T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER FORMLAR VE UYGULAMALARI

Meryem BEKLER

Prof. Dr. Osman BİZİM

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2016

TEZ ONAYI

Meryem BEKLER tarafından hazırlanan "Modüler Formlar ve Uygulamaları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Osman BİZİM

Başkan : Prof. Dr. Osman BİZİM
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
04/10/2016

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

30/09/2016

İmza

Meryem Bekler

1. GİRİŞ

Modüler formlar teorisi, matematiğin sayılar teorisi, harmonik analiz, eliptik eğriler teorisi ve Riemann yüzeyleri teorisi gibi güçlü alanların kesişim noktasında olduğundan modüler formlar bu alanlarla doğrudan veya dolaylı olarak ilişkilidir. Dolayısıyla ilk olarak, modüler formların bu alanlarla olan ilişkileri üzerinde kısaca durmak, motivasyon için oldukça yararlı olacaktır.

Modüler formların ilk sayılar teorisi ile ilişkisini ele alalım. Verilen bir pozitif tamsayının kaç tane kare sayının toplamı olarak ifade edilebileceği sayılar teorisinin önemli bir problemi olduğu gibi bu problemin çözümü modüler formların bir uygulamasından başka bir şey değildir. Her bir $a_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_kx_k^2,$$

polinomu, $\mathbb{Z}$ halkası üzerinde k değişkenli 2 dereceli bir kuadratik formdur. Verilen bir n pozitif tamsayısı için

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_k) = n$$

eşitliğinin $\mathbb{Z}$ halkasında çözümünün olması halinde bu eşitliğin çözümlerinin sayısı $r_Q(n)$ ile gösterilirse $r_Q(n)$ sayısının belirlenmesi sayılar teorisinin önemli problemlerinden birisidir. Özel olarak yukarıdaki eşitlikte her bir $a_i = 1$ olarak alınarak elde edilen

$$Q_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = n$$

eşitliğinin çözümlerinin sayısı $r_k(n)$, hangi pozitif tamsayıların k tane kare sayının toplamı biçiminde yazılabileceğini gösterir. Lagrange, her bir pozitif tamsayının dört tane kare sayının toplamı olarak yazılabildiğini ispatlamıştır. İki kare sayının toplamı ve üç kare sayının toplamı halleri için cevaplar, Fermat ve Gauss tarafından verilmiştir. $k > 4$ için çalışmalar yapıldığı halde, asıl önemli halin $k = 4$ olması nedeniyle üzerinde fazla durulmamıştır. Bunun için Jacobi tarafından tanımlanmış olan

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \; q = e^{2\pi i z}$$

fonksiyonu dikkate alınmıştır. Bu fonksiyon her $z \in \mathcal{U} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ için iyi tanımlıdır ve üstelik

$$\vartheta^2(z)=\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}q^{l^2}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{m^2}\right)=\sum_{l,m}q^{l^2+m^2}=\sum_{n\geq 0}r_2(n)q^n$$

dir. Benzer şekilde hareket edilerek $\vartheta^k(z)=\sum_{n\geq 0}r_k(n)q^n$ olduğu sonucu da elde edilebilir ve bundan başka

$$\vartheta^k(z+1)=\vartheta^k(z) \quad \text{ve} \quad \vartheta^k\left(-\frac{1}{4z}\right)=\left(\frac{2z}{i}\right)^{\frac{k}{2}}\cdot\vartheta^k(z)$$

eşitliklerinin gerçeklendiği de görülebilir. Bu eşitlikleri gerçekleyen $\mathcal{U}$ üzerindeki analitik fonksiyonların ailesi, k çift sayıları için özel bir modüler form ailesini oluşturur, üstelik bu aile, $\mathbb{C}$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır. Özellikle $k = 4$ olması halinde bu aile, 2 boyutlu bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzayının bir bazı, Eisenstein serileri ile ifade edilebilir.

$$\sigma(n)=\sum_{d|n}d$$

ve Eisenstein serisi

$$G(z)=\frac{1}{24}+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)q^n$$

olmak üzere, söz edilen bazın elemanları

$$f(z) = G(z) - 2G(2z),\ g(z) = G(2z) - 2G(4z)$$

fonksiyonlarıdır ve $\vartheta^4(z)$ fonksiyonu, $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının

$$\vartheta^4(z) = 8f(z) + 16g(z)$$

lineer terkibi olacak biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla

$$\vartheta^4(z) = \sum_{n\geq 0}r_4(n)q^n = 1 + 8\sum_{n\geq 1}\sigma(n)q^n - 32\sum_{n\geq 1}\sigma(n)q^{4n}$$

ve böylece

$$r_4(n)=8(2+(-1)^n)\sum_{\substack{d|n\\ 2\nmid d}}d$$

olarak bulunur. Bu eşitlik her n için $r_4(n) > 0$ olduğunu, yani Lagrange teoreminin doğru ve dolayısıyla her bir pozitif tamsayının dört tamsayının karesinin toplamı biçiminde yazılabildiğini göstermektedir. Bundan başka son eşitlik, n sayısının bölenlerine bağlı olarak verilen bir n sayısının dört tane karenin toplamı olarak kaç değişik biçimde yazılabileceğine yönelik basit bir formül de belirtmektedir (Shimura 2002).

Özellikle A. Wiles tarafından Fermat'ın Son Teoreminin verilen ispatındaki önemleri nedeniyle eliptik eğriler teorisi son yılların en popüler teorisidir ve modüler formlar ile eliptik eğriler teorisi arasında da oldukça yakın bir ilişki vardır. $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir kafes olmak üzere

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

olarak tanımlanan Weierstrass $\wp$-fonksiyonu ve $\wp'(z)$ fonksiyonu Ω kafesine göre birer eliptik fonksiyondur.

$$G_k = G_k(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-k}$$

olarak tanımlanan G_k Eisenstein serileri de özel birer modüler formdur ve üstelik

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 6G_4 z + 20 G_6 z^3 + \ldots$$

biçiminde ifade edilebilir. Gerekli düzenlemelerin yapılması halinde

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$$

eşitliği elde edilir. Bu iki fonksiyonu bir birine ilişkilendiren bu eşitlik

$$g_2 = 60G_4 = 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-4} \text{ ve } g_3 = 140G_4 = 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-6}$$

olmak üzere

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

biçiminde ifade edilir. Dolayısıyla

$$E_\Omega : y^2 = 4x^3 - 60G_4x - 140G_6 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

olmak üzere

$$\theta : \mathbb{C}/\Omega \to E_\Omega, \text{ her } z \in \mathbb{C}/\Omega \text{ için } z \to (\wp(z), \wp'(z))$$

olarak tanımlanan θ dönüşümü bir homeomorfizmdir. Doğal olarak Ω kafesi

$$\Delta(E_\Omega) = (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

olacak biçimde seçilmiş bir kafestir. Dolayısıyla G_4 ve G_6 fonksiyonlarından başka $\Delta(E_\Omega)$ fonksiyonu da özel bir modüler formdur.

Son olarak sayılar teorisi ile analizi bir araya getiren bir fonksiyon yardımıyla tanımlanan özel bir modüler formdan söz edeceğiz. $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

olarak tanımlanan Riemann zeta fonksiyonu Re(s) > 2 için iyi tanımlıdır ve bu fonksiyon $\mathbb{C}$ üzerinde meromorf bir devama sahiptir. Bu fonksiyon sayılar teorisi ile analiz arasında bir köprü oluşturmaktadır ve üstelik bu fonksiyon ile ilgili halen çözülememiş birçok problem ile uğraşılmaktadır. $\mathbb{Q}$ üzerinde verilmiş olan bir E eliptik eğrisinin Hasse-Weil L-fonksiyonu $L(E, s)$ ile gösterilir ve bu fonksiyon p, $\Delta(E(\mathbb{F}_p)) \neq 0$ özelliğindeki bir asal sayı, $L_p(E, s) = (a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}$ ve $a_p = p + 1 - |E(\mathbb{F}_p)|$ olmak üzere

$$\prod_p L_p(E, s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu eşitlik ile tanımlanan $L(E, s)$ fonksiyonu da özel bir modüler formdur.

Bu çalışmanın amacı, oldukça geniş bir çalışma alanına sahip olan modüler formlar ile ilgili bazı gerçekleri bir araya getirmek ve uygulamaları üzerinde durmaktır.

2. KESİRLİ DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER VE ÖZELLİKLERİ

$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{C}$ kümesinin tek nokta kompaktifikasyonu, yani $\mathbb{C}$ kümesine bir tek nokta eklenerek elde edilen $\mathbb{C}$ kümesinin kompaktifikasyonu Riemann küresi olarak adlandırılır. Bu kısım hazırlanırken (Apostol 1976), (Diamond ve Shurman 2005), (Koblitz 1993) ve (Singerman ve Jones 1987) kaynakları yoğun olarak kullanılmıştır.

2.1 Tanım. $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü meromorf ve bire bir örten bir dönüşüm ise T dönüşümüne $\mathbb{C}_\infty$ ***Riemann küresinin bir otomorfizmi*** denir ve $\mathbb{C}_\infty$ küresinin tüm otomorfizmlerinin kümesi $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ ile gösterilir.

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ kümesinin elemanları

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki fonksiyonlardır. $w = T(z)$ şeklindeki dönüşümlere ***Möbius dönüşümü*** veya ***kesirli doğrusal dönüşüm*** denir. T dönüşümü a, b, c, d katsayıları ile bir tek şekilde belirlenemez, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere λa, λb, λc, λd katsayılarının da aynı T dönüşümünü belirteceği açıktır. Möbius dönüşümleri, fonksiyonların bileşke işlemi ile bir grup oluşturur.

Eğer $U(z) = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ dönüşümü de bir Möbius dönüşümü ise

$$(U \circ T)(z) = \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)}$$

ve üstelik

$$(a'a+b'c)(c'b+d'd)-(a'b+b'd)(c'a+d'c) = (a'd'-b'c')(ad-bc) \neq 0$$

olduğundan $U \circ T$ dönüşümünün de bir Möbius dönüşümü olduğu görülür. Bundan başka $I(z) = z$ özdeşlik dönüşümünün de bir Möbius dönüşümü olduğu açıktır ve üstelik herhangi T Möbius dönüşümünün tersi

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

dır.

Her bir $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ doğrusal dönüşümünün $z_0 = -\dfrac{d}{c}$ noktasında bir basit kutup yeri vardır. Bununla birlikte $T(-\dfrac{d}{c}) = \lim\limits_{z \to -\frac{d}{c}} T(z) = \infty$ olarak tanımlanırsa T dönüşümü z_0 noktasında sürekli bir fonksiyon olur. $T^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$ dönüşümünün de $z_1 = \dfrac{a}{c}$ noktasında bir basit kutup yeri vardır, benzer şekilde $T^{-1}(\dfrac{a}{c}) = \lim\limits_{z \to \frac{a}{c}} T(z) = \infty$ olarak tanımlanırsa T^{-1} dönüşümü de z_1 noktasında sürekli olur. Bu tanımlar dikkate alındığında, $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $T^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$ fonksiyonlarının birer rasyonel fonksiyon ve dolayısıyla $\mathbb{C}_\infty$ kümesi üzerinde sürekli oldukları açıktır. Böylece her bir $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ dönüşümü bir homeomorfizmdir, yani $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$, $\mathbb{C}_\infty$ küresinin homeomorfizmlerin bir grubudur.

Möbius dönüşümleri ile 2×2 boyutlu matrisler arasında güçlü bir ilişki vardır.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

matrisleri, sırasıyla, $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $U(z) = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ lineer dönüşümlerine karşılık gelen matrisler olmak üzere $U \circ T$ dönüşümüne karşılık gelen matris de, M ve N matrislerinin çarpımı olan

$$NM = \begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix}$$

matrisidir. Bu ilişki daha açık olarak şu şekilde ifade edilebilir;

$$GL(2,\, \mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ ve } ad - bc \neq 0\}$$

kümesi, ***genel lineer grup*** ve

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\, \mathbb{C}) \text{ ve } T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

olmak üzere her $M \in GL(2, \mathbb{C})$ için

$$\theta : GL(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty),\ \theta(M) = T$$

olarak tanımlanan θ dönüşümünü dikkate alınırsa, yukarıdaki işlemlerden

$$\theta(NM) = U \circ T = \theta(N)\theta(M)$$

olduğu açıktır. O halde θ dönüşümü, bir grup homomorfizmidir. Üstelik her Möbius dönüşümü için bir matris var olduğundan θ dönüşümü bir epimorfizmdir. Bu dönüşümün çekirdeği olan $K = \mathrm{Ker}(\theta)$ kümesi, her $z \in \mathbb{C}_\infty$ için $I(z) = z$ olmak üzere $\theta(M) = I$ özelliğindeki matrislerden, yani $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$$

matrislerinden oluşur. Böylece, $M, N \in GL(2, \mathbb{C})$ matrislerinin aynı T Möbius dönüşümünü belirtmesi için gerek ve yeter koşul belli bir $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ için $N = \lambda M$, yani $M^{-1}N \in K$ olmasıdır. Eğer θ epimorfizmine birinci izomorfizm teoremi uygulanırsa,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty) \cong GL(2, \mathbb{C})/K = GL(2, \mathbb{C})/\{\lambda I : \lambda \neq 0\}$$

olduğu görülür. $GL(2, \mathbb{C})/K$ bölüm grubu ***projektif genel lineer grup*** olarak adlandırılır ve bu grup $PGL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir.

Her $M, N \in GL(2, \mathbb{C})$ için $\det(NM) = \det(N)\cdot\det(M)$ olduğundan

$$\det : GL(2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

fonksiyonu bir grup homomorfizmidir ve bu dönüşümün çekirdeği olan $\det(M) = 1$ özelliğindeki $M \in GL(2, \mathbb{C})$ matrislerinden oluşan $SL(2, \mathbb{C})$ grubuna ***özel lineer grup*** denir. $SL(2, \mathbb{C})$, $GL(2, \mathbb{C})$ grubunun bir normal alt grubudur ve det fonksiyonu örten bir fonksiyon olduğundan

$$GL(2, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$$

dir. Eğer $N \in GL(2, \mathbb{C})$ ise $\theta(N) = \theta(M)$ olduğundan $\lambda^2 = \det(N)$ ve $M \in SL(2, \mathbb{C})$ için $N = \lambda M$ yazılabilir. Dolayısıyla $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin her bir otomorfizmi, $ad - bc = 1$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçimindedir, yani θ dönüşümü $SL(2, \mathbb{C})$ grubunu $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ kümesi üzerine resmeder. Böylece, projektif genel lineer grup $PGL(2, \mathbb{C})$, $SL(2, \mathbb{C})$ grubunun $PGL(2, \mathbb{C})/K$ bölüm grubundaki resmi olan projektif özel lineer grup $PSL(2, \mathbb{C})$ ile çakışır.

2.2 Tanım. $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ (ya da $ad - bc = 1$) olmak üzere

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

dönüşümlerine $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin ***anti-otomorfizmleri*** denir.

T anti-otomorfizmi $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin bir homeomorfizmdir. İki anti-otomorfizmin bileşkesi bir otomorfizm ve bir anti-otomorfizmle bir otomorfizmin bileşkesi ise bir anti-otomorfizmdir. Böylece, $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin otomorfizmleri ve anti-otomorfizleri, $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{C}_\infty) = \overline{PGL}(2, \mathbb{C})$ ile gösterilen bir grup oluştururlar. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ kümesi, bu grubun indeksi 2 olan bir alt grubudur ve dolayısıyla bu grubun bir normal alt grubudur. $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{C}_\infty)$ kümesinin elemanları olan otomorfizmlerin ve anti-otomorfizmlerin farklı topolojik özellikleri vardır, otomorfizmler birer yön koruyan dönüşümler oldukları halde, anti-otomorfizmler yön korumazlar.

n pozitif bir tam sayı ve F bir cisim olmak üzere $GL(n, F)$ genel lineer grubu $n \times n$ boyutlu, katsayıları F cisminin elemanları olan matrislerden oluşur. Benzer şekilde, $SL(n, F)$ özel lineer grubu determinantı 1 olan matrislerden oluşur. Eğer $n \geq 2$ ise $GL(n, F)$ grubu n boyutlu F^n vektör uzayı üzerinde hareket eder.

$PGL(2, \mathbb{C})$ grubunun dört tane üreteci vardır. Bu dönüşümler,

i. Dönme dönüşümü. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ olarak tanımlanan R_θ dönüşümüne ***dönme dönüşümü*** denir. Bu dönüşüm düzlemdeki noktaları orijin etrafında θ açısı kadar döndürür.

ii. *J* dönüşümü. $J(z) = \dfrac{1}{z}$ olarak tanımlanan J dönüşümü, $\mathbb{C}_\infty$ küresinde 1 ve -1 noktalarından geçen eksen boyunca yapılacak π açılık bir dönmeye karşılık gelir. Böylece $\mathbb{C}_\infty$

küresinin, üst yarısındaki noktalar bu dönüşüm ile alt yarısı üzerindeki noktalara ve alt yarısı üzerindeki noktalar da üst yarısı üzerindeki noktalara resmedilir.

iii. Esneme dönüşümü. $r \in \mathbb{R}$ ve $r > 0$ olmak üzere $S_r(z) = rz$ olarak tanımlanan S_r dönüşümüne ***esneme dönüşümü*** denir. Bu dönüşüm, 0 ve ∞ noktalarını sabit bırakarak $\mathbb{C}$ düzlemi üzerinde bir benzerlik dönüşümü olarak uzaklıkları $r > 0$ katı kadar genişletip daraltarak hareket eder. Eğer $0 < r < 1$ ise S_r dönüşümünün bir daralma, $r > 1$ olması halinde ise S_r dönüşümünün bir genişleme olduğu açıktır.

iv. Kayma dönüşümü. $t \in \mathbb{C}$ olmak üzere $T_t(z) = z + t$ olarak tanımlanan T_t dönüşümüne ***kayma dönüşümü*** denir ve bu dönüşüm ∞ noktasını sabit bırakırken $\mathbb{C}$ düzlemi üzerinde kayma hareketi yapar.

Her bir Möbius dönüşümü, $ad - bc = 1$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçimindedir. Eğer $c = 0$ ise a, $d \neq 0$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{d}$ olur. Eğer $\dfrac{a}{d} = re^{i\theta}$ ve $\dfrac{b}{d} = t$ olarak alınırsa

$$T(z) = re^{i\theta}z + t$$

olur. Böylece $T = T_t \circ S_r \circ R_\theta$ olduğu görülür. Eğer $c \neq 0$ ise $t = \dfrac{a}{c}$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)} = (T_t \circ J)(-c^2z - cd)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bundan başka $z \to -c^2z - cd$ dönüşümü de $-c^2 = re^{i\theta}$ ve $-cd = t'$ olmak üzere verilen üreteçlere bağlı olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla, $S_r(z) = rz$ ve $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ olmak üzere, bu halde de T dönüşümü üreteçlere bağlı olarak $T_t \circ J \circ T_{t'} \circ S_r \circ R_\theta$ biçiminde ifade edilebilir.

C, $\mathbb{C}_\infty$ küresinde bir çember ve $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ ise $T(C)$, $\mathbb{C}_\infty$ küresinde bir çemberdir, yani T dönüşümü altında bir çemberin görüntüsü yine bir çember olur.

2.3 Tanım. G, Ω kümesi üzerinde hareket eden bir grup olmak üzere her bir $\alpha, \beta \in \Omega$ için $g(\alpha) = \beta$ olacak biçimde belli bir $g \in G$ var ise G grubu Ω kümesi üzerinde ***geçişli hareket eder*** denir. Daha genel olarak, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ ve $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, Ω üzerinde farklı k-bileşenliler olmak üzere $j = 1, 2, \ldots, k$ için $g(\alpha_j) = \beta_j$ olacak biçimde belli bir $g \in G$ var ise G grubu Ω kümesi üzerinde ***k-geçişli hareket eder*** veya kısaca ***k-geçişlidir*** denir.

Tanımdan $k \geq 2$ için Ω kümesi üzerinde k-geçişli olan bir grubun Ω kümesi üzerinde $(k - 1)$-geçişli olduğu açıktır.

z_1, z_2 ve z_3, $\mathbb{C}_\infty$ küresi üzerinde birbirinden farklı noktalar ise $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ ve $T(z_3) = \infty$ özelliğinde bir tek $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla, (z_1, z_2, z_3) ve (w_1, w_2, w_3), $\mathbb{C}_\infty$ üzerinde farklı noktalardan oluşan üçlüler olmak üzere, her $j = 1, 2, 3$ için $T(z_j) = w_j$ olacak biçimdeki $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ dönüşümü de bir tektir. Dolayısıyla $PGL(2, \mathbb{C})$ grubu $\mathbb{C}_\infty$ üzerinde 3-geçişli hareket eder.

(z_0, z_1, z_2, z_3), $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin farklı noktalarından oluşan bir dörtlü olmak üzere bu noktaların çapraz oranı $\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3)$ ile gösterilir. $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ dönüşümü

$$T(z_1) = 0,\ T(z_2) = 1,\ T(z_3) = \infty$$

özelliğindeki dönüşüm olmak üzere $T(z_0) = (z_0, z_1; z_2, z_3) = \lambda$ olarak tanımlanır. Tanım dikkate alındığından $\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3) = T(z_0)$ ve $z_0 \neq z_1, z_2, z_3$ olduğundan $\lambda \neq 0, 1, \infty$ olduğu görülür. $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = \infty$ özelliğindeki dönüşüm

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}$$

dir. Dolayısıyla

$$\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3) = T(z_0) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_0)}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece C ve C' herhangi iki çember ise $T(C) = C'$ olacak biçimde bir $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ dönüşümü vardır, yani, $PGL(2, \mathbb{C})$ grubu $\mathbb{C}_\infty$ kümesindeki çemberlerin kümesini geçişli olarak permüte eder.

2.4 Tanım. G bir grup ve $g, h \in G$ olmak üzere $g = aha^{-1}$ özelliğinde bir $a \in G$ varsa g ve h elemanlarına G grubunda ***konjuge*** elemanlar denir. G grubunda konjuge olma özelliği bir denklik bağıntısıdır ve bu denklik bağıntısı ile elde edilen denklik sınıflarına da ***konjuge sınıfları*** denir.

$T(z) = z$ eşitliğini gerçekleyen $z \in \mathbb{C}_\infty$ noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir. Eğer z noktası T dönüşümünün sabit noktası ise

$$UTU^{-1}(U(z)) = UT(z) = U(z)$$

olduğundan $U(z)$ noktası da $UTU^{-1} \in PGL(2, \mathbb{C})$ konjuge dönüşümünün bir sabit noktasıdır. $PGL(2, \mathbb{C})$ grubunun elemanlarının konjuge sınıfları ve sabit noktaları düşünüldüğünde, bu grup yerine $PSL(2, \mathbb{C})$ grubu ile çalışmak çok daha kolaydır, bu nedenle $ad - bc \neq 0$ yerine $ad - bc = 1$ özelliğindeki $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümleri dikkate alınabilir. $T(\infty) = \dfrac{a}{c}$ olduğundan T dönüşümünün ∞ noktasını sabit bırakması için gerek ve yeter koşul $c = 0$ olmasıdır. Eğer $c \neq 0$ ise $z \in \mathbb{C}$ noktasının T dönüşümünün sabit noktası olması için gerek ve yeter koşul

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

olmasıdır. Bu eşitliğin iki kökü vardır ve dolayısıyla T dönüşümü, $\mathbb{C}_\infty$ kümesinde iki noktayı sabit bırakır. Eğer

$$(d - a)^2 + 4bc = 0$$

ise denklemin çakışık kökü bulunduğundan T dönüşümünün de bir tek sabit noktası vardır. Eğer $ad - bc = 1$ eşitliği kullanılırsa, son eşitlik

$$(a + d)^2 - 4 = 0$$

halini alır. Böylece, T dönüşümünün tek bir sabit noktasının olması için gerek ve yeter koşul $(a + d)^2 = 4$ olmasıdır. Eğer $c = 0$ ise T dönüşümü ∞ noktasını sabit bırakır ve bu durumda $ad = 1$ ve $T(z) = a^2z + ab$ elde edilir. Dolayısıyla, T dönüşümünün $z = \dfrac{ab}{1-a^2} \neq \infty$ biçiminde ikinci bir sabit noktasının olması için gerek ve yeter koşul

$a^2 \neq 1$ ya da, buna denk olarak, $(a + d)^2 \neq 4$ olmasıdır. $a^2 = 1$ olduğunda $T(z) = z \pm b$ olacağından $b = 0$ için T özdeşlik dönüşümüdür ve $b \neq 0$ için ∞ noktası T dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

Sonuç olarak, $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$ özelliğinde bir dönüşüm olsun.

i. $(a + d)^2 \neq 4$ ise T dönüşümünün $\mathbb{C}_\infty$ kümesinde iki sabit noktası vardır.

ii. $(a + d)^2 = 4$ ve $T \neq I$ ise T dönüşümünün $\mathbb{C}_\infty$ kümesinde bir tek sabit noktası vardır.

