_0,z\right)+\alpha'' Z_x^{(-1)}\left(i,z_0,z\right) \\ &= \frac{\alpha}{z-z_0}+\frac{i}{x}\left(\alpha'\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0}+\ln\frac{1}{\left|z-z_0\right|}\right) \end{aligned}$$

elde edilir, burada $\alpha$ keyfi kompleks sayı ve $\alpha'=\operatorname{Re}\alpha$, $\alpha''=\operatorname{Im}\alpha$ dır.

Son denklemde parantez içindeki ifadeye keyfi bir sabit eklenerek Cauchy çekirdeği

$$Z_x^{(-1)}\left(\alpha,z_0,z\right)=\frac{\alpha}{z-z_0}+\frac{i}{x}\operatorname{Im}\left(\alpha\ln\frac{1}{z-z_0}\right)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Böylece $x^2$-analitik fonksiyonlar için Cauchy integral formülünün yazılmasına izin veren Teorem 5.2.3 e göre (5.14) denklemi için Cauchy çekirdeği elde edilir. Şimdiki adımda $Z_x^{(-1)}\left(\alpha,z_0,z\right)$ kullanılarak $Z_{x^2}^{(-1)}\left(\alpha,z_0,z\right)$ hesaplanacaktır. Bu işlemin sonucunda

$$w_{\bar{z}}=\frac{1}{x}\bar{w} \tag{5.19}$$

denklemi için Cauchy çekirdeği ve böylece $x^4$-analitik fonksiyonlar için Cauchy integral formülü elde edilecektir.(5.16) dan

$$\begin{aligned} Z_{x^2}^{(-1)}(1,z_0,z) &= T_{x^{-1},x^2}\left[iZ_x^{(-1)}(-i,z_0,z)\right] \\ &= T_{x^{-1},x^2}\left[-i\left(\frac{i}{z-z_0}+\frac{i}{x}\operatorname{Im}\left(i\ln\frac{1}{z-z_0}\right)\right)\right] \\ &= T_{x^{-1},x^2}\left[\frac{1}{z-z_0}+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{|z-z_0|}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{x^2}^{(-1)}(i,z_0,z) &= T_{x^{-1},x^2}\left[iZ_x^{(-1)}(1,z_0,z)\right] \\ &= T_{x^{-1},x^2}\left[\frac{i}{z-z_0}-\frac{1}{x}\operatorname{Im}\left(\ln\frac{1}{z-z_0}\right)\right] \\ &= = T_{x^{-1},x^2}\left[\frac{i}{z-z_0}-\frac{1}{x}\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0}\right] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $T_{x^{-1},x^2}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} Z_{x^2}^{(-1)}(1,z_0,z) &= \frac{x-x_0}{|z-z_0|^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{|z-z_0|} \\ &\quad +\frac{i}{x^2}\bar{A}\left(ix^4\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{x-x_0}{|z-z_0|^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{|z-z_0|}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} Z_{x^2}^{(-1)}(i,z_0,z) &= \frac{y-y_0}{|z-z_0|^2}-\frac{1}{x}\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0} \\ &\quad +\frac{i}{x^2}\bar{A}\left(ix^4\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{y-y_0}{|z-z_0|^2}-\frac{1}{x}\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir. Karşılık gelen integraller (5.20) için

$$\begin{aligned} &\bar{A}\left(ix^4\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{x-x_0}{|z-z_0|^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{|z-z_0|}\right)\right)\right) \\ = \ & 3(y-y_0)(\ln|z-z_0|-1)+3x_0\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0}-\frac{x^2(x-x_0)}{|z-z_0|^2}+c_1 \end{aligned}$$

ve (5.21) için

$$\begin{aligned}
& \bar{A}\left(ix^4\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{y-y_0}{|z-z_0|^2}-\frac{1}{x}\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)\right)\right) \\
= \quad & -3x_0\ln|z-z_0|-3x+\frac{x^2(x-x_0)}{|z-z_0|^2}+3(y-y_0)\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0}+c_2
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. $c_1 = c_2 = 0$ seçimi yapılarak son eşitlikler sırasıyla (5.20) ve (5.21) denklemlerinde yerine konulursa

$$\begin{aligned}
Z_{x^2}^{(-1)}(1,z_0,z) &= \frac{1}{z-z_0}+\frac{1}{x}\left(1-\frac{3i(y-y_0)}{x}\right)\ln\frac{1}{|z-z_0|} \\
&\quad -\frac{3i(y-y_0)}{x^2}+\frac{3ix_0}{x^2}\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{x^2}^{(-1)}(i,z_0,z) &= \frac{i}{z-z_0}-\frac{1}{x}\left(1-\frac{3i(y-y_0)}{x}\right)\arctan\frac{x-x_0}{y-y_0} \\
&\quad -\frac{3i}{x}+\frac{3ix_0}{x^2}\ln\frac{1}{|z-z_0|}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu fonksiyonların ikisinin de (5.19) denkleminin $\mathbb{C}_+\backslash z_0$ da çözümleri olduğu direk yerine konularak gösterilebilir. Son iki ifade birleştirilirse (5.19) Vekua denklemi için Cauchy çekirdeği şu formda yazılabilir:

$$\begin{aligned}
Z_{x^2}^{(-1)}(\alpha,z_0,z) &= \alpha' Z_{x^2}^{(-1)}(1,z_0,z)+\alpha'' Z_{x^2}^{(-1)}(i,z_0,z) \\
&= \frac{\alpha}{z-z_0}+\frac{3ix_0}{x^2}\operatorname{Im}\left(\alpha\ln\frac{1}{z-z_0}\right)-\frac{3i}{x^2}\operatorname{Im}(\alpha z) \\
&\quad +\frac{1}{x}\left(1-\frac{3i(y-y_0)}{x}\right)\operatorname{Re}\left(\alpha\ln\frac{1}{z-z_0}\right).
\end{aligned}$$

