İNDEFİNİTE KUADRATİK FORM-LAR VE GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL DİZİLERİ

Merve TAYAT

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNDEFİNİTE KUADRATİK FORMLAR VE GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL DİZİLERİ

Merve TAYAT

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2016

TEZ ONAYI

Merve TAYAT tarafından hazırlanan "İndefinite Kuadratik Formlar ve Genelleştirilmiş Pell Dizileri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Başkan : Prof.Dr. Osman BİZİM
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Prof.Dr. Ahmet TEKCAN
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Yard. Doç.Dr. Fırat EVİRGEN
Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
11.10./2016

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

30/09/2016

Merve TAYAT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNDEFİNİTE KUADRATİK FORMLAR VE GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL DİZİLERİ

Merve TAYAT

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu çalışmada indefinite kuadratik formlar ve genelleştirilmiş Pell dizileri ele alınmış ve bunlarla ilgili bazı cebirsel sonuçlar verilmiştir.

Birinci bölümde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, indefinite kuadratik formlar, Pell denklemlerinin tamsayı çözümleri ve *t*- balans sayıları ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde iki tip tamsayı dizisi tanımlanmış ve bu dizi ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca bu iki dizinin balans, Pell ve Pell-Lucas dizileri ile olan ilişkisi üzerinde durulmuştur.

Son bölümde ise balans, Pell ve Pell-Lucas fonksiyonları ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: İndefinite formlar, balans, Pell ve Pell-Lucas sayıları, *t*-balans sayıları, balans fonksiyonları.

2016, vi + 62 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

INDEFINITE QUADRATIC FORMS AND GENERALIZED PELL SEQUENCES

Merve TAYAT

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this work, indefinite quadratic forms and integer solutions of Pell equations and the generalized Pell sequences are considered.

In the first section, some preliminary notations, definitions and theorems which we need them in later sections are given.

In the second section, indefinite quadratic forms, integer solutions of Pell equations and *t*-balance numbers are considered.

In the third section, we set two new integer sequences and derived some results on them. We also consider their relationship with balance, Pell and Pell-Lucas sequences.

In the last section, balance, Pell and Pell-Lucas functions are considered.

Key words: Indefinite forms, balance, Pell and Pell-Lucas numbers, *t*-balance numbers, balance functions.

2016, vi + 62 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamın her aşamasında bilgisiyle beni yönlendiren, tecrübelerinden yararlandığım, hoşgörüsüyle her zaman yanımda olan danışman hocam Prof. Dr. Ahmet TEKCAN'a, teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca bana her türlü manevi desteği veren aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Merve TAYAT

30/09/2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$B_m^{(a,b)}$	$(a,b)-$balans sayısı
B_n	n. balans sayısı
b_n	n. cobalans sayısı
F_n	n. Fibonacci sayısı
$\Delta(F)=b^2-4ac$	F formunun diskriminantı
$\mathrm{Aut}^+(F)$	F nin has otomorfizmleri kümesi
$\mathrm{Aut}^-(F)$	F nin has olmayan otomorfizmleri kümesi
$x^2-dy^2=\pm1$	klasik Pell denklemi
$F=(a, b, c)$	kuadratik form
L_n	n. Lucas sayısı
C_n	n. Lucas-balans sayısı
c_n	n. Lucas-cobalans sayısı
$F_\Delta(x, y)$	Pell form
$x^2-dy^2=\pm N$	Pell denklemi
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
(x_1, y_1)	temel çözüm
B_n^t	n. $t-$balans sayısı
b_n^t	n. $t-$cobalans sayısı
C_n^t	n. $t-$Lucas-balans sayısı
c_n^t	n. $t-$Lucas-cobalans sayısı
T_n	n. üçgensel sayı
S_n	n. kare üçgensel sayı

TABLOLAR DİZİNİ

Tablolar **Sayfa**

1. GİRİŞ

Tezin bu bölümünde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlara, notasyonlara ve teoremlere yer verilmiştir.

1.1 Kuadratik Formlar

1.1.1 Tanım. $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

şeklindeki polinomlara kuadratik (ikinci dereceden) form denir ve bu form katsayıları yardımıyla kısaca $F = (a, b, c)$ ile gösterilir. Bu formun diskriminantı $\Delta(F)$ ile gösterilir ve $\Delta(F) = b^2 - 4ac$ olarak tanımlanır. Üstelik

(i) F tamdır $\Leftrightarrow$ $a,b,c \in \mathbb{Z}$ dir

(ii) F pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow$ $a,c > 0$ ve $\Delta(F) < 0$ dır.

(iii) F indefinitedir $\Leftrightarrow$ $\Delta(F) > 0$ dır

(iv) F ilkeldir $\Leftrightarrow$ $\text{obeb}(a, b, c) = 1$ dir (Flath 1989).

$r,s,t,u,\ ru - st = \pm 1$ özelliğinde tamsayılar olmak üzere $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ şeklindeki matrislerinin kümesi, matrislerde çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup $\text{GL}(2,\mathbb{Z})$ ile gösterilir. Formların birçok önemli özelliği bu grup yardımıyla verilir. Gauss herhangi bir $F = (a,b,c)$ formunun bir $g = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \text{GL}(2,\mathbb{Z})$ dönüşümü altındaki resmini

$$gF(x, y) = (ar^2 + brs + cs^2)x^2 + (2art + bru + bts + 2csu)xy + (at^2 + btu + cu^2)y^2$$

olarak tanımlamıştır. Yukarıdaki eşitliğe dikkat edilirse

$$gF = F(rx + ty, sx + uy)$$

olduğu görülür. Yani F formunda $x \to rx + ty$ ve $y \to sx + uy$ değişken değişimi yapılmak suretiyle gF formu elde edilimiştir. Buna göre, gF de bir kuadratik formdur.

Üstelik gF ile F aynı diskriminantlı, yani $\Delta(gF)=\Delta(F)$ dir. Ayrıca F pozitif tanımlı, indefinite veya ilkel ise gF de pozitif tanımlı, indefinite veya ilkeldir.

1.1.2 Tanım. F ve G herhangi iki form olmak üzere $gF = G$ olacak şekilde en az bir $g \in \mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})$ varsa F ve G formlarına denk form denir. $\det(g)=1$ ise bu formlara has denk, $\det(g)=-1$ ise has olmayan denk denir (Flath 1989).

Örneğin $F=(7,-2,1)$ ve $G=(1,0,6)$ formları $g=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})$ dönüşümü altında birbirine has denktir. Çünkü $\det(g)=1$ ve $gF = G$ dir.

1.1.3 Tanım. F formu için $gF = F$ olacak şekildeki $g \in \mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})$ dönüşümüne F nin bir otomorfizmi denir. $\det(g)=1$ ise g ye has otomorfizm, $\det(g)=-1$ ise g ye has olmayan otomorfizm denir. F nin has otomorfizmleri kümesi $\mathrm{Aut}^{+}(F)$ ile, has olmayan otomorfizmleri kümesi ise $\mathrm{Aut}^{-}(F)$ ile gösterilir (Flath 1989).

1.1.4 Tanım. Pozitif tanımlı $F=(a,b,c)$ formu

$$|b|\le a\le c$$

şartını sağlıyor ise F ye indirgenebilir form denir (Flath 1989).

Örneğin, $F=(5,3,11)$ pozitif tanımlı formu indirgenebilir iken, $G=(9,7,1)$ formu indirgenebilir değildir.

Eğer pozitif tanımlı bir F formu indirgenebilir değilse bu form aşağıdaki indirgeme algoritması kullanılarak aynı diskriminantlı indirgenebilir bir forma dönüştürülebilir.

1.1.5 Teorem. $F=(a,b,c)$ pozitif tanımlı formu indirgenebilir olmasın. $i\ge 0$ için

$$r_i=\left\lfloor \frac{b_i+c_i}{2c_i}\right\rfloor$$

olmak üzere F nin indirgenmişi

$$\rho^{i+1}(F) = (c_i, -b_i + 2c_i r_i, c_i r_i^2 - b_i r_i + a_i)$$

dir (Buchmann ve Vollmer 2007).

Yukarıdaki algoritma indirgenebilir form elde edilinceye kadar ardışık uygulanır. Örneğin, $\Delta = -3$ diskriminantlı $F = (301, 271, 61)$ pozitif tanımlı formu indirgenebilir değildir. Bu form için, $r_0 = 2$ olup $\rho^1(F) = (61, -27, 3)$ formu elde edilir. Ancak bu form indirgenebilir değildir. Bu forma bir kez daha indirgeme algoritması uygulanırsa $r_1 = -4$ ve $\rho^2(F) = (3,3,1)$ elde edilir. Bu form da indirgenebilir değildir. Bu forma bir kez daha indirgeme algoritması uygulanırsa $r_2 = 2$ ve $\rho^3(F) = (1,1,1)$ elde edilir. Elde edilen bu son form indirgenebilir olduğundan F nin indirgenmişi

$$\rho^3(F) = (1,1,1)$$

dir. Burada dikkat edilirse bu formun da diskriminantı da $\Delta(\rho^3(F)) = -3$ tür.

1.1.6 Tanım. Diskriminantı Δ olan $F = (a,b,c)$ indefinite formu

$$|\sqrt{\Delta} - 2|a|| < b < \sqrt{\Delta}$$

eşitsizliğini sağlıyor ise F ye indirgenebilir form denir (Flath 1989).

Örneğin $F = (1, 7, -6)$ formu indirgenebilir bir form iken $G = (19, 0, -2)$ formu indirgenebilir değildir.

Pozitif tanımlı formlarda olduğu gibi, indefinite formlar da form indirgenebilir değilse bu form aşağıdaki indirgeme algoritması kullanılarak aynı diskriminantlı indirgenebilir bir forma dönüştürülebilir.

1.1.7 Teorem. $F = (a,b,c)$ indefinite formu indirgenebilir olmasın. $i \geq 0$ için

$$r_i = \begin{cases} \operatorname{sgn}(c_i)\left\lfloor \dfrac{b_i}{2|c_i|} \right\rfloor & |c_i| \geq \sqrt{\Delta} \text{ ise} \\[2ex] \operatorname{sgn}(c_i)\left\lfloor \dfrac{b_i + \sqrt{\Delta}}{2|c_i|} \right\rfloor & |c_i| < \sqrt{\Delta} \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere F nin indirgenmişi

$$\rho^{i+1}(F) = (c_i, -b_i + 2c_i r_i, c_i r_i^2 - b_i r_i + a_i)$$

dir (Buchmann ve Vollmer 2007).

Örneğin, $\Delta = 65$ diskriminantlı $F = (7,3,-2)$ indefinite formu indirgenebilir değildir. Bu form için $r_0 = -2$ olup $\rho^1(F) = (-2,5,5)$ formu elde edilir. Bu form indirgenebilir olduğundan F nin indirgenmişi $\rho^1(F) = (-2,5,5)$ dir. Burada $\Delta(\rho^1(F)) = 65$ dir.

1.1.8 Tanım. $F = (a,b,c)$ indefinite formunun sağ komşusu,

$$A = c\,,\ b + B \equiv 0(\bmod 2A),\ \ \sqrt{\Delta} - 2\,|\,A\,| < B < \sqrt{\Delta}\ \text{ ve } B^2 - 4AC = \Delta$$

şartları sağlayan $R(F) = (A,B,C)$ formudur. Sol komşusu ise

$$L(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} R(c,b,a)$$

olarak tanımlanır (Flath 1989).

Yukarıdaki tanımdan $\delta = (b+B)/2c$ tamsayısı için F nin sağ komşusunun

$$R(F) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\delta \end{bmatrix} (a,b,c)$$

olduğu açıktır. Örneğin $\Delta = 41$ diskriminantlı $F = (1,5,-4)$ formunun sağ komşuları

$$R^1(F) = (-4,3,2), R^2(F) = (2,5,-2),\ R^3(F) = (-2,3,4),\ R^4(F) = (4,5,-1)$$
$$R^5(F) = (-1,5,4),\ R^6(F) = (4,3,-2),\ R^7(F) = (-2,5,2),\ R^8(F) = (2,3,-4)$$
$$R^9(F) = (-4,5,1)$$

ve sol komşuları

$$L^1(F) = (-4,5,1), L^2(F) = (2,3,-4),\ L^3(F) = (-2,5,2),\ L^4(F) = (4,3,-2)$$
$$L^5(F) = (-1,5,4),\ L^6(F) = (4,5,-1),\ L^7(F) = (-2,3,4),\ L^8(F) = (2,5,-2)$$
$$L^9(F) = (-4,3,2)$$

dir.

İndirgenebilir bir F formunun devri (veya has devri), birbirine denk olan formların bir dizisi olup bu dizi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

1.1.9 Teorem. İndirgenebilir $F=(a,b,c)$ indefinite formu verilmiş olsun. $i \geq 0$ için

$$s_i = \left\lfloor \frac{b_i + \sqrt{\Delta}}{2|c_i|} \right\rfloor$$

olmak üzere

$$F_{i+1} = (|c_i|, -b_i + 2s_i|c_i|, -a_i - b_i s_i - c_i s_i^2)$$

için F nin devri $F_0 \sim F_1 \sim \cdots \sim F_{l-1}$ dizisidir. $\tau(F) = (-a, b, -c)$ dönüşümü için l çift ise F nin has devri

$$F_0 \sim \tau(F_1) \sim F_2 \sim \tau(F_3) \sim \cdots \sim F_{l-2} \sim \tau(F_{l-1})$$

ve l tek ise F nin has devri

$$F_0 \sim \tau(F_1) \sim F_2 \sim \cdots \sim \tau(F_{l-2}) \sim F_{l-1} \sim \tau(F_0) \sim F_1 \sim \tau(F_2) \sim \cdots \sim \tau(F_{l-1})$$

şeklindedir (Buchmann ve Vollmer 2007).

Örneğin, indirgenebilir $F=(1,5,-4)$ indefinite formu için aşağıdaki tablo elde edilir:

Tablo 1.1 $F=(1,5,-4)$ formunun devri

i	0	1	2	3	4
a_i	1	4	2	2	4
b_i	5	3	5	3	5
c_i	-4	-2	-2	-4	-1
s_i	1	2	2	1	5

Buna tabloya göre F nin devri 5 uzunlukludur ve

$$F_0 = (1,5,-4) \sim F_1 = (4,3,-2) \sim F_2 = (2,5,-2) \sim F_3 = (2,3,-4) \sim F_4 = (4,5,-1)$$

şeklindedir. Dolayısıyla has devri 10 uzunlukludur ve

$$F_0 = (1,5,-4) \sim F_1 = (-4,3,2) \sim F_2 = (2,5,-2) \sim F_3 = (-2,3,4) \sim F_4 = (4,5,-1) \sim$$
$$F_5 = (-1,5,4) \sim F_6 = (4,3,-2) \sim F_7 = (-2,5,2) \sim F_8 = (2,3,-4) \sim F_9 = (-4,5,1)$$

şeklindedir.

1.1.10 Not. Eğer F formu indirgenebilir değilse sonlu bir adımda devir ilk başta verilen forma dönmez. Devrin içerisindeki F den farklı herhangi bir forma döner. Üstelik en başta verilen form ile bu formun devrindeki formlar aynı diskriminantlı değildir. Örneğin $\Delta = 40$ diskriminantlı $F = (9,16,6)$ formu indirgenebilir değildir. Bu formun devri

$$\begin{aligned}
&F_0 = (9,16,6) \sim F_1 = (6,-4,-31) \sim F_2 = (31,4,-6) \sim F_3 = (6,20,-15) \sim \\
&F_4 = (15,10,-11) \sim F_5 = (11,12,-14) \sim F_6 = (14,16,-9) \sim F_7 = (9,20,-10) \sim \\
&F_8 = (10,20,-9) \sim F_9 = (9,16,-14) \sim F_{10} = (14,12,-11) \sim F_{11} = (11,10,-15) \sim \\
&F_{12} = (15,20,-6) \sim F_{13} = (6,16,-21) \sim F_{14} = (21,26,-1) \sim F_{15} = (1,26,-21) \sim \\
&F_{16} = (21,16,-6) \sim F_{17} = (6,20,-15)
\end{aligned}$$

dir. Burada açıkça görüleceği üzere $F_{17} = F_3$ dür. Üstelik devirdeki $F = F_0$ formu hariç diğer tüm formların diskriminantları 760 dır.

1.1.11 Tanım. $F = (a,b,c)$ herhangi bir kuadratik form olmak üzere verilen bir *n* tamsayısı için

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 = n \tag{1.1}$$

denklemini gerçekleyen en az bir (x,y) tamsayı ikilisi varsa, *n* sayısı *F* formu ile gösterilebilir denir. Eğer tüm *n* tamsayıları *F* formu ile gösterilebilir ise *F* ye evrensel form denir (Mollin 2008).