$PSL(2, \mathbb{C})$ grubunun konjuge sınıflarını belirlemek için yukarıda geçen $(a + d)^2$ ifadesi kullanılabilir. Eğer

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

ise A matrisinin ***izi***

$$\mathrm{tr}(A) = a + d$$

biçiminde tanımlanır. Gerekli hesaplamalar yapılarak, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ olduğu görülebilir ve eğer B matrisinin tersi varsa

$$\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}(B^{-1} \cdot BA) = \mathrm{tr}(A)$$

dır. Dolayısıyla, $\mathrm{tr}(A)$ değeri sadece $A \in GL(2, \mathbb{C})$ matrisinin konjuge sınıfına bağlıdır. Her bir T Möbius dönüşümü, $SL(2, \mathbb{C})$ grubunun $\pm A$ matrisleri ile temsil edilir ve $\mathrm{tr}(-A) = -\mathrm{tr}(A)$ dir, dolayısıyla

$$\mathrm{tr}^2(T) = (\mathrm{tr}(A))^2 = (a + d)^2$$

eşitliği T dönüşümünün sadece $PGL(2, \mathbb{C})$ grubundaki denklik sınıfına bağlı olan iyi tanımlı bir fonksiyon belirtir. Bu fonksiyon yardımıyla $PSL(2, \mathbb{C})$ grubundaki konjuge sınıfları tanımlanabilir. Herhangi bir grupta birim eleman bir denklik sınıfı oluşturur.

$PSL(2, \mathbb{C})$ grubunun geriye kalan diğer denklik sınıfları ise her bir sınıftan bir temsilci seçilerek belirlenir. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$U_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z, & \lambda \neq 1 \\ z+1, & \lambda = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanan U_λ dönüşümü kullanılarak $PSL(2, \mathbb{C})$ grubunun üç konjuge sınıfı oluşturulabilir.

$\lambda \neq 0$ olmak üzere T dönüşümü $PSL(2, \mathbb{C})$ grubunda bir U_λ dönüşümüne konjuge olduğu gibi T dönüşümü aynı zamanda $U_{\frac{1}{\lambda}}$ dönüşümüne de konjuge olduğundan λ değeri bir tek olarak belirlenemez. T dönüşümü tarafından tek türlü belirlenen $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\right\}$ kümesine ***T* *dönüşümünün çarpanı*** adı verilir. Birimden farklı iki Möbius dönüşümünün konjuge olması için gerek ve yeter koşul aynı çarpanlara sahip olmalarıdır. Dolayısıyla çarpan kavramı, konjuge sınıflarının belirlenmesinde tr^2 fonksiyonu kadar etkilidir. Bu iki invaryant arasındaki ilişki şu şekilde açıklanabilir;

$$\mathrm{tr}^2(T) = \mathrm{tr}^2(U_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$

ve dolayısıyla $z^2 + (2 - \mathrm{tr}^2(T))z + 1 = 0$ denkleminin kökleri λ ve $\frac{1}{\lambda}$ dır.

Yukarıda T dönüşümünün bir tek $z \in \mathbb{C}_\infty$ sabit noktasına sahip olması için gerek ve yeter koşulun $\mathrm{tr}^2(T) = 4$ veya $\lambda = 1$ olması, olduğu görülmüştü. Bu özellikteki T dönüşümüne ***parabolik dönüşüm*** denir. Bu durumda, $V(z_0) = \infty$ özelliğindeki belli bir $V \in PSL(2, \mathbb{C})$ için $T = V^{-1}U_1V$ dır. Her $z \in \mathbb{C}_\infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} U_1^n(z) = \lim_{n\to\infty}(z+n) = \infty$$

ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} T^n(z) = \lim_{n\to\infty} V^{-1}U_1^nV(z) = V^{-1}(\infty) = z_0$$

dir. Dolayısıyla T^n dönüşümü, n sayısı büyüdükçe her bir $z \in \mathbb{C}_\infty$ noktasını T dönüşümünün z_0 sabit noktasına yaklaştırır.

Eğer T dönüşümü parabolik ise T dönüşümünün z_1 ve z_2 gibi iki sabit noktası vardır ve

$$V(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

dönüşümü de bu sabit noktaları, sırasıyla, 0 ve ∞ noktalarına resmeden dönüşümdür. Bu durumda, belli bir $\lambda \neq 0, 1$ için $VT\,V^{-1} = U_\lambda$ dönüşümü 0 ve ∞ noktalarını sabit bırakır. $U_\lambda^n(z) = \lambda^n z$ olmak üzere, $|\lambda| < 1$ ise her $z \in \mathbb{C}_\infty \backslash \{\infty\}$ için

$$\lim_{n\to\infty} U_\lambda^n(z) = 0$$

ve böylece her $z \neq z_2$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n(z) = z_1$$

ve benzer şekilde, eğer $|\lambda| > 1$ ise her $z \neq z_1$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n(z) = z_2$$

olur. Aslında, z_1 ve z_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesi λ değeri ile $\frac{1}{\lambda}$ değerlerinin değiştirilmesine karşılık geldiğinden bu iki durum aynıdır. Eğer $|\lambda| \neq 1$ ise T dönüşümü $z \neq z_1$, z_2 olmak üzere tüm z noktalarını, bir sabit noktadan uzaklaştırıp diğer sabit noktaya yaklaştırarak hareket ettirir. λ gerçel ve pozitif bir değer olmak üzere bu özellikteki T dönüşümlerine ***hiperbolik dönüşüm*** denir. Eğer λ gerçel ve pozitif değil ise bu dönüşümlere ***loksodromik dönüşüm*** denir. Eğer $|\lambda| = 1$ olmak üzere $\lambda = e^{i\theta}$ olarak alınırsa U_λ dönüşümleri, $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin R_θ dönmeleridir. Bu durumda $U_\lambda^n(z)$ dönüşümünün $z \neq 0, \infty$ için ve T^n dönüşümünün de $z \neq z_1, z_2$ için limiti yoktur. Bu özellikteki dönüşümlere ***eliptik dönüşüm*** denir.

Hatırlanacağı gibi, T ve U_λ dönüşümlerinin konjuge olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{tr}^2(T) = \mathrm{tr}^2(U_\lambda)$ olmasıdır, dolayısıyla $\mathrm{tr}^2(U_\lambda) = \lambda + \lambda^{-1} + 2$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler verilebilir.

T dönüşümü eliptik $\Leftrightarrow 0 \leq \mathrm{tr}^2(T) < 4$,

T dönüşümü parabolik $\Leftrightarrow \mathrm{tr}^2(T) = 4$,

T dönüşümü hiperbolik $\Leftrightarrow \mathrm{tr}^2(T) > 4$,

T dönüşümü loksodromik $\Leftrightarrow \mathrm{tr}^2(T) < 0$ veya $\mathrm{tr}^2(T) \notin \mathbb{R}$.

Hiperbolik ve loksodromik dönüşümler arasındaki fark, $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin diskleri ele alındığında daha kolay açıklanabilir. Birimden farklı T dönüşümünün bir diski invaryant bırakması için gerek ve yeter koşul $PSL(2, \mathbb{C})$ grubunun bir dönüşümüne konjuge olmasıdır. $PSL(2, \mathbb{C})$ grubundaki dönüşümlerin ve dolayısıyla da bu dönüşümlerin konjugelerinin izleri gerçeldir. Bu nedenle, $PSL(2, \mathbb{C})$ grubunun dönüşümleri loksodromik olamaz. Diğer yandan, her hiperbolik dönüşüm, $\lambda > 0$ olmak üzere bir $U_\lambda \in PSL(2, \mathbb{C})$ dönüşümüne konjugedir. Böylece, hiperbolik dönüşümler, diskleri invaryant bırakırken loksodromik dönüşümler bırakmazlar. Benzer şekilde, tüm parabolik ve eliptik dönüşümler diskleri invaryant bırakır.

Bir ***T* dönüşümünün mertebesi** $T^m = I$ özelliğindeki en küçük m pozitif tamsayısıdır. Eğer böyle bir m tamsayısı yoksa T dönüşümüne ***sonsuz mertebeli*** dönüşüm denir. Eğer, $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ birimden farklı ve sonlu mertebeli ise T bir eliptik dönüşümdür, yani sadece eliptik dönüşümler sonlu mertebeli olabilir.

3. ELİPTİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde eliptik fonksiyonlar ve bu fonksiyonların özellikleri ele alınacaktır. Bu bölümde özellikle (Armitage ve Eberlein 2006), (Koblitz 1993), (Lang 1976) ve (Singerman ve Jones 1987) kaynakları kullanılmıştır.

3.1 Tanım. f, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z+\omega) = f(z)$$

olacak biçimdeki bir $\omega \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısına f fonksiyonunun bir ***periyodu*** ve $\omega \neq 0$ özelliğindeki ω periyoduna sahip f fonksiyonuna da bir ***periyodik fonksiyon*** denir.

$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı olan bir f fonksiyonunun periyotlarının kümesi Ω_f, $\mathbb{C}$ toplamsal grubunun bir alt grubudur ve üstelik sabitten farklı olan bir meromorf f fonksiyonunun periyotlarının kümesi Ω_f, $\mathbb{C}$ kümesinin bir ayrık alt kümesidir.

Ω, $\mathbb{C}$ grubunun bir ayrık alt grubu olmak üzere Ω grubu için aşağıdaki üç halden biri söz konusudur.

i. $\Omega = \{0\}$,

ii. Belli bir $\omega_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ için $\Omega = \{n\omega_1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ve dolayısıyla Ω, $\mathbb{Z}$ grubuna izomorftur,

iii. Belli $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ için ω_1 ve ω_2, $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsız, yani, $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ olmak üzere $\Omega = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ve dolayısıyla Ω, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grubuna izomorftur. Yani, $\mathbb{C}$ toplamsal grubunun, sırasıyla $\{0\}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gruplarına izomorf olan üç tane ayrık alt grubu vardır.

3.2 Tanım. Bir f fonksiyonunun periyotlarının kümesi, belli bir $\omega_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ için $\Omega_f = \{n\omega_1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde ise f fonksiyonuna ***basit periyodik fonksiyon***, belli $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ için $\Omega_f = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde ise f fonksiyonuna ***çifte periyodik fonksiyon*** denir.

3.3 Uyarı. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$“z_1 \equiv z_2 \ (\text{mod}\ \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}“$$

olarak tanımlanan “$\equiv$” bağıntısı $\mathbb{C}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve bu denklik bağıntısı ile elde edilen denklik sınıfları, $\mathbb{Z}$ kümesinin kosetleridir. Bu durumda, f periyodik fonksiyonu denk noktalarda aynı değeri alır. Üstelik her bir $w \in \mathbb{C}$ sayısı $S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$ sonsuz dikey şeridinde kesinlikle bir tek noktaya denktir. Böylece f fonksiyonunun $\mathbb{C}$ kümesi üzerindeki davranışı sadece f fonksiyonunun S şeridi üzerindeki davranışına bakılarak belirlenebilir. f fonksiyonunun bu şerit üzerinde göstermiş olduğu davranış, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere birbirine paralel her bir $S + n$ şeridi için tekrarlanır.

3.4 Tanım. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ve $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Omega = \{n\omega_1 + m\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

kümesine $\mathbb{C}$ kümesi için bir ***kafes*** denir.

Tanımda $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ olarak alınması, ω_1 ve ω_2 karmaşık sayılarının aynı doğru üzerinde olmaması gerektiğini belirtmektedir. $\{\omega_1, \omega_2\}$ kümesine Ω kafesi için bir ***baz*** adı verilir ve bazı $\{\omega_1, \omega_2\}$ olan bu kafes $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ ile gösterilir.

3.5 Uyarı. Ω kafesi için $\{\omega_1, \omega_2\}$ bazından başka bazlar da vardır. Örneğin, $\omega \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$ ve $m - n, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\omega = m\omega_1 + n\omega_2 = (m - n)\omega_1 + n(\omega_1 + \omega_2)$$

yazılabilir ve dolayısıyla $\{\omega_1, \omega_1 + \omega_2\}$ kümesi de Ω kafesi için bir bazdır. Daha genel olarak, $\omega_1', \omega_2' \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1, \quad \omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda, $\omega_1', \omega_2' \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$''\{\omega_1', \omega_2'\} \text{ kümesi } \Omega(\omega_1, \omega_2) \text{ kafesi için bir baz} \Leftrightarrow ad - bc = \pm 1''$$

olduğu görülür. $ad - bc = \pm 1$ eşitliğini gerçekleyen sonsuz çoklukta a, b, c, d tamsayıları olduğundan herhangi bir Ω kafesinin sonsuz çoklukta bazı bulunur.

Ω bir kafes olmak üzere $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için $z_1 - z_2 \in \Omega$ ise z_1 ve z_2 karmaşık sayılarını Ω modülüne göre ***denk noktalar*** denir ve bu durum $z_1 \sim z_2$ ile gösterilir. Ω modülüne göre denk olma bağıntısı $\mathbb{C}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının belirlemiş olduğu denklik sınıfları da Ω grubunun $\mathbb{C}$ toplamsal grubu üzerindeki $z + \Omega$ kosetleridir. Diğer bir deyişle, Ω grubu $\mathbb{C}$ üzerinde dönüşümlerin bir grubu gibi hareket eder. Her bir $\omega \in \Omega$ noktası $\mathbb{C}$ kümesinin

$$t_\omega : z \to z + \omega$$

olarak tanımlanan bir t_ω dönüşümü belirtir. Bundan başka $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$ için

$$t_{(\omega_1+\omega_2)} = t_{\omega_1} \circ t_{\omega_2}$$

olduğundan $\Omega \cong \{t_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ dir. Böylece $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ karmaşık sayılarının Ω modülüne göre denk olması için gerek ve yeter koşul Ω grubunun bu etkisi altında z_1, z_2 sayılarının aynı yörüngede bulunmalarıdır.

3.6 Tanım. $P \subset \mathbb{C}$ kapalı ve bağlantılı bir küme olsun. Eğer P kümesi

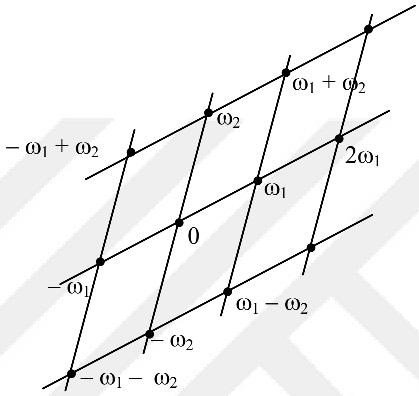
i. her $z \in \mathbb{C}$ için P kümesi z noktası ile aynı Ω-yörüngesinde olacak şekilde en az bir nokta bulundurur, yani her bir $z \in \mathbb{C}$ noktası P kümesinin bir başka noktası ile denktir,

ii. P kümesinin içinde bulunan iki nokta aynı Ω-yörüngesinde bulunamaz, yani P kümesinin içinde birbiriyle denk olacak biçimde bir nokta ikilisi yoktur,

koşullarını gerçekliyor ise P kümesine Ω kafesi için bir ***temel bölge*** denir.

Eğer P sonlu kenarlı bir Euclid çokgeni ise P kümesine Ω kafesi için bir ***temel çokgen*** denir. Özel olarak, eğer P bir paralelkenar ise Ω için bir ***temel paralelkenar*** olarak adlandırılır.

(i) ve (ii) koşullarından anlaşılacağı gibi, P kümesi Ω kafesi için herhangi bir temel bölge ise P bölgesinin kendisi ve Ω grubunun etkisi altındaki tüm görüntüleri, yani, $\omega \in \Omega$ olmak üzere $P + \omega$ kaymaları sadece sınırlar üzerinde üst üste gelecek şekilde, $\mathbb{C}$ düzlemini tamamen örter. Bu tip örtülere $\mathbb{C}$ düzlemi için bir ***döşeme*** denir. Ω kafesi için farklı bazlar bulunabildiğinden farklı şekillerde temel bölgeler ve dolayısıyla da $\mathbb{C}$ düzlemi için farklı döşemeler bulunabilir. Aşağıdaki şekilde, bir temel bölge yardımıyla elde edilen döşeme görülmektedir.

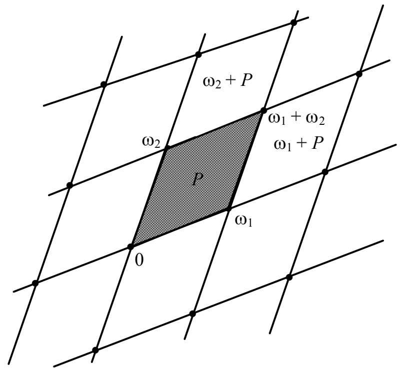


Şekil 3.1 Ω kafesi için bir döşeme

3.7 Uyarı. Eğer P, Ω kafesi için bir temel bölge ise belli bir $t \in \mathbb{C}$ için

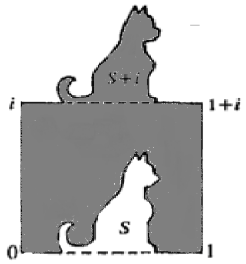
$$P + t = \{z + t : z \in P\}$$

kümesi, yani P temel bölgesinin t kaymasının da bir temel bölge olacağı açıktır. Bu özellik, belli özel noktaları bulunduran veya aksine bulundurmayan bir temel bölgenin oluşturulmasında oldukça kullanışlıdır. Örneğin bu özellik kullanılarak, P temel bölgesini sıfır noktasını bulunduran veya bulundurmayan bir hale getirmek mümkündür.



Şekil 3.2 Ω kafesi için P temel bölgesi

Bir temel bölgenin mutlaka bir paralelkenar veya bir düzgün çokgen olması da gerekmez. Uygun işlemler yardımıyla bir paralelkenar veya bir düzgün çokgensel temel bölgeden keyfi temel bölgeler de elde edilebilir. Örneğin, bir dikdörtgen şeklindeki temel bölgeden aşağıdaki şekildeki gibi bir temel bölge, S alt kümesinin kesip atılması ve yerine bu S kümesinin i birim kayması olan $S + i$ kümesinin eklenmesiyle elde edilebilir.



Şekil 3.3 *S* alt kümesinin kaydırılmasıyla elde edilen temel bölge

Uygulamada oldukça sık kullanılan temel bölgelerden birisi, Ω kafesi için bir temel bölge olan

$$D(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |z - \omega| \text{ her } \omega \in \Omega\}$$

Dirichlet bölgesidir.

Artık eliptik fonksiyon kavramı tanımlanabilir ve eliptik fonksiyonun özellikleri üzerinde durulabilir.

3.8 Tanım. $\mathbb{C}$ üzerinde meromorf ve çifte periyodik olan fonksiyonlara ***eliptik fonksiyon*** denir.

Eğer f, Ω kafesine göre eliptik bir fonksiyon ise $T = \mathbb{C}/\Omega$ olmak üzere $f : T \to \mathbb{C}_\infty$ olarak düşünülebilir. Bundan başka, analitik bir f eliptik fonksiyonu sabit fonksiyon olmak zorundadır, dolayısıyla sabit olmayan her bir eliptik fonksiyonunun kutup noktası şeklinde aykırılıkları vardır.

f, Ω kafesine göre sabit olmayan bir eliptik fonksiyon ve $c \in \mathbb{C}_\infty$ ise $f(z) = c$ denkleminin çözümleri ayrıktır, üstelik bu denklemin her bir çözümü sonlu katlılığa sahiptir ve birbirine denk olan çözümlerin katlılıkları da aynıdır. Çözümlerin kümesi ayrık olduğundan Ω kafesi için herhangi bir P temel paralelkenarı seçilirse, P kompakt olduğundan bu paralelkenar denklemin sadece sonlu çoklukta çözümünü bulundurur. Eğer gerek duyulursa $P \to P + t$ kayması yapılarak P temel paralelkenarı, sınırı üzerinde $f(z) = c$ denkleminin hiç çözümünü bulunduramayacak hale de getirilebilir. Böylece, $f(z) = c$ denkleminin P temel paralelkenarındaki çözümleri, katlılıkları, sırasıyla, $k_1, \dots, k_r$ ve $N = k_1 + \ldots + k_r$ olmak üzere $z = z_1, \dots, z_r$ noktalarında tam N tane olur. $z = z_1, \dots, z_r$ noktaları, $f(z) = c$ denkleminin çözümlerinin denklik sınıflarının temsilcileri olduklarından N sayısının, $[z] \in T = \mathbb{C}/\Omega$ olmak üzere $f([z]) = c$ denkleminin çözümlerinin katlılıklarının toplamı olduğu açıktır.

3.9 Tanım. f bir eliptik fonksiyon olsun. $f(z) = \infty$ denkleminin çözümlerinin sayısına ***f* fonksiyonunun mertebesi** denir ve bu değer $ord(f)$ ile gösterilir.

Mertebesi 1 olan bir eliptik fonksiyon yoktur. Bundan başka $ord(f)$, f fonksiyonunun kutuplarının denklik sınıflarının mertebeleri toplamına eşittir. Bundan sonraki kısımlarda f fonksiyonu denildiğinde mertebesi N ve Ω kafesine göre eliptik bir fonksiyon ve P temel paralelkenarı denildiğinde de t, ∂P üzerinde f fonksiyonunun sıfırları ya da kutupları olmayacak şekilde bir karmaşık sayı olmak üzere, köşeleri

$$t,\ t + \omega_1,\ t + \omega_2,\ t + \omega_1 + \omega_2$$

olan $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesi için bir temel paralelkenar anlaşılacaktır.

Gerçekten her bir eliptik fonksiyon özel bir fonksiyon yardımıyla elde edilebilir. Şimdi 2. mertebeden eliptik $\wp$ fonksiyonu oluşturulacak ve tıpkı tüm basit periyodik fonksiyonların $e^{2i\pi z}$ fonksiyonu cinsinden ifade edilebildiği gibi tüm eliptik fonksiyonların da bu $\wp$ fonksiyonu yardımıyla ifade edilebileceği görülecektir.