Cauchy çekirdeğinin inşası $x^4$-analitik fonksiyonlar için Cauchy integral formülünü verir. Benzer şekilde devam edilerek yüksek $j$ kuvvetleri için $x^j$-analitik fonksiyonlara karşılık gelen Cauchy integral gösterimleri elde edilebilir.

## KAYNAKLAR


**Agmon, S., Bers, L., 1952.** The expansion theorem for pseudo-analytic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 3: 757-764.

**Astala, K., Päivärinta, L., 2006**. Calderón's inverse conductivity problem in the plane. *Annals of Mathematics*, 163(1): 265–299.

**Beltrami, E.**, **1911.** Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse. *Opere matematice*, *Milano,* 3: 115-128.

**Bers, L., 1950.** Partial differential equations and generalized analytic functions. Second note. *Proc. Nat. Acad. Sci.,* 37: 42-47.

**Bers, L., 1953.** Theory of pseudo-analytic functions. New York University, 193 pp.

**Bers, L., 1956a.** An outline of the theory of pseudoanalytic functions. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 62: 291–331.

**Bers, L., 1956b.** Formal powers and power series. *Communications on Pure and Applied Mathematics,* 9: 693-711.

**Carleman, T., 1933**. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables. *C. R. Acad. Sci. Paris,*197: 471-474.

**Courant, R., Hilbert, D., 1989**. Methods of mathematical physics, v. 2.Wiley-Interscience.

**Daniljuk, I.I., 1963.** A generalized Cauchy formula for axially symmetric fields. (Russian) *Sibirsk. Mat. Z.,* 4: 48-85.

**Kravchenko, V.V., 2005a.** On a relation of pseudoanalytic function theory to the two-dimensional stationary Schrödinger equation and Taylor series in formal powers for its solutions. *J. of Phys. A.,* 38(18): 3947-3964.

**Kravchenko, V.V., 2005b.** On the relationship between $p$-functions and the Schrödinger equation. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen,*24(3): 487-496.

**Kravchenko, V.V., 2005c.** On the reduction of the multidimensiona stationary Schrödinger equationsto a first order equation and its relation to the pseudoanalytic function theory. *J. of Phys. A.,* 38(4): 851-868

**Kravchenko, V.V., 2006.** On a factorization of second order elliptic operators and applications. *Journal of Physics A: Mathematical and General,* 39(40): 12407-12425.

**Kravchenko, V.V., 2008a.** On a transplant operator and explicit construction of Cauchy-type integral representations for p-analytic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applicatios*, 339(2): 1103-1111.

**Kravchenko, V.V., 2008b.** Recent developments in applied pseudoanalytic function theory. In "Some topics on value distribution and differentiability in complex and p-adic analysis", eds. A. Escassut, W. Tutschke and C.C. Yang, *Science Press,* 293–328.

**Kravchenko, V.V., 2009.** Applied pseudoanalytic function theory. Birkhäuser Verlag. Basel, Boston, Berlin, 173 pp.

**Madelung,E., 1957.** Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin:Spiringer-Verlag.

**Picard, E., 1891.** Sur une système des équations aux dérivées partielles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 112: 685-688.

**Polozhy, G.N., 1965**. Generalization of the theory of analytic functions of complex variables: $p$-analytic and $(p, q)$-analytic functions and some applications. Kiev University Publishers (in Russian).

**Tutschke, W., 1989.** Solutions of initial value problems in classes of generalized analytic functions. Springer-Verlag, Berlin, New York, London, Paris, Tokyo, 188 pp.

**Uhlmann, G., 1999.** Developments in inverse problems since Calder´on's foundational paper. In "Harmonic analysis and partial differential equations, Essays in Honor of Alberto P. Calderón. Chicago lectures in Mathematics, edited by M. Christ, C.E. Kenig and C. Sadosky, pp: 295–345.

**Vekua, I.N., 1959.** Generalized analytic functions. Moscow: Nauka (in Russian); English translation Oxford: Pergamon Press 1962.

## ÖZGEÇMİŞ

| | | |
|---|---|---|
| **Adı Soyadı** | : | Yeşim SAĞLAM |
| **Doğum Yeri** | : | Ankara |
| **Doğum Tarihi** | : | 29.11.1989 |
| **Yabancı Dili** | : | İngilizce |

**Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)**

| | | |
|---|---|---|
| **Lise** | : | İbn-i Sina Lisesi-Ankara (2007) |
| **Lisans** | : | Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2011) |
| **Yüksek Lisans** | : | Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2011 – Ocak 2014) |
| **İletisim** | : | ysaglam@uludag.edu.tr |

**Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl**

Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2013-...)