$r(n;F)$, (1.1) eşitliğindeki (x,y) tamsayı çözümlerinin sayısını göstermek üzere, *F* formuna belli bir

$$\wp(\tau;F) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n;F) z^n \tag{1.2}$$

teta serisi karşılık gelir.

Örneğin, $F = (3,5,2)$ formu ve pozitif *n* tamsayısı için

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 = n$$

denkleminin,

$n = 1$ için 2 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(1,-2)$ dir.

$n = 2$ için 4 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(-3,5), \pm(0,-1)$ dir.

$n = 3$ için 4 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(-5,8), \pm(-1,0)$ dır.

$n = 4$ için 6 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(-2,1), \pm(-2,4), \pm(7,-11)$ dir.

$n = 5$ için 4 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(-3,2), \pm(9,-14)$ dür.

$n=6$ için 8 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(-4,3), \pm(-4,7), \pm(-1,3), \pm(11,-17)$ dir.

Şu halde (1.2) eşitliğinden bu forma karşılık gelen teta serisi

$$\wp(\tau;F)=1+\sum_{n=1}^{\infty} r(n;F)z^n = 1+2z+4z^2+4z^3+6z^4+4z^5+\cdots$$

olarak elde edilir.

1.1.12 Not. F ve G herhangi iki denk form, yani belli bir $g \in \mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})$ için $gF=G$ olsun. Bu takdirde (x,y), $F(x,y)=n$ denkleminin bir çözümü ise

$$[x \;\; y]g^{-1}$$

de $G(x,y)=n$ denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla $F(x,y)=n$ denkleminin tamsayı çözümleri sayısı, $G(x,y)=n$ denkleminin tamsayı çözümlerinin sayısına eşittir. Bu nedenle de F formuna karşılık gelen teta serisi ile G formuna karşılık gelen teta serisi aynı olur. Örneğin, $F=(1,7,-6)$ ve $G=(24,83,71)$ formları $g=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ dönüşümü altında birbirine has denktir. $F(x,y)=n$ denkleminin,

$n=1$ için 2 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(1,0)$ dır.

$n=2$ için 4 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(1,1), \pm(8,-1)$ dir.

$n=3$ için 2 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(17,22)$ dir.

$n=4$ için 4 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(2,0), \pm(7,\ 9)$ dur.

$n=5$ için çözüm yoktur.

$n=6$ için 4 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(4,5), \pm(39,-5)$ dir.

Dolayısıyla F formuna karşılık gelen teta serisi

$$\wp(\tau;F)=1+\sum_{n=1}^{\infty} r(n;F)z^n = 1+2z+4z^2+2z^3+4z^4+4z^6+\cdots$$

dir. Benzer şekilde $G(x,y)=n$ denkleminin,

$n=1$ için 2 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(2,-1)$ dir.

$n=2$ için 4 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(3,-2), \pm(21,-11)$ dir.

$n=3$ için 2 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(76,-49)$ dur.

$n=4$ için 4 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(4,-2),\pm(31,-20)$ dir.

$n=5$ için çözüm yoktur.

$n=6$ için 4 tane çözümü vardır ve bu çözümler $\pm(17,-11),\pm(103,-54)$ dür.

Buna göre, G formuna karşılık gelen teta serisi

$$\wp(\tau;G)=1+\sum_{n=1}^{\infty} r(n;F)z^n=1+2z+4z^2+2z^3+4z^4+4z^6+\cdots$$

dir. Burada açıkça görüleceği üzere $\wp(\tau;F)=\wp(\tau;G)$ dir.

1.2 Tamsayı Dizileri

p ve q, $p^2-4q>0$ özelliğinde iki tamsayı olmak üzere

$$U_0=0,U_1=1,\ U_n=U_n(p,q)=pU_{n-1}-qU_{n-2}$$

ve

$$V_0=2,V_1=p,\ V_n=V_n(p,q)=pV_{n-1}-qV_{n-2}$$

tamsayı dizileri tanımlansın. Bu tamsayı dizilerinde p ve q nun bazı özel halleri için bilinen bazı özel tamsayı dizileri elde edilir. Örneğin,

$U_n=U_n(1,-1)=F_n$ Fibonacci dizisi

$U_n=U_n(2,-1)=P_n$ Pell dizisi

$V_n=V_n(1,-1)=L_n$ Lucas dizisi

$V_n=V_n(2,-1)=Q_n$ Pell-Lucas dizisi

dir. Bu tamsayı dizilerinin karakteristik denklemi

$$x^2-px+q=0$$

olup bu denklemin kökleri

$$x_{1,2}=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

dir. Bu dizilerin Binet formülleri ise sırasıyla $n\geq 0$ için

$$U_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad \text{ve} \quad V_n = x_1^n + x_2^n$$

dir. Bu dizilerin katsayılar (kompanion) matrisi

$$M = \begin{bmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir (Ribenboim 2000).

Son yıllarda tamsayı dizilerinde yeni bir kavram olan balans sayıları, ilk defa Behera ve Panda (1999) tarafından birinci dereceden

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \tag{1.3}$$

Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri elde edilirken ortaya çıkmıştır. Yukarıdaki eşitliği gerçekleyen pozitif *n* tamsayısına balans sayısı, eşitliğin sağındaki pozitif *r* tamsayısına ise cobalans sayısı denir. Örneğin 6, 35, 204, 1189, 6930 birer balans sayısı olup bu sayılara karşılık gelen cobalans sayıları sırasıyla 2, 14, 84, 492, 2870 dir.

(1.3) eşitliği sırasıyla *n* ve *r* ye göre çözülürse sırasıyla

$$n = \frac{2r + 1 + \sqrt{8r^2 + 8r + 1}}{2} \quad \text{ve} \quad r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 1}}{2} \tag{1.4}$$

elde edilir.

Balans sayıları B_n ve cobalans sayıları b_n ile gösterilirse bu dizilerin başlangıç terimleri $B_1 = 1,\ B_2 = 6$ ve $b_1 = 0,\ b_2 = 2$ olup genel terimleri ise $n \geq 2$ için sırasıyla

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \quad \text{ve} \quad b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

şeklindedir. (1.4) eşitliğine dikkat edilirse

"B_n bir balans sayısı $\Leftrightarrow 8B_n^2 + 1$ bir tam kare"

ve

"b_n bir cobalans sayısı $\Leftrightarrow 8b_n^2 + 8b_n + 1$ bir tam kare" olduğu görülür. Dolayısıyla $\sqrt{8B_n^2+1}$ ve $\sqrt{8b_n^2+8b_n+1}$ birer tamsayı olup bu tamsayılara sırasıyla *n*. Lucas-balans ve *n*. Lucas-cobalans sayıları denir ve sırasıyla C_n ve c_n ile gösterilir. O halde

$$C_n=\sqrt{8B_n^2+1} \text{ ve } c_n=\sqrt{8b_n^2+8b_n+1}$$

dir. Bu sayıların başlangıç değerleri $C_1=3, C_2=17$ ve $c_1=1, c_2=7$ olup genel terimleri $n\geq 2$ için sırasıyla

$$C_{n+1}=6C_n-C_{n-1} \quad \text{ve} \quad c_{n+1}=6c_n-c_{n-1}$$

dir.

d tam kare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n\neq 0$ tamsayısı için

$$x^2-dy^2=\pm n$$

şeklindeki denklemlere Pell denklemi, (Barbeau (2003), Jacobson ve Williams (2009)) denir. $x^2-dy^2=n$ denklemine pozitif, $x^2-dy^2=-n$ denklemine ise negatif Pell denklemi denir. Yukarıdaki denklemin özel bir hali olan

$$x^2-dy^2=\pm 1$$

denklemine ise klasik Pell denklemi denir. Klasik Pell denklemini gerçekleyen en küçük pozitif (x_1,y_1) tamsayı ikilisine, denklemin temel çözümü denir ki denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri bu temel çözüme bağlı olarak elde edilir. Gerçekten de $x^2-dy^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü (x_1,y_1) ise denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n\geq 1$ için

$$x_n+y_n\sqrt{d}=(x_1+y_1\sqrt{d})^n$$

olmak üzere (x_n,y_n) şeklindedir. Benzer şekilde (x_1,y_1), $x^2-dy^2=-1$ negatif Pell denkleminin temel çözümü ise denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n\geq 1$ için

$$x_{2n-1}+y_{2n-1}\sqrt{d}=(x_1+y_1\sqrt{d})^{2n-1}$$

olmak üzere (x_{2n-1},y_{2n-1}) şeklindedir.

Balans sayılarını önemli kılan şey, bu sayıların Pell sayıları ile olan ilişkisidir. Bu ilişki ilk olarak Ray (2009) tarafından ortaya çıkartılmıştır. Ray (2009)

"x bir balans sayısı $\Leftrightarrow 8x^2+1$ bir tam kare"

ifadesini dikkate alarak bu ilişkiyi şu şekilde ortaya çıkartmıştır. $8x^2+1$ bir tam kare olduğundan $y \neq 0$ için $8x^2+1=y^2$ denilirse

$$y^2-8x^2=1$$

Pell denklemi elde edilir. Bu denkleminin temel çözümü $(y_1,x_1)=(3,1)$ olduğundan denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $y_n+x_n\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})^n$ olmak üzere (y_n,x_n) şeklindedir. Benzer şekilde $y_n-x_n\sqrt{8}=(3-\sqrt{8})^n$ olduğundan bu son iki eşitlikten

$$x_n=\frac{(3+\sqrt{8})^n-(3-\sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}$$

elde edilir ki bu balans sayıları için Binet formülüdür. Diğer yandan Pell tamsayı dizisinin karakteristik denkleminin kökleri olan α ve β sayıları için

$$\alpha^2=3+\sqrt{8} \text{ ve } \beta^2=3-\sqrt{8}$$

olduğundan yukarıdaki eşitlik $x_n=\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$ haline gelir. Şu halde balans sayılarının Binet formülü (x bir balans sayısı olduğundan)

$$B_n=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

dir. Benzer şekilde diğer balans sayılarının Binet formülleri ise sırasıyla

$$b_n=\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2},\ C_n=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2} \text{ ve } c_n=\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{2}$$

şeklindedir. Üstelik balans sayılarının genel terimleri yukarıdaki Binet formülleri yardımıyla Pell sayılarına bağlı olarak

$$B_n=\frac{P_{2n}}{2},\ b_n=\frac{P_{2n-1}-1}{2},\ C_n=P_{2n}+P_{2n-1} \text{ ve } c_n=P_{2n-1}+P_{2n-2}$$

şeklinde de verilebilir. Böylece tüm balans sayıları ile Pell sayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur.

2. İNDEFİNİTE FORMLAR, PELL DENKLEMLERİ VE t-BALANS SAYILARI

Bu bölümde ilk olarak indefinite formların devirleri, has devirleri, sağ ve sol komşuları ile otomorfizmleri, daha sonra verilen bir $F=(a,b,c)$ indefinite formu ve sıfırdan farklı m tamsayısı için

$$ax^2+bxy+cy^2=m$$

Diophantine denkleminin tamsayı çözümlerinin nasıl elde edileceği ve son olarak da bazı özel Diophantine denklemlerinin tamsayı çözümleri elde edilmek suretiyle balans sayılarının daha genel bir hali olan $t-$balans sayılarının genel terimlerinin nasıl elde edileceği üzerinde durulacaktır.

2.1 Pell Form ve İndefinite Formların Otomorfizmleri

Bu kısımda özel bir indefinite form olan Pell formu tanımlanacak ve bu form yardımıyla verilen bir $F=(a,b,c)$ indefinite formunun tüm has otomorfizmleri kümesinin nasıl elde edileceğinden bahsedilecektir.

2.1.1 Tanım. Δ tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$F_\Delta(x,y)=\begin{cases} x^2-\dfrac{\Delta}{4}y^2 & \Delta\equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \\ \\ x^2+xy+\dfrac{1-\Delta}{4}y^2 & \Delta\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}$$

olarak tanımlanan forma Pell form denir (Flath 1989).

Bu tanıma göre F_Δ Pell formu tam formdur, yani katsayıları tamsayıdır. F_Δ Pell formu için $F_\Delta(x,y)=1$ denklemine pozitif Pell denklemi, $F_\Delta(x,y)=-1$ denklemine ise negatif Pell denklemi denir. F_Δ Pell formu için

$$\mathrm{Pell}(\Delta)=\{(x,y)\in \mathrm{Z}\times\mathrm{Z}:F_\Delta(x,y)=1\} \text{ ve } \mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta)=\{(x,y)\in \mathrm{Z}\times\mathrm{Z}:F_\Delta(x,y)=\pm 1\}$$

olarak tanımlansın. Belli bir $d \neq 0$ tamsayısı için $\Delta = 4d$ veya $\Delta = 1 + 4d$ olmak üzere $(x, y), (u, v) \in \text{Pell}(\Delta)$ için

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu + dyv,\ xv + yu)$$

ikili işlemi altında $\text{Pell}(\Delta)$ bir grup oluşturur. Üstelik

1. Δ tam kare ve $\Delta < -4$ ise $F_\Delta(x, y) = 1$ Pell denkleminin çözümleri sadece $(\pm 1, 0)$ dır ki bu çözümlere aşikâr çözüm denir.
2. $\Delta = -4$ ise $F_{-4}(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ Pell denkleminin çözümleri $(\pm 1, 0)$ ve $(0, \pm 1)$ dir, yani dört tane tamsayı çözümü vardır.
3. $\Delta = -3$ ise $F_{-3}(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 1$ denkleminin çözümleri $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$, $\pm(1, -1)$ dir, yani altı tane tamsayı çözümü vardır.

Yukarıda bahsedilen tüm durumlarda $\text{Pell}(\Delta)$ kümesi sonlu mertebelidir. Bu durumlar dışındaki diğer tüm Δ değerleri için $F_\Delta(x, y) = 1$ Pell denkleminin sonsuz sayıda tamsayı çözümü vardır ve dolayısıyla da $\text{Pell}(\Delta)$ sonsuz mertebelidir.

Δ pozitif tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$\Theta(\sqrt{\Delta}) = \{x + y\sqrt{\Delta} : x, y \in \Theta\}$$

kuadratik sayı cismi ele alınsın. Bu cisimdeki herhangi bir $\omega = x + y\sqrt{\Delta}$ elemanın eşleniği $\overline{\omega} = x - y\sqrt{\Delta}$ ve normu $N(\omega) = \omega\overline{\omega} = x^2 - \Delta y^2$ dir.

$$\rho_\Delta = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}} & \Delta \equiv 0 (\text{mod}\, 4) \\[2ex] \dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} & \Delta \equiv 1 (\text{mod}\, 4) \end{cases}$$

olmak üzere, $O_\Delta = \{x + y\rho_\Delta : x, y \in Z\}$ olarak tanımlanan küme, $\Theta(\sqrt{\Delta})$ nin bir alt halkasıdır. O_Δ halkasındaki elemanların normları ile Pell denklemlerinin tamsayı çözümleri arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

1. $\Delta \equiv 0(\text{mod } 4)$, yani $\Delta = 4d$ olsun. Bu takdirde O_Δ nın $\omega = x + y\sqrt{d}$ elemanının normu $N(\omega) = x^2 - dy^2$ dir.

2. $\Delta \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, yani $\Delta = 1+4d$ olsun. Bu takdirde O_Δ nın $\omega = x + y(\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2})$ elemanının normu $N(\omega) = x^2 + xy - dy^2$ dir.