Eliptik fonksiyonlar sonsuz seri ve çarpım kavramlarından faydalanılarak oluşturulurlar. Öncelikle bir basit periyodik $F(z)$ fonksiyonu oluşturulup benzer şekilde hareket ile eliptik fonksiyonlara geçilebilir. Basit periyodik $F(z)$ fonksiyonu, f fonksiyonu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z-n)$$

serisi z noktasında yakınsak olacak şekilde seçilerek

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z-n)$$

olarak tanımlanabilir. Bu seri açılımından

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{-\infty} f(z-n) + \sum_{n=1}^{\infty} f(z-n) \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} f(z-n) + \sum_{n=0}^{\infty} f(z-n) \\ &= \sum_{m=0}^{-\infty} f(z+1-m) + \sum_{m=1}^{\infty} f(z+1-m), \qquad (m = n+1) \\ &= F(z+1) \end{aligned}$$

olduğu ve dolayısıyla $F(z)$ fonksiyonunun periyodunun 1 olduğu görülür. Benzer işlemler Ω kafesine göre eliptik olan bir

$$F(z) = \sum_{\omega\in\Omega} f(z-\omega)$$

çifte periyodik fonksiyonu için de yapılabilir. Çifte periyodik $F(z)$ fonksiyonunun meromorf olduğunun gösterilebilmesi için f fonksiyonunun meromorf bir fonksiyon olarak alınması ve bundan başka F fonksiyonunun tanımındaki toplam Ω kafesi üzerinden olduğundan $F(z)$ fonksiyonunu belirten serinin düzgün yakınsak olarak seçilmesi gerekir.

$$S(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \text{ g}$$

olarak tanımlanan $S(z)$ fonksiyonunu belirten çarpımın yakınsaklığı $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$ serisinin yakınsaklığı ile test edilir ve bu seri $\mathbb{C}$ kümesinin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde mutlak yakınsak olduğundan bu çarpım da $\mathbb{C}$ kümesinin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde mutlak yakınsaktır, dolayısıyla $S(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde analitiktir. Dikkat edilirse $S(z)$ fonksiyonunun her bir $n \in \mathbb{Z}$ noktasında basit sıfırları vardır. Dolayısıyla $S(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ üzerinde sıfırdan farklı bir fonksiyon olduğu açıktır. Bundan başka

$$S(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

olarak yazılabilir ve $S(z)$ fonksiyonunun logaritmik türevi alınırsa

$$Z(z) = \frac{S'(z)}{S(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$$

olarak bulunur, eşitliğin sağ tarafındaki seri $\mathbb{C}$ kümesinin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla terim terime türevi alınarak bir meromorf fonksiyon elde edilebilir. Eğer $P(z) = -Z'(z)$ denirse

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

olarak bulunur. $P(z)$ fonksiyonunun, periyodik ve üstelik periyotlarının kümesi $\mathbb{Z}$ olan, bir basit periyodik meromorf fonksiyon olduğu tanımından görülmektedir. Bundan başka

$$P(z) = \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi z, \ \ Z(z) = \pi \cot \pi z \ \text{ ve } S(z) = \pi \sin \pi z$$

dir. Diğer tüm eliptik fonksiyonların oluşturulmasında kullanılacak olan $\wp(z)$ eliptik fonksiyonu ile $\zeta(z)$ ve $\sigma(z)$ fonksiyonları da $P(z)$, $Z(z)$ ve $S(z)$ fonksiyonlarına benzer şekilde oluşturulurlar.

$\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$, $\{\omega_1, \omega_2\}$ bazlı bir kafes ve P, ∂P üzerinde Ω kafesinin elemanlarını bulundurmayan bir temel bölge olsun. Ω kafesine göre eliptik fakat sabit olmayan bir fonksiyonun analitik olamayacağı ve dolayısıyla da P temel bölgesinde mutlaka kutuplarının olması gerektiği bilinmektedir. Bununla birlikte f fonksiyonunun P temel bölgesinde basit kutbu olamayacağı da daha önce belirtilmiştir. Dolayısıyla, en basit ve üstelik sabit olmayan bir eliptik fonksiyonun derecesi 2 olmalıdır. O halde bu f fonksiyonunun P temel bölgesinde ya iki tane basit kutbu veya 2. dereceden tek kutbu vardır. Ω kafesine göre eliptik olan ve P temel bölgesinde 2. dereceden tek kutbu olan 2 mertebeli bu fonksiyon Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon, Weierstrass $\sigma(z)$ fonksiyonundan elde edilecektir. $\sigma(z)$ fonksiyonunun $\wp(z)$ fonksiyonu ile olan ilişkisi, $S(z) = \pi \sin \pi z$ fonksiyonunun $P(z) = \pi^2 \cos ec^2 \pi z$ fonksiyonuyla olan ilişkisi ile aynıdır. Tıpkı $P(z)$, $Z(z)$ ve $S(z)$ fonksiyonlarını tanımlayan serilerin ve çarpımların yakınsaklıklarının $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ serisinin yakınsaklığına dayandığı gibi, Weierstrass fonksiyonlarını tanımlayan çarpımların ve serilerin yakınsaklığı da Ω kafesi ile indekslenmiş benzer toplamların yakınsaklığına dayanır. Weierstrass fonksiyonlarının yakınsaklığı gerçekte özel bir serinin yakınsaklığına bağlıdır. Her $N \geq 3$ tamsayısı için

$$F_N(z) = \sum_{\omega \in \Omega} (z-\omega)^{-N}$$

fonksiyonu Ω kafesine göre N. mertebeden bir eliptik fonksiyondur.

$\sum (z-\omega)^{-2}$ serinin yakınsaklığını garanti etmek için her bir $\omega \neq 0$ için $(z-\omega)^{-2}$ terimini $(z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}$ ile yer değiştirerek bu serilerin terimlerinin küçültülmesi gerekir. Böylece

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

olarak tanımlanan fonksiyona ikinci mertebeden eliptik *Weierstrass pe fonksiyonu* denir. $\wp(z)$ fonksiyonunun periyodik bir fonksiyon olduğu açık bir şekilde görülmemektedir. Bununla birlikte $\wp(z)$ fonksiyonunun periyodik olduğu, eliptik bir fonksiyon olan $-2F_3(z)$ fonksiyonuna eşit olan $\wp'(z)$ türevinin integrali alınarak dolaylı yoldan görülebilir. $\wp(z)$ fonksiyonunun meromorf olduğunu göstermek için bu fonksiyonu, *Weierstrass sigma fonksiyonu* yardımıyla elde edelim.

$$g(z,\omega) = \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 \right)$$

olmak üzere

$$\sigma(z) = z \cdot \prod_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} g(z,\omega)$$

olarak tanımlanan fonksiyona da *Weierstrass sigma fonksiyonu* denir. Dikkat edilirse $g(z, \omega)$ fonksiyonunun $(1 - z/\omega)$ çarpanı, Ω kafesinin her bir noktasında $\sigma(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının olduğunu, çarpımın üstel çarpanlı kısmı ise bu sonsuz çarpımın yakınsak olduğunu garanti eder. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt bir küme ise sınırlı ve üstelik $k \to \infty$ için $\left|\omega^{(k)}\right| \to \infty$ olduğundan $k \to \infty$ için $g(\omega^k, z) \to 1$ yakınsaması K üzerinde düzgündür, dolayısıyla $Log(\omega^k, z)$ fonksiyonu iyi tanımlıdır ve üstelik

$$Log(g(\omega^{(k)}, z)) = Log\left(1 - \frac{z}{\omega^{(k)}}\right) + Log\left(\exp\left(\frac{z}{\omega^{(k)}} + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= Log\left(1-\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)+\frac{z}{\omega^{(k)}}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^2$$

dir, K sınırlı olduğundan

$$\left|Log(g(\omega^k,z)\right| = \left|Log\left(1-\frac{z}{\omega^k}\right)+\frac{z}{\omega^{(k)}}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^2\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^4+\ldots\right|$$

$$\leq \frac{1}{3}\left|\frac{z}{\omega^{(k)}}\right|^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)$$

$$\leq \left|\frac{z}{\omega^{(k)}}\right|^3$$

elde edilir. $\sum_k Log(g(\omega^{(k)},z))$ serisi K üzerinde mutlak yakınsak olduğundan $z\prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} g(\omega,z)$ serisi de K üzerinde mutlak yakınsaktır. O halde bu çarpım $\mathbb{C}$ üzerinde analitik olan $\sigma(z)$ fonksiyonuna yakınsar. Üstelik

$$g(\omega,-z) = g(-\omega,z) \text{ ve } \sigma(-z) = -\sigma(z)$$

olduğundan $\sigma(z)$ tek fonksiyondur.

$$S(z) = z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n})\exp(1+\frac{z}{n})$$

olarak yazıldığında $\sigma(z)$ ile $S(z)$ arasındaki ilişki daha da açık bir hale gelir. $\sigma(z)$ fonksiyonunun logaritmik türevi, $\mathbb{C}$ kümesinin kompakt alt kümelerinde meromorf bir fonksiyona düzgün yakınsayan bir sonsuz seri verir. Bu seri $\zeta(z)$ ile gösterilen *Weierstrass zeta fonksiyonu*dur ve

$$\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z) = \frac{d}{dz}\left(Log\sigma(z)\right) = \frac{1}{z}+\sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right)$$

dir. $\sigma(z)$, tek fonksiyon olduğundan $\zeta(z)$ fonksiyonu da tek fonksiyondur. $\zeta(z)$ fonksiyonunun kafes noktalarında basit kutupları vardır, dolayısıyla $\zeta(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}/\Omega$ üzerinde analitik bir fonksiyondur. $\zeta(z)$, meromorf fonksiyonların bir serisi olduğundan $\mathbb{C}$ kümesinin tüm kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsar. Böylece $\zeta(z)$ fonksiyonunu belirten serinin terim terime türevi alınarak $\zeta'(z)$ meromorf fonksiyonunu elde etmek mümkündür. $\wp(z) = -\zeta'(z)$ yazıldığında, $\mathbb{C}/\Omega$ üzerinde analitik olan ve her bir $\omega \in \Omega$ noktasında 2. dereceden kutupları olan

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

çift fonksiyonu elde edilir. Bu şekilde elde edilen $\wp(z)$ fonksiyonu, periyotlarının kümesi $\Omega_\wp$ olmak üzere, $\Omega_\wp$ kafesine göre bir eliptik fonksiyondur. Bundan başka, $\wp(z)$ fonksiyonu 2. mertebeden, $\wp'(z)$ fonksiyonu ise 3. mertebeden birer eliptik fonksiyondur.

$\wp(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasının komşuluğundaki Laurent serisinden faydalanarak $\wp(z)$ ve $\wp'(z)$ fonksiyonlarını bir araya getiren önemli bir eşitlik elde edilebilir. Bunun için öncelikle

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

fonksiyonunun Laurent serisi bulunacaktır.

$$\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} = \frac{z^2}{\omega^2(z-\omega)}$$

ve üstelik her bir $\omega \in \Omega/\{0\}$ için

$$\frac{1}{z-\omega} = -\frac{1}{\omega} - \frac{z}{\omega^2} - \frac{z^3}{\omega^3} - \ldots$$

olduğundan

$$G_k = G_k(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \omega^{-k}$$

olmak üzere

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left(-\frac{z^2}{\omega^3} - \frac{z^3}{\omega^4} - \ldots \right)$$

$$= \frac{1}{z} - G_3 z^2 - G_4 z^3 - \ldots$$

olarak ifade edilebilir. G_k serilerine Ω kafesi için *Eisenstein serileri* denir ve $k \geq 3$ için bu seriler mutlak yakınsaktır. k tek sayısı için, ω^{-k} ve $(-\omega)^{-k}$ yok edildiğinde $G_k = 0$ olduğu görülür. Böylece $\zeta(z)$ fonksiyonu için Laurent serisi

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty} G_{2n} z^{2n-1}$$

halini alır, dolayısıyla $\wp(z)$ fonksiyonunun Laurent serisi

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} z^{2n-2}$$

olur. Basit bir hesaplama ile $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ ve $\phi_3(z)$, D üzerinde yakınsak kuvvet serileri olmak üzere

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots$$

ve böylece

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + z^2\phi_1(z)$$

$$4\wp'(z)^3 = \frac{4}{z^6} + \frac{36G_4}{z^2} + 60G_6 + z^2\phi_2(z)$$

$$60G_4\wp(z) = \frac{60G_4}{z^2} + z^2\phi_3(z)$$

eşitlikleri bulunur. Son üç denklem dikkate alındığında, $\phi(z) = \phi_1(z) - \phi_2(z) + \phi_3(z)$, D üzerinde yakınsak bir kuvvet serisi olmak üzere,

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6 = z^2\phi(z)$$

eşitliği elde edilir. $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonları Ω kafesine göre eliptik fonksiyonlar olduklarından

$$f(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6$$

fonksiyonu da bir eliptik fonksiyondur. Üstelik $f(z) = z^2\phi(z)$ olduğundan f, 0 noktasında sıfır olur ve böylece tüm $\omega \in \Omega$ noktalarında da sıfır olur. Bununla birlikte f fonksiyonunun oluşturuluşu gereği, f sadece $\wp$ veya $\wp'$ fonksiyonunun kutup noktalarında kutuplara sahiptir. Yani f fonksiyonunun kafes noktalarında kutupları vardır. Dolayısıyla f fonksiyonunun kutupları yoktur, yani f fonksiyonu analitiktir, o halde sabittir. Eğer $f(0) = 0$ olduğu da dikkate alınırsa f fonksiyonun 0 sabit fonksiyonuna eşit olduğu görülür ve böylece $\wp(z)$ ve $\wp'(z)$ fonksiyonları için

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$$

eşitliği elde edilir. Bu iki fonksiyonu bir birine ilişkilendiren bu eşitliği,

$$g_2 = 60G_4 = 60 \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \omega^{-4}$$

$$g_3 = 140G_4 = 140 \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \omega^{-6}$$

olmak üzere

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

biçiminde ifade etmek daha yaygındır. $z = \wp(t)$ değeri yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

ve gerekli düzenlemeler yapıldığında, $p(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3$ kübik polinom olmak üzere

$$\wp^{-1}(z) = t = \int \frac{dz}{\sqrt{(p(z)}}$$

olduğu görülür. Verilen farklı köklere sahip herhangi bir

$$p(z) = 4z^3 - c_2 z - c_3$$

kübik poninomuna karşılık $c_2 = g_2(\Omega)$ ve $c_3 = g_3(\Omega)$ olacak biçimde bir Ω kafesi vardır. Bundan başka $\wp'(z)$ fonksiyonunun sıfırları dikkate alınarak $4z^3 - g_2 z - g_3$ polinomunun farklı köklere sahip olduğu da görülebilir. Ω, $\{\omega_1, \omega_2\}$ bazlı bir kafes ve $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ olsun. Eğer 0, $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ ve $\omega_3/2$ noktaları P temel paralelkenarının içinde ise $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ ve $\omega_3/2$ noktaları $\wp'$ fonksiyonunun P temel bölgesindeki sıfırlarıdır.

$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ diferensiyel eşitliği kullanılarak $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonlarının herhangi rasyonel fonksiyonu $\wp'$ kuvvetleri yok edilerek $R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$ şekline getirilebilir. Örneğin,

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$$

eşitliğine $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonları arasındaki cebirsel bir eşitlik olarak bakılabilir. Böylece herhangi eliptik fonksiyon $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonlarının bir rasyonel fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

3.10 Tanım. F bir cisim olmak üzere $F \times F$ kümesindeki singüler olmayan kübik eğrilere F cismi üzerinde ***eliptik eğri*** denir ve $E(F)$ ile gösterilir.

Eğer F, kar(F) = 0 özelliğindeki bir cisim ve $E(F)$ bir eliptik eğri ise a, $b \in F$ olmak üzere

$$E : y^2 = x^3 + ax + b$$

Weierstrass formunda ifade edilebilir. Bundan başka, bir eşitliğin eliptik eğri belirtmesi için gerek ve yeter koşul $\Delta = \Delta(E) = -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$ olmasıdır.

$\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir kafes ve $\wp$, Ω kafesine karşılık gelen Weierstrass fonksiyonu olmak üzere

$$\mathbb{C}/\Omega \to E_\Omega,\ z \to (\wp(z), \wp'(z))$$

dönüşümü $\mathbb{C}$ kümesini $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $E_\Omega : y^2 = 4x^3 - 60G_4x - 140G_6$ eliptik eğrisine resmeder. Doğal olarak Ω kafesi, $\Delta(E_\Omega) \neq 0$ olacak biçimde seçilmiş bir kafestir. $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonlarının Ω kafesine göre periyodik oldukları dikkate alınırsa bu dönüşüm

$$\mathbb{C}/\Omega \cong E_\Omega$$

analitik otomorfizmini verir ve böylece $\mathbb{C}/\Omega$ toru ile E_Ω eliptik eğrisi analitik izomorf olur. Bundan başka $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı her bir eliptik eğri için bu özellikte bir kafes vardır, dolayısıyla $\mathbb{C}$ üzerindeki eliptik eğriler topolojik açıdan bakıldıklarında tor olarak düşünülebilirler. $\mathbb{C}/\Omega$ bir topolojik grup olduğundan E_Ω eğrisi üzerindeki noktalar da bir toplamsal grup oluştururlar. Bu halde $\mathbb{C}/\Omega$ grubunun etkisiz elemanı Ω kafesine karşılık gelen nokta ve E_Ω eğrisinin etkisiz elemanı da sonsuzdaki noktadır. Böylece eliptik fonksiyonlar, özellikle de $\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonlarının $\mathbb{C}$ üzerindeki kafesler ile eliptik eğriler arasında bir bağ oluşturdukları sonucu elde edilir. Eğer Ω ve Ω' kafesleri denk ise E_Ω ile $E_{\Omega'}$ eğrilerinin de izomorf oldukları bilinmektedir.

4. MODÜLER GRUP ve BÖLÜM UZAYLARI

Bu bölümde, modüler formlar teorisinin temelini oluşturan modüler grup ve modüler grubun alt grupları ele alınacaktır. Bu bölümde ayrıca bölüm uzayları ve Riemann yüzeyleri ile ilgili genel bilgiler verilecektir.

4.1 Tanım. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki lineer dönüşümlerin grubu ***özel lineer grup*** olarak adlandırılır ve $PSL(2, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

4.2 Uyarı. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\Delta = ad - bc > 0$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün pay ve paydası $\sqrt{\Delta}$ ile bölünürse

$$T(z) = \frac{(a/\sqrt{\Delta})z + (b/\sqrt{\Delta})}{(c/\sqrt{\Delta})z + (d/\sqrt{\Delta})}$$

ve böylece $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ dir. Özel olarak, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ olmak üzere $PSL(2, \mathbb{R})$ grubu

$$z \to az + b = \frac{(\sqrt{a})z + b/\sqrt{a}}{0 \cdot z + 1/\sqrt{a}}$$

ve dolayısıyla $z \to az$ $(a > 0)$ biçimindeki tüm dönüşümleri bulundurur. $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun diğer bir önemli dönüşümü ise

$$z \to -\frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z - 1}{1 \cdot z + 0}$$

dönüşümüdür. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü için

$$T(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}$$

olduğundan $z = x + iy$ ve $T(z) = u + iv$ denirse

$$v = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2}$$

dir. $ad - bc > 0$ olduğundan T dönüşümünün $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminin bir otomorfizmi olduğu açıktır. Yani, $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = PSL(2, \mathbb{R})$ dir. Diğer yandan, $ad - bc < 0$ ise T

dönüşümü $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemini konform ve birebir, örten olarak alt yarı düzleme resmeder.

4.3 Tanım. $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir ayrık alt grubuna bir ***Fuchs grubu*** denir.

Kafesler ve Fuchs grupları pek çok açıdan birbirlerine benzerdir. Kafesler Euclid eşmetrilerinin ayrık alt gruplarıdır ve bölüm uzayları da tor yüzeyine homeomorf olan kapalı Riemann yüzeyleridir. Fuchs grupları ise hiperbolik eşmetrilerin ayrık alt gruplarıdır ve bölüm uzayları Riemann yüzeyleridir. Kafesler altında görüntüleri invaryant kalan eliptik fonksiyonlar önemli bir fonksiyon ailesi oluştururlar. Benzer biçimde, Fuchs grupları altında invaryant kalan fonksiyonlar da ***otomorf fonksiyonlar*** olarak adlandırılırlar ve bu fonksiyonlar da oldukça önemli özelliklere sahiptirler.

Fuchs grupları oldukça çok çalışılan ayrık gruplar oldukları halde çok fazla Fuchs grubu örneği yoktur. Bu grupların en iyi bilinenleri devirli gruplardır. Örneğin, $\lambda > 0$ olmak üzere $z \to \lambda z$ hiperbolik dönüşümü ile üretilen Fuchs grubu, birim eleman ve sadece hiperbolik elemanlar bulunduran bir Fuchs grubudur. Benzer biçimde, $z \to z + 1$ parabolik dönüşümü ile üretilen parabolik devirli grup da bir Fuchs grubudur. Diğer yandan, bir eliptik elemanla üretilen eliptik devirli grup her zaman bir Fuchs grubu değildir, bu grubun bir Fuchs grubu olması için gerek ve yeter koşul bu grubun sonlu olmasıdır. Fuchs grupları, yani ayrık gruplar içinde en çok bilineni aşağıda tanımı verilecek olan modüler gruptur (Singerman ve Jones 1987).

4.4 Tanım. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

dönüşümlerinin grubuna ***modüler grup*** denir ve $PSL(2, \mathbb{Z})$ veya Γ ile gösterilir.

Modüler grup, $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir ayrık alt grubu olduğundan bir Fuchs grubudur ve üstelik modüler grup $\mathcal{U}$ üzerinde süreksiz olarak hareket eder.

4.5 Tanım. Y bir topolojik uzay ve G, bu topolojik uzayın homeomorfizmlerinin bir grubu olsun.

i. Eğer özdeşlikten farklı her $g \in G$ için her bir $y \in Y$ noktasının $g(V) \cap V = \varnothing$ olacak biçimde bir V komşuluğu varsa G grubu Y topolojik uzayı üzerinde ***süreksiz hareket eder*** denir.
ii. Eğer özdeşlikten farklı her $g \in G$ dönüşümü için her bir $y \in Y$ noktasının $g(V) \cap V \neq \varnothing$ olduğunda $g(y) = y$ olacak biçimde bir V komşuluğu varsa G grubu Y topolojik uzayı üzerinde ***has süreksiz hareket eder*** denir.

Tanım dikkate alındığında her bir süreksiz grubun has süreksiz hareket ettiği açıktır. Bununla birlikte $\mathbb{C}$ topolojik uzayının, $z \to e^{2\pi i/n}z$ $(n = 2, 3, \ldots)$ dönüşümleriyle üretilen homeomorfizmlerinin sonlu grubu has süreksiz hareket ettiği halde süreksiz değildir. Fuchs gruplarının her biri $\mathcal{U}$ üzerinde has süreksiz hareket eden gruplardır. Modüler grup Γ üst yarı düzlem üzerinde süreksiz hareket eder.

4.6 Tanım. Λ, $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubu, $z \in \mathcal{U}$ ve (T_n), Λ grubunun farklı elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Eğer $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ noktası $(T_n(z))$ dizisinin bir limit noktası ise α noktasına ***Λ grubunun bir limit noktası***, Λ grubunun tüm limit noktalarının kümesine de ***Λ grubunun limit kümesi*** denir ve bu küme $L(\Lambda)$ ile gösterilir.

Tüm Λ Fuchs grupları için $L(\Lambda) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dir. Özel olarak, $\Lambda = \Gamma$ modüler grup olarak seçilirse $L(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dir.

4.7 Riemann Yüzeyleri. X, bağlantılı bir Hausdorff uzayı olmak üzere her $x \in X$ noktasının $\mathbb{C}$ kümesinin bir açık alt kümesine homeomorf olan bir U açık komşuluğu var ise X topolojik uzayına bir ***yüzey*** denir.

Dolayısıyla yüzey, yerel olarak düzlem ile aynı topolojik özelliklere sahip olan topolojik uzaydır, bu nedenle yüzeylerin birer 2-manifold oldukları düşünülebilir. X bir yüzey ise her noktasının düzlemin bir açık kümesine homeomorf olan açık komşuluğu vardır. $\{U_i\}$, X yüzeyinin, her bir U_i için $W_i \subset \mathbb{C}$ açık bir küme olmak üzere

$$\phi_i : U_i \to W_i$$

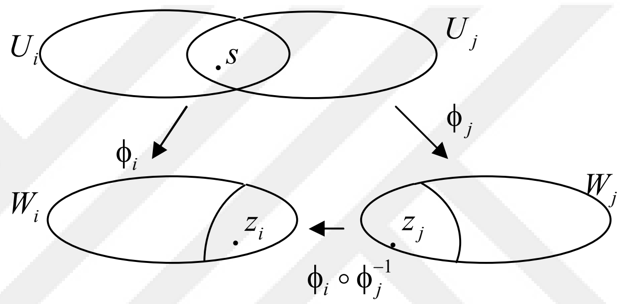
homeomorfizm olacak şekildeki açık alt kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\mathscr{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$$

ailesine X yüzeyi için bir ***atlas*** denir. Eğer $s \in U_i$ ise $\phi_i(s) = z_i$ noktasına s noktası için ***yerel koordinat***, (U_i, ϕ_i) ikilisine de s noktasındaki ***pafta*** denir. (U_i, ϕ_i) ve (U_j, ϕ_j), s noktası için, yerel koordinatları z_i ve z_j olan paftalar ise $z_i = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})(z_j)$ olduğundan s noktası için iki farklı pafta arasındaki koordinat değişimi söz konusudur. Böylece, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ olması halinde

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$$

dönüşümüne ***koordinat değişim fonksiyonu*** denir.



Şekil 4.1 Koordinat değişim fonksiyonu

Dikkat edilirse, koordinat değişim fonksiyonları düzlemin fonksiyonlarıdır. Eğer tüm koordinat değişim fonksiyonları analitik ise X üzerindeki $\mathscr{A}$ atlasına ***analitik atlas*** denir. $\mathscr{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ ve $\mathscr{B} = \{(V_j, \phi_j)\}$, X üzerindeki iki atlas olsun. $(U_i, \phi_i) \in \mathscr{A}$ ve $(V_j, \phi_j) \in \mathscr{B}$ olmak üzere $U_i \cap V_j \neq \emptyset$ olduğundan

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap V_j) \to \phi_i(U_i \cap V_j)$$

dönüşümü analitik ise $\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$ atlaslarına ***uyumlu atlaslar*** denir. Atlasların uyumluluğu bir denklik bağıntısıdır ve bu bağıntı ile elde edilen atlasların denklik sınıflarına X üzerindeki ***kompleks yapı*** denir. Üzerinde bir kompleks yapı olan X yüzeyine de bir ***Riemann yüzeyi*** denir.

4.8 $\mathscr{U}/\Lambda$ Bölüm Uzayı. Λ bir Fuchs grubu olmak üzere z noktasının Λ yörüngesi $[z]$ ile gösterilir, yani

$$[z] = \{T(z) \mid T \in \Lambda\}$$

dir. $\Pi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/\Lambda$, $\Pi(z) = [z]$ olarak tanımlanan doğal izdüşüm dönüşümü kullanılarak $\mathcal{U}$ üzerindeki alışılmış topoloji yardımıyla $\mathcal{U}/\Lambda$ üzerindeki bölüm topolojisi

$$\tau = \{V \subset \mathcal{U}/\Lambda \mid \Pi^{-1}(V) \subset \mathcal{U} \text{ açık}\}$$

olarak tanımlanır, burada

$$\Pi^{-1}(V) = \{z \in \mathcal{U} \mid \Pi(z) \in V\}$$

dir. Bu şekilde tanımlanan topoloji ile Π dönüşümünün sürekli ve üstelik açık bir dönüşüm olduğu görülmektedir. $\mathcal{U}/\Lambda$ kümesinin üzerindeki bu topoloji ile birlikte $\mathcal{U}/\Lambda$ bağlantılı bir Riemann yüzeyidir ve üstelik Π dönüşümü $\mathcal{U}$ üzerinde analitiktir.

Bir Λ Fuchs grubu için temel bölge, daha önce bir Ω kafesi için tanımlanan temel bölgeye benzer şekilde tanımlanır.

4.9 Tanım. F bir kapalı küme ve $\overset{\circ}{F}$, F kümesinin içini belirtmek üzere F kümesi,

i. $\bigcup_{T \in \Lambda} T(F) = \mathcal{U}$

ii. Her $T \in \Lambda \setminus \{I\}$ için $\overset{\circ}{F} \cap T(F) = \varnothing$

koşullarını gerçekliyorsa F kümesine Λ ***grubu için bir temel bölge*** denir.

(***i***) ve (***ii***) koşullarından anlaşılacağı gibi F, Λ Fuchs grubu için bir temel bölge ise F bölgesi ve bu bölgenin Λ grubunun dönüşümleri altındaki görüntüleri sadece sınırlar üzerinde üst üste gelecek şekilde $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemini örterler.

Verilen bir grubun bir temel bölgesini oluşturmak için birçok yöntem olduğu halde aşağıda tanımı verilecek olan Dirichlet bölgesi, teknik olarak en kolay temel bölge oluşturma yöntemidir.

4.10 Tanım. Λ bir Fuchs grubu ve $p \in \mathcal{U}$, herhangi $T \in \Lambda \setminus \{I\}$ dönüşümü ile sabit bırakılamayan bir nokta olsun. Λ grubu için p merkezli Dirichlet bölgesi

$$D_p(\Lambda) = \{z \in \mathcal{U} : \text{her } T \in \Lambda \text{ için } \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p))\}$$

biçiminde tanımlanır.

Her bir $D_p(\Lambda)$ bölgesi, Λ Fuchs grubu için bir temel bölgedir. Λ, bir Fuchs grubu olduğu için üst yarı düzlemde, herhangi $T \in \Lambda \backslash \{I\}$ dönüşümü ile sabit bırakılamayan bir $p \in \mathcal{U}$ noktası vardır. Gerçekten de eğer $u \in \mathcal{U}$ noktası belli bir $S \in \Lambda \backslash \{I\}$ dönüşümünün sabit noktası ise u noktasının öyle bir komşuluğu bulunabilir ki bu komşuluktaki hiçbir nokta I dönüşümünden başka bir dönüşüm tarafından sabit bırakılamaz. Λ, $\mathcal{U}$ üzerinde has süreksiz olduğundan u noktasının $W \cap S(W) \neq \varnothing$ olduğunda $S(u) = u$ olacak biçimde bir W komşuluğu vardır. Eğer $q \in W$ noktası bir $T \in \Lambda \backslash \{I\}$ dönüşümü tarafından sabit bırakılıyorsa, yani $T(q) = q$ ise $W \cap T(W) \neq \varnothing$ olması halinde $T(u) = u$ olur. Diğer yandan, $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ dönüşümünün üst yarı düzlemde en çok bir sabit noktası olabileceği dikkate alınırsa $q = u$ olduğu sonucu elde edilir (Singerman ve Jones 1987).

Hatırlanacağı gibi, $PSL(2, \mathbb{R})$ altında hiperbolik metrik değişmezdir, dolayısıyla Dirichlet bölgesi

$$D_p(\Lambda) = \{z \in \mathcal{U} : \text{her } T \in \Lambda \text{ için } \rho(z, p) \leq \rho(T(z), p)\}$$

biçiminde de ifade edilebilir. Dikkat edilirse, her $T \in \Lambda$ için $\rho(z, p) < \rho(z, T(p))$ eşitsizliği, üst yarı düzlemde hiperbolik metriğe göre p noktasına $T(p)$ noktasından daha yakın olan z noktalarının kümesini ifade eder. Bundan başka $p \in D_p(\Lambda)$ ve üstelik p noktasının Λ-yörüngesi ayrık olduğundan $D_p(\Lambda)$ kümesi p noktasının belli bir komşuluğunu da bulundurur. p ile $T(p)$ noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçasının hiperbolik orta dikmesi iki tane yarı düzlem belirtir, dolayısıyla da bu düzlemlerden biri p noktasını bulundurur. Genellikle sonsuz sayıda hiperbolik bölgenin arakesiti olduğundan $D_p(\Lambda)$ bir konveks hiperbolik çokgendir (Singerman ve Jones 1987).

Dirichlet bölgesinin daha kolay bir şekilde oluşturulabilmesi için tanımdaki hiperbolik metrik Euclid metriği ile değiştirilebilir. Bu durumda

$$D_p(\Lambda) = \{z \in \mathcal{U} : \text{her } T \in \Lambda \text{ için } \frac{|z-p|^2}{\operatorname{Im}(z)} \leq \frac{|T(z)-p|^2}{\operatorname{Im}T(z)}\}$$

biçiminde ifade edilebilir. a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü için

$$\mathrm{Im}(T(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

olduğundan

$$D_p(\Lambda) = \{z \in \mathcal{U} : \text{her } T \in \Lambda \text{ için } \left|\frac{T(z)-p}{z-p}\right| \geq \frac{1}{|cz+d|}\}$$

olur. Buna göre, Γ modüler grup ve $k > 1$ olmak üzere $p = ki$ olarak alınırsa $D_{ki}(\Gamma)$ bölgesi aşağıdaki şekilde elde edilir.

4.11 Teorem. Γ modüler grubu için $F = \{z \in \mathcal{U} : |z| \geq 1 \text{ ve } |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ bir temel bölgedir (Singerman ve Jones 1987).

İspat. $T(z) = z + 1$ ve $T(z) = z - 1$ dönüşümleri için $c = 0$ ve $d = 1$ olduğundan

$$|z \pm 1 - ki| \geq |z - ki|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, istenen özellikteki $z \in \mathcal{U}$ noktalarının ki noktasına $ki \pm 1$ noktalarından daha yakın noktalar olduğunu ve dolayısıyla $D_{ki}(\Gamma)$ kümesinin

$$S = \{z \in \mathcal{U}: -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\}$$

şerit bölgesinde kaldığını, yani, $D_{ki}(\Gamma) \subset S$ olduğunu gösterir.

Eğer $T(z) = -\frac{1}{z}$ dönüşümü dikkate alınırsa, $c = 1$ ve $a = 0$ dir. Dolayısıyla, $z \in D_{ki}(\Gamma)$ için

$$\frac{\left|-\frac{1}{z} - ki\right|}{|z-ki|} \geq \frac{1}{|z|}$$

ve dolayısıyla

$$|1 + kiz|^2 \geq |z - ki|^2$$

olduğu görülür. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $|z| \geq 1$ olduğu, yani $D_{ki}(\Gamma)$ kümesinin birim çemberin dışında kaldığı sonucu elde edilir. Bu durumda, $D_{ki}(\Gamma) \subseteq F$ olduğu sonucu elde edilmiş olur. Şimdi, $F \subset D_{ki}(\Gamma)$ olduğunu gösterelim. Bunun için ilk olarak $D_{ki}(\Gamma)$ kümesinin sanal eksene göre simetrik olduğunu gösterelim.

$A(z) = -\bar{z}$ dönüşümü sanal eksene göre yansıma dönüşümüdür, dolayısıyla bu dönüşüm sanal eksen üzerindeki noktaları sabit bırakır ve üstelik bir hiperbolik eşmetridir. Her $T \in \Gamma$ için $A^{-1}TA \in \Gamma$ olduğundan

$$\rho(A(z), ki) = \rho(z, ki) \leq \rho(z, A^{-1}TA(ki)) = \rho(A(z), TA(ki)) = \rho(A(z), T(ki))$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, $z \in D_{ki}(\Gamma)$ ise $A(z) \in D_{ki}(\Gamma)$, yani $D_{ki}(\Gamma)$ bölgesinin sanal eksene göre simetrik olduğunu gösterir.

Şimdi de F kümesinin sadece sınır noktalarının birbirine denk olabileceğini, yani $S \in \Gamma \backslash \{I\}$ ve $z \in F$ olmak üzere $w = S(z) \in F$ ise $z, w \in \partial F$, üstelik $z = w$ ya da z ve w noktaları sanal eksene göre simetrik olabileceklerini görelim. α, β, γ, $\delta \in \mathbb{Z}$ ve $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ olmak üzere

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

olsun.

$$|\gamma z + \delta|^2 = \gamma^2|z|^2 + 2\gamma\delta \mathrm{Re}(z) + \delta^2 \geq \gamma^2 - \gamma\delta + \delta^2 \geq 1$$

ve böylece

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|\gamma z + \delta|^2} \leq \mathrm{Im}(z)$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer z ve w noktalarının rolleri değiştirilirse yani S ve S^{-1} dönüşümlerinin rolleri değiştirilirse

$$\mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Im}(w)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece,

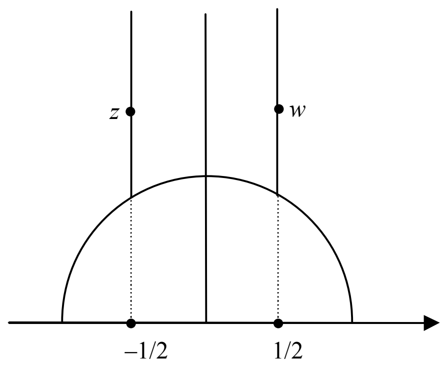
$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) \text{ ve } |\gamma z + \delta|^2 = 1,$$

yani yukarıdaki eşitsizliklerin her birinin eşitlik olduğu, yani

$$(\gamma - \delta)^2 + \delta\gamma = 1 \text{ ve } \gamma^2(|z|^2 - 1) + \gamma\delta(2\mathrm{Re}(z) + 1) = 0$$

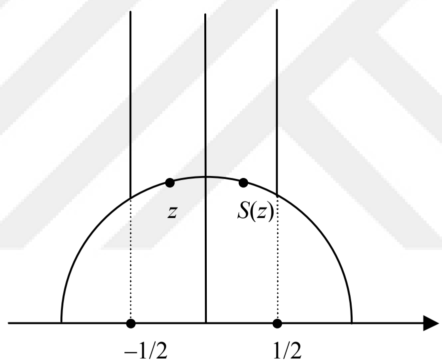
olduğu sonucu elde edilir. Bu durumda aşağıdaki haller söz konusudur.

1. $\gamma = 0$, $\delta = \pm 1$ dir, dolayısıyla $S(z) = z \pm 1$ olur, böylece z, w noktaları F kümesinin sınırının dik kenarları üzerindedir.



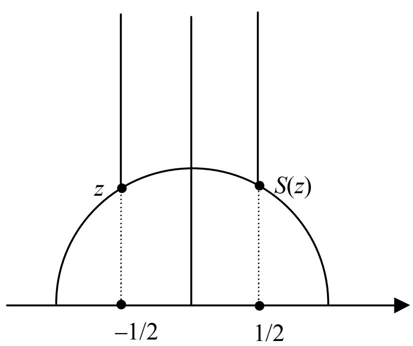
Şekil 4.2

2. $\gamma = \pm 1$, $\delta = 0$ dır, dolayısıyla $|z| = 1$ dir. Böylece $S(z) = \pm\alpha - \bar{z}$ ve $S(z) \in F$ olduğundan $\alpha = 0, -1$ veya 1 dir. Eğer $\alpha = 0$ ise $S(z) = -\dfrac{1}{z}$ ve böylece z ve $S(z)$ noktaları birim çember üzerindedir. Bu durumda $z = w = i$ olabilir. Eğer $\alpha = \pm 1$ ise $z = \dfrac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}$ ve $S(z) = z$ dir.



Şekil 4.3

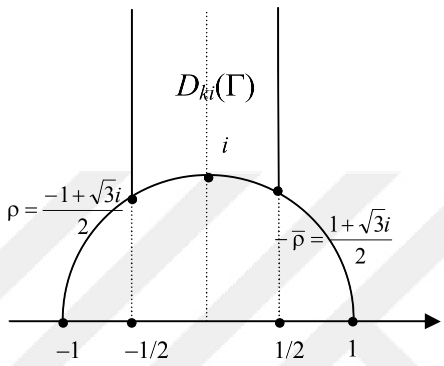
3. $\gamma = \delta = \pm 1$ ise $|z| = 1$ ve $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$ dir ve bu durumda $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ dir. $S(z) \in F$ ve z ile $S(z)$ noktalarının sanal kısımları aynı olduğundan $S(z) = z$ veya $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ dir.



Şekil 4.4

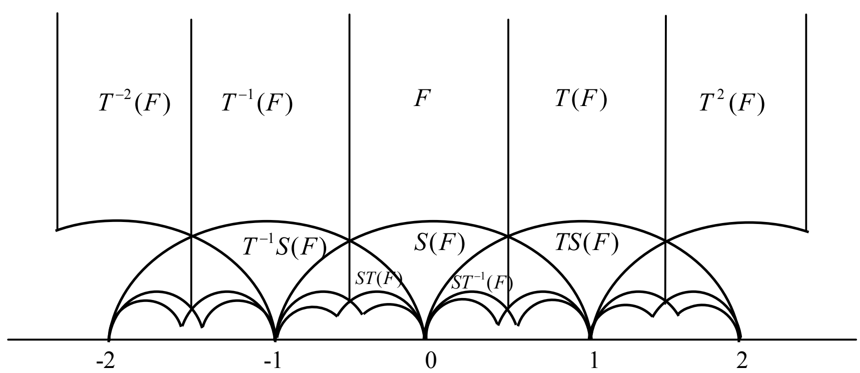
Bu üç hal göz önüne alındığında $S(z) = z$ dir veya z ile $S(z)$ noktaları sanal eksene göre simetrik noktalardır.

Şimdi $F \subset D_{ki}(\Gamma)$ olduğunu görelim, $z_0 \in F$ olsun. $D_{ki}(\Gamma)$, Γ için bir temel bölge olduğundan $T(z_0) \in D_{ki}(\Gamma) \subseteq F$ özelliğinde bir $T \in \Gamma$ vardır. O halde, $z_0 = T(z_0)$ veya z_0 ve $T(z_0)$ noktaları sanal eksene göre simetrik noktalardır. Dolayısıyla $z_0 \in D_{ki}(\Gamma)$ dir. Böylece $D_{ki}(\Gamma) = F$ sonucu elde edilmiş olur.



Şekil 4. 5 Modüler grup için temel bölge

4.12 Tanım. Λ bir Fuchs grubu ve F, Λ Fuchs grubunun temel bölgesi ile üst yarı düzleminin döşenmesine, bu temel bölge bir Dirichlet bölgesi ise $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminin ***Dirichlet döşemesi*** denir.



Şekil 4.6 Modüler grup için $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminin Dirichlet döşemesi

F Dirichlet bölgesi, Fuchs grubu için temel bölge olduğundan her bir $w \in \mathcal{U}$ noktası belli bir $S \in \Lambda$ eliptik elemanının sabit noktasıdır ve dolayısıyla bu nokta belli bir $T \in \Lambda$ için $T(F)$ bölgesinin sınırı üzerindedir. Böylece $u = T^{-1}(w)$ noktası F temel bölgesinin sınırı üzerindedir ve üstelik bu nokta $S' = T^{-1}ST$ eliptik elemanının sabit noktasıdır. S' sonlu mertebelidir. Özellikle S' eliptik elemanının mertebesi 2 ise bu sabit nokta F temel bölgesinin bir kenarının üzerindeki bir nokta olur ve S' bu sabit nokta ile ayrılmış olan iki doğru parçasının birini diğeri üzerine resmeder. Bu noktalara F temel bölgesinin bir köşesi olarak bakılır.

Dikkat edilirse modüler grup Γ için F temel bölgesinin köşeleri

$$i,\ \rho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ve } -\overline{\rho} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

noktalarıdır. Bu noktaları sabit bırakan dönüşümler, sırasıyla,

$$S(z) = -\frac{1}{z},\ U(z) = \frac{-z-1}{z} \text{ ve } U'(z) = \frac{z-1}{z}$$

dir. $T(z) = z + 1$ dönüşümü ρ noktasını $-\overline{\rho}$ noktasına resmeder. Dolayısıyla, bu noktalar aynı eliptik devirdedir. i noktası $S(z) = -\frac{1}{z}$ dönüşümünün sabit noktasıdır ve F bölgesinin sınırı üzerinde 2 mertebeli bir eliptik dönüşüm ile sabit bırakılan başka nokta olmadığından $\{i\}$, sadece tek bir noktadan oluşan bir eliptik devirdir. Dolayısıyla modüler grubun sonlu devirli iki tane alt grubu vardır ve bu gruplar 2 ve 3 mertebeli gruplardır. Bu grupların mertebelerine ***grubun periyotları*** denir. Buna göre, modüler grubun periyotları 2 ve 3 tür. Bazı hallerde parabolik dönüşümler, sonsuz mertebeli eliptik dönüşümler olarak dikkate alınırlar. Örneğin modüler grubun her bir parabolik elemanı belli bir $n \in \mathbb{Z}$ için $T(z) = z + n$ elemanı ile eşleştirilir ve bu elemanın mertebesi ∞ olduğundan modüler grubun periyotları 2, 3 ve ∞ olarak alınır (Singerman ve Jones 1987).

Buna göre, modüler grubun temel bölgesinin yukarıdakilere ek olarak ∞ noktasında da bir köşesi olduğu kabul edilir. Bu nedenle modüler grup, iç açıları $\pi/2$, $\pi/3$ ve $\pi/\infty = 0$ olan bir hiperbolik üçgenden elde edilen bir üçgensel grup olarak da düşünülür.

$T \in \Lambda$ parabolik elemanının sabit noktasına, yani $T(x) = x$ özelliğindeki $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ noktasına Λ ***grubunun bir uç (cusp) noktası*** denir.

Dikkat edilirse $T(z) = z + 1$ dönüşümünün tek sabit noktası $\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ noktasıdır. Eğer $(m, n) = 1$ olmak üzere bir $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ noktası seçilirse

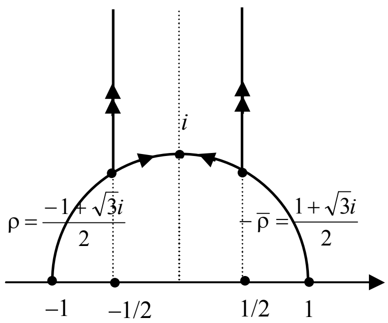
$$rm - sn = 1$$

olacak biçimde $r, s \in \mathbb{Z}$ sayıları vardır ve dolayısıyla

$$U(z) = \frac{mz + s}{nz + r}$$

olmak üzere $U(\infty) = \frac{m}{n}$, yani $UTU^{-1}(\frac{m}{n}) = UT(\infty) = U(\infty) = \frac{m}{n}$ dir. Bu ise herhangi bir $\frac{m}{n}$ rasyonel sayısının UTU^{-1} parabolik elemanının sabit noktası olduğunu ve $\frac{m}{n}$ rasyonel sayısının ∞ noktası ile aynı yörüngede olduğunu gösterir. Tersine T dönüşümü ile eşlenik olan her bir parabolik eleman, belli bir $U \in \Gamma$ için UTU^{-1} biçimindedir ve bu elemanın sabit noktası da $U(\infty) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ noktasıdır. Dolayısıyla modüler grubun uç noktaları $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ kümesinin noktalarıdır ve bu noktalar bir tek Γ-yörüngesindedirler.

Modüler grubun temel bölgesinin dik kenarları $T(z) = z + 1$ dönüşümü ile denk kenarlardır. Bundan başka birim çemberin ρ ve $-\overline{\rho}$ noktaları arasında kalan kısmı da mertebesi 2 olan $T(z) = -\frac{1}{z}$ eliptik elemanıyla kendi üzerine resmedilir. Bu kenar, denk iki kenar olarak düşünülebilir, bu kenarların birisi ρ noktasını i noktasına, diğeri de i noktasını $-\overline{\rho}$ noktasına birleştiren parça olarak alınabilir.



Şekil 4.7 Modüler grup için temel bölge

Λ bir Fuchs grubu, F, Λ için bir Dirichlet bölgesi ve $\{T_i\}$, F bölgesinin kenarlarını eşleyen dönüşümlerin kümesi ise $\{T_i\}$, Λ grubu için üreteçlerin bir kümesidir.

Yukarıda modüler grubun kenarlarının $T(z) = z + 1$ ve $S(z) = -\frac{1}{z}$ dönüşümleri ile eşlendiği belirtilmiştir. O halde, $\{S, T\}$ kümesi modüler grubun bir üreteç kümesidir (Apostol 1976). Bundan başka,

$$U(z) = (ST)(z) = -\frac{1}{z+1}$$

olmak üzere $S^2 = U^3 = 1$ ve $U = ST$ olduğundan modüler grubun temsili

$$\Gamma = \langle S, U \mid S^2 = U^3 = 1 \rangle$$

biçimindedir.