Burada dikkat edilirse her iki durumda da O_Δ nın ω elemanın normu, bir Pell form belirtir, yani

$$N(\omega) = F_\Delta(x,y)$$

dir. Dolayısıyla $F_\Delta(x,y) = \pm 1$ Pell denklemini çözmek demek aslında, O_Δ nın normu ± 1 olan elemanlarını bulmak demektir ki bu elemanlara O_Δ nın birimleri denir. Bu birimlerin kümesi O_Δ^* ile gösterilirse $O_\Delta^* = \{\alpha \in O_\Delta : N(\alpha) = \pm 1\}$ dır. Normu 1 olan birimlerinin kümesi $O_{\Delta,1}^*$ ile gösterilirse $O_{\Delta,1}^* = \{\alpha \in O_\Delta^* : N(\alpha) = 1\}$ dir. Buna göre, $\mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta)$ ve O_Δ^* kümeleri arasında

$$\Psi : \mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta) \to O_\Delta^*, \quad \Psi(x,y) = x + y\rho_\Delta$$

şeklinde birebir bir dönüşüm vardır. Üstelik bu dönüşüm yardımıyla $\mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta)$ nın herhangi iki (u,v) ve (U,V) elemanının çarpımı

$$x + y\rho_\Delta = (u + v\rho_\Delta)(U + V\rho_\Delta)$$

olmak üzere $(u,v)\cdot(U,V) = (x,y)$ dir. Bu eşitlik daha açık bir ifade ile yazılmak istenirse

$$(u,v)\cdot(U,V) = \begin{cases} \left(uU + \frac{\Delta}{4}vV,\ uV + vU\right) & \Delta \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4) \\ \left(uU + \frac{\Delta-1}{4}vV,\ uV + vU + vV\right) & \Delta \equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \end{cases}$$

olur. $\varepsilon_\Delta, O_\Delta$ nın 1 den büyük en küçük birimi (temel birim) ve

$$\tau_\Delta = \begin{cases} \varepsilon_\Delta & N(\varepsilon_\Delta) = 1 \\ \varepsilon_\Delta^2 & N(\varepsilon_\Delta) = -1 \end{cases}$$

için $\mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta) \cong O_\Delta^* = \{\pm\varepsilon_\Delta^n : n \in \mathrm{Z}\} \cong \{\pm 1\} \times \mathrm{Z}$ ve $\mathrm{Pell}(\Delta) \cong O_{\Delta,1}^* = \{\pm\tau_\Delta^n : n \in \mathrm{Z}\} \cong \{\pm 1\} \times \mathrm{Z}$

dir. Örneğin, $\Delta = 20$ olsun. Bu takdirde $O_{20} = \{x + y\sqrt{5} : x, y \in \mathrm{Z}\}$ halkasının birimlerinin kümesini belirlemek için

$$N(x+y\sqrt{5}) = x^2 - 5y^2 = 1$$

Pell denklemini çözmek gerekir. Bu denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (9,4)$ olduğundan $\omega_1 = 9+4\sqrt{5},\ O^*_{20,1}$ in en küçük elemanıdır, yani temel birimdir. Bu denklemin diğer bir tamsayı çözümü $(x_2, y_2) = (161,72)$ olduğundan $\omega_2 = 161+72\sqrt{5}$ de $O^*_{20,1}$ nın bir elemanıdır. Esasında $O^*_{20,1}$ kümesinin sonsuz sayıda elemanı vardır ve bu elemanlar $\omega_1 = 9+4\sqrt{5}$ elemanının tüm pozitif tamsayı kuvvetleri, yani

$$O^*_{20,1} = \{\omega_1^k : k \in \mathrm{Z}^+\}$$

dir.

Bu açıklamalardan sonra bir $F = (a,b,c)$ indefinite formunun has otomorfizmleri kümesi ele alınabilir. $(u,v) \in \mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta)$ olmak üzere

$$g_F(u,v) = \begin{cases} \begin{bmatrix} u - \dfrac{b}{2}v & av \\ -cv & u + \dfrac{b}{2}v \end{bmatrix} & \Delta \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4) \\ \begin{bmatrix} u + \dfrac{1-b}{2}v & av \\ -cv & u + \dfrac{1+b}{2}v \end{bmatrix} & \Delta \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases} \tag{2.1}$$

olarak tanımlansın. $\Delta \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ iken b çift ve $\Delta \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ iken b tek olduğundan $g_F \in \mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})$ dir. Üstelik g_F nin determinantı bir Pell form, yani

$$\det(g_F(u,v)) = F_\Delta(u,v)$$

dir. Dolayısıyla

$$g_F : \mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta) \to \mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})$$

bir grup homomorfizmidir. Üstelik her $(u,v) \in \mathrm{Pell}(\Delta)$ için g_F, F nin bir has otomorfizmidir ve F ilkel ise

$$g_F : \mathrm{Pell}(\Delta) \to \mathrm{Aut}^+(F)$$

bir grup izomorfizmidir. Buna göre, diskriminantı $\Delta \neq 0$ olan bir $F = (a,b,c)$ formunun otomorfizmlerini belirlemek için $F_\Delta(u,v) = 1$ Pell denkleminin tamsayı çözümlerini belirlemek gerekir. Örneğin, $F=(1,4,-2)$ formunun diskriminantı $\Delta=24=4\cdot 6$ olduğundan bu forma karşılık gelen Pell form

$$F_{24}(u,v)=u^2-6v^2$$

dir. Buna göre

$$F_{24}(u,v)=1\Leftrightarrow u^2-6v^2=1$$

Pell denkleminin temel çözümü $(u_1,v_1)=(5,2)$ olduğundan (2.1) den

$$g_F(u_1,v_1)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $g_F(u_1,v_1)$, F formunun bir has otomorfizmidir. Denkleminin diğer üç tamsayı çözümü sırasıyla

$$(u_2,v_2)=(49,20),\ (u_3,v_3)=(485,198),(u_4,v_4)=(4801,1960)$$

olup bu çözümlere karşılık gelen matrisler ise sırasıyla

$$g_F(u_2,v_2)=\begin{bmatrix}9 & 20\\ 40 & 89\end{bmatrix},\ g_F(u_3,v_3)=\begin{bmatrix}89 & 198\\ 396 & 881\end{bmatrix},\ g_F(u_4,v_4)=\begin{bmatrix}881 & 1960\\ 3920 & 8721\end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisler de F nin birer has otomorfizmidir. Burada dikkat edilirse

$$g_F^2(u_1,v_1)=g_F(u_2,v_2),\ g_F^3(u_1,v_1)=g_F(u_3,v_3)\ \text{ve}\ g_F^4(u_1,v_1)=g_F(u_4,v_4)$$

yani, $n\geq 1$ tamsayısı için

$$g_F^n(u_1,v_1)=g_F(u_n,v_n)$$

dir. Dolayısıyla F nin diğer tüm has otomorfizmleri, $g_F(u_1,v_1)$ den elde edilebilir. Esasında $(u_1,v_1)=(5,2)$, bu Pell denklemin bir çözümü ise

$$(-u_1,v_1)=(-5,2),(u_1,-v_1)=(5,-2)\ \text{ve}\ (-u_1,-v_1)=(-5,-2)$$

de denklemin birer çözümleridir ve bu çözümlere karşılık gelen matrisler ise sırasıyla

$$g_F(-u_1,v_1)=\begin{bmatrix}-9 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix},\ g_F(u_1,-v_1)=\begin{bmatrix}9 & -2\\ -4 & 1\end{bmatrix},\ g_F(-u_1,-v_1)=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -4 & -9\end{bmatrix}$$

dır. Bu matrisler de F nin birer has otomorfizmleridir. Diğer yandan

$$g_F^{-1}(u_1,v_1)=g_F(u_1,-v_1)\ \text{ve}\ g_F^{-1}(-u_1,v_1)=g_F(-u_1,-v_1)$$

olduğudan F nin tüm has otomorfizmleri kümesi

$$\mathrm{Aut}^+(F)=\left\{\pm g_F^n(u_1,v_1):g_F(u_1,v_1)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{bmatrix},\ n\in \mathrm{Z}\right\}$$

dir.

2.2 İndefinite Formların Komşuları

Bu kısımda indefinite formların komşuları ele alınacak ve bu komşular yardımıyla bu formların has otomorfizmleri kümesinin elde edilebileceği gösterilecektir.

Hatırlanacağı üzere, bir $F=(a,b,c)$ indefinite formunun sağ komşusu belli bir δ için

$$R(F)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -\delta\end{bmatrix}(a,b,c)$$

olarak ve sol komşusu ise

$$L(F)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}R(c,b,a)$$

olarak tanımlanmıştı. Eğer F indirgenebilir ise sonlu bir adımda F nin sağ komşuları dizisi tekrar F ye döner, yani belli bir $n\geq 1$ tamsayısı için $R^n(F)=F$ olur. Örneğin, $F=(1,8,-5)$ formu indirgenebilirdir ve bu formun sağ komşuları

$$\begin{aligned}&R^1(F)=(-5,2,4), R^2(F)=(4,6,-3), R^3(F)=(-3,6,4),\\ &R^4(F)=(4,2,-5), R^5(F)=(-5,8,1), R^6(F)=(1,8,-5)=F\end{aligned}$$

dır. Burada dikat edilirse $R^6(F)=F$ dir. Ancak F indirgenebilir değilse ardışık sağ komşuları dizisi tekrar F ye dönmez, dizideki belli bir sağ komşuya döner. Yani, belli $n>m\in \mathbb{Z}^+$ için $R^n(F)=R^m(F)$ olur. Örneğin, $G=(9,16,6)$ formu indirgenebilir değildir ve bu formun sağ komşuları

$$R^1(G)=(6,-4,-1), R^2(G)=(-1,6,1), R^3(G)=(1,6,-1), R^4(G)=(-1,6,1)=R^2(G)$$

dir. Burada dikkat edilirse $R^4(G)=R^2(G)$ dir.

Bu kısımda aşağıdaki problemler ele alınacaktır:

1. Hangi F formlarının bir sağ ve bir sol komşusu vardır ve bu komşular birbirine eşittir.
2. Hangi F formlarının $j>i$ olmak üzere $R^i(F)=R^j(F)$ ve $m>k$ olmak üzere $L^k(F)=L^m(F)$ olacak şekilde sağ ve sol komşuları vardır ve bu komşular birbirine eşittir.
3. Yukarıda bahsedilen formlar arasında bir ilişki var mıdır?

4. Elde edilen tüm bu formların has otomorfizmleri kümesi belirlenebilir mi?

Yukarıda ele alınan soruların cevapları için $a, t \geq 1$ özelliğinde tamsayılar olmak üzere

$$F_1 = (a, at, -a),\ F_2(a, at, -at) \text{ ve } F_3(at, at, -a)$$

formları ele alınsın. Buna göre aşağıdaki teoremler verilebilir.

2.2.1 Teorem. F_1, F_2 ve F_3 formlarının bir sağ ve bir sol komşuları vardır ve bu komşular birbirine eşit, yani

$$R^1_{F_1}(F) = L^1_{F_1}(F) = \{(-a, at, a)\},$$
$$R^1_{F_2}(F) = L^1_{F_2}(F) = \{(-at, at, a)\},$$
$$R^1_{F_3}(F) = L^1_{F_3}(F) = \{(-a, at, at)\}$$

dir (Tekcan ve ark. 2013).

İspat. İlk olarak F_1 formu ele alınsın. Bu formun ilk sağ komşusu $R^1(F_1) = (-a, at, a)$ ve ikinci sağ komşusu $R^2(F_1) = (a, at, -a) = F_1$ dir. Şu halde F_1 in bir sağ komşusu vardır. F_1 in sol komşuları ise sırasıyla

$$L^1(F_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} R(-a, at, a) = (-a, at, a)$$

$$L^2(F_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} R(a, at, -a) = (a, at, -a) = F_1$$

dir. Buna göre F_1 in bir sol komşusu vardır. Bu sağ ve sol komşulara dikkat edilirse

$$R^1_{F_1}(F) = L^1_{F_1}(F) = \{(-a, at, a)\}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde F_2 ve F_3 formlarının sağ ve sol komşuları ise

$$R^1(F_2) = (-at,\ at,\ a),\ R^2(F_2) = (a,\ at, -at) = F_2,$$
$$L^1(F_2) = (-at,\ at, a),\ L^2(F_2) = (a,\ at, -at) = F_2,$$
$$R^1(F_3) = (-a,\ at, at), R^2(F_3) = (at,\ at, -a) = F_3,$$
$$L^1(F_3) = (-a,\ at, at), L^2(F_3) = (at,\ at, -a) = F_3$$

şeklindedir. Burada da

$$R^1_{F_2} = L^1_{F_2} = \{(-at, at, a)\} \text{ ve } R^1_{F_3} = L^1_{F_3} = \{(-a, at, at)\}$$

olduğu görülür.

İkinci ve üçüncü soruların cevapları için

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathrm{Z})$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm için

$$\mu(a,b,c) = (a,-b,c)$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla (a,b,c) ve $(a,-b,c)$ formu birbirine has olmayan denktir.

Yukarıda tanımlanan F_1, F_2 ve F_3 formlarına μ dönüşümü uygulanırsa

$$\mu(F_1) = (a,-at,-a) = F_1^*$$
$$\mu(F_2) = (a,-at,-at) = F_2^*$$
$$\mu(F_3) = (at,-at,-a) = F_3^*$$

formları elde edilir. Şu halde $i = 1,2,3$ için F_i formu F_i^* formuna has olmayan denktir.

2.2.2 Teorem. F_1^*, F_2^* ve F_3^* formlarının iki sağ ve sol komşuları vardır ve bu komşular birbirine eşit, yani

$$R_{F_1^*} = L_{F_1^*} = \overline{\{(-a, at, a), (a, at, -a)\}}$$
$$R_{F_2^*} = L_{F_2^*} = \overline{\{(-at,\ at, a), (a,\ at, -at)\}}$$
$$R_{F_3^*} = L_{F_3^*} = \overline{\{(-a,\ at, at), (at,\ at, -a)\}}$$

dir (Tekcan ve ark. 2013).

İspat. F_1^* formunun sağ ve sol komşuları

$$R^1(F_1^*) = (-a, at, a), R^2(F_1^*) = (a, at, -a),\ R^3(F_1^*) = (-a, at, a) = R^1(F_1^*),$$
$$R^4(F_1^*) = (a, at, -a) = R^2(F_1^*), L^1(F_1^*) = (-a, at, a),\ L^2(F_1^*) = (a, at, -a),$$
$$L^3(F_1^*) = (-a, at, a) = L^1(F_1^*),\ L^4(F_1^*) = (a, at, -a) = L^2(F_1^*)$$

olarak elde edilir. Buradan $R_{F_1^*} = L_{F_1^*} = \overline{\{(-a, at, a), (a, at, -a)\}}$ olduğu görülür.

Benzer şekilde F_2^* ve F_3^* formlarının sağ ve sol komşuları ise sırasıyla

$$R^1(F_2^*) = (-at, at, a), R^2(F_2^*) = (a, at, -at), R^3(F_2^*) = (-at, at, a) = R^1(F_2^*),$$
$$R^4(F_2^*) = (a, at, -at) = R^2(F_2^*), L^1(F_2^*) = (-at, at, a),\ L^2(F_2^*) = (a, at, -at),$$
$$L^3(F_2^*) = (-at, at, a) = L^1(F_2^*),\ L^4(F_2^*) = (a, at, -at) = L^2(F_2^*)$$

ve

$$R^1(F_3^*)=(-a,at,at),\ R^2(F_3^*)=(at,at,-a),\ R^3(F_3^*)=(-a,at,at)=R^1(F_3^*),$$
$$R^4(F_3^*)=(at,at,-a)=R^2(F_3^*), L^1(F_3^*)=(-a,at,at), L^2(F_3^*)=(at,at,-a),$$
$$L^3(F_3^*)=(-a,at,at)=L^1(F_3^*), L^4(F_3^*)=(at,at,-a)=L^2(F_3^*)$$

dir. Burada $R_{F_2^*}=L_{F_2^*}=\{\overline{(-at,at,a),(a,at,-at)}\}$ ve $R_{F_3^*}=L_{F_3^*}=\{\overline{(-a,at,at),(at,at,-a)}\}$ olduğu açıktır.

F nin sağ komşusu tanımındaki $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -\delta\end{bmatrix}$ matrisinin tersi için

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -\delta\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\delta & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=T(\delta)$$

tanımlansın. $n>1$ tamsayısı için $\tau_{F,n}=T(\delta_0)T(\delta_1)\cdots T(\delta_{n-1})$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki teorem verilebilir.

2.2.3 Teorem. F indefinite formu için

(i) $R^n(F)=F$ ise F nin has otomorfizmleri kümesi $\mathrm{Aut}^+(F)=\{\pm(\tau_{F,n})^k : k\in Z\}$ dir.

(ii) $n>m$ özelliğindeki en küçük pozitif n ve m tamsayıları için $R^n(F)=R^m(F)$ ise F nin has otomorfizmleri kümesi $\mathrm{Aut}^+(F)=\{\pm(\tau_{F,n}\tau_{F,m}^{-1})^k : k\in Z\}$ dir (Flath 1989).

2.2.3 Teoremindeki (i) hali, F formunun indirgenebilir olması durumu, (ii) hali ise indirgenemez olması durumu ile ilgilidir. Örneğin indirgenebilir $F=(5,3,-7)$ formunun ardışık sağ komşuları için aşağıdaki tablo elde edilir:

Tablo 2.1 $F=(5,3,-7)$ formunun sağ komşuları

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_i	5	-7	1	-7	5	-5	7	-1	7	-5	5
B_i	3	11	11	3	7	3	11	11	3	7	3
C_i	-7	1	-7	5	-5	7	-1	7	-5	5	-7
δ_i	-1	11	-1	1	-1	1	-11	1	-1	1	

Bu tabloya göre, $R^{10}(F)=F$ olup

$$\tau_{F,10}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-2319&1525\\2135&-1404\end{bmatrix}$$

olduğundan F nin has otomorfizmleri kümesi

$$\mathrm{Aut}^{+}(F)=\left\{\pm\begin{bmatrix}-2319&1525\\2135&-1404\end{bmatrix}^{k}:k\in Z\right\}$$

dir. İndirgenemeyen $F=(19,0,-1)$ formunun ardışık sağ komşuları için aşağıdaki tablo elde edilir:

Tablo 2.2 $F=(19,0,-1)$ formunun sağ komşuları

i	0	1	2	3	4	5	6	7
A_i	19	-1	3	-5	2	-5	3	-1
B_i	0	8	4	6	6	4	8	8
C_i	-1	3	-5	2	-5	3	-1	3
δ_i	-4	2	-1	3	-1	2	-8	

Bu tabloya göre, $R^{7}(F)=R^{1}(F)$ olup

$$\tau_{F,7}=\begin{bmatrix}4&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1421&-170\\326&39\end{bmatrix}$$

ve $\tau_{F,1}=\begin{bmatrix}4&1\\-1&0\end{bmatrix}$ olduğundan

$$\tau_{F,7}\tau_{F,1}^{-1}=\begin{bmatrix}-1421&-170\\326&39\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-170&741\\39&-170\end{bmatrix}$$

dir. Buna göre F nin has otomorfizmleri kümesi

$$\mathrm{Aut}^{+}(F)=\left\{\pm\begin{bmatrix}-170&741\\39&-170\end{bmatrix}^{k}:k\in Z\right\}$$

dir.

Son olarak 2.2.3 Teoremi kullanılarak yukarıda ele alınan formlarının has otomorfizmleri kümesi belirlenebilir.

2.2.4 Teorem. F_1, F_2, F_3 ve F_1^*, F_2^*, F_3^* formlarının has otomorfizmleri kümesi aşağıdaki gibidir:

(1) $\tau_{F_1},_2 = \begin{bmatrix} -t^2-1 & t \\ t & -1 \end{bmatrix}$ ve $k \geq 1$ tamsayısı için

$$(\tau_{F_1},_2)_{11} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{2k-i}{2k-2i} t^{2k-2i}$$

$$(\tau_{F_1},_2)_{12} = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2k-1-i}{2k-1-2i} t^{2k-1-2i}$$

$$(\tau_{F_1},_2)_{21} = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2k-1-i}{2k-1-2i} t^{2k-1-2i}$$

$$(\tau_{F_1},_2)_{22} = (-1)^{k} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-2-i}{2k-2-2i} t^{2k-2-2i}$$

ve $(\tau_{F_1},_2)^k = \begin{bmatrix} (\tau_{F_1},_2)_{11} & (\tau_{F_1},_2)_{12} \\ (\tau_{F_1},_2)_{21} & (\tau_{F_1},_2)_{22} \end{bmatrix}$ olmak üzere $\mathrm{Aut}^+(F_1) = \{\pm(\tau_{F_1,2})^k : k \in \mathrm{Z}\}$ dir.

(2) $\tau_{F_2},_2 = \begin{bmatrix} -t-1 & 1 \\ t & -1 \end{bmatrix}$ ve $k \geq 1$ tamsayısı için

$$(\tau_{F_2},_2)_{11} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{2k-i}{2k-2i} t^{k-i}$$

$$(\tau_{F_2},_2)_{12} = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1-i}{2k-1-2i} t^{k-1-i}$$

$$(\tau_{F_2},_2)_{21} = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1-i}{2k-1-2i} t^{k-i}$$

$$(\tau_{F_2},_2)_{22} = (-1)^{k} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-2-i}{2k-2-2i} t^{k-1-i}$$

ve $(\tau_{F_2},_2)^k = \begin{bmatrix} (\tau_{F_2},_2)_{11} & (\tau_{F_2},_2)_{12} \\ (\tau_{F_2},_2)_{21} & (\tau_{2_1},_2)_{22} \end{bmatrix}$ olmak üzere $\mathrm{Aut}^+(F_2) = \{\pm(\tau_{F_2},_2)^k : k \in \mathrm{Z}\}$ dir.

(3) $\tau_{F_3},_2 = \begin{bmatrix} -t-1 & t \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $k \geq 1$ tamsayısı için

$$(\tau_{F_3},_2)_{11} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{2k-i}{2k-2i} t^{k-i}$$

$$(\tau_{F_3,2})_{12} = (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1-i}{2k-1-2i}t^{k-i}$$

$$(\tau_{F_3,2})_{21} = (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1-i}{2k-1-2i}t^{k-1-i}$$

$$(\tau_{F_3,2})_{22} = (-1)^{k}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-2-i}{2k-2-2i}t^{k-1-i}$$

ve $(\tau_{F_3,2})^k = \begin{bmatrix} (\tau_{F_3,2})_{11} & (\tau_{F_3,2})_{12} \\ (\tau_{F_3,2})_{21} & (\tau_{F_3,2})_{22} \end{bmatrix}$ olmak üzere $\mathrm{Aut}^+(F_3) = \{\pm(\tau_{F_3,2})^k : k \in \mathrm{Z}\}$ dir.

(4) $\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & t \\ t & -t^2-1 \end{bmatrix}$ ve $k \geq 1$ tamsayısı için

$$(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{11} = (-1)^{k}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-2-i}{2k-2-2i}t^{2k-2-2i}$$

$$(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{12} = (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1-i}{2k-1-2i}t^{2k-1-2i}$$

$$(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{21} = (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1-i}{2k-1-2i}t^{2k-1-2i}$$

$$(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{22} = (-1)^{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{2k-i}{2k-2i}t^{2k-2i}$$

ve $(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})^k = \begin{bmatrix} (\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{11} & (\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{12} \\ (\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{21} & (\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{22} \end{bmatrix}$ olmak üzere

$\mathrm{Aut}^+(F_1^*) = \{\pm(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})^k : k \in \mathrm{Z}\}$ dir.

(5) $\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ t & -t-1 \end{bmatrix}$ ve $k \geq 1$ tamsayısı için

$$(\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})_{11} = (-1)^{k}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-2-i}{2k-2-2i}t^{k-1-i}$$

$$(\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})_{12} = (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1-i}{2k-1-2i}t^{k-1-i}$$

$$(\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})_{21} = (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-1-i}{2k-1-2i}t^{k-i}$$

$$(\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})_{22} = (-1)^{k}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-i}{2k-2i}t^{k-i}$$

ve $(\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})^k = \begin{bmatrix} (\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})_{11} & (\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})_{12} \\ (\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})_{21} & (\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})_{22} \end{bmatrix}$ olmak üzere

$\mathrm{Aut}^+(F_2^*) = \{\pm(\tau_{F_2^*,3}\tau_{F_2^*,1}^{-1})^k : k \in \mathrm{Z}\}$ dir.

(6) $\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & t \\ 1 & -t-1 \end{bmatrix}$ ve $k \geq 1$ tamsayısı için

$$(\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})_{11} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-2-i}{2k-2-2i} t^{k-1-i}$$

$$(\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})_{12} = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1-i}{2k-1-2i} t^{k-i}$$

$$(\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})_{21} = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1-i}{2k-1-2i} t^{k-1-i}$$

$$(\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})_{22} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{2k-i}{2k-2i} t^{k-i}$$

ve $(\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})^k = \begin{bmatrix} (\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})_{11} & (\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})_{12} \\ (\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})_{21} & (\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})_{22} \end{bmatrix}$ olmak üzere

$\mathrm{Aut}^+(F_3^*) = \{\pm(\tau_{F_3^*,3}\tau_{F_3^*,1}^{-1})^k : k \in \mathrm{Z}\}$ dir (Tekcan ve ark. 2013).

İspat. (1) F_1 formu için $\delta_0 = -t$ ve $\delta_1 = t$ olduğundan

$$\tau_{F_1,2} = T(\delta_0)T(\delta_1) = \begin{bmatrix} -t^2-1 & t \\ t & -1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Şimdi bu matrisin *k*. kuvveti ele alınsın. $k = 1$ için

$$\tau_{F_1,2} = \begin{bmatrix} -t^2-1 & t \\ t & -1 \end{bmatrix} = \tau_{F_1,2}$$

olduğundan eşitlik doğrudur. Eşitliğin $k-1$ için doğru olduğu kabul edilsin, yani

$$A = (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-2-i}{2k-2-2i} t^{2k-2-2i}, \quad B = (-1)^k \sum_{i=0}^{k-2} \binom{2k-3-i}{2k-3-2i} t^{2k-1-2i},$$

$$C = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-3-i}{2k-3-2i} t^{2k-1-2i}, \quad D = (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-2} \binom{2k-4-i}{2k-4-2i} t^{2k-4-2i}$$

olmak üzere $(\tau_{F_1,2})^{k-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{bmatrix} -t^2-1 & t \\ t & -1 \end{bmatrix} (\tau_{F_1,2})^{k-1} = \begin{bmatrix} (\tau_{F_1,2})_{11}^k & (\tau_{F_1,2})_{12}^k \\ (\tau_{F_1,2})_{21}^k & (\tau_{F_1,2})_{22}^k \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$(\tau_{F_1},_2)_{11}^{k-1}=(-t^2-1)\left((-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k-2-i}{2k-2-2i}t^{2k-2-2i}\right)+t\left((-1)^k\sum_{i=0}^{k-2}\binom{2k-3-i}{2k-3-2i}t^{2k-3-2i}\right)$$

$$=(-1)^{k-1}\left(\begin{array}{l}\binom{2k-2}{2k-2}t^{2k-2}(-t^2-1)+\binom{2k-3}{2k-4}t^{2k-4}(-t^2-1)\\+\binom{2k-4}{2k-6}t^{2k-6}(-t^2-1)+\cdots\\+\binom{k}{2}t^2(-t^2-1)+\binom{k-1}{0}(-t^2-1)\end{array}\right)$$

$$+(-1)^k\left(\begin{array}{l}\binom{2k-3}{2k-3}t^{2k-3}\cdot t+\binom{2k-4}{2k-5}t^{2k-4}t+\cdots\\+\binom{k}{3}t^k\cdot t+\binom{k-1}{1}t^{k-1}\cdot t\end{array}\right)$$

$$=(-1)^k\left(\begin{array}{l}\binom{2k-2}{2k-2}(t^{2k}+t^{2k-2})+\binom{2k-3}{2k-3}t^{2k-2}\\+\binom{2k-4}{2k-6}(t^{2k-4}+t^{2k-6})+\binom{2k-5}{2k-7}t^{2k-4}+\cdots\\+\binom{k}{2}(t^4+t^2)+\binom{k}{3}t^{m+1}+\binom{k-1}{1}t^k\end{array}\right)$$

$$=(-1)^k\left[\begin{array}{l}t^{2k}+t^{2k-2}+t^{2k-2}+(2k-3)(t^{2k-2}+t^{2k-4})\\+(2k-4)t^{2k-3}+\dfrac{(2k-4)(2k-3)}{2}(t^{2k-4}+t^{2k-6})\\+\dfrac{(2k-5)(2k-6)}{2}t^{2k-4}+\cdots+\dfrac{k(k-1)}{2}(t^4+t^2)\\+\dfrac{k(k-1)(k-2)}{2}t^{k+1}+(t^2+1)+(k-1)t^k\end{array}\right]$$

$$=(-1)^k\left[\begin{array}{l}\binom{2k}{2k}t^{2k}+\binom{2k-1}{2k-1}t^{2k-2}+\binom{2k-2}{2k-4}t^{2k-4}\\+\binom{2k-3}{2k-6}t^{2k-6}+\cdots+\binom{k+1}{2}t^2+1\end{array}\right]$$

$$=(-1)^k\sum_{i=0}^{k}\binom{2k-i}{2k-2i}t^{2k-2i}$$

dır. $(\tau_{F_1},_2)_{12}^k,(\tau_{F_1},_2)_{21}^k$ ve $(\tau_{F_1},_2)_{22}^k$ de benzer şekilde gösterilebilir. O halde eşitlik her m için de doğrudur. (2) ve (3) de benzer şekilde gösterilebilir.

(4) F_1^* formu için $R^3(F_1^*)=R^1(F_1^*)$ dir. Dolayısıyla $n=3$ ve $m=1$ olduğundan

$$\tau_{F_1^*},_3=\begin{bmatrix}-t & -1\\ t^2+1 & t\end{bmatrix} \text{ ve } \tau_{F_1^*,1}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

ve böylece

$$\tau_{F_3^*},_3\,\tau_{F_3^*,1}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & t\\ t & -t^2-1\end{bmatrix}$$

dır. Yine tümevarımla $k\geq 1$ için

$$(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{11} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-2-i}{2k-2-2i} t^{2k-2-2i}$$

$$(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{12} = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1-i}{2k-1-2i} t^{2k-1-2i}$$

$$(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{21} = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1-i}{2k-1-2i} t^{2k-1-2i}$$

$$(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{22} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{2k-i}{2k-2i} t^{2k-2i}$$

olmak üzere

$$(\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})^k = \begin{bmatrix} (\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{11} & (\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{12} \\ (\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{21} & (\tau_{F_1^*,3}\tau_{F_1^*,1}^{-1})_{22} \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. (5) ve (6) da benzer şekilde gösterilebilir.

2.3 Pell Denklemleri ve t-Balans Sayıları

Bu kısımda, m sıfırdan farklı bir tamsayı olmak üzere, diskriminantı tam kare olmayan $F = (a,b,c)$ indefinite formu için

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = m$$

Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri ele alınacak ve bu tamsayı çözümleri yardımıyla $t-$balans sayılarının genel terimleri elde edilecektir.

Eğer F nin diskriminantı tam kare ise, bu form lineer iki formun çarpımı olarak yazılabileceğinden, m nin çarpanlarına göre yukarıdaki denklemin sonlu sayıda çözümü vardır veya yoktur. Örneğin $\Delta = 121$ diskriminantlı $F = (6,19,10)$ formu ve $m = 18$ tamsayısı için

$$F(x, y) = m \Leftrightarrow 6x^2 + 19xy + 10y^2 = 18 \Leftrightarrow (3x + 2y)(2x + 5y) = 18$$

denklemi elde edilir. 18 in çarpanları göz önüne alınırsa sadece

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= \pm 18 \\ 2x + 5y &= \pm 1 \end{aligned}$$

denklem sisteminin tamsayı çözümleri vardır ve bu çözümler $\pm(8,-3)$ dür. 18 in diğer çarpanları durumunda denklem siteminin tamsayı çözümü yoktur.

Bu nedenle F nin diskriminantının tam kare olmaması durumu ele alınacaktır ki bu durumda $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=m$ denkleminin varsa sonsuz sayıda tamsayı çözümü vardır.

$F=(a,b,c)$ indefinite formu

$$F(x,y)=\frac{\left(ax+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(ax+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}y\right)}{a}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$M_F=\left\{ax+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y : x,y\in Z\right\}$$

kümesi üzerinde

$$[x' \quad y']=\begin{cases}[x \quad y]\begin{bmatrix} u-\frac{b}{2}v & av \\ -cv & u+\frac{b}{2}v\end{bmatrix} & \Delta\equiv 0(\bmod 4)\\ \\ [x \quad y]\begin{bmatrix} u+\frac{1-b}{2}v & av \\ -cv & u+\frac{1+b}{2}v\end{bmatrix} & \Delta\equiv 1(\bmod 4)\end{cases} \tag{2.2}$$

olmak üzere

$$(u+v\rho_\Delta)\left(ax+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)=ax'+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y'$$

ikili işlemi tanımlansın. Bu takdirde

$$\psi(x,y)=ax+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y$$

olarak tanımlanan dönüşüm için

$$\psi:\{(x,y):F(x,y)=m\}\rightarrow\{\gamma\in M_F : N(\gamma)=am\}$$

dir, yani $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=m$ denklemini çözmek demek esasında M_F nin normu am olan elemanlarını bulmak demektir.

$F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=m$ denklemi yeniden düzenlenirse

$$\Delta y^2+4am=(2ax+by)^2$$

haline gelir. Buna göre

$$0\le y\le U=\begin{cases}\left|\dfrac{am\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{1/2}\left(\dfrac{\tau_\Delta-1}{\tau_\Delta}\right) & am>0 \text{ ise}\\[2ex] \left|\dfrac{am\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{1/2}\left(\dfrac{\tau_\Delta+1}{\tau_\Delta}\right) & am<0 \text{ ise}\end{cases} \tag{2.3}$$

aralığındaki *y* değerleri için, Δy^2+4am ifadesinin tam kare olup olmadığı kontrol edilir. Eğer tam kare ise yukarıdaki eşitlikten *x* değeri (veya değerleri) elde edilir. Şu halde $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=m$ denklemi için bir $\{[\,x\ \ y]\}$ çözüm sınıfı elde edilmiş olur. Bu çözüm sınıfı kullanılarak $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=m$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri elde edilmiş olur.