W, S ve U dönüşümlerinden oluşan bir kelime olmak üzere Γ grubundaki her bağıntı,

$$W(S, U) = 1$$

biçiminde yazılabilir. Bununla birlikte, verilen herhangi bir $W(S, U)$ kelimesinin Γ grubunda $W(S, U) = 1$ eşitliğini gerçekleyip gerçeklemediği kontrol edilebilir. $W(S, U)$ kelimesini Γ grubunda kendisine eşit ve daha basit bir $W'(S, U)$ kelimesine indirgemek için $S^2 = U^3 = 1$ bağıntısından faydalanılır. Buradan, W' kelimesinin $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemindeki hareketi incelenerek birim dönüşüm olup olmadığı belirlenir.

Modüler grubun temel bölgesi, köşeleri $\rho, -\overline{\rho}$ ve ∞ noktaları olan bir hiperbolik üçgen ve bu köşelerdeki açılar, sırasıyla, $\pi/3$, $\pi/3$ ve 0 olduğundan Gauss-Bonet teoremi gereği F temel bölgesinin hiperbolik alanı

$$\mu(F) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 0\right) = \frac{\pi}{3}$$

olarak bulunur.

F, bir Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi, yani bir temel bölge ise F bölgesinin kenarlarının Λ grubunun elemanları ile eşlenmesi ile elde edilen yüzey, yani F/Λ, $\mathcal{U}/\Lambda$ bölüm uzayına homeomorfiktir.

$\mathcal{U}/\Lambda$ bölüm uzayının topolojik özellikleri, Λ Fuchs grubunun topolojik özelliklerine bağlıdır. Örneğin $\mathcal{U}/\Lambda$ bölüm uzayının kompakt olması için gerek ve yeter koşul $F \subset \mathcal{U}$

temel bölgesinin kompakt olmasıdır. Bundan başka $\mathcal{U}/\Lambda$ kompakt ise Λ grubu parabolik eleman bulundurmaz. Dolayısıyla grubun bir parabolik elemanı varsa Dirichlet bölgesinin bu dönüşümün sabit noktasında bir köşesi vardır. Daha önce de belirtildiği gibi bu köşe parabolik köşe veya uç nokta (cusp) dır. Bu durumda $\mathcal{U}/\Lambda$ bölüm uzayının, parabolik köşeye, yani uca karşılık gelen noktalarda boşlukları (delikleri) vardır. Örneğin modüler grubun $T(z) = z + 1$ parabolik dönüşümünün sabit noktası ∞ dur ve F temel bölgesinin iki dik kenarı bu dönüşüm ile eşlenmiştir. Dolayısıyla, F/Γ ve böylece $\mathcal{U}/\Gamma$ bölüm uzayı ∞ noktasına karşılık gelen noktada bir deliği olan küredir, bu durumda F/Γ, yani $\mathcal{U}/\Gamma$ bölüm uzayı düzleme homeomorftur.

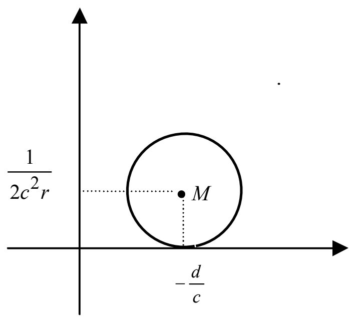
Daha önce belirtildiği gibi, modüler grubun parabolik elemanlarının sabit noktaları gerçel eksen üzerindeki rasyonel sayılardır ve her bir rasyonel sayı modüler grup için birer uç noktasıdır. Dolayısıyla bölüm uzayı oluşturulurken bu durum da dikkate alınmalıdır. $P = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ olmak üzere $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \cup P$ kümesi dikkate alınarak $\mathcal{U}^*/\Gamma$ bölüm uzayı oluşturulur. Bu durumda verilen $z \in \mathcal{U}^*$ noktasının iki tür açık komşuluğu söz konusudur.

i. $z \in \mathcal{U}$ ise bu komşuluk, z noktasının $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemindeki açık komşuluğundan başka bir şey değildir.

ii. $z = -\dfrac{d}{c} \in P = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ise $r > 0$ ve $U(z) = \infty$ olmak üzere

$$\mathcal{U}^{-1}(\{z \in \mathcal{U} \mid \operatorname{Im}(z) > r\}) = \left\{ z \in \mathcal{U} : \frac{\operatorname{Im}(z)}{(cz+d)^2} > r \right\}$$

kümesidir, bu küme $z = -\dfrac{d}{c}$ noktasında gerçel eksene teğet ve yarıçapı $\dfrac{1}{2c^2 r}$ olan çember ile sınırlı açık disktir.



Şekil 4.8 $z \in \mathcal{U}^*$ noktasının açık komşuluğu

Dikkat edilirse $\{z \in \mathcal{U} \mid \mathrm{Im}(z) > r\}$ kümesi ∞ noktasının komşuluğudur, bu komşuluğun $U(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü altındaki ters resmi $z = -\dfrac{d}{c}$ noktasının açık komşuluğu olarak alınmaktadır. Böylece yukarıda tanımlanmış Π doğal izdüşüm dönüşümü de

$$\Pi : \mathcal{U}^* \to \mathcal{U}^*/\Gamma, \ \Pi(z) = [z]$$

dönüşümüne genişletilmiş olur. Eğer $[z] \in \mathcal{U}^*/\Gamma$ noktası bir z eliptik noktasının resmi ise $[z]$ noktasına da ***eliptik nokta***, bir z uç noktasının resmi ise $[z]$ noktasına da bir ***uç noktası*** denir.

Γ bir Fuchs grubu ve Λ, Γ Fuchs grubunun sonlu indeksli bir alt grubu ise Γ Fuchs grubunun temel bölgesi kullanılarak Λ alt grubunun temel bölgesi elde edilebilir. $|\Gamma : \Lambda| = n$ olmak üzere eğer F, Γ grubu için bir temel bölge ve

$$\Gamma = \Lambda T_1 \cup \ldots \cup \Lambda T_n$$

ise

$$F' = T_1(F) \cup \ldots \cup T_n(F)$$

kümesi de Λ alt grubu için bir temel bölgedir. Dolayısıyla verilen bir grubun alt gruplarının temel bölgesinin belirlenmesi için kosetlerin ve dolayısıyla koset temsilcilerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu gerçek kullanılarak modüler grubun bazı alt gruplarının temel bölgeleri de elde edilebilir. Her bir $z \in \mathcal{U}$ noktası F' bölgesindeki belli bir noktaya Λ grubuna göre denktir ve F' bölgesi içindeki herhangi iki nokta Λ grubuna göre denk olamaz. F bir temel bölge olduğundan herhangi bir $z \in \mathcal{U}$ noktası için $T(z) \in F$ olacak biçimde bir $T \in \Gamma$ dönüşümü vardır.

Her $n \geq 2$ tamsayısı için n modülüne göre kalan sınıflarının kümesi $\mathbb{Z}_n$ olmak üzere $SL(2, \mathbb{Z}_n)$ bir gruptur ve her $a \in \mathbb{Z}$ için

$$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \ \phi(a) = [a]$$

olarak tanımlanan ϕ doğal halka epimorfizmi bir

$$\widetilde{\phi} : SL(2, \mathbb{Z}) \to SL(2, \mathbb{Z}_n)$$

grup homomorfizmi ve bu homomorfizm de bir

$$\phi_n : \Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\} \to PSL(2, \mathbb{Z}_n) = SL(2, \mathbb{Z}_n)/\{\pm I\}$$

grup homomorfizmi verir. Bu homomorfizmin çekirdeği $\Gamma(n)$ ile gösterilir ise

$$\Gamma(n) = \{T \in \Gamma \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a \equiv d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n),\ b \equiv c \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n)\}$$

dir.

4.13 Tanım. Modüler grubun $\Gamma(n)$ normal alt grubuna ***n seviyeli temel denklik alt grubu*** denir. Eğer Λ, modüler grubun belli bir $\Gamma(n)$ için $\Lambda \subset \Gamma(n)$ özelliğindeki bir alt grubu ise Λ alt grubuna bir ***denklik alt grubu*** ve n sayısı bu özellikteki en küçük sayı ise Λ denklik alt grubuna ***n seviyeli denklik alt grubu*** denir.

Yukarıda tanımlanmış olan

$$\phi_n : \Gamma \to PSL(2, \mathbb{Z}_n)$$

dönüşümü tamamen $\widetilde{\phi}$ dönüşümüne bağlı olarak tanımlanmıştır ve üstelik $\Gamma(n)$, ϕ_n epimorfizminin çekirdeği olduğundan

$$\Gamma/\Gamma(n) \cong PSL(2, \mathbb{Z}_n)$$

dir. Modüler grubun temel denklik alt grupları ve denklik alt grupları özellikle n sayısının bir p asal sayı olarak alınması halinde çok daha önemli özelliklere sahiptir. p bir asal sayı olmak üzere

$$GL(2, \mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p,\ \ ad - bc \neq 0 \ (\mathrm{mod}\ \ p) \right\}$$

grubu dikkate alınırsa (a, b) ve (c, d) sıralı ikilileri lineer bağımsızdır. Dolayısıyla (a, b) sıralı ikililerinin seçimi için, $(0, 0)$ ikilisi hariç tutulursa, $p^2 - 1$ seçim söz konusudur. Diğer yandan her bir (a, b) ikilisi için de (c, d) ikilisinin seçimi için $p^2 - p$ seçim söz konusudur, bu seçimlerde de (a, b) ikilisinin p katı hariç tutulmuştur. Dolayısıyla

$$|GL(2, \mathbb{Z}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$$

dir. Diğer yandan $SL(2, \mathbb{Z}_p)$,

$$\det : GL(2, \mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$$

epimorfizminin çekirdeği olduğundan

$$|SL(2, \mathbb{Z}_p)| = |GL(2, \mathbb{Z}_p)| \,/\, \mathbb{Z}_p \backslash \{0\} = p(\,p^2 - 1)$$

dir. Eğer $PSL(2, \mathbb{Z}_p) = SL(2, \mathbb{Z}_p)/\{\pm I\}$ olduğu dikkate alınırsa

$$|PSL(2, \mathbb{Z}_p)| = \begin{cases} \dfrac{p(p^2-1)}{2}, & p \text{ tek asal sayı} \\ 6, & p = 2 \end{cases}$$

olarak bulunur. Eğer n sayısı bir asal sayı değil ise $|PSL(2, \mathbb{Z}_n)|$, n sayısının asal bölenleri yardımı ile

$$|PSL(2, \mathbb{Z}_n)| = \begin{cases} \dfrac{n^3}{2} \prod\limits_{\substack{p|n \\ p\, asal}} \left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right), & n > 2 \\ 6, & n = 2 \end{cases}$$

olarak bulunur. Bu eşitlik $\Gamma(n)$ temel denklik alt grubunun modüler gruptaki indeksini belirtir.

Modüler grubun $\Gamma(n)$ temel denklik alt gruplarından başka

$$\Gamma_0(n) = \{T \in \Gamma \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, c \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n)\},$$

$$\Gamma^0(n) = \{T \in \Gamma \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n)\}$$

ve

$$\Gamma_1(n) = \{T \in \Gamma \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a \equiv d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n), c \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n)\}$$

olarak tanımlanan özel denklik alt grupları da vardır. Üstelik $\Gamma_0(n)$ ve $\Gamma^0(n)$ alt grupları konjuge (eşlenik) alt gruplardır ve

$$|\Gamma : \Gamma_0(n)| = |\Gamma : \Gamma^0(n)| = p + 1$$

dir (Shimura 1994).

Şimdi, modüler grubun

$$\Gamma(2) = \{T \in \Gamma \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a \equiv d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2), b \equiv c \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}$$

denklik alt grubu için bir temel bölge bulalım. $\Gamma(2)$ grubu, $n = 2$ olmak üzere

$$\tilde{\phi} : SL(2, \mathbb{Z}) \to SL(2, \mathbb{Z}_2)$$

örten dönüşümünün çekirdeği ve $SL(2, \mathbb{Z}_2) = GL(2, \mathbb{Z}_2)$ grubu S_3 grubuna izomorf olduğundan

$$|\Gamma : \Gamma(2)| = 6$$

dır. Bu durumda modülo $\Gamma(2)$ ye göre Γ grubunun koset temsilcileri

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ T^{-1}ST = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak seçilebilir. Dolayısıyla $\Gamma(2)$ grubu için bir temel bölge

$$F(2) = F \cup T^{-1}(F) \cup S^{-1}(F) \cup (TS)^{-1}(F) \cup (ST)^{-1}(F) \cup (T^{-1}ST)^{-1}(F)$$

biçimindedir. Herhangi bir lineer dönüşüm, çember ve doğruları, sırasıyla, çember ve doğrulara resmeder ve gerçel eksene göre simetriyi korur. Bu yöntemle oluşturulan temel bölgenin sınırı, merkezi gerçel eksen üzerindeki rasyonel noktalar olan çember yayları ve dik doğrulardan oluşur. F bölgesinin köşe noktaları

$$\rho = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\overline{\rho} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ i \text{ ve } \infty$$

noktalarıdır. Bu noktalar ve yukarıdaki koset temsilcilerinden faydalanarak $F(2)$ bölgesini elde edebiliriz.

i. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ için $I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $I^{-1}(F) = F$ dir.

ii. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ için $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$T^{-1}(\rho) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ T^{-1}(-\overline{\rho}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ve } T^{-1}(\infty) = 0$$

noktaları $T^{-1}(F)$ bölgesinin köşe noktalarıdır.

iii. $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ için $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$S^{-1}(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ S^{-1}(-\overline{\rho}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ve } S^{-1}(\infty) = 0$$

noktaları $S^{-1}(F)$ bölgesinin köşe noktalarıdır.

iv. $TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ için $(TS)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$(TS)^{-1}(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i,\ (TS)^{-1}(-\overline{\rho}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ve } (TS)^{-1}(\infty) = 0$$

noktaları $(TS)^{-1}(F)$ bölgesinin köşe noktalarıdır.

v. $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ için $(ST)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$(ST)^{-1}(\rho) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\ (ST)^{-1}(-\overline{\rho}) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \text{ ve } \ (ST)^{-1}(\infty) = -1$$

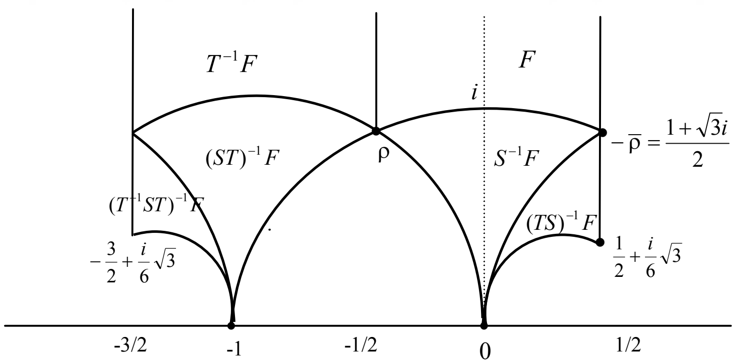
noktaları $(ST)^{-1}(F)$ bölgesinin köşe noktalarıdır.

vi. $T^{-1}ST = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ için $(T^{-1}ST)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$(T^{-1}ST)^{-1}(\rho) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\ (T^{-1}ST)^{-1}(-\overline{\rho}) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \ \text{ ve } \ (T^{-1}ST)^{-1}(\infty) = -1$$

noktaları $(T^{-1}ST)^{-1}(F)$ bölgesinin köşe noktalarıdır.

Elde edilen bu ayrık altı bölgenin birleşimi, $F(2)$ temel bölgesini oluşturur. Dikkat edilirse, bu bölgenin sınırı Re $(z) = -\dfrac{3}{2}$ ve Re $(z) = \dfrac{1}{2}$ dik doğruları, 0 ve -1 merkezli 1 yarıçaplı çember yayları ile 1/3 ve $-4/3$ merkezli 1/3 yarıçaplı çember yaylarından oluşur.

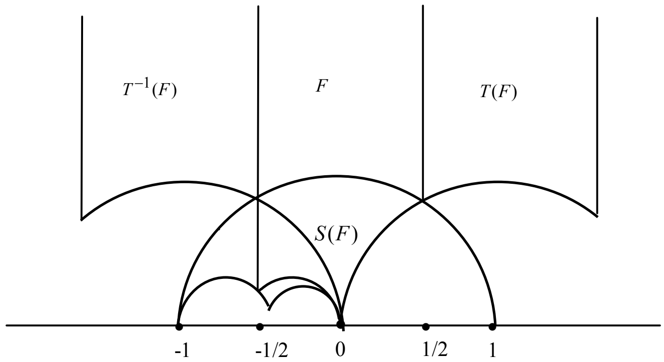


Şekil 4.9 $\Gamma(2)$ denklik alt grubunun temel bölgesi

Benzer şekilde hareket edilerek p bir asal sayı olmak üzere $\Gamma_0(p)$ denklik alt grubunun temel bölgesinin de

$$F \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} ST^k(F)$$

olduğu sonucu elde edilir. Özel olarak, $p = 3$ olarak alınırsa $\Gamma_0(3)$ denklik alt grubu için bir temel bölge aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.10 $\Gamma_0(3)$ denklik alt grubunun temel bölgesi

4.14 Uyarı. Ω kafesi için oluşturulan $\mathbb{C}/\Omega$ bölüm uzayına benzer biçimde Γ Fuchs grubu için de $\mathcal{U}/\Gamma$ bölüm uzayı oluşturulabilir. z noktasının Γ-yörüngesi $[z]$ olmak üzere $\Pi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/\Gamma$, $\Pi(z) = [z]$ kanonik dönüşümü olsun. $V \subseteq \mathcal{U}/\Gamma$ olmak üzere

$$\Pi^{-1}(V) = \{z \in \mathcal{U} \mid \Pi(z) \in V\}$$

açık bir küme ise V kümesine ***açık küme*** denir. Bu topolojik yapı ile birlikte Π kanonik dönüşümü sürekli ve üstelik açık bir dönüşümdür.

Fuchs gruplarının bölüm uzayları Riemann yüzeyleridir. Eğer Λ, eliptik elemanlara sahip olan bir Fuchs grubu ise her bir Riemann yüzeyi $\mathcal{U}$ düzleminin Λ bölüm uzayı olarak ifade edilebilir. Örneğin, üçgen grubunun bölüm uzayı bir küredir ve küreye homeomorfik olan her bir Riemann yüzeyi $\mathbb{C}_\infty$ Riemann küresine konform denktir. Dolayısıyla, Λ bir üçgen grup ise $\mathbb{C}_\infty$ Riemann küresi $\mathcal{U}/\Lambda$ bölüm uzayına konform denktir. Λ, eliptik elemanları olmayan bir Fuchs grubu ise Riemann yüzeyleri ve Fuchs grubunun denklik sınıfları arasında birebir eşleme vardır. Bu nedenle, eliptik elemanlara sahip olmayan Fuchs gruplarıyla çalışmak çok daha avantajlıdır.

Fuchs grupları için temel bölge tanımı hatırlanırsa, F, Λ Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi olmak üzere F/Λ bölüm uzayı ile $\mathcal{U}/\Lambda$ bölüm uzayının homeomorf olduğu sonucu elde edilir.

$\Omega \subset \mathbb{C}$ bir kafes olmak üzere $\mathbb{C}/\Omega$ bölüm uzayı bir Riemann yüzeyidir. Bundan başka

$$g_2 = g_2(\Omega) = 60 \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \omega^{-4} \text{ ve } \; g_3 = g_3(\Omega) = 140 \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \omega^{-6}$$

olmak üzere $p(z) = 4z^3 - g_2^3 z - g_3^2$ ise $\mathbb{C}/\Omega$, $\sqrt{p(z)}$ fonksiyonunun Riemann yüzeyidir.

Ω ve Ω', $\mathbb{C}$ üzerinde iki kafes olmak üzere, $\mathbb{C}/\Omega$ ve $\mathbb{C}/\Omega'$ Riemann (tor) yüzeylerinin konform denk, yani homeomorf olmaları için gerek ve yeter koşul Ω ve Ω' kafeslerinin benzer olmasıdır, yani belli bir $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ için $\Omega' = \mu\Omega$ dir. Son eşitlik, $\{\omega_1, \omega_2\}$ ve $\{\omega_1', \omega_2'\}$, sırasıyla, Ω ve Ω' kafesleri için baz, a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = \pm 1$ olmak üzere

$$\omega_1' = \mu(a\omega_2 + b\omega_1)$$
$$\omega_2' = \mu(c\omega_2 + d\omega_1)$$

olduğunu belirtir. ω_1 ve ω_2, $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsız olduğundan $\mathrm{Im}(\frac{\omega_2}{\omega_1}) \neq 0$ dır, dolayısıyla gerektiğinde ω_1 ve ω_2 değiştirilebilir ve böylece $\mathrm{Im}(\frac{\omega_2}{\omega_1}) > 0$ olarak alınabilir. $\{\omega_1, \omega_2\}$, Ω kafesi için bir baz olmak üzere

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

sayısına $\{\omega_1, \omega_2\}$ ***bazının modülü*** denir. Doğal olarak her bir kafes bir modül kümesi belirler ve kafesin modülü kafesin bazlarının seçimine bağlıdır. Bundan başka $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ için $\mu\omega_2/\mu\omega_1 = \omega_2/\omega_1$ olduğundan benzer kafesler aynı modül kümesini belirler. Dolayısıyla bazları $\{\omega_1, \omega_2\}$ ve $\{\omega_1', \omega_2'\}$ olan Ω ve Ω' kafeslerinin benzer olması için gerek ve yeter koşul a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = \pm 1$ olmak üzere

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = T(\tau)$$

olmasıdır. Eğer τ ve τ' modüllerinin ikisinin de üst yarı düzlemde kalması istenirse $ad - bc = 1$ olarak alınmasının gerektiği açıktır. Tersine $ad - bc = 1$ ise bazı $\{\omega_1', \omega_2'\}$ olan Ω' kafesi, Ω kafesi ile benzerdir. Dolayısıyla $\mathbb{C}/\Omega$ ve $\mathbb{C}/\Omega'$ Riemann (tor) yüzeylerinin konform denk olmaları için gerek ve yeter koşul belli bir $T \in \Gamma$ için

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = T(\tau)$$

olmasıdır.