Örneğin, $F=(17,32,14)$ indefinite formu ve $m=9$ sayısı için

$$17x^2+32xy+14y^2=9$$

denklemi ele alınsın. *F* nin diskriminantı $\Delta=72=4\cdot 18$ olduğundan O_{72} nin temel birimi $\varepsilon_{72}=17+4\sqrt{18}$ dir. $N(\varepsilon_{72})=1$ olduğundan $\tau_{72}=17+4\sqrt{18}$ dir. O halde (2.3) eşitliğinden

$$0\le y\le U=\left|\frac{17\cdot 9\cdot(17+4\sqrt{18})}{72}\right|^{1/2}\left(\frac{16+4\sqrt{18}}{17+4\sqrt{18}}\right)\cong 8.246$$

olur. Buna göre $0\le y\le 8$ aralığındaki *y* değerleri için

$$\Delta y^2+4am=72y^2+612$$

ifadesi sadece $y=2$ ve $y=4$ için bir tam karedir ve *y* nin bu değerleri için sırasıyla $x=-1$ ve $x=-5$ dir. Dolayısıyla iki çözüm sınıfı vardır ve bu çözüm sınıfı

$$\{[-5\ \ 4],[-1\ \ 2]\}$$

dir. Diğer yandan çözüm matrisi (2.2) den

$$M=\begin{bmatrix}-47 & 68\\ -56 & 81\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. O halde verilen denklemin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\psi : \{\pm[-1 \quad 2]M^k, \pm[-5 \quad 4]M^k : k \in \mathrm{Z}\}$$

dir.

Dash ve ark. (2012) tarafından balans sayıları, $t-$balans sayılarına genişletilmiştir. $t \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere belli bir pozitif *r* tamsayısı için

$$1+2+\cdots+n=(n+1+t)+(n+2+t)+\cdots+(n+r+t) \qquad (2.4)$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif *n* tamsayısına $t-$balans sayısı denir. Bu durumda *r* ye ise $t-$cobalans sayısı denir. *n.* $t-$balans ve $t-$cobalans sayıları sırasıyla B_n^t ve b_n^t ile gösterilir.

Her ne kadar $t-$balans sayıları $t \geq 0$ için tanımlanmış olsa da genel olarak $t \geq 2$ için ele alınır. Çünkü $0-$ve $1-$balans sayıları, daha önce ele alınan balans sayılarına bağlı olarak ifade edilebilir. Gerçekten de

$$B_n^0 = b_{n+1},\ b_n^0 = B_n,\ C_n^0 = c_{n+1},\ c_n^0 = C_n$$

ve

$$B_n^1 = B_{n+1} - 1,\ b_n^1 = b_{n+1},\ C_n^1 = C_{n+1},\ c_n^1 = c_{n+1}$$

dir.

(2.4) eşitliği *r* ve *n* ye göre çözülürse

$$r = \frac{-(2n+2t+1)+\sqrt{8n^2+8n(1+t)+(2t+1)^2}}{2}$$

ve

$$n = \frac{(2r-1)+\sqrt{8r^2+8rt+1}}{2}$$

elde edilir. Buna göre

“ B_n^t bir $t-$balans sayısı $\Leftrightarrow 8(B_n^t)^2 + 8B_n^t(1+t)+(2t+1)^2$ bir tam kare”

ve

“b_n^t bir $t-$cobalans sayısı $\Leftrightarrow 8(b_n^t)^2 + 8tb_n^t + 1$ bir tam kare” olduğu görülür. Şu halde $\sqrt{8(B_n^t)^2+8B_n^t(1+t)+(2t+1)^2}$ ve $\sqrt{8(b_n^t)^2+8tb_n^t+1}$ birer tamsayı olup bu sayılara sırasıyla *n*. Lucas $t-$balans ve *n*. Lucas $t-$cobalans sayıları denir ve sırasıyla C_n^t ve c_n^t ile gösterilir. O halde

$$C_n^t=\sqrt{8(B_n^t)^2+8B_n^t(1+t)+(2t+1)^2} \text{ ve } c_n^t=\sqrt{8(b_n^t)^2+8tb_n^t+1}$$

dir.

Dash ve ark. (2012), $t-$balans ve $t-$cobalans sayılarının genel terimlerinin

$$B_n^t=6B_{n-2}^t-B_{n-4}^t+2(t+1) \text{ ve } b_{n+2}^t=6b_n^t-b_{n-2}^t+2t$$

şeklinde olduğunu göstermişler ve aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

2.3.1 Teorem. $t-$balans sayıları $[B_n^t-(t+1)]^2-B_{n+2}^tB_{n-2}^t=(2t+1)^2$ indirgeme bağıntısını gerçekler (Dash ve ark. 2012).

2.3.2 Teorem. Lucas $t-$balans sayıları $C_{n+2}^t=6C_n^t-C_{n-2}^t$ indirgeme bağıntısını gerçekler (Dash ve ark. 2012).

Esasında $t-$balans sayılarının belirlenmesi, bazı özel Pell (Diophantine) denklemlerinin tamsayı çözümlerinin elde edilmesine bağlıdır. Şöyle ki, yukarıda

“x in bir $t-$balans sayısı $\Leftrightarrow 8x^2+8x(1+t)+(2t+1)^2$

bir tam kare” olduğu görülmüştü. Buna göre belli bir $y\neq 0$ tamsayısı için

$$8x^2+8x(1+t)+(2t+1)^2=y^2$$

denilirse

$$D^t: 8x^2-y^2+8x(1+t)+(2t+1)^2=0$$

Diophantine denklemi elde edilmiş olur. Bu denklemde *h* ve *k* sabitleri için

$$x=v+h,\ y=u+k$$

değişken değişimi yapılırsa denklem

$$\widetilde{D}^t: 8(v+h)^2-(u+k)^2+8(v+h)(1+t)+(2t+1)^2=0$$

denklemine indirgenmiş olur. Bu son eşitlikten

$$k = 0 \text{ ve } h = -\frac{t+1}{2}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla verilen denklem

$$\widetilde{D}^t : u^2 - 8v^2 = 2t^2 - 1$$

Pell denklemine indirgenmiş olur. Bu Pell denkleminde, bazı *t* değerleri için iki, bazı *t* değerleri için dört, bazı *t* değerleri için altı ve bazı *t* değerleri için sekiz çözüm sınıfı vardır. Örneğin,

(i) $t = 3$ için çözüm sınıfı $\{[\pm 5 \;\; 1]\}$

(ii) $t = 9$ için çözüm sınıfı $\{[\pm 13 \; 1], [\pm 17 \;\; 4]\}$

(iii) $t = 89$ için çözüm sınıfı $\{[\pm 127 \;\; 6], [\pm 129 \;\; 10], [\pm 143 \;\; 24], [\pm 177 \; 44]\}$

(iv) $t = 93$ için çözüm sınıfı $\{[\pm 133 \; 7], [\pm 155 \;\; 29], [\pm 186 \;\; 46]\}$

dir. Dolayısıyla da, çözüm sınıfını ve bu çözüm sınıfındaki elemanları, *t* ye bağlı olarak tek türlü belirlemek mümkün değildir. Bu nedenle, çözüm sınıfını ve bu sınıftaki elemanları *t* ye bağlı olarak tek türlü ifade etmek için, $2t^2 - 1$ ifadesine bazı kısıtlar koymak gerekir. Bunun için *t*, $2t^2 - 1$ asal sayı olacak şekilde tek bir tamsayı olarak ele alınsın ($h = -\frac{t+1}{2}$ olduğundan *t* nin tek olması gerekir).

Aşağıdaki tabloda bazı *t* değerleri için $2t^2 - 1$ in asal olma durumu verilmiştir.

Tablo 2.3 $2t^2 - 1$ in asal olma durumu

t	$2t^2 - 1$		t	$2t^2 - 1$
3	17		21	881
7	97		25	1249
11	241		39	3041
13	337		41	3361
15	449		43	3697
17	577		45	4049

$\widetilde{D}^t$ Pell denklemi için $\varepsilon_{32} = 3 + \sqrt{8}$ olduğundan $\tau_{32} = 3 + \sqrt{8}$ dir. $0 \le y \le U$ aralığında $32y^2 + 8t^2 - 4$ ifadesi sadece $y = \frac{t-1}{2}$ değeri için bir tam karedir ve *y* nin bu değeri için $x = \pm(2t - 1)$ dir. Şu halde verilen Pell denklemi için çözüm sınıfı

$$\left\{\begin{bmatrix} \pm(2t-1) & \frac{t-1}{2} \end{bmatrix}\right\}$$

ve çözüm matrisi $M=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ dır. Buna göre $n \geq 0$ olmak üzere

(1) $[2t-1 \quad \frac{t-1}{2}]M^n$ denklemin (u_{2n+1}, v_{2n+1}) çözümlerini üretir,

(2) $[1-2t \quad \frac{1-t}{2}]M^n$ denklemin $(-u_{2n+1}, -v_{2n+1})$ çözümlerini üretir,

(3) $[2t-1 \quad \frac{1-t}{2}]M^{-n}$ denklemin $(u_{2n+1}, -v_{2n+1})$ çözümlerini üretir,

(4) $[1-2t \quad \frac{t-1}{2}]M^{-n}$ denklemin $(-u_{2n+1}, v_{2n+1})$ çözümlerini üretir,

ve benzer şekilde $n \geq 1$ olmak üzere

(5) $[2t-1 \quad \frac{1-t}{2}]M^n$ denklemin (u_{2n}, v_{2n}) çözümlerini üretir,

(6) $[1-2t \quad \frac{t-1}{2}]M^n$ denklemin $(-u_{2n}, -v_{2n})$ çözümlerini üretir,

(7) $[2t-1 \quad \frac{t-1}{2}]M^{-n}$ denklemin $(u_{2n}, -v_{2n})$ çözümlerini üretir,

(8) $[1-2t \quad \frac{1-t}{2}]M^{-n}$ denklemin $(-u_{2n}, v_{2n})$ çözümlerini üretir.

Şu halde aşağıdaki teorem verilebilir.

2.3.3 Teorem. $\widetilde{D}^t : u^2 - 8v^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi,

$$[u_{2n+1} \quad v_{2n+1}] = [2t-1 \quad \frac{t-1}{2}]M^n,\ n \geq 0$$
$$[u_{2n} \quad v_{2n}] = [2t-1 \quad \frac{1-t}{2}]M^n,\ n \geq 1$$

olmak üzere $\psi(\widetilde{D}^t) = \{(u_{2n+1}, v_{2n+1}),\ (u_{2n}, v_{2n})\}$ dir. (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

Bu teoreme göre denklemin tüm tamsayı çözümlerini belirlemek için M matrisinin *n*. kuvvetinin bilinmesi gerekir ki bu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

2.3.4 Teorem. B_n balans ve C_n Lucas-balans sayılar olmak üzere M matrisinin *n*. kuvveti

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & B_n \\ 8B_n & C_n \end{bmatrix}$$

dir (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

İspat. Tümevarımla eşitliğin doğru olduğu gösterilebilir.

2.3.5 Teorem. $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= (2t-1)C_n + 4(t-1)B_n \\ v_{2n+1} &= (2t-1)B_n + \frac{t-1}{2}C_n \end{aligned}$$

ve $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} u_{2n} &= (2t-1)C_n + 4(1-t)B_n \\ v_{2n} &= (2t-1)B_n + \frac{1-t}{2}C_n \end{aligned}$$

olmak üzere $\widetilde{D}^t : u^2 - 8v^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi $\psi(\widetilde{D}^t) = \{(u_{2n+1}, v_{2n+1}), (u_{2n}, v_{2n})\}$ dir (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

$\widetilde{D}^t$ Pell denkleminin tüm tamsayı çözümlerini belirledikten sonra D^t Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri ele alınabilir. $x = v - \frac{t+1}{2}$ ve $y = u$ olduğundan $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= (2t-1)B_n + \frac{t-1}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ y_{2n+1} &= (2t-1)C_n + 4(t-1)B_n \end{aligned}$$

ve $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} x_{2n} &= (2t-1)B_n + \frac{1-t}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ y_{2n} &= (2t-1)C_n + 4(1-t)B_n \end{aligned}$$

olmak üzere $(x_{2n+1}, \pm y_{2n+1})$ ve $(x_{2n}, \pm y_{2n})$, D^t Diophantine denkleminin tamsayı çözümleridir. Diğer yandan **(2)** ve **(6)** dan sırasıyla

$$X_{2n} = (1-2t)B_n + \frac{t-1}{2}C_n - \frac{t+1}{2}, \quad n \geq 1$$

$$X_{2n+1} = (1-2t)B_n + \frac{1-t}{2}C_n - \frac{t+1}{2}, \quad n \geq 0$$

elde edilir. $Y_{2n} = y_{2n}$ ve $Y_{2n+1} = y_{2n+1}$ olmak üzere $(X_{2n+1}, \pm Y_{2n+1})$ ve $(X_{2n}, \pm Y_{2n})$ de bu denklemin tamsayı çözümleridir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

2.3.6 Teorem. $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= (2t-1)B_n + \frac{t-1}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ y_{2n+1} &= (2t-1)C_n + 4(t-1)B_n \\ X_{2n+1} &= (1-2t)B_n + \frac{1-t}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ Y_{2n+1} &= y_{2n+1} \end{aligned}$$

ve $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} x_{2n} &= (2t-1)B_n + \frac{1-t}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ y_{2n} &= (2t-1)C_n + 4(1-t)B_n \\ X_{2n} &= (1-2t)B_n + \frac{t-1}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ Y_{2n} &= y_{2n} \end{aligned}$$

olmak üzere D^t Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi,

$$\psi(D^t) = \{(x_{2n}, \pm y_{2n}),\ (x_{2n+1}, \pm y_{2n+1}),\ (X_{2n}, \pm Y_{2n}),\ (X_{2n+1}, \pm Y_{2n+1})\}$$

dir (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

2.3.7 Örnek. $t = 3$ için $2t^2 - 1 = 17$ asal olup

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &\in \{-1, 6, 45, 272, 1595, \cdots\} \\ y_{2n+1} &\in \{5, 23, 133, 775, 4517, \cdots\} \\ x_{2n} &\in \{0, 11, 74, 441, 2580, \cdots\} \\ y_{2n} &\in \{7, 37, 215, 1253, 7303, \cdots\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_{2n+1} &\in \{-3, -10, -49, -276, -1595, \cdots\} \\ X_{2n} &\in \{-4, -15, -78, -445, -2584, \cdots\} \end{aligned}$$

olduğundan $D^3: 8x^2 - y^2 + 32x + 49 = 0$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\psi(D^3)=\left\{\begin{matrix}\cdots,(-2584,\pm 7303),(-1599,\pm 4517),(-445,\pm 1253),(-276,\pm 775),\\(-78,\pm 215),(-49,\pm 133),(-15,\pm 37),(-10,\pm 23),(-4,\pm 7),\\(-3,\pm 5),(-1,\pm 5),(0,\pm 7),(6,\pm 23),(11,\pm 37),(45,\pm 133),\\(74,\pm 215),(272,\pm 775),(441,\pm 1253),(1595,\pm 4517),(2580,\pm 7303),\cdots\end{matrix}\right\}$$

dir.

D^t Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümlerini belirledikten sonra 2.3.6 Teoremi kullanılarak $t-$balans sayılarının genel terimleri elde edilebilir. $x=B_n^t$ olduğundan $n\geq 1$ için

$$B_{2n-1}^t=(2t-1)B_n+\frac{t-1}{2}C_n-\frac{t+1}{2}=(B_n+b_{n+1})t-(b_{n+1}+1)$$

olarak elde edilir. Buna göre

$$C_{2n-1}^t=\sqrt{8(B_{2n-1}^t)^2+8B_{2n-1}^t(1+t)+(2t+1)^2}=(4b_{n+1}+2)t-c_{n+1}$$

olur. Dolayısıyla

$$b_{2n-1}^t=\frac{-(2B_{2n-1}^t+2t+1)+C_{2n-1}^t}{2}=(B_n+b_n)t-B_n$$

olacağından

$$c_{2n-1}^t=\sqrt{8(b_{2n-1}^t)^2+8tb_{2n-1}^t+1}=4tB_n-C_n$$

elde edilir. Benzer şekilde $n\geq 2$ için

$$\begin{aligned}B_{2n-2}^t&=(B_{n-1}+b_n)t+b_n\\C_{2n-2}^t&=(4b_n+2)t+c_n\\b_{2n-2}^t&=(B_{n-1}+b_{n-1})t+B_{n-1}\\c_{2n-2}^t&=4tB_{n-1}+C_{n-1}\end{aligned}$$

olduğu da gösterilebilir. O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

2.3.8 Teorem. $t-$balans sayılarının genel terimleri $n\geq 1$ için

$$\begin{aligned}B_{2n-1}^t&=(B_n+b_{n+1})t-(b_{n+1}+1)\\b_{2n-1}^t&=(B_n+b_n)t-B_n\\C_{2n-1}^t&=(4b_{n+1}+2)t-c_{n+1}\\c_{2n-1}^t&=4tB_n-C_n\end{aligned}$$

ve $n\geq 2$ için

$$B_{2n-2}^{t}=(B_{n-1}+b_n)t+b_n$$
$$b_{2n-2}^{t}=(B_{n-1}+b_{n-1})t+B_{n-1}$$
$$C_{2n-2}^{t}=(4b_n+2)t+c_n$$
$$c_{2n-2}^{t}=4tB_{n-1}+C_{n-1}$$

şeklindedir (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL DİZİLERİ

Tezin bu bölümünde, Pell sayılarının ilk $2n+1$ teriminin toplamlarına bağlı olarak farklı iki tamsayı dizisi tanımlanacak ve bu diziler ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar verilecektir. Daha sonra bu dizilerin Pell, Pell-Lucas ve balans sayıları ile olan ilişkisi üzerinde durulacaktır.

3.1 Genelleştirilmiş Pell Dizileri

Santana ve Diaz Barrero (2006) Pell sayılarının toplamlarını ele almışlar ve ilk $4n+1$ Pell sayısının toplamının tam kare, yani

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} 2^i \right)^2$$

olduğunu göstermişlerdir. Ancak, aşağıdaki teoremde de görüleceği üzere ilk $2n+1$ Pell sayısının toplamı, n nin çift olması durumunda bir tam kare iken, n nin tek olması durumunda bir tam karenin yarısıdır.

3.1.1 Teorem. İlk $2n+1$ Pell sayılarının toplamı

$$\sum_{i=1}^{2n+1} P_i = \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2} \right)^2 & n \text{ çift ise} \\ \dfrac{\left(\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{2}} \right)^2}{2} & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

İspat. Pell sayılarının ilk n terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \frac{P_n + P_{n+1} - 1}{2}$$

dir. n çift, yani pozitif k tamsayısı için $n = 2k$ olsun. Bu takdirde yukarıdaki eşitlikten

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n+1} P_i &= \frac{P_{2n+1}+P_{2n+2}-1}{2} \\
&= \frac{\dfrac{\alpha^{4k+1}-\beta^{4k+1}}{2\sqrt{2}}+\dfrac{\alpha^{4k+2}-\beta^{4k+2}}{2\sqrt{2}}-1}{2} \\
&= \frac{\alpha^{4k}(1+2\alpha+\alpha^2)+\beta^{4k}(1+2\beta+\beta^2)-2}{4} \\
&= \left(\frac{\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. *n* nin tek olması da benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teorem dikkate alınarak X_n ve Y_n tamsayı dizileri $n \geq 0$ için

$$
X_n = \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2} \quad \text{ve} \quad Y_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{2}}
$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde bu diziler ile ilgili olarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

3.1.2 Teorem. X_n ve Y_n dizilerinin terimleri arasında $n \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
X_{2n} &= 6X_{2n-2} - X_{2n-4} \qquad & X_{2n+1} &= 6X_{2n-1} - X_{2n-3} \\
Y_{2n} &= 6Y_{2n-2} - Y_{2n-4} \qquad & Y_{2n+1} &= 6Y_{2n-1} - Y_{2n-3}
\end{aligned}
$$

şeklinde indirgeme bağıntısı vardır (Tekcan ve Tayat 2014).

İspat. X_n dizisinin genel teriminin

$$
X_n = \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}
$$

olduğu dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
X_{2n} &= \frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n-1}(6-\alpha^{-2})+\beta^{2n-1}(6-\beta^{-2})}{2} \\
&= \frac{6(\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1})}{2} - \frac{\alpha^{2n-3}+\beta^{2n-3}}{2} \\
&= 6X_{2n-2} - X_{2n-4}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer durum da benzer şekilde gösterilebilir.

3.1.3 Teorem. X_n ve Y_n dizilerinin terimleri arasında aşağıdaki gibi cebirsel bağıntılar vardır:

(1) $n \geq 1$ için kuadratik bağıntılar

$$X_{2n} = \frac{2X_n X_{n-1} + Y_n Y_{n-1}}{2}, \quad Y_{2n} = X_n Y_{n-1} + X_{n-1} Y_n,$$
$$Y_{2n-1} = 2Y_{n-1} X_{n-1}, \quad Y_n = \frac{X_{n+1} + X_{n-1}}{2}$$

dır.

(2) Toplamsal bağıntılar

$$Y_{n-1} Y_{n+m-1} = X_{2n+m-1} + (-1)^{n+1} X_{m-1} \ , \ n \geq m \geq 1$$
$$X_{m-1} Y_{n-1} = \frac{Y_{n+m-1} + (-1)^m Y_{n-m-1}}{2}, \ n \geq m+1 \geq 2$$
$$Y_{2n-3} = \frac{Y_{2m-1} Y_{2n-2m-1} - Y_{2m-3} Y_{2n-2m-3}}{4}, \ n \geq m+2 \geq 4$$

dır.

(3) Çarpımsal bağıntılar

$$Y_{n-1}^2 = X_{2n-1} + (-1)^{n+1}, \ n \geq 1$$
$$Y_{2n-1}^2 - 16 = Y_{2n+1} Y_{2n-3}, \ n \geq 2$$
$$Y_{2n-2}^2 + 16 = Y_{2n} Y_{2n-4}, \ n \geq 2$$
$$\frac{Y_{2n-1}^2 + 2}{2} = X_{2n-1}^2, \ n \geq 1$$
$$\frac{Y_{2n-2}^2 - 2}{2} = X_{2n-2}^2, \ n \geq 1$$
$$\frac{Y_{2n-1}^2 - Y_{2n-3}^2}{4} = Y_{4n-3}, \ n \geq 2$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

İspat. (1) $X_n = \dfrac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}$ ve $Y_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{2}}$ olduğundan

$$\frac{2X_n X_{n-1} + Y_n Y_{n-1}}{2} = \frac{2\left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}\right)\left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{2}\right) + \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{2}}\right)}{2}$$

$$= \frac{\begin{Bmatrix} \alpha^{2n+1} + \alpha^{n+1}\beta^n + \beta^{n+1}\alpha^n + \beta^{2n+1} \\ + \alpha^{2n+1} - \alpha^{n+1}\beta^n - \beta^{n+1}\alpha^n + \beta^{2n+1} \end{Bmatrix}}{4} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} = X_{2n}$$

elde edilir. Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilebilir.

X_n ve Y_n dizilerinin ilk $n-$terim toplamları sırasıyla

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{2(X_{n+1}+X_{n-1})+X_n+X_{n-2}-8}{4} \text{ ve } \sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{3Y_n+Y_{n-1}-6}{2}$$

olup yukarıdaki teoreme benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.1.4 Teorem. X_n ve Y_n dizileri için

$$\sum_{i=1}^{2n} X_{2i} = X_n Y_n Y_{2n-1} \qquad \sum_{i=1}^{2n} Y_{2i} = X_{2n+1} Y_{2n-1}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} X_{2i+1} = X_{2n} X_{2n+1} \qquad \sum_{i=0}^{2n} Y_{2i+1} = X_{2n} Y_{2n+1}$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

İspat. $X_n = \dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}$ ve $Y_n = \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{2}}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} X_{2i} &= X_2 + X_4 + \cdots + X_{4n} \\
&= \frac{\alpha^3+\beta^3}{2} + \frac{\alpha^5+\beta^5}{2} + \cdots + \frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2})(\alpha^{2n}-\beta^{2n}) \\
&= \left(\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= X_n Y_n Y_{2n-1}
\end{aligned}$$

dir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

3.1.5 Teorem. X_n ve Y_n dizileri için

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \frac{Y_{2n+2}-10}{4}$$

dür (Tekcan ve Tayat 2014).

İspat. Yukarıdaki teoreme benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i &= X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}[\alpha^4 + \alpha^6 + \cdots + \alpha^{2n+2} - (\beta^4 + \beta^6 + \cdots + \beta^{2n+2})]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha^3(\alpha^{2n}-1)}{2} - \frac{\beta^3(\beta^{2n}-1)}{2}\right]$$
$$= \frac{\alpha^{2n+3}-\beta^{2n+3}}{4\sqrt{2}} - \frac{5}{2}$$
$$= \frac{\frac{\alpha^{2n+3}-\beta^{2n+3}}{\sqrt{2}} - 10}{4}$$
$$= \frac{Y_{2n+2}-10}{4}$$

elde edilir.

3.2 Tam Kareler ve Toplamlar

Bir önceki kısımda, “ B_n bir balans sayısı $\Leftrightarrow \sqrt{8B_n^2+1}$ bir tamsayı” ve “b_n bir cobalans sayısı $\Leftrightarrow \sqrt{8b_n^2+8b_n+1}$ bir tamsayı” olduğu görülmüştü. Esasında

$$\sqrt{8B_n^2+1} = C_n \quad \text{ve} \quad \sqrt{8b_n^2+8b_n+1} = c_n$$

idi. Benzer şekilde X_n ve Y_n tamsayı dizileri için aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.1 Teorem. X_n ve Y_n dizileri için

(1) $\frac{X_{4n+1}-1}{2}$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{X_{4n+1}-1}{2}} = X_{2n}$ dir.

(2) $\frac{Y_n^2+Y_{n-1}Y_{n+1}}{4}$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{Y_n^2+Y_{n-1}Y_{n+1}}{4}} = X_n$ dir.

(3) $\frac{Y_{2n-1}^2}{2}+1$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{Y_{2n-1}^2}{2}+1} = X_{2n-1}$ dir.

(4) $\frac{Y_{2n-2}^2}{2}-1$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{Y_{2n-2}^2}{2}-1} = X_{2n-2}$ dir.

(5) $\frac{Y_{n-1}^2}{4}+Y_{2n-2}+2(-1)^n$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{Y_{n-1}^2}{4}+Y_{2n-2}+2(-1)^n} = \frac{Y_{n-1}}{2}+Y_{n-2}$ dir

(Tekcan ve Tayat 2014).

İspat. (1) $X_n=\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{X_{4n+1}-1}{2}}&=\sqrt{\frac{\frac{\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2}}{2}-1}{2}}\\&=\sqrt{\frac{\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2}+2(\alpha\beta)^{2n+1}}{4}}\\&=\sqrt{\left(\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}\right)^2}\\&=X_{2n}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıda ilk $4n+1$ Pell sayısının toplamının

$$\sum_{i=1}^{4n+1}P_i=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{2i}2^i\right)^2$$

şeklinde olduğu belirtilmişti. Aşağıdaki teoremde de görüleceği üzere, parantez içindeki ifade, X_n ve Y_n tamsayı dizilerine bağlı olarak verilebilir.

3.2.2 Teorem. İlk $4n+1$ Pell sayılarının toplamı

$$\sum_{i=1}^{4n+1}P_i=(2X_n^2-2X_nY_{n-1}+(-1)^{n+1})^2$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

İspat. 3.1.4 Teoremine benzer şekilde gösterilebilir.

Benzer şekilde aşağıdaki teoremler de verilebilir. İspatları 3.1.4 Teoremine benzer şekilde yapılabilir.

3.2.3 Teorem. (1) Pell sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n}P_{2i-1}=\frac{Y_{2n-1}}{4}\qquad\qquad\sum_{i=1}^{n}P_{2i}=\frac{Y_{2n}-2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{4n-1}P_i=X_{2n-1}^2-1\qquad\qquad\sum_{i=0}^{2n}(P_{2i+1}+P_{2i+2})=X_{2n}X_{2n+1}$$

dir.

(2) Pell-Lucas sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{2i-1} = \frac{5Y_{2n-1} + 2Y_{2n-2} - Y_{2n-3} - 8}{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{2i} = \frac{2Y_{2n-2} + 77Y_{2n-3} - 13Y_{2n-5} - 8}{8}$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} Q_i = X_{2n-1} + X_{2n-2}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_i = Y_{2n} - 2$$

$$\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i} = Y_{2n} Y_{2n-1}$$

dir.

(3) Balans sayıları için

$$\sum_{i=1}^{2n+1} B_i = \frac{X_{2n} Y_{2n+1}}{4} \qquad \sum_{i=1}^{2n} B_{2i} = \frac{X_{2n} X_{2n-1} Y_{2n} Y_{2n-1}}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} (B_i + B_{i+1}) = \frac{Y_{2n-1} Y_{2n+1}}{2} \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} (B_i + B_{i+1}) = X_{2n} X_{2n+2}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} (B_{2i+1} + B_{2i+2}) = \frac{X_{2n} X_{4n+2} Y_{2n}}{2}$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

Nasıl ki ilk $4n+1$ Pell sayısının toplamı bir tam kare ise, aşağıda da görüleceği üzere bazı Pell-Lucas ve balans sayılarının toplamları da birer tam karedir.

3.2.4 Teorem. Q_n Pell-Lucas ve B_n balans sayıları olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1} = Y_{2n-1}^2, \qquad \frac{\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}}{2} = X_{2n}^2 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=0}^{2n} B_{2i+1} = \left(\frac{X_{2n} Y_{2n}}{2}\right)^2$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

3.2.5 Teorem. X_n ve Y_n tamsayı dizileri için

$$\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i = \frac{Y_{2n} - 2}{4} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} B_i C_i = \frac{X_n X_{n-1} Y_n Y_{n-1}}{8}$$

dir. (Tekcan ve Tayat 2014).

Pell, Pell-Lucas, balans ve Lucas—balans sayılarının bazı toplamlarının oranları da X_n ve Y_n tamsayı dizilerine bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

3.2.6 Teorem. X_n ve Y_n tamsayı dizileri için

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} c_{2i+2}}{\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1}} = X_{4n+2} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{2n} c_{2i}}{\sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1}} = X_{4n} \quad \text{ve} \quad \frac{\sum_{i=0}^{2n} B_{2i+1}}{\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}} = \frac{Y_{2n}^2}{8}$$

dir. (Tekcan ve Tayat 2014).

Yukarıda Pell-Lucas ve balans sayılarının toplamları X_n ve Y_n dizilerine bağlı olarak ifade edilebilmişti. Tersine X_n ve Y_n tamsayı dizilerinin terimlerinin bazı toplamları da, Pell, Pell-Lucas ve balans sayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

3.2.7 Teorem. X_n ve Y_n dizileri için

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2n} X_{2i} = 8X_n P_{n+1} B_n & &\sum_{i=1}^{2n} Y_{2i} = 2P_{2n} C_{n+1} \\
&\sum_{i=0}^{2n} X_{2i+1} = c_{n+1} C_{n+1} & &\sum_{i=0}^{2n} Y_{2i+1} = 2c_{n+1} P_{2n+2} \\
&\sum_{i=1}^{2n} X_{2i-1} = 4B_n P_{2n+1} & &\sum_{i=1}^{2n} Y_{2i-1} = 2c_{n+1} P_{2n} \\
&\sum_{i=1}^{2n} X_{4i} = B_{2n} c_{2n+2} & &\sum_{i=1}^{2n} Y_{4i} = 4B_n C_n P_{4n+3} \\
&\sum_{i=0}^{2n} X_{4i+2} = c_{n+1} P_{2n+1} X_{4n+2} & &\sum_{i=0}^{2n} Y_{4i+2} = 2c_{n+1} P_{2n+1} P_{4n+3} \\
&\sum_{i=1}^{2n} X_{4i-2} = c_{2n+1} P_{2n} X_{2n-1} & &\sum_{i=1}^{2n} Y_{4i-2} = 4B_n C_n P_{4n+1}
\end{aligned}$$

dir. (Tekcan ve Tayat 2014).

Pell ve balans sayılarının katsayılar matrisleri sırasıyla

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } N = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup bu matrislerin X_n ve Y_n dizileri ile olan ilişkisi aşağıdaki gibidir.