$\Omega \subset \mathbb{C}$ bir kafes,

$$g_2 = g_2(\Omega) = 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-4}, \; g_3 = g_3(\Omega) = 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-6}$$

ve $p(z) = 4z^3 - g_2{}^3 z - g_3{}^2$ olmak üzere p polinomunun farklı sıfırlarının olması halinde

$$\Delta(\Omega) = g_2(\Omega)^3 - 27\, g_3(\Omega)^2 \neq 0$$

dır ve dolayısıyla

$$J(\Omega) = \frac{g_2(\Omega)^3}{\Delta(\Omega)} = \frac{g_2(\Omega)^3}{g_2(\Omega)^3 - 27 g_3(\Omega)^2}$$

olarak tanımlanan J fonksiyonu iyi tanımlıdır ve bu fonksiyona ***modüler J-fonksiyonu*** denir. $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere $\mu\Omega$ benzer kafesi için

$$g_2(\mu\Omega) = 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} (\mu\omega)^{-4} = \mu^{-4} g_2(\Omega), \quad g_3(\mu\Omega) = 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} (\mu\omega)^{-6} = \mu^{-6} g_3(\Omega)$$

ve

$$\Delta(\mu\Omega) = \mu^{-12} \Delta(\Omega)$$

olduğu göz önüne alınırsa, her $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için

$$J(\mu\Omega) = J(\Omega)$$

olduğu sonucu elde edilir, yani benzer kafesler aynı J değerlerini belirtir. Özel olarak $\Omega = \Omega(1, \tau)$ kafesi dikkate alınırsa

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m + n\tau)^{-4}, \; g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m + n\tau)^{-6} \text{ ve}$$

$$\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2$$

olmak üzere

$$J(\tau) = \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$$

olur. Diğer yandan belli bir $T \in \Gamma$ için $\tau' = T(\tau)$ ise $\Omega = \Omega(1, \tau)$ ve $\Omega' = \Omega(1, \tau')$ kafesleri benzerdir ve $J(\tau) = J(\tau')$ dir. O halde her $\tau \in \mathcal{U}$ ve $T \in \Gamma$ için $J(\tau) = J(T(\tau))$ olur, yani $J(\tau)$ değeri modüler grubun hareketi altında değişmez kalır. $T \in \Gamma$, yani $T(\tau) = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ olmak üzere $ad - bc = 1$ olduğundan

$$g_2(T(\tau)) = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m + n(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}))^{-4} = 60(c\tau+d)^{-4} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m(c\tau+d)+n(a\tau+b))^{-4}$$

$$= 60(c\tau+d)^{-4} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (md+nd+(mc+na)\tau)^{-4}$$

olur. $(m, n) \to (md + nb, mc + na)$ fonksiyonu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\setminus\{(0, 0)\}$ kümesinin elemanlarının bir permütasyonu olduğundan

$$g_2(T(\tau)) = 60(c\tau+d)^{-4} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+n\tau)^{-4} = (c\tau+d)^{-4} g_2(\tau)$$

ve benzer biçimde

$$g_3(T(\tau)) = (c\tau+d)^{-6} g_3(\tau) \text{ ve } \Delta(T(\tau)) = (c\tau+d)^{-12} \Delta(\tau)$$

olarak bulunur. Özel olarak, $T(\tau) = \tau + 1$ olarak alınırsa $a = b = d = 1$ ve $c = 0$ olduğundan

$$g_2(\tau),\ g_3(\tau),\ \Delta(\tau) \text{ ve } J(\tau)$$

fonksiyonlarının $\mathbb{Z}$-periyodik olduğu sonucu elde edilir. Bundan başka

$$g_2,\ g_3,\ \Delta \text{ ve } J : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$$

fonksiyonlarının $\mathcal{U}$ üzerinde analitik oldukları da görülebilir. Üstelik $\tau \in \mathcal{U}$ ve $q = e^{2\pi i\tau}$ olmak üzere $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ ve $\Delta(\tau)$ fonksiyonlarının

$$g_2(\tau) = \pi^4(\frac{4}{3} + 320q + 2880q^2 + 8960q^3 + \ldots)$$

$$g_3(\tau) = \pi^6(\frac{8}{27} - \frac{448}{3}q - 4928q^2 - \ldots)$$

$$\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 = \pi^{12}(4096q - 98304q^2 + \ldots)$$

açılımları yardımıyla $J(\tau)$ fonksiyonunun $q = 0$, yani $\tau = \infty$ daki seri açılımı

$$J(\tau) = \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = \frac{1}{1728}\left(\frac{1}{q} + 744 + 196884q + \ldots\right)$$

olarak bulunur. Bu açılımlar dikkate alındığında J fonksiyonunun $q = 0$, yani $\tau = \infty$ da basit kutba sahip olduğu görülür.

5. MODÜLER FORMLAR

Bu kısımda ilk olarak zayıf modüler fonksiyon kavramı tanımlanacak, örnekler verilecek ve daha sonra modüler formlar ele alınacaktır. Bu bölümün sonunda da modüler formların uygulamaları üzerinde durulacaktır. Kabaca, bir modüler form üst yarı düzlem üzerinde tanımlı, modüler grubun etkisi altında değişmeze yakın ve üstelik özel bir analitiklik özelliğine sahip fonksiyonlardır. Doğal olarak modüler grubun bu fonksiyonlar üzerindeki etkisi yerine modüler grubun alt gruplarının bu fonksiyonlar üzerindeki etkileri dikkate alındığında, modüler form örneklerinin çoğalacağı açıktır.

Hatırlanacağı gibi $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun elemanları, $\mathbb{C}_\infty$ Riemann küresi üzerinde tanımlı otomorfizmlerdir, yani, $z \in \mathbb{C}_\infty$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

kesirli lineer dönüşümleridir. Modüler grup, $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun üzerinde en çok çalışılan alt grubudur. Bu kısımda modüler grup ve alt gruplarına bağlı olarak tanımlanan özel fonksiyonlar ele alınacaktır. Daha önce olduğu gibi modüler grup Γ ile gösterilecektir.

5.1 Tanım. $k \in \mathbb{Z}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ bir meromorf fonksiyon ve $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ olmak üzere her $T \in \Gamma$ ve her $z \in \mathcal{U}$ için

$$f(T(z)) = (cz+d)^k f(z)$$

eşitliğini gerçekliyorsa f fonksiyonuna bir ***k* ağırlıklı zayıf modüler fonksiyon** denir.

5.2 Uyarı 1. Hatırlanacağı gibi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri $SL(2, \mathbb{Z})$ grubunun ve bu matrislere karşılık gelen dönüşümler de modüler grubun üreteçleridir, yani modüler grubun her bir elemanı bu dönüşümlerin sonlu tanesi ile elde edilebilir. Dolayısıyla yukarıda ifade edilen eşitlik, sadece bu üreteç dönüşümleri için gerçeklenirse modüler grubun her bir elemanı için de gerçekleneceği açıktır. Bu üreteç dönüşümleri dikkate alındığında, eğer f meromorf fonksiyonu ve her $z \in \mathcal{U}$ için

$$f(z+1) = f(z) \ \text{ ve } f(-1/z) = z^k f(z)$$

eşitlikleri gerçekleniyorsa f fonksiyonu bir k ağırlıklı zayıf modüler fonksiyondur. Bu eşitliklerden $f(z+1) = f(z)$ eşitliği, her bir f zayıf modüler fonksiyonun periyodik ve periyodunun 1 olduğunu, yani her bir f zayıf modüler fonksiyonun bir $\mathbb{Z}$-periyodik fonksiyon olduğunu gösterir.

2. Tanımda, modüler grup yerine modüler grubun bir alt grubunun alınması halinde uygulamada daha çok modüler form elde edileceği açıktır. Örneğin, sayılar teorisinin önemli problemlerinden birisi olan "dört kare problemi" dikkate alındığında bu problemin çözümünde modüler grubun özel bir denklik alt grubu kullanılır ve bu alt gruba göre modüler formlar kullanılarak bu problemin çözümü elde edilir.

3. Zayıf modüler fonksiyon tanımı dikkate alındığında, her $T \in \Gamma$ ve her $z \in \mathcal{U}$

$$f(T(z)) = f(z)$$

ise, yani modüler grubun f fonksiyonu üzerindeki etkisi altında f fonksiyonu değişmez kalıyor ise f fonksiyonu 0 ağırlıklı modüler fonksiyondur. Dolayısıyla her bir otomorf fonksiyon özel bir modüler fonksiyondur, yani modüler fonksiyonlar modüler gruba göre otomorf fonksiyonlardan daha genel fonksiyonlardır. Yukarıdaki eşitlik dikkate alındığında her bir sabit fonksiyonunun bu eşitliği gerçeklediği açıktır, yani her bir sabit fonksiyon bir modüler formdur.

4. $T \in \Gamma$ olmak üzere $dT(z) = \dfrac{dz}{(cz+d)^2}$ olduğu hatırlanırsa, $f(T(z))\ dT(z) = f(z)\ dz$ eşitliğinden

$$f(T(z)) = (c\,z + d)^2 f(z)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla diferensiyel operatörü bir 2 ağırlıklı modüler fonksiyon olarak düşünülebilir.

5. Eğer $-I \in SL(2, \mathbb{Z})$ dikkate alınırsa

$$f(-I(z)) = f(z) = (-1)^k f(z)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik k tamsayısının tek olması halinde k ağırlıklı f modüler fonksiyonun sadece sıfır sabit fonksiyonu olabileceği sonucu elde edilir.

6. Ağırlığı 2 olan iki tane modüler fonksiyonun çarpımının ağırlığı 4 olan bir modüler fonksiyon olacağı ve bu şekilde hareket edilerek daha büyük çift ağırlıklı modüler fonksiyonların elde edileceği açıktır. Bu nedenle 2 ağırlıklı modüler fonksiyonlar ve modüler formlar, modüler formlar teorisinin temelini oluşturur.

7. Tanımdan da görüldüğü gibi, f fonksiyonu zayıf modüler fonksiyon ise f fonksiyonu modüler grubun etkisi altında değişmez kalmaz. Otomorfi çarpanı olan $cz + d$ çarpanının üst yarı düzlemde hiç bir kutup yeri veya sıfır yeri olmadığından $f(z)$ ve $f(T(z))$ fonksiyonları üst yarı düzlemde, daima aynı sıfır ve kutup yerlerine sahip fonksiyonlardır.

8. $\mathbb{Z}$-periyodik ve holomorf olan $z \to q = e^{2\pi iz}$ dönüşümü üst yarı düzlemi $D' = D\backslash\{0\}$ delinmiş birim disk üzerine resmeder. Dolayısıyla f fonksiyonuna bağlı olarak,

$$g : D' \to \mathbb{C},\ g(q) = f\left(\frac{\log(q)}{2\pi i}\right)$$

biçiminde tanımlanan g fonksiyonu iyi tanımlıdır ve üstelik $f(z) = g(e^{2\pi iz})$ dir. Eğer f fonksiyonu üst yarı düzlemde analitik ise logaritma fonksiyonu delinmiş diskin her bir noktasında analitik olduğundan g fonksiyonu da delinmiş disk üzerinde analitiktir. Böylece, $q \in D'$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere g fonksiyonu

$$g(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n$$

Laurent açılımına sahiptir. Üstelik $|q| = e^{-2\pi \mathrm{Im}(z)}$ olduğundan $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ için $q \to 0$ dir, dolayısıyla g fonksiyonu $q = 0$ noktasında analitik olacak şekilde tanımlanırsa, f fonksiyonun da ∞ noktasında analitik bir fonksiyon ve dolayısıyla yukarıdaki açılımda $n \in \mathbb{N}$ olacağı açıktır. Böylece, $q = e^{2\pi iz}$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n$$

biçiminde bir Fourier seri açılımına sahiptir. Diğer yandan $q \to 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ olduğu dikkate alınırsa, bir $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ zayıf modüler analitik fonksiyonunun ∞ noktasında analitik olduğunu göstermek için Fourier serisine açmak yerine $\lim_{\mathrm{Im}(z)\to\infty} f(z)$ limitinin var olduğunu ya da $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ için $f(z)$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

5.3 Tanım. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere k ağırlıklı zayıf modüler $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu üst yarı düzlemde ve ∞ noktasında analitik ise f fonksiyonuna bir ***k* ağırlıklı modüler form** denir ve tüm k ağırlıklı modüler formların kümesi $M_k(\Gamma)$ ile gösterilir.

5.4 Uyarı 1. Yukarıda da belirtildiği gibi, her bir sabit fonksiyon bir 0 ağırlık modüler formdur. Dolayısıyla $\mathbb{C} \subset M_0(\Gamma)$ dır, bundan başka 0 ağırlıklı her bir modüler fonksiyonun da sabit fonksiyon olduğu görülebilir, yani $M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$ dir. Doğal olarak herhangi sabit fonksiyon $k \neq 0$ olmak üzere bir k ağırlıklı modüler form değildir.

2. $M_k(\Gamma)$, $\mathbb{C}$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır. Gerçektende herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $f, g \in M_k(\Gamma)$, her $T \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(T(z)) &= (\alpha f)(T(z)) + (\beta g)(T(z)) = \alpha f(T(z)) + \beta g(T(z)) \\ &= \alpha(cz + d)^k f(z) + \beta(cz + d)^k g(z) = (cz + d)^k[\alpha f(z) + \beta g(z)] \\ &= (cz + d)^k\,(\alpha f + \beta g)(z)\end{aligned}$$

eşitliği, $\alpha f + \beta g$ fonksiyonunun da bir k ağırlıklı zayıf modüler fonksiyon olduğunu gösterir, üstelik f ve g fonksiyonları üst yarı düzlemde ve ∞ noktasında analitik olduklarından $\alpha f + \beta g$ fonksiyonu da üst yarı düzlemde ve ∞ noktasında analitiktir. Dolayısıyla $\alpha f + \beta g \in M_k(\Gamma)$ dir. $M_k(\Gamma)$ vektör uzayının boyutları üzerinde daha sonra durulacaktır.

3. f ve g, sırasıyla k ve l ağırlıklı iki modüler form olsun. $T \in \Gamma$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(fg)(T(z)) &= f(T(z))\, g(T(z)) = (cz + d)^k f(z)\,(cz + d)^l g(z) \\ &= (cz + d)^{k+l}\,[f(z)g(z)] \\ &= (cz + d)^{k+l}\,(fg)(z)\end{aligned}$$

eşitliği dikkate alındığında fg fonksiyonunun ağırlığı $k + l$ olan bir modüler form olduğu sonucu elde edilir. Bundan başka $M_k(\Gamma)$ ve $M_l(\Gamma)$ kümelerinin ayrık oldukları açıktır. Dolayısıyla

$$M(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_k(\Gamma)$$

toplamı bir halkadır.

5.5 Örnek 1. Üst yarı düzlem üzerinde tanımlı sıfır sabit fonksiyonunun her bir $k \in \mathbb{Z}$ için k ağırlıklı bir modüler form olduğu açıktır. Bundan başka, daha önce de belirtildiği gibi, üst yarı düzlem üzerinde tanımlı her bir sabit fonksiyon 0 ağırlıklı bir modüler formdur.

2. $k > 2$ çift bir tamsayı ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$G_k(z) = \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

olarak tanımlanan Eisenstein serileri k ağırlıklı modüler formlardır. Hatırlanacağı gibi, $G_k(z)$ fonksiyonunu tanımlayan seri mutlak yakınsaktır ve üst yarı düzlemin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, bu serisi $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminde analitiktir ve terimleri yeniden düzenlenebilir. Her $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ için

$$G_k(T(z)) = \sum_{(c',d')\neq(0,0)} \frac{1}{\left(c'\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)+d'\right)^k}$$

$$= (cz+d)^k \sum_{(c',d')\neq(0,0)} \frac{1}{((c'a+d'c)z+(c'b+d'd))^k}$$

ve üstelik $(c', d') \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0,\ 0)\}$ olduğundan $(c'a+d'c,\ c'b+d'd) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0,\ 0)\}$ dir, dolayısıyla,

$$G_k(T(z)) = (cz+d)^k \sum_{(C,D)\neq(0,0)} \frac{1}{(Cz+D)^k} = (cz+d)^k\, G_k(z)$$

yazılabilir. Bu ise G_k fonksiyonunun bir k ağırlıklı zayıf modüler fonksiyon olduğunu gösterir. Diğer yandan, $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ için G_k sınırlıdır, yani, ∞ noktasında analitiktir. Dolayısıyla G_k bir k ağırlıklı modüler formdur.

G_k serisi için Fourier serisi hesaplanacak olursa, $z \in \mathcal{U}$ ve $q = e^{2\pi iz}$ olmak üzere

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = \pi \cot \pi z = \pi i - 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} q^m$$

eşitliğinin $k \geq 2$ olmak üzere z değişkenine göre $k - 1$ defa türevi alınırsa

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(z+d)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} q^m$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla k çift bir sayı olmak üzere

$$\sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{1}{(cz+d)^k} = \sum_{d\neq 0}\frac{1}{d^k} + 2\sum_{c=1}^{\infty}\left(\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(cz+d)^k}\right)$$

ve ζ, Riemann zeta fonksiyonu olmak üzere

$$\sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{1}{(cz+d)^k} = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} q^{cm}$$

olur. Bu eşitlikten ,

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{\substack{m|n \\ m>0}} m^{k-1}$$

ve $k > 2$ çift tamsayı olmak üzere $G_k(z)$ serisinin Fourier açılımı

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n) q^n$$

olarak ifade edilebilir. Fourier açılımının katsayıları $2\zeta(k)$ ile bölünerek elde edilen

$$E_k(z) = \frac{G_k(z)}{2\zeta(k)}$$

serisine ***k ağırlıklı normalleştirilmiş Eisenstein serisi*** denir

Modüler formlar kümesi bir halka ve üstelik Eisenstein serileri de birer modüler form olduklarından Eisenstein serilerinin çarpımlarının çeşitli toplamlarından yeni modüler formlar oluşturulabilir. Örneğin, $M_8(\Gamma)$ modüler formlar uzayı 1 boyutlu bir vektör uzayıdır ve $E_4(z)^2$, $E_8(z) \in M_8(\Gamma)$ dir. Her iki fonksiyonu ifade eden serilerin ilk terimleri 1 dir ve $E_4(z)^2 = E_8(z)$ dir. Bu eşitlikten σ_3 ve σ_7 fonksiyonları arasında, $n \geq 1$ olmak üzere

$$\sigma_7(z) = \sigma_3(z) + 120\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_3(i)\sigma_3(n-i)$$

bağıntısının olduğu görülür. Eisenstein serilerinden farklı ve sabit terimi 0 olan bu modüler formlar oldukça önemli modüler formlardır.

5.6 Tanım. *f*, bir *k* ağırlıklı modüler form olmak üzere, *f* fonksiyonunun Fourier seri açılımında $a_0 = 0$, yani $q = e^{2\pi iz}$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

ise *f* fonksiyonuna bir ***k* ağırlıklı uç (cusp) form** denir ve tüm *k* ağırlıklı uç formların kümesi $S_k(\Gamma)$ ile gösterilir.

Bu tanım dikkate alındığında, *f* bir *k* ağırlıklı bir modüler form olmak üzere $\lim_{\mathrm{Im}(z)\to\infty} f(z) = 0$ olması halinde *f* bir *k* ağırlıklı uç formdur. *k* ağırlıklı uç formların kümesi de bir vektör uzayıdır ve üstelik her bir *k* ağırlıklı uç formun bir *k* ağırlıklı modüler form olduğu açıktır. Dolayısıyla $S_k(\Gamma)$ vektör uzayı, $M_k(\Gamma)$ vektör uzayının alt vektör uzayıdır. Bundan başka

$$S(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} S_k(\Gamma)$$

halkası da $M(\Gamma)$ halkasının bir idealidir.

5.7 Örnek. Daha önce ele alınmış olan $G_k(z)$ fonksiyonları için $\lim_{z\to i\infty} G_k(z) \neq 0$ olduğundan $G_k(z)$ fonksiyonları, *k* ağırlıklı modüler form oldukları halde birer uç form değillerdir. Bununla birlikte bu fonksiyonlar kullanılarak uç formlar elde edilebilir.

$$g_2(z) = 60G_4(z) \text{ ve } g_3(z) = 140G_6(z)$$

olmak üzere

$$\Delta : \mathcal{U} \to \mathbb{C},\ \Delta(z) = g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2$$

olarak tanımlanmış olan diskriminant fonksiyonu bir 12 ağırlıklı zayıf modüler formdur ve üstelik üst yarı düzlem üzerinde analitiktir. $\Delta(z)$ fonksiyonun Fourier açılımında $a_0 = 0$, $a_1 = (2\pi)^{12}$ olduğundan $\Delta(z)$ fonksiyonu, aşikar olmayan 12 ağırlıklı bir uç formdur, yani $\Delta \in S_{12}(\Gamma)$ dır. Üstelik her $z \in \mathcal{U}$ için $\Delta(z) \neq 0$ dır ve dolayısıyla, $\Delta(z)$ fonksiyonu sadece ∞ noktasında sıfır yerine sahiptir.

$E_4(z)$ ve $E_6(z)$ normalleştirilmiş Eisenstein serilerini kullanarak da Δ fonksiyonu ve Ramanujan τ fonksiyonu

$$\Delta(z) = \frac{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}{1728} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

biçiminde tanımlanabilir. $\Delta(z)$ fonksiyonunun $\tau(n)$ Fourier katsayılarının her biri tam sayıdır ve üstelik bu katsayılar çarpımsaldır, yani $(m, n) = 1$ ise

$$\tau(m, n) = \tau(m)\cdot\tau(n)$$

dir. Bundan başka p bir asal ve $n \geq 2$ olmak üzere $\tau(n)$ fonksiyonu

$$\tau(p^n) = \tau(p)\cdot\tau(p^{n-1}) - p^{11}\cdot\tau(p^{n-2})$$

tekrarlama bağıntısını gerçekler.

$$j : \mathcal{U} \to \mathbb{C},\ j(z) = 1728\frac{g_2(z)^3}{\Delta(z)}$$

modüler fonksiyonu da üst yarı düzlemde analitiktir. j fonksiyonunun pay ve paydası aynı ağırlıkta olduğundan j fonksiyonu Γ grubunun etkisi altında invaryant kalır, yani, daha önce de belirtildiği gibi $T \in \Gamma$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$j(T(z)) = j(z)$$

dir.

$$j(z) = \frac{(2\pi)^{12} + \ldots}{(2\pi)^{12} q + \ldots} = \frac{1}{q} + \ldots$$

açılımından da görüldüğü gibi $j(z)$ fonksiyonun ∞ noktasında basit kutup yeri vardır ve dolayısıyla $j(z)$ fonksiyonu bir modüler form değildir.

5.8 Tanım. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$j(T, z) = cz + d \in \mathbb{C}$$

değerine ***otomorfi çarpanı***, $k \in \mathbb{Z}$ ve $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ olmak üzere $z \in \mathcal{U}$ için

$$(f[T]_k)(z) = j(T, z)^{-k} f(T(z))$$

olarak tanımlanan $[T]_k$ operatörüne ***f fonksiyonu üzerindeki k ağırlık operatörü*** denir.

Tanımı dikkate alındığında, $T \in \Gamma$ ve $z \in \mathcal{U}$ olduğundan otomorfi çarpanı asla sıfır veya sonsuz olamayacağından f bir meromorf fonksiyon ise $f[T]_k$ fonksiyonu da meromorf bir fonksiyondur ve üstelik f fonksiyonu ile aynı sıfır ve kutup yerlerine sahiptir. Dolayısıyla f fonksiyonu meromorf ve Γ altında k ağırlıklı değişmez ise f fonksiyonu Γ grubuna göre k ağırlıklı zayıf modüler fonksiyon tanımı ağırlık operatörü kullanılarak da ifade edilebilir; f, $\mathcal{U}$ üzerinde meromorf fonksiyon olmak üzere, eğer her $T \in \Gamma$ için $f[T]_k = f$ ise f fonksiyonu k ağırlıklı zayıf modülerdir. Bundan başka, f fonksiyonu k ağırlıklı zayıf modüler bir fonksiyon ise f fonksiyonun sıfır ve kutup yerlerinin oluşturduğu kümeler Γ grubu altında invaryant kalır.

5.9. Uyarı 1. Otomorfi çarpanı ve k ağırlık operatörünün daha sonra kullanılacak bazı özellikleri şu şekilde sıralanabilir. Her T, $V \in \Gamma$ ve $z \in \mathcal{U}$ için

i. $j(TV, z) = j(T, V(z))\, j(V, z)$ dir, gerçekten $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $V(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ olmak üzere

$TV(z) = \dfrac{(a\alpha+b\gamma)z+a\beta+b\delta}{(c\alpha+d\gamma)z+c\beta+d\delta}$ ve $j(V, z) = \gamma z + \delta$ olduğundan

$$j(TV, z) = (c\alpha + d\gamma)z + c\beta + d\delta = \left(c\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)+d\right)(\gamma z+\delta) = j(T, V(z))\, j(V, z)$$

ii. $[TV]_k = [T]_k[V]_k$ dir, gerçekten herhangi $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ve T, $V \in \Gamma$ için

$$(f[TV]_k)(z) = j(TV, z)^{-k} f((TV)(z))$$

ve

$$((f[T]_k)[V]_k)(z) = j(V, z)^{-k}\,(f[T]_k)(V(z)) = j(V, z)^{-k}\, j(T, V(z))^{-k} f(T(V(z)))$$

eşitlikleri dikkate alındığında, $f((TV)(z)) = f(T(V(z)))$ ve $j(TV, z)^{-k} = j(V, z)^{-k}\, j(T, V(z))^{-k}$ olduğundan eşitliklerin sağ tarafları ve dolayısıyla sol tarafları eşittir.

iii. $\dfrac{dT(z)}{dz} = \dfrac{1}{(cz+d)^2} = \dfrac{1}{j(T,z)^2}$ dir.