3.2.8 Teorem. $n \geq 2$ olmak üzere yukarıdaki M ve N matrisleri için

$$M^n N = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2X_{n-1} + Y_{n+2} & -Y_n \\ 2X_{n-2} + Y_{n+1} & -Y_{n-1} \end{bmatrix} \text{ ve } N^n M = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2Y_{2n+1} - Y_{2n-1} & Y_{2n+1} \\ 2Y_{2n-1} - Y_{2n-3} & Y_{2n-1} \end{bmatrix}$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

3.3 Tamsayı Dizileri ve Kuadratik Formlar

Bu kısımda tamsayı dizilerine bağlı olarak kuadratik formlar tanımlanacak ve bu formların Heisenberg matrisleri ile ilgili bağıntıları verilecektir.

Bir önceki kısımlarda ele alınan P_n, Q_n, X_n ve B_n, b_n, C_n dizileri için kuadratik formlar

$$F_n = (P_n X_{n-1} + 1, P_{2n} + 1, \frac{P_n Q_n}{2}) \text{ ve } G_n = (\frac{C_n + 1}{2} - b_n, b_{n+1} - b_n + 1, B_n)$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.1 Teorem. F_n formu evrenseldir (Tekcan ve Tayat 2014).

İspat. m herhangi bir tamsayı olmak üzere $F_n(x, y) = m$ denkleminin bir tamsayı çözümü $(x, y) = (\frac{P_n Q_n}{2} - m, m - P_n X_{n-1} - 1)$ dir. Gerçekten de

$$P_n X_{n-1} + \frac{P_n Q_n}{2} = P_{2n} \text{ ve } (P_{2n} + 1)^2 - 2P_n Q_n (P_n X_{n-1} + 1) = 1$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&(P_n X_{n-1} + 1)(\frac{P_n Q_n}{2} - m)^2 + (P_{2n} + 1)(\frac{P_n Q_n}{2} - m)(m - P_n X_{n-1} - 1) + \frac{P_n Q_n}{2}(m - P_n X_{n-1} - 1)^2 \\
&= (P_n X_{n-1} + 1)(\frac{P_n Q_n}{2})^2 - m(P_n X_{n-1} + 1) P_n Q_n + m^2 (P_n X_{n-1} + 1) \\
&\quad + m(P_{2n} + 1)(\frac{P_n Q_n}{2}) - (P_{2n} + 1)(\frac{P_n Q_n}{2})(P_n X_{n-1} + 1) - m^2 (P_{2n} + 1) \\
&\quad + m(P_{2n} + 1)(P_n X_{n-1} + 1) + m^2 \frac{P_n Q_n}{2} - m P_n Q_n (P_n X_{n-1} + 1) + \frac{P_n Q_n}{2}(P_n X_{n-1} + 1)^2 \\
&= m(P_{2n} + 1)(\frac{P_n Q_n}{2} + P_n X_{n-1} + 1) - 2m(P_n X_{n-1} + 1) P_n Q_n
\end{aligned}$$

$$+(P_n X_{n-1}+1)\frac{P_nQ_n}{2}(P_n X_{n-1}+1+\frac{P_nQ_n}{2})-(P_{2n}+1)\frac{P_nQ_n}{2}(P_n X_{n-1}+1)$$
$$+m^2(P_n X_{n-1}+\frac{P_nQ_n}{2}-P_{2n})$$
$$=m[(P_{2n}+1)^2-2P_nQ_n(P_n X_{n-1}+1)]$$
$$=m$$

elde edilir, yani F_n evrenseldir.

$P_n X_{n-1}+1+\frac{P_nQ_n}{2}=P_{2n}$ olduğundan F_n evrensel formu lineer iki formun çarpımı olarak

$$F_n(x,y)=((P_n X_{n-1}+1)x+\frac{P_nQ_n}{2}y)(x+y)$$

şeklinde yazılabilir. $0\neq m=k\cdot l$ tamsayısı için

$$(P_n X_{n-1}+1)x+\frac{P_nQ_n}{2}y=\pm k$$
$$x+y=\pm l$$

veya

$$(P_n X_{n-1}+1)x+\frac{P_nQ_n}{2}y=\pm l$$
$$x+y=\pm k$$

dır. $P_n X_{n-1}=\frac{P_nQ_n}{2}$ olduğundan ilk denklemin çözümü

$$(x,y)=(\pm k\mp\frac{P_nQ_n}{2}l,\pm l\mp k\pm\frac{P_nQ_n}{2}l)$$

ve ikinci denklemin çözümü

$$(x,y)=(\pm l\mp\frac{P_nQ_n}{2}k,\pm k\mp l\pm\frac{P_nQ_n}{2}k)$$

dır, yani verilen herhangi bir m tamsayısı için $F_n(x,y)=m$ denkleminin daima çözümü vardır. Üstelik

$$m=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_s^{r_s}$$

olmak üzere bu çözümlerin sayısı

$$2(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_s+1)$$

dir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.2 Teorem. $m=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_s^{r_s}$ ve $r(m;F_n)=2(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_s+1)$ olmak üzere F_n formuna karşılık gelen teta serisi

$$\wp(\tau;F_n)=1+\sum_{m=1}^{\infty}r(m;F_n)z^m$$

şeklindedir (Tekcan ve Tayat 2014).

Yukarıda $F_n(x,y)=m$ denkleminin tamsayı çözümleri dikkate alınmıştı. p asal olmak üzere $m=p$ olarak alınırsa tüm tamsayı çözümleri p ye bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

3.3.3 Teorem. $F_n(x,y)=p$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\left\{(\pm p\mp\frac{P_nQ_n}{2},\pm1\mp p\pm\frac{P_nQ_n}{2}),\ (\pm1\mp p\frac{P_nQ_n}{2},\pm p\mp1\pm p\frac{P_nQ_n}{2})\right\}$$

dir. (Tekcan ve Tayat 2014).

3.3.4 Teorem. G_n formu evrenseldir.

İspat. m herhangi bir tamsayı olmak üzere $G_n(x,y)=m$ denkleminin bir çözümü

$$(x,y)=(B_n-m,m-\frac{C_n+1}{2}+b_n)$$

dir. Dolayısıyla G_n evrenseldir.

F_n formunda olduğu gibi, G_n formu da lineer iki formun çarpımı olarak

$$G_n(x,y)=((B_n+1)x+B_ny)(x+y)$$

şeklinde yazılabilirdir (Burada $B_n+1=\frac{C_n+1}{2}-b_n$ ve $2B_n=b_{n+1}-b_n$ dir). Dolayısıyla verilen herhangi bir $0\neq m=k\cdot l$ tamsayısı için

$$\begin{aligned}(B_n+1)x+B_ny&=\pm k\\ x+y&=\pm l\end{aligned}$$

denkleminin çözümü $(x,y)=(\pm k\mp lB_n,\ \pm l\mp k\pm lB_n)$ ve

$$(B_n+1)x+B_n y=\pm l$$
$$x+y=\pm k$$

denkleminin çözümü $(x,y)=(\pm l\mp kB_n,\ \pm k\mp l\pm kB_n)$ dir. Şu halde $G_n(x,y)=m$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin sayısı, m nin tüm bölenleri kadardır. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.5 Teorem. $m=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_s^{r_s}$ ve $r(m;G_n)=2(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_s+1)$ olmak üzere G_n formuna karşılık gelen teta serisi

$$\wp(\tau;G_n)=1+\sum_{m=1}^{\infty}r(m;G_n)z^m$$

şeklindedir (Tekcan ve Tayat 2014).

3.3.3 Teoremine benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.6 Teorem. $G_n(x,y)=p$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\{(\pm p\mp B_n,\ \pm 1\mp p\pm B_n),\ (\pm 1\mp pB_n,\ \pm p\mp 1\pm pB_n)\}$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

3.3.2 ve 3.3.5 Teoremlerinden aşağıdaki sonuç verilebilir.

3.3.7 Sonuç. F_n ve G_n formlarına karşılık gelen teta serileri aynı, yani

$$\wp(\tau;F_n)=\wp(\tau;G_n)$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

a,b,c tamsayılar olmak üzere $h=\begin{bmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ şeklindeki 3×3 lük matrislerin kümesi, matrislerde çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba Heisenberg grubu denir ve H ile gösterilir. Buna göre, F_n ve G_n formlarına karşılık gelen Heisenberg grupları sırasıyla

$$H(F_n)=\left\{ f_n=\begin{bmatrix} 1 & P_nX_{n-1}+1 & \frac{P_nQ_n}{2} \\ 0 & 1 & P_{2n}+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : n\geq 1 \right\}$$

ve

$$H(G_n)=\left\{ g_n=\begin{bmatrix} 1 & \frac{C_n+1}{2}-b_n & B_n \\ 0 & 1 & b_{n+1}-b_n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \ n\geq 1 \right\}$$

dir. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.8 Teorem. $n\geq 1$ tamsayısı için

$$f_n^n=\begin{bmatrix} 1 & (P_nX_{n-1}+1)n & \frac{nP_nQ_n+n(n-1)(P_nX_{n-1}+1)(P_{2n}+1)}{2} \\ 0 & 1 & n(P_{2n}+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$g_n^n=\begin{bmatrix} 1 & (\frac{C_n+1}{2}-b_n)n & nB_n+\frac{n(n-1)(\frac{C_n+1}{2}-b_n)(b_{n+1}-b_n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n(b_{n+1}-b_n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. (Tekcan ve Tayat 2014).

İspat. Tümevarımla gösterilebilir.

4. BALANS FONKSİYONLARI

Bu bölümde genel olarak balans, cobalans, Lucas-balans, Lucas-cobalans, Pell, Pell-Lucas ve üçgensel sayılara bağlı olarak elde edilen fonksiyonlar ele alınacaktır.

Behera ve Panda (1999), verilen herhangi bir *x* balans sayısı için

$$F(x) = 2x\sqrt{8x^2+1},\ G(x) = 3x + \sqrt{8x^2+1}, H(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2+1} \quad \text{ve}$$

$$K(x) = 6x\sqrt{8x^2+1} + 16x^2 + 1$$

fonksiyonlarını tanımlamışlar ve aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

4.1 Teorem. *x* herhangi bir balans sayısı olmak üzere $F(x), G(x), H(x)$ ve $K(x)$ değerleri de birer balans sayısıdır (Behera ve Panda 1999).

Her *x* balans sayısı için $F(x)$ daima çifttir. Ancak *x* tek balans sayısı ise $G(x)$ çift ve *x* çift balans sayısı ise $G(x)$ tektir.

Benzer şekilde Behera ve Panda (1999), verilen herhangi *x*, *y* ve *z* balans sayıları için

$$f(x,y) = x\sqrt{8y^2+1} + y\sqrt{8x^2+1}$$

ve

$$f(x,y,z) = x\sqrt{8y^2+1}\sqrt{8z^2+1} + y\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8z^2+1} + z\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+1} + 8xyz$$

fonksiyonlarını tanımlayarak aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

4.2 Teorem. *x*, *y* ve *z* herhangi üç balans sayısı olmak üzere $f(x,y)$ ve $f(x,y,z)$ değerleri de birer balans sayısıdır (Behera ve Panda 1999).

Daha sonra Ray (2009) da benzer problemi cobalans sayıları için ele almış ve herhangi iki *x* ve *y* cobalans sayıları için

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2+8x+1} + 1$$
$$\widetilde{f}(x) = 3x - \sqrt{8x^2+8x+1} + 1$$

$$g(x)=17x+6\sqrt{8x^2+8x+1}+8$$
$$h(x)=8x^2+8x+1+(2x+1)\sqrt{8x^2+8x+1}$$
$$t(x,y)=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}2(2x+1)(2y+1)+(2x+1)\sqrt{8y^2+8y+1}\\ +(2y+1)\sqrt{8x^2+8x+1}+\sqrt{8x^2+8x+1}\sqrt{8y^2+8y+1}-1\end{array}\right]$$

fonksiyonlarını tanımlayarak aşağıdaki teoremi vermiştir.

4.3 Teorem. x ve y herhangi iki cobalans sayı olmak üzere $f(x), g(x), h(x)$ ve $t(x,y)$ değerleri de birer cobalans sayısıdır. Üstelik x den sonra gelen cobalans sayısı $f(x)$ iken x den önceki cobalans sayısı $\widetilde{f}(x)$ değeridir (Ray 2009).

Behera ve Panda (1999), tanımladıkları $F(x), G(x), H(x), K(x),\ f(x,y),\ f(x,y,z)$ fonksiyonlarının mertebelerini, yani kaçıncı balans sayısı olduğunu ve benzer şekilde Ray (2009) da tanımladığı $f(x), g(x),\ h(x)$ ve $t(x,y)$ fonksiyonlarının mertebelerini, yani kaçıncı cobalans sayısı olduklarını belirtmemişlerdir. Tekcan, Tayat ve Olajas (2015) ise bu problemi ele almışlar ve bu fonksiyonların mertebelerini belirleyebilmişlerdir. Ancak bunun için ilk olarak aşağıdaki teoreme ihtiyaç duymuşlardır.

4.4 Teorem. Herhangi $n,k,l \geq 0$ tamsayıları için

$$B_{n+k+l}=B_kC_lC_n+C_kB_lC_n+C_kC_lB_n+8B_kB_lB_n$$

dir (Tekcan, Tayat ve Olajas 2015).

İspat. Balans sayılarının Binet formülleri kullanılarak eşitliğin doğruluğu gösterilebilir.

4.5 Teorem. $F(x),\ G(x), H(x), K(x),\ f(x,y),\ f(x,y,z)$ balans fonksiyonları için

$$F(B_n)=B_{2n},\ G(B_n)=B_{n+1},\ \ H(B_n)=B_{n+2},$$
$$K(B_n)=B_{2n+1},\ f(B_n,B_k)=B_{n+k},\ f(B_n,B_k,B_l)=B_{n+k+l}$$

ve $f(x),\ g(x), h(x), t(x,y)$ cobalans fonksiyonları için

$$f(b_n)=b_{n+1}, g(b_n)=b_{n+2},\ h(b_n)=b_{2n},\ f(b_n,b_k)=b_{n+k}$$

dır (Tekcan, Tayat ve Olajas 2015).

İspat. Balans ve Lucas-balans sayılarının Binet formülleri kullanılırsa ve $\sqrt{1+8B_n^2}=C_n$ olduğu dikkate alınırsa

$$F(B_n)=2(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}})(\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2})=\frac{\alpha^{4n}-\beta^{4n}}{4\sqrt{2}}=B_{2n}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde 4.4 Teoreminde $k=1$ ve $l=0$ olarak alınırsa

$$B_{n+1}=3B_n+C_n=3B_n+\sqrt{8B_n^2+1}=G(B_n),$$

$k=2$ ve $l=0$ olarak alınırsa

$$B_{n+2}=17B_n+6C_n=17B_n+6\sqrt{8B_n^2+1}=H(B_n),$$

$k=1$ ve $l=n$ olarak alınırsa

$$B_{2n+1}=6B_nC_n+16B_n^2+1=6B_n\sqrt{8B_n^2+1}+16B_n^2+1=K(B_n),$$

ve $l=0$ olarak alınırsa

$$B_{n+k}=B_nC_k+B_kC_n=B_n\sqrt{8B_k^2+1}+B_k\sqrt{8B_n^2+1}=f(B_n,B_k)$$

elde edilir. Son ifade ise

$$B_{n+k+l}=B_kC_lC_n+C_kB_lC_n+C_kC_lB_n+8B_kB_lB_n$$

eşitliğinden kolayca elde edilir. Çünkü

$$\begin{aligned}B_{n+k+l}&=B_kC_lC_n+C_kB_lC_n+C_kC_lB_n+8B_kB_lB_n\\&=B_n\sqrt{8B_k^2+1}\sqrt{8B_l^2+1}+B_k\sqrt{8B_n^2+1}\sqrt{8B_l^2+1}+B_l\sqrt{8B_n^2+1}\sqrt{8B_k^2+1}+8B_nB_kB_l\\&=f(B_n,B_k,B_l)\end{aligned}$$

dir. Cobalans fonksiyonları için de benzer şekilde gösterilebilir.

$k\geq 1$ tamsayısı için B_k ve C_k sırasıyla *k*. balans ve *k*. Lucas-balans sayıları olmak üzere Tekcan, Tayat ve Olajas (2015), 4.5 Teoreminde ele alınan balans fonksiyonları dışında verilen herhangi bir *x* balans sayısı için

$$B_k(x)=C_kx+B_k\sqrt{8x^2+1}$$

fonksiyonunu tanımlamışlar ve $k=1$ için

$$B_1(x)=3x+\sqrt{8x^2+1}=G(x)$$

ve benzer şekilde $k=2$ için

$$B_2(x)=17x+6\sqrt{8x^2+1}=H(x)$$

olduğunu göstermişlerdir. Üstelik

$$k=3 \text{ için } B_3(x)=99x+35\sqrt{8x^2+1}$$
$$k=4 \text{ için } B_4(x)=577x+204\sqrt{8x^2+1}$$
$$k=5 \text{ için } B_5(x)=3363x+1189\sqrt{8x^2+1}$$
$$\dots$$

fonksiyonlarının da birer balans fonksiyonları olduğunu, dolayısıyla $k \geq 1$ tamsayısı için $B_k(x)$ balans fonksiyonlarının sayısının sonsuz olduğunu, hatta x in n. balans sayısı olması durumunda $B_k(x)$ fonksiyonunun değerinin $(n+k)$. balans sayısı, yani

$$B_k(B_n)=B_{n+k}$$

olduğunu göstermişlerdir.

Benzer şekilde B_k, b_k ve C_k sırasıyla k. balans, k. cobalans ve k. Lucas-balans sayıları olmak üzere verilen herhangi bir x cobalans sayısı için

$$b_k^*(x)=C_k x+B_k(\sqrt{8x^2+8x+1}+1)+b_k$$

fonksiyonunu tanımlamışlar ve yine $k=1$ için

$$b_1^*(x)=3x+\sqrt{8x^2+8x+1}+1=f(x)$$

ve $k=2$ için

$$b_2^*(x)=17x+6\sqrt{8x^2+8x+1}+8=g(x)$$

olduğunu göstermişlerdir. Benzer şekilde

$$k=3 \text{ için } b_3^*(x)=99x+35\sqrt{8x^2+8x+1}+49$$
$$k=4 \text{ için } b_4^*(x)=577x+204\sqrt{8x^2+8x+1}+288$$
$$k=5 \text{ için } b_5^*(x)=3363x+1189\sqrt{8x^2+8x+1}+1681$$
$$\dots$$

fonksiyonlarının da birer cobalans fonksiyonları olduğunu, dolayısıyla $k \geq 1$ tamsayısı için $b_k^*(x)$ cobalans fonksiyonlarının sayısının sonsuz olduğunu, hatta x in n. cobalans sayısı olması durumunda $b_k^*(x)$ fonksiyonunun değerinin $(n+k)$. cobalans sayısı, yani

$$b_k^*(b_n)=b_{n+k}$$

olduğunu göstermişlerdir.

Tekcan, Tayat ve Olajas (2015), yukarıdaki $B_k(x)$ ve $b_k^*(x)$ fonksiyonlarının dışında da aşağıdaki fonksiyonları elde etmişlerdir.

4.6 Teorem. **(1)** *x*, *n*. balans ve *y* de *n*. cobalans sayısı olmak üzere

$$B_1(x,y)=\frac{-8xy+\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+8y+1}+1}{4}$$

fonksiyonunun değeri *n*. balans sayısı ve

$$B_2(x,y)=x+2y+\sqrt{8x^2+1}+\sqrt{8y^2+8y+1}+1$$

fonksiyonunun değeri de $(n+1)$. balans sayısıdır.

(2) $k\geq 0$ tamsayısı için B_k, b_k, C_k sırasıyla *k*. balans, *k*. cobalans ve *k*. Lucas-balans sayıları olmak üzere verilen herhangi bir *x* balans sayısı için

$$B_k^1(x)=B_k x\sqrt{8x^2+1}+C_k x^2+1+2b_{2n+k}-\sum_{i=0}^{n-2} B_{2i+k+1}$$

fonksiyonunun değeri de bir balans sayısıdır. Eğer *x*, *n*. balans sayısı ise $B_k^1(x)$ fonksiyonunun değeri $(2n+k)$. balans sayısıdır. *k* tek ise $B_k^1(x)$ tek balans sayısı, *k* çift ise $B_k^1(x)$ çift balans sayısıdır.

(3) *x*, *n*. balans, *y*, *m*. cobalans ve *z* de *n*. Lucas-balans sayısı olmak üzere

$$b_1(x)=\frac{2x+\sqrt{8x^2+1}-1}{2}$$

fonksiyonunun değeri $(n+1)$. cobalans sayısı ve

$$b_2(x,y,z)=\frac{2x\sqrt{8y^2+8y+1}+2y\sqrt{8x^2+1}+z-1}{2}$$

fonksiyonunun değeri de $(n+m)$. cobalans sayısıdır (Tekcan, Tayat ve Olajas 2015).

İspat. (1) Balans ve cobalans sayılarının Binet formülleri kullanır ve α,β sayıları için $\alpha\beta=-1$ ve $\alpha^{-1}+\beta^{-1}=-2$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}B_1(x,y)&=\frac{-8xy+\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+8y+1}+1}{4}\\&=\frac{-8\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}\right)\left(\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{2}\right)+1}{4}\end{aligned}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{-\alpha^{4n-1}+\alpha^{2n}\beta^{2n-1}+\beta^{2n}\alpha^{2n-1}-\beta^{4n-1}}{4}+\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{2}} \\ +\dfrac{\alpha^{4n-1}+\alpha^{2n}\beta^{2n-1}+\beta^{2n}\alpha^{2n-1}+\beta^{4n-1}}{4}+1 \end{array}\right\}}{4}$$

$$= \frac{\dfrac{(\alpha\beta)^{2n}(\alpha^{-1}+\beta^{-1})}{2}+\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{2}}+1}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

$$= B_n$$

dir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

4.6 Teoreminde olduğu gibi, aşağıdaki iki teoremde de görüleceği üzere sonsuz çoklukta Lucas-balans, Lucas-cobalans, Pell ve Pell-Lucas fonksiyonları vardır.

4.7 Teorem. B_k, C_k, c_k sırasıyla *k*. balans, *k*. Lucas-balans ve *k*. Lucas-cobalans sayıları olmak üzere aynı *n* mertebeli *x* balans ve *y* cobalans sayıları için

(1) $k \geq 2$ için

$$C_k(x,y) = C_{k-1}\sqrt{8x^2+1} + c_{k-1}\sqrt{8y^2+8y+1} + c_{n+k-1}$$

fonksiyonunun değeri $(n+k-1)$. Lucas-balans sayısıdır.

(2) $n \geq k-1 \geq 1$ için

$$c_k(x,y) = C_{k-1}\sqrt{8y^2+8y+1} + c_{k-1}\sqrt{8x^2+1} + C_{n-k+1}$$

fonksiyonunun değeri $(n+k-1)$. Lucas-cobalans sayısıdır ve $k \geq 1$ için

$$c_k(y) = 4B_k(2y+1) + C_k\sqrt{8y^2+8y+1}$$

fonksiyonunun değeri de $(n+k)$. Lucas-cobalans sayısıdır (Tekcan, Tayat ve Olajas 2015).

4.8 Teorem. $k \geq 0$ tamsayısı için $B_k, b_k, C_k, c_k, P_k, Q_k$ sırasıyla *k*. balans, *k*. cobalans, *k*. Lucas-balans, *k*. Lucas-cobalans, *k*. Pell ve *k*. Pell-Lucas sayıları olsun. Aynı *n* mertebeli *x* balans, *y* cobalans, *z* Lucas-balans ve *w* Lucas-cobalans sayıları için

(1)

$$P_k^1(x,y)=\frac{8B_k(x+y)+C_k(\sqrt{8x^2+1}+\sqrt{8y^2+8y+1})}{2}+P_{2k}$$

fonksiyonunun değeri, $(2n+2k)$. Pell sayısı,

$$P_k^2(x,y)=\frac{C_k\sqrt{8x^2+1}+c_k\sqrt{8y^2+8y+1}}{2}$$

fonksiyonunun değeri, $(2n+2k-1)$. Pell sayısı ve

$$P_1\ (x,y,z,w)=\frac{z\sqrt{8x^2+1}+w\sqrt{8y^2+8y+1}}{2}$$

fonksiyonunun değeri de $(4n-1)$. Pell sayısıdır.

(2)

$$Q_k(x)=32C_kx^2+32B_kx\sqrt{8x^2+1}+Q_{2k}$$

fonksiyonunun değeri $(4n+2k)$. Pell-Lucas sayısıdır.

(3) $G_k(x,y)=B_k\sqrt{8x^2+1}+b_k\sqrt{8y^2+8y+1}$ fonksiyonu için,

(i) $k=1$ ise $G_1\,(x,y)$ fonksiyonunun değeri, *n*. Lucas-balans sayısı, yani

$$G_1\,(x,y)=C_n$$

dir.

(ii) $k=2$ ise $G_2(x,y)$ fonksiyonunun değeri, $(2n+1)$. Pell sayısının dört katı, yani

$$G_2(x,y)=4P_{2n+1}$$

dir.

(iii) $k\geq 1$ için, $G_k(x,y)$ fonksiyonunun değeri, *n* den $(n+k-1)$ e kadar olan Lucas -balans sayılarının toplamı, yani $G_k(x,y)=\sum_{i=n}^{n+k-1}C_i$ veya

$$G_k(x,y)=\begin{cases}4\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}P_{2n+4i-3} & k\geq 2 \text{ çift}\\[2ex] P_{2n}+P_{2n-1}+4\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}P_{2n+4i+3} & k\geq 3 \text{ tek}\end{cases}$$

dir (Tekcan, Tayat ve Olajas 2015).

İspat. **(1)** Balans, Lucas-balans ve Pell sayılarının Binet formülleri kullanılırsa ve

$$C_n + c_n = 2P_{2n},\ B_n + b_n = \frac{C_n - 1}{2} \text{ ve } P_{2n} = 2B_n$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
P_k^1(x,y) &= \frac{8B_k(x+y) + C_k(\sqrt{8x^2+1} + \sqrt{8y^2+8y+1})}{2} + P_{2k} \\
&= \frac{8B_k(B_n+b_n) + C_k(C_n+c_n)}{2} + 2B_k \\
&= \frac{8B_k(\frac{C_n-1}{2}) + 2C_kP_{2n}}{2} + 2B_k \\
&= 2B_kC_n + C_kP_{2n} \\
&= 2\left(\frac{\alpha^{2k} - \beta^{2k}}{4\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2}\right) + \left(\frac{\alpha^{2k} + \beta^{2k}}{2}\right)\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\alpha^{2(k+n)} + \alpha^{2k}\beta^{2n} - \beta^{2k}\alpha^{2n} - \beta^{2(n+k)} + \alpha^{2(k+n)} - \alpha^{2k}\beta^{2n} + \beta^{2k}\alpha^{2n} - \beta^{2(n+k)}}{4\sqrt{2}} \\
&= P_{2n+2k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

$n \geq 0$ tamsayısı için $\frac{n(n+1)}{2}$ tipindeki sayılara üçgensel sayılar denir ve bu sayılar T_n ile gösterilir. O halde

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

dir. Üçgensel sayılar ile balans sayıları arasında bir ilişki vardır, öyle ki

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r)$$

eşitliğinden

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}$$

olarak elde edilir. Buna göre "*n* bir balans sayısı $\Leftrightarrow$ n^2 bir üçgensel sayı" dır. Üstelik

$$B_n^2 = T_{B_n + b_n}$$

dir. Üçgensel sayılardan bazıları tam kare olup bu sayılara kare üçgensel sayılar denir. Örneğin, 1, 36, 1225, 41626, $\cdots$ birer kare üçgensel sayılardır. Kare üçgensel sayılar S_n ile gösterilir. s_n, S_n ye karşılık gelen karekök ve t_n de S_n ye karşılık gelen üçgensel sayı olmak üzere kare üçgensel sayının genel terimi

$$S_n = s_n^2 = \frac{t_n(t_n+1)}{2}$$

dir.

1.2 Kısmında balans ve Pell sayıları arasında bir ilişkinin olduğu söylenmişti. Yukarıda ise balans sayıları ile üçgensel sayılar arasında bir ilişkinin olduğu söylendi. Dolayısıyla Pell ve üçgensel sayılar arasında da bir ilişki vardır. Öyle ki S_n, s_n ve t_n dizilerinin genel terimleri, α ve β ya bağlı olarak

$$S_n = \left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)^2,\ s_n = \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \text{ ve } t_n = \frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2}{4}$$

şeklinde verilebilir. Burada açıkça görüleceği üzere, balans sayıları ve kare üçgensel sayılar arasındaki bağıntı

$$S_n = B_n^2 \quad \text{ve} \quad s_n = B_n$$

şeklindedir.

4.9 Teorem. Verilen aynı *n*. mertebeden herhangi *x* balans ve *y* cobalans sayıları için

(1)

$$S(x,y) = \frac{4x^2+4y(y+1)+\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+8y+1}+1}{8}$$

fonksiyonunun değeri *n*. kare üçgensel sayı, yani $S(x,y)=S_n$ dir.

(2)

$$s(x,y) = \frac{6y-2\sqrt{8x^2+1}+3\sqrt{8y^2+8y+1}+3}{2}$$

fonksiyonunun değeri S_{n-1} e karşılık gelen $(n-1)$. karekök sayı, yani $s(x,y)=s_{n-1}$ dir.

(3)

$$t(x,y) = \frac{2(x-y-1)+\sqrt{8x^2+1}-\sqrt{8y^2+8y+1}}{2}$$

fonksiyonunun değeri de *n*. üçgensel sayı, yani $t(x,y)=t_n$ dir (Tekcan, Tayat ve Olajas 2015).

İspat. **(1)** $1+\alpha^{-2}+2\alpha^{-1}=1+\beta^{-2}+2\beta^{-1}=2$ ve $\alpha\beta=-1$ olduğu dikkate alınırsa

$$S(x,y)=\frac{4x^2+4y(y+1)+\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+8y+1}+1}{8}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}4\left(\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)^2+4\left(\dfrac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}\right)\left[\dfrac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}+1\right]\\ +\left(\dfrac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}\right)\left(\dfrac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{2}\right)+1\end{array}\right\}}{8}$$

$$=\frac{\alpha^{4n}-2(\alpha\beta)^{2n}+\beta^{4n}}{32}$$

$$=\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=S_n$$

dir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

KAYNAKLAR

Barbeau, E.J. 2003. Pell's Equation. Springer-Verlag Series, New York, Berlin, Heidelberg.

Behera, A., Panda, G.K., 1999. On the Square Roots of Triangular Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 37(2): 98-105.

Buchmann, J., Vollmer, U. 2007. Binary Quadratic Forms: An Algorithmic Approach. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Flath, D.E. 1989. Introduction to Number Theory. Wiley.

Jacobson, M., Williams, H. 2009. Solving the Pell Equation (CMS Books in Mathematics).Springer Science, Busines Media, LLC.

Mollin, R.A. 2008. Fundamental Number Theory with Appl. Chapman & Hall/ CRC.

Ray, P. 2009. Balancing and Cobalancing Numbers. PhD Thesis, Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.

Ribenboim, P. 2000. My Numbers, My Friends, Popular Lectures on Number Theory, Springer-Verlag, New York, Inc.

Tekcan, A., Özkoç, A. ve Özbek, M.E. 2013. *Sequences of Right and Left Neighbors of Six Type Indefinite Binary Quadratic Forms and their Proper Automorphisms*. Journal of Mathematical Sciences: Advances and App. **20** (2013), 1-19.

Tekcan, A., Tayat, M., Özbek, M.E. 2014. The Diophantine Equation $8x^2 - y^2 + 8x(1 + t) + (2t^2 + 1)^2 = 0$ and $t-$Balancing Numbers. ISRN Combinatorics Volume 2014, Article ID 897834, 5 pages.

Tekcan, A., Tayat, M. 2014. *Generalized Pell Numbers, Balancing Numbers and Binary Quadratic Forms*. Creative Mathematics and Informatics **23**(1), 115-122.

Tekcan, A., Tayat, M., Olajas, P. 2015. *Balancing, Pell and Square Triangular Functions*. Miskolc Mathematical Notes **16**(2)(2015), 1219-1231.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Merve Tayat

Doğum Yeri ve Tarihi: Akşehir, 18.01.1989

Yabancı Dil: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Akşehir Anadolu Lisesi

Lisans: Uludağ Üniversitesi

Yüksek Lisans: Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:

2013-2014 Özel Kültür Anadolu Lisesi

2014-2015 Koza Kampus Etüt Eğitim Kurumu

İletişim: mervetayat07@gmail.com

Yayınları:

[1] **Tekcan, A., Tayat, M. Özbek, M.E. 2014.** *The Diophantine Equation* $8x^2 - y^2 + 8x(1+t) + (2t+1)^2 = 0$ *and t-Balancing Numbers*. ISR Comb.. **2014** (2014), Article ID 897834, 5 sayfa.

[2] **Tekcan, A., Tayat, M. 2014.** *Generalized Pell Numbers, Balancing Numbers and Binary Quadratic Forms*. Creative Mathematics and Inf. **23**(1)(2014), 115-122.

[3] **Tekcan, A., Tayat, M., Olajas, P. 2015.** *Balancing, Pell and Square Triangular Functions*. Miskolc Mathematical Notes **16**(2)(2015), 1219-1231.