2. Bu özellikler dikkate alındığında, daha önce de belirtildiği gibi bir $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun modüler olduğunu göstermek için sadece üreteç dönüşümlerinin dikkate alınmasının yeterli olacağı açıktır. Örneğin, modüler grup için $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerine karşılık gelen dönüşümler üreteç olduğundan sadece bu matrisler dikkate alınarak bir f fonksiyonunun modüler olup olmadığı sadece bu matrisler dikkate alınarak kontrol edilebilir. Benzer şekilde modüler grubun $\Gamma_0(4)$ alt grubunun üreteçleri de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ matrislerine karşılık gelen dönüşümler olduğundan bir f fonksiyonunun $\Gamma_0(4)$ alt grubuna göre modüler olup olmadığı da sadece bu matrisler dikkate alınarak kontrol edilebilir. Örneğin, ayrıntılı tanımı daha sonra ele alınacak olan $\theta(z, 4)$ fonksiyonunun, $\Gamma_0(4)$ alt grubuna göre 2 ağırlıklı bir modüler form olduğu sonucu bu matrisler kullanılarak elde edilebilir.

3. Bu açıklamalardan sonra, modüler form tanımı modüler grubun bir denklik alt grubu için de verilebilir. Λ, modüler grubun bir denklik alt grubu ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu Λ grubuna göre bir k ağırlıklı zayıf modüler fonksiyon ve üstelik aşağıda tanımlanacak olan analitiklik bağıntısını da gerçekliyorsa f fonksiyonu Λ grubuna göre k ağırlıklı zayıf modüler form olarak adlandırılacaktır. Doğal olarak bazı alt gruplar için $-I \in SL(2, \mathbb{Z})$ bu alt grupta olmayabilir, dolayısıyla modüler gruba göre tek ağırlıklı modüler form olmadığı halde bazı alt gruplara göre tek ağırlıklı modüler formlar olabilir.

4. Modüler grubunun her bir Λ denklik alt grubu, olabildiğince küçük belli bir $h \in \mathbb{Z}^+$ için $T(z) = z + h$ dönüşümünü bulundurur. Böylece h, N sayısını tam böler ve Λ denklik alt grubu, N için $\Gamma(N)$ temel denklik alt grubunu bulundurur. Dolayısıyla Λ grubuna göre zayıf modüler olan her bir $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $h\mathbb{Z}$-periyodiktir ve böylece bu fonksiyona karşılık, $q_h = e^{2\pi iz/h}$ olmak üzere, $f(z) = g(q_h)$ özelliğinde bir $g : D' \to \mathbb{C}$ fonksiyonu vardır. Eğer f üst yarı düzlem üzerinde analitik bir fonksiyon ise g fonksiyonu da D' üzerinde analitiktir ve dolayısıyla bir Laurent açılımına sahiptir. Eğer g fonksiyonu $q = 0$ noktasında analitik olarak tanımlanabiliyor ise f fonksiyonu da ∞ noktasında analitik olarak tanımlanır, bu durumda f fonksiyonunun, $q_h = e^{2\pi iz/h}$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_h^n$$

biçiminde bir Fourier açılımı olur.

5. Modüler formların oluşturduğu vektör uzaylarının sonlu boyutlu olmaları için modüler formların sadece üst yarı düzlemde analitik olmaları yeterli değildir, ek olarak, limit noktalarında da analitik olmaları gerekir. Hatırlanacağı gibi, bir Λ denklik alt grubunun limit noktaları kümesi üst yarı düzleme ∞ noktası ile rasyonel sayılar kümesinin eklenmesiyle elde edilir ve bu noktalardan Λ-denk olanlar özdeşlenir. Hatırlanacağı gibi, $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ kümesindeki Λ-denk olan noktaların oluşturduğu Λ-denklik sınıflarına Λ grubunun bir uç (cusp) noktası denir. Modüler grup için, tüm rasyonel sayılar ∞ noktasına denk olduğundan bir tek denklik sınıf vardır, yani bir tek uç noktası vardır ve bu denklik sınıfı, yani uç noktası ∞ ile gösterilir. Eğer Λ, modüler grubun bir has alt grubu ise daha az nokta birbirine denk olacağından rasyonel sayılarla temsil edilen daha fazla uç noktalar olacaktır. Her bir $s \in \mathbb{Q}$ noktası için $s = T(\infty)$ olacak biçiminde belli bir $T \in \Gamma$ olduğundan uç noktaların sayısı en fazla modüler gruptaki ΛT kosetlerinin sayısı kadardır. Diğer yandan $|\Gamma : \Lambda|$ indeksinin sonlu olduğu dikkate alınırsa, uç noktaların sayısının da sonlu olacağı açıktır.

Λ denklik alt grubuna göre bir modüler form uç noktalarda analitik olmalıdır. Herhangi $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ için $s = T(\infty)$ olmak üzere modüler formun ∞ noktasındaki analitikliği $[T]_k$ operatörü yardımıyla tanımlanabilir. $[T]_k$ operatörü üst yarı düzlemde analitik ve modüler grubun bir denklik alt grubu olan $T^{-1}\Lambda T$ grubuna göre de zayıf modüler olduğundan ∞ noktasında analitikliği anlamlıdır ve dolayısıyla aşağıdaki tanım verilebilir.

5.10 Tanım. Λ, bir denklik alt grubu ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için

i. f fonksiyonu analitik,

ii. f, Λ grubunun etkisi altında k ağırlıklı değişmez,

iii. Her $T \in \Gamma$ için $f[T]_k$ fonksiyonu ∞ noktasında analitik

koşulları gerçekleniyorsa f fonksiyonuna ***$\Lambda \subset \Gamma$ grubuna göre bir k ağırlıklı modüler form*** denir.

Bu koşullara ek olarak, f fonksiyonu için

iv. Her $T \in \Gamma$ için $f[T]_k$ fonksiyonunun Fourier açılımında $a_0 = 0$

koşulu da gerçekleniyorsa f fonksiyonuna ***$\Lambda \subset \Gamma$ grubuna göre bir k ağırlıklı uç (cusp) form*** denir.

$\Lambda \subset \Gamma$ grubuna göre tüm k ağırlıklı modüler formların kümesi $M_k(\Lambda)$ ve tüm k ağırlıklı uç formların kümesi de $S_k(\Lambda)$ ile gösterilir.

5.11 Uyarı 1. Dikkat edilirse, tanımdaki (***iii***) ve (***iv***) koşulları, Λ denklik alt grubundan bağımsız olarak ifade edilmişlerdir. Diğer yandan $\Gamma = \bigcup_j \Gamma T_j$ ve (***ii***) koşulu gereği, her $V \in \Lambda$ için $f[VT_j]_k = f[T_j]_k$ olduğundan $f[T]_k$ için (***iii***) ve (***iv***) koşullarının gerçeklenip gerçeklenmediğini sadece sonlu çoklukta ve Λ alt grubuna bağlı olan T_j koset temsilcisi için kontrol edilmesi gereklidir.

2. Λ, modüler grubun N seviyeli bir denklik alt grubu ve $z \in \mathcal{U}$ için $q_N = e^{2\pi iz/N}$ olmak üzere $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu yukarıda verilen tanımdaki (***i***) ve (***ii***) koşullarını gerçekliyor ise

iii'. C ve r belli pozitif tam sayılar olmak üzere $n > 0$ için $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_N^n$ Fourier açılımının katsayıları $|a_n| \le Cn^r$ özelliğindedir,

koşulunu da gerçekler. Dolayısıyla f fonksiyonu, tanımdaki (***iii***) koşulunu da gerçekler ve böylece $f \in M_k(\Lambda)$ olur.

3. (***iii***) koşulu, her bir $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ noktasına f fonksiyonunun bir tek Fourier açılımının karşılık geldiğini belirtmemektedir. Eğer $s = T(\infty)$ ise $n \in \mathbb{Z}$ için $V(z) = z + n'$ olmak üzere $s = TV(\infty)$ olduğu açıktır. Bundan başka $(f[TV]_k)(z) = (f[T]_k)(z + n')$ dir. Eğer $h' \in \mathbb{Z}$, $V'(z) = z + h'$ olmak üzere $V' \in T^{-1}\Lambda T$ olacak biçimdeki en küçük pozitif tamsayı ise, $\Lambda(N) \subset \Lambda$ ve $\Lambda(N)$, modüler grubun normal alt grubu olduğundan $\Lambda(N) \subset T^{-1}\Lambda T$ ve dolayısıyla $h' \mid N$ dir. Eğer $q_{h'} = e^{2\pi iz/h'}$ olmak üzere $(f[T]_k)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_{h'}^n$ ise $\mu_{h'} = e^{2\pi i/h'}$ birimin h'. kökü olmak üzere $e^{2\pi i(z+n')/h'} = \mu_{h'}^{n'} q_{h'}$ olduğundan

$$(f[TV]_k)(z) = (\pm 1)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_{h'}^{nn'} q_{h'}^n$$

olur. Dolayısıyla k sayısının tek olması halinde Fourier serisinin ilk katsayısının işareti önemlidir ve a_0 katsayısının 0 olup olmayışına göre bir uç form olabilir.

5.12 Örnek. Daha önce tanımlanmış olan

$$G_2(z) = \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{1}{(cz+d)^2}$$

Eisenstein serileri denklik alt gruplarına göre 2 ağırlıklı modüler formlardır. Bu seriler koşullu yakınsak olmalarına karşılık terimleri düzenlenebilir. 2 ağırlıklı Eisenstein serisi, $q = e^{2\pi iz}$ ve $\sigma(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d$ olmak üzere

$$G_2(z) = 2\zeta(2) - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) q^n$$

biçiminde ifade edilebilir ve $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ olmak üzere her $T \in \Gamma$ için

$$G_2([T]_2)(z) = G_2(z) - \frac{2\pi ic}{cz+d}$$

dir. Bu eşitliğin düzenlenmesiyle elde edilen $G_2(z) - \dfrac{\pi}{\mathrm{Im}(z)}$ fonksiyonu modüler grubunun etkisi altında 2 ağırlıklı değişmez olduğu halde analitik değildir. Diğer yandan herhangi pozitif N sayısı için eğer

$$G_{2,N}(z) = G_2(z) - NG_2(Nz)$$

ise $G_{2,N}(z) \in M_2(\Gamma_0(N))$ dir. 2 ağırlıklı Eisenstein serileri, daha önce söz edilen dört kare probleminin çözümünde oldukça önemli rollere sahiptirler,

$$G_{2,2}(z) = -\frac{\pi^2}{3}\left(1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0<d|n \\ d \text{ tek}}} d\right) q^n\right) \text{ ve } G_{2,4}(z) = -\pi^2\left(1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0<d|n \\ 4\nmid d}} d\right) q^n\right)$$

olarak tanımlanan 2 ağırlıklı Eisenstein serileri için $G_{2,2} \in M_2(\Gamma_0(2))$ ve $G_{2,4} \in M_2(\Gamma_0(4))$ dir. $M_2(\Gamma_0(4))$ uzayının boyutu 2 olduğundan lineer bağımsız gibi görünen $G_{2,2}$ ve $G_{2,4}$ serileri bir baz oluşturur. Diğer yandan $\theta(z, 4) \in M_2(\Gamma_0(4))$ olduğu da dikkate alınırsa $a, b \in \mathbb{C}$ için $\theta = aG_{2,2} + bG_{2,4}$ olarak yazılabilir. Eisenstein serileri ve θ fonksiyonu için

$$\theta(z, 4) = 1 + 8q + \dots ,$$

$$-\frac{3}{\pi^2} G_{2,2}(z) = 1 + 24q + \dots ,$$

$$-\frac{1}{\pi^2} G_{2,4}(z) = 1 + 8q + \dots ,$$

açılımları kullanılarak $\theta(z, 4) = -\frac{1}{\pi^2} G_{2,4}(z)$ olduğu görülür. Fourier katsayılarının eşitlenmesi ile, n negatif olmayan tam sayısı dört tane kare toplamı biçiminde yazılabiliyorsa, bu biçimdeki gösterimlerin sayısının $n \geq 1$ olmak üzere

$$r(n, 4) = 8 \sum_{\substack{0<d|n \\ 4\nmid d}} d$$

biçiminde olduğu sonucu elde edilir. Özel olarak $4 \nmid d$ ise $r(n, 4) = 8\sigma_1(n)$ dir. İki kare problemi, altı kare problemi ve sekiz kare problemi de bu probleme benzer biçimlerde çözülür. Herhangi $s \geq 10$ sayısı için aynı yöntem s kare problemi için $\widetilde{r}(n,s)$ asimptotik çözümünü verir. Bu durumda, $\lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{r}(n,s)}{r(n,s)} = 1$ dir.

Ağırlığı 2 olan Eisenstein serileri için bir diğer uygulama da 12 ağırlıklı Dedekind eta fonksiyonudur. G_2 serisinin

$$E_2(z) = \frac{G_2(z)}{2\zeta(2)} = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) q^n$$

normalleştirilmiş hali, $T(z) = \frac{-1}{z}$ dönüşümü için

$$z^{-2} E_2(-1/z) = E_2(z) - \frac{12}{2\pi i z}$$

biçiminde yazılabilir. $q = e^{2\pi i z}$ ve $q_{24} = e^{2\pi i z/24}$ olmak üzere olmak üzere

$$\eta(z) = q_{24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

biçiminde tanımlanan η fonksiyonuna ***Dedekind eta fonksiyonu*** denir. $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - q^n)$ serisi üst yarı düzlemin bir kompakt alt kümesi üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla η fonksiyonu $\mathcal{U}$ üzerinde analitiktir ve logaritmik diferensiyel eşitliğini gerçekler. Dedekind eta fonksiyonu, θ fonksiyonun gerçeklediği formüle benzer biçimde, $z \in \mathcal{U}$ için

$$\eta(-1/z)=\sqrt{-iz}\,\eta(z)$$

eşitliğini de gerçekler. $q = e^{2\pi iz}$ olmak üzere

$$\eta^{24}(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

fonksiyonu $V(z) = z + 1$ dönüşümü altında invaryant kalır ve $\eta^{24}(-1/z)=z^{12}\eta^{24}(z)$ dir. Bundan başka $\lim\limits_{\mathrm{Im}(z)\to\infty}\eta^{24}(z)=0$ olduğundan $\eta^{24} \in S_{12}(\Gamma)$ dir. Diğer yandan Δ fonksiyonunu da bulunduran bu uzay 1 boyutludur. Dolayısıyla

$$\eta^{24}(z)=q+\ldots,$$

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12}q + \ldots,$$

Fourier açılımlarının baş katsayıları karşılaştırılırsa

$$\Delta = (2\pi)^{12}\eta^{24}$$

veya

$$\left(60\sum_{(c,d)\neq(0,0)}\frac{1}{(cz+d)^4}\right)^3-27\left(140\sum_{(c,d)\neq(0,0)}\frac{1}{(cz+d)^6}\right)^2=(2\pi)^{12}q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

eşitlikleri elde edilir.

5.13 Modüler Formların Diferensiyeli. Modüler formlar için, Ramanujan operatörü de denen diferensiyel operatörü, Fourier açılımı üzerindeki etkisi yardımıyla

$$\theta = q\frac{d}{dq}=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}$$

olarak tanımlanır. İkinci eşitliğin q değişkeni yerine z değişkeninin alınmasıyla elde edildiği açıktır. Diferensiyel operatör kullanılarak,

$$\partial_k : M_k(\Gamma) \to M_{k+2}(\Gamma),\ \partial = \partial_k = 12\theta - k\cdot E_2$$

olarak tanımlanan ∂_k operatörüne de ***k* ağırlıklı diferensiyel operatör** denir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere ∂_k operatörü modüler formlar teoreminde önemli bir yere sahip bir operatördür.

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f \in M_k(\Gamma)$ ve $g = 12\theta(f) - k\cdot E_2 f$ olsun. $\theta(g)$ ve $E_2 g$ fonksiyonları sadece negatif olmayan Fourier katsayılarına sahiptir ve üstelik g, $\mathcal{U}$ üzerinde analitiktir. Bundan başka,

$$f\left(-\frac{1}{z}\right)=z^k f(z)$$

olduğundan bu eşitliğin her iki yanının z değişkenine göre türevi alınırsa

$$\frac{1}{z^2}f'\left(-\frac{1}{z}\right)=z^k f'(z)+kz^{k-1}f(z)$$

ve dolayısıyla

$$f'\left(-\frac{1}{z}\right)=z^{k+2}f'(z)+kz^{k+1}f(z)$$

eşitliği elde edilir. Bundan başka $z \to z+1$ için g fonksiyonunun Fourier katsayıları değişmediğinden g fonksiyonunun modülerliğini test etmek için $z \to -\frac{1}{z}$ dönüşümünü kullanmak yeterlidir.

$$\begin{aligned}
g\left(-\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2\pi i}f'\left(-\frac{1}{z}\right)-\frac{k}{12}E_2\left(-\frac{1}{z}\right)f\left(-\frac{1}{z}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}(z^{k+2}f'(z)+kz^{k+1}f(z))-\frac{k}{12}\left(E_2(z)z^2+\frac{12}{2\pi iz}z^2\right)z^k f(z)\\
&= z^{k+2}\left(\frac{1}{2\pi i}f'(z)-\frac{k}{12}E_2(z)f(z)\right)+\frac{1}{2\pi i}z^{k+1}(f(z)-f(z))\\
&= z^{k+2}\left(\frac{1}{2\pi i}f'(z)-\frac{k}{12}E_2(z)f(z)\right)\\
&= z^{k+2}g(z)\,.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $g \in M_{k+2}(\Gamma)$ dir. Bu ise $\partial_k(M_k(\Gamma)) \subset M_{k+2}(\Gamma)$ olduğunu gösterir. Bundan başka, ∂_k diferensiyel operatörünün bir uç formu yine bir uç forma resmettiği de görülebilir. Özel olarak,

$$\partial_4 E_4 = -4E_6$$

$$\partial_6 E_6 = -6E_8$$

ve

$$\partial_8 E_8 = -8E_{10}$$

dir. $M_4(\Gamma)$,$M_6(\Gamma)$ ve $M_8(\Gamma)$ vektör uzaylarının boyutları 1 olduğundan bu eşitliklerin gerçeklendiği açıktır.

Eğer f ve g, sırasıyla, k ve l ağırlıklı iki modüler fonksiyon ise

$$
\begin{aligned}
\partial_{k+l}(f\cdot g) &= 12\theta(f\cdot g) - (k+l)E_2\cdot f\cdot g \\
&= 12\theta(f)g - k\,E_2\cdot f\cdot g + 12\theta(g)f - lE_2\cdot f\cdot g \\
&= \partial_k(f)g + \partial_l(g)f
\end{aligned}
$$

yani, ∂_k operatörü modüler formlar üzerinde türev operatörü olarak hareket eder. Böylece, Γ için verilen özellikler, $\Lambda \subset \Gamma$ denklik alt grupları için de ifade edilebilir, yani $f \in M_k(\Lambda)$ ise $\partial_k(f) \in M_{k+2}(\Lambda)$ dir. Bununla birlikte f, $\Lambda \subset \Gamma$ denklik alt grubu için k ağırlıklı sabit olmayan bir modüler form ise $\theta(f)$ bir modüler form olamaz.

5.14 Modüler Vektör Uzaylarının Boyutları. Daha önceki kısımlarda modüler formların $\mathbb{C}$ üzerinde birer vektör uzayı olduğu belirtilmiştir. Bu kısımda, k ağırlıklı modüler formların oluşturduğu vektör uzayları, bu uzayların boyutları ve bazları ele alınacaktır. Her şeyden önce modüler formların vektör uzayları sonlu boyutludur. Boyutun sonlu olması verilen bazı modüler formları kullanarak yeni modüler formların oluşturulması açısından oldukça önemlidir. Modüler fonksiyonlar modüler formlara benzeseler de modüler fonksiyon uzayları sonlu boyutlu olmadıklarından yeni modüler fonksiyonlar oluşturmak çok kolay değildir (Bump 1997).

5.15 Teorem. $\Lambda \subset \Gamma$ bir denklik alt grubu ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $M_k(\Lambda)$ ve $S_k(\Lambda)$ sonlu boyutlu karmaşık vektör uzaylarıdır (Kilford 2008).

Bu teoremin ispatı üzerinde ayrıntılı olarak durulmayacaktır. Bununla birlikte, özellikle $M_k(\Gamma)$ ve $S_k(\Gamma)$ vektör uzaylarının özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir, ancak bu özellikleri sıralamadan önce vektör uzaylarının belirlenmesinde oldukça önemli bir role sahip olan bir teorem ele alacağız.

5.16 Teorem. f, Γ grubuna göre k ağırlıklı bir modüler form ve $P \in \mathcal{U}$ olsun. $v_P(f)$, P noktasındaki sıfırın mertebesi (veya kutbun mertebesinin negatifi) ve $v_\infty(f)$, f fonksiyonunun Fourier açılımındaki sıfırdan farklı olan ilk terimin indisi olmak üzere

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \sum_{\substack{P\in\mathcal{U}/\Gamma \\ P\neq i,\rho}} v_P(f) = \frac{k}{12} \tag{5.1}$$

dir.

Bu teoremin de ispatı üzerinde durulmayacaktır fakat teoremin ispatı için (Kilford 2008) ve (Koblitz 1993) kaynaklarına bakılabilir.

5.17 Uyarı 1. $M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$ dir. Hatırlanacağı gibi ağırlığı 0 olan modüler formlar sadece karmaşık sabit fonksiyonlardır.

2. $M_2(\Gamma) = \{\theta\}$ dir. (5.1) eşitliğinin $k = 0$ olması halinde çözümü yoktur.

3. $k < 0$ veya k tek ise $M_k(\Gamma) = \{\theta\}$dır. (5.1) eşitliğinin $k < 0$ olması halinde çözümünün olmadığı açıktır. Bundan başka, k sayısının tek olması halinde modüler form olmadığı daha önce bahsedilmiştir.

4. $k \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$ için (5.1) eşitliğinin bir tek çözümü vardır ve bu durumda, bilindiği üzere E_k, k ağırlıklı sıfırdan farklı bir modüler formdur. Eğer $f \in M_k(\Gamma)$ ise f/E_k, 0 ağırlıklı bir modüler formdur, dolayısıyla sabittir. Böylece $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f = c{\cdot}E_k$ biçiminde ifade edilebilir. O halde $k \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$ için $M_k(\Gamma) = \mathbb{C}E_k$ dır.

5. $k < 12$ veya $k = 14$ ise $S_k(\Gamma) = \{\theta\}$ ve $S_{12}(\Gamma) = \mathbb{C}\Delta$ dır. $k < 10$ veya $k = 14$ olması halinde (5.1) eşitliğinin çözümü yoktur, dolayısıyla k ağırlıklı bir uç form yoktur. $k = 12$ için (5.1) eşitliğinin bir tek çözümü vardır. Bu halde, $v_\infty(f) = 1$ ve $v_P(f) = 0$ olduğundan sadece Δ fonksiyonu 12 ağırlıklı bir uç formdur, yani $S_{12}(\Gamma) = \mathbb{C}\Delta$ dır.

6. $k \geq 16$ ise $S_k(\Gamma) = \Delta{\cdot}\, M_{k-12}(\Gamma)$ dir. $k = 12$ veya $k > 16$ olması halinde $f \in S_k(\Gamma)$ ise f fonksiyonunun ∞ noktasında mutlaka en az bir basit sıfırının olması gerekir. Ancak ∞ noktasında sıfırı olan tek modüler fonksiyon Δ fonksiyonu olduğundan f/Δ fonksiyonunun üst yarı düzlemde veya ∞ noktasında kutbu yoktur. Dolayısıyla f/Δ, ağırlığı $k - 12$ olan bir modüler formdur.

7. $k \geq 4$ ise $M_k(\Gamma) = S_k(\Gamma) \oplus \mathbb{C}E_k$ dır. $f \in M_k(\Gamma)$ olsun. Eğer f fonksiyonu bir uç form değil ise f fonksiyonunun ∞ noktasındaki Fourier açılımında sabit terim sıfırdan farklıdır, eğer bu sabit terim c olarak alınırsa $f - cE_k$ fonksiyonunun Fourier açılımındaki sabit terim sıfır olur ve dolayısıyla ∞ noktasında fonksiyon sıfır olur, yani $f - cE_k$ fonksiyonu bir uç formdur.

8. Yukarıdaki açıklamalar dikkate alındığında; k pozitif çift tamsayı olmak üzere

$$\text{Boy } M_k(\Gamma) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1, & k \not\equiv 2 \mod 12 \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor, & k \equiv 2 \mod 12 \end{cases}$$

ve

$$\text{Boy } S_k(\Gamma) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor, & k \not\equiv 2 \mod 12 \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor - 1, & k \equiv 2 \mod 12 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Daha önce belirtildiği gibi E_4 ve E_6 fonksiyonları oldukça önemli fonksiyonlardır, üstelik herhangi $f \in M_k(\Gamma)$ fonksiyonu $\alpha_{a,b} \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{N} \\ 4a+6b=k}} \alpha_{a,b} E_4(z)^a . E_6(z)^b$$

biçiminde yazılabilir, yani $E_4(z)$ ve $E_6(z)$ fonksiyonları $M_k(\Gamma)$ ve $S_k(\Gamma)$ vektör uzaylarının baz vektörleridir. Hatırlanacağı gibi $k \in \{0, 4, 6, 8, 10, 14\}$ için modüler form uzayının boyutu 1 dir, dolayısıyla $M_k(\Gamma)$ uzayını geren modüler formlar, sırasıyla,

$$1, E_4, E_6, E_4^2, E_4 \cdot E_6, E_4^2 E_6$$

dır ve dikkat edilirse bu fonksiyonlar E_4 ve E_6 fonksiyonlarının birer polinomudur. Eğer $k = 12$ ise baz $\{ E_4^3, E_6^2 \}$ dir.

$k \geq 16$ için durum benzerdir. Eğer $k' < k$ ise $M_{k'}(\Gamma)$ uzayının her bir elemanı E_4 ve E_6 fonksiyonlarının birer polinomu olarak yazılabilir. Bundan başka, $4a + 6b = k$ olacak biçimde a, $b \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $E_4^a E_6^b$, ağırlığı k ve sabit terimi 1 olan bir modüler formdur. f, sıfırdan farklı k ağırlıklı bir modüler form ise $f - c\,E_4^a E_6^b \in S_k(\Gamma)$ olacak biçimde bir $c \in \mathbb{C}$ bulunabilir. Böylece, Δ, 12 ağırlıklı normalize edilmiş uç form ve g, $k - 12$ ağırlıklı modüler form ise $f - c\,E_4^a E_6^b = \Delta \cdot g$ olarak yazılabilir. g, E_4 ve E_6 fonksiyonlarının bir polinomu ve $\Delta = (E_4^3 - E_6^2)/1728$ olduğundan f fonksiyonu da E_4 ve E_6 fonksiyonlarının bir polinomudur.

6. MODÜLER FORMLARIN UYGULAMALARI

Daha önce bahsedildiği gibi, k ağırlıklı normalleştirilmiş Eisenstein serileri

$$E_k(z) = \frac{G_k(z)}{2\zeta(k)}$$

biçiminde ifade edilir. Bu modüler formlar için

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

eşitliği gerçeklenir. Bu eşitlikte bahsi geçen B_k sayılarına ***Bernoulli sayıları*** denir ve bu sayılar

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k . \frac{z^k}{k!}$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Bernoulli sayılarının bazılarının

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}$$

olduğu kolayca görülebilir. Dikkat edilirse, $r \geq 1$ için $B_{2r+1} = 0$ dır.

Eğer bir p asal sayısı, herhangi bir Bernoulli sayısının payını bölmüyorsa bu özellikteki p asal sayısına ***düzenli asal sayı*** denir. Düzenli asal sayılar, Ernst Krummer tarafından Fermat'ın son teoreminin bu özellikteki p üsleri için doğruluğunu göstermek için tanımlanmıştır. Düzenli asal sayıların sonsuz çoklukta olup olmadığı henüz bilmese de sonsuz çoklukta düzensiz asal sayının olduğu bilinmektedir (Jensen 1915). Yapılan deneysel ve sezgisel yaklaşımlar sonucunda asal sayıların yaklaşık %61 kadarının düzenli olduğu görülmüştür ve 100 sayısından küçük düzensiz asal sayılar da 37, 59 ve 67 sayılarıdır.

6.1 Modüler Fonksiyonlar

Hatırlanacağı gibi, bir f fonksiyonunun bir modüler form olması için gerçeklemesi gereken üç koşul vardır: Γ grubu etkisi altında hareket etmelidir, fonksiyon ∞ noktasında ve Γ grubunun diğer uç noktalarında analitik olmalıdır ve son olarak fonksiyon üst yarı düzlem üzerinde analitik olmalıdır. Bu tanıma bağlı olarak aklımıza bu üç koşuldan herhangi birinin atlanması durumunda ne olacağı sorusu gelebilir. Örneğin, f fonksiyonunun ∞ noktasında analitik olması koşulu kaldırılsaydı ne olurdu? Bilindiği gibi, $g \neq 0$ olmak üzere f ve g fonksiyonları k ağırlıklı modüler formlar ise f/g fonksiyonu da 0 ağırlıklı bir modüler formdur. Başka bir ifadeyle, eğer g fonksiyonunun bir z_0 noktasında n katlı bir sıfır yeri varsa ve f fonksiyonu da z_0 noktasında en az n katlı bir sıfır yerine sahipse f/g fonksiyonu bir modüler formdur.

Hatırlanacağı gibi, $k \in \mathbb{Z}$ ve Λ bir denklik alt grubu olmak üzere $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ meromorf fonksiyonu Λ grubu için k ağırlıklı zayıf modüler ise f fonksiyonuna Λ grubu için k ağırlıklı modüler fonksiyon denmişti. Eğer f fonksiyonu sıfırdan farklı bir k ağırlıklı modüler form ise $1/f$ fonksiyonu da bir $-k$ ağırlıklı modüler fonksiyondur.

0 ağırlıklı modüler fonksiyonlar için klasik bir örnek olarak

$$j(z) = \frac{E_4(z)^3}{\Delta(z)} = q^{-1} + 744 + 196884q + \dots$$

biçiminde tanımlanmış olan modüler j-invaryant fonksiyonu verilebilir. Bu fonksiyon üst yarı düzlemde analitiktir ve j fonksiyonunun pay ve paydası aynı ağırlıkta olduğundan j fonksiyonu Γ grubunun etkisi altında invaryant kalır. Ancak, Δ fonksiyonunun sıfır yerinde, yani ∞ noktasında da basit kutup yerine sahip olduğundan bir modüler form değildir. Bu sonuca boyut formülleri kullanılarak da ulaşılabilir. Hatırlanacak olursa, Γ modüler grubu için tanımlı 0 ağırlıklı modüler formlar sabit fonksiyonlardır, yani $M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$ dir. j fonksiyonu sabit olmadığından bir modüler form değildir.

j-invaryant fonksiyonunun herhangi bir kuvveti de bir 0 ağırlıklı modüler fonksiyondur. Yani, 0 ağırlıklı modüler fonksiyonlar halkası, sonsuz boyutlu bir kompleks vektör uzayı belirtir. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere k ağırlıklı modüler formlar uzayının sonlu boyutlu olduğu düşünüldüğünde 0 ağırlıklı modüler fonksiyonlar uzayı üzerinde yapılacak çalışmalar açısından oldukça farklı bir örnektir.

Aşağıdaki teoremde Γ grubuna göre her bir 0 ağırlıklı modüler fonksiyonun j fonksiyonunun bir rasyonel fonksiyon olduğu ifade edilmektedir.

6.1.1 Teorem. Γ grubuna göre 0 ağırlıklı modüler fonksiyonlar j fonksiyonunun rasyonel fonksiyonlarıdır (Kilford 2008).

Hatırlanacağı gibi E_4^3/Δ ve E_6^2/Δ fonksiyonları j fonksiyonunun rasyonel fonksiyonlarıdır ve üstelik her bir 0 ağırlıklı modüler fonksiyon bu fonksiyonlar ile ifade edilebilir. Daha genel olarak, eğer g fonksiyonu Γ grubuna göre, üst yarı düzlemde kutbu olmayan ve ∞ noktasında r mertebeli bir kutba sahip 0 ağırlıklı bir modüler fonksiyon ise g fonksiyonu j-invaryant fonksiyonuna bağlı olarak r dereceli bir polinom olarak yazılabilir.

Modüler grup yerine temel denklik alt grubunun alınması halinde yukarıdaki teorem aşağıdaki hali alır.

6.1.2 Teorem. $N \in \mathbb{N}$ ve f, $\Gamma_0(N)$ denklik grubuna göre 0 ağırlıklı bir modüler fonksiyon ise f fonksiyonu, $j(z)$ ve $j(Nz)$ fonksiyonlarının bir rasyonel fonksiyonudur (Kilford 2008).

6.2 η-Çarpım ve η-Bölüm

Bu kısma kadar Fourier açılımları sonsuz toplamlar olarak ele alındı. Ancak, modüler formların Fourier açılımları sonsuz çarpımlar olarak da yazılabilir. Hatırlanacağı gibi η Dedekind eta fonksiyonu, $q = e^{2\pi i z}$ olmak üzere

$$\eta : \mathcal{U} \to \mathbb{C},\ \eta(z) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

biçiminde tanımlanmıştı. η fonksiyonu için değişken olarak, z veya q değişkenleri kullanılabilir. η fonksiyonu üst yarı düzlem üzerinde analitiktir ve üst yarı düzlemde sıfırları yoktur. Dolayısıyla, herhangi bir $\Gamma_1(N)$ alt grubu için modüler form değildir, ancak birazdan tanımlanacak olan η-çarpımlar ve η-bölümler kullanılarak yeni modüler formlar oluşturulur.

6.2.1 Tanım. $N \in \mathbb{N}$ ve $\{r_\delta\}$, bir tamsayı kümesi olmak üzere

$$f : \mathcal{U} \to \mathbb{C},\ f(z) = \prod_{0<\delta|N} \eta(q^\delta)^{r_\delta}$$

biçiminde tanımlanan f meromorf fonksiyonuna ***η-bölüm fonksiyonu***, eğer tüm r_δ sayıları negatif değil ise f fonksiyonuna ***η-çarpım fonksiyonu*** denir.

Aşağıdaki teoremler dikkate alındığında η-bölüm ve η-çarpım fonksiyonlarının gerçekte özel birer modüler form oldukları sonucu elde edilir.

6.2.2 Teorem. $z \in \mathcal{U}$ ve $q = e^{2\pi iz}$ olmak üzere

$$\Delta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = \eta^{24}(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}$$

dir. Bundan başka $z \in \mathcal{U}$ için η fonksiyonu

$$\eta(-1/z) = \sqrt{-iz}\,\eta(z)$$

eşitliğini gerçekler (Kilford 2008).

ε, $\varepsilon^{24} = 1$ özelliğinde bir sayı olmak üzere herhangi $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ için

$$\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon \cdot (cz+d)^{1/2}\, \eta(z)$$

eşitliği gerçeklenir. Bu eşitliğin herhangi γ matrisi yerine modüler grubun üreteçleri için gerçeklendiğini göstermek hem daha kolaydır hem de yeterlidir (Miyake 2006).

Bazı modüler form uzayları 1 boyutludur ve bu vektör uzayalar η-çarpımlar tarafından gerilirler. Bu modüler formların katsayıları tam sayıdır ve üstelik çarpımsaldır. Hatırlanacağı gibi, daha önce bahsedilen Δ modüler formu bu özelliktedir.

6.2.3 Teorem. $k, N \in \mathbb{N}$ sayıları $k(N+1) = 24$ özelliğindeki sayılar ve $\left(\frac{\cdot}{N}\right)$ Legendre sembolü olmak üzere

i. $k \neq 1, 3$ ise $(\eta(q) \cdot \eta(q^N))^k \in S_k(\Gamma_0(N))$ ve

ii. $k = 1$ veya $k = 3$ ise $(\eta(q) \cdot \eta(q^N))^k \in S_k(\Gamma_0(N), \left(\frac{\cdot}{N}\right))$

dir (Kilford 2008).

Bu teorem dikkate alındığında $S_3(\Gamma_0(7))$ uzayındaki sıfırdan farklı her bir modüler formun $(\eta(q)\cdot\eta(q^7))^3$ formunun bir sabit sayıyla çarpımı olduğu sonucu elde edilir. Diğer yandan formun ağırlığı tek ve üstelik $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(7)$ olduğundan $S_3(\Gamma_0(7))$ uzayı 0 boyutludur. Dolayısıyla teoremde bahsedilen özellikteki modüler form uzayları 1 boyutludur ve bu uzayların her bir elemanı $(\eta(q)\cdot\eta(q^N))^k$ formunun bir lineer katıdır. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

6.2.4 Teorem. $N \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$ ve $k = \frac{N}{12}$ olsun. Bu durumda,

$$S_k(\Gamma(N)) = \mathbb{C} \cdot \Delta(z)^{1/N}$$

dir (Shimura 1994).

Bu modüler formlar, $\Gamma(N)$ denklik alt grubuna göre birer modüler form oldukları halde herhangi M tamsayısı için $\Gamma_1(M)$ alt grubuna göre bir modüler form değillerdir, bu özellikleri nedeniyle bu formlar oldukça önemli modüler formlardır.

6.3 *J*-İnvaryant Fonksiyonunun Aritmetik Özellikleri

Bu kısımda η fonksiyonunu kullanılarak, 0 ağırlıklı bir modüler fonksiyon olan j-invaryant fonksiyonun aritmetik özellikleri üzerinde durulacaktır. Öncellikle, j fonksiyonu modüler gruba göre 0 ağırlıklı bir modüler fonksiyon olduğundan her $z \in \mathcal{U}$ için

$$j(z + 1) = j(z) \text{ ve } j(-1/z) = j(z)$$

eşitlikleri gerçeklenir. Fonksiyonun ağırlığı 0 olduğundan $cz + d$ çarpanının olmayacağı açıktır. j-invaryant fonksiyonun $c(n)$ Fourier katsayıları

$$j(q) = \frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n$$

$$= \frac{1}{q} + 744 + 196883q + 21493760q^2 + \ldots$$

eşitlikleriyle tanımlanır ve $j(z) = \dfrac{E_4(z)^3}{\Delta(z)}$ olduğu kullanılarak $c(n)$ değerleri hesaplanır ise bu değerlerin birer tam sayı olduğu görülür. O halde j-invaryant fonksiyonunun Fourier katsayıları birer tam sayıdır.

j-invaryant fonksiyonunun Fourier katsayıları oldukça önemli aritmetik özelliklere sahiptir. α, pozitif bir tam sayı olmak üzere, Lehner tarafından bu katsayıların

$$c(2^{\alpha}n) \equiv 0 \mod 2^{3\alpha + 8}$$

$$c(3^{\alpha}n) \equiv 0 \mod 3^{2\alpha + 3}$$

$$c(5^{\alpha}n) \equiv 0 \mod 5^{\alpha + 1}$$

$$c(7^{\alpha}n) \equiv 0 \mod 7^{\alpha}$$

$$c(11^{\alpha}n) \equiv 0 \mod 11^{\alpha}$$

denklikleri gerçeklediği gösterilmiştir (Lehner 1949) ve benzer şekilde, $n \geq 1$ olmak üzere

$$(n + 1)c(n) \equiv 0 \mod 24$$

olduğu ispatlanmıştır (Lehmer 1947). Özel olarak 13 asal sayısı için ise

$$c(13np) + c(13n)\cdot c(13p) + p^{-1}c\left(\frac{13n}{p}\right) \equiv 0 \mod 13$$

denkliği gerçeklenir (Newman 1958).

$$c(13) \not\equiv 0 \mod 13 \text{ ve } c(13^2) \not\equiv 0 \mod 13$$

olduğundan 13 asal sayısının denklikleri benzer asal sayılar için olduğundan oldukça farklıdır. $\alpha = 1$ olması halinde modüler j fonksiyonu, η fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilir.

6.3.1 Teorem. $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$, $s = \dfrac{24}{p-1}$ ve $\Phi(q) = \left(\dfrac{(n(q^p)}{n(q)}\right)^s$ olmak üzere

$$j_p(q) = \sum_{n=1}^{\infty} c(pn)q^n = p^{s/2-1} \cdot (a_1\Phi(q) + ... + a_{p^2}\Phi(q)^{p^2})$$

eşitliğini gerçekleyen a_1, …, a_{p^2} tam sayıları vardır (Kilford 2008).

Dikkat edilirse, yukarıdaki teoremdeki p asalları $S_2(\Gamma_0(p)) = \{\theta\}$ özelliğindeki sayılardır. $p = 13$ için teoremdeki $s/2 - 1$ kuvvetinin 0 olduğu açıktır. Dolayısıyla, $p = 13$ için bu formül yardımıyla elde edilen bir aşikar olmayan denklik yoktur. $c(n)$ katsayıları tam olarak hesaplanabilirse, bu katsayıların hızla büyüdükleri görülür. Bu katsayıların hesaplanabilmesi için

$$c(n) \approx \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{3/4}}$$

yaklaşımı verilebilir (Petersson 1932).

6.4 λ(z) Modüler Fonksiyonu

Bu kısımda, bir başka modüler fonksiyon örneği olan $\lambda(z)$ fonksiyonu tanımlanacak, bu fonksiyonun π sayısının basamak değerlerinin hesaplanmasındaki rolüne değinilecektir.

$$\lambda(z) = \left(\frac{\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{((n+1)/2)^2}}{\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{n^2}}\right)^8$$

biçiminde tanımlanan $\lambda(z)$ fonksiyonu $\Gamma(2)$ grubuna göre bir 0 ağırlıklı modüler formdur ve üstelik

$$\lambda(q) = \left(\frac{\eta(\sqrt{q})\eta(q^2)^2}{\eta(q)^3}\right)^3$$

η-bölüm açılımına sahiptir. Bundan başka λ fonksiyonu ile modüler j-invaryant fonksiyonu arasında

$$j(q) = 256 \cdot \frac{(1-\lambda(q)+\lambda(q)^2)^3}{\lambda(q)^2.(1-\lambda(q))^2}$$

eşitliğiyle gösterilen bir ilişki vardır.

Matematikçiler için π sayısının ondalık kısmının hesaplanması uzun yıllarca bir amaç olmuştur. MÖ 3. yüzyılda Arşimet, bir çemberi kapsayan ve bir çember tarafından kapsanan çokgenlerden yola çıkarak, π sayısı için

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

sınırını bulmuştur. Bu buluştan yıllar sonra, MS 17. yüzyılda ise yaklaşık 2^{60} kenarlı çokgenlerden yola çıkan Ludolph van Ceulen, π sayısını 34 basamağa kadar hesaplamıştır. Bu nedenle, ölümünün ardından Almanya'da π sayısı, uzun bir süre boyunca Ludolph sayısı olarak adlandırılırmıştır. Gregory tarafından öne sürülen

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

formülü, basit görünümüne rağmen *n*. terimden sonraki hata payı $1/(2n)$ sayısından daha büyük olduğu için π sayısının ilk iki ondalık basamağının dahi doğru hesaplanmasını sağlayamamıştır. Daha sonraki yıllarda, trigonometrik seri açılımlarını kullanan Machin,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan(1) - \arctan(\frac{1}{239})$$

formülüne ulaşmıştır. Bu formülü kullanan Shanks, π sayısını el yordamıyla 707. basamağa kadar hesaplamasına rağmen 1940 yılında bu hesaplamada sayının 527. basamağında bir hata yapıldığı ve dolayısıyla, ardından gelen tüm basamakların hatalı olduğu fark edildi (Shanks 1993). Son olarak, Borwein tarafından λ fonksiyonunun özellikleri kullanılarak aşağıdaki algoritma verilmiştir.

6.4.1 Borwein[2] ve Blain Algoritması. $\alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2}$ ve $y_0 = \sqrt{2} - 1$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_{n+1} = \frac{1 - (1 - y_n^4)^{1/4}}{1 + (1 - y_n^4)^{1/4}},$$

$$\alpha_{n+1} = (1 + y_{n+1})^4 \alpha_n - 2^{2n+3} y_{n+1}(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2)$$

olmak üzere

$$0 < \alpha_n - \frac{1}{\pi} < 16 \cdot 4^n e^{-2 \cdot 4^n \pi}$$

dir ve α_n, $1/\pi$ değerine kuadratik yakınsar. Diğer bir deyişle, her bir tekrarlama, doğru ondalık basamak değerini dört katına çıkarır (Borwein ve ark. 1987).

KAYNAKLAR

Apostol, T. M. 1976. Modular functions and Dirichlet series in number theory. Springer, New York, USA, 216 pp.

Armitage, J. V., Eberlein, W. F. 2006. Elliptic functions, London Mathematical Society Student Texts, Vol. 67. Cambridge University Press, Cambridge.

Borwein, J. M., Borwein, P. B., Bailey, D. H. 1987. Ramanujan, modular equations and approximations to pi or how to compute one billion digits of pi. *The American Mathematical Monthly*, 96(3): 201-219.

Bump, D. 1997. Automorphic forms and representations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 55. Cambridge University Press, Cambridge.

Diamond, F., Shurman, J. 2005. A first course in modular forms. Springer-Verlag, New York, USA, 447 pp.

Jensen, K. L. 1915. Om talteoretiske Egenskaber ved de Bernoulliske Tal. *Nyt Tidsskr. for Math.*, 26: 73–83.

Kilford, L. J. P. 2008. Modular forms, a classical and computational introduction. Imperial College Press, USA, 237 pp.

Koblitz, N. 1993. Introduction to elliptic curves and modular forms. Springer, New York, USA, 258 pp.

Lang, S. 1976. Introduction to modular forms. Springer, Berlin, Germany, 260 pp.

Lehmer, D. H. 1947. The vanishing of Ramanujan's function $\tau(n)$, *Duke Math. J.* 14: 429–433.

Lehner, J. 1949. Divisibility properties of the Fourier coefficients of the modular invariant $j(z)$. *Am. J. Math.*, 71: 136–148.

Miyake, T. 2006. Modular forms. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, Germany, 345 pp.

Newman, M. 1958. Congruences for the coefficients of modular forms and for the coefficients of $j(\tau)$. *Proc. Amer. Math. Soc*. 9: 609–612.

Petersson, H. 1932. Uber die Entwicklungskoeffizienten der automorphen formen. *Acta Mathematica.* 58: 169–215.

Shanks, D. 1993. Solved and unsolved problems in number theory. New York, USA, 305 pp.

Shimura, G. 1994. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Publications of the Mathematical Society of Japan, Vol. 11. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.

Shimura, G. 2002. The representation of integers as sums of squares. *Amer. J. Math.*, 124(5):1059–1081.

Singerman, D., Jones G. A. 1987. Complex functions, an algebraic and geometric viewpoint. Cambridge Unversity Press, Cambridge, 339 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Meryem BEKLER
Doğum Yeri ve Tarihi	: Kırcali/Bulgaristan, 18.04.1990
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Bursa Erkek Lisesi 2004-2008
Lisans	: Uludağ Üniversitesi 2008-2012
Yüksek Lisans	: U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü 2014-2016
Çalıştığı Kurum ve Yıl	:
İletişim	: meryem.bekler@hotmail.com
Yayınları